Filtros FIR de ventana

- Excelente comportamiento como pasabajos. Útiles para separar bandas de frecuencia.

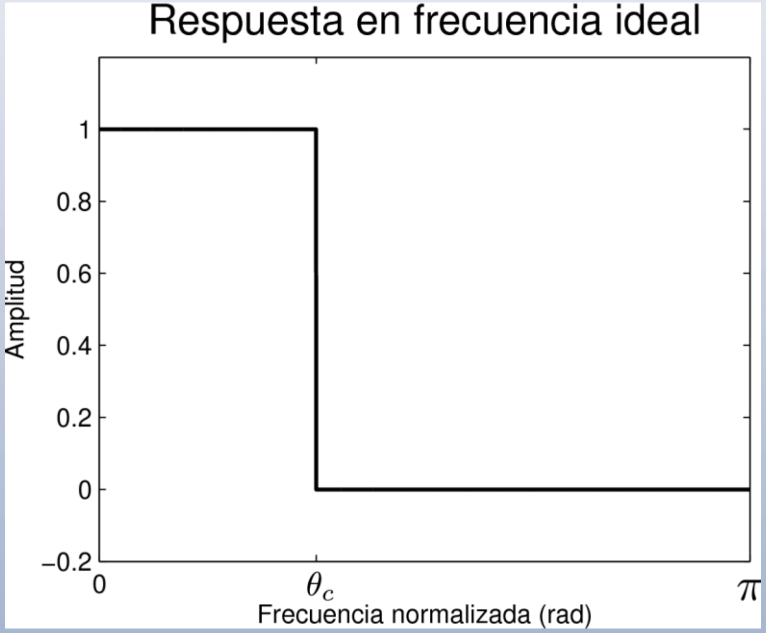
- Se pueden llevar a límites de desempeño muy altos

- Compromiso entre la velocidad de ejecución y buenas características como pasabajos.

Motivación sinc-enventanado

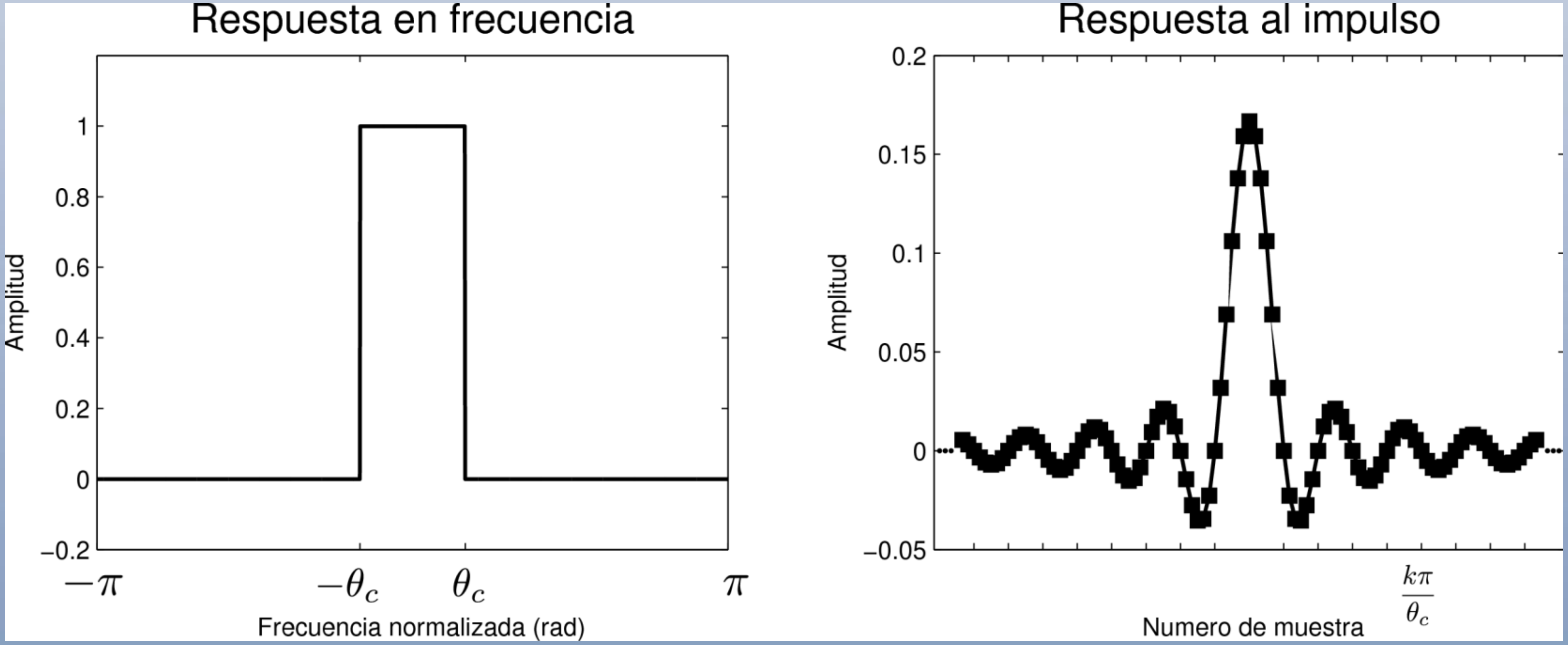
Pasabajos ideal

- La banda pasante tiene ganancia 1 y es perfectamente plana.
- La banda atenuada tiene atenuación infinita (ganancia 0).
- El ancho de la banda de transición es 0.



El método consiste en obtener la respuesta al impulso del pasabajos aplicando la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT) inversa a la respuesta en frecuencia del pasabajos ideal.

$$H_{ideal}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\theta| \leq \theta_c \\ 0 & \text{si } \theta_c < |\theta| \leq \pi \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{DTFT Inversa}} \quad h_{ideal}[n] = \frac{\text{sen}(\theta_c n)}{\pi n}$$



Observaciones

- La respuesta al impulso ideal es una función *sinc*.

