Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

CURS#5

II. Interpolare polinomială

(a) Interpolarea Lagrange:

  (i) problema interpolării Lagrange;
  (ii) metoda naivă: algoritm;
  (iii) metoda lui Lagrange: polinoamele de bază (auxiliare) Lagrange; teorema de existenţă şi unicitate; teorema de estimare a erorii de interpolare; algoritm.
  (iv) metoda lui Neville: formula de recurenţă; algoritm;
  (v) metoda lui Newton; algoritm;

I. INTERPOLARE POLINOMIALĂ

PROBLEMA INTERPOLĂRII

Considerăm mulțimea polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienți din $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_n := \left\{ P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R},\ j=\overline{0,n} \right\}$$

<u>**PROBLEMA**</u> (interpolarea Lagrange):

<u>Date</u> $n \in \mathbb{N}$ și setul de date/puncte

$$\mathcal{D} = \{ (x_i, y_i) \mid i=\overline{0,n} \} \subset \mathbb{R}^2$$

unde $x_i \neq x_j$, $0 \leq i < j \leq n$, să se determine $P_n \in \mathbb{P}_n$ a.î.

$$\boxed{P_n(x_i) = y_i, \quad i=\overline{0,n}} \qquad (1)$$

P_n - <u>polinomul de interpolare Lagrange</u> de grad n asociat setului de date $\mathcal{D}$;

x_i, $i=\overline{0,n}$, sn <u>noduri de interpolare</u>

1) METODA NAIVĂ

Relația (1) reprezintă un sistem de $(n+1)$ ecuații liniare cu $(n+1)$ necunoscute a_j, $j=\overline{0,n}$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \qquad (2)$$

Echivalent cu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{X \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\underline{a} \in \mathbb{R}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_n \end{bmatrix}}_{\underline{y} \in \mathbb{R}^{n+1}} \qquad (2')$$

$$X \underline{a} = \underline{y} \qquad (2'')$$

OBSERVAȚII:

1) Întrucât $x_i \neq x_j$, $0 \le i < j \le n$, sistemul liniar (2), (2') sau (2'') se rezolvă, în mod unic, cu regula lui Cramer:

$$\det X = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

$$X^{(k)} := \left(X_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=\overline{0,n}}, \quad X_{ij}^{(k)} = \begin{cases} X_{ij}, & j \neq k \\ y, & j = k \end{cases}$$

$$\boxed{a_k = \frac{\det X^{(k)}}{\det X}, \quad k = \overline{0,n}} \qquad (3)$$

2) # operații algebrice elementare $= O\left((n+1)^3\right)$

3) În cazul metodei naive, polinoamele de bază sunt cele date de baza canonică a lui $\mathbb{P}_n$: $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

2) METODA LUI LAGRANGE

LEMA 1 (polinoamele de bază Lagrange):

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists L_{n,k} \in \mathbb{P}_n$, $k = \overline{0,n}$:

$$L_{n,k}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i = x_k \\ 0, & x_i \neq x_k \end{cases} \quad (4)$$

Dem:

$n = 0$: $L_{0,0} \in \mathbb{P}_0$

$$L_{0,0}(x) = 1$$

$n \geq 1$:

$$\boxed{L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}} \quad (5)$$

$L_{n,k} \in \mathbb{P}_n$ și satisface relația (4)

□

CONSECINȚĂ: Polinomul Lagrange P_n este

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x)\, y_k} \quad (6)$$

TEOREMA 1 (teorema de interpolare Lagrange):

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \mathcal{D} = \{(x_i, y_i) \mid i=\overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$

a.î. $x_i \neq x_j$, $0 \leq i < j \leq n$,

$$\boxed{\exists!\, P_n \in \mathbb{P}_n : \quad P_n(x_i) = y_i,\ i=\overline{0,n}} \quad (7)$$

Dem:

$n=0$: Evident! $P_0(x) \equiv y_0$

$n \geq 1$:

EXISTENȚA: din Lema 1.

UNICITATEA:

Fie $P_n, Q_n \in \mathbb{P}_n$ a.î. $P_n \neq Q_n$ și

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i, \quad i=\overline{0,n}$$

$\Rightarrow P_n - Q_n \in \mathbb{P}_n$ & $(P_n - Q_n)(x_i) = 0$, $i=\overline{0,n}$

$\Rightarrow P_n - Q_n \equiv 0 \Rightarrow P_n = Q_n$ Abs

$\square$

TEOREMA 2 (estimarea erorii):

Fie $n \geq 0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$,
$\mathcal{D} = \{(x_i, f(x_i)) \mid i = \overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$, $x_i \neq x_j$,
$0 \leq i < j \leq n$.

Atunci

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x \in [a,b],\ \exists\, \xi = \xi(x) \in [a,b]: \\ f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, \pi_{n+1}(x)\end{gathered}} \qquad (8)$$

unde $\pi_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i) \in \mathbb{P}_{n+1}$.

