Algebră și geometrie

Notițe de seminar

Adrian Manea

Curs: A. Niță

12 ianuarie 2021

Cuprins

SEMINAR 1

RECAPITULARE: METODA LUI GAUSS

1.1 Eliminare gaussiană

Metoda eliminării gaussiene (numită și metoda Gauss(-Jordan)) este folosită pentru a aduce matrice la o formă mai simplă, anume triunghiulară sau chiar forma matricei unitate.

Principalele aplicații ale eliminării gaussiene sînt în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare și în inversarea matricelor.

În ambele situații, se trece de la o stare la alta făcînd *transformări elementare*, adică acele operații permise în determinanți, care nu schimbă valoarea determinantului. În general, operațiile pe care le putem face intră sub denumirea de *combinații liniare cu linii sau coloane.*

Un exemplu este următorul. Fie sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 & = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = m^2, \end{cases}$$

unde $m \in \mathbb{R}$. Evident, soluția sistemului va implica o discuție după m.

Fie A matricea sistemului, iar B matricea-coloană a termenilor liberi. Prelucrăm matricea extinsă $(A \mid B)$ pînă cînd aducem pe A în formă (superior) triunghiulară.

Considerăm matricea $M = (A \mid B)$ de mai sus:

$$
\begin{aligned}
(A|B) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & m & 1 & | & m \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix}
&\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - mL_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & | & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & | & m^2-m. \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

În acest punct, avem o discuție:

(a) Dacă $m = 1$, atunci sistemul se reduce la prima ecuație, deci este compatibil dublu nedeterminat. Rezultă soluția

$$\{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Dacă $m \neq 1$, atunci putem continua transformările și ajungem, în fine, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m & | & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 0 & 2 & | & (m+1)^2 \end{pmatrix}$$

Aici discutăm din nou:

(b1) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil, deoarece ultima ecuație devine $0 = 1$.

(b2) Dacă $m \neq -2$, putem continua transformările și ajungem, în cele din urmă, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -(m+1)/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/(m+2) \\ 0 & 0 & 1 & | & (m+1)^2/(m+2) \end{pmatrix}$$

În acest ultim caz, sistemul este compatibil determinat, soluția fiind dată de ultima coloană:

$$\begin{cases} x_1 &= -\dfrac{m+1}{2} \\[2ex] x_2 &= \dfrac{1}{m+2} \\[2ex] x_3 &= \dfrac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases}$$

Concluzia generală este:

(a) Dacă $m \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, sistemul are soluție unică;

(b) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil;

(c) Dacă $m = -1$, sistemul este compatibil nedeterminat.

Similar, pentru a calcula inversa unei matrice, bordăm matricea dată cu matricea unitate și efectuăm transformări elementare pînă ce matricea inițială devine matricea unitate.

Iată un exemplu, notînd și transformările:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to (1/2)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -5L_1 + L_3]{L_2 \to 2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to (1/4)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to (3/2)L_2 + L_3]{L_1 \to (-1/2)L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -31/8 & | & -17/8 & 3/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to (-8/31)L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to (-7/4)L_3 + L_2]{L_1 \to (-5/8)L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ 0 & 1 & 0 & | & -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

Rezultă că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Exerciții

1. Rezolvați următoarele sisteme, atît cu metoda matriceală clasică, cît și cu metoda lui Gauss:

(a) $\begin{cases} x + 3y - z & = 1 \\ 3x + y + 2z & = 4 \\ 5x - 2y + z & = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x - y + 2z + 3t & = 4 \\ x + 3y - z + t & = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 3z & = 1 \\ 3x + 2y - z & = 4 \\ x + 3y - 4z & = 3 \end{cases}.$

2. Calculați inversele matricelor, atît cu metoda folosind matricea adjunctă, cît și folosind metoda lui Gauss:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SEMINAR 2

SPAȚII VECTORIALE. GENERALITĂȚI

2.1 Spații vectoriale

Noțiunea de spațiu vectorial face legătura între geometrie și algebră. De fapt, a permis utilizarea metodelor de structuri algebrice în geometria analitică. Exemplul de bază este acela al planului real $V = \mathbb{R}^2$, în care considerăm adunarea vectorilor și înmulțirea lor cu scalari. Astfel, fie vectorii:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \vec{w} = c\vec{i} + d\vec{j},$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Definim operația de adunare a vectorilor, pe componente:

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + c)\vec{i} + (b + d)\vec{j}.$$

Cu această definiție, observăm că $(V, +)$ are o structură de grup comutativ (justificați!).

În plus, mai avem la dispoziție și operația de înmulțire cu scalari. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalar (număr real, în cazul de față). Se definește operația:

$$\alpha \cdot \vec{v} = \alpha a\vec{i} + \alpha b\vec{j}.$$

Cu această definiție, se verifică imediat proprietățile (pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$):

- $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$;
- $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w})$;
- $1_{\mathbb{R}} \cdot \vec{v} = \vec{v}$;
- $0_{\mathbb{R}} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Mai amintim, de asemenea, că mulțimea numerelor reale are o structură de corp comutativ, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Sîntem, astfel, conduși la următoarea:

Definiție 2.1: Spunem că V are structură de *spațiu vectorial peste* K (echivalent, V este K-spațiu vectorial) dacă:

1. $(V, +)$ are structură de grup comutativ;

2. $(K, +, \cdot)$ are structură de corp comutativ;

3. există o *operație externă* $\cdot : V \times K \longrightarrow K$ care satisface

   - $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
   - $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
   - $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
   - $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
   - $1_K \cdot x = x$;
   - $0_K \cdot x = 0_V$;

   pentru orice $x, y \in V$ și $\alpha, \beta \in K$.

În general, elementele grupului V se vor nota cu litere din alfabetul latin și se vor numi *vectori*, iar elementele corpului K se vor nota cu litere grecești și se vor numi *scalari.*

Observație 2.1: Are sens, în general, să lucrăm și pe cazul necomutativ, adică, de exemplu, înmulțirea cu scalari să fie posibilă doar într-o parte sau să nu fie egală expresia αv cu $v\alpha$. Dar aceste cazuri depășesc scopul acestui seminar și vor fi omise. De aceea, comutativitatea va fi presupusă implicit în tot ceea ce urmează.

Spațiile vectoriale se mai numesc și *spații liniare*, deoarece toate expresiile și ecuațiile ce vor apărea vor fi liniare, i.e. de gradul întîi.

Dacă corpul K este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, vom mai numi spațiile reale, respectiv complexe. În acest seminar, majoritatea cazurilor vor fi de spații vectoriale reale.

Cîteva exemple de bază urmează. Cititorul este încurajat să verifice afirmațiile cu o scurtă demonstrație.

1. K este un K-spațiu vectorial, deci putem avea, de exemplu, $V = K = \mathbb{R}$;

2. $\mathbb{R}^n$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial, unde vectorii sînt n-tupluri de numere reale, $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. $M_{m,n}(K)$ este un K-spațiu vectorial, indiferent de m, n, K. În particular, $M_4(\mathbb{R})$ este un spațiu vectorial real, iar $M_{2,7}(\mathbb{Z}_{13})$ este un $\mathbb{Z}_{13}$-spațiu vectorial.

4. $\mathbb{R}$ este un $\mathbb{Q}$-spațiu vectorial, dar nu este un $\mathbb{C}$-spațiu vectorial;

5. $\mathbb{R}[X]$ (mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali) este un spațiu vectorial real;

6. $\mathbb{R}_n[X] = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad} f \le n\}$ este un spațiu vectorial real.

2.2 Subspații vectoriale

Ca de obicei, atunci cînd se introduc structuri algebrice noi, se caută și conceptul de *substructură* corespunzător. În cazul de față, este vorba despre *subspații vectoriale*. Ca în cazul grupurilor, acestea se definesc simplu:

Definiție 2.2: Fie V un K-spațiu vectorial. Submulțimea $W \subseteq V$ se numește *subspațiu vectorial* al lui V, notat $W \hookrightarrow V$ dacă W la rîndul său are structură de K-spațiu vectorial.

Tot ca în cazul grupurilor, avem o teoremă de caracterizare care ne este de ajutor în calcule. Cîteva exemple simple (justificați!):

1. Mulțimea $\{0_V\}$ formează un subspațiu vectorial al lui V, numit subspațiul nul sau trivial. De asemenea, V este la rîndul său subspațiu al lui V. Aceste exemple se numesc *subspații improprii*, iar noi vom fi interesați de celelalte cazuri, numite *subspații proprii*.

2. $\mathbb{R}_n[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[X]$, pentru orice număr natural n.

3. Submulțimea $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 0\}$ este un subspațiu al spațiului $\mathbb{R}^2$.

4. Mulțimea matricelor pătratice de mărime n, superior triunghiulare, este un subspațiu al spațiului de matrice pătratice de mărime n.

5. În spațiul $\mathbb{R}^3$, dreptele și planele care conțin originea sînt subspații.

6. În spațiul $\mathbb{R}^2$, mulțimea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x - 1\}$ *nu* formează un subspațiu.

2.3 Operații cu subspații

Fie V un K-spațiu vectorial și V_1, V_2 două subspații ale sale.

Definiție 2.3: Mulțimea $V_1 + V_2 = \{x \in V \mid \exists x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, x = x_1 + x_2\}$ se numește *suma subspațiilor* V_1 și V_2.

Dacă, în plus, $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$, atunci suma se numește *directă* și se notează $V_1 \oplus V_2$.

Observație 2.2: Dacă $V_1, V_2 \hookrightarrow V$, este imposibil ca $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. (Justificați!)

Cazul în care suma a două subspații este directă este foarte util prin următorul rezultat.

Propoziţie 2.1: *Suma dintre subspațiile V_1 și V_2 ale spațiului V este directă dacă și numai dacă orice vector din v se descompune în mod unic în $v = v_1 + v_2$, cu $v_1 \in V_1$ și $v_2 \in V_2$.*

Dacă acesta este cazul, spunem că v_1 este proiecția lui V pe V_1 și similar pentru V_2.

O altă operație permisă cu subspații este intersecția: Dacă V_1, V_2 sînt subspații ale lui V, atunci și $V_1 \cap V_2$ este subspațiu.

Reuniunea de subspații, însă, nu este subspațiu, în general!

2.4 Bază și dimensiune

Fie V un K-spațiu vectorial și $S = \{x_1, \dots, x_n\} \leq V$ o submulțime nevidă de vectori din V.

O expresie de forma $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ se numește *combinația liniară* a vectorilor x_i cu scalarii $\alpha_i \in K$.

Definiţie 2.4: Mulțimea S de mai sus se numește:

- *sistem liniar independent* dacă orice combinație liniară a vectorilor din S cu scalari din K care este nulă are toți scalarii nuli. Cu alte cuvinte, dacă $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, atunci toți $\alpha_i = 0, \forall i$, adică singura combinație liniară nulă care folosește toți vectorii din S este cea trivială.
- *sistem de generatori* dacă orice vectori $v \in V$ se poate scrie în funcție de vectorii din S. Cu alte cuvinte, pentru orice $v \in V$, există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ astfel încît $v = \sum \alpha_i x_i$. Dacă un spațiu vectorial admite un sistem de generatori cu un număr finit de vectori, atunci spațiul se numește *finit generat*. Dacă mulțimea $\{x_1, \dots, x_n\}$ este un sistem de generatori pentru V, notăm aceasta cu $V = \mathrm{Sp}\{x_1, \dots, x_n\}$, de la englezescul *span* (acoperire, întindere).
- *bază* dacă este simultan sistem liniar independent și sistem de generatori. Cu alte cuvinte, orice vector din V se poate scrie în funcție de vectorii din S, iar această scriere este unică.

Dacă S este bază, numărul de elemente din S se numește *dimensiunea* spațiului vectorial V, notat $\dim_K V$ sau mai simplu $\dim V$, cînd corpul de scalari este clar din context.

Un rezultat esențial este:

Teoremă 2.1: *Orice spațiu vectorial admite (cel puțin) o bază și orice două baze ale unui spațiu vectorial au același număr de elemente.*

Așadar, fie că este vorba despre spații finit dimensionale sau infinit dimensionale, știm sigur că o bază există, iar conceptul de dimensiune este corect definit.

