Cercetări operaţionale 1

Cristian Niculescu

1 Curs 1

1.1 Introducere

Studiem în principal problemele de optimizare liniară.
Bibliografie:
C. Zidăroiu - Programare liniară
A. Ştefănescu, C. Zidăroiu - Cercetări operaţionale
V. Preda, M. Bad - Culegere de probleme de cercetări operaţionale

1.2 Sisteme de ecuaţii liniare

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m}$$

este sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ este soluţie a sistemului dacă verifică ecuaţiile.

Dacă $b_i = 0, \forall i = \overline{1,m}$, sistemul este omogen.
Un sistem omogen este compatibil, având soluţie $x_j = 0, \forall j = \overline{1,n}$.

1.2.1 Forme echivalente

Forma matriceală:

$$Ax = b \tag{1}$$

Notăm:

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, j = \overline{1,n},$$

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1,m}.$$

Forma "pe coloane":

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = b.$$

Forma "pe linii":

$$a_i^T x = b_i, i = \overline{1,m}.$$

Teorema Kronecker-Capelli (TKC). Sistemul (1) este compatibil $\Leftrightarrow$ $rangA = rang(A,b)$.

Presupunem $rangA = r \leq \min\{m,n\}$.
Presupunem că minorul format cu primele r linii şi coloane este $\neq 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,r}$$

sunt ecuaţii principale.
Restul sunt ecuaţii secundare.
Mulţimea soluţiilor sistemului (1) este egală cu mulţimea soluţiilor sistemului format cu ecuaţiile principale. De aceea putem elimina ecuaţiile secundare.
Presupunem $rangA = m \leq n$.
Dacă $m = n$, atunci sistemul (1) are soluţia unică $x = A^{-1}b$.
Presupunem $rangA = m < n$.
Fie $a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m}, m$ coloane liniar independente ale lui A.
$B = (a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m})$ se numeşte bază a sistemului (1), deoarece $\{a^{j_1}, a^{j_2}, ..., a^{j_m}\}$ este bază în $\mathbb{R}^m$.

Notăm:

$$x^B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \{j_1, j_2, ..., j_m\},\ \mathcal{R} = \{1, 2, ..., n\} \setminus \mathcal{B},$$

$$R = (a^j)_{j\in\mathcal{R}},\ x^R = (x_j)_{j\in\mathcal{R}}.$$

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx^B + Rx^R = b \overset{B^{-1}\cdot|}{\Longrightarrow}$$

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R,$$

forma explicită a sistemului (1) în raport cu baza B.
Numărul bazelor $\le C_n^m \Rightarrow \exists$ cel mult C_n^m forme explicite.
O soluţie a sistemului (1) este soluţie de bază $\Leftrightarrow$ componentelor nenule ale soluţiei le corespund coloane liniar independente ale lui A.
Dacă soluţia de bază are m componente nenule, ea se numeşte soluţie de bază nedegenerată; în caz contrar (dacă are mai puţin de m componente nenule), se numeşte degenerată.
Soluţia $(0, 0, ..., 0)^T$ se consideră soluţie de bază.
În forma explicită a sistemului punem $x^R = 0 \Rightarrow x^B = B^{-1}b$.
$\begin{cases} x^B = B^{-1}b \\ x^R = 0 \end{cases}$ este soluţie de bază, numită soluţia de bază asociată (corespunzătoare) lui B, deoarece componentele nenule sunt componente ale lui x^B.
La orice bază corespunde o singură soluţie de bază. Această funcţie este surjectivă, dar nu este injectivă.
Este surjectivă, deoarece coloanele liniar independente corespunzătoare componentelor nenule ale soluţiei de bază formează o bază sau se pot completa până la o bază.
Dacă soluţia este degenerată, se pot completa în mai multe feluri (neinjectivă).
Exemplu. Sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

are soluţia de bază degenerată $(1, 0, 0)^T$ asociată bazelor (a^1, a^2) şi (a^1, a^3).

1.3 Sisteme de ecuaţii şi inecuaţii liniare

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m$.

