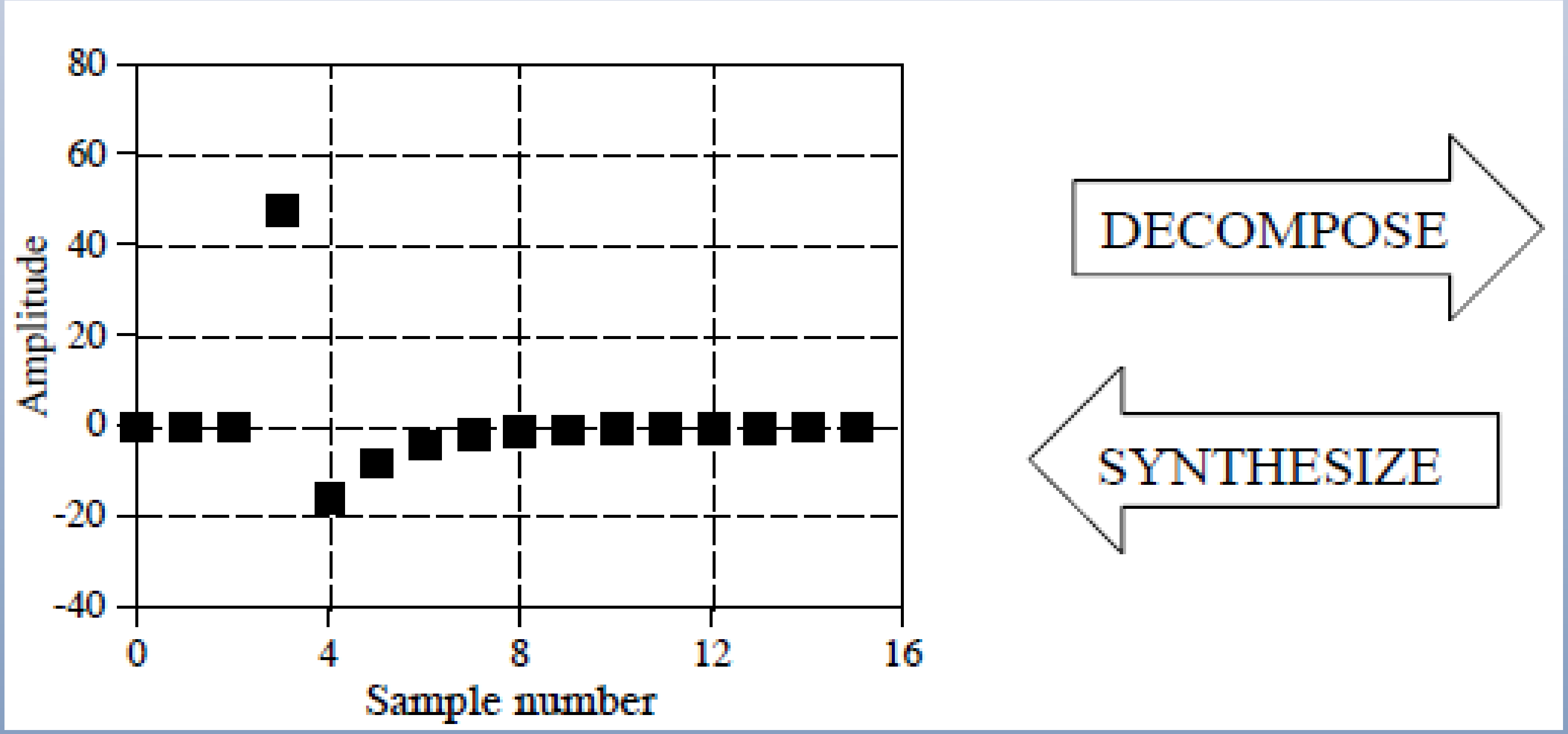
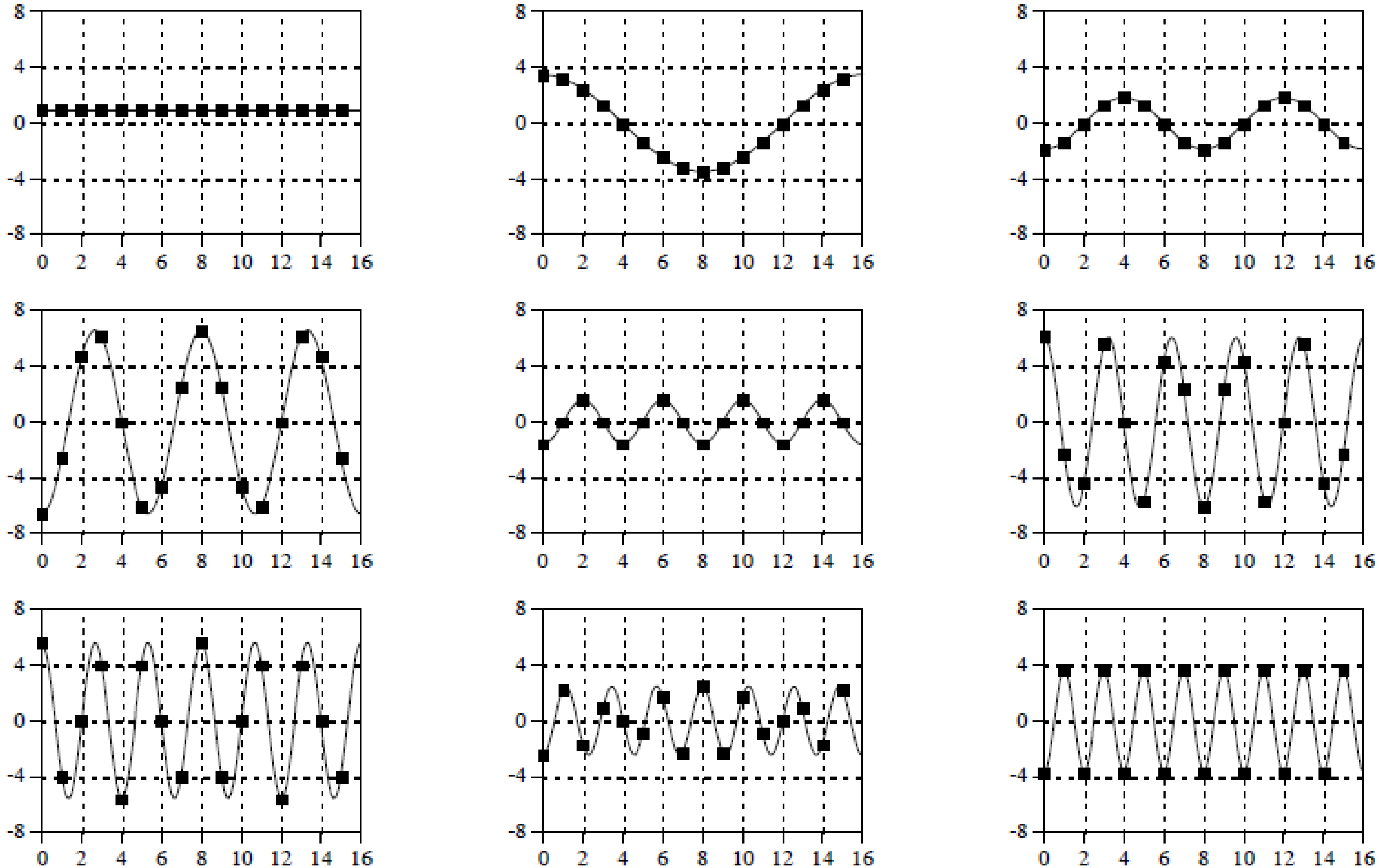
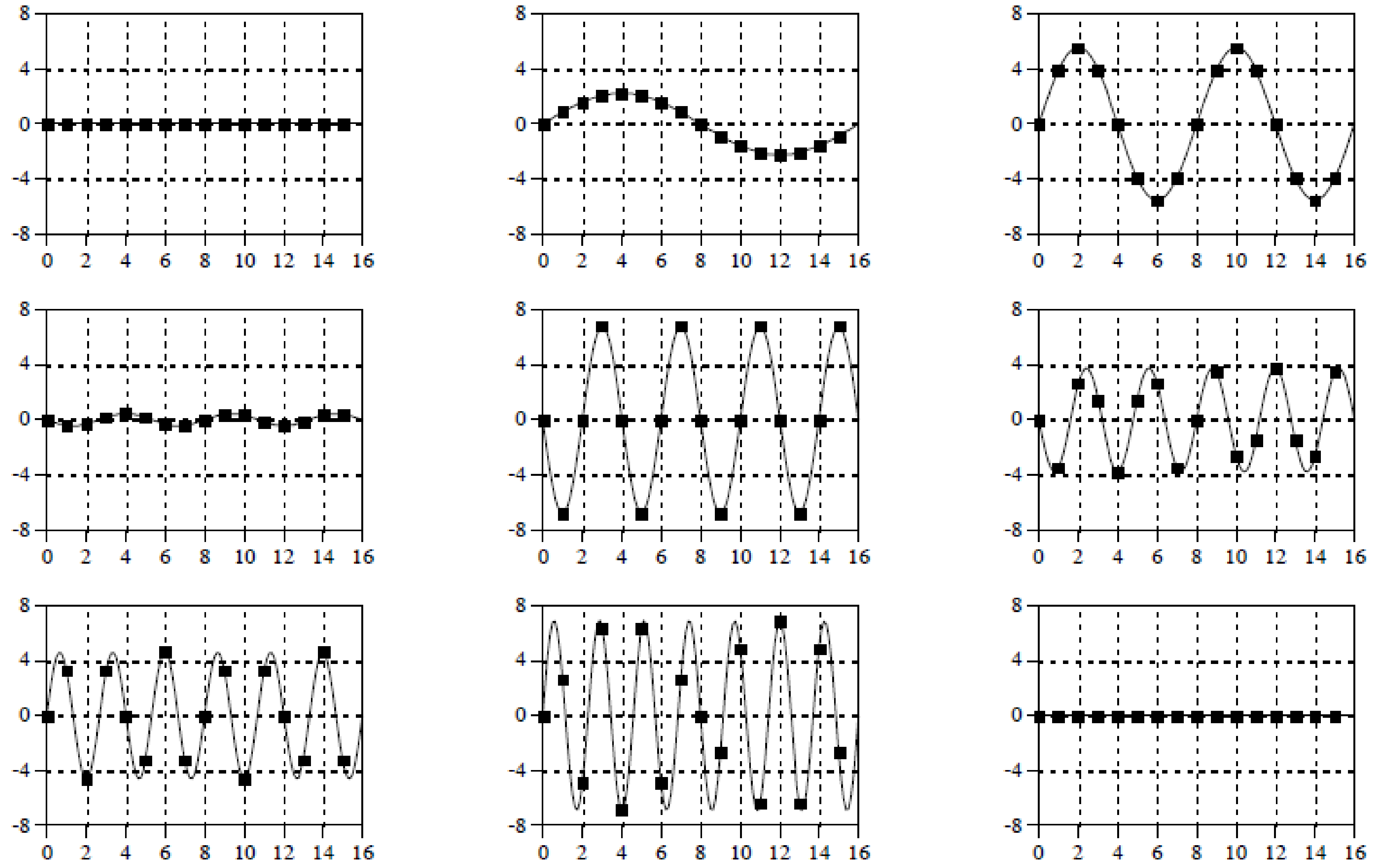
Transformada discreta de Fourier