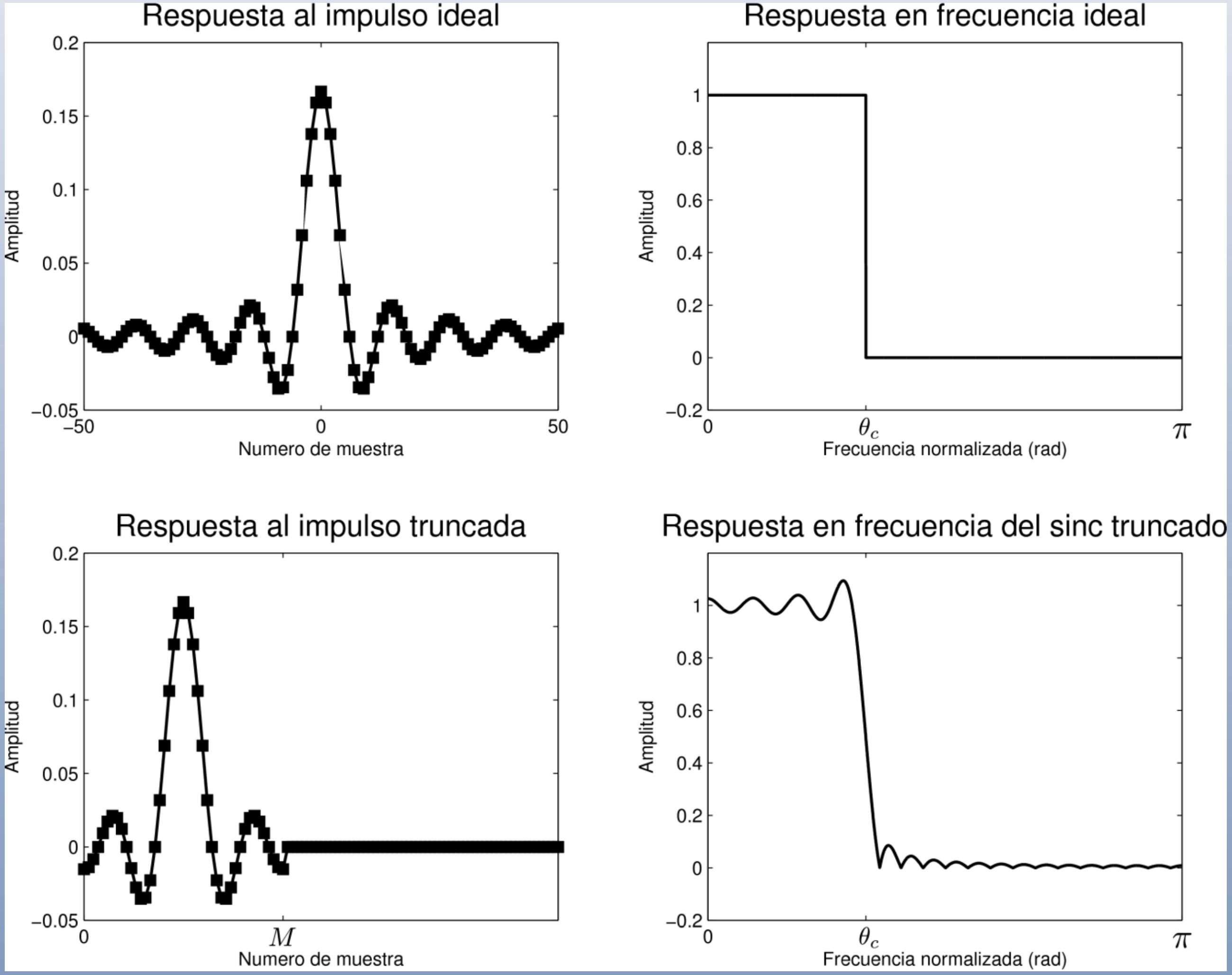
Posee infinitas muestras no nulas hacia ambos lados. Es un filtro irrealizable.

Modificaciones al sinc ideal para hacerlo realizable

- **Truncamiento**: se trunca a *M+1* muestras, elegidas simétricamente alrededor del lubulo principal, con *M* par. De esta forma, es un filtro FIR y se puede implementar mediante el producto convolución.

- **Desplazamiento**: Se desplaza la secuencia entera a la derecha de forma que abarque desde la muestra *0* hasta la *M*. El filtro se hace causal.

Respuesta en frecuencia del sinc-truncado

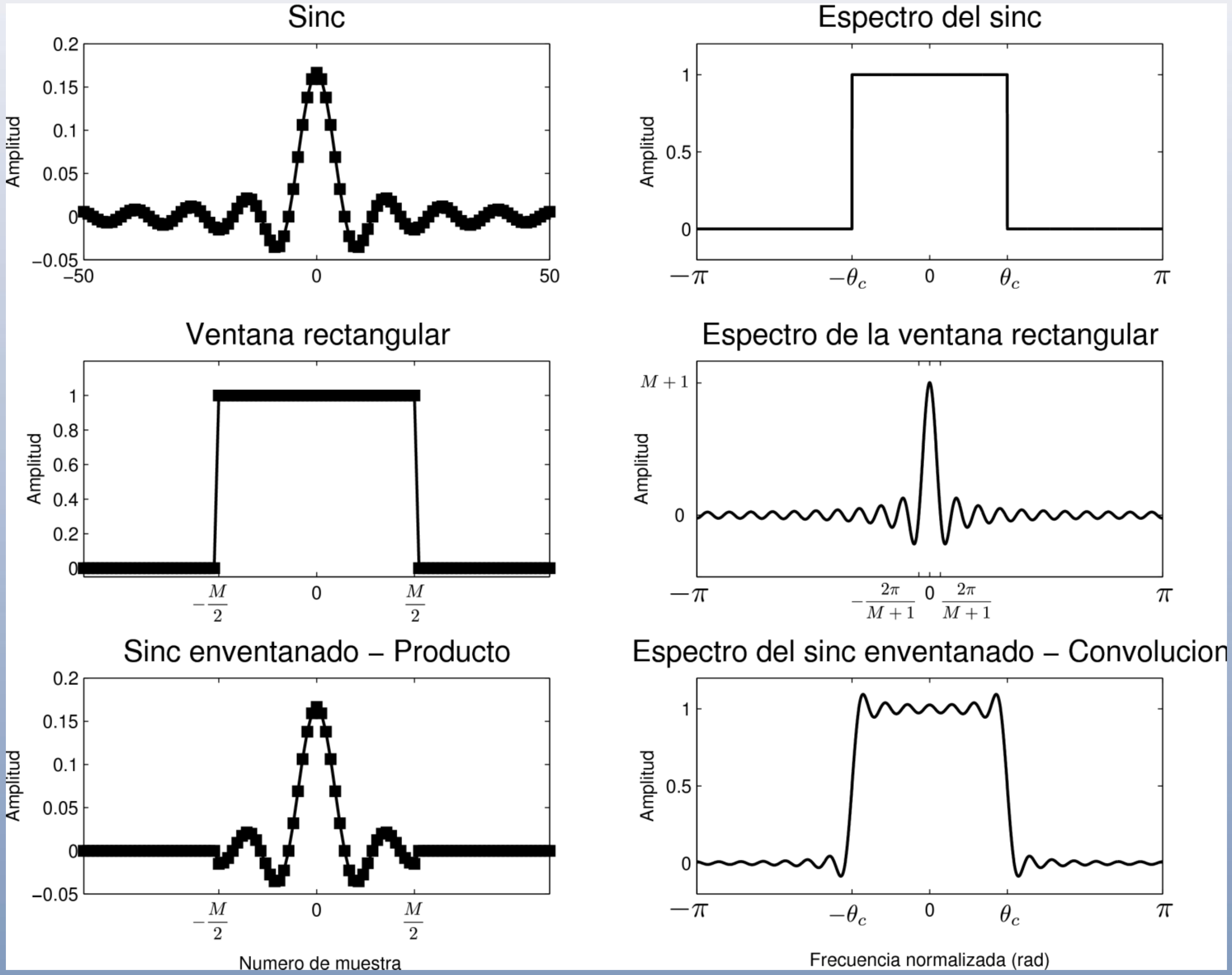


Observaciones

- Se comporta como un pasabajos
- Presenta ripple en la banda pasante
- pobre atenuación en la banda atenuada

Estos problemas son causados por la abrupta discontinuidad en el final del sinc truncado