Lemă. Fie $c \in \mathbb{R}^*$. Dintre sistemele

$$Ax = b \tag{1}$$

şi

$$\begin{cases} A^T u = 0 \\ b^T u = c \end{cases} \tag{2}$$

unul şi numai unul este compatibil.

Demonstraţie.

$$rang \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix} = 1 + rangA \tag{*}$$

(Se bordează minorul $\neq 0$ din A^T care dă rangul lui A^T cu coloana $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ în dreapta şi elementele corespunzătoare ale lui b^T pe ultima linie, obţinându-se minorul $\neq 0$ care dă rangul lui $\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix}$.)

Arătăm (1) compatibil $\Rightarrow$ (2) incompatibil:

$$\text{(1) compatibil} \overset{TKC}{\Longrightarrow} rangA = rang(A,b) \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$
$$rang \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix} = 1 + rang \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} \overset{TKC}{\Longrightarrow} \text{(2) incompatibil.}$$

Arătăm (1) incompatibil $\Rightarrow$ (2) compatibil:

$$\left.\begin{array}{r} \text{(1) incompatibil} \overset{TKC}{\Longrightarrow} rang(A,b) \neq rangA \\ rangA \leq rang(A,b) \leq 1 + rangA \end{array}\right\} \Rightarrow rang(A,b) = 1 + rangA \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$
$$rang \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & c \end{pmatrix} \overset{TKC}{\Longrightarrow} \text{(2) compatibil.}$$

Lema Farkas-Minkowski. Dintre sistemele

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

şi

$$\begin{cases} A^T u \geq 0 \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4}$$

unul şi numai unul este compatibil.
Demonstraţie. Dacă $b = 0$, evident: (3) are soluţia $x = 0$, (4) incompatibil: nu se verifică $b^T u < 0$.
Presupunem $b \neq 0$.
Arătăm că (3) şi (4) nu au simultan soluţie:
Reducere la absurd. Presupunem că (3) are soluţia $\overline{x}$, (4) are soluţia $\overline{u} \Rightarrow$

$$0 > b^T\overline{u} = \overline{u}^T b = \overline{u}^T A\overline{x} = (\overline{u}^T A\overline{x})^T = \underbrace{\overline{x}^T}_{\geq 0} \underbrace{A^T\overline{u}}_{\geq 0} \geq 0, \text{contradicţie.}$$

Din cele de mai sus, (3) compatibil $\Rightarrow$ (4) incompatibil.
Arătăm (3) incompatibil $\Rightarrow$ (4) compatibil:
Cazul 1) (1) incompatibil $\overset{\text{lemă}}{\Longrightarrow}$ (2) compatibil. Pentru $c < 0$, fie $\overline{u}$ soluţie în (2) $\Rightarrow$ $\overline{u}$ soluţie în (4).
Cazul 2) (1) compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0.
Fie $A = (a^1, a^2, ..., a^n)$. Facem inducţie după n.
Verificare.
$n = 1 \Rightarrow A = a^1$.
Fie $\overline{x} \ngeq 0$ soluţie pentru

$$a^1 x = b. \tag{1_1}$$

$n = 1 \Rightarrow \overline{x} \in \mathbb{R}^*_- \Rightarrow a^1 = \frac{1}{\overline{x}} b$.
Arătăm că $\overline{u} = -b$ este soluţie pentru

$$\begin{cases} (a^1)^T u \geq 0 \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4_1}$$

$$(a^1)^T\overline{u} = (a^1)^T(-b) = \tfrac{1}{\overline{x}} b^T(-b) = -\underbrace{\frac{1}{\overline{x}}}_{<0} \underbrace{b^T b}_{>0} \geq 0,$$