El análisis de Fourier es una familia de técnicas matemáticas, basadas en la descomposición de señales en sinusoides

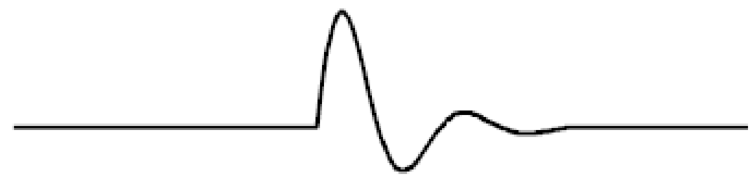
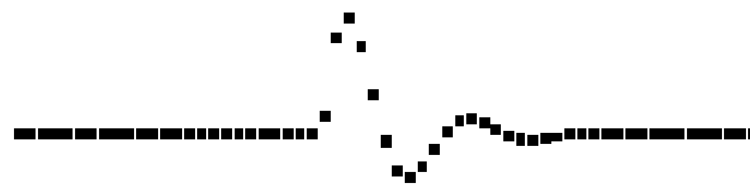
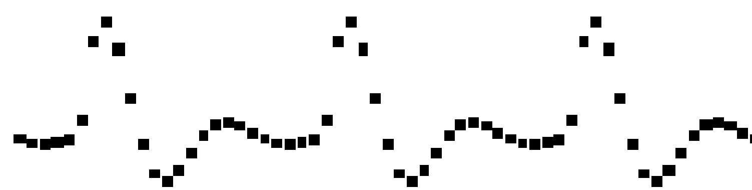


Cosine Waves




8
4
0
-4
-8
0 2 4 6 8 10 12 14 16

Categorías transformada de Fourier

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform *signals that are continious and aperiodic*	
Fourier Series *signals that are continious and periodic*	
Discrete Time Fourier Transform *signals that are discrete and aperiodic*	
Discrete Fourier Transform *signals that are discrete and periodic*	

Las cuatro clases de señales se extienden del –inf al + inf

No se puede sintetizar una señal de long finita almacenada en un buffer con señales infinitas. Para resolverlo imaginamos que nuestra señal tiene infinitas muestras hacia ambos extremos.

- Si las muestras adicionales son cero, tenemos una señal discreta y aperiódica.
- Si las muestras imaginadas son copias de la original tenemos una señal discreta y periódica.

Para sintetizar una señal aperiódica se requieren infinitas sinusoides, lo que es imposible en un algoritmo de computadora.

El único tipo de transformación que se puede utilizar en un DSP es la DFT.