Are loc <u>estimarea erorii de interpolare</u>:

$$\boxed{|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\, |\pi_{n+1}(x)|,\ \forall x \in [a,b]} \qquad (9)$$

$$M := \max_{y \in [a,b]} |f^{(n+1)}(y)| = \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Dem:

Cazul I: $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Relația (8) devine $0 = 0$ ✓

Cazul II: $x \in [a,b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}(t),$$
$$\forall t \in [a,b]$$

$\Rightarrow \varphi(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n}$ & $\varphi(x) = 0 \Rightarrow$

φ are $(n+2)$ zerouri distincte în $[a,b]$,

$x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \equiv x \underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow}$

φ' are $(n+1)$ zerouri distincte, între

cele $(n+2)$ zerouri ale lui φ $\underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \dots$

$\varphi^{(n+1)}$ are un zerou între cele două

zerouri ale lui $\varphi^{(n)}$:

$\exists\ \xi = \xi(x) \in [a,b]$ a.î. $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \varphi(t) \Big|_{t=\xi}$$

$$= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}(t) \right] \Big|_{t=\xi}$$

$$= \left[f^{(n+1)}(t) - 0 - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)! \right] \Big|_{t=\xi}$$

$$= f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)! \quad \Rightarrow$$

$\exists\ \xi = \xi(x) \in [a,b]$ a.î.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) \quad \checkmark$$

Estimarea erorii de interpolare se obține din (8) și ipoteza $f \in C^{(n+1)}[a,b]$. $\square$

<u>**OBSERVAȚIE**</u>: În cazul metodei Lagrange, <u>polinoamele de bază Lagrange</u> $L_{n,k}(x)$, $k = \overline{0,n}$, sunt baza lui $\mathbb{P}_n$.

3) ALGORITMUL LUI NEVILLE

<u>DEFINIȚIE:</u>

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\{(x_i,f(x_i)) \mid i=\overline{0,n}\}$ $\subset\mathbb{R}^2$ a.î. $x_i\neq x_j$, $0\le i<j\le n$.

Fie $m_0, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, $k\le n$, a.î.

(i) $0\le m_i\le n$, $i=\overline{0,k}$;

(ii) $m_i\neq m_j$, $0\le i<j\le k$.

Notăm cu $P_{m_0,m_1,\dots,m_k}(x)$ unicul polinom de interpolare Lagrange asociat funcției f și nodurilor $x_{m_0}, x_{m_1}, \dots, x_{m_k}$, i.e.

$$P_{m_0,m_1,\dots,m_k}(x_i)=f(x_i),\quad i=\overline{0,k}$$

<u>TEOREMA 3</u> (formula de recurență):

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și setul de date $\mathcal{D}=\{(x_i,f(x_i)) \mid i=\overline{0,n}\}\subset\mathbb{R}^2$, a.î.

$x_i \neq x_j$, $0 \leq i < j \leq n$.

Dacă $x_i, x_j \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ a.î. $x_i \neq x_j$ și

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = \frac{1}{x_i - x_j} \Big[(x - x_j) P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,n}(x) \\ - (x - x_i) P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,n}(x) \Big], \\ \forall x \in [a,b] \end{aligned}}$$

atunci $P \equiv P_n \in \mathbb{P}_n$ polinomul de interpolare Lagrange asociat funcției f și nodurilor $x_0, x_1, \dots, x_n$.

<u>Dem</u>: Notăm

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &:= P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,n}(x), \quad \forall x \in [a,b] \\ \hat{Q}(x) &:= P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,n}(x), \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\, Q(x) - (x - x_i)\, \hat{Q}(x)}{x_i - x_j}, \quad \forall x \in [a,b]$$

$\Rightarrow \operatorname{grad} P \leq \operatorname{grad} Q + 1 = n$

Cazul I: $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i, x_j\}$

$Q(x_k) = \hat{Q}(x_k) = f(x_k) \implies$

$$P(x_k) = \frac{(x_k - x_j) f(x_k) - (x_k - x_i) f(x_k)}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{(x_i - x_j) f(x_k)}{x_i - x_j} = f(x_k) \quad \checkmark$$

Cazul II: $x_k = x_i$

$Q(x_i) = \hat{Q}(x_i) = f(x_i) \implies$

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_j) f(x_i) - (x_i - x_i) f(x_i)}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{(x_i - x_j) f(x_i)}{x_i - x_j} = f(x_i) \quad \checkmark$$

Cazul III: $x_k = x_j$

$Q(x_j) = \hat{Q}(x_j) = f(x_j) \implies$

$$P(x_j) = \frac{(x_j - x_j) f(x_j) - (x_j - x_i) f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$= f(x_j) \quad \checkmark$ Deci $P = P_n$. $\square$