$b^T\overline{u} = b^T(-b) = -b^T b < 0$.
Demonstraţie.
Ipoteza de inducţie: dacă sistemul

$$\sum_{j=1}^{n-1} a^j x_j = b \tag{1_{n-1}}$$

este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0, atunci sistemul

$$\begin{cases} (a^j)^T u \geq 0, j = \overline{1, n-1} \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4_{n-1}}$$

este compatibil.
Presupunem că sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} a^j x_j = b \tag{1_n}$$

este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0.
Arătăm că sistemul

$$\begin{cases} (a^j)^T u \geq 0, j = \overline{1,n} \\ b^T u < 0 \end{cases} \tag{4_n}$$

este compatibil.
Dacă (1_{n-1}) are soluţia $\overline{x} \geq 0$, atunci $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ este soluţie ≥ 0 pentru (1_n), contradicţie.
Dacă (1_{n-1}) este incompatibil, atunci, din cazul 1), (4_{n-1}) este compatibil.
Dacă (1_{n-1}) este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0, atunci, din ipoteza de inducţie, (4_{n-1}) este compatibil.
Deci (4_{n-1}) este compatibil. Fie u_0 soluţie pentru (4_{n-1}).
Dacă $(a^n)^T u_0 \geq 0$, atunci u_0 este soluţie pentru (4_n), q.e.d.
Dacă $(a^n)^T u_0 < 0$, fie

$$\begin{aligned} &\lambda_j = -\frac{(a^j)^T u_0}{(a^n)^T u_0} \geq 0, \forall j = \overline{1, n-1}, \\ &\lambda_0 = -\frac{b^T u_0}{(a^n)^T u_0} < 0, \\ &\overline{a}^j = a^j + \lambda_j a^n, j = \overline{1, n-1}, \\ &\overline{b} = b + \lambda_0 a^n. \end{aligned}$$

Fie sistemul

$$\sum_{j=1}^{n-1} \overline{a}^j y_j = \overline{b}. \tag{S_1}$$

$(S_1) \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n-1} a^j y_j + \left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j y_j - \lambda_0 \right) a^n = b.$
Arătăm că (S_1) n-are soluţie ≥ 0:
Presupunem prin absurd că $\overline{y}_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n-1}$ este soluţie ≥ 0 pentru $(S_1) \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n-1} \underbrace{\lambda_j}_{\geq 0} \underbrace{\overline{y}_j}_{\geq 0} - \underbrace{\lambda_0}_{<0} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \overline{y}_j - \lambda_0 \end{pmatrix}$ este soluţie ≥ 0 pentru (1_n), contradicţie.

(S_1) este de forma (1_{n-1}).
Dacă (S_1) este incompatibil, atunci, din cazul 1),

$$\begin{cases} (\overline{a}^j)^T u \geq 0, j = \overline{1, n-1} \\ \overline{b}^T u < 0 \end{cases} \tag{S_2}$$

este compatibil.
Dacă (S_1) este compatibil, dar n-are soluţie ≥ 0, atunci, din ipoteza de inducţie, (S_2) este compatibil.
Fie $\overline{u}$ soluţie pentru (S_2) şi

$$\widetilde{u} = \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n} u_0.$$

Arătăm că $\widetilde{u}$ este soluţie pentru (4_n):
$(a^j)^T \widetilde{u} = (a^j)^T \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n} (a^j)^T u_0 = (a^j + \lambda_j a^n)^T \overline{u} = (\overline{a}^j)^T \overline{u} \geq 0, \forall j = \overline{1, n-1}$,
$(a^n)^T \widetilde{u} = (a^n)^T \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n} (a^n)^T u_0 = 0$,
$b^T \widetilde{u} = b^T \overline{u} - \frac{\overline{u}^T a^n}{u_0^T a^n} b^T u_0 = (b + \lambda_0 a^n)^T \overline{u} = \overline{b}^T \overline{u} < 0$, q.e.d.
Observaţie. Sistemul (4) se poate înlocui cu

$$\begin{cases} A^T u \leq 0 \\ b^T u > 0 \end{cases} \tag{4'}$$

deoarece (4) şi (4') sunt sau nu compatibile simultan: $\overline{u}$ este soluţie pentru (4) $\Leftrightarrow$ $-\overline{u}$ este soluţie pentru (4').
Teorema Farkas-Minkowski (TFM). Dintre sistemele

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 = b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \leq b_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