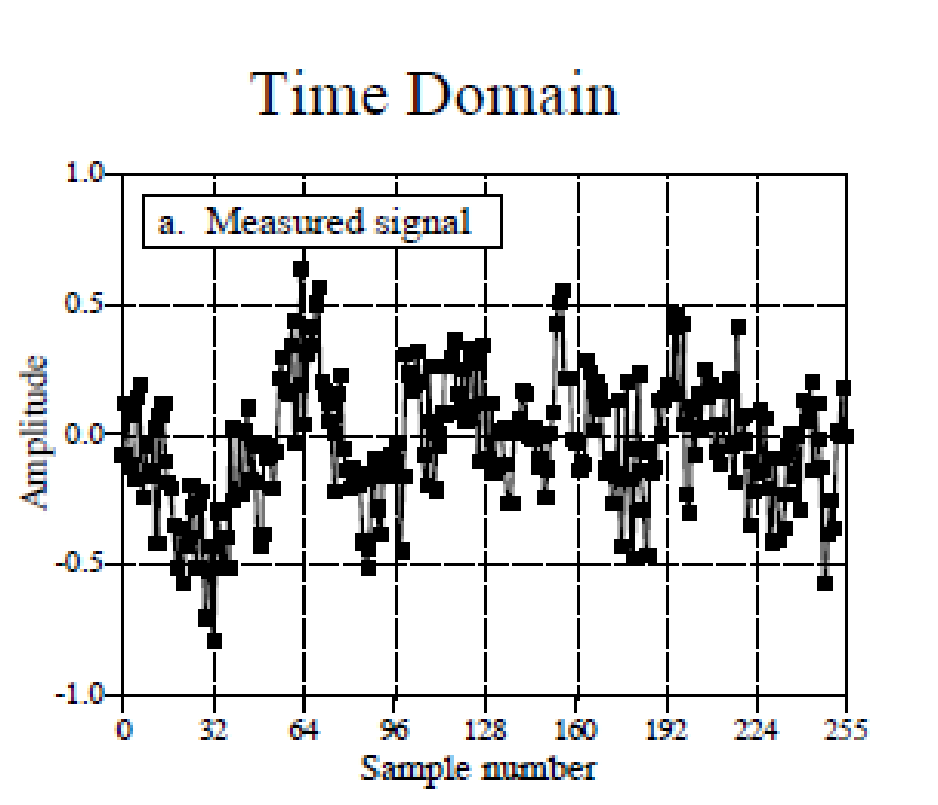
Cálculo de la DFT

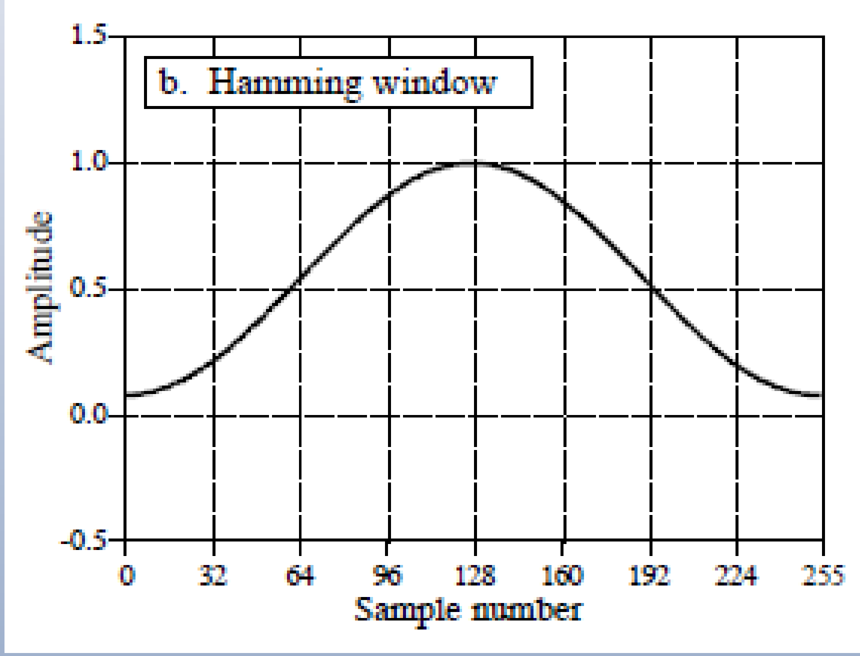
- **DFT por ecuaciones simultaneas**
- **DFT por correlación**
- **FFT**

Aplicaciones de la DFT

- **Calculo del espectro de frecuencia**
- **Encontrar la respuesta en frecuencia de un sistema**
- **FFT convolución**

