MECANICA NEWTONIANĂ

- **OSCILAŢII ARMONICE**
    - **modelul pentru oscilatorul liniar armonic**
    - **ecuația diferențială**
    - **legea mişcării**
    - **energia**
- **Compunerea a două oscilaţii armonice paralele de aceeaşi pulsaţie**
- **Compunerea a două oscilaţii armonice paralele cu pulsaţii puţin diferite**
- **Analiza Fourier a mişcării periodice**

- **Compunerea oscilaţiilor armonice perpendiculare de aceeaşi pulsaţie**
- **Compunerea oscilaţiilor armonice perpendiculare cu pulsaţii diferite**

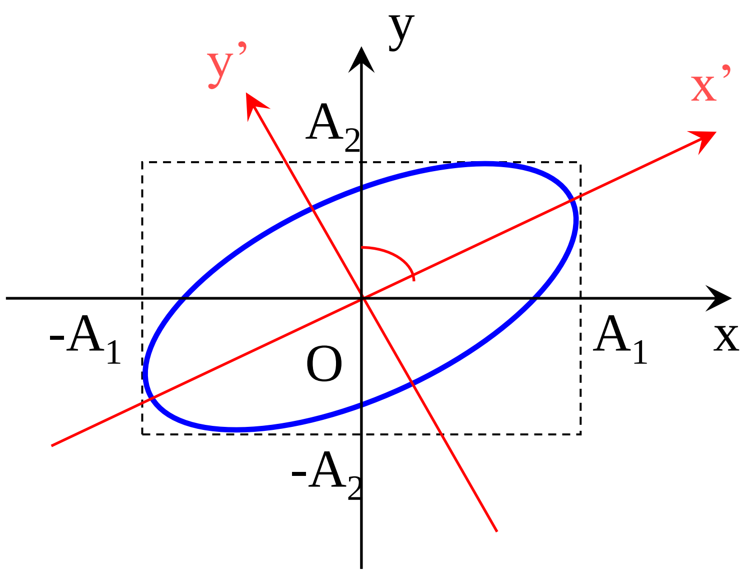
- **OSCILAŢII AMORTIZATE**

- **OSCILAŢII ÎNTREŢINUTE**

- **UNDE ELASTICE**

# COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PERPENDICULARE DE ACEEAŞI PULSAȚIE

**x (t) = $A_1$ sin ($\omega$ t + $\varphi_1$)**
**y (t) = $A_2$ sin ($\omega$ t + $\varphi_2$)**




$$\frac{x}{A_1} = \sin(\omega t)\cos\varphi_1 + \cos(\omega t)\sin\varphi_1 (1)$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin(\omega t)\cos\varphi_2 + \cos(\omega t)\sin\varphi_2 (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & |\cos\varphi_2 \\ (2) & |\cos\varphi_1\end{array}\right| - \Big|\,\hat{}\,2 \qquad \left.\begin{array}{ll}(1) & |\sin\varphi_2 \\ (2) & |\sin\varphi_1\end{array}\right| - \Big|\,\hat{}\,2 \qquad +$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

ecuația traiectoriei unui corp punctiform supus simultan la 2 osc.arm. perp. de aceeași pulsație

# COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PERPENDICULARE DE ACEEAŞI PULSAȚIE

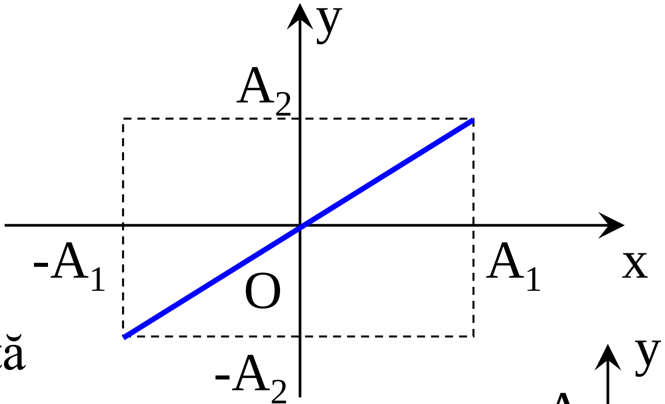
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