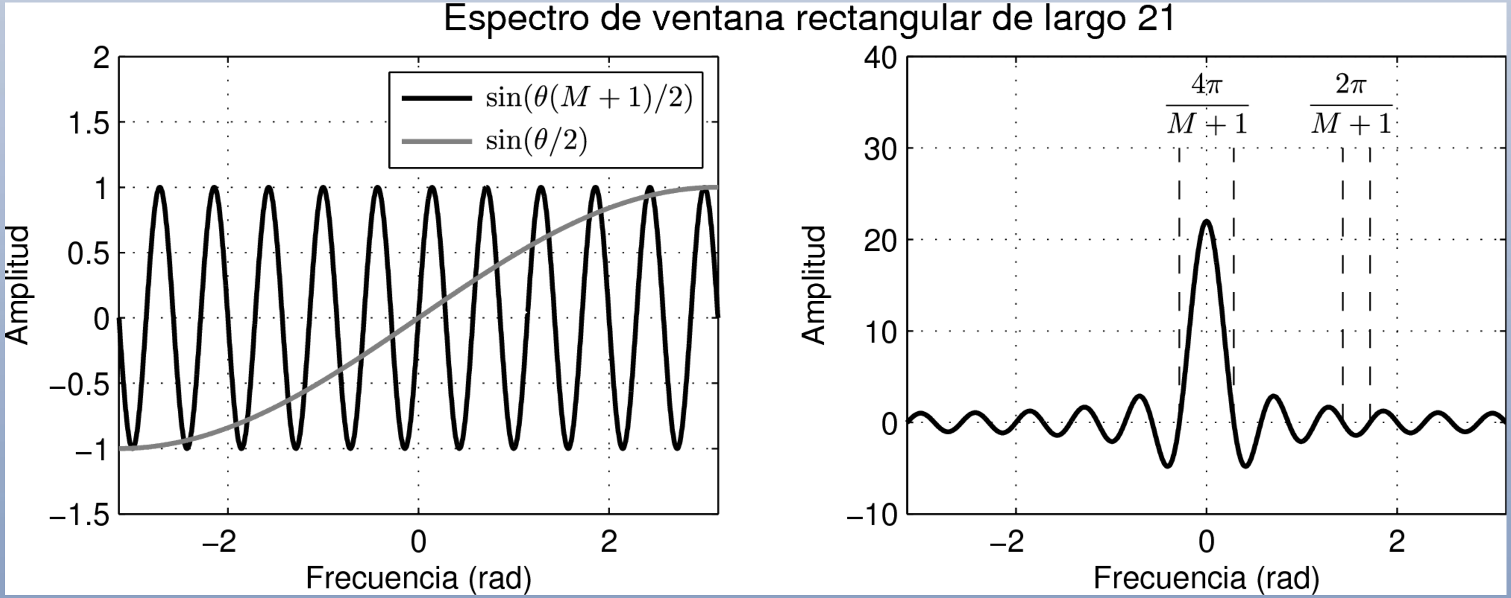
La forma de analizar el resultado es pensando en que el trucamiento equivale a multiplicar la señal en el tiempo con una ventana rectangular El espectro del pasabajos ideal queda convolucionado por la transformada de una ventana rectangular de largo $M+1$.



Sinc
Espectro del sinc
Ventana rectangular
Espectro de la ventana rectangular
Sinc enventanado – Producto
Espectro del sinc enventanado – Convolucion
Amplitud
Numero de muestra
Frecuencia normalizada (rad)
$-\pi$ $-\theta_c$ 0 θ_c π
$-\frac{M}{2}$ 0 $\frac{M}{2}$
$M+1$
$-\frac{2\pi}{M+1}$ 0 $\frac{2\pi}{M+1}$

Espectro de ventana rectangular

$$h_{rect}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{M}{2} \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{DTFT}} \quad H_{rect}(\theta) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta(M+1)}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Espectro de ventana rectangular

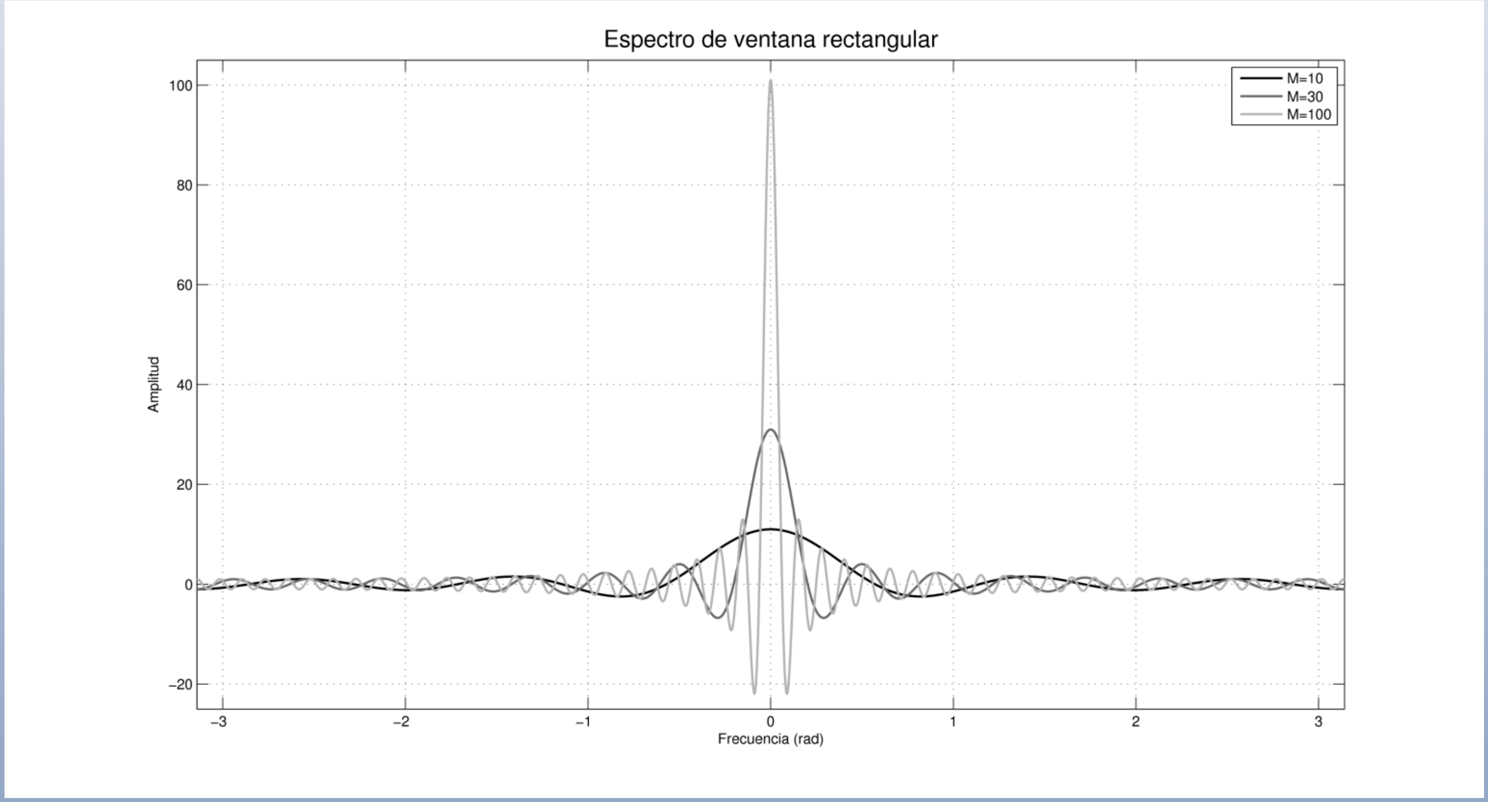
Características

El ancho de banda (ancho del lóbulo principal):

$$\Delta\theta_{princ} = \frac{4\pi}{M+1}$$

Es inversamente proporcional a M. Se hace mas angosto al incrementar M.

- La oscilaciones (ripple) son mas rápidas al incrementar M.
- El área del lóbulo principal y de los lóbulos secundarios se mantiene aproximadamente constante al cambiar M.
- La amplitud de las oscilaciones decrece con la frecuencia pero es independiente de M.
- Es una función simétrica.