În plus, în toate cazurile pe care le vom discuta în continuare, vom lucra doar cu spații finit dimensionale.

Exemple fundamentale:

1. Pentru spațiul real $\mathbb{R}^n$, o bază este:

$$\{e_1 = (1,0,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,0,1)\},$$

care se numește *baza canonică.*

2. Pentru spațiul real $\mathbb{R}[X]$, o bază este $\{1, X, X^2, X^3, \dots, X^n, \dots, \}$.

3. Pentru spațiul de matrice $M_n(\mathbb{R})$, o bază este formată din matricele care au toate elementele nule, mai puțin unul, care este egal cu 1. De exemplu, pentru $M_2(\mathbb{R})$, o bază este:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Pentru spațiul real $\mathbb{C}$, o bază este formată din $\{1, i\}$.

5. Pentru spațiul real $\mathbb{R}$, o bază este $\{1\}$.

Să mai dăm cîteva detalii pentru cazul binecunoscut al spațiului real $\mathbb{R}^2$. Dimensiunea lui este 2 și o bază (baza canonică) este $B = \{(1,0), (0,1)\}$. Elementele bazei pot fi asimilate cu versorii $\vec{i} = (1,0)$ și $\vec{j} = (0,1)$. Mai mult, dat un vector oarecare, $v = (a,b)$, el poate fi scris în funcție de elementele bazei în mod unic:

$$(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1).$$

Scalarii a și b de mai sus se numesc *coordonatele* vectorului v în baza canonică B.

Similar, de exemplu, în spațiul $V = \mathbb{R}_3[X]$, baza canonică este $B = \{1, X, X^2, X^3\}$, iar dacă luăm polinomul

$$f = 3 - 5X + 2X^2 + 7X^3,$$

atunci coordonatele sale în baza canonică sînt $3, -5, 2, 7$.

2.5 Teorema lui Grassmann

Fie V un K-spațiu vectorial finit dimensional și V_1, V_2 două subspații ale sale. Teorema următoare leagă conceptul de dimensiune de operațiile cu subspații.

Teoremă 2.2 (Hermann Grassmann)**:** *În contextul și cu notațiile de mai sus, are loc egalitatea:*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Comparați rezultatul de mai sus cu unul cunoscut, despre cardinale:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

De aici rezultă că o bază în $V_1 + V_2$ este reuniunea bazelor din V_1, respectiv V_2.

2.6 Exerciții

1. Arătați că următoarele mulțimi sînt subspații vectoriale în spațiile indicate. Determinați o bază și dimensiunea fiecărui subspațiu.

(a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$;

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$;

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$;

(d) $V_4 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(1) = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}_2[X]$;

(e) $V_5 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p'(1) = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}_2[X]$;

(f) $V_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0, 2x + y = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$;

(g) $V_7 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\} \hookrightarrow M_2(\mathbb{R})$;

(h) $V_8 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\} \hookrightarrow M_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea:

$$W = \left\{ A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & u & z \end{pmatrix}, x, y, z, u \in \mathbb{R}, x = y + z \right\}.$$

(a) Să se arate că $W \hookrightarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$;

(b) Găsiți o bază a lui W și $\dim_{\mathbb{R}} W$.

3. Arătați că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar independent, unde:

$$v_1 = (1, -1, 2), \quad v_2 = (3, -1, 1), \quad v_3 = (0, 1, 5).$$

Este acesta și sistem de generatori?

4. Fie mulțimea $B = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq \mathbb{R}_2[X]$, unde:

$$p_1 = X^2 - 1, \quad p_2 = 2X + 1, \quad p_3 = X^2 + 3.$$

Arătați că B este o bază a lui $\mathbb{R}_2[X]$ și găsiți coordonatele vectorului $q = 3X^2 - X + 4$ în baza B.

5. Fie subspațiile:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 2), (3, 1, 0)\}.$$

Găsiți cîte o bază și dimensiunea subspațiilor: V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$.
Este suma $V_1 + V_2$ directă?

6. Aceeași cerință ca la exercițiul 5 pentru spațiile:

(a)

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + z = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 0), (2, 1, 1), (1, 1, 0)\}$$

(b)

$$V_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(2) = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{X, 2X^2 + 1, 3\}$$

(c)

$$V_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$$
$$V_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$$

(d)

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + z = 0 \text{ și } 5y - 2t = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 2)\}.$$

7. Verificați dacă mulțimile S de vectori din spațiul vectorial V sînt liniar independente, iar în caz afirmativ, completați-le pînă la o bază a lui V:

(a) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, -1, 0), (2, 0, 0)\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 1, 1), (2, 1, 2)\}$;

(c) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, -1, 2), (0, 2, 0), (1, 1, 1)\}$;

(d) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1,1,1),(2,2,0),(-1,1,1),(0,0,2)\}$;

(e) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{X, 1 + 2X\}$;

(f) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{X^2, -X\}$;

(g) $V = M_2(\mathbb{R}), S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(h) $V = \mathbb{R}_3[X], S = \{2 + X, 5 - X, 3 - 2X + X^2\}$.

8. Verificați dacă mulțimile S de vectori din spațiul vectorial V sînt sisteme de generatori, iar în caz afirmativ, extrageți din ele o bază a lui V:

(a) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(-1,2,0),(3,1,1),(0,1,1),(-1,2,5),(0,2,2)\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(0,0,0),(2,0,0),(1,0,1),(-1,1,1),(2,1,2)\}$;

(c) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{X, X^2, 1 - 3X, 2 + 2X - X^2, 1 + X^2, 1 - X, 1 + X\}$;

(d) $V = \mathbb{R}_2[X], S = \{1 - X, 1 + X, 1 - X^2, 1 + X^2\}$.

9. Pentru spațiile vectoriale V de mai jos, arătați că mulțimea B este o bază, apoi găsiți coordonatele vectorului v în baza B:

(a) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(1,-1,0),(2,0,1),(0,-1,2)\}, v = (1,2,3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(0,-1,2),(3,1,1),(2,-1,3)\}, v = (3,2,1)$;

(c) $V = \mathbb{R}^3, B = \{(1,1,1),(-2,3,1),(3,1,1)\}, v = (2,2,2)$;

(d) $V = \mathbb{R}_2[X], B = \{1 + X, 1 - X^2, 5\}, v = X$;

(e) $V = \mathbb{R}_2[X], B = \{3 + X - 2X^2, 1 + 3X, 2\}, v = 2 + 3X^2$;

(f) $V = \mathbb{R}_3[X], B = \{5 - X, 2, 4 + 3X^2, 1 + 2X\}, v = 1 + X + X^2 + X^3$.

SEMINAR 3

APLICAȚII LINIARE

În continuare, studiem morfismele de spații vectoriale și legătura strînsă care există între acestea și matrice.

Definiția de bază urmează.

Definiție 3.1: Fie V, W două K-spații vectoriale și $f : V \longrightarrow W$ o funcție.

f se numește *aplicație liniară* (morfism de spații vectoriale) dacă satisface proprietatea:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall \alpha, \beta \in K, x, y \in V.$$

Proprietatea se mai poate scrie pe bucăți, sub forma:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Cu alte cuvinte, f „respectă" atît adunarea vectorilor cît și înmulțirea cu scalari sau, pe scurt, respectă *combinațiile liniare*.

Dată o astfel de aplicație liniară, vom fi interesați de:

- *Imaginea aplicației*, $\mathrm{Im} f = \{w \in W \mid \exists v \in V, f(v) = w\}$;
- *Nucleul aplicației*, $\mathrm{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$.

Exercițiu: În contextul și cu notațiile de mai sus, arătați că $\mathrm{Im} f \hookrightarrow W$ și $\mathrm{Ker} f \hookrightarrow V$.

Ca în cazul oricăror morfisme de structuri algebrice, avem noțiunile cunoscute:

- f se numește *injectivă* dacă oricînd $f(v_1) = f(v_2)$, ca vectori ai lui W, rezultă că $v_1 = v_2$, ca vectori ai lui V;
- f se numește *surjectivă* dacă pentru orice vector $w \in W$ există un vector $v \in V$ astfel încît $f(v) = w$;

- f se numește *bijectivă* dacă este simultan injectivă și surjectivă.

În cazul în care $f : V \longrightarrow W$ este un morfism bijectiv, f se numește *izomorfism* de spații vectoriale, iar cele două spații se numesc *izomorfe*, notat $V \simeq W$.

De asemenea, au loc rezultatele:

- $V \simeq W$ dacă și numai dacă $\dim V = \dim W$;
- $\mathrm{Ker} f = \{0_V\}$ dacă și numai dacă f este injectivă;
- $\mathrm{Im} f \simeq W$ dacă și numai dacă f este surjectivă.

Exercițiu*: Demonstrați afirmațiile de mai sus.

Exercițiu*: Fie $f : V \longrightarrow W$ o aplicație liniară.

(a) Fie S un sistem liniar independent de vectori din V. Arătați că $f(S)$ este un sistem liniar independent de vectori din W dacă și numai dacă f este injectivă.

(b) Fie S un sistem de generatori ai lui V. Arătați că $f(S)$ este un sistem de generatori ai lui W dacă și numai dacă f este surjectivă.

(c) Fie B o bază a lui V. Deduceți că $f(B)$ este o bază a lui W dacă și numai dacă f este bijectivă.

Toate calculele cu aplicații liniare sînt ușurate de următorul concept.

Definiție 3.2: Fie $f : V \longrightarrow W$ o aplicație liniară și $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ o bază a lui V.

Matricea care are drept coloane $f(v_i)$ se numește *matricea aplicației f* în baza B, notată pe scurt M_f^B.

Uneori, se specifică și o bază B' a lui W și se spune că f este matricea lui f în bazele B și B'.

În majoritatea exercițiilor, bazele considerate vor fi cele canonice, astfel că se poate face calculul foarte simplu.

De asemenea, un rezultat fundamental este următorul:

Teoremă 3.1 (Teorema rang-defect): *Fie $f : V \longrightarrow W$ o aplicație liniară,* $\mathrm{Ker} f$*, nucleul său și* $\mathrm{Im} f$*, imaginea sa. Atunci are loc:*

$$\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V.$$

Teorema se mai numește astfel deoarece:

- $\dim \mathrm{Ker} f$ se mai numește *defectul* aplicației f, notat cu $\mathrm{def} f$;

- $\dim \mathrm{Im} f$ se mai numește *rangul* aplicației f, notat cu $\mathrm{rang} f$.

În plus, după cum sugerează numele, avem:

Teoremă 3.2: *În contextul și cu notațiile de mai sus, fie A matricea aplicației f într-o bază B a spațiului vectorial V.*

Atunci $\mathrm{rang} f = \mathrm{rang} A$.

3.1 Exerciții

1. Pentru aplicațiile liniare de mai jos, determinați:

(a) matricea aplicației în baza B specificată;

(b) nucleul aplicației, o bază și dimensiunea lui. Verificați dacă aplicația este injectivă.

(c) imaginea aplicației, o bază și dimensiunea ei. Verificați dacă aplicația este surjectivă.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (3x - y, y + 2z, 2x + y - z)$, B este baza canonică;

(2) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, -y, x + 3z)$, B este baza canonică;

(3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y + 2z, 3x - z, x - y)$, $B = \{b_1 = (1, -1, 0), b_2 = (0, 1, 1), b_3 = (0, 0, 3)\}$;

(4) $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], f(a + bX + cX^2 + dX^3) = c + aX - 2dX^2$, B este baza canonică;

(5) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], f(a + bX + cX^2) = b - aX + 2cX^2$, B este baza canonică;

(6) $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a - c & 2d \\ b + a & c + a \end{pmatrix}$, B este baza canonică;

(7) $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2c \\ b & 0 \end{pmatrix}$, B este baza canonică;

(8) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], f(a, b, c) = b + 2aX - cX^2$, iar B este baza canonică;

(9) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b + c \\ c - a & a + b \end{pmatrix}$, B este baza canonică;

(10) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4, f(a + bX + cX^2) = (a - c, a - b, b - c, 2c)$, B este baza canonică;

(11) $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 3c - 2dX^2 + aX^3$, B este baza canonică;

(12) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], f(a + bX + cX^2) = (a + c)X - bX^2$, B este baza canonică.

