

Filtros Recursivos (IIR)

- Los filtros recursivos están determinados por una **ecuación en diferencias** que se debe cumplir permanentemente que involucra la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$.
- Permite realizar un filtrado con un filtro de respuesta al impulso larga (o infinita) sin calcular explícitamente la convolución.
- Los filtros recursivos son mas rápidos que los filtros implementados mediante convolución.
- Suelen ser menos flexibles (mas difíciles de especificar) y de menor desempeño (en cuanto a la respuesta en frecuencia) que los filtros por convolución.

Ecuación de recursión

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + a_3 x[n-3] + \dots \\ + b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] + b_3 y[n-3] + \dots$$

Donde:

$x[]$: señal de entrada

$y[]$: señal de salida

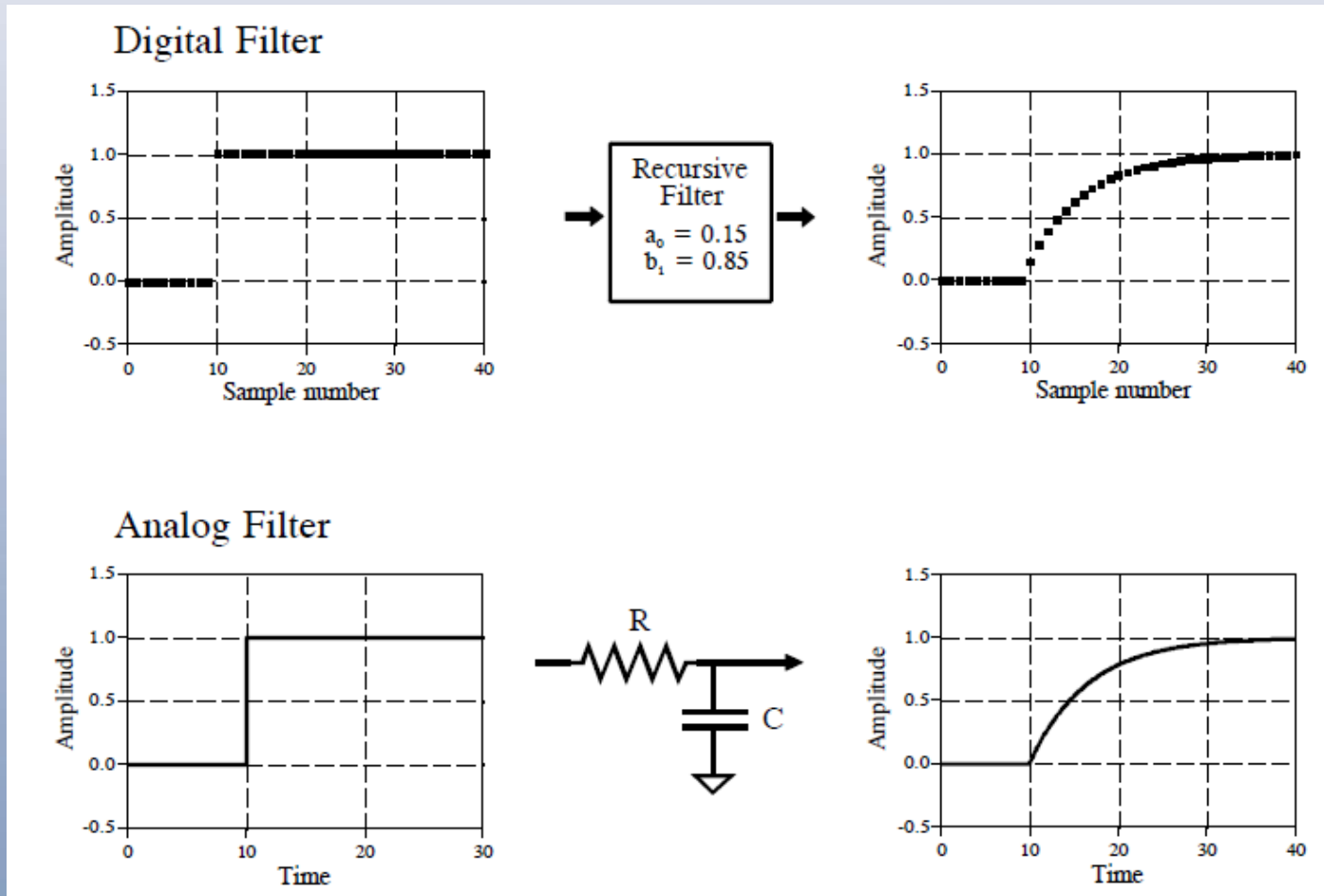
a y b : coeficientes

Cada punto de la señal de salida se encuentra multiplicado los valores de la señal de entrada por los coeficientes “a”, multiplicando los valores calculados previamente de salida por los coeficientes “b” y sumando ambos productos

- La relación entre los coeficientes de recursividad y la respuesta del filtro esta dada por la transformada Z
- Para el diseño de estos filtros se utilizan softwares específicos (ej: Fdatool)