şi

$$\begin{cases} -A_{11}^T u_1 - A_{21}^T u_2 - A_{31}^T u_3 \geq 0 \\ -A_{12}^T u_1 - A_{22}^T u_2 - A_{32}^T u_3 = 0 \\ -A_{13}^T u_1 - A_{23}^T u_2 - A_{33}^T u_3 \leq 0 \\ u_1 \geq 0, u_2 \text{ arbitrar}, u_3 \leq 0 \\ b_1^T u_1 + b_2^T u_2 + b_3^T u_3 > 0 \end{cases} \tag{6}$$

unul şi numai unul este compatibil.
Demonstraţie. Aducem sistemul (5) la forma sistemului (3).

$$\begin{aligned}&x_2 = x_4 - x_5, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,\\&x_3 = -x_6, x_6 \geq 0,\\&x_7 \geq 0, x_8 \geq 0 \text{ variabile ecart.}\end{aligned}$$

(5)$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}A_{11}x_1 + A_{12}x_4 - A_{12}x_5 - A_{13}x_6 - x_7 = b_1\\A_{21}x_1 + A_{22}x_4 - A_{22}x_5 - A_{23}x_6 = b_2\\A_{31}x_1 + A_{32}x_4 - A_{32}x_5 - A_{33}x_6 + x_8 = b_3\\x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0\end{cases} \tag{3'}$$

(3') este de forma sistemului (3), cu

$$A = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & -A_{12} & -A_{13} & -I & 0\\A_{21} & A_{22} & -A_{22} & -A_{23} & 0 & 0\\A_{31} & A_{32} & -A_{32} & -A_{33} & 0 & I\end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

Scriem sistemul de forma (4') corespunzător, notând $u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}A_{11}^T u_1 + A_{21}^T u_2 + A_{31}^T u_3 \leq 0\\A_{12}^T u_1 + A_{22}^T u_2 + A_{32}^T u_3 \leq 0\\-A_{12}^T u_1 - A_{22}^T u_2 - A_{32}^T u_3 \leq 0\\-A_{13}^T u_1 - A_{23}^T u_2 - A_{33}^T u_3 \leq 0\\-u_1 \leq 0, u_3 \leq 0\\b_1^T u_1 + b_2^T u_2 + b_3^T u_3 > 0.\end{cases} \tag{4''}$$

Din lema Farkas-Minkowski şi observaţie $\Rightarrow$ dintre sistemele (3') şi (4") unul şi numai unul este compatibil.
Observăm că (4") $\Leftrightarrow$ (6).
$\Rightarrow$ dintre sistemele (5) şi (6) unul şi numai unul este compatibil.

Sistemul (6) se numeşte sistemul dual al sistemului (5), numit sistem primal.

Corolarul Farkas-Minkowski. Fie $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisimetrică ($F^T = -F$). Atunci sistemul

$$\begin{cases} Fx \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

are o soluţie $\overline{x}$ astfel încât $F\overline{x} + \overline{x} > 0$.

Demonstraţie. Pentru sistemul

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

sistemul dual este

$$\begin{cases} -A^T u \geq 0 \\ u \geq 0 \\ b^T u > 0. \end{cases}$$

Fie $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pentru $A = F, b = e^i$ (vectorul cu 1 pe componenta i şi 0 în rest) $\Rightarrow$ pentru sistemul

$$\begin{cases} Fx \geq e^i \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

sistemul dual este

$$\begin{cases} Fu \geq 0 \\ u \geq 0 \\ u_i > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Cazul 1) Sistemul (7) are soluţia $x^i \Rightarrow$

$$\begin{cases} Fx^i \geq 0 \\ x^i \geq 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} f_i^T x^i \geq 1 \\ x_i^i \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_i^T x^i + x_i^i \geq 1 > 0$.