Indicații: (1) $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Atunci obținem:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (3,1,-1) \\ f(0,1,0) &= (-1,1,1) \\ f(0,0,1) &= (0,2,-1), \end{aligned}$$

care devin coloanele matricei aplicației. Deci:

$$A = M_f^B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nucleul aplicației se determină cu definiția:

$$\text{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\},$$

care conduce la sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 3x - y & = 0 \\ y + 2z & = 0 \\ 2x + y - z & = 0 \end{cases},$$

a cărui matrice este chiar A. Soluția sistemului alcătuiește nucleul aplicației. Calculînd efectiv, putem apoi extrage o bază. Se obține $\text{Ker} f = \{(0,0,0)\}$, deci $\dim \text{Ker} f = 0$, iar baza este vectorul nul.

Imaginea aplicației se poate determina astfel: $\dim \text{Im} f = \text{rang} A = 3$, în acest caz. Rezultă, în particular, că aplicația este bijectivă, deci automorfism (izomorfism între un spațiu și el însuși). Alternativ, puteam observa aceasta din teorema rang-defect: cum $\dim \text{Ker} f = 0$, rezultă că $\dim \text{Im} f = 3$.

O bază în $\text{Im} f$ se poate obține direct din matricea aplicației, luînd efectiv vectorii-coloană, deci $\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}$.

(11) Baza canonică este:

$$B = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calculăm:

$$\begin{aligned} f(E_1) &= X^3 = 0 + 0X + 0X^2 + 1X^3 \\ f(E_2) &= 0 = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \\ f(E_3) &= 3 = 3 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \\ f(E_4) &= -2X^2 = 0 + 0X - 2X^2 + 0X^3. \end{aligned}$$

Rezultă că matricea aplicației este:

$$A = M_f^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Restul calculelor se fac asemănător cu exercițiul de mai sus. Atenție, însă! Domeniul de definiție conține matrice, iar codomeniul, polinoame. Deci, în particular, $\mathrm{Ker} f$ va conține matrice, iar $\mathrm{Im} f$ va conține polinoame.

2*. Pentru fiecare dintre cazurile de mai sus, extindeți baza $\mathrm{Ker} f$ pînă la o bază a domeniului de definiție și baza $\mathrm{Im} f$ pînă la o bază a codomeniului.

Altfel spus, dacă în general, scriem $f : V \longrightarrow W$, căutăm $X \hookrightarrow V$ și $Y \hookrightarrow W$ astfel încît $\mathrm{Ker} f \oplus X \simeq V$ și $\mathrm{Im} f \oplus Y \simeq W$.

SEMINAR 4

VECTORI ȘI VALORI PROPRII. DIAGONALIZARE

4.1 Vectori și valori proprii

Fie V un K-spațiu vectorial și $f : V \longrightarrow V$ o aplicație liniară.

Definiție 4.1: Un vector $v \in V$ se numește *vector propriu* (eng. *eigenvector*) pentru aplicația f dacă există un scalar $\lambda \in K$ astfel încît $f(v) = \lambda v$.

În acest caz, λ se numește *valoarea proprie* (eng. *eigenvalue*) asociată vectorului propriu v.

Rezultă că vectorii proprii sînt aceia pentru care aplicația liniară are o acțiune simplă, de „rescalare", adică doar de înmulțire cu un scalar, care se numește valoarea proprie asociată.

Pașii pentru calculul vectorilor și valorilor proprii sînt:

(1) Presupunem $\dim V = n$. Scriem matricea aplicației f în baza canonică a lui V și obținem $A = M_f^B \in M_n(K)$;

(2) Scriem *polinomul caracteristic* al matricei, anume:

$$P(x) = \det(A - x \cdot I_n).$$

(3) Rădăcinile polinomului caracteristic sînt valorile proprii ale endomorfismului f. Mulțimea valorilor proprii se mai numește *spectrul* endomorfismului și se notează $\sigma(f)$.

(4) Pentru a găsi vectorii proprii asociați fiecărei valori proprii λ_i, se rezolvă ecuația $f(v_i) = \lambda_i v_i$ și se determină $v_i \in V$.

Alte elemente de terminologie:

Definiţie 4.2: Fie λ o valoare proprie a unui endomorfism f, iar v, vectorul propriu asociat.

Notăm $V(\lambda) = V_\lambda = \mathrm{Sp}(v)$ subspațiul lui V generat de v, numit *subspațiul invariant* (propriu) asociat lui v.

Dimensiunea acestui subspațiu se numește *multiplicitatea geometrică* a valorii proprii, notată $m_g(\lambda) = g(\lambda) = \dim V(\lambda)$.

Se numește *multiplicitatea algebrică* a valorii proprii λ, notată $m_a(\lambda) = a(\lambda)$, multiplicitatea rădăcinii $x = \lambda$ în polinomul caracteristic. Adică $a(\lambda) = n \iff P_A(x) \vdots (x - \lambda)^n$.

O proprietate importantă este:

Teoremă 4.1 (Cayley-Hamilton)**:** $P_A(A) = 0$*, unde A este polinomul caracteristic al matricei A.*

4.2 Matrice de trecere. Diagonalizare

Putem avea două sau mai multe baze ale aceluiași spațiu vectorial, iar între ele există o legătură strînsă, matriceală.

Fie $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ și $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ două baza ale aceluiași spațiu vectorial V. Se numește *matricea de trecere* de la baza B la baza C, notată M_B^C sau ${}^BM^C$, matricea coeficienților din scrierea vectorilor c_i în funcție de vectorii b_i. Mai precis, deoarece B este bază, avem:

$$\forall i, j, \quad c_i = \sum_j \alpha_{ij} b_j,$$

iar matricea de trecere este matricea (α_{ij}).

Definiţie 4.3: O matrice $A \in M_n(K)$ se numește *diagonalizabilă* dacă ea este asemenea cu o matrice diagonală D, care are elemente nenule doar pe diagonala principală.

Altfel spus, există $T \in M_n(K)$ inversabilă, cu $T^{-1}AT = D$.

Observaţie 4.1: Dacă matricea A este diagonalizabilă, atunci D din definiția de mai sus conține pe diagonală doar valorile proprii ale lui A.

Condițiile necesare și suficiente pentru diagonalizare sînt:

Teoremă 4.2: *Următoarele afirmații sînt echivalente:*

(a) Matricea A este diagonalizabilă;

(b) Există o bază a spațiului vectorial V formată doar din vectorii proprii ai lui A;

(c) $a(\lambda_i) = g(\lambda_i), \forall \lambda_i \in \sigma(A)$.

Evident, discuția are sens atît pentru cazul în care pornim cu o aplicație liniară, caz în care îi luăm matricea în baza canonică și lucrăm cu ea, cît și dacă pornim direct cu o matrice.

Pașii pentru diagonalizare sînt:

(1) Fixăm o bază B a lui V (e.g. baza canonică) și scriem $A = M_f^B$;

(2) Determinăm valorile proprii λ_i ale lui A și multiplicitățile lor geometrice;

(3) Pentru fiecare valoare proprie, determinăm vectorii proprii, subspațiile invariante, cîte o bază B_i în fiecare dintre acestea și multiplicitățile geometrice;

(4) Dacă există o valoare proprie λ_j cu $a(\lambda_j) \neq g(\lambda_j)$, algoritmul se oprește și matricea nu se poate diagonaliza;

(5) Dacă $a(\lambda_i) = g(\lambda_i), \forall i$, matricea se poate diagonaliza, iar $B' = \cup_i B_i$ este o bază a lui V, formată numai din vectori proprii;

(6) Se determină matricea de trecere de la baza B la baza B', notată T, care este inversabilă, iar forma diagonală este:

$$A \sim T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_i). \tag{4.1}$$

Observați că ecuația (4.1) poate fi scrisă și astfel:

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_i) \overset{\text{not.}}{=} D \Longleftrightarrow A = TDT^{-1},$$

unde D este o matrice diagonală. Astfel că, în general, se poate formula următoarea:

Definiție 4.4: O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă dacă există o matrice diagonală D și o matrice inversabilă T astfel încît $A = TDT^{-1}$.

Această definiție abstractă este concretizată în procedura de mai sus:

- matricea inversabilă este matricea de trecere de la baza canonică la o bază formată doar din vectori proprii;
- matricea diagonală conține valorile proprii pe diagonala principală.

Observație 4.2: Unul dintre avantajele diagonalizării matricelor este ușurința calculelor ulterioare. În particular, dacă $A \sim \mathrm{diag}(\lambda_i)$, atunci $A^k \sim \mathrm{diag}(\lambda_i^k), \forall k$.

Mai mult, folosind relația din ecuația (4.1), putem scrie și:

$$A^n = (TDT^{-1})^n = TD^nT^{-1},$$

cu avantajul că $D^n = (\mathrm{diag}(\lambda_i))^n = \mathrm{diag}(\lambda_i^n)$.

4.3 Exerciții

1. Să se determine vectorii și valorile proprii pentru matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie aplicația liniară $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-y, x, z)$.
Să se calculeze vectorii și valorile proprii ale lui f.

3. Aceeași cerință pentru:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - z, 8x + y - 2z, z).$$

4. Fie aplicația liniară $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, definită prin:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + d & 2b + 4c + 5d \\ 2c + d & 8d \end{pmatrix}.$$

Să se arate că f nu este diagonalizabilă.

5. Să se diagonalizeze endomorfismul:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y).$$

6. Să se diagonalizeze matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Determinați vectorii și valorile proprii pentru aplicația:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(a, b, c) = (a - b + c, b, b - c).$$

SEMINAR 5

PARȚIALE 2018–2019

Numărul 1

1. (a) Fie subspațiile vectoriale:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$$
$$v_2 = \mathrm{Sp}\{(1, -1, 3), (1, 2, 0)\}$$

ale spațiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

Să se determine cîte o bază și dimensiunea pentru $\mathbb{R}$-spațiile vectoriale $V_1, V_2, V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$. Să se determine coordonatele vectorului $v = (5, 9, 13)$ după o bază a lui $V_1 + V_2$.

(b) Fie $U, V \subseteq \mathbb{R}^{20}$. Să se arate că $V \simeq U \iff \dim U = \dim V$.

2. (a) Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ o aplicație $\mathbb{R}$-liniară, definită prin:

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a + 2c & 0 \\ a - b & b + 2c \end{pmatrix}.$$

Să se determine cîte o bază și dimensiunea pentru $\mathrm{Ker} f$ și $\mathrm{Im} f$, matricea asociată lui f în bazele canonice și să se determine $V \subseteq \mathbb{R}^3$ astfel încît $\mathrm{Ker} f \oplus V \simeq \mathbb{R}^3$.

(b) Se consideră $\mathbb{R}^4$ un spațiu vectorial și o aplicație liniară $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Să se arate că dacă f verifică relația:

$$f^2 - 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} = 0_{\mathbb{R}^4},$$

atunci f este izomorfism și să se determine inversa ei. Să se determine $\mathrm{Ker} f$ și $\mathrm{Im} f$ (s-a notat $f^2 = f \circ f$).

3. (a) Să se diagonalizeze matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ și apoi să se calculeze A^{2018}.

(b) Fie $A \in M_6(\mathbb{R})$ o matrice nediagonală, cu $A^2 \neq \alpha I_6$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că:

$$A^2 - 5A + 6I_6 = 0_6.$$

Să se determine valorile proprii ale matricei A.

——— ***** ———

Numărul 2

1. Fie subspațiile vectoriale:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$$
$$V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, 1, 2), (0, 1, 2)\}$$

ale spațiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

Să se determine cîte o bază și dimensiunea pentru $\mathbb{R}$-spațiile vectoriale V_1, V_2, $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$. Să se determine coordonatele vectorului $v = (15, 8, 7)$ după o bază a lui $V_1 + V_2$.

(b) Fie V un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial de dimensiune 15. Să se arate că $V \simeq \mathbb{R}^{15}$.

2. (a) Fie $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o aplicație liniară astfel încît:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - 2c + d, 0, b - c).$$

Să se determine cîte o bază și dimensiunea pentru $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$, matricea lui f în bazele canonice și să se determine $V \subseteq \mathbb{R}^3$ astfel încît $\mathrm{Im}f \oplus V \simeq \mathbb{R}^3$.