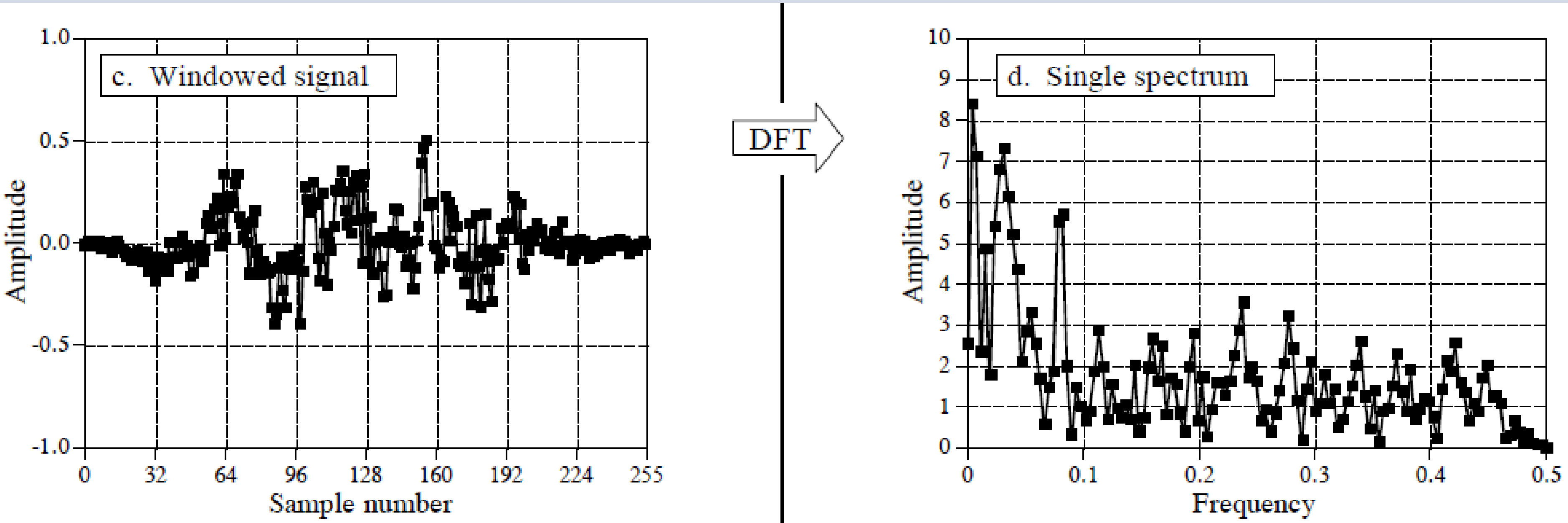
Ejemplo análisis espectral





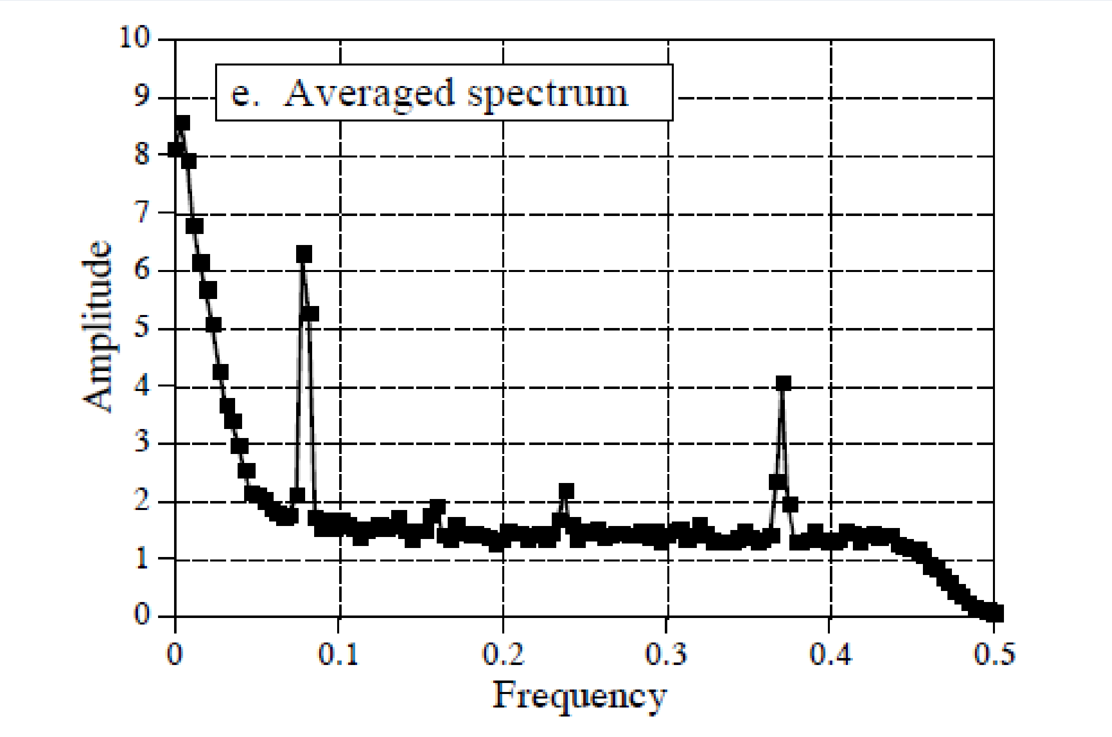
a) 256 muestras muestreadas a 160 muestras por segundo

