Ex. 1 (Bayes)

Date:

$P(B) = 0.01, \qquad P(\neg B) = 0.99, \qquad \text{senzitivitate } P(+ \mid B) = 0.95, \qquad \text{specificitate } P(- \mid \neg B) = 0.90.$

Prin urmare, rata de fals-pozitiv este

$$P(+ \mid \neg B) = 1 - 0.90 = 0.10.$$

(a) Probabilitatea ca persoana sa aiba boala daca testul este pozitiv

Folosim teorema lui Bayes:

$$P(B \mid +) = \frac{P(+ \mid B)P(B)}{P(+ \mid B)P(B) + P(+ \mid \neg B)P(\neg B)}.$$

inlocuind:

$$P(B \mid +) = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.10 \cdot 0.99} = \frac{0.0095}{0.0095 + 0.099} = \frac{0.0095}{0.1085} \approx 0.0876.$$

Raspuns: $\boxed{P(B \mid +) \approx 8.76\%}$. Desi testul e sensibil si specific, prevalenta mica (1%) face ca majoritatea rezultatelor pozitive sa fie fals-pozitive.

(b) Specificitatea minima pentru ca $P(B \mid +) \geq 50\%$

Notam specificitatea necunoscuta cu $s = P(- \mid \neg B)$, deci $P(+ \mid \neg B) = 1 - s$. Cerinta:

$$\frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + (1 - s) \cdot 0.99} \;\geq\; \frac{1}{2}.$$

Echivalent:

$$2 \cdot 0.95 \cdot 0.01 \;\geq\; 0.95 \cdot 0.01 + 0.99(1 - s) \quad \Longrightarrow \quad 0.0095 \;\geq\; 0.99(1 - s).$$

Deci

$$1 - s \;\leq\; \frac{0.0095}{0.99} \approx 0.009596 \quad \Longrightarrow \quad s \;\geq\; 1 - 0.009596 \approx 0.990404.$$

Raspuns: specificitatea minima necesara este

$$\boxed{s_{\min} \approx 99.04\%}.$$