Atunci când

$$\varphi_2-\varphi_1=2n\pi,\ \ n=0,1,2,\ldots$$

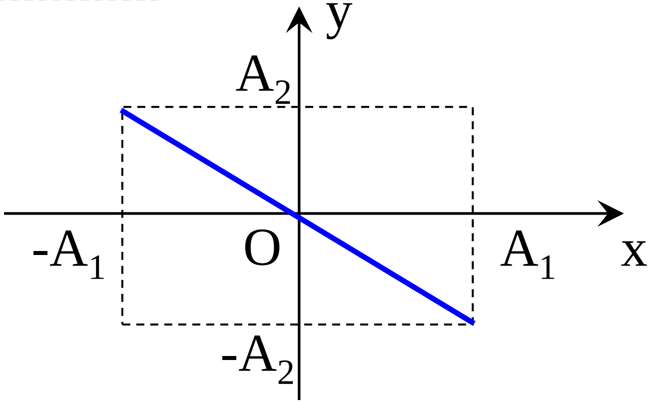
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0\Rightarrow\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$ traiectoria este o dreaptă



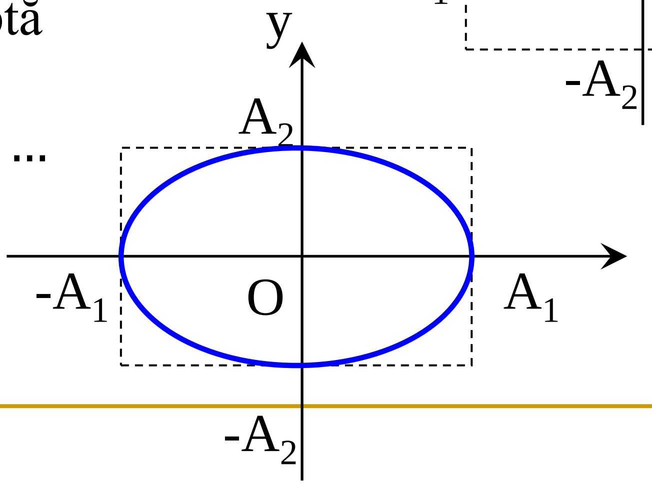

$$\varphi_2-\varphi_1=(2n+1)\pi,\ \ n=0,1,2,\ldots$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$ traiectoria este o dreaptă




$$\varphi_2-\varphi_1=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ \ n=0,1,2,\ldots$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$ traiectoria este o elipsă dreaptă



# COMPUNEREA OSCILAŢIILOR ARMONICE PERPENDICULARE CU PULSAŢII DIFERITE

Un punct material supus simultan la două oscilaţii armonice perpendiculare de frecvenţă diferită are o traiectorie complicată.

$$\mathbf{x\ (t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),}$$
$$\mathbf{y\ (t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

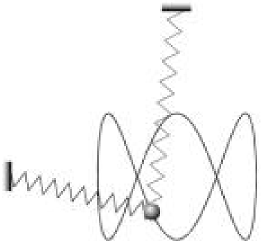
Dacă raportul celor două frecvenţe (pulsaţii) $\omega_2 / \omega_1$
este un **număr raţional** atunci traiectoria este **una din figurile Lissajous**, forma figurii depinzând şi de $\varphi_2 - \varphi_1$ .

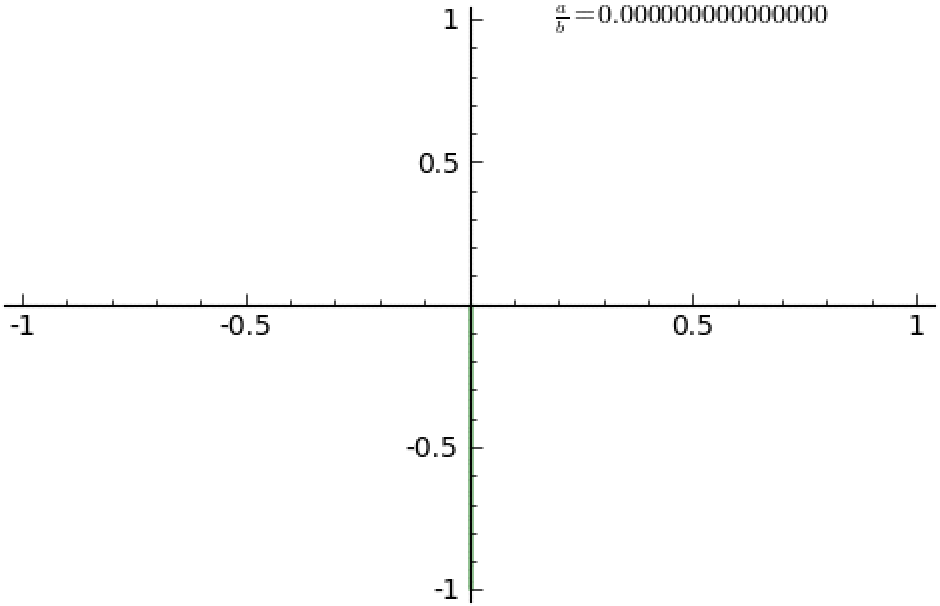
Formarea figurilor Lissajous https://academo.org/demos/lissajous-curves/