b) Multiplicando a) por una ventana hamming

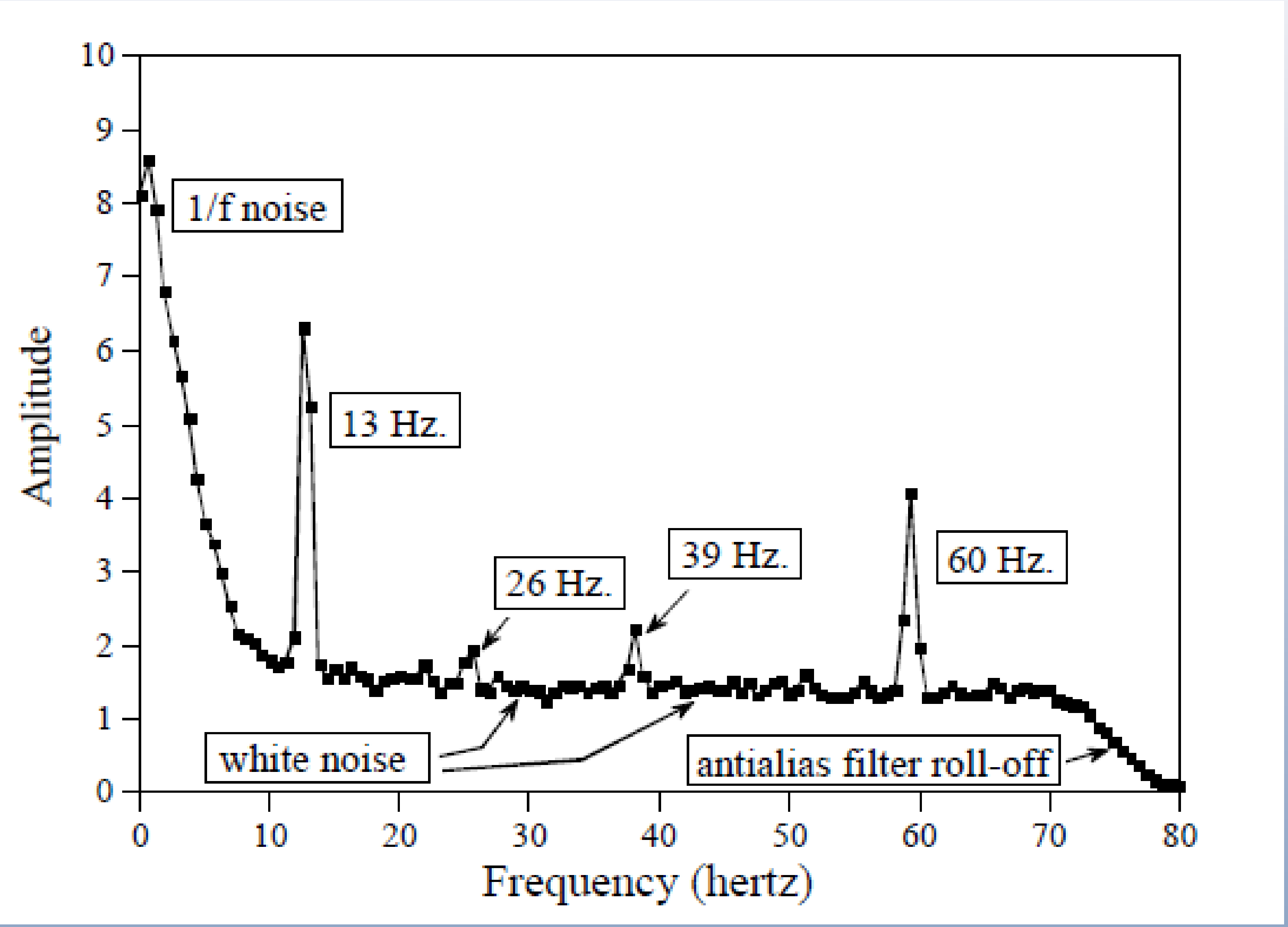


c) La señal muestreada se enventana

d) Usando DFT , se muestra solo la magnitud

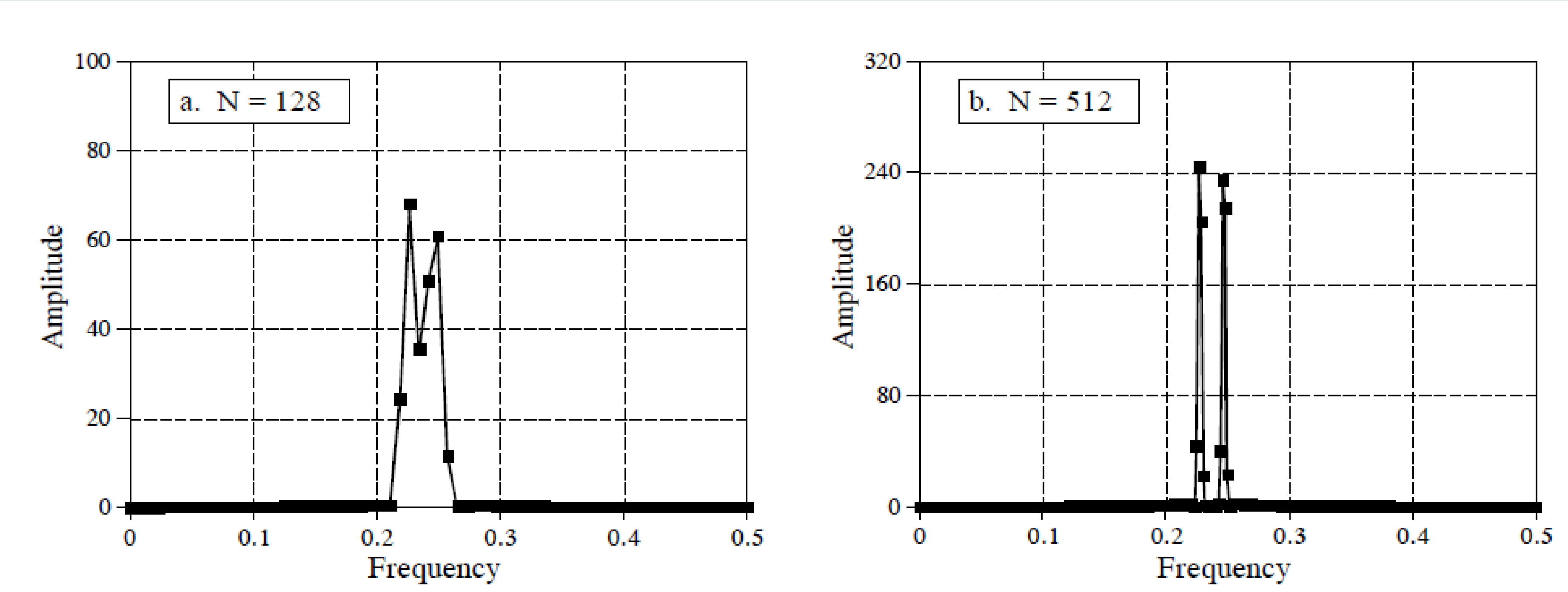


e) Promediando 100 espectros
obtenidos en d)

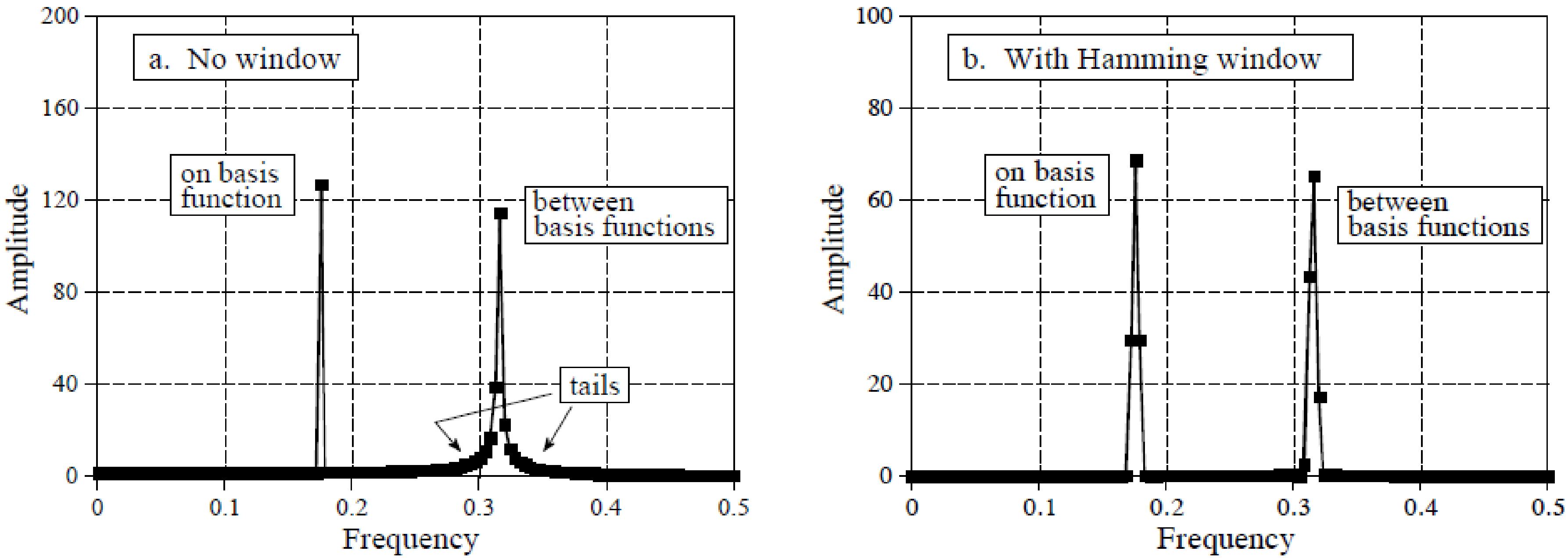


1/f noise
13 Hz.
26 Hz.
39 Hz.
60 Hz.
white noise
antialias filter roll-off
Amplitude
Frequency (hertz)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80

Resolución de frecuencias



El espectro de frecuencias producido por una DFT de N puntos consiste en N/2+1 muestras igualmente espaciadas entre 0 y Fs/2