(b) Se consideră spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ și o aplicație liniară $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Să se arate că dacă f verifică relația:

$$f^2 - 3f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3},$$

atunci f este izomorfism și să se determine inversa ei. Să se determine $\mathrm{Ker}f$ și $\mathrm{Im}f$. Am notat cu $f^2 = f \circ f$.

3.(a) Să se diagonalizeze matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

și apoi să se calculeze A^{2018}.

(b) Fie $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ o aplicație liniară cu proprietatea:

$$f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^6} = 0_{\mathbb{R}^6}$$

și $f^2 \neq \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^6}$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Să se determine valorile proprii ale matricei aplicației liniare.

SEMINAR 6

SPAȚII EUCLIDIENE

6.1 Ortonormare și complement ortogonal

Ne îndreptăm spre aplicațiile în geometria *clasică*, adică euclidiană, în care este esențial să putem calcula *lungimi (distanțe)* și *unghiuri*.

În liceu, puteam face aceasta folosind produsul scalar al doi vectori descompuși în reperul cartezian. Astfel, fie vectorii:

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \vec{w} = c\vec{i} + d\vec{j}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Avem:

- *produsul scalar:* $\vec{v} \cdot \vec{w} = ac + bd \in \mathbb{R}$;
- *lungimea vectorului* $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$;
- *cosinusul unghiului între doi vectori:* $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{vw}$;
- vectorii sînt *perpendiculari* dacă $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Acestea sînt noțiunile pe care le extindem acum în cazul spațiilor vectoriale arbitrare. Vom prezenta pentru cazul spațiului real $V = \mathbb{R}^n$, celelalte rezolvîndu-se similar, prin intermediul izomorfismelor canonice.

Fie, deci, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ doi vectori din $\mathbb{R}^n$. Se definesc:

- **produsul scalar:**

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \in \mathbb{R};$$

- **norma vectorului:**
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R};$$

- **cosinusul unghiului între doi vectori:**
$$\cos(v, w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \in [-1, 1].$$

Avem și cazul particular de interes:

Definiție 6.1: Doi vectori v și w din $\mathbb{R}^n$ se numesc *perpendiculari* (*ortogonali*), notat $v \perp w$, dacă $\langle v, w\rangle = 0$.

Cu acestea, avem:

Definiție 6.2: Spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$ se numește *euclidian*, deoarece este înzestrat cu produsul scalar de mai sus.

Aplicațiile care ne vor interesa sînt: calculul complementului ortogonal al unui subspațiu și ortonormarea unei baze.
Începem cu primul subiect.

Definiție 6.3: Fie V un subspațiu al unui spațiu euclidian ($\mathbb{R}^n$, în majoritatea aplicațiilor). Se definește:
$$V^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp v, \forall v \in V\}$$
subspațiu care se numește *complementul ortogonal* al lui V.

O proprietate esențială, care ne va permite să găsim complementul ortogonal, este următoarea:

Teoremă 6.1: *Fie V un subspațiu al lui $\mathbb{R}^n$. Dacă $V^{\perp}$ este complementul său ortogonal, atunci:*
$$V \oplus V^{\perp} \simeq \mathbb{R}^n.$$

Rezultă, folosind teorema lui Grassmann și definiția sumei directe, că:

- $\dim V^{\perp} = \dim \mathbb{R}^n - \dim V$;
- $V^{\perp} \cap V = \{0\}$.

De asemenea, amintim că în $\mathbb{R}^2$, de exemplu, baza canonică formată din $\{(1, 0), (0, 1)\}$, pe care o putem înțelege și $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, are o proprietate specială. Mai precis, vectorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt *versori*, adică $\vec{i} \perp \vec{j}$ și $i = j = 1$.
În orice spațiu euclidian, putem obține o bază similară, numită *bază ortonormată*, în două etape, folosind **procedeul Gram-Schmidt**.
Fie, așadar, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ o bază arbitrară în $\mathbb{R}^n$. Vrem să obținem din ea o bază *ortonormată* $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, adică să fie formată din versori:

- $c_i \perp c_j, \forall i \neq j$;
- $||c_i|| = 1, \forall i$.

Procedeul construiește pas cu pas c_i, pornind de la b_i.

(1) Alegem $c_1 = b_1$;

(2) Definim $c_2 = b_2 + \alpha c_1$, cu α un scalar pe care vrem să-l determinăm. Punem condiția $c_2 \perp c_1$ și rezultă:

$$0 = \langle c_2, c_1 \rangle = \langle b_2 + \alpha c_1, c_1 \rangle = \langle b_2, c_1 \rangle + \alpha \langle c_1, c_1 \rangle.$$

Așadar:

$$\alpha = -\frac{\langle b_2, c_1 \rangle}{\langle c_1, c_1 \rangle}.$$

(3) Continuăm mai departe să definim $c_3 = b_3 + \alpha c_2 + \beta c_1$ și determinăm α, β din condițiile $c_3 \perp c_2$ și $c_3 \perp c_1$.

(4) Procedeul continuă după regula generală:

$$c_i = b_i + \sum_{j=i-1}^{1} \alpha_j c_j,$$

iar condițiile pe care le vom putea folosi la fiecare pas, pentru determinarea constantelor α_j sînt $c_i \perp c_j, \forall j < i$, deoarece c_j au fost determinate la pașii anteriori.

Rezultă, cu aceasta, o bază *ortogonală* $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. Această bază se *normează*, obținînd vectori de normă 1 foarte simplu. Definim:

$$c_i' = \frac{1}{||c_i||} \cdot c_i$$

și observăm că acum avem $||c_i'|| = 1$.

Așadar, baza $C' = \{c_1', \dots, c_n'\}$ este o *bază ortonormată*, adică formată doar din versori, iar procedeul se încheie.

6.2 Aplicații în geometrie

Amintim, înainte de generalizarea într-un spațiu vectorial arbitrar, că în geometria analitică din liceu am studiat și condiții de coliniaritate pentru doi vectori. Această noțiune poate fi generalizată ușor:

Definiţie 6.4: Fie $v, w \in \mathbb{R}^n$ doi vectori, care se scriu într-o bază fixată $B = \{b_i\}$ a lui $\mathbb{R}^n$ cu coordonatele $\{\alpha_i\}$, respectiv $\{\beta_i\}$.

Spunem că cei doi vectori sînt coliniari, notat $v \parallel w$ dacă și numai dacă au coordonatele proporționale:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = k \in \mathbb{R}.$$

Evident, dacă $k = 1$, avem $v = w$.

De asemenea, în liceu, dacă este dat un vector din plan $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, lui i se poate calcula *proiecția* pe axa OX calculînd produsul scala $\vec{v} \cdot \vec{i} = a$.

Noțiunea poate fi generalizată astfel:

Definiţie 6.5: Fie $v \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrar și V un subspațiu al lui $\mathbb{R}^n$ de bază $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$.

Proiecția ortogonală a vectorului v pe subspațiul V se definește prin:

$$v_{\parallel V} = \mathrm{pr}_V v = \sum_{i=1}^{t} \frac{\langle v, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i.$$

Geometric, $\mathrm{pr}_V v$ este „cel mai apropiat“ de v vector din V.

Mai mult, un rezultat important este:

Teoremă 6.2: *În condițiile și cu notațiile de mai sus, $v = v_{\parallel V} + v_{\perp V}$, unde $v_{\perp V} \in V^{\perp}$.*

Cîteva aplicații geometrice simple urmează.

În plan, produsul scalar poate fi folosit pentru a calcula aria paralelogramului.

Propoziţie 6.1: *Produsul scalar al vectorilor $u, v \in \mathbb{R}^2$ este egal cu aria paralelogramului determinat de cei doi vectori.*

În spațiu, fie doi vectori:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

Produsul vectorial al celor doi vectori, notat $\vec{a} \times \vec{b}$ poate fi calculat ca un determinant formal:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Geometric, produsul vectorial produce un vector care este perpendicular pe planul determinat de cei doi factori, a cărui orientare este dată cu regula burghiului.

Propoziţie 6.2: *Norma (modulul) produsului vectorial este egală cu volumul paralelipipedului determinat de cei trei vectori, ca muchii adiacente.*

De asemenea, avem și:

Propoziţie 6.3: *Păstrînd notațiile și condițiile de mai sus,*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Totodată, se poate defini și *produsul mixt* pentru trei vectori.

Fie cei doi vectori de mai sus și $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$¿

Produsul mixt al celor trei vectori se calculează prin:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Propoziţie 6.4: *Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ și $\vec{c}$ sînt coplanari dacă și numai dacă produsul lor mixt este nul.*

Propoziţie 6.5: *Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, volumul tetraedrului determinat de vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ca muchii adiacente se calculează:*

$$V = \frac{1}{6}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

6.3 Exerciții

1. Să se ortonormeze bazele:

(a) $B_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ a lui $\mathbb{R}^3$;

(b) $B_2 = \{X + 1, X^2 + 1, 3\}$ a lui $\mathbb{R}_2[X]$;

(c) $B_3 = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, -1), (1, 0, -1, 1), (2, 1, 0, 1)\}$ a lui $\mathbb{R}^4$.

2. Să se completeze mulțimea $\{(1, -1, 2), (1, 2, 3)\}$ pînă la o bază a lui $\mathbb{R}^3$ și să se ortonormeze baza rezultată.

3. Să se completeze mulțimea $\{3, 2X + 1\}$ pînă la o bază a lui $\mathbb{R}_2[X]$ și să se ortonormeze baza rezultată.

4. Găsiți complementele ortogonale pentru:

(a) $V_1 = \mathrm{Sp}\{(-1, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(b) $V_2 = \mathrm{Sp}\{(1, 1, 1)\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = 0\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(d) $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ în $\mathbb{R}^3$;

(e) $V_5 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p'(0) = 0\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(f) $V_6 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \mid p(0) = 0\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(g) $V_7 = \mathrm{Sp}\{X\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(h) $V_8 = \mathrm{Sp}\{2, 5X^2\}$ în $\mathbb{R}_2[X]$;

(i) $V_9 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + y = 0, y + z - t = 0\}$ în $\mathbb{R}^4$.

5. Folosind produsele scalare canonice, calculați $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$ și proiecțiile $\mathrm{pr}_u v$, $\mathrm{pr}_v u$. Calculați și cosinusul unghiului între u și v și decideți dacă vectorii sînt ortogonali:

(a) $u = (1, 2), v = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$;

(b) $u = (1, 1, 1), v = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$;

(c) $u = 1 + X, v = X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$;

(d) $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$;

6. Fie subspațiul $W = \mathrm{Sp}\{v_1 = (1, 0, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinați $W^\perp$;

(b) Arătați că $W \oplus W^\perp \simeq \mathbb{R}^4$;

(c) Pentru $v = (1, 1, 1, 1)$, determinați $v_0 = \mathrm{pr}_{v_1} v$;

(d) Pentru v de mai sus, determinați $v_{\parallel W} v \in W$ și $v_{\perp W} = v - v_{\parallel W}$.

7. Aflați proiecția $v_{\parallel W}$ a vectorului v pe subspațiul W, precum și componenta sa ortogonală $v_{\perp W} \in W^\perp$ pentru:

(a) (*) $v = 1 + x \in \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathrm{Sp}\{p_1 = 1 + x^2, p_2 = 1\}$, cu produsul scalar definit prin:

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}_2[x].$$

(b) $v = (1, 2, 1)$, $W = \mathrm{Sp}\{v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-1, 4, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

(c) $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $W = \mathrm{Sp}\left\{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$;

(d) $v = (2, 1, -1)$, $W = \{(x, y, z) \mid x + y - 2z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

SEMINAR 7

CONICE ȘI CUADRICE

7.1 Conice

Conicele sînt curbe plane, date de ecuații pătratice. Ele sînt reprezentate în figura 7.1, împreună cu ecuațiile canonice.