https://www.surendranath.org/GPA/Oscillations/Lissajous/Lissajous.html

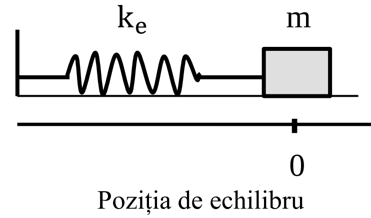
# COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PERPENDICULARE CU PULSAȚII DIFERITE

Traiectoria pentru creșterea raportului $\omega_2 / \omega_1$ =a/b de la 0 la 1 cu pas de 0.01. ($\varphi_2 - \varphi_1 = 0$)





# OSCILATORUL AMORTIZAT




$$F_{el} = -k_e \cdot x,\qquad \boxed{F_r = -\alpha v}$$

α –coeficient de rezistenţă;

$$F = m \cdot a \;\Rightarrow\; m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k_e \cdot x - \alpha\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k_e}{m}x = 0$$

$$\frac{k_e}{m} = \omega_0^2 \qquad \boxed{\frac{\alpha}{m} = 2\beta}$$

$\omega_0$ –pulsaţia proprie a oscilatorului

$\beta$ –factor de amortizare

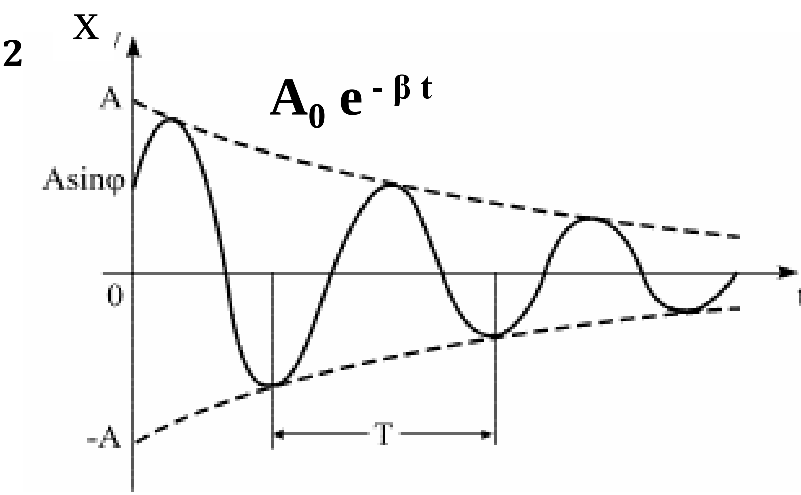
$\omega$ –pulsaţia oscilaţiei amortizate

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$$ timp de relaxare

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Mişcare de oscilaţie numai dacă $\omega_0^2 > \beta^2$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$




$$\boxed{\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}}$$ decrement logaritmic

$$\boxed{\delta = \beta T}$$

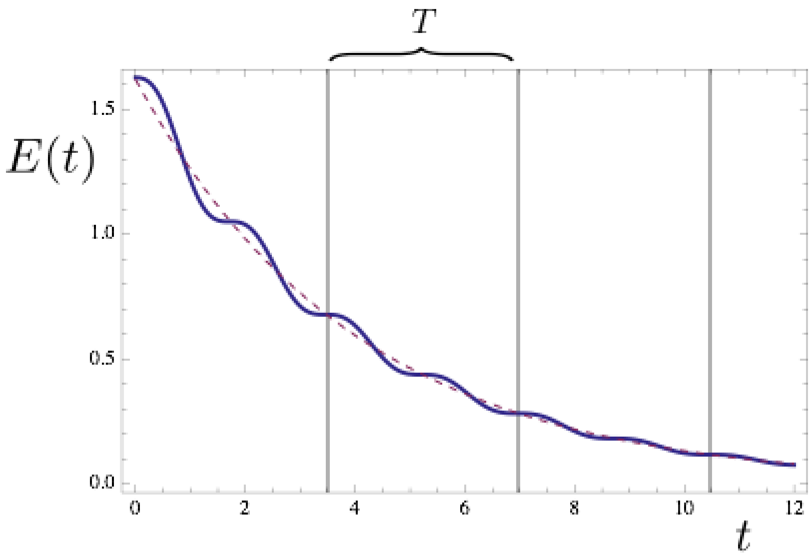
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