ALGORITM (Neville):

grad

x_i	$P_{m_i}(x)$ (0)	$P_{m_i,m_j}(x)$ (1)	$P_{m_i,m_j,m_k}(x)$ (2)
x_0	$P_0(x)=f(x_0)$		
x_1	$P_1(x)=f(x_1)$	$P_{0,1}(x)$	
x_2	$P_2(x)=f(x_2)$	$P_{1,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$P_n(x)=f(x_n)$	$P_{n-1,n}(x)$	$P_{n-2,n-1,n}(x)$

	---	$P_{m_0,m_1,\dots,m_n}(x)$ (n)
x_0		
x_1		
x_2		
$\vdots$		
x_n		$P_{0,1,\dots,n}(x)$

grad

4) METODA LUI NEWTON

OBSERVAȚIE (algoritmul lui Neville):
Date $D_n := \{(x_i, y_i) \mid i=\overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$, a.î.
$x_i \neq x_j$, $0 \le i < j \le n$, determină $P_n \in \mathbb{P}_n$
în mod recursiv, prin determinarea
polinoamelor Lagrange de grad $k=\overline{0,n}$
asociate cu seturile de date care conțin
$(k+1)$ noduri succesive, $k=\overline{0,n}$, din
totalul celor $(n+1)$ noduri $x_0, x_1, \ldots, x_n$

IDEEA (metoda lui Newton):
$D_n := \{(x_i, y_i) \mid i=\overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$;
$x_i \neq x_j$, $0 \le i < j \le n$;
$\forall k=\overline{1,n}$, construiește $P_k \in \mathbb{P}_k$ care
rezolvă problema de interpolare Lagrange
pentru setul de date
$D_k := \{(x_i, y_i) \mid i=\overline{0,k}\} = D_{k-1} \cup \{(x_k, y_k)\}$,

folosind $P_{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$ care rezolvă problema de interpolare Lagrange pentru setul de date $D_{k-1} := \{(x_i, y_i) \mid i = \overline{0, k-1}\}$.

<u>$k=0$</u>: $D_0 = \{(x_0, y_0)\}$

$P_0 \in \mathbb{P}_0$: $P_0(x_0) = y_0 \Rightarrow \begin{cases} P_0(x) = c_0 \\ P_0(x_0) = y_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{P(x_0) = y_0}$

<u>$k=1$</u>: $D_1 = D_0 \cup \{(x_1, y_1)\}$

$P_1 \in \mathbb{P}_1 : \begin{cases} P_1(x_0) = y_0 \\ P_1(x_1) = y_1 \end{cases}$

$\underbrace{P_1(x)}_{\text{grad } 1} = \underbrace{P_0(x)}_{\text{grad } 0} + \underbrace{c_1(x - x_0)}_{\text{grad } 1}$, <u>$c_1 \in \mathbb{R}$</u>

$P_0(x_0) = y_0$

Cum $P_1(x_0) = P_0(x_0) + c_1(x_0 - x_0) = P(x_0) = y_0$, trebuie ca:

$P_1(x_1) = y_1 \Rightarrow$

$P_0(x_1) + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = \dfrac{y_1 - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}}$

<u>$k \mapsto k+1$</u>: $D_{k+1} = D_k + \{(x_{k+1}, y_{k+1})\}$

$P_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$; $P_{k+1}(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, k+1}$

Dar $P_k \in \mathbb{P}_k$ și $P_k(x_i) = 0$, $i = \overline{0,k} \Rightarrow$

$$\underbrace{P_{k+1}(x)}_{\text{grad } k+1} = \underbrace{P_k(x)}_{\text{grad } k} + \underbrace{c_{k+1}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}_{\text{grad } k+1}$$

$P_k(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,k}$ <u>$c_{k+1} \in \mathbb{R}$</u>

Cum $P_{k+1}(x_i) = P_k(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,k}$,

mai trebuie ca

$P_{k+1}(x_{k+1}) = y_{k+1} \Rightarrow$

$$\boxed{c_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_0)\dots(x_{k+1} - x_k)}}$$

ALGORITM (metoda lui Newton):

Date: n, $D_n = \{(x_i, y_i) \mid i = \overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$

$$x_i \neq x_j, \quad 0 \leq i < j \leq n$$

$k=0$: $P_k(x) = c_k$; $c_k = y_k$

$k=\overline{1,n}$: $$c_k = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})$$

OBSERVAȚII

1) $$P_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_l)$$

2) În cazul metodei lui Newton, polinoamele de bază ale lui $\mathbb{P}_n$ sunt

$$\{1;\ (x-x_0);\ (x-x_0)(x-x_1);\ \dots,\ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\}$$

3) Sist. de ecuații liniare pt determinarea c_k, $k=\overline{0,n}$, este inferior triunghiular.