Cazul 2) Sistemul (7) este incompatibil $\overset{TFM}{\Longrightarrow}$ sistemul (8) are o soluţie $x^i \Rightarrow$

$$\begin{cases} Fx^i \geq 0 \\ x^i \geq 0 \end{cases}$$

şi
$$\begin{cases} f_i^T x^i \geq 0 \\ x_i^i > 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow f_i^T x^i + x_i^i > 0.$
Deci, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \exists x^i$ astfel încât
$$\begin{cases} Fx^i \geq 0 \\ x^i \geq 0 \end{cases}$$
şi $f_i^T x^i + x_i^i > 0.$
$\Rightarrow \overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i$ este soluţie pentru sistemul
$$\begin{cases} Fx \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
şi
$$(F\overline{x} + \overline{x})_i = \sum_{j=1}^{n} (Fx^j + x^j)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f_i^T x^j + x_i^j}_{\geq 0} \geq f_i^T x^i + x_i^i > 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow$$
$F\overline{x} + \overline{x} > 0,$ q.e.d.

2 Seminar 1

1) Fie sistemul:
$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & -x_4 & -3x_5 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 5 \end{cases}$$
a) Să se scrie matricea sistemului, vectorul termenilor liberi şi matricea extinsă.

b) Să se scrie forme echivalente ale sistemului.

c) Să se discute compatibilitatea sistemului.

d) Să se scrie bazele sistemului. Pentru o bază să se scrie variabilele de bază şi variabilele secundare, forma explicită a sistemului în raport cu baza respectivă şi soluţia de bază asociată. Este aceasta degenerată?

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vectorul termenilor liberi este $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Matricea extinsă este $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Forma matriceală ($Ax = b$) este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Forma "pe linii" ($a_i^T x = b_i, i = \overline{1,m}$) este $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 5 \end{cases}$.

Forma "pe coloane" ($\sum\limits_{j=1}^{n} a^j x_j = b$) este

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies rang\,(A) = rang\,(\overline{A})\ (= 2) \overset{\text{teorema Kronecker-Capelli}}{\Longrightarrow}$ sistemul este compatibil.

d) Bazele sistemului (matrice pătrate formate cu coloanele lui A, cu determinanţi nenuli):

$B_1 = (a^1, a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B_2 = (a^1, a^5) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B_3 = (a^2, a^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B_4 = (a^2, a^4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B_5 = (a^2, a^5) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B_6 = (a^3, a^5) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B_7 = (a^4, a^5) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pentru $B = B_1$:

Variabilele de bază sunt x_1, x_2.

Variabilele secundare sunt x_3, x_4, x_5.

Forma explicită a sistemului în raport cu baza B este

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R,$$

unde:

$x^B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$R = \left(a^3, a^4, a^5\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$x^R = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_2 = -3 + 5x_5 \end{cases}.$$

Soluţia de bază asociată este $(2, -3, 0, 0, 0)^T$ (se fac 0 variabilele secundare) şi este nedegenerată, deoarece nu este niciun 0 printre valorile variabilelor de bază (2 şi -3).

Reguli de scriere a sistemului dual din teorema Farkas-Minkowski:

- La fiecare ecuaţie sau inegalitate din sistemul primal corespunde o variabilă în sistemul dual şi invers, la fiecare variabilă din sistemul primal corespunde o ecuaţie sau inegalitate în sistemul dual.

- La inegalităţi cu $\geq$ corespund variabile ≥ 0 şi invers.

- La ecuaţii corespund variabile arbitrare şi invers.
- La inegalităţi cu $\leq$ corespund variabile ≤ 0 şi invers.
- Matricea sistemului dual este opusa transpusei matricei sistemului primal.
- Termenii liberi din sistemul dual sunt 0.
- Sistemul dual conţine şi condiţia de ecart: produsul scalar dintre vectorul termenilor liberi din sistemul primal şi vectorul variabilelor din sistemul dual este > 0.

