CURS#6

II. Interpolare polinomială

(a) Interpolarea Lagrange:

- (vi) metoda lui Newton cu diferenţe divizate (DD); algoritm;
- (vii) formula de interpolare baricentrică;
- (viii) interpolare Lagrange pe porţiuni.

5) METODA LUI NEWTON CU DIFERENȚE DIVIZATE (DD)

DEFINIȚIE:

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset[a,b]$, $x_i\neq x_j$, $0\le i<j\le n$, $n\in\mathbb{N}$.

(i) Sn <u>diferența divizată (DD) de ordin 0</u> a lui f în raport cu x_0

$$\boxed{f[x_0]=f(x_0)}$$

(ii) Sn <u>DD de ordin 1</u> a lui f în raport cu x_0,x_1

$$\boxed{f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}$$

(iii) Sn <u>DD de ordin k</u> a lui f în raport cu $x_0,x_1,\dots,x_k$, $k\le n$:

$$\boxed{f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}}$$

PROPOZIȚIA 1:

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}}$$

Dem: Inducție după $n \geq 1$

$n=1$: Cf definiției DD de ordin 1:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \checkmark$$

$n \mapsto n+1$: Cf definiției DD de ordin $(n+1)$:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{n+1}] - f[x_0, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x_0}$$

$$= \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots\underline{\underline{(x_i - x_{n+1})}}} \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\underline{\underline{(x_i - x_0)}}\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \right]$$

$$= \frac{1}{x_{n+1}-x_0}\left[\frac{f(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_n)} - \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)}\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \times$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{x_i-x_{n+1}} - \frac{1}{x_i-x_0}\right)\right]$$

$$= \frac{f(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_n)}$$

$$+ \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)(x_0-x_{n+1})}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})}$$

$\square$

TEOREMA 2 (formula Newton cu DD):

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset[a,b]$, $x_i\neq x_j$, $0\le i<j\le n$, $n\in\mathbb{N}$. Atunci:

$$\boxed{\begin{aligned}P_n(x) &= f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)\\ &+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+\\ &+f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\end{aligned}}$$

Dem: Inducție după $n\ge 0$.

$n=0$: $P_0(x)=f(x_0)=f[x_0]$ ✓

$n\mapsto n+1$:

$$\Big[f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+$$
$$+f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\Big]+$$
$$+f[x_0,x_1,\dots,x_{n+1}](x-x_0)\dots(x-x_n)$$
$$=P_n(x)+f[x_0,x_1,\dots,x_{n+1}](x-x_0)\dots(x-x_n)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}L_{n,i}(x)\,f(x_i)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n+1} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})}$$

$$\times (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x-x_n)} f(x_i)$$

$$+\sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})\overline{\overline{(x-x_i)}}(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})\ (x_i-x_{i+1})\dots(x-x_n)}$$

$$\times \frac{f(x_i)}{\underline{\underline{x_i}}-x_{n+1}}$$

$$+\underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_n)}}_{=L_{n+1,n+1}(x)} f(x_{n+1})$$

$$=\sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \times$$

$$\times f(x_i)\underbrace{\left(1+\frac{x-x_i}{x_i-x_{n+1}}\right)}_{=\frac{x-x_{n+1}}{x_i-x_{n+1}}} + L_{n+1,n+1}(x)\, f(x_{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} L_{n+1,i}(x) f(x_i) + L_{n+1,n+1}(x) f(x_{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} L_{n+1,i}(x) f(x_i) = P_{n+1}(x)$$

$\square$

ALGORITM (formula lui Newton cu DD):

Date: n; $D_n = \{(x_i, f(x_i)) \mid i = \overline{0,n}\} \subset \mathbb{R}^2$

$(x_i \neq x_j,\ 0 \leq i < j \leq n)$

$k=0$: $c_0 = f(x_0) = f[x_0]$

$P_0(x) = c_0$

$k = \overline{1,n}$: $c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

Eroarea de interpolare Lagrange cu DD

$f \in C^{n+1}[a,b]$, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b \Rightarrow$

$\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi \in [a,b]$:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Dem: EX!

6) INTERPOLAREA LAGRANGE:

FORMULA BARICENTRICĂ

OBSERVAȚIE: Un dezavantaj al metodei lui Lagrange de determinare a lui $P_n \in \mathbb{P}_n$, polinomul de interpolare Lagrange asociat lui $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și nodurilor $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$, este că nu poate fi folosită în mod recursiv pentru determinarea lui $P_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$, polinomul de interpolare Lagrange asociat lui f și nodurilor $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$.

Mai exact, pentru a determina P_{n+1}, trebuie reluate toate calculele de la bun început!