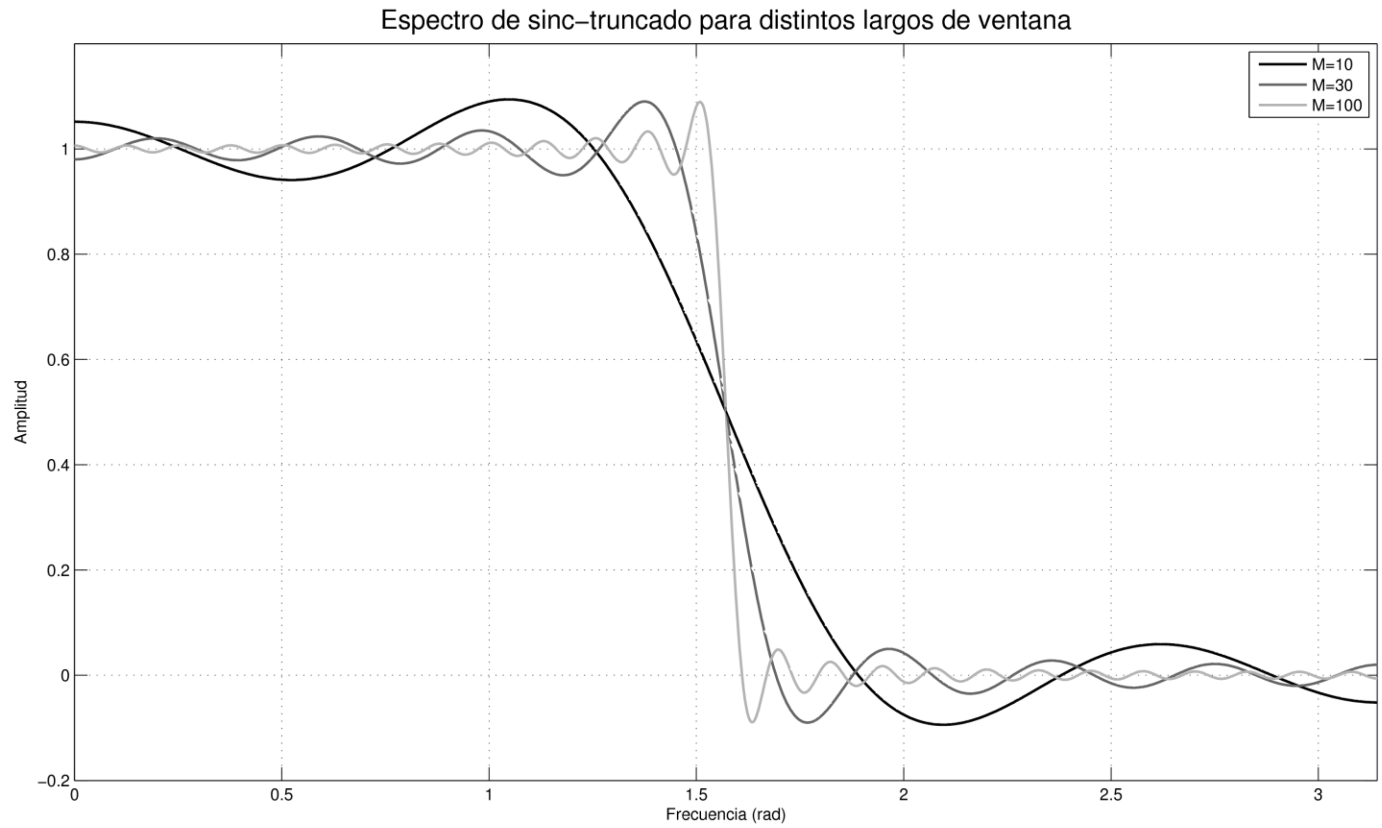
Espectro de ventana rectangular
M=10
M=30
M=100
100
80
60
40
20
0
−20
Amplitud
−3
−2
−1
0
1
2
3
Frecuencia (rad)

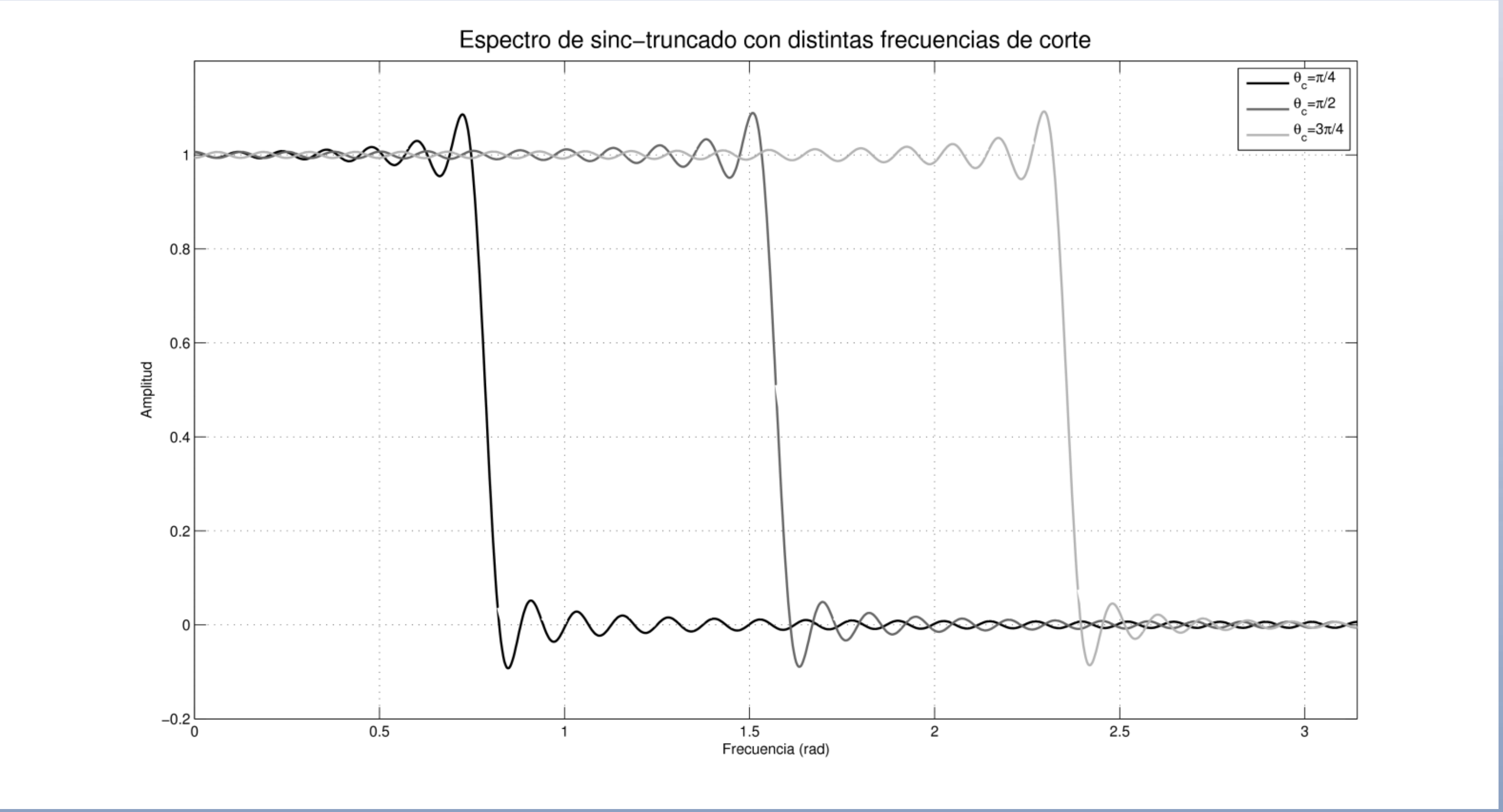
Características del pasabajos en función de M

- **Roll-off**: es directamente proporcional al ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana rectangular. Por lo tanto, el roll-off es mas rápido al incrementar el largo de la ventana M.

- **Período del ripple**: coincide con el período de las oscilaciones del espectro de la ventana. Por lo tanto, el ripple es mas rápido al incrementar el largo de la ventana.

- **Amplitud del ripple**: depende del área de los lóbulos secundarios. Por lo tanto, la atenuación en la banda atenuada y el ripple en la banda pasante es independiente del largo de la ventana M.
- Es simétrica respecto a la frecuencia de corte. El ripple en la banda atenuada es igual al de la banda pasante.
- Las características de la respuesta en frecuencia (roll-off, ripple) no dependen de la frecuencia de corte.


