Petrescu Cosmin
Grupa 243

Tema 1 – Algoritmi Avansati

Problema 2 – Load Balance

1. **Fie o iterație a problemei Load Balancing (Cursul 2, slide-ul 16) pentru 2 mașini. La seminarul de algoritmi aproximativi unul dintre studenți propune un algoritm de rezolvare si sustine ca acesta este 1.1 aproximativ. El ruleaza algoritmul pe un set de n activitati si obtine o incarcatura de 80 pe una dintre masini, respectiv 120 pe cealalta. Este posibil ca factorul lui de aproximare sa fie corect?**

a) tinand cont ca rezultatul obtinut anterior a fost făcut pe un set de activități, fiecare cu timpul de lucru cel mult 100.

Exista seturi de date pentru care factorul de aproximare sa fie corect. Un astfel de exemplu este setul de activitati cu duratele [20, 60, 60, 60] al carui rezultat optim este chiar cel din ipoteza. Deci, este posibil ca factorul de aproximare sa fie corect. Nu putem spune ca este gresit deoarece nu stim exact pe ce set de date a fost rulat.

b) tinand cont ca rezultatul obtinut anterior a fost făcut pe un set de activități, fiecare cu timpul de lucru cel mult 10.

Factorul de aproximare este corect daca si numai daca rezultatul optim este cel putin 110. Dar, deoarece activitatile au durata maxima de 10, putem echilibra cele doua masini astfel incat masina cu load maxim sa aiba load strict mai mic decat 110. Astfel, rezulta ca factorul de aproximare nu este corect.

3. **Fie algoritmul Ordered-Scheduling Algorithm (Cursul 2, slide-ul 42) care implica algoritmul descris anterior (slide 19) la care adaugăm o preprocesare cu care sortăm descrescător activitățile după timpul de desfășurare. Th. 2 afirmă că acest algoritm este 3/2 aproximativ. Arătați ca acest factor de aproximare poate fi îmbunătățit la 3/2-1/(2m).**

Fie k indicele masinii cu load maxim in urma executarii algoritmului si q ultima activitate adaugata pe masina k. Fie load'(i) load-ul masinii i fix inainte ca activitatea q sa fie asociata masinii k. Deci $\mathrm{ALG} = \mathrm{load(k)} = \mathrm{load'(k)} + t_q$.

Activitatea q se adauga pe masina k, ceea ce inseamna ca la momentul acela masina k are incarcatura minima. Atunci, evident, are un load mai mic decat media. In plus, media duratelor primelor q activitati este si ea mai mica decat media tuturor activitatilor minus durata activitatii q. Adica, $\mathrm{load'(k)} \leq \frac{1}{m}\sum_{1\leq i\leq m} load'(i) = \frac{1}{m}\sum_{1\leq j<q} t_j \leq \frac{1}{m}\left(\sum_{1\leq j\leq n} t_j - t_q\right)$.

Cazul 1: q ≤ m

Daca q este in primele m activitati, atunci algoritmul este optim (ALG = OPT).

Petrescu Cosmin
Grupa 243

Cazul 2: q > m

Deoarece activitatile sunt sortate descrescator, rezulta ca $t_q \leq \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1})$

$ALG = load'(k) + t_q \leq \frac{1}{m}(\sum_{1 \leq j \leq n} t_j - t_q) + t_q \leq \frac{1}{m}(\sum_{1 \leq j \leq n} t_j - t_q) + t_q =$
$= \frac{1}{m}\sum_{1 \leq j \leq n} t_j - \frac{1}{m} t_q + t_q \leq \frac{1}{m}\sum_{1 \leq j \leq n} t_j - \frac{1}{2m}(t_m + t_{m+1}) + \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1})$

Dar, $OPT \geq (t_m + t_{m+1}) \rightarrow ALG \leq OPT - \frac{1}{2m} OPT + \frac{1}{2} OPT = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}) OPT.$