ALTERNATIVA:

$$L_{n,k}(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}=\frac{\overbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}^{=\pi_{n+1}(x)}}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}\cdot\frac{1}{x-x_k}$$

$$=\pi_{n+1}(x)\frac{1}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}\cdot\frac{1}{x-x_k}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}&L_{n,k}(x)=\pi_{n+1}(x)\frac{w_k}{x-x_k},\ k=\overline{0,n}\\ &w_k:=\Big(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)\Big)^{-1}\end{aligned}} \quad (1)$$

$w_k,\ k=\overline{0,n}$, sn <u>ponderi baricentrice</u>

Obținem <u>prima formă a formulei de interpolare baricentrică</u>:

$$\boxed{P_n(x)=\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{w_k}{x-x_k}y_k\Big)\pi_{n+1}(x)} \quad (2)$$

Fie $y_k = 1$, $k=\overline{0,n}$. $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} P_n(x_k) = 1, \quad k=\overline{0,n} \\ P_n \in \mathbb{P}_n \end{array}\right\} \Longrightarrow P_n(x) \equiv 1$$

Prin urmare:

$$1 \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(x) \cdot 1$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k} \right) \pi_{n+1}(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\pi_{n+1}(x) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}}} \qquad (3)$$

Inserăm (3) în (2) și obținem <u>a doua formă a formulei de interpolare baricentrică</u>:

$$\boxed{P_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k} y_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}}} \qquad (4)$$

OBSERVAȚII:

1) Ponderile w_k apar în același mod atât la numitorul, cât și la numărătorul relației (4), exceptând datele y_k

2) Relația (4) se poate extinde cu ușurință (dpdv computațional) la adăugarea unui nou punct (x_{n+1}, y_{n+1}) la setul de date $D_n = \{(x_i, y_i) \mid i = \overline{0,n}\}$.

3) Forma (4) este stabilă chiar și pt $x \simeq x_k$ deoarece atât la numitor, cât și la numărător apare aceeași cantitate mare $w_k/(x-x_k)$ - acestea anulându-se reciproc.

7) INTERPOLARE LAGRANGE PE PORȚIUNI

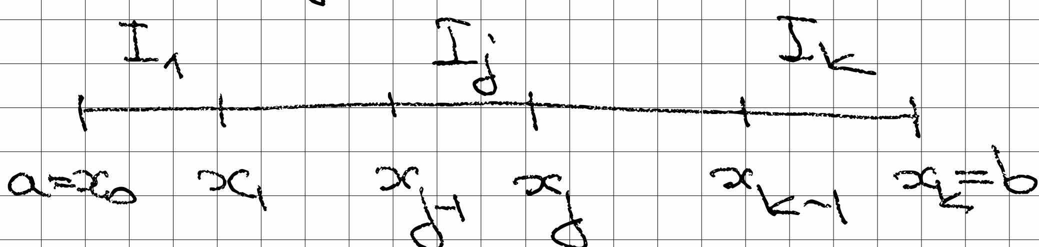
• Fie $\tau_h := \{I_j\}_{j=\overline{1,k}}$ o <u>partiție</u> a lui $[a,b]$ în k subintervale:

$$[a,b] = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$$

$$I_j := [x_{j-1}, x_j], \quad j = \overline{1,k}$$

$$h_j := x_j - x_{j-1}, \quad j = \overline{1,k}$$

$$h := \max_{j=\overline{1,k}} h_j$$



• Pe fiecare subinterval $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1,k}$, considerăm $(n+1)$ noduri echidistante $x_j^{(i)}$, $i = \overline{0,n}$, cu n <u>mic</u>

și construim polinomul de interpolare Lagrange asociat celor $(n+1)$ noduri

- Definim pe $\mathcal{T}_h$ spațiul de polinoame de grad cel mult n pe porțiuni asociate unei funcții $f \in C[a,b]$:

$$\boxed{X_h^n := \left\{ v \in C[a,b] \,\middle|\, v|_{I_j} \in \mathbb{P}_n(I_j),\ j=\overline{1,K} \right\}} \quad (1)$$

<u>**OBSERVAȚIE**</u>: Teorema de estimare a erorii polinomului de interpolare Lagrange de grad n, asociată lui $f|_{I_j}$, $j=\overline{1,K}$, implică:

$$\boxed{\| f - \Pi_h^n f \|_\infty \le C\, h^{n+1} \, \| f^{(n+1)} \|_\infty} \quad (2)$$

unde $\Pi_h^n f$ este polinomul de interpolare Lagrange de grad n pe porțiuni, asociat funcției $f \in C^{n+1}[a,b]$, partiției $\tau_h = \{ I_j := [x_{j-1}, x_j] \}_{j=\overline{1,k}}$ a lui $[a,b]$ și nodurilor de interpolare $x_j^{(i)}$, $i = \overline{0,n}$, pe I_j, $j = \overline{1,k}$, ie

$$\boxed{\Pi_h^n f := P_n(f|_{I_j}) \text{ pe } I_j,\ j=\overline{1,k}} \quad (3)$$

OBSERVAȚIE: Deducerea relației (2):