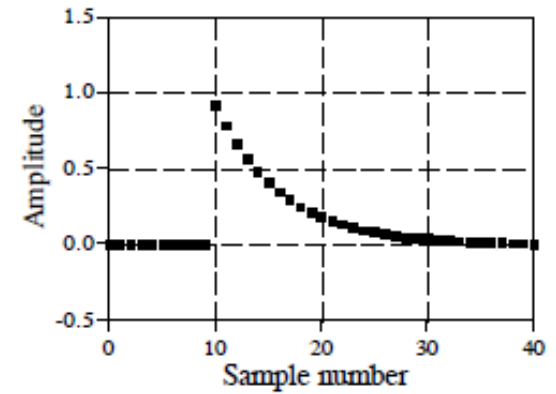
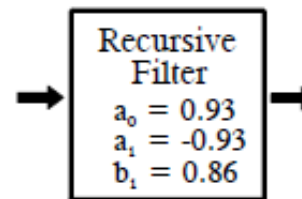
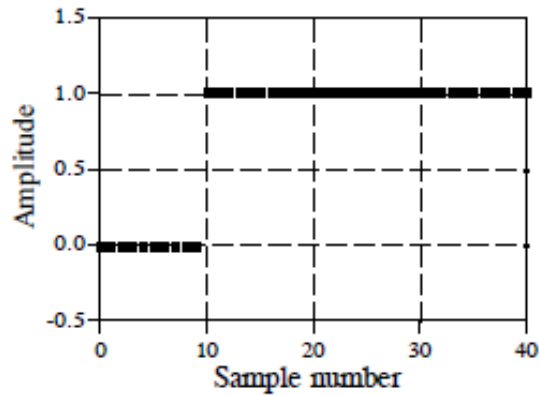
Filtro recursivo polo simple

Filtro Pasabajo

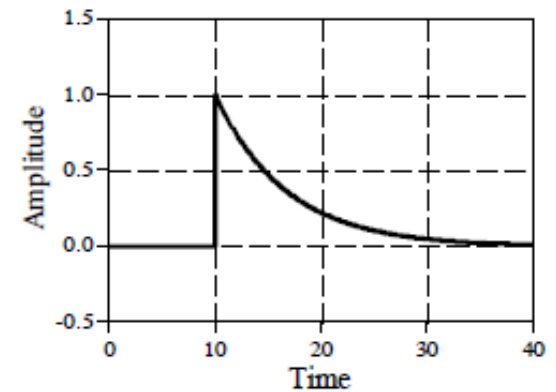
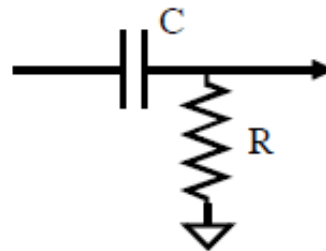
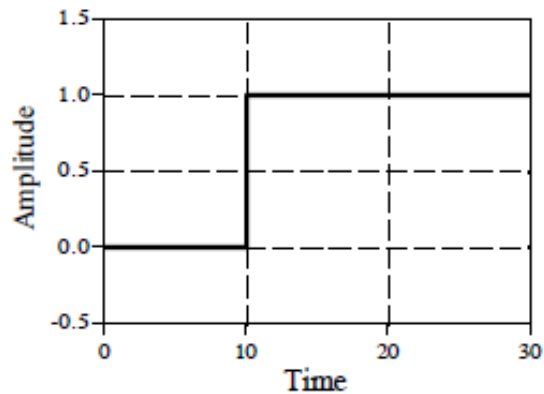


Filtro Pasabajo

Digital Filter



Analog Filter



Filtro Pasa bajo:

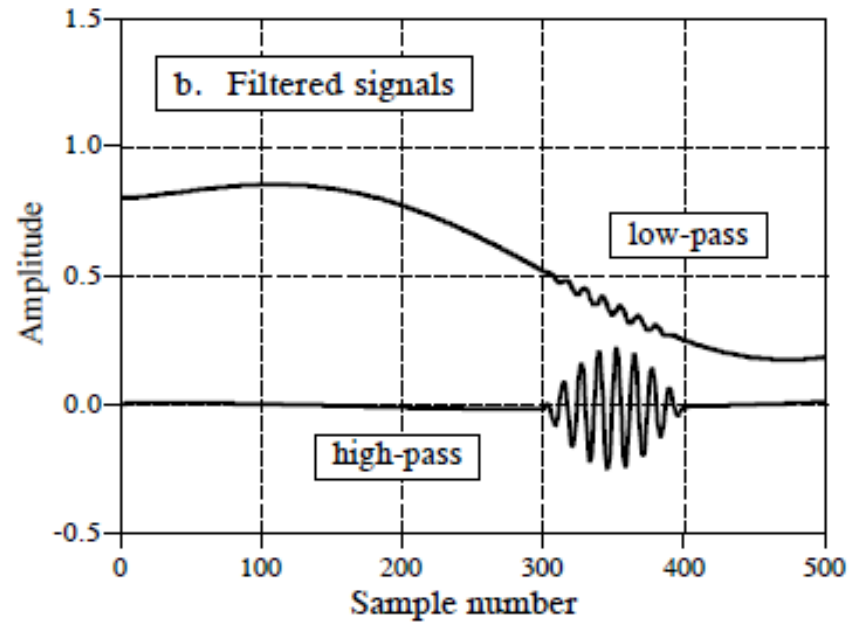
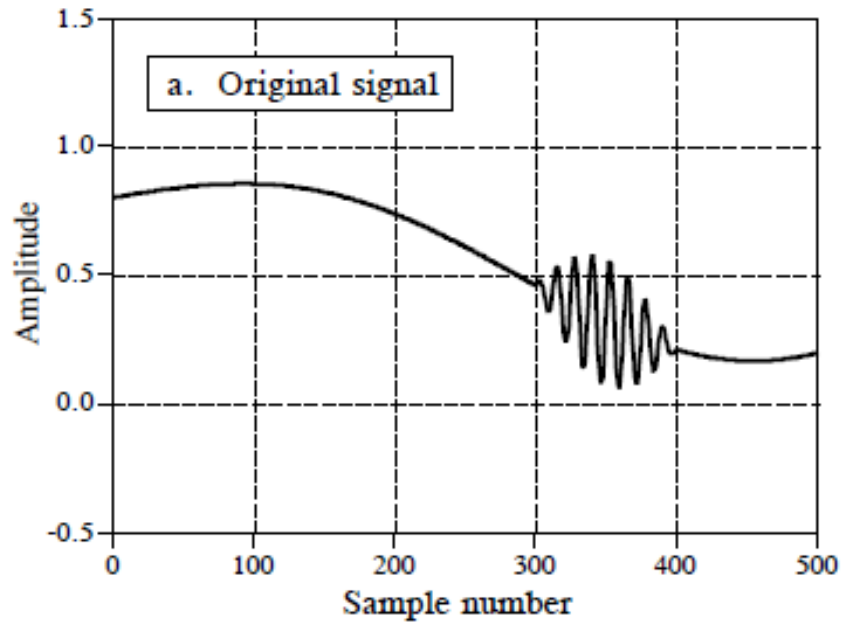
$$\begin{aligned}a_0 &= 1 - x \\b_1 &= x\end{aligned}$$