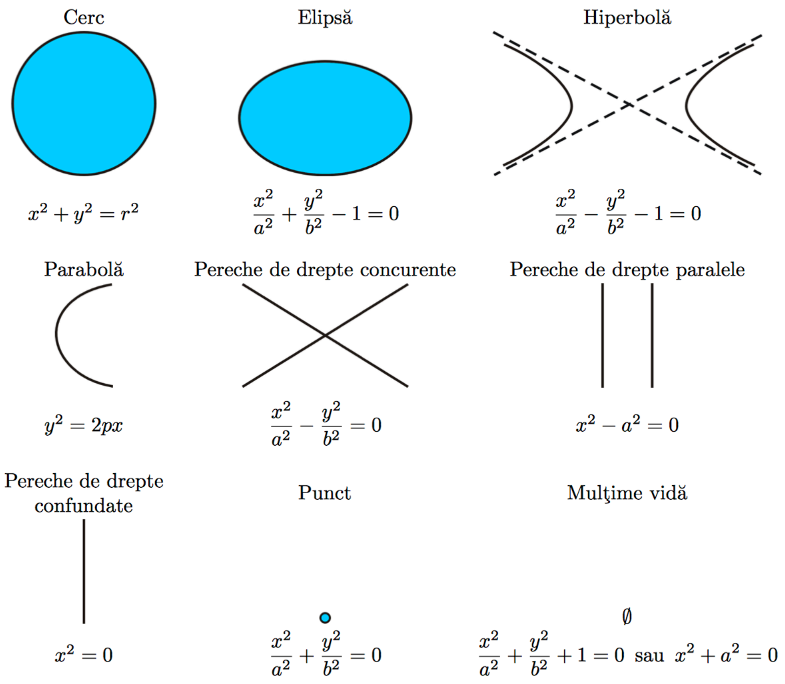

Figura 7.1: Conice și ecuațiile lor

Scopul pe care ni-l propunem în această secțiune este să aducem o ecuație a unei conice la forma canonică și să o reprezentăm grafic.

Vom prezenta algoritmul direct pe un exemplu. Metoda aplicată se numește *metoda rototranslației*, deoarece va folosi o operație de rotație și una de translație a conicei.

Fie, de exemplu, conica:

$$g(x, y) = 3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0.$$

Mai întîi, se scrie *forma pătratică asociată*, adică alegem din conică termenii de grad total 2:

$$q(x, y) = 3x^2 - 4xy.$$

Apoi, scriem *matricea asociată lui q*, care este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Această matrice se obține punînd coeficienții termenilor pătratici, în ordine lexicografică. Dacă $C(t)$ notează coeficientul termenului t, atunci matricea este, în forma generică:

$$A = \begin{pmatrix} C(x^2) & C(xy) \\ C(yx) & C(y^2) \end{pmatrix},$$

cu convenția că $C(xy) = C(yx)$, deci în matrice vom avea jumătate din coeficientul din forma pătratică.

Pentru această matrice, scriem ecuația caracteristică:

$$P_A(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - 3X - 4 = (X + 1)(X - 4).$$

Rezultă că valorile proprii sînt $\sigma(A) = \{-1, 4\}$.

În acest punct, putem face o observație de anticipație. Se numește *invariantul* δ al conicei produsul valorilor proprii. Avem cazurile:

- $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \implies$ conica este elipsă;
- $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \implies$ conica este hiperbolă;
- $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \implies$ conica este parabolă.

În cazul nostru, vom obține o hiperbolă.

Mai departe, se calculează vectorii proprii și obținem:

$$V(\lambda_1) = \mathrm{Sp}\{(1, 2)\}, \quad V(\lambda_2) = \mathrm{Sp}\{(2, -1)\}.$$

Vectorii din bazele subspațiilor proprii trebuie *ortonormați* (de exemplu, folosind procedura Gram-Schmidt). Observăm că ei sînt deja ortogonali, deci mai trebuie doar să-i normăm:

$$\|(1,2)\| = \|(2,-1)\| = \sqrt{5},$$

deci obținem *versorii proprii:*

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad e_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

Acești versori vor alcătui coloanele *matricei de rotație*:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

În general, o matrice de rotație de unghi θ (în sens trigonometric) are forma:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

și $\det R_\theta = 1$.

În cazul nostru, $\det R = -1$, deci putem schimba între ele coloanele și obținem o matrice de rotație (echivalent, putem schimba orientarea unuia dintre versori, de exemplu, $e_1 \longrightarrow -e_1$).

Apoi aplicăm rotația, adică, dacă (x, y) sînt vechile coordonate, coordonatele din sistemul rotit (x', y') se obțin din ecuația:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Cu alte cuvinte, avem sistemul:

$$\begin{cases} x & = \frac{-1}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 \\ y & = \frac{-2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{-1}{\sqrt{5}} y_1 \end{cases}.$$

Aceste coordonate se înlocuiesc în ecuația inițială a conicei și obținem *conica rotită*:

$$-x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}} y_1 - 3 = 0.$$

Prelucrăm algebric, completînd pătratele, și obținem:

$$-\left(x_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2.$$

Facem acum *translația*:

$$\begin{cases} X &= x_1 + \dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ \\ Y &= y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

și obținem:

$$-X^2 + 4Y^2 = 2 \iff -\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{1/2}\right)^2 = 1,$$

deci ecuația unei hiperbole.

Pentru reprezentarea grafică, trebuie să ținem cont de operațiile efectuate:

- rotația de unghi θ, cu proprietatea că $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, deci $\theta \simeq \dfrac{2\pi}{3}$;
- translația centrului cu $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ pe axa OX și $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ pe axa OY.

Mai putem determina și *centrul conicei*, din sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} &= 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este centrul conicei, de coordonate $C(1, 1)$.

Reprezentarea grafică (folosind GeoGebra) este redată în figura 7.2.

OBSERVAȚIE: O metodă alternativă este să pornim cu calculul centrului. Atunci, primul pas al transformării este *translația în centru*. Astfel, în exemplul de mai sus, calculăm mai întîi centrul $C(1, 1)$, iar apoi facem substituția în forma $g(x, y)$, adică $x \mapsto (x + 1)$ și $y \mapsto (y + 1)$, deci:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 3(x+1)^2 - 4(x+1)(y+1) - 2(x+1) + 4(y+1) - 3 \\ &= 3x^2 - 4xy, \end{aligned}$$

care coincide cu forma pătratică considerată în metoda inițială.

Din acest punct, putem continua cu rotația ca mai sus.

7.2 Cuadrice

Cuadricele sînt suprafețe care pot fi obținute prin rotirea unei conice în jurul unei axe. Astfel, din elipsă, de exemplu, obținem elipsoizi, din parabolă, paraboloizi, iar din hiperbolă, hiperboloizi.

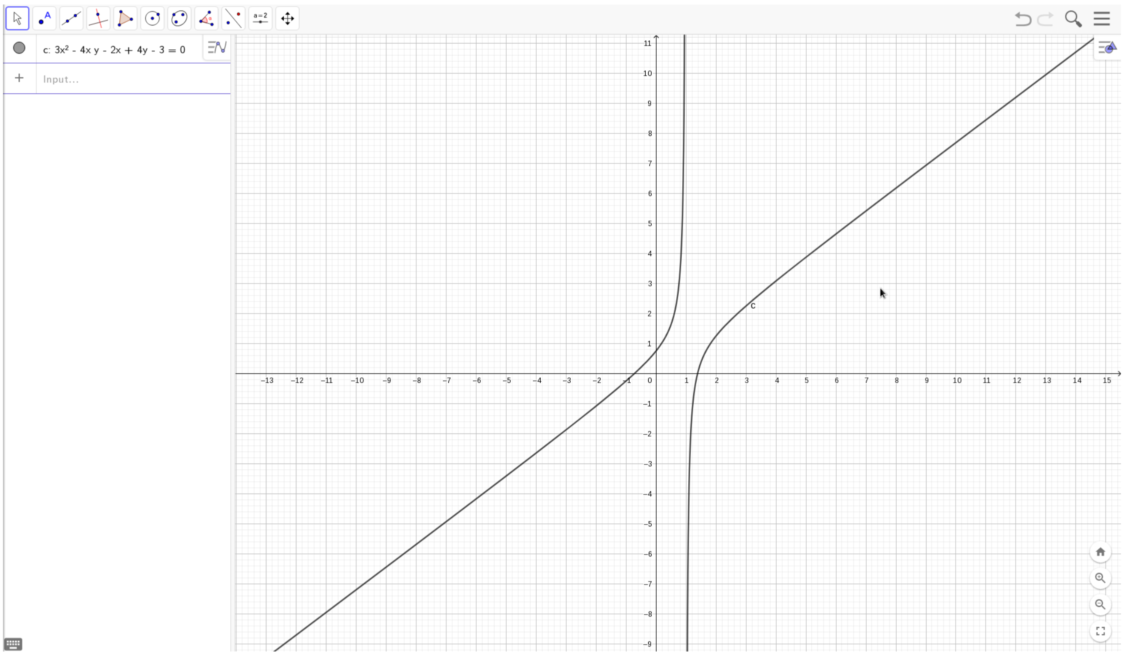

Figura 7.2: Hiperbola $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$

Formele, împreună cu ecuațiile canonice, pot fi consultate, de exemplu, aici.
Procedura de a aduce o cuadrică la forma canonică funcționează ca în cazul conicelor.
Mai jos un exemplu rezolvat.

$$x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0.$$

Considerăm forma pătratică asociată:

$$g = x^2 + 3y^2 + 4yz,$$

care are matricea simetrică.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuația caracteristică rezultă: $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$, deci $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$.

Găsim subspațiile invariante:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Similar:

$$V(\lambda_2) = \{(0, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$
$$V(\lambda_3) = \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem vectori proprii ortonormați particularizînd elemente din subspațiile invariante. De exemplu:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1).$$

Matricea R cu acești vectori pe coloane are proprietatea $\det R = 1$, deci este o matrice de rotație. O aplicăm și găsim schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x &= x' \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y' + 2z') \\ \\ z &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2y' + z') \end{cases}$$

Ecuația cuadricei devine:

$$x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0.$$

Formăm pătrate și obținem:

$$(x' - 3)^2 - \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Efectuăm translația corespunzătoare noilor coordonate și obținem:

$$X^2 - Y^2 + 4Z^2 - 1 = 0 \iff X^2 - Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0,$$

adică un hiperboloid cu o pînză.

7.3 Exerciții propuse

1. Aduceți următoarele conice la forma canonică și reprezentați-le:

(a) $4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0$ (hiperbolă);

(b) $9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$ (parabolă);

(c) $x^2 - 2xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$ (parabolă);

(d) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ (elipsă);

(e) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ (parabolă)

2. Aceeași cerință pentru cuadrica:

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 5x - 1 = 0$$

(hiperboloid cu o pînză).

SEMINAR 8

FORMA CANONICĂ JORDAN

8.1 Metoda nucleului stabil

După cum am văzut, nu orice matrice poate fi adusă la forma diagonală. Însă vom vedea că, pentru spații vectoriale reale, orice matrice poate fi adusă la *forma canonică Jordan*, care este „aproape diagonală", într-un anume sens.

Prezentarea de mai jos urmează materialul de aici, paginile 90–108.

Algoritmul va proceda similar cu cazul diagonalizării, în prima parte.

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice căreia vrem să-i găsim forma canonică Jordan.

- Se calculează polinomul caracteristic al matricei, $P_A(X)$, de unde se obțin valorile proprii, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$;
- Pentru fiecare valoare proprie, se determină vectorii proprii și subspațiile invariante corespunzătoare;
- Pentru fiecare valoare proprie λ_i, definim matricea $M = A - \lambda_i I_n$. Observăm că $\mathrm{Ker} M = V(\lambda_i)$.

  Pentru această matrice, se calculează *șirul ascendent de nuclee*:

  $$V(\lambda_i) = \mathrm{Ker} M \subset \mathrm{Ker} M^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker} M^s,$$

  ultimul spațiu notîndu-se fie $K(M)$, fie V^{λ_i} și numindu-se *nucleu stabil* al lui M.

  Prin definiție, $\dim V^{\lambda_i} = m_a(\lambda_i)$.
- Alegem vectori liniar independenți astfel:
  - $u_1, \dots, u_{p_1} \in \mathrm{Ker} M^s - \mathrm{Ker} M^{s-1}$, astfel încît $\mathrm{Ker} M^{s-1} \oplus \mathrm{Sp}\{u_i\} \simeq \mathrm{Ker} M^s$. Altfel spus, completăm baza lui $\mathrm{Ker} M^{s-1}$ la o bază a lui $\mathrm{Ker} M^s$;

– Calculăm $Mu_j^t \in \mathrm{Ker}M^{s-1} - \mathrm{Ker}M^{s-2}$ și completăm rezultatele la o bază a lui $\mathrm{Ker}M^{s-1}$.