# OSCILATORUL AMORTIZAT

$$\mathbf{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$\mathbf{v(t) = \frac{A_0 \omega e^{-\beta t}}{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\omega}\right)} \cos\left(\omega t + \phi + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\omega}\right)}$$

$$\mathbf{E_t}(\boldsymbol{t}) \cong \frac{\mathbf{k_e A^2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{k_e A_0^2} \boldsymbol{e^{-2\beta t}}}{\mathbf{2}}$$



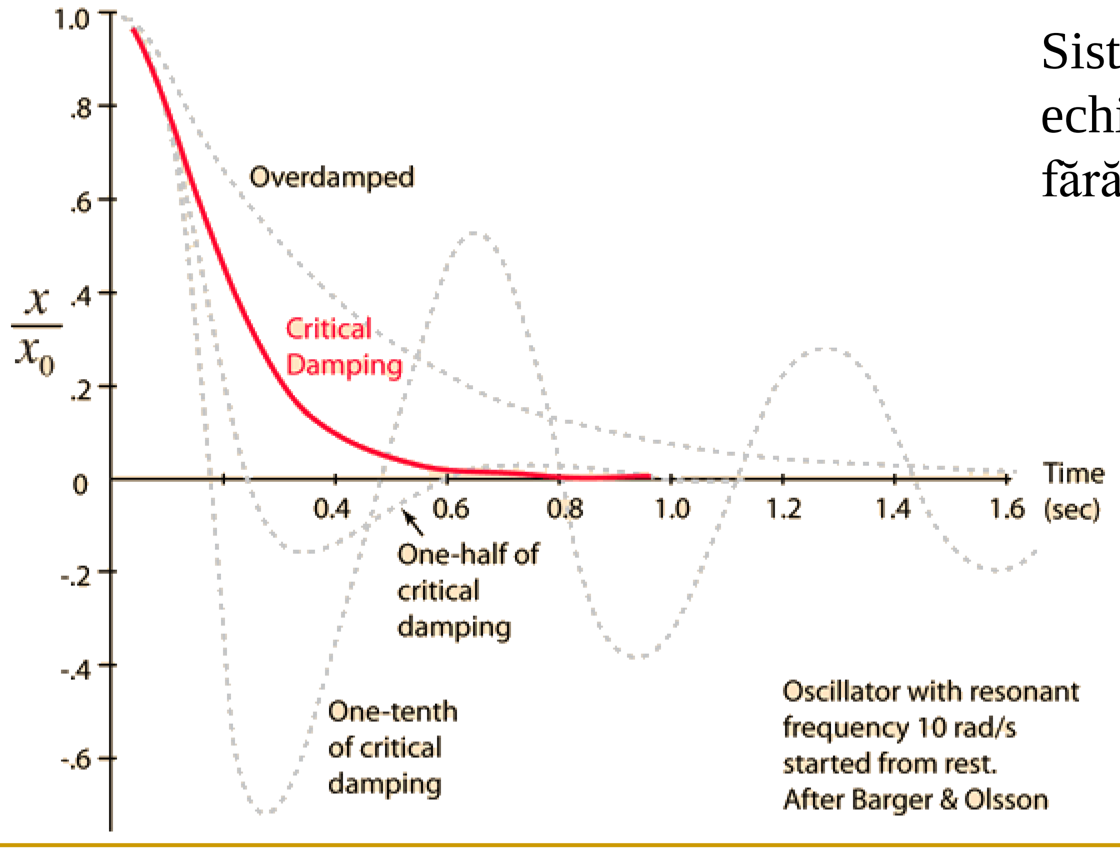
# OSCILATORUL AMORTIZAT

Pentru $\boldsymbol{\beta^2 > \omega_0^2}$ mişcare aperiodică

Sistemul revine în starea de echilibru fără a oscila. Cu cât factorul de amortizare este mare cu atât mai încet revine oscilatorul în starea de echilibru.