Filtro Pasa alto:

$$\begin{aligned}a_0 &= (1+x)/2 \\a_1 &= -(1+x)/2 \\b_1 &= x\end{aligned}$$

X es un valor entre 0 y 1 – es la “***cantidad de decaimiento***” entre dos muestras adyacentes

Ejemplo:



El filtro pasa bajo usa $x = 0.95$, mientras que el pasa altos es para un $x = 0.86$.

Constante de tiempo - filtro de un polo:

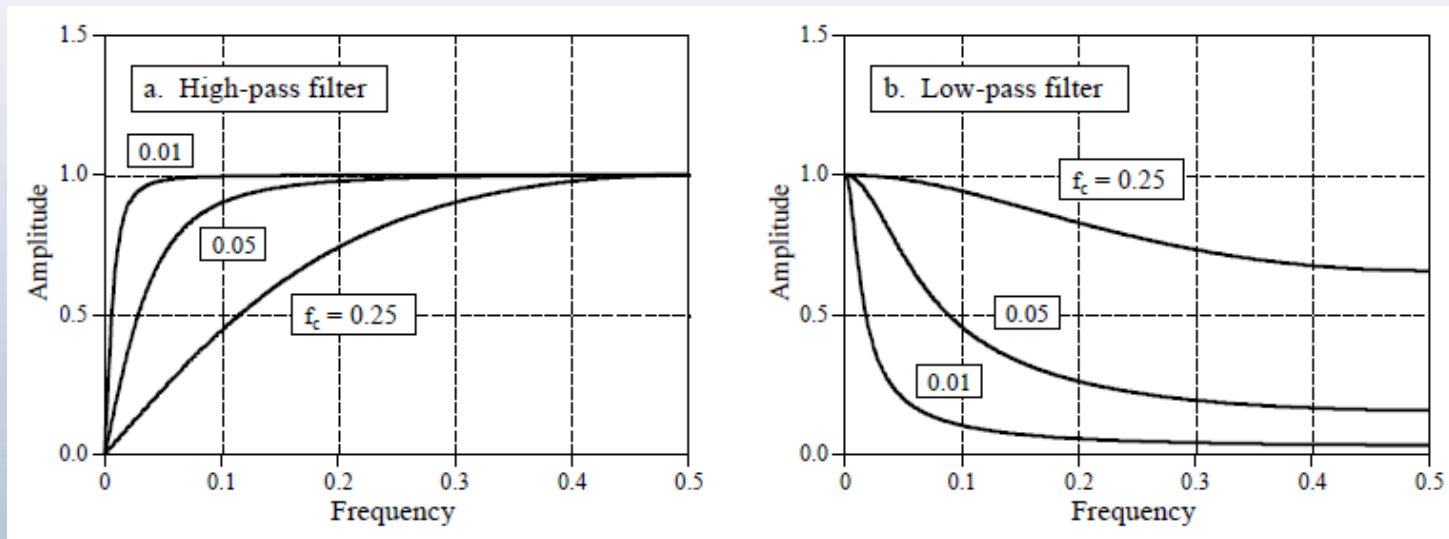
$$x = e^{-1/d}$$

Relaciona la cantidad de decaimiento entre muestras (X) con la constante de tiempo del filtro (d), el número de muestras para que el filtro decaiga a 36,8%

Frecuencia de corte- filtro de un polo:

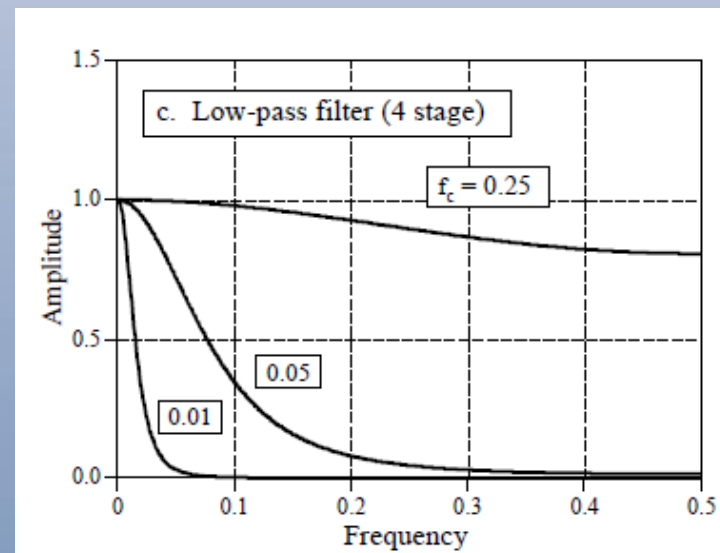
$$x = e^{-2\pi f_c}$$

La cantidad de decaimiento entre muestras (X) es relacionada con la frecuencia de corte del filtro (fc) un valor entre 0 y 0,5.



