Petrescu Cosmin
Grupa 243

Tema 1 – Algoritmi Avansati

Problema 3 – TSP

Fie varianta TSP unde toate muchiile au ponderea 1 sau 2.
a) arătați ca problema ramane NP-Hard pentru aceste instanțe.

Pentru a arata ca o problema A este NP-Hard, o putem reduce la o problema B despre care se cunoaste ca este NP-Hard, in timp polinomial.

Presupunem ca exista un algoritm care determina costul minim al unui traseu inchis pentru TSP.

Fie G un graf simplu, neponderat. Construim G' pe baza lui G astfel:

- V(G')=V(G)=n
- Toate muchiile din G apar si in G' cu costul 1.
- Completam cu muchii pana cand G' va fi graf complet. Fiecare muchie care este completata pe langa cele din G va avea costul 2

Cazul 1: Daca G avea un ciclu hamiltonian?

Pentru graful G', algoritmul va obtine rezultatul n (n muchii de cost 1).

Cazul 2: Daca G nu avea un ciclu hamiltonian?

Cel mai bun traseu inchis din G va contine cel mult n-1 muchii de cost 1 si o muchie de cost 2. Deci, cel mai bun traseu va fi de lungime n+1.

Astfel, construind G' in timp polinomial si ruland algoritmul, putem verifica daca G este hamiltonian sau nu in functie de rezultatul obtinut. Dar, stim faptul ca problema ciclului hamiltonian este o problema NPC. Rezulta astfel ca problema TSP ramane NP-Hard.

b) arătați ca aceste ponderi satisfac în continuare inegalitatea triunghiului

Fie 3 noduri ale caror distante apartin {1,2}. Avem cazurile:

Toate nodurile au distante egale cu 1: $1 \leq 1 + 1$.

O pereche de noduri are distanta 2 : $2 \leq 1 + 1$ si $1 \leq 1 + 2$.

Doua perechi de noduri au distantele 2: $1 \leq 2 + 2$ si $2 \leq 1 + 2$.

Toate nodurile au distantele egale cu 2: $2 \leq 2 + 2$.

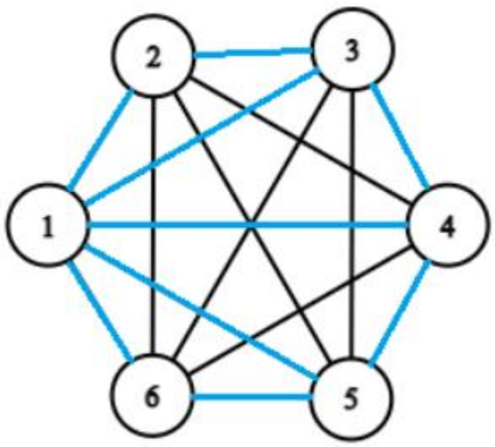
Rezulta ca ponderile satisfac inegalitatea triunghiului.

Petrescu Cosmin
Grupa 243

c) Algoritmul descris în curs (c3, slides 18-19) oferă o aproximare de ordin 2 pentru forma generala a TSP (cu regula triunghiului). Verificati daca in aceasta instanța a problemei, algoritmul din curs este 3/2 aproximativ!

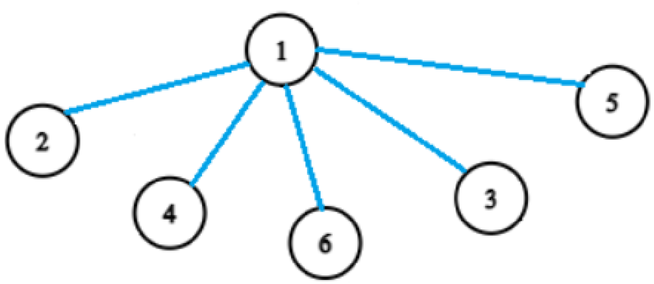
Conform punctului b), ponderile respecta regula triunghiului, ceea ce inseamna ca putem aplica algoritmul dat.

Fie graful K_6 de mai jos, unde muchiile albastre au costul 1, iar restul au costul 2.



Solutia optima este ciclul $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1, de\ cost\ 6.$

Algoritmul dat construieste un arbore partial de cost minim, astfel:



Ciclul construit de algoritmul dat, pe acest arbore partial este $1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$, cu un cost total = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 10.

Fie ALG algoritmul dat si OPT algoritmul optim. ALG este 3/2 aproximativ ⇔ALG(I) ≤ $\frac{3}{2}$ * OPT(I), pentru orice intrare I. Dar, pe exemplul de mai sus, ALG = 10 si OPT = 6, rezultatele nesatisfacand relatia. Rezulta ca pe aceasta instanta a problemei, algoritmul nu este 3/2 aproximativ.