Amotizare critică $\boldsymbol{\beta^2 = \omega_0^2}$

Sistemul revine în starea de echilibru cel mai rapid posbil fără a oscila.




https://www.compadre.org/osp/EJSS/4026/134.htm

https://www.surendranath.org/GPA/Oscillations/FDHM/FDHM.html

# OSCILATORUL ÎNTREŢINUT

$$F_{el} = -k_e \cdot x \qquad F_r = -\alpha v$$

$F = F_0 \sin(\omega_1 t)$; $\omega_1$=pulsația forței de întreținere

$$F = m \cdot a$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k_e}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_1 t) \qquad (*)$$

$$\frac{k_e}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{\alpha}{m} = 2\beta$$

$\omega_0$ –pulsaţia proprie a oscilatorului

$\beta$ –factor de amortizare

Apare un timp regim tranzitoriu, apoi deoarece soluția ecuației omogene scade exponenţial în timp, oscilatorul intră în regimul permanent.

Soluţia care descrie regimul permanent:

$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1)$, Temă : Se înlocuiește în (*) și se obține

$$A_1 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + (2\beta\omega_1)^2}}$$

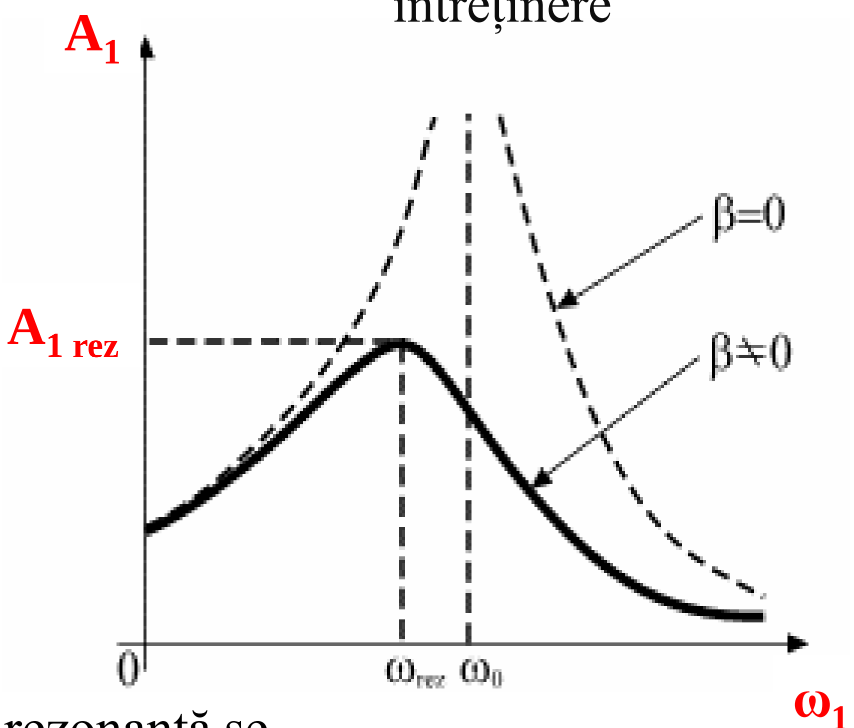
$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{2\beta\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

fisier calc osc amort şi întreţ

# OSCILATORUL ÎNTREŢINUT

$$A_1 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + (2\beta\omega_1)^2}} \quad (*)$$

$\omega_1$=pulsația forței de întreținere




La rezonanță **$A_1$ ($\omega_1$) = maximă**

$$\frac{dA_1}{d\omega_1} = 0$$

Temă

$$\omega_1 = \omega rez = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Pt a caracteriza numeric lărgimea curbei de rezonanță se definește banda de trecere

$$A > \frac{A_{rez}}{\sqrt{2}}$$

fisier calc osc amort și întreț

TEMA:

- COMPUNEREA OSCILAŢIILOR ARMONICE PERPENDICULARE deducerea ecuației traiectoriei unui corp punctiform supus simultan la 2 osc.arm. perp. de aceeași pulsație

-OSCILATII AMORTIZATE (deducerea si reprezentarea legii de miscare analizând relația dintre pulsatia proprie si coeficientul de amortizare - toate cazurile, timp de relaxare, decrement logaritmic)

-OSCILATII INTRETINUTE (deducerea legii de miscare, deducerea pulsatiei de rezonanta a amplitudinii si a amplitudinii la rezonanta)