– Continuăm acești pași și în final se obține o listă de forma:

$$\begin{cases} u_1, \dots, u_{p_1} \\ Mu_1, \dots, Mu_{p_1}, u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2} \\ \dots \\ M^{s-1}u_1, \dots, M^{s-1}up_1, \dots, u_{p_s} \end{cases}$$

ultima linie reprezentînd o bază pentru $V(\lambda_i)$, pe care o notăm cu B_1.

- Refacem pașii anteriori pentru fiecare valoare proprie și va rezulta $B = B_1 \cup \dots\ cupB_p$ o bază a lui $\mathbb{R}^n$;

- Fie T matricea de trecere de la baza canonică la această bază. Atunci forma canonică Jordan se scrie $J = T^{-1}AT$.

Observație 8.1: Dacă, în loc de matrice, se pornește cu un endomorfism f, se consideră mai întîi matricea asociată în baza canonică, A, apoi putem continua ca mai sus.

De asemenea, în locul matricei M, putem gîndi că definim un nou endomorfism $g = f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

8.2 Exemple rezolvate

Prezentăm în continuare cîteva exerciții rezolvate, în care insistăm pe elementele de noutate. Am omis calculele intermediare, pe care le puteți verifica ușor.

1. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculăm forma canonică Jordan a acestei matrice.

Polinomul caracteristic este:

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = -(X+1)(X-2)^2,$$

deci avem două valori proprii $\lambda_1 = -1$, $m_a(-1) = 1$ și $\lambda_2 = 2$, $m_a(2) = 2$.

Fie $\lambda_1 = -1$. Definim $M = A - \lambda_1 I_3$. Atunci $\mathrm{Ker}M = V(\lambda_1) = \mathrm{Sp}\{(0,1,-1)\}$. Deoarece $\dim V(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) = m_a(\lambda_1)$, rezultă că șirul nucleelor are un singur termen, deci lista va conține doar $u_1 = (0,1,-1)$.

Fie acum $\lambda_2 = 2$. Definim $M = A - \lambda_2 I_3$.

Calculăm $\mathrm{Ker}M = V(\lambda_2) = \mathrm{Sp}\{(1,0,-1)\}$. Cum $m_a(\lambda_2) = 2$, rezultă că șirul nucleelor va conține un pas și va fi de forma $V(\lambda_2) \subset V^{\lambda_2}$. Într-adevăr, calculăm:

$$V^{\lambda_2} = \mathrm{Ker}M^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Alegem $u_2 \in V^{\lambda_2} - V(\lambda_2)$ astfel încît $V(\lambda_2) \oplus \mathrm{Sp}\{u_2\} = V^{\lambda_2}$. Altfel spus, completăm baza lui $V(\lambda_2)$ la o bază a lui V^{λ_2}.

De exemplu, putem lua $u_2 = (-2, 1, 0)$. Mai departe, calculăm $Mu_2^t = (1, 0, -1)$.

Din lista $\{u_1, u_2, Mu_2^t\}$ obținem o bază a lui $\mathbb{R}^3$, iar matricea de trecere de la baza canonică va fi:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Iar forma canonică Jordan este:

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Spunem că această matrice este alcătuită din *2 blocuri Jordan*, unul de mărime 2, asociat valorii proprii 2, iar unul de mărime 1, asociat valorii proprii -1. Observați forma „aproape diagonală“ a matricei: într-adevăr, blocul Jordan asociat valorii proprii 2 conține un element nenul sub diagonală.

2. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aducem această matrice la forma canonică Jordan.

Calculînd polinomul caracteristic, găsim:

$$P_A(X) = (X-1)^4 \implies \sigma(A) = \{1\}, m_a(1) = 4.$$

Rezultă că $V^\lambda \simeq \mathbb{R}^4$.

Calculăm spațiul vectorilor proprii și obținem:

$$V(\lambda) = \{(\alpha, \beta, -\beta, \alpha - 2\beta) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Definim $M = A - \lambda I_4$ și avem $\mathrm{Ker}M = V(\lambda)$.

Cum $m_g(\lambda) = 2$, rezultă că șirul nucleelor va avea 3 termeni:

$$V(\lambda) = \mathrm{Ker}M \subset \mathrm{Ker}M^2 \subset V^\lambda \simeq \mathbb{R}^4.$$

Calculînd M^2 și apoi $\mathrm{Ker}M^2$, obținem:

$$\mathrm{Ker}M^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\},$$

deci un spațiu de dimensiune 3.

Alegem $u_1 \in V^\lambda - \mathrm{Ker} M^2$ astfel încît $\mathrm{Ker} M^2 \oplus \mathrm{Sp}\{u_1\} = V^\lambda$. Fie, de exemplu, $u_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Calculăm $M u_1^t = (0, -1, -1, 0)$ și $M^2 u_1^t = (-2, -2, 2, 2)$.

Acum alegem $u_2 \in V(\lambda)$ astfel încît $\{M^2 u_1^t, u_2\}$ să fie o bază a lui $V(\lambda)$. Fie, de exemplu, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$.

Lista conține: $u_1, M u_1^t, M^2 u_1, u_2$, vectori independenți, suficienți pentru o bază a lui $\mathbb{R}^4$. Scriem matricea de trecere de la baza canonică:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

iar forma Jordan se obține a fi:

$$J = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm că această matrice este alcătuită dintr-un bloc de mărime 3 și unul de mărime 1, ambele corespunzătoare valorii proprii $\lambda = 1$.

8.3 Metodă alternativă

Prezentarea de mai jos urmează cartea de aici, paginile 35–37.

Pe scurt, presupunem că pornim cu un endomorfism $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Pașii pe care îi urmăm pentru a aduce endomorfismul la forma Jordan sînt:

(1) fixăm o bază B în V și determinăm matricea asociată lui f în baza B (de exemplu, baza canonică);

(2) determinăm valorile proprii $\lambda_i, 1 \leq i \leq p$ și multiplicitățile algebrice $m_a(\lambda_i)$. Evident, pentru a putea ajunge la forma canonică Jordan, trebuie să avem $\lambda_i \in \mathbb{R}$, deoarece lucrăm doar cu spații vectoriale reale. Altfel, endomorfismul nu poate fi adus la forma Jordan;

(3) găsim vectorii proprii, liniar independenți, corespunzători fiecărei valori proprii λ_i;

(4) calculăm numărul de celule Jordan pentru fiecare valoare proprie λ_i în parte, numărul celulelor fiind dat de:

$$\dim V(\lambda_i) = \dim V - \mathrm{rang}(A - \lambda_i I_n)$$

(5) rezolvăm sistemul $(A - \lambda_i I_n)^{m_a(\lambda_i)} \cdot X = O$, pentru fiecare valoare proprie λ_i. Pentru un anumit i fixat, soluțiile nenule generează subspațiul invariant $V(\lambda_i)$;

(6) reunim bazele pentru toate subspațiile invariante $V(\lambda_i)$ și obținem o bază B', după care determinăm matricea T de trecere de la baza B la baza B';

(7) în fine, $J = T^{-1}AT$ este forma Jordan.

Exemplu rezolvat: Considerăm matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluție: Polinomul caracteristic al matricei este:

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = -X^2(X-1),$$

deci valorile proprii sînt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$, cu $m_a(\lambda_1) = 2$, $m_a(\lambda_3) = 1$.

Subspațiul invariant pentru $\lambda_{1,2}$ se obține:

$$V(\lambda_{1,2}) = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

deci $\dim(V(\lambda_{1,2})) = m_g(\lambda_{1,2}) = 1 \neq m_a(\lambda_1)$. Așadar, matricea nu are formă diagonală, dar are formă Jordan, pe care o obținem în continuare.

Pentru λ_3, rezultă:

$$V(\lambda_3) = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

adică $m_g(\lambda_3) = \dim(V(\lambda_3)) = 1$.

Bazele în subspațiile invariante pot fi:

$$B(\lambda_{1,2}) = \{(1,2,3)\}, \quad B(\lambda_3) = \{(1,1,1)\}.$$

Rezultă că vom avea o celulă Jordan de mărime 2 pentru $\lambda_{1,2}$ și una de mărime 1 pentru λ_3. Determinăm baza corespunzătoare formei Jordan, i.e. rezolvăm ecuația:

$$(A - \lambda_1 I_3)^2 \cdot X = A^2 X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă

$$X \in \{(\alpha, \beta, 3\beta - 3\alpha)^t \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Așadar, obținem o bază formată din $\{(1,0,-3),(0,1,3)\}$ pe care o reunim cu baza din celălalt subspațiu invariant, $\{(1,1,1)\}$ și matricea de trecere de la baza canonică la această bază este:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

iar forma Jordan finală este:

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.4 Exerciții propuse

Aduceți la forma canonică Jordan endomorfismul:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (3x + y - z, 2y, x + y + z)$$

și matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

SEMINAR 9

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I

Dacă nu se precizează altfel, vom presupune că lucrăm cu funcții de forma $y = y(x)$, deci y' va însemna $\dfrac{dy}{dx}$.

9.1 Ecuații cu variabile separabile/separate

Acesta este cel mai simplu exemplu de ecuații diferențiale și se rezolvă direct prin integrare, după o reordonare corespunzătoare.

Exemplu 1: $(1 + x^2)yy' + x(1 + y^2) = 0$, știind că $y(1) = 2$.

Soluție: Separăm variabilele și diferențialele și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
(1 + x^2)y \cdot \frac{dy}{dx} + x(1 + y^2) = 0 &\iff \\
(1 + x^2)y\,dy = -x(1 + y^2)dx &\iff \\
\frac{y}{1 + y^2}dy = -\frac{x}{1 + x^2}dx &\iff \\
\frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c.&
\end{aligned}$$

Pentru uniformitate, putem pune $\dfrac{1}{2}\ln c$ în locul constantei.

Rezultă $1 + y^2 = \dfrac{c}{1 + x^2}$, cu $c > 0$, pentru existența logaritmului.

Înlocuim în condiția inițială $y(1) = 2$ și obținem $c = 10$. În fine:

$$y(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{1 + x^2}}, \quad x \in (-3, 3),$$

punînd și condițiile de existență.

În unele cazuri, este util să facem schimbări de variabilă. De exemplu:
Exemplu 2: $y' = \sin^2(x - y)$.
Soluție: Notăm $x - y = z$ și avem că $y' = 1 - z'$, de unde, în ecuație, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} z' &= 1 - \sin^2 z = \cos^2 z \implies \\ \frac{dz}{dx} &= \cos^2 z \implies \\ \frac{dz}{\cos^2 z} &= dx \implies \\ \tan z &= x + c \implies \\ \tan(x - y) &= x + c, \end{aligned}$$

care poate fi prelucrată pentru a obține $y(x)$ sau lăsată în forma implicită.

9.2 Ecuații liniare

Forma generală a acestor ecuații este:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x).$$

Distingem două cazuri:

- Dacă $Q = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*;
- Dacă $Q \neq 0$, ecuația este *neomogenă*.

Metoda generală de rezolvare este să folosim formula (am notat $\exp(\square) = e^{\square}$):

$$y(x) = c \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t)dt\right),$$

pentru a obține o *soluție particulară pentru ecuația omogenă*. Apoi, din teorie, știm că putem folosi *metoda variației constantelor (Lagrange)* pentru a obține soluția ecuației neomogene. Pentru aceasta, în locul constantei c vom considera o funcție $c(x)$ și înlocuim în ecuația inițială.

Pe scurt, pentru ecuația liniară:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

avem:

- Soluția particulară pentru varianta omogenă $y_p = c \cdot \exp\left(-\int P(x)dx\right)$;

- Soluția generală (din Lagrange):

$$y_g = \exp\Big(- \int P(x)dx \Big) \cdot \Big(C + \int Q(x) \cdot \exp\Big(\int P(x)dx \Big) dx \Big)$$

Soluția generală a problemei este suma între soluția particulară și cea generală.
Exemplu 1: $y' + y \sin x = - \sin x \cos x$.
Soluție: Putem înlocui direct în formulă și obținem $y = C \cdot e^{\cos x} - \cos x - 1$.