Single pole frequency responses. Figures (a) and (b) show the frequency responses of highpass and low-pass single pole recursive filters, respectively. Figure (c) shows the frequency response of a cascade of four low-pass filters.

The frequency response of recursive filters is not always what you expect, especially if the filter is pushed to extreme limits. For example, the $f_c = 0,25$ curve in (c) is quite useless. Many factors are to blame, including: aliasing, roundoff noise, and the nonlinear phase response.



Los filtros recursivos de un solo polo tienen buena performance en el dominio del tiempo y pobre en el dominio de la frecuencia. Puede ser mejorado utilizando los filtros en cascada, esto se puede lograr de dos maneras:

- La señal puede ser pasada varias veces por el mismo filtro.
 - Se puede utilizar la transformada Z para encontrar los coeficientes que convenga la cascada en una sola etapa.
-
- Se mejora la atenuación en la banda de corte
 - El Roll-off sigue siendo muy lento

Filtro recursivo de cuatro etapas

Es comparable con un filtro Blackman, con una velocidad de ejecución mucho mayor.

Ecuación de diseño:

$$\begin{aligned}a_0 &= (1-x)^4 \\b_1 &= 4x \\b_2 &= -6x^2 \\b_3 &= 4x^3 \\b_4 &= -x^4\end{aligned}$$

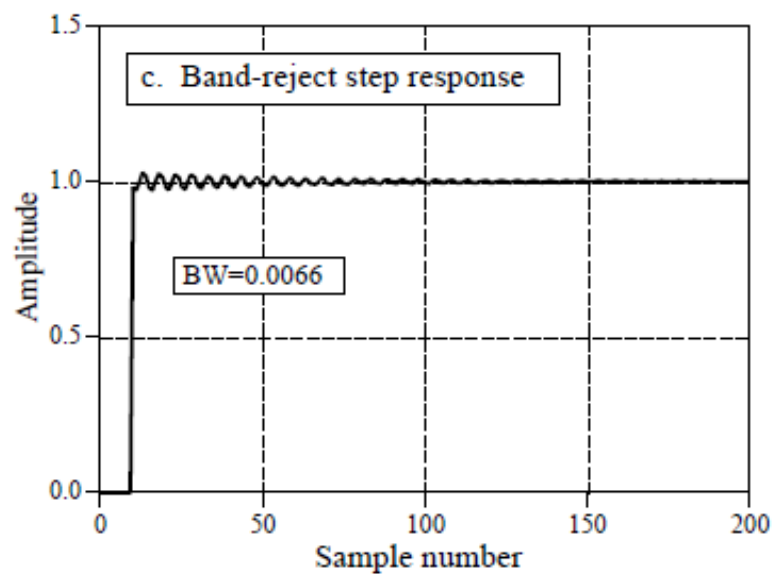
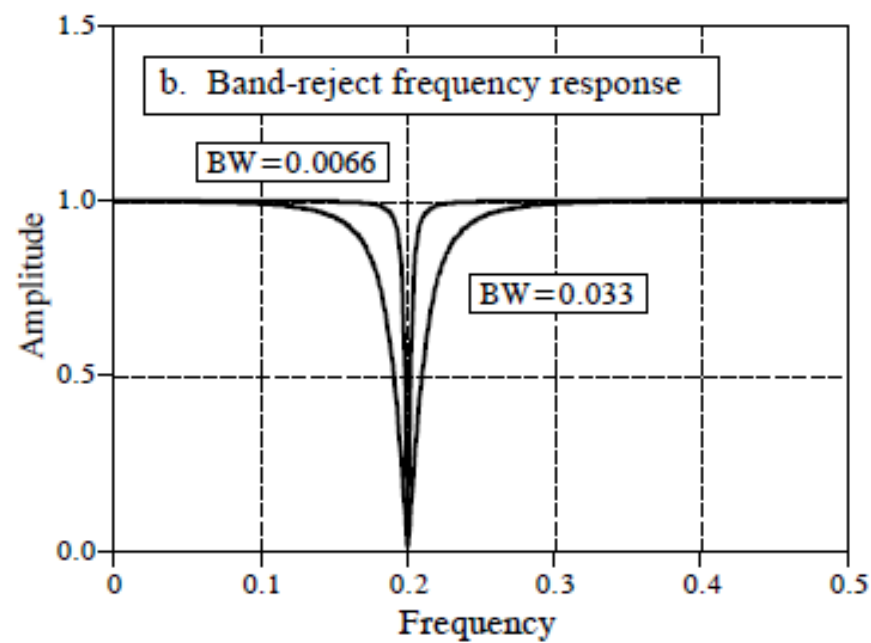
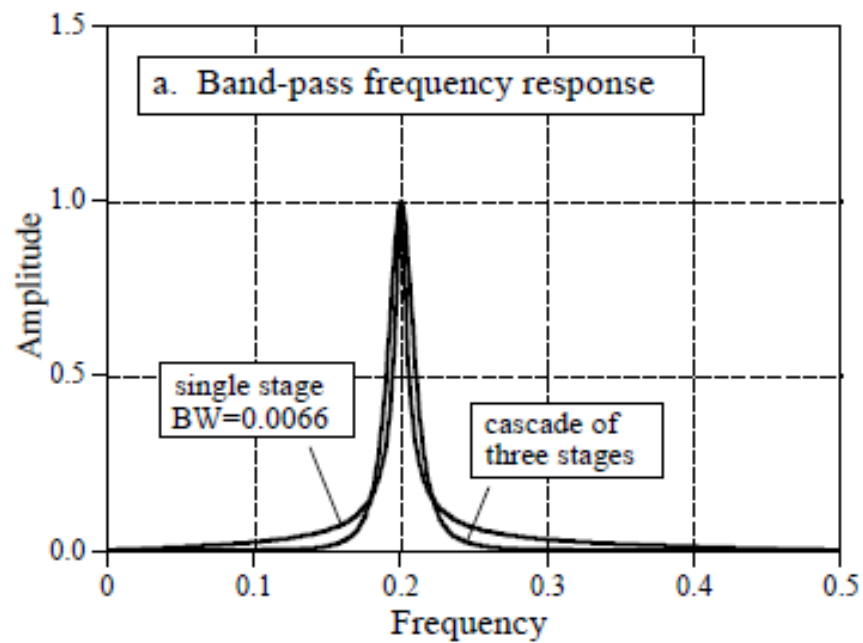
Filtros de banda estrecha