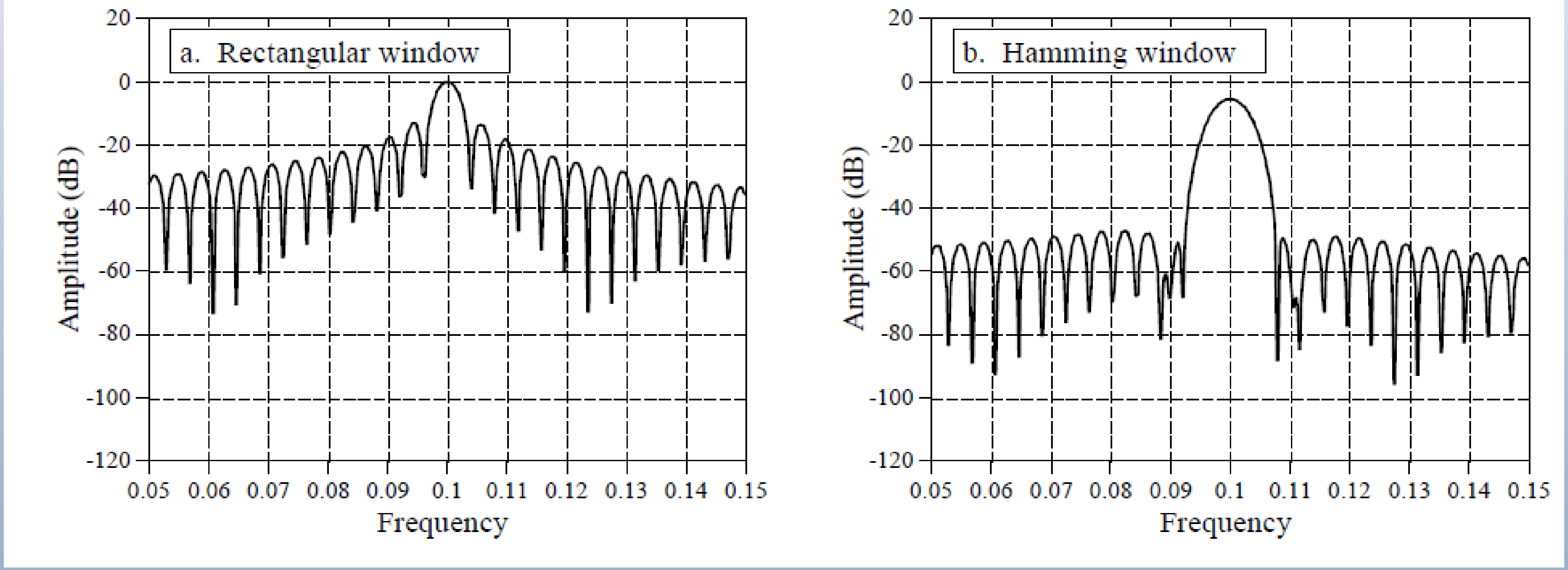


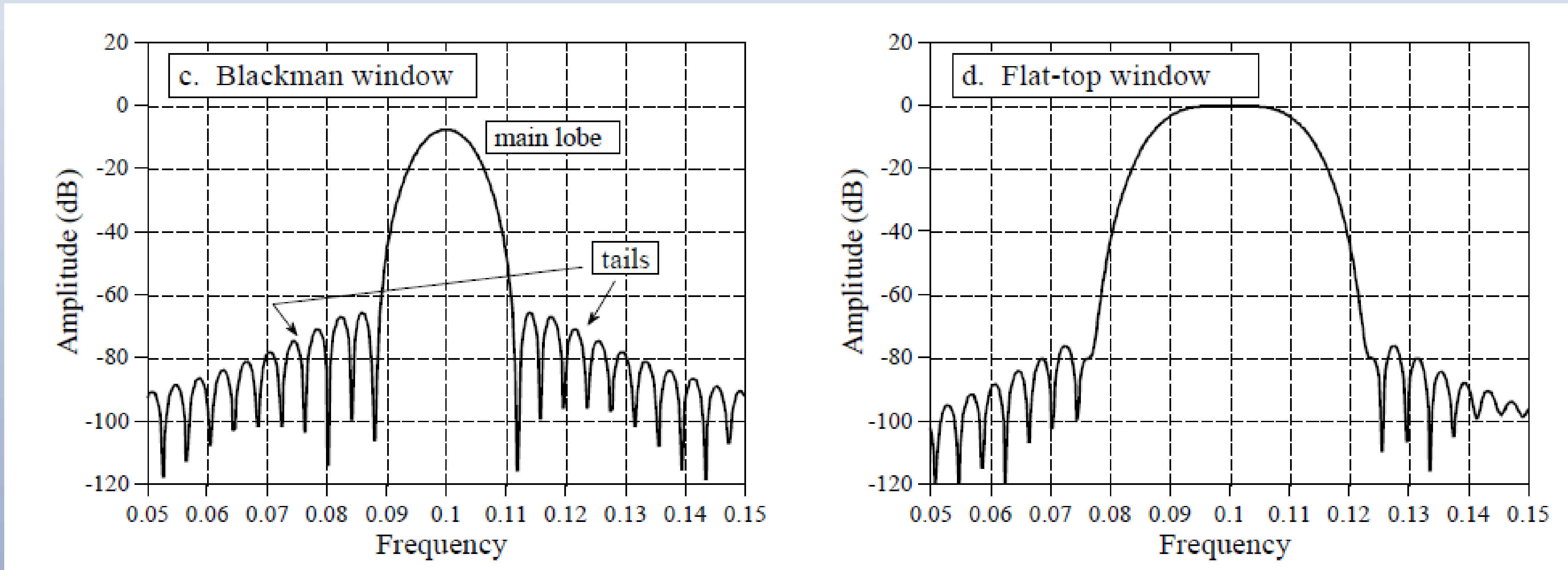
Si la entrada contiene una sinusoide con una frecuencia entre dos de las funciones de base esta no puede ser representada por una sola muestra, sino que tiene “colas” a ambos lados – spectral leakage – drenaje espectral.

Multiplicando la señal por una ventana de Hamming antes de efectuar la DFT vemos que el espectro cambia en tres aspectos:

- Disminuye diferencias entre la representación de los dos picos
- Reduce de manera muy importante las colas que se presentan
- Reduce la resolución del espectro ya que hace los picos mas anchos – la ventana Jargon tiene el mejor equilibrio entre drenaje espectral y resolución.

Efecto del uso de distintas ventanas en un pico

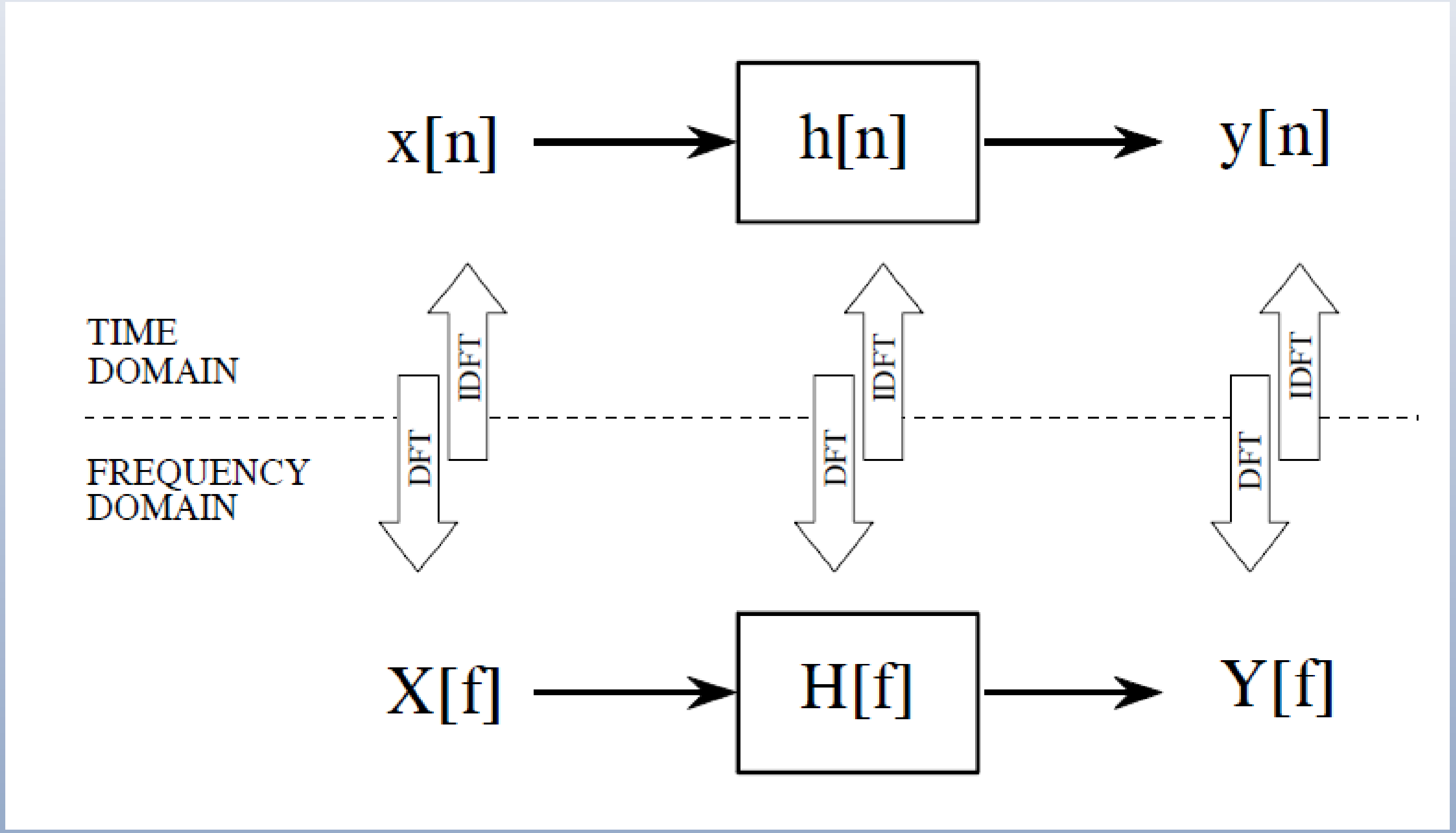



c. Blackman window
main lobe
tails
Amplitude (dB)
Frequency
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1 0.11 0.12 0.13 0.14 0.15
d. Flat-top window
Amplitude (dB)
Frequency

