Filtros de promedio móvil

Implementación por convolución

En un filtro de media móvil de largo *M*, la salida actual consiste en el promedio de las últimas *M* muestras de la entrada.

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

Ejemplo:

del cálculo de la muestra *n=80* de la salida de un filtro de largo *M=5.*

$$y[80] = \frac{x[80] + x[79] + x[78] + x[77] + x[76]}{5}$$

utilizando promediado simétrico

$$y[80] = \frac{x[78] + x[79] + x[80] + x[81] + x[82]}{5}$$

Respuesta al impulso

- Ecuación del filtro de media móvil:

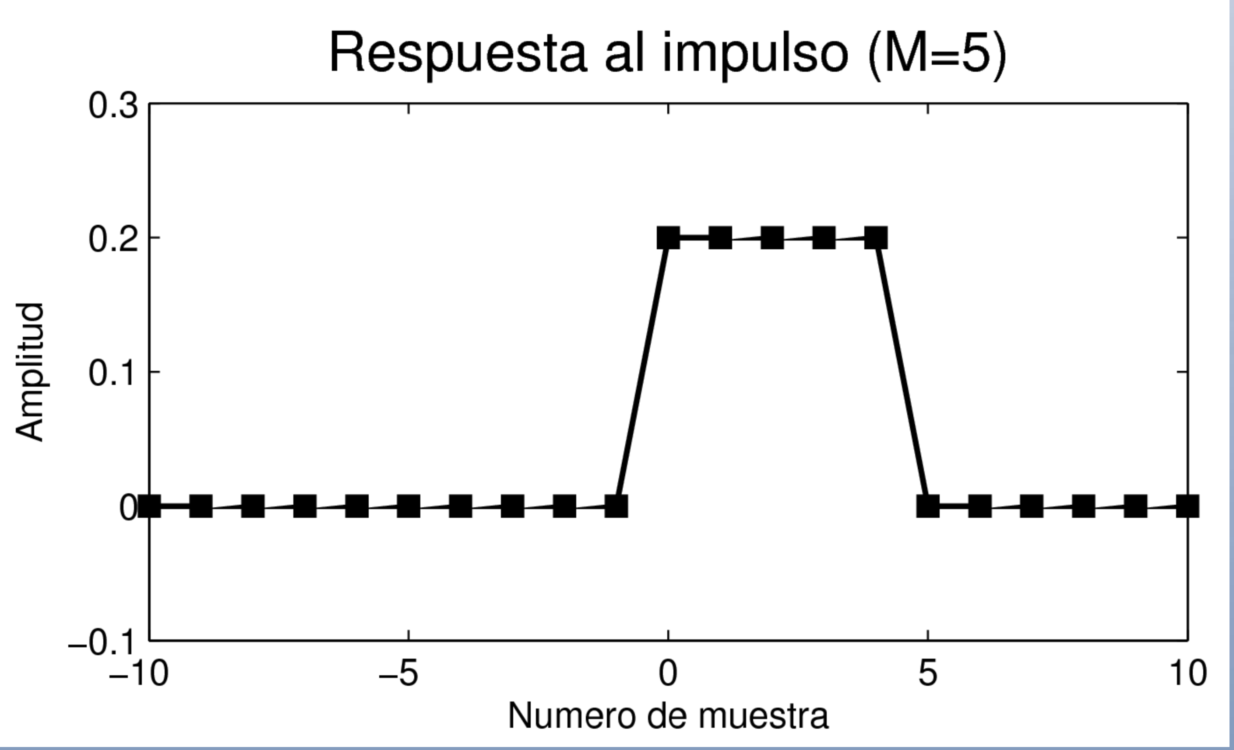
$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{M} x[n-k]$$

- Ecuación del filtro de respuesta al impulso h[n] (convolución):