Espectro de sinc−truncado para distintos largos de ventana
M=10
M=30
M=100
Amplitud
Frecuencia (rad)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

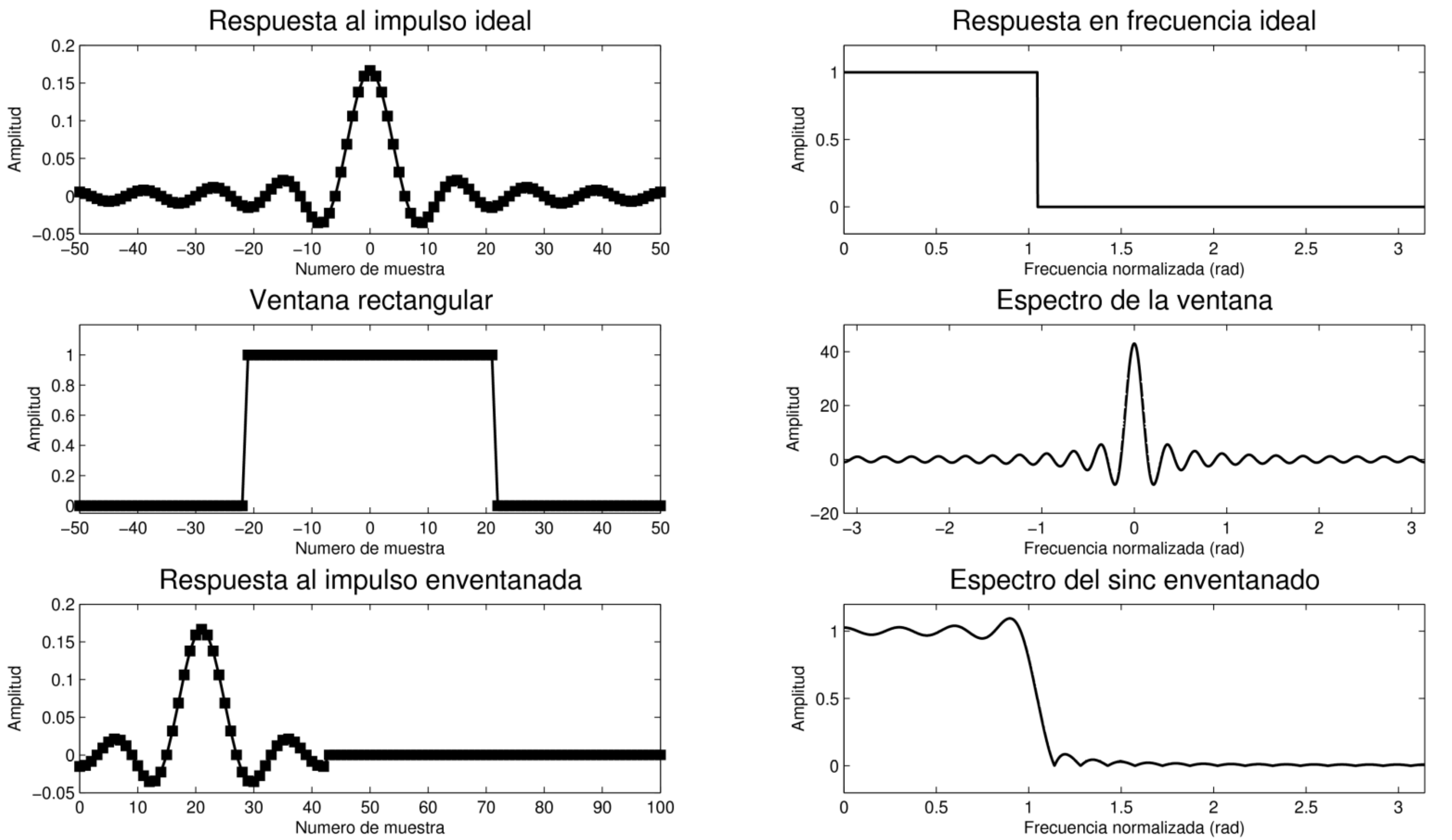

Espectro de sinc−truncado con distintas frecuencias de corte
θc=π/4
θc=π/2
θc=3π/4
Amplitud
Frecuencia (rad)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Limitantes del sinc truncado como pasabajos

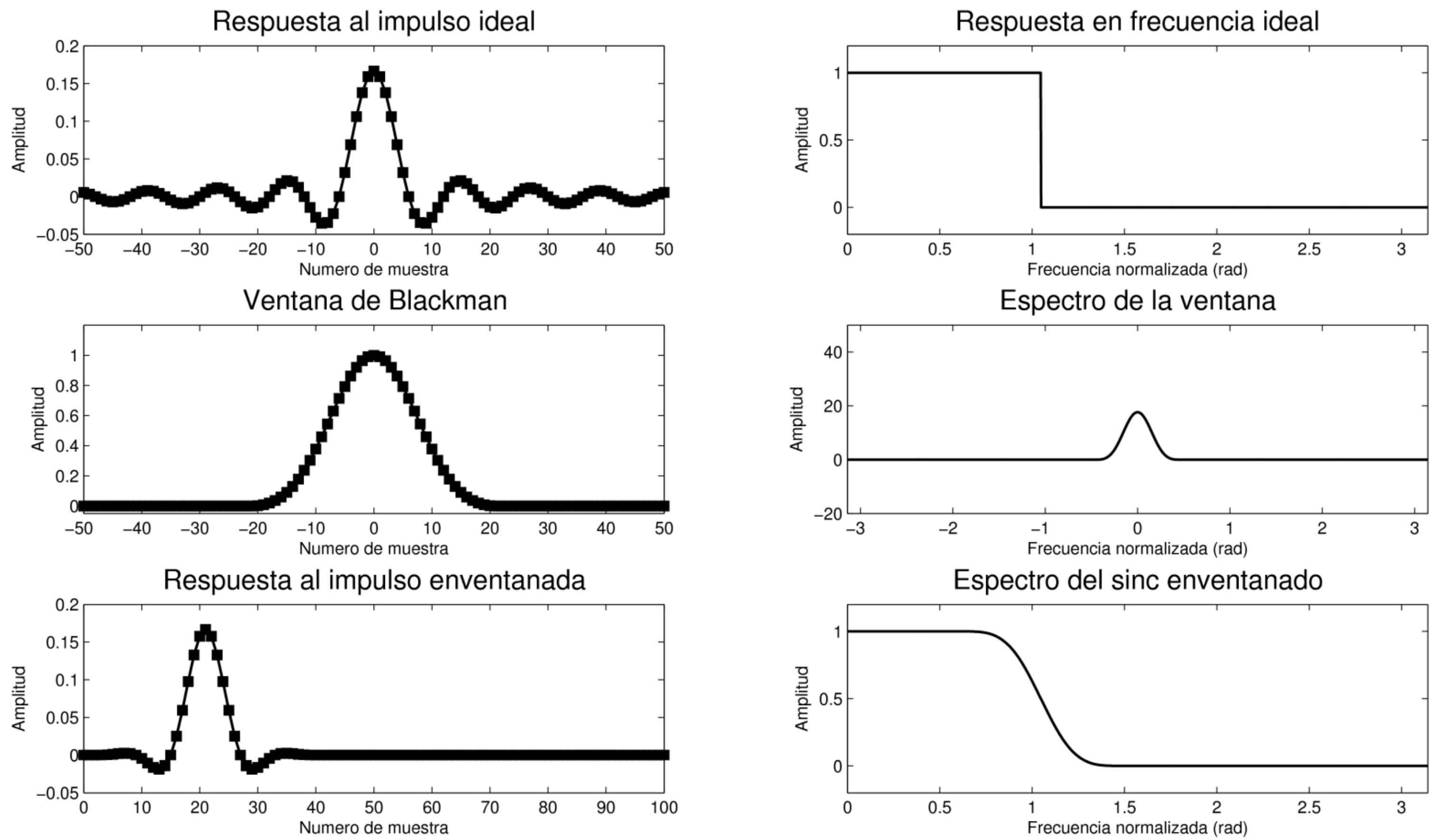
Ripple: La amplitud del ripple depende del área de los lóbulos secundarios del espectro de la ventana rectangular. Es independiente del largo de ventana *M* asi que no se puede controlar.