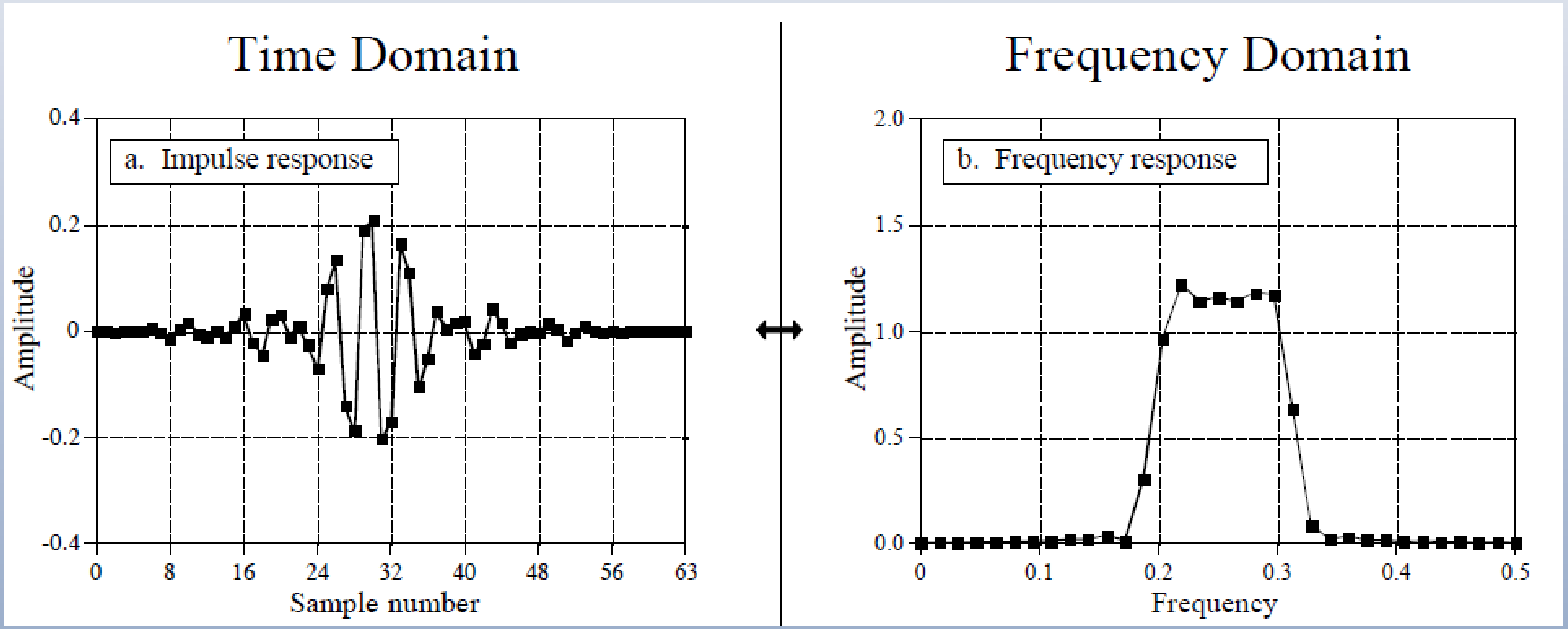
Respuesta en frecuencia de sistemas

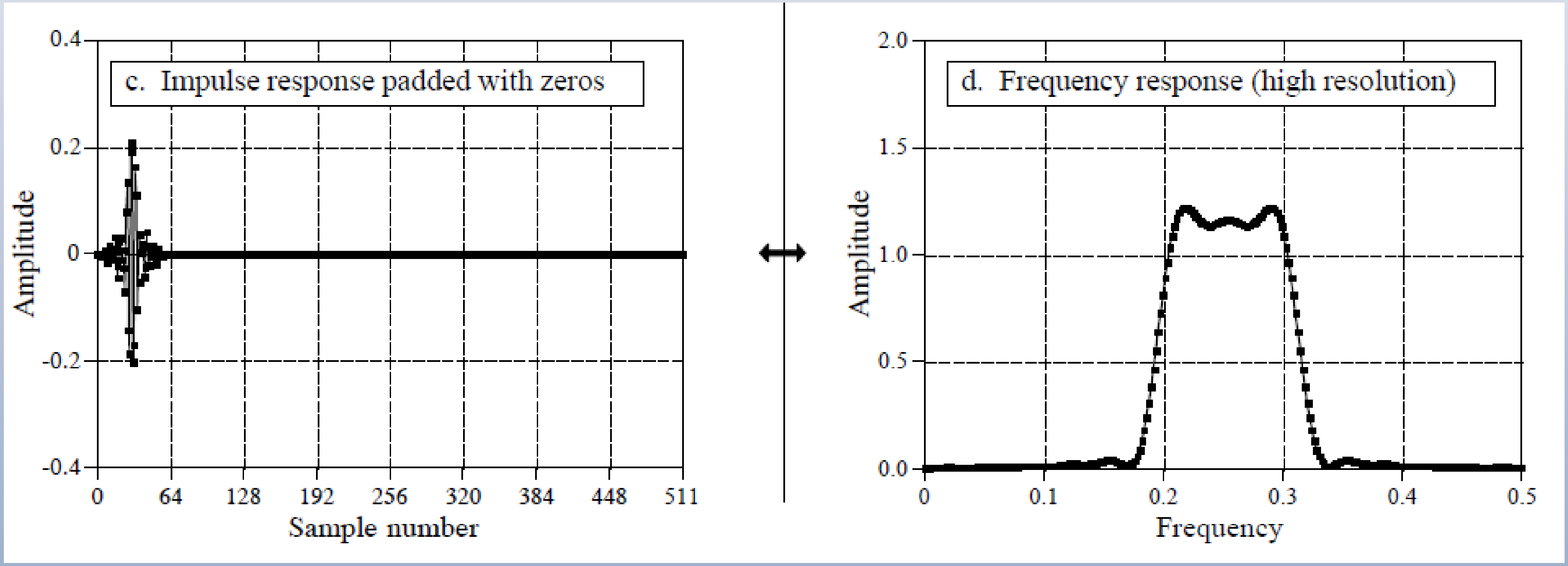
Todo sistema lineal puede ser completamente descripto por como este modifica la amplitud y fase de señales cosenoidales que pasan a través de él. Esta información es llamada la **Respuesta en frecuencia** del sistema.