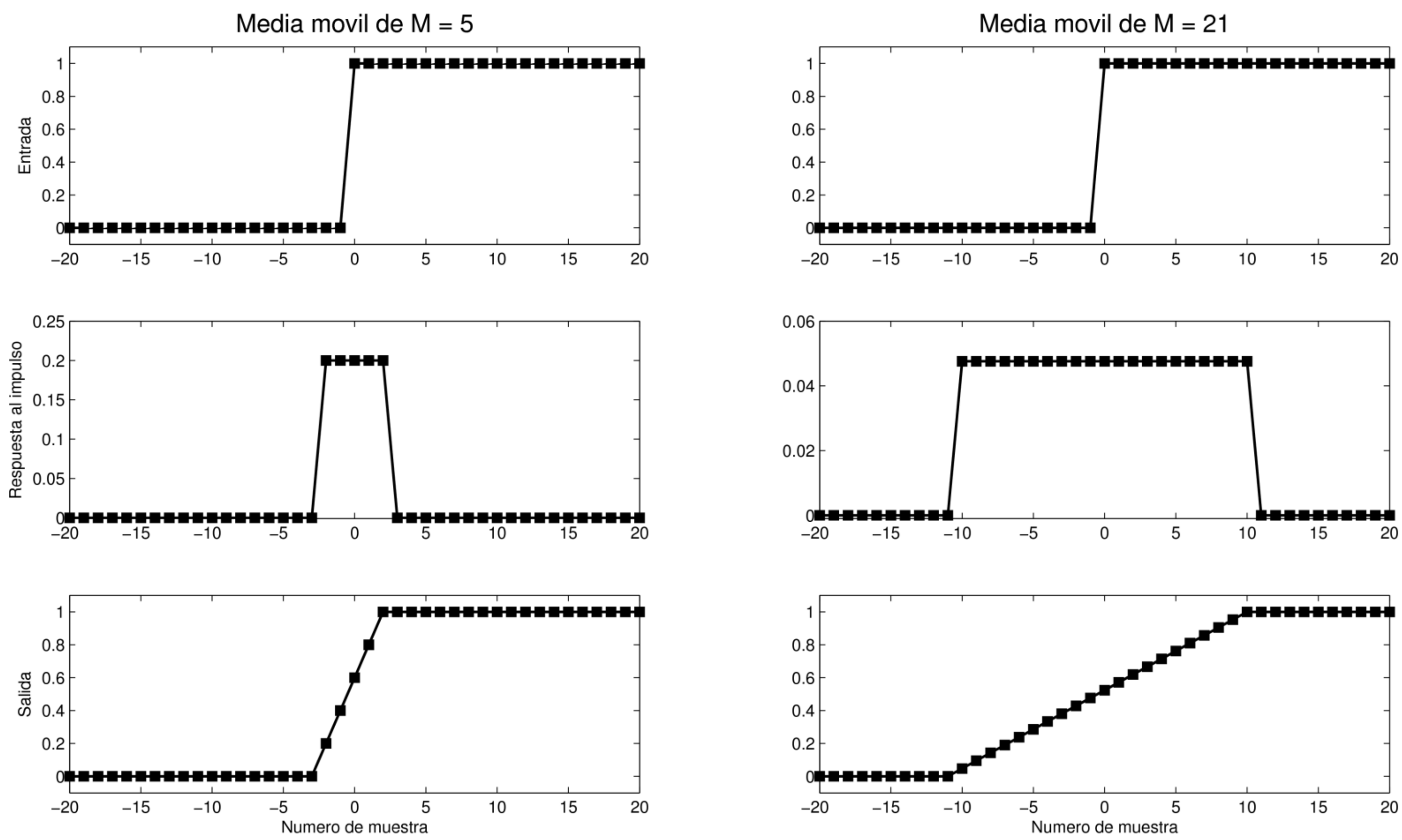
$$(h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

- Respuesta al impulso del filtro de media móvil:

$$h_{ma}[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & \text{si } n = 0 \ldots M-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Respuesta al escalón



El tiempo de subida es *M* y el sobreimpulso es nulo

Respuesta en frecuencia

La respuesta al impulso del filtro de media móvil causal de largo M es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M} & \text{si } n = 0, \ldots, M-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para obtener la respuesta en frecuencia, se aplica la DTFT,

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\theta n} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\theta n}$$

Considerando que la suma de los primeros M términos de una serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{M-1} r^n = \frac{1-r^M}{1-r},$$

la DTFT queda,

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{M} \frac{1-e^{-j\theta M}}{1-e^{-j\theta}} = \frac{1}{M} \frac{e^{-j\theta M/2}}{e^{-j\theta/2}} \frac{e^{j\theta M/2} - e^{-j\theta M/2}}{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}}$$

Finalmente, la respuesta en frecuencia buscada es,

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta(M-1)/2} \frac{1}{M} \frac{\sin(\theta M/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Implementación por recursión

- **Cálculo de dos muestras adyacentes con filtro de orden M=7:**

$$y[80] = \frac{x[77]+x[78]+x[79]+x[80]+x[81]+x[82]+x[83]}{7}$$

$$y[81] = \frac{x[78]+x[79]+x[80]+x[81]+x[82]+x[83]+x[84]}{7}$$

Se puede calcular y[81] a partir de y[80] realizando menos operaciones:

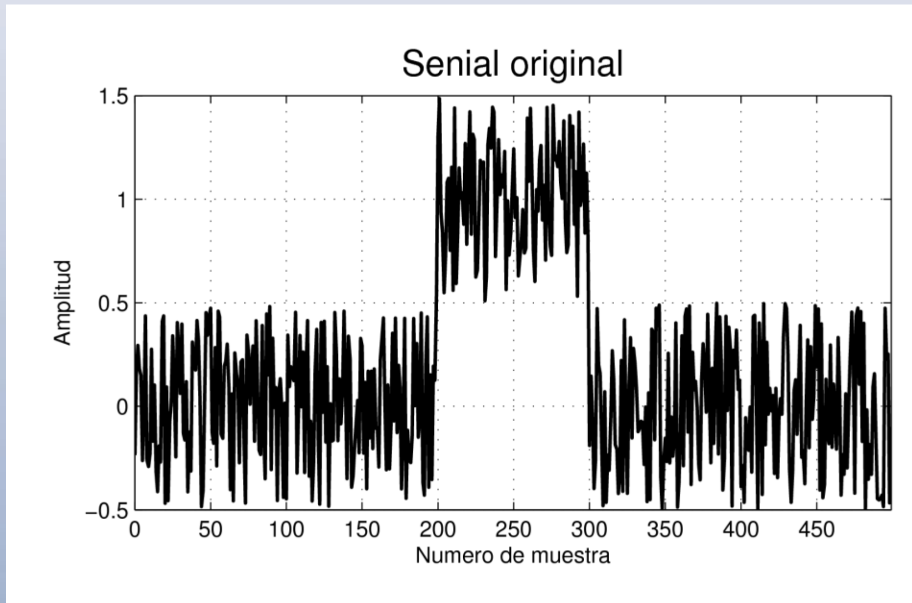
$$y[81] = y[80] + \frac{x[84]-x[77]}{7}$$

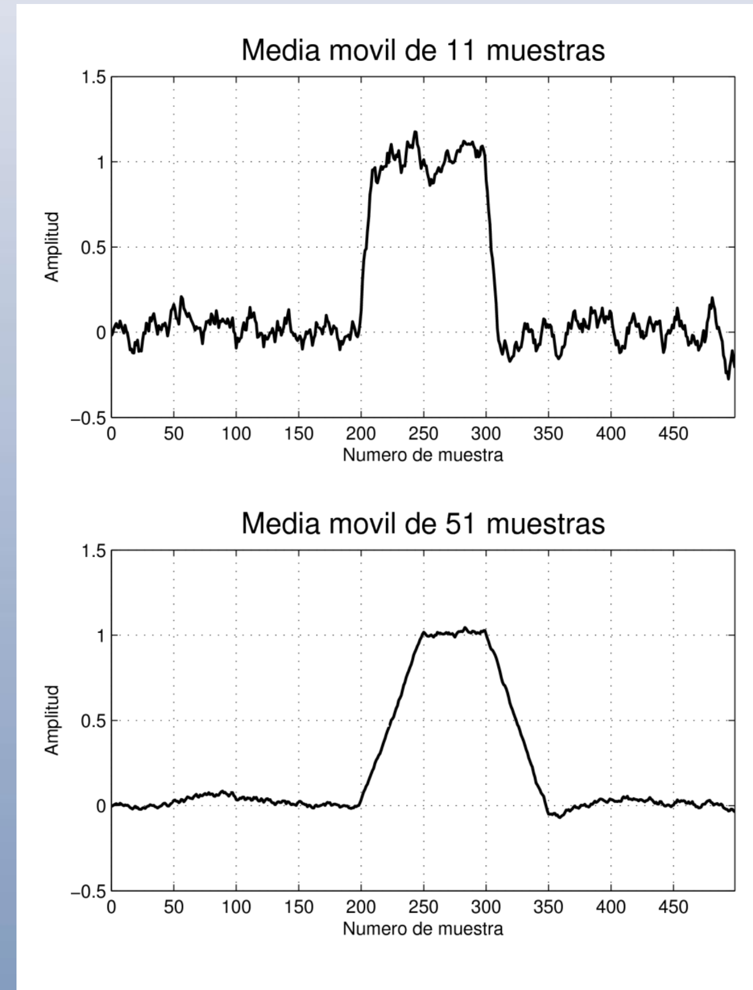
- Ecuación en recurrencia genérica del filtro de media móvil:

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x\left[n+\frac{M-1}{2}\right] - x\left[n-\frac{M-1}{2}-1\right]}{M}$$

Aplicación: suavizado

Desempeño óptimo para eliminación de ruido blanco.





- La amplitud del ruido se reduce como la raíz cuadrada de *M*.
- El tiempo de subida es *M.*

Conclusiones

- La salida actual es el promedio de las últimas M muestras de la entrada.
- Su desempeño es óptimo para eliminar ruido blanco.
- Es el filtro mas veloz gracias a su implementación en recurrencia (2 sumas y una multiplicación en cada paso).
- Pobre desempeño como pasa-bajos.
- Produce el el menor ruido para un tiempo de subida dado
- Reducción del ruido es igual a la raíz cuadrada de la cantidad de muestras en el promedio (Ej. Un filtro de 100 puntos reduce el ruido en un factor de 10)