Es muy común querer aislar una banda estrecha de frecuencias de una señal con mayor ancho de banda:

- Eliminar interferencias de AC
- Separar tonos de señalización en líneas telefónicas.

Se pueden diseñar para dos tipos de respuesta:

- Pasa banda
- Elimina banda (filtro notch)



Ecuación de diseño filtro pasa banda:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 - K \\a_1 &= 2(K - R) \cos(2\pi f) \\a_2 &= R^2 - K \\b_1 &= 2R \cos(2\pi f) \\b_2 &= -R^2\end{aligned}$$

Ecuación de diseño filtro elimina banda banda:

$$\begin{aligned}a_0 &= K \\a_1 &= -2K \cos(2\pi f) \\a_2 &= K \\b_1 &= 2R \cos(2\pi f) \\b_2 &= -R^2\end{aligned}$$

Donde:

f = Frecuencia central

BW= Ancho de banda

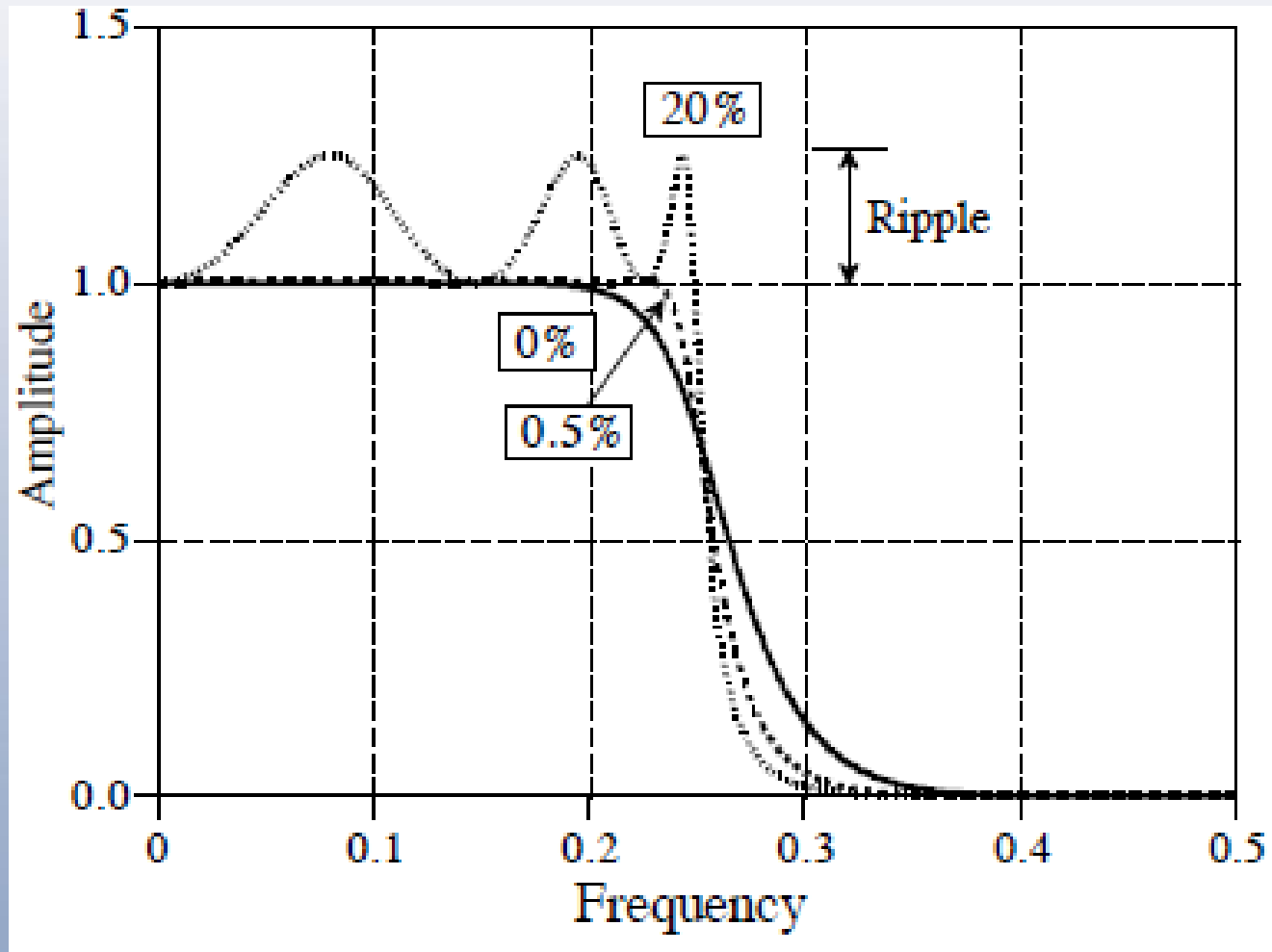
expresados en fracción de f de muestreo

$$K = \frac{1 - 2R \cos(2\pi f) + R^2}{2 - 2 \cos(2\pi f)}$$

$$R = 1 - 3BW$$

Filtros Chebyshev (tipo 1)