Slide SUPLIMENTAR

# OSCILATORUL ÎNTREȚINUT

$F = F_0 \sin(\omega_1 t);$

$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1),$

Puterea instantanee absorbită

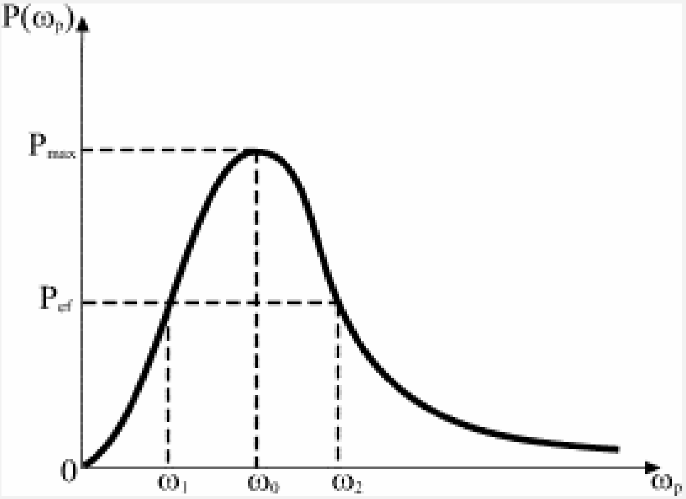
$$P_{abs} = F\frac{dx}{dt} = F_0 A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t)\cos(\omega_1 t - \varphi_1)$$

De regulă, în practică ne interesează puterea absorbită medie pe o perioadă $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$\langle P_{abs}\rangle = \langle P_{dis}\rangle = P = \frac{\beta}{m}\frac{F_0^2\omega_1^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_1\right)^2} = m\beta\omega_1^2 A_1^2$$

$$P = P(\omega_1) \overset{\frac{dP}{d\omega_1} = 0}{\Longleftrightarrow} \omega_1 = \omega_0$$

$$P_{max} = P(\omega_0) = \frac{F_0^2}{4m\beta}$$




lățimea de bandă pentru care puterea este mai mare de jumătate din puterea de la rezonanță

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Factorul de calitate al oscilatorului (sau, în general, al sistemului oscilant)

# UNDE ELASTICE

Mediile continue (gazele, lichidele, solidele) sunt medii de particule care interacţionează între ele şi care, dacă una din particule oscilează, vor propaga oscilaţia de la particulă la particulă sub formă de unde, numite unde elastice. Mediile de acest fel se numesc medii elastice.

**Aşadar, o undă este o oscilaţie care se propagă.**

https://ophysics.com/waves1.html

**Totalitatea punctelor** la care a ajuns unda la un moment dat *t* şi care oscilează în fază, se numeşte **suprafaţă de undă.**
Forma geometrică a frontului de undă determină denumirea undei - plană, sferică, etc.

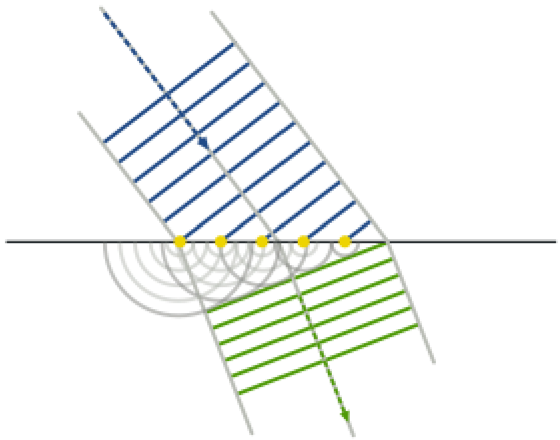
Viteza cu care se deplasează suprafeţele de undă se numeşte **viteza de fază (u)** a undei.

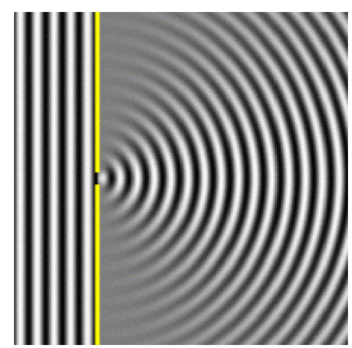
http://www.acs.psu.edu/drussell/demos.html

# UNDE ELASTICE

Frontul de undă se poate construi cu ajutorul **principiului lui Huygens**:

**Fiecare punct de pe o suprafaţă de undă poate fi considerat o nouă sursă de oscilaţii şi dă naştere la unde secundare.**
**Înfăşurătoarea tuturor acestor suprafeţe de undă elementare dă noul front de undă.**

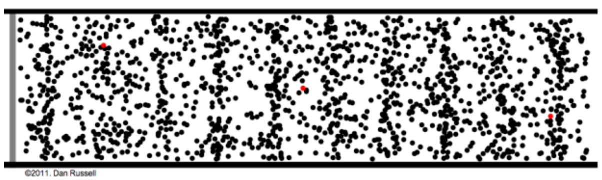