Pe fiecare interval I_j, $j=\overline{1,k}$, aplicăm teorema de estimare a erorii polinomului de interpolare Lagrange de grad n asociat lui $f|_{I_j}$ și nodurilor de interpolare $x_j^{(i)}$, $i=\overline{0,n}$:

$$|f(x) - P_n(f|_{I_j})| \le \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x), \ \forall x \in I_j$$

$$|f(x) - P_n(f|_{I_j})| \leq \frac{M_j}{(n+1)!} |\pi_{n+1}(x)|, \forall x \in I_j$$

unde $M_j := \|f|_{I_j}^{(n+1)}\|_\infty \Rightarrow$

$$\max_{x \in I_j} |f(x) - P_n(f|_{I_j})| \leq \frac{M_j}{(n+1)!} h^{n+1} \tilde{C}_j \Rightarrow$$

$$\|f - P_n(f|_{I_j})\|_{\infty, I_j} \leq C_j \|f^{(n+1)}\|_{\infty, I_j} h^{n+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\|f - T_k^h f\|_\infty \leq C \cdot \|f^{(n+1)}\|_\infty h^{n+1}}$$

$\square$

<u>OBSERVAȚIE:</u>

Relația (2) spune că se poate obține o eroare de interpolare suficient de mică pentru n (gradul polinomului de interpolare Lagrange) <u>mic</u> și h <u>suficient de mic</u> (i.e K <u>suficient de mare</u>).

TEOREMA:

Fie $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n+1$.

Fie $f^{(k)} \in L^2(a,b)$, $0 \leq k \leq n+1$, și $\Pi_h^n f$ polinomul de interpolare Lagrange de grad n pe porțiuni, asociat lui f și partiției $\tau_h := \{I_j\}_{j=\overline{1,K}}$, $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1,K}$, unde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_K = b$, $h_j := x_j - x_{j-1}$, $j = \overline{1,K}$, $h = \max\limits_{j=\overline{1,K}} h_j$.

Atunci:

$\exists\, C > 0$ independent de h:

$$\|(f - \Pi_h^n f)^{(k)}\|_{L^2(a,b)} \leq C h^{n+1-k} \|f^{(n+1)}\|_{L^2(a,b)} \qquad (4)$$

CAZ PARTICULAR: $n = 1$, $k \in \{0,1\}$:

$$\|f - \Pi_h^1 f\|_{L^2(a,b)} \leq C h^2 \|f''\|_{L^2(a,b)} \qquad (5a)$$

$$\|(f - \Pi_h^1 f)'\|_{L^2(a,b)} \leq C h \|f''\|_{L^2(a,b)} \qquad (5b)$$

Dem: Doar pentru $n=1$, $k\in\{0,1\}$.

Cum $n=1$, pe fiecare subinterval I_j, $j=\overline{1,K}$, polinomul de interpolare Lagrange este liniar şi, prin urmare, nodurile de interpolare corespunzătoare sunt capetele intervalului I_j, i.e x_{j-1} şi x_j.

$$e := f - \Pi_h^1 f \Rightarrow e(x_j) = 0,\ j=\overline{0,K} \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow}$$

$$\exists\, \xi_j \in (x_{j-1}, x_j),\ j=\overline{1,K}:\ e'(\xi_j) = 0 \Rightarrow$$

$$e'(x) = \int_{\xi_j}^{x} e''(s)\,ds = \int_{\xi_j}^{x} [f(s) - \underbrace{(\Pi_h^1 f)(s)]''}_{=0}\,ds$$

$$= \int_{\xi_j}^{x} f''(s)\,ds,\quad \forall x \in I_j = [x_{j-1}, x_j] \Rightarrow$$

$$|e'(x)| \le \int_{\xi_j}^{x} |f''(s)|\,ds \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(s)|\,ds,\ \forall x \in I_j$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy} \\ \text{Schwartz}}}{\leq} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} 1^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(s)|^2\, ds\right)^{1/2}$$

$$= h^{1/2} \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(s)|^2\, ds\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$|e'(x)|^2 \leq h \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(s)|^2\, ds\right), \forall x \in I_j \Rightarrow$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |e'(x)|^2\, dx \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} h \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(s)|^2\, ds\right) dx$$

$$= h^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(s)|^2\, ds \quad , \forall j = \overline{1,K} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{K} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |e'(x)|^2\, dx}_{= \|e'\|^2_{L^2(a,b)}} \leq h^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{K} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f''(s)|^2\, ds}_{= \|f''\|^2_{L^2(a,b)}}$$

Am obținut:

$$\|e'\|_{L^2(a,b)} \le h\,\|f''\|_{L^2(a,b)}$$

Relația (5a) se obține pornind de la

$$e(x) = \int_{x_j}^{x} e'(s)\,ds\,, \quad \forall x \in I_j\,, \forall j=\overline{1,k}$$

și procedând analog.

$\square$