Exemplu 2: $y' + xy = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
Soluție: Asociem ecuația omogenă $y' + xy = 0$, pe care o rescriem:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Longrightarrow y_p = ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Acum, folosind metoda lui Lagrange, căutăm o soluție de forma $y(x) = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Înlocuim în ecuația inițială și găsim $y' + xy = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, dar, comparînd cu ecuația dată, găsim $c'(x) = x$, de unde $c(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
Așadar, avem $y_g = \dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$, iar soluția finală este suma celor două:

$$y = \Big(\frac{x^2}{2} + c \Big) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exemplu 3: $2xyy' + 2y^2 - x^4 = 0$.
Soluție: Putem face o substituție $y^2 = z$, cu care ecuația devine $z' + \frac{2}{x}z = x^3$. Avem, în acest caz, $P(x) = \frac{2}{x}$, iar $Q(x) = x^3$. Cum $\int P(x)dx = 2\ln x$, iar $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \frac{x^6}{6}$, obținem soluția generală:

$$y(x) = \frac{1}{x}\sqrt{c + \frac{x^6}{6}}, x > 0.$$

9.3 Ecuația Bernoulli

Forma generală a ecuației Bernoulli este:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}.$$

Remarcăm că:

- Dacă $\alpha = 0$, obținem o ecuație omogenă;

- Dacă $\alpha \neq 0$, obținem o ecuație neomogenă, ca în secțiunea anterioară.

Pașii de rezolvare sînt:

- Se împarte cu y^α și obținem:

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x);$$

- Facem substituția $y^{1-\alpha} = z$ și ajungem la ecuația:

$$(1-\alpha)y^{1-\alpha} \cdot y' = z',$$

  de unde $\dfrac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x)$, care este o ecuație neomogenă, rezolvabilă ca în secțiunea anterioară.

Exemplu 1: $y' - \dfrac{y}{3x} = \dfrac{1}{3}y^4 \ln x, x > 0$.
Soluție: Avem $\alpha = 4$, deci împărțim la y^4 și obținem:

$$y^{-4}y' - \frac{1}{3x}y^{-3} = \frac{1}{3}\ln x.$$

Cu substituția $z = y^{-3}$, ajungem la:

$$z' = -3y^4y' \Longrightarrow z' + \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Avem $P(x) = \frac{1}{x}$ și $Q(x) = -\ln x$, deci putem aplica formula pentru soluția generală a ecuației neomogene:

$$z = e^{-\ln x}\left(c - \int \ln x e^{\ln x} dx\right) = \frac{1}{x}\left(c - \int x \ln x\right).$$

În fine:

$$y^{-3} = \frac{c}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x, x > 0.$$

Exemplu 2: $y' + \dfrac{2}{3x}y = \dfrac{1}{3}y^2$.
Soluție: Avem $\alpha = 2$, deci împărțim la y^2 și ajungem la:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{3x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Cu substituția $z = \dfrac{1}{y}$, avem $z' + \dfrac{2}{3x}z = \dfrac{1}{3}$, care este liniară și neomogenă.

Lucrăm cu ecuația omogenă $z' + \dfrac{2}{3x} = 0$, de unde $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{2}{3x}$, care este cu variabile separabile și găsim $z = cx^{\frac{2}{3}}$, *pentru ecuația omogenă.*

Aplicăm acum metoda variației constantelor și luăm $z = c(x)x^{\frac{2}{3}}$. După înlocuire în ecuația inițială, avem $c(x) = -x^{\frac{1}{3}}$.

Soluția finală este acum suma $z = -x + cx^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{y}$.

9.4 Ecuația Riccati

Forma generală este:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Observăm că:

- Dacă $Q = 0$, avem o ecuație liniară și neomogenă;
- Dacă $R = 0$, este o ecuație Bernoulli, cu $\alpha = 2$.

În general, ecuația Riccati se rezolvă știind o soluție particulară y_p. Apoi, folosind formula $y = y_p + z$ și înlocuind, se ajunge la o ecuație Bernoulli:

$$z' + \big(p(x) + 2q(x)y_p\big)z + q(x)z^2 = 0.$$

Pentru a găsi soluții particulare, următoarea teoremă ne ajută într-un anumit caz:

Teoremă 9.1: *Dacă avem ecuația Riccati de forma:*

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2},$$

unde $(B+1)^2 - 4AC \geq 0$, *atunci o soluție particulară este* $y_p = \frac{1}{x}$.

Exemplu 1: $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}, x > 0.$

Soluție: Aplicînd teorema, putem lua $y_p = \frac{1}{x}$ ca soluție particulară. Apoi căutăm o soluție generală de forma $y = \frac{1}{x} + z$, dar, pentru conveniență, putem lua $z \longrightarrow \frac{1}{z}$. Înlocuim în ecuație și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{2}{3x} \Longrightarrow \\
z' - \frac{2}{3x}z &= \frac{1}{3} \Longrightarrow \\
z &= Cx^{\frac{2}{3}} + x,
\end{aligned}$$

de unde $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}$, cu $x > 0$.

9.5 Ecuația Clairaut

Forma generală a ecuației este:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Pentru rezolvare, se notează $y' = p$ și, înlocuind, avem:

$$y = xp + \varphi(p).$$

Derivăm după x și găsim:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

de unde $\left(x + \varphi'(p)\right)\dfrac{dp}{dx} = 0.$

Mai departe:

- Dacă $\dfrac{dp}{dx} = 0$, atunci $p = C$ și avem $y = C \cdot x + \varphi(c)$, ca soluție generală;
- Dacă $x + \varphi'(p) = 0$, obținem *soluția singulară*, care se prezintă parametric, adică în funcție de p, astfel:

$$\begin{cases} x & = -\varphi'(p) \\ y & = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

Exemplu: $y = xy' - y'^2$.
Soluție: Notăm $y' = p$, deci $y = xp - p^2$.
Obținem, înlocuind în ecuație:

$$pdx + xdp - 2pdp = pdx \Longrightarrow (x - 2p)dp = 0.$$

Distingem cazurile:

- Dacă $dp = 0$, atunci $p = C$ și $y = Cx - C_2$, o soluție particulară;
- Soluția singulară se reprezintă parametric, corespunzător cazului $x - 2p = 0$, prin:

$$\begin{cases} x & = 2p \\ y & = p^2 \end{cases}$$

Revenind la y, găsim $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Observație 9.1: Geometric, soluția generală este *înfășurătoarea* soluției particulare, adică o curbă care aproximează, din aproape în aproape, dreapta soluției particulare.

9.6 Ecuații exacte

Forma generală este:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0.$$

9.6.1 Cu diferențiale totale

Rezolvare cu formulă

Dacă are loc $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, atunci ecuația se numește *cu diferențiale totale*, iar soluția ei generală se prezintă prin:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)dt,$$

pentru orice (x, y) din domeniul de definiție, iar (x_0, y_0) un punct arbitrar fixat, în jurul căruia determinăm soluția.

Observație 9.2: Pentru simplitate, vom mai folosi notațiile $P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ și similar pentru Q_x. Deci condiția de diferențiale totale se mai scrie, pe scurt, $P_y = Q_x$.

Exemplu: $(3x^2 - y) + (3y^2 - x)y' = 0$.

Soluție: Remarcăm că avem $P(x, y) = 3x^2 - y$ și $Q(x, y) = 3y^2 - x$, deci $P_y = Q_x = -1$, ecuația avînd diferențiale totale. Obținem direct, din formula pentru soluția generală:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - xy + x_0 y_0 - x_0^3 - y_0^3.$$

Cum (x_0, y_0) sînt fixate, putem prezenta soluția în *forma implicită* $y = \varphi$, unde $\varphi = x^3 + y^3 - xy = c$, constanta fiind expresia de (x_0, y_0) de mai sus.

Rezolvare directă

Din teorie, știm că dacă o ecuație diferențială are diferențiale totale, se poate arăta că, în cazul ecuației scrisă în forma generală $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, există o funcție $F(x, y)$ de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$ astfel încît $F_x = P(x, y)$ și $F_y = Q(x, y)$.

Să vedem acest lucru pe exemplul de mai sus.

Avem ecuația:

$$(3x^2 - y)dx + (3y^2 - x)dy = 0.$$

Avem $P(x, y) = 3x^2 - y$ și $Q(x, y) = 3y^2 - x$. Am văzut că ecuația este cu diferențiale totale, deci există o funcție $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă (cel puțin) $\mathcal{C}^1$ astfel încît $F_x = P$ și $F_y = Q$. Deci:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - y \Longrightarrow F(x, y) = \int 3x^2 - y dx = x^3 + xy + c(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - x \Longrightarrow F(x, y) = \int 3y^2 - x dy = y^3 + xy + c(x),$$

unde constantele de integrare pot să depindă, eventual, de variabilele în funcție de care *nu* se face integrarea.

Deoarece avem aceeași funcție $F(x, y)$ pe care o căutăm, cele două expresii de mai sus trebuie să coincidă, deci $c(x) = x^3$, iar $c(y) = y^3$. În final:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - xy + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

este funcția căutată, care dă *soluția implicită* a ecuației.

9.6.2 Cu factor integrant

Dacă ecuația nu are diferențiale totale, se caută *un factor integrant*, adică o funcție $\mu(x, y)$ cu care se înmulțește ecuația pentru a deveni cu diferențiale totale.

Există două cazuri particulare în care factorul integrant se găsește simplu:

- Dacă expresia $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ depinde doar de x, se poate lua $\mu = \mu(x)$;
- Dacă expresia $\dfrac{Q_x - P_y}{P}$ depinde doar de y, se poate lua $\mu = \mu(y)$.

În celelalte cazuri, factorul integrant, de obicei, se dă în enunțul problemei, deoarece este dificil de găsit, dar o teoremă de existență ne arată că el poate fi mereu găsit.

Observaţie 9.3: Pentru a reține mai ușor condițiile simple de căutare a factorului integrant, pornim cu ecuația în forma generală, înmulțim cu μ, ceea ce ne schimbă și P și Q, apoi scriem condiția de exactitate. Pentru primul caz, de exemplu, obținem:

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q},$$

deci dacă membrul drept depinde doar de x, putem lua $\mu = \mu(x)$ și similar în al doilea caz.

Odată găsit factorul integrant, să presupunem $\mu = \mu(x)$, integrăm condiția de exactitate și găsim:

$$\ln \mu(x) = \int \varphi(x) + c,$$

unde $\varphi(x) = \dfrac{P_y - Q_x}{Q}$ și deci $\mu(x) = \exp\Big(\int \varphi(x)dx\Big)$.

Exemplu: $(1 - x^2y) + x^2(y - x)y' = 0$.

Soluție: Observăm că ecuația nu este exactă, dar verificînd condițiile pentru factorul integrant, putem lua $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Înmulțim ecuația cu μ și găsim:

$$\Big(\frac{1}{x^2} - y\Big) + (y - x)y' = 0,$$

care este cu diferențiale totale. Atunci putem scrie direct soluția generală:

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + C,$$

soluția implicită fiind $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{x} - xy = \text{const.}$.

Exercițiu: Rezolvați ecuația $y^2(2x - 3y) + (7 - 3xy^2)y' = 0$, căutînd (după verificare) un factor integrant $\mu(y)$.

9.7 Ecuația Lagrange

Forma generală a ecuației Lagrange este:

$$A(y') \cdot y + B(y') \cdot x + C(y') = 0.$$

Dacă avem $A(y') \neq 0$, putem împărți și obținem:

$$y = f(y') + g(y'), \quad f(y') = \frac{-B(y')}{A(y')}, g(y') = -\frac{C(y')}{A(y')}.$$

Dacă $f(y') = y'$, obținem o ecuație de tip Clairaut.