- Son utilizados para separar una banda de frecuencias de otra.
- No alcanzan la performance de un filtro de ventana, pero son 10 veces mas rápidos - Recursión en lugar de Convolución –
- La respuesta Chebyshev es una estrategia matemática para lograr un roll-off mas rápido, permitiendo ripple en la respuesta en frecuencia.
- La respuesta Chebyshev tiene un buen equilibrio entre el ripple y el roll-off. Cuando el ripple es 0% el filtro es llamado plano o filtro de butterworth

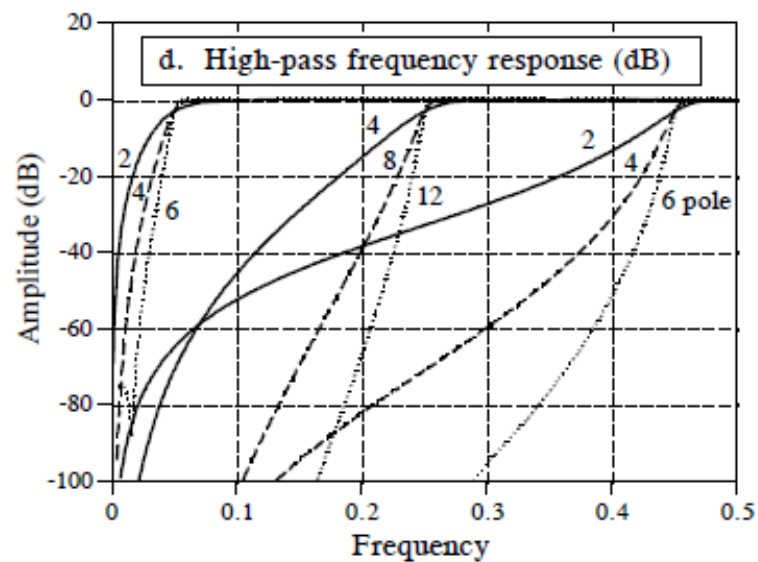
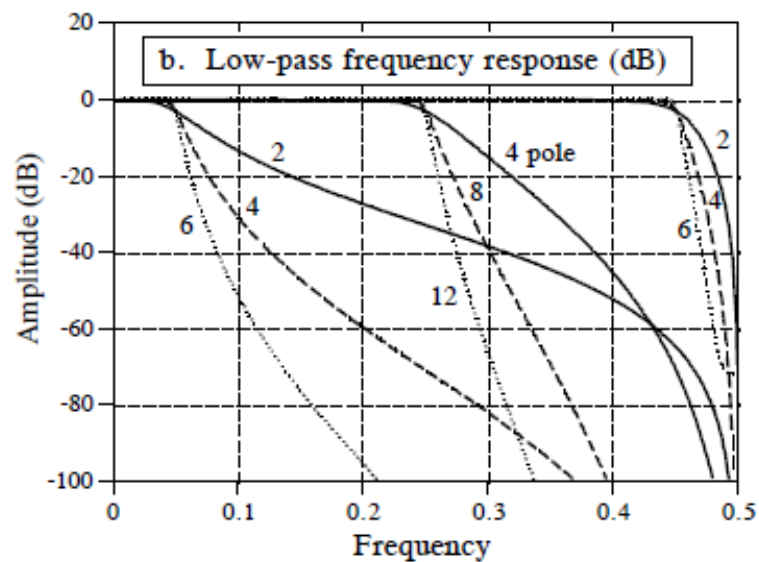
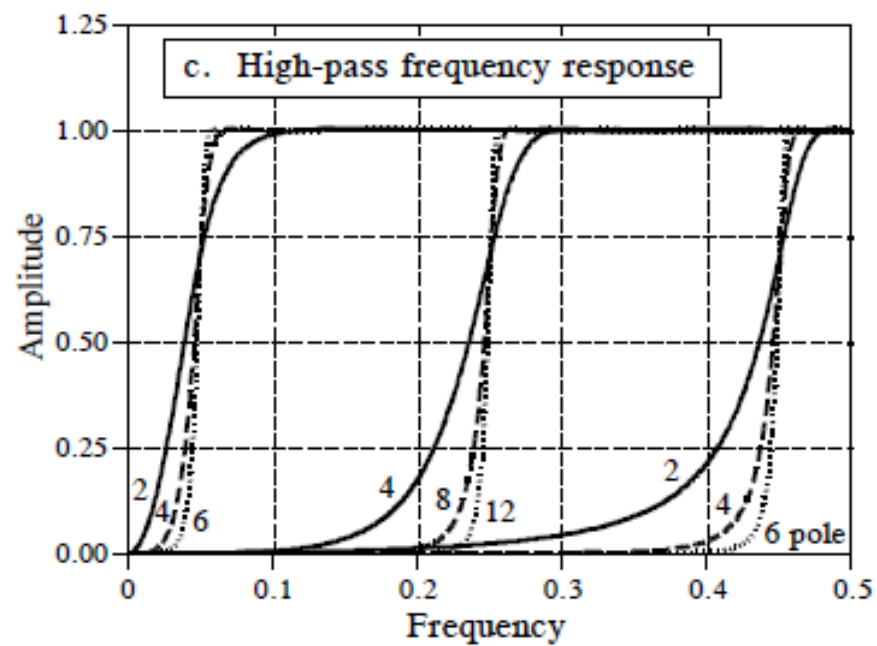
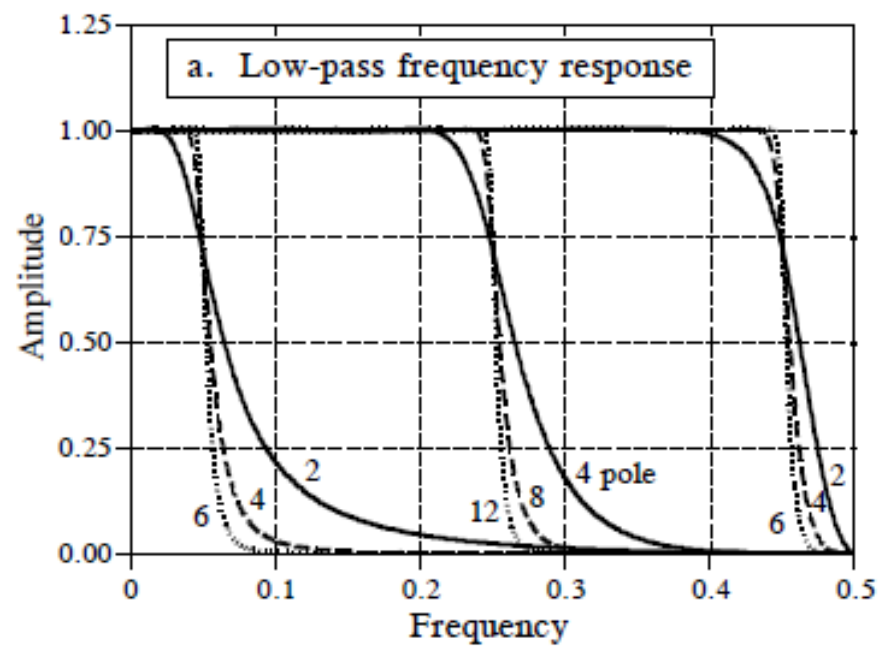


Generalmente un ripple de 0,5% es una buena elección

Diseño del filtro

Se deben seleccionar cuatro parámetros

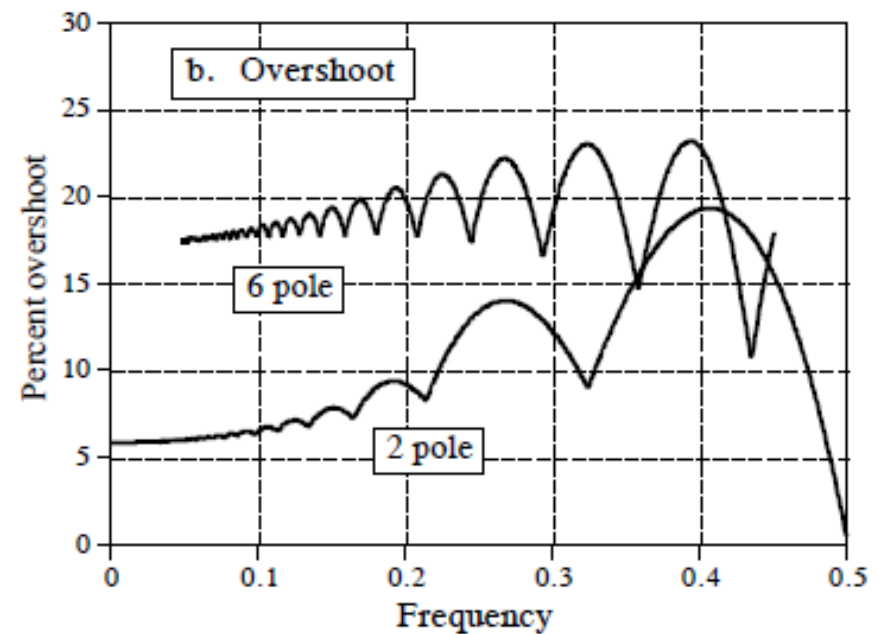
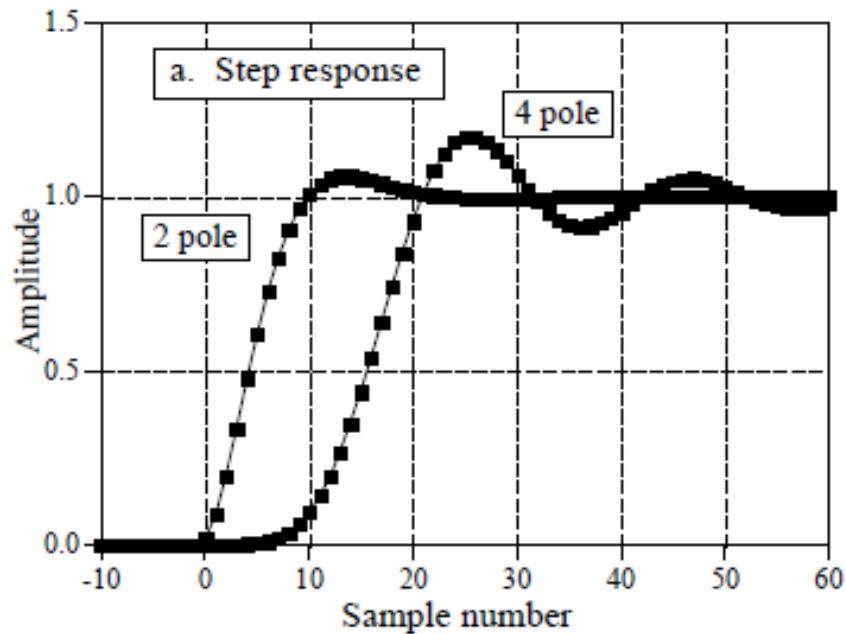
- Respuesta pasa bajo o pasa altos
- Frecuencia de corte
- Porcentaje de ripple en banda de paso
- Numero de polos



f_c	2 Pole	4 Pole	6 Pole
0.01	a0= 8.663387E-04 a1= 1.732678E-03 b1= 1.919129E+00 a2= 8.663387E-04 b2= -9.225943E-01	a0= 4.149425E-07 (!! Unstable !!) a1= 1.659770E-06 b1= 3.893453E+00 a2= 2.489655E-06 b2= -5.688233E+00 a3= 1.659770E-06 b3= 3.695783E+00 a4= 4.149425E-07 b4= -9.010106E-01	a0= 1.391351E-10 (!! Unstable !!) a1= 8.348109E-10 b1= 5.883343E+00 a2= 2.087027E-09 b2= -1.442798E+01 a3= 2.782703E-09 b3= 1.887786E+01 a4= 2.087027E-09 b4= -1.389914E+01 a5= 8.348109E-10 b5= 5.459909E+00 a6= 1.391351E-10 b6= -8.939932E-01
0.025	a0= 5.112374E-03 a1= 1.022475E-02 b1= 1.797154E+00 a2= 5.112374E-03 b2= -8.176033E-01	a0= 1.504626E-05 a1= 6.018503E-05 b1= 3.725385E+00 a2= 9.027754E-05 b2= -5.226004E+00 a3= 6.018503E-05 b3= 3.270902E+00 a4= 1.504626E-05 b4= -7.705239E-01	a0= 3.136210E-08 (!! Unstable !!) a1= 1.881726E-07 b1= 5.691653E+00 a2= 4.704314E-07 b2= -1.353172E+01 a3= 6.272419E-07 b3= 1.719986E+01 a4= 4.704314E-07 b4= -1.232689E+01 a5= 1.881726E-07 b5= 4.722721E+00 a6= 3.136210E-08 b6= -7.556340E-01
0.05	a0= 1.868823E-02 a1= 3.737647E-02 b1= 1.593937E+00 a2= 1.868823E-02 b2= -6.686903E-01	a0= 2.141509E-04 a1= 8.566037E-04 b1= 3.425455E+00 a2= 1.284906E-03 b2= -4.479272E+00 a3= 8.566037E-04 b3= 2.643716E+00 a4= 2.141509E-04 b4= -5.933269E-01	a0= 1.771089E-06 a1= 1.062654E-05 b1= 5.330512E+00 a2= 2.656634E-05 b2= -1.196611E+01 a3= 3.542179E-05 b3= 1.447067E+01 a4= 2.656634E-05 b4= -9.937710E+00 a5= 1.062654E-05 b5= 3.673283E+00 a6= 1.771089E-06 b6= -5.707561E-01
0.075	a0= 3.869430E-02 a1= 7.738860E-02 b1= 1.392667E+00 a2= 3.869430E-02 b2= -5.474446E-01	a0= 9.726342E-04 a1= 3.890537E-03 b1= 3.103944E+00 a2= 5.835806E-03 b2= -3.774453E+00 a3= 3.890537E-03 b3= 2.111238E+00 a4= 9.726342E-04 b4= -4.562908E-01	a0= 1.797538E-05 a1= 1.078523E-04 b1= 4.921746E+00 a2= 2.696307E-04 b2= -1.035734E+01 a3= 3.595076E-04 b3= 1.189764E+01 a4= 2.696307E-04 b4= -7.854533E+00 a5= 1.078523E-04 b5= 2.822109E+00 a6= 1.797538E-05 b6= -4.307710E-01
0.1	a0= 6.372802E-02 a1= 1.274560E-01 b1= 1.194365E+00 a2= 6.372802E-02 b2= -4.492774E-01	a0= 2.780755E-03 a1= 1.112302E-02 b1= 2.764031E+00 a2= 1.668453E-02 b2= -3.122854E+00 a3= 1.112302E-02 b3= 1.664554E+00 a4= 2.780755E-03 b4= -3.502232E-01	a0= 9.086148E-05 a1= 5.451688E-04 b1= 4.470118E+00 a2= 1.362922E-03 b2= -8.755594E+00 a3= 1.817229E-03 b3= 9.543712E+00 a4= 1.362922E-03 b4= -6.079376E+00 a5= 5.451688E-04 b5= 2.140062E+00 a6= 9.086148E-05 b6= -3.247363E-01

Overshoot

Los filtros butterworth y chebyshev tienen un sobreimpulso del 5 al 30% en la respuesta al escalon dependiendo de los números de polos



Estabilidad

- La principal limitación en los filtros por convolución es el tiempo de ejecución
- Los filtros recursivos son rápidos, pero su principal problema es la estabilidad
- El numero de polos esta limitado por la precisión de la variable utilizada, por efecto del redondeo. Para single precisión:

Cutoff frequency	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.45	0.48
Maximum poles	4	6	10	20	10	6	4

Para mejorar esto se puede filtrar en varias etapas o usar precisión double