La respuesta en frecuencia de un sistema es la transformada de Fourier de su respuesta al impulso.


x[n]
h[n]
y[n]
TIME
DOMAIN
FREQUENCY
DOMAIN
DFT
IDFT
DFT
IDFT
DFT
IDFT
X[f]
H[f]
Y[f]

Encontrando la respuesta en frecuencia desde la respuesta al impulso




c. Impulse response padded with zeros
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
Amplitude
0
64
128
192
256
320
384
448
511
Sample number
d. Frequency response (high resolution)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Amplitude
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Frequency

Convolucion via FFT

Ya que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a una multiplicación en el dominio de la frecuencia. Podemos reemplazar la convolucion de dos señales en el dominio del tiempo por:

1. Transformar las dos señales al dominio de la frecuencia
2. Multiplicarlas
3. Realizar la transformada inversa

El resultado obtenido será idéntico al que se hubiese obtenido si se hacia la convolución en el tiempo

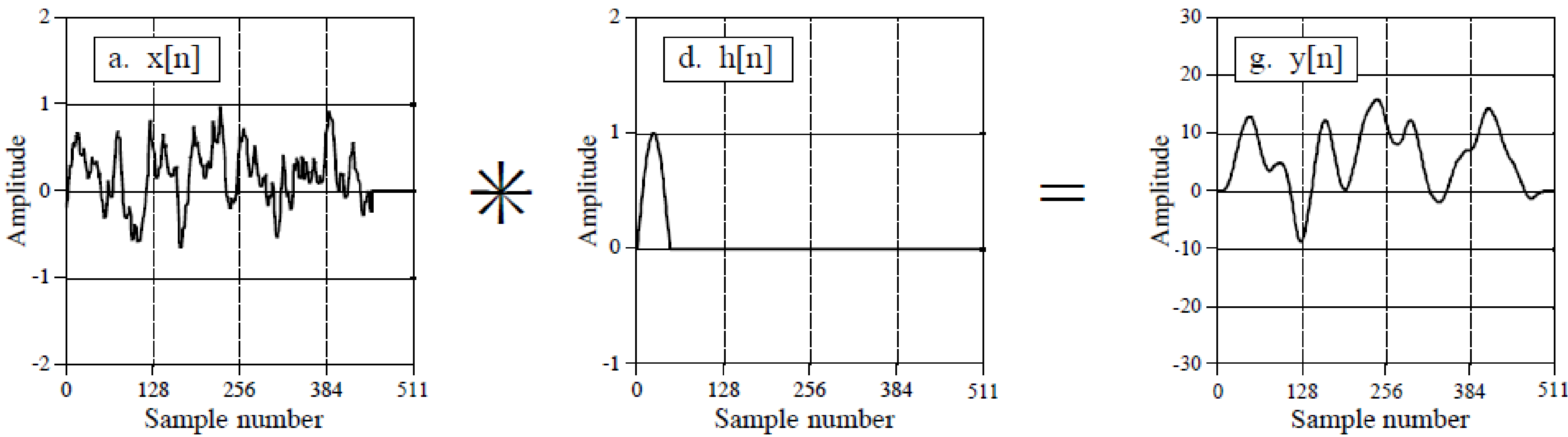
Ventajas

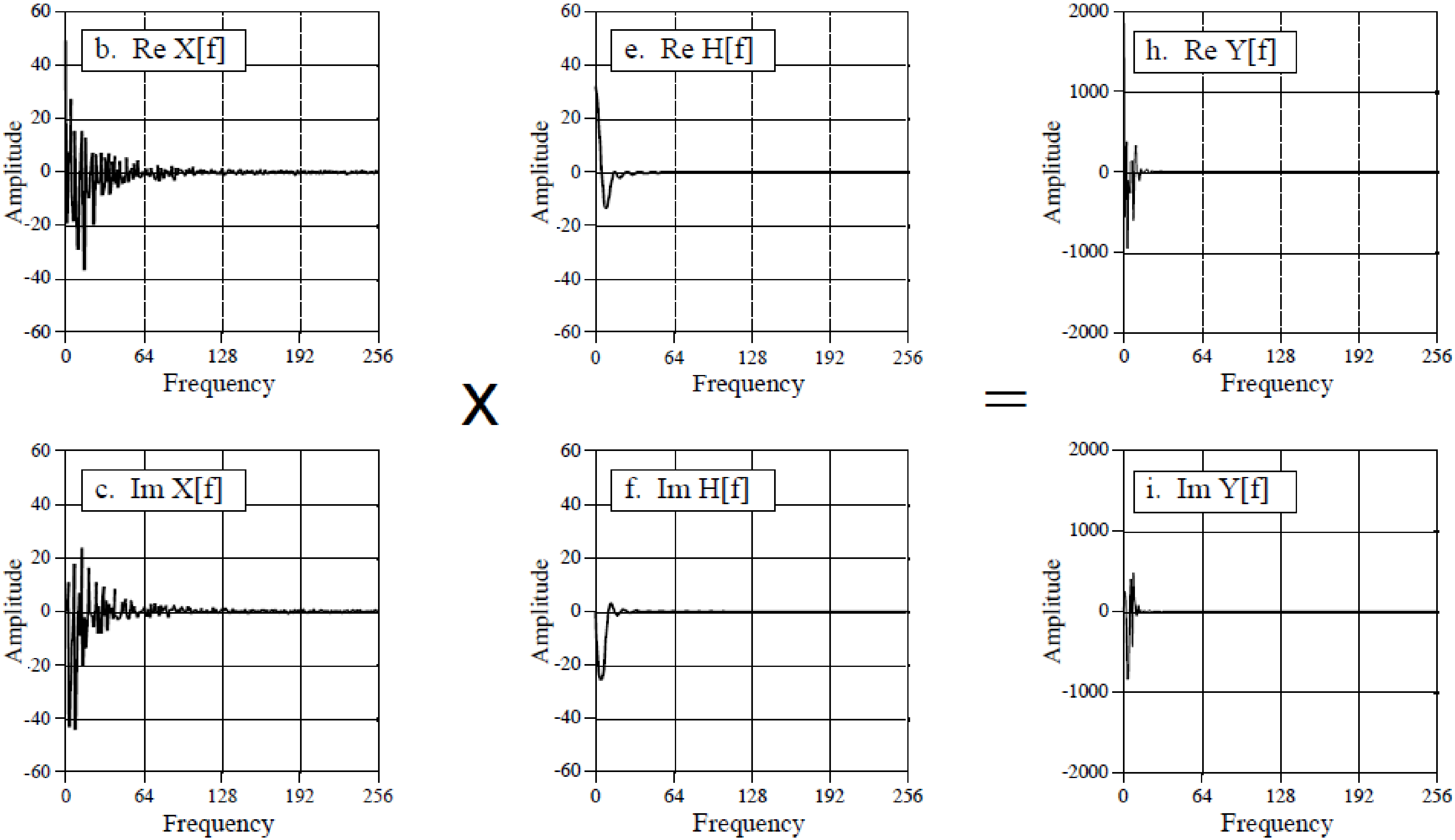
Dificultad matemática:

Si a partir de la respuesta al impulso y la salida de un sistema, deseamos obtener la señal de entrada, debemos efectuar la deconvolucion. La cual puede ser reemplazada en el dominio de la frecuencia por una simple división.

Velocidad de cálculo:

El algoritmo de convolución estándar es lento por la gran cantidad de multiplicaciones que debe realizar. Utilizando la FFT podemos realizar este procedimiento ciento de veces mas rapido


a. x[n]
Amplitude
Sample number
2
1
0
-1
-2
0
128
256
384
511
d. h[n]
Amplitude
Sample number
2
1
0
-1
0
128
256
384
511
g. y[n]
Amplitude
Sample number
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
128
256
384
511


b. Re X[f]
c. Im X[f]
e. Re H[f]
f. Im H[f]
h. Re Y[f]
i. Im Y[f]
X
=
Amplitude
Frequency
60
40
20
0
-20
-40
-60
2000
1000
-1000
-2000
0
64
128
192
256