2) $\begin{cases} -3x_1 & +4x_2 & +8x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 8 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq & 7 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0} \end{cases}$

a) Scrieţi sistemul dual.
b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil? Aflaţi o soluţie a lui.

a) Punem în evidenţă corespondenţa dintre ecuaţiile sau inegalităţile din sistemul primal şi variabilele din sistemul dual.

$$\begin{cases} -3x_1 & +4x_2 & +8x_3 & \leq & 2 & \leftrightsquigarrow & u_1 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 8 & \leftrightsquigarrow & u_2 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \geq & 7 & \leftrightsquigarrow & u_3 \\ \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \text{ arbitrar}, x_3 \leq 0} \end{cases}$$

Scriem pe rând ecuaţiile sau inegalităţile din sistemul dual corespunzătoare variabilelor din sistemul primal. Coeficienţii din membrul stâng se citesc pe coloana variabilei respective cu semn schimbat.
Pentru x_1:
$3u_1 - u_2 - 5u_3 \geq 0$.
Semnul este $\geq$ deoarece $x_1 \geq 0$.
Pentru x_2:
$-4u_1 + 3u_3 = 0$.
Coeficientul lui u_2 este 0 deoarece x_2 nu apare în ecuaţie. Semnul este $=$ deoarece x_2 este arbitrar.
Pentru x_3: $-8u_1 - 2u_2 - 2u_3 \leq 0$.
Semnul este $\leq$ deoarece $x_3 \leq 0$.
Scriem semnele variabilelor din sistemul dual:
$u_1 \leq 0$ deoarece u_1 corespunde la o inegalitate cu $\leq$.
u_2 arbitrar deoarece u_2 corespunde la o ecuaţie.
$u_3 \geq 0$ deoarece u_3 corespunde la o inegalitate cu $\geq$.
Scriem condiţia de ecart:

$2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0$.
Sistemul dual este:

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrcl} 3u_1 & -u_2 & -5u_3 & \geq & 0 \\ -4u_1 & & +3u_3 & = & 0 \\ -8u_1 & -2u_2 & -2u_3 & \leq & 0 \end{array} \\ u_1 \leq 0, u_2 \text{ arbitrar}, u_3 \geq 0 \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0 \end{cases}$$

b) Numerotăm relaţiile din sistemul dual:

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrcll} 3u_1 & -u_2 & -5u_3 & \geq & 0 & (1) \\ -4u_1 & & +3u_3 & = & 0 & (2) \\ -8u_1 & -2u_2 & -2u_3 & \leq & 0 & (3) \end{array} \\ u_1 \leq 0 \ (4) \\ u_2 \text{ arbitrar } (5) \\ u_3 \geq 0 \ (6) \\ 2u_1 + 8u_2 + 7u_3 > 0 \ (7) \end{cases}$$

$(2) \implies 4u_1 = 3u_3 \overset{(4),\,(6)}{\implies} u_1 = u_3 = 0 \overset{(1),\,(3)}{\implies} u_2 = 0 \overset{(7)}{\implies} 0 > 0$, contradicţie $\implies$ sistemul dual este incompatibil $\overset{\text{TFM}}{\implies}$ sistemul primal este compatibil.
O soluţie a sistemului primal este $x_1 = 8, x_2 = x_3 = 0$.

3) $\begin{cases} \begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & +8x_2 & = & 4 \end{array} \\ x_1 \text{ arbitrar}, x_2 \text{ arbitrar} \end{cases}$

a) Scrieţi sistemul dual.
b) Care dintre cele 2 sisteme este compatibil? Aflaţi o soluţie a lui.

a)
$\begin{cases} \begin{array}{rrclcl} x_1 & +2x_2 & = & 3 & \leftrightsquigarrow & u_1 \\ 4x_1 & +8x_2 & = & 4 & \leftrightsquigarrow & u_2 \end{array} \\ x_1 \text{ arbitrar}, x_2 \text{ arbitrar} \end{cases}$

Sistemul dual este

$$\begin{cases} \begin{array}{rrcl} -u_1 & -4u_2 & = & 0 \\ -2u_1 & -8u_2 & = & 0 \end{array} \\ u_1 \text{ arbitrar}, u_2 \text{ arbitrar} \\ 3u_1 + 4u_2 > 0 \end{cases}$$

b) Ecuaţiile sistemului primal sunt contradictorii $\implies$ sistemul primal este incompatibil $\overset{\text{TFM}}{\implies}$ sistemul dual este compatibil.
O soluţie a sistemului dual este $u_1 = 4, u_2 = -1$.