Altfel, fie $y' = p$, deci $dy = pdx$. Înlocuim în ecuația inițială și găsim:

$$y = xf(p) + g(p) \Longrightarrow dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

Egalăm cele două expresii pentru dy și ajungem la:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

În fine:

$$\big(f(p) - p\big)dx + \big(xf'(p) + g'(p)\big)dp = 0.$$

În acest caz, dacă $f(p)$ este o constantă, obținem o ecuație cu variabile separabile.
Altfel, putem împărți la $(f(p) - p)dp$ și ajungem la:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p} = 0.$$

Aceasta este o ecuație liniară și neomogenă în $x(p)$ și o rezolvăm corespunzător.
Dacă $f(p) = p$, obținem o soluție particulară.

Exemplu: $y = x - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3$.
Soluție: Facem notația $y' = p$, deci $dy = pdx$. Obținem:

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 \Longrightarrow dy = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{8}{9}p^2dp.$$

Rezultă $pdx = dx - \frac{8}{9}pdp + \frac{8}{9}p^2dp$, deci:

$$(p-1)(dx - \frac{8}{9}pdp) = 0.$$

Distingem cazurile:

Dacă $dx = \frac{8}{9}pdp$, atunci $x = \frac{4}{9}p^2 + c$ și, înlocuind în ecuația inițială, găsim $y = \frac{8}{27}p^3 + c$. Soluția poate fi prezentată parametric:

$$\begin{cases} x &= \frac{4}{9}p^2 + c \\ \\ y &= \frac{8}{27}p^3 + c \end{cases}$$

Dacă $p = 1$, avem o soluție particulară $y = x + c$, iar constanta se obține a fi $c = -\frac{4}{27}$, din ecuația inițială.

9.8 Exerciții

Rezolvați următoarele ecuații diferențiale, precizînd și tipul lor:

(1) $xy' - y + 2x^2y^2 = 0$; (Bernoulli)

(2) $(2x - y + 2)dx + (-x + y + 1)dy = 0$; (exactă)

(3) $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$; (Bernoulli)

(4) $(x^2+1)y' + 2xy^2 = 0$; (exactă)

(5) $(2x + y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0$; (exactă)

(6) $y' = \dfrac{x^2}{y}$; (variabile separabile)

(7) $y' = \dfrac{y}{x} + x$; (liniară, neomogenă)

(8) $3x^2 y dx - (\ln y + x^3)dy = 0$; (exactă)

(9) $y' = x^2 y$; (variabile separabile)

(10) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$; (Bernoulli)

(11) $y' = 2xy^2$; (variabile separabile)

(12) $y' = \dfrac{4x}{y^2}$; (variabile separabile)

(13) $(x + y + 1)dx + (x - y^3 + 3)dy = 0$; (exactă)

(14) $y' = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{\ln x}{x}$; (liniară, neomogenă)

(15) $y' = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{e^x}{x}$; (liniară, neomogenă)

(16) $(x + y^2)dx + y(1 - x)dy = 0$; (exactă)

(17) $3x^2 y dx - (x^3 + \ln y)dy = 0$; (exactă)

(18) $y' = -2y + x^2 + 2x$; (liniară, neomogenă)

(19) $y' = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{3}{x^2}$; (liniară, neomogenă)

(20) $y' = 2xy + x^3 y^{\frac{1}{2}}$; (Bernoulli)

(21) $y' = -\dfrac{1}{x}y + \dfrac{\ln x}{x}y^2$. (Bernoulli)

SEMINAR 10

SISTEME DIFERENȚIALE

10.1 Calcul matriceal direct

Ca în cazul sistemelor de ecuații liniare, putem scrie un sistem în formă matriceală $X' = A \cdot X$, unde A este matricea coeficienților.

Distingem mai multe cazuri, în funcție de proprietățile matricei A.

Dacă A **se diagonalizează**, fie $\{\lambda_i\}$ valorile proprii ale sale, iar $\{u_i\}$ vectorii proprii asociați. Atunci funcțiile:

$$\{x_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot u_i\}_i$$

dau o bază în spațiul vectorial al soluțiilor. Soluția generală poate fi scrisă, atunci, ca o combinație liniară a acestora:

$$x(t) = \sum_i c_i x_i(t).$$

Se obișnuiește ca soluția să fie prezentată sub formă matriceală, alcătuind **matricea fundamentală** a sistemului: $X(t) = {}^t(e^{\lambda_i t} u_i)$.

Exemplu:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= -4x + y. \end{cases}$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 3$. Cum acestea au multiplicitatea algebrică egală cu 1, rezultă că matricea se diagonalizează. Se obțin subspații proprii de dimensiune 1, bazele fiind, de exemplu:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci soluția generală se scrie:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci matricea fundamentală se scrie:

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Dacă A **nu se diagonalizează**, fie $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valorile proprii, de multiplicități algebrice $n_1, \dots, n_k$. Atunci se caută soluții de forma:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{ij}(t) e^{\lambda_i t}, \quad \mathrm{grad} P_{ij} \leq n_i - 1.$$

Înlocuim în ecuația inițială și găsim P_{ij}. Această metodă poartă numele de **metoda coeficienților nedeterminați**.

Exemplu:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Soluție: Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, care are valoarea proprie $\lambda = 1$, de multiplicitate algebrică 2. Se poate verifica faptul că matricea nu este diagonalizabilă și atunci căutăm soluții de forma:

$$\begin{cases} x_1(t) &= (A_1 + B_1 t)e^t \\ x_2(t) &= (A_2 + B_2 t)e^t \end{cases}$$

Înlocuim în sistem și obținem un sistem liniar cu necunoscutele A_1, A_2, B_1, B_2, care va fi dublu nedeterminat. Așadar, soluția se prezintă cu 2 parametri în forma:

$$(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Rezultă că matricea fundamentală este:

$$X(t) = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta t)e^t \\ (\alpha + \beta + \beta t)e^t \end{pmatrix}$$

Dacă matricea A **nu se diagonalizează, iar** $\lambda_i \in \mathbb{C}$, lucrăm cu numere complexe.

Exemplu:

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + x_2 \\ x_2' &= -8x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

știind că soluția conține la $t = 0$ punctul $M_0(1, 0)$.

Soluție: Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

Valorile sale proprii sînt $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Atunci subspațiul invariant va fi:

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{Sp}\{(1, -2 + 2i)\}.$$

Obținem o soluție generală în forma:

$$x_1(t) = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + 2i \end{pmatrix} = (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + 2i \end{pmatrix}.$$

Din proprietățile algebrice ale numerelor complexe, avem că $x_t(t) = \overline{x_1(t)}$ și atunci soluția generală va fi $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$.

Folosind condițiile inițiale, avem că $x_1(0) = 1$ și $x_2(0) = 0$, deci $c_1 = c_2 = 1$.

10.2 Folosind forma Jordan

Exemplu: Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Să se calculeze e^{At}, pentru $t \in \mathbb{R}$;

(b) Să se determine soluția generală a sistemului $X' = AX$, apoi soluția particulară care verifică condiția $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

Soluție:

(a) Matricea A are valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii (baze în subspațiile invariante) sînt:

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 1).$$

Forma canonică Jordan a matricei se obține a fi:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

folosind matricea de trecere

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $A = TJT^{-1}$.

Știm din teorie că $e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1}$.

Folosim acum dezvoltarea în serie Taylor a funcției exponențiale:

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x}{n!},$$

adevărată și pentru matrice. În plus, dacă matricea este diagonală, exponențiala sa va conține exponențiala pe diagonală, adică, dacă $M = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, atunci $e^M = \mathrm{diag}(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$.

Pentru a folosi această proprietate, ne legăm de descompunerea în blocuri Jordan a lui A. Fie J_1 blocul Jordan de dimensiune 2, corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și J_2 blocul Jordan de dimensiune 1 corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 2$. Avem descompunerea pe blocuri și pentru exponențială:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{pmatrix}$$

Cum $e^{J_2 t} = e^{2t}$, calculăm celălalt bloc:

$$\begin{aligned} e^{J_1 t} &= e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ t & t \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Am folosit faptul că $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$, așadar din seria Taylor va fi suficient să păstrăm primii 2 termeni. Calculăm și T^{-1}, obținînd:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

găsim, în fine:

$$e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} e^t(t+2) - e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t(t+2) + 2e^{2t} \\ te^t & e^t & -te^t \\ e^t(t+1) - e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t(t+1) + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

(b) Conform teoriei, soluția generală a sistemului este:

$$X(t) = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

constantele C_i determinîndu-se din condițiile inițiale. În acest caz:

$$X(t) = e^{At} X(0) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplu 2: Să se determine soluția sistemului diferențial liniar neomogen:

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= -x + 2z + e^t z \\ z' &= -y + 2, \end{cases}$$

știind că satisface condițiile inițiale $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluție: Fie matricele:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci sistemul se scrie matriceal $X' = AX + B(t)$. Valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = 2$. Avem vectorul propriu $(1, 1, 1)$ bază în $V_{\lambda_{1,2}}$ și vectorul $(2, 0, 1)$ bază în V_{λ_3}.

Aducem matricea A la forma canonică Jordan, folosind matricea de trecere:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Forma canonică Jordan se obține a fi:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Putem descompune matricea Jordan în două blocuri, unul de dimensiune 2 și unul de dimensiune 1, ceea ce ne ajută să calculăm:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - (t+1)e^t & -te^t & 2e^t(t+1) - 2e^{2t} \\ -te^t & (1-t)e^t & 2te^t \\ 2e^{2t} - (t+1)e^t & -te^t & 2e^t(t+1) - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Conform teoriei, obținem soluția problemei Cauchy (ținînd cont de valorile inițiale) sub forma:

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

Integrala se calculează integrînd fiecare din elementele matricei și obținem, în final:

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} -t - \dfrac{t^2}{2} \\ 1 - \dfrac{t^2}{2} \\ -t - \dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

SEMINAR 11

EXAMEN 2018–2019

Numărul 1

1. În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră mulțimea:

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b + 3c = 0\}.$$

Să se determine $V^\perp$ relativ la produsul scalar euclidian și o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$ diferită de baza canonică.

2. Să se aducă la forma canonică și să se reprezinte grafic conica:

$$f(x, y) = 9x^2 + 4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0.$$

3. Să se rezolve ecuațiile diferențiale:

(a) $xy' - y + 2x^2y^2 = 0$;

(b) $y = x(1 + y') + (y')^2$;

(c) $(3x^2 + 2)y' + xy^2 = 0$;

(d) $(2x - y + 2)dx + (-x + y + 1)dy = 0$.

4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x' &= -3x - y + e^t \\ y' &= x - y \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ și să se calculeze e^{At}, unde A este matricea sistemului.

5.(a) Să se determine ecuația conului cu vîrful în $V(2, -1, 0)$ și determinat de curba[1]:

$$(\gamma) : \begin{cases} y^2 + z^2 & = 2 \\ x & = 1 \end{cases}$$

(b) Se consideră spațiul euclidian $\mathbb{R}_4[X]$ și un endomorfism $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$. Să se arate că:

$$\mathrm{Im} f \simeq (\mathrm{Ker} f^*)^\perp.$$

Numărul 2

1. În spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$ se consideră mulțimea:

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b + 3c = 0\}.$$

Să se determine $V^\perp$ și o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$, diferită de baza canonică.

2. Să se aducă la forma canonică și să se reprezinte grafic conica:

$$f(x, y) = 9x^2 + 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

3. Să se rezvole ecuațiile diferențiale:

(a) $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$;

(b) $yy' = 2x(y')^2 + 1$;

(c) $(x^2 + 1)y' + 2xy^2 = 0$;

(d) $(2x + y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0$.

4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x' & = 2x + y \\ y' & = -x + 4y + 27t \end{cases}$$

[1]Pentru ecuația conului și a altor cuadrice nestudiate la seminar, consultați notițele Prof. Niță sau, de exemplu, acest document.

cu valorile inițiale $x(0) = -1$, $y(0) = 1$ și să se calculeze e^{At}, unde A este matricea sistemului.

5.(a) Să se determine ecuația cilindrului cu generatoarele paralele cu vectorul $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ și curba directoare:

$$(\gamma) : \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 & = 0 \\ x & = 1 \end{cases}$$

(b) Se consideră spațiul euclidian $\mathbb{R}_4[X]$ și $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ un endomorfism. Să se arate că:

$$\mathrm{Ker} f \simeq (\mathrm{Im} f^*)^{\perp}.$$

INDEX