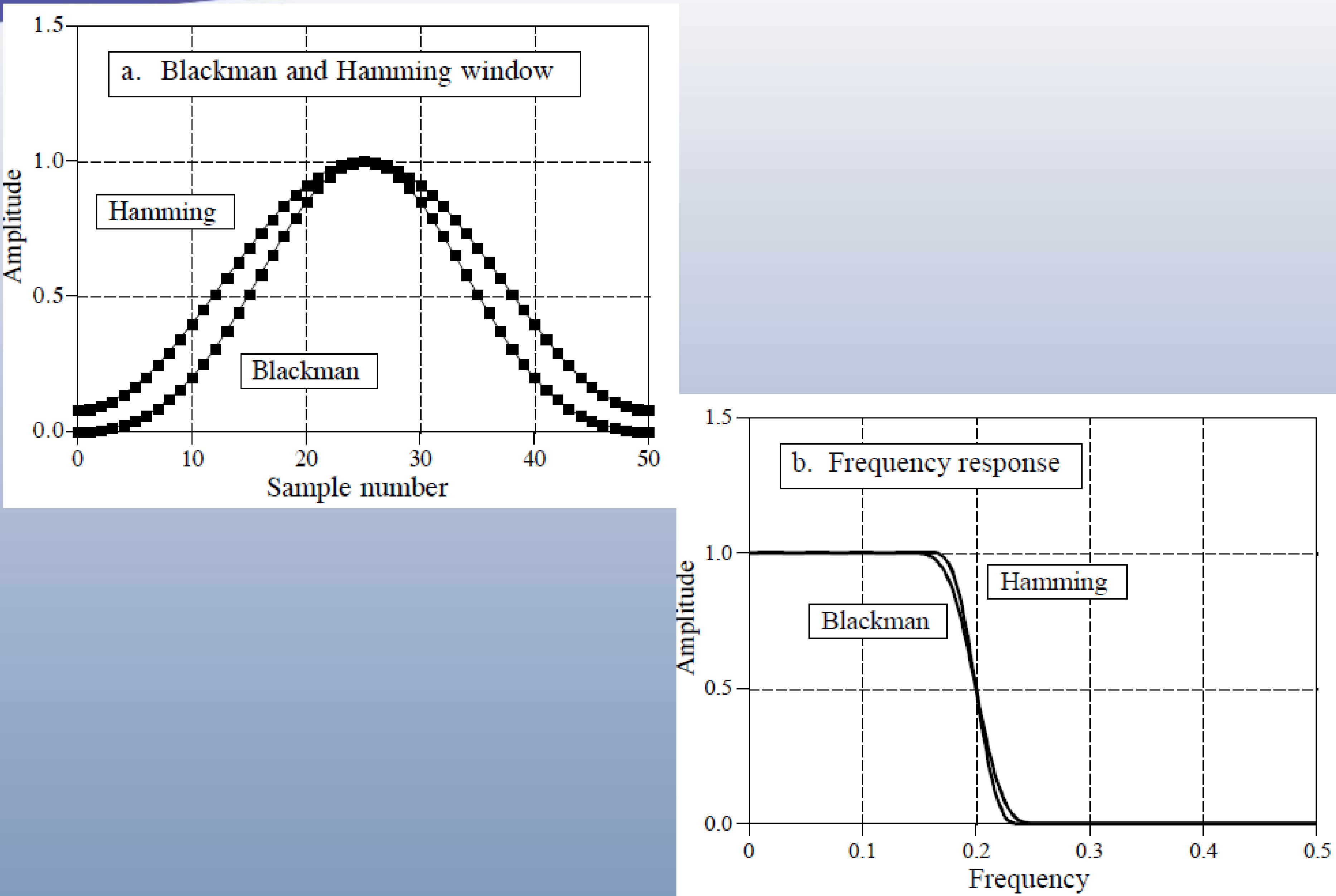
- Mala atenuación en la banda atenuada
- Ripple excesivo en la banda pasante

Roll-off: La velocidad del roll-off depende del ancho del lóbulo principal del espectro de la ventana rectangular. El ancho del lóbulo principal se reduce con el largo de la ventana. La velocidad del roll-off se incrementa con el largo de la ventana.
Usando ventanas de suavizado cuyo espectro tenga área menor de los lóbulos secundarios respecto a la ventana rectangular, se reduce el ripple.

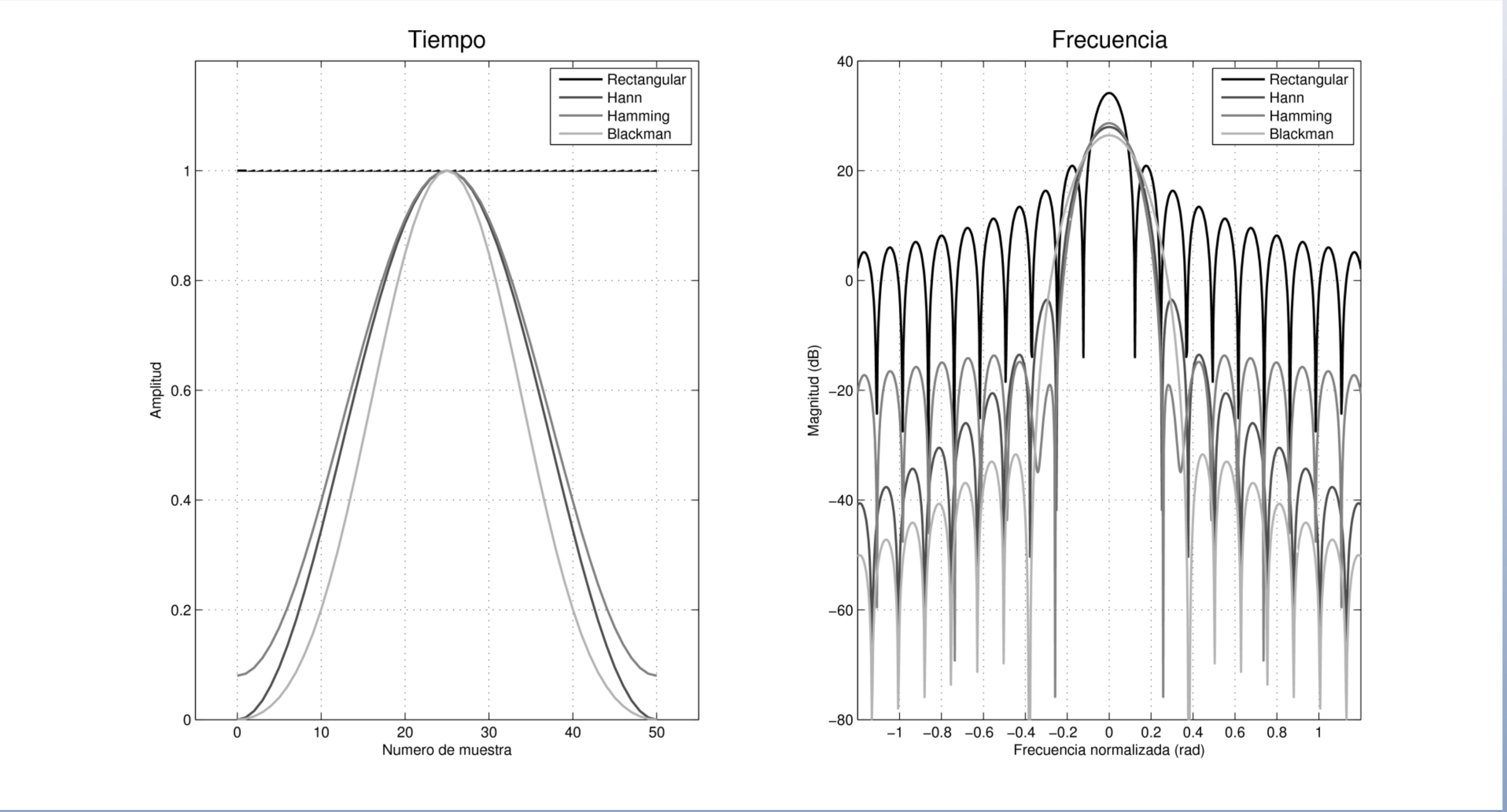


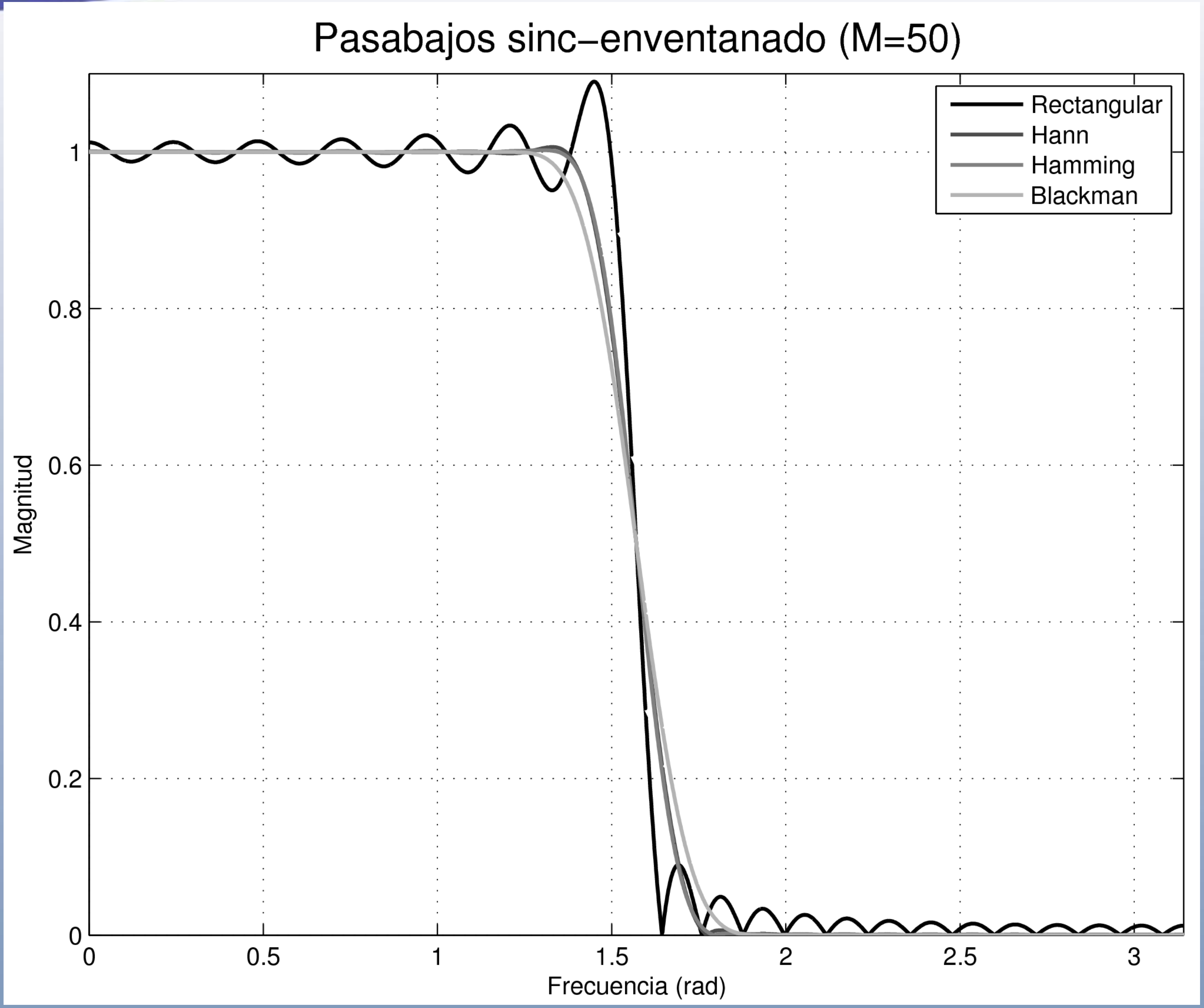
Respuesta al impulso ideal
Amplitud
Numero de muestra
Respuesta en frecuencia ideal
Amplitud
Frecuencia normalizada (rad)
Ventana rectangular
Amplitud
Numero de muestra
Espectro de la ventana
Amplitud
Frecuencia normalizada (rad)
Respuesta al impulso enventanada
Amplitud
Numero de muestra
Espectro del sinc enventanado
Amplitud
Frecuencia normalizada (rad)

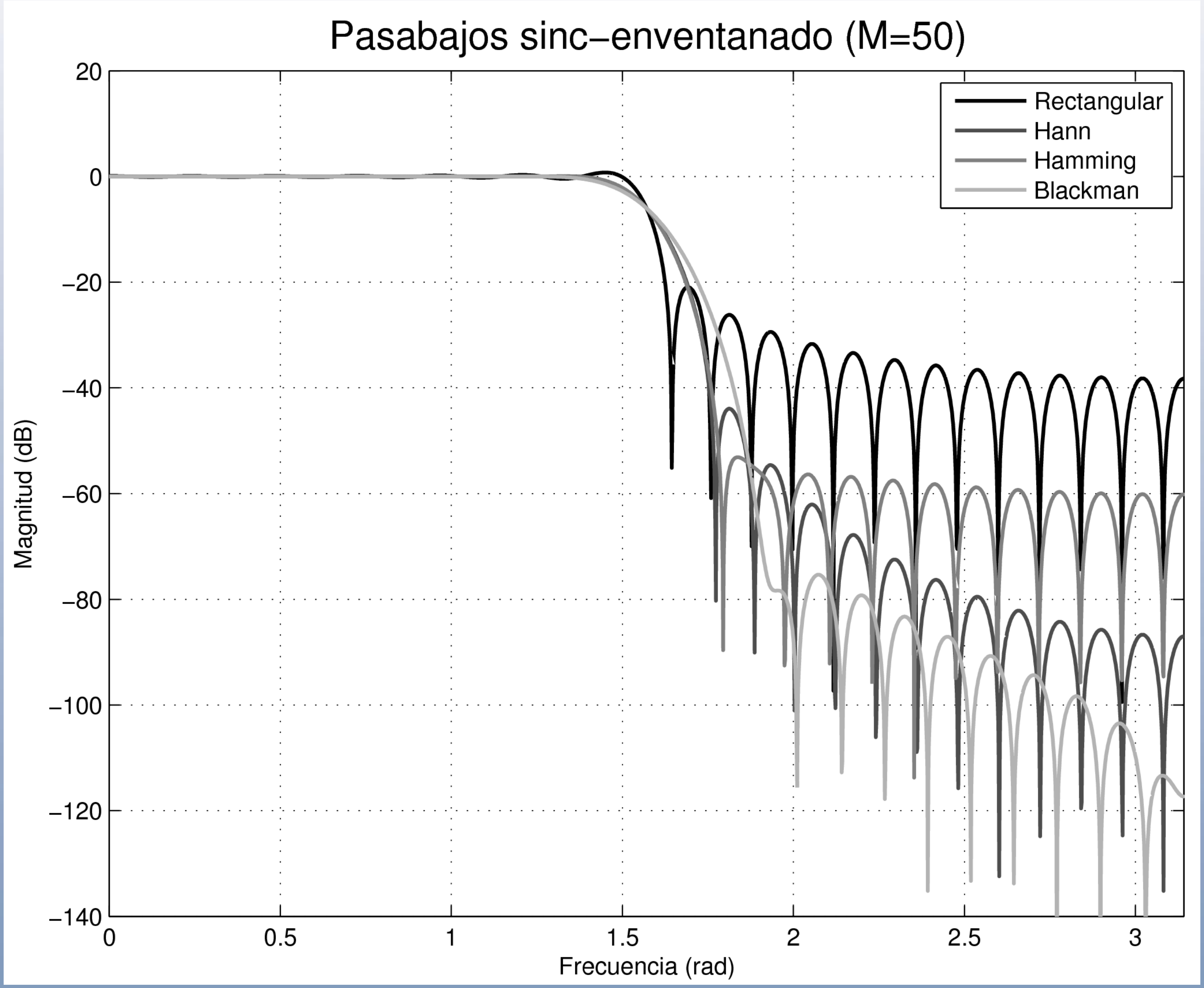

Respuesta al impulso ideal
Amplitud
Numero de muestra
Respuesta en frecuencia ideal
Amplitud
Frecuencia normalizada (rad)
Ventana de Blackman
Amplitud
Numero de muestra
Espectro de la ventana
Amplitud
Frecuencia normalizada (rad)
Respuesta al impulso enventanada
Amplitud
Numero de muestra
Espectro del sinc enventanado
Amplitud
Frecuencia normalizada (rad)


a. Blackman and Hamming window
Hamming
Blackman
Amplitude
Sample number
1.5
1.0
0.5
0.0
0
10
20
30
40
50
b. Frequency response
Hamming
Blackman
Amplitude
Frequency
1.5
1.0
0.5
0.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Comparación de ventanas




Pasabajos sinc−enventanado (M=50)
Rectangular
Hann
Hamming
Blackman
Magnitud
Frecuencia (rad)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Pasabajos sinc−enventanado (M=50)
Rectangular
Hann
Hamming
Blackman
Magnitud (dB)
Frecuencia (rad)
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
−140
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Observaciones

- La atenuación en decibeles es mas del doble usando ventana de Hann o de Hamming y mas del triple usando ventana de Blackman.

- El ancho de la banda de transcición es el doble usando ventanas de Hann o de Hamming y el triple usando ventana de Blackman.

- Blackman tiene una mejor atenuación en la banda de atenuación 74 dB (-0,02%) Vs Hamming -53dB (-0,2%)

- Ripple en la banda de paso de 0,02% Vs Hamming 0,2%

Diseño del filtro

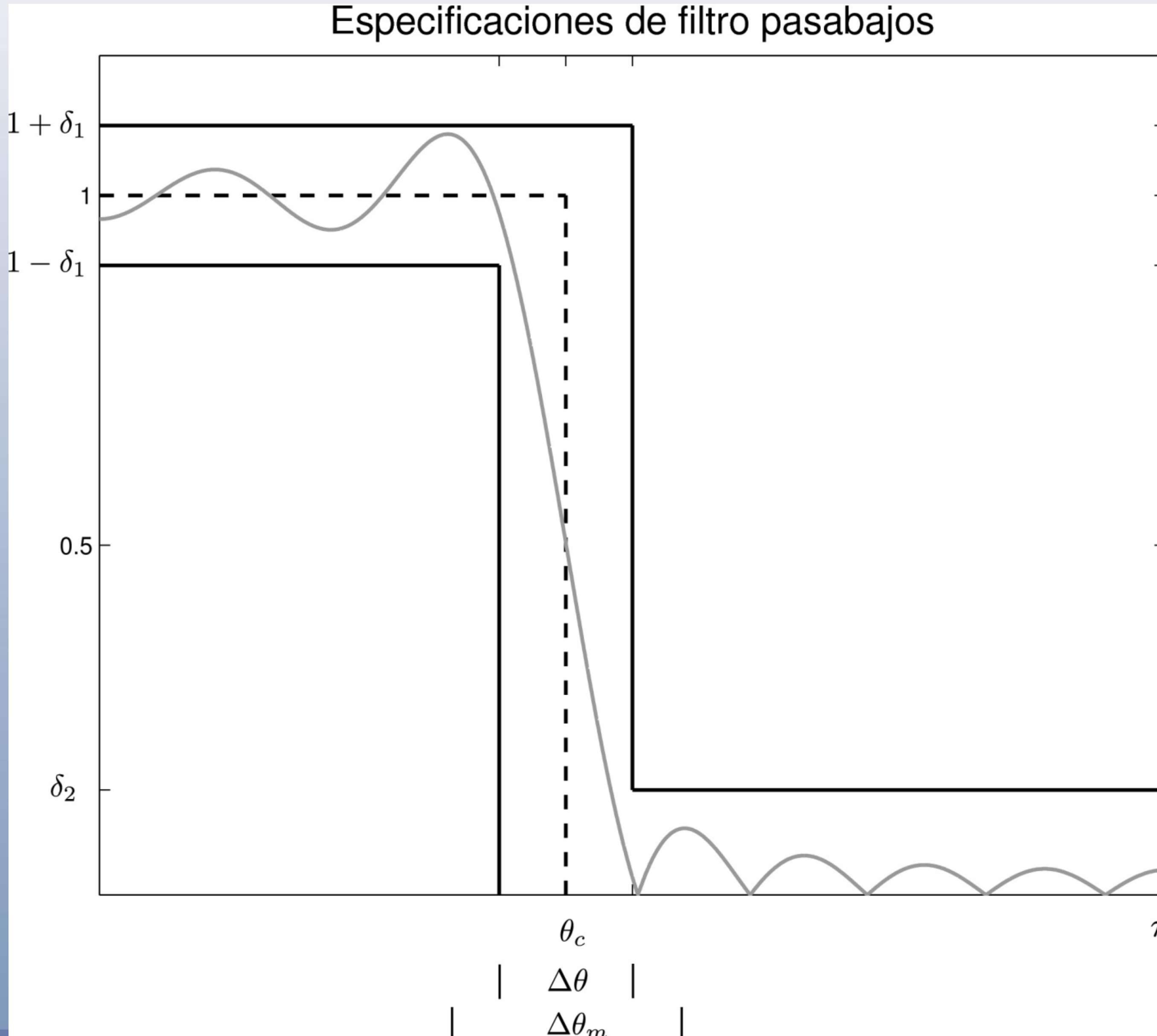
Debemos seleccionar:

- Frecuencia de corte
- Largo de la respuesta al impulso (M)

Especificaciones (máscara del filtro)

- Ancho de la banda pasante
- Ripple en la banda pasante
- Ancho de la banda de transición
- Ancho de la banda atenuada
- Ripple en la banda atenuada

La elección debe ser tal que el filtro cumpla los requerimientos y el largo sea lo menor posible.


Especificaciones de filtro pasabajos
$1+\delta_1$
1
$1-\delta_1$
0.5
δ_2
θ_c
π
$\Delta\theta$
$\Delta\theta_m$

Longitud del filtro Vs Ancho de banda de transición

$$M \approx \frac{4}{BW}$$

- El ancho de banda transición esta expresado en fracciones de la frecuencia de muestreo y no depende de la frecuencia de corte

- El tiempo requerido para la convolución es dependiente del largo de las señales.

Calculo de los coeficientes

Despues de definir Fc y M debemos utilizar siguiente ecuación

$$h[i] = K \frac{\sin(2\pi f_C (i - M/2))}{i - M/2} \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi i}{M} \right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi i}{M} \right) \right]$$

The windowed-sinc filter kernel. The cutoff frequency, f , is expressed as a $_C$ fraction of the sampling rate, a value between 0 and 0.5. The length of the filter kernel is determined by *M*, which must be an even integer. The sample number *i*, is an integer that runs from 0 to *M*, resulting in *M*%1 total points in the filter kernel. The constant, *K*, is chosen to provide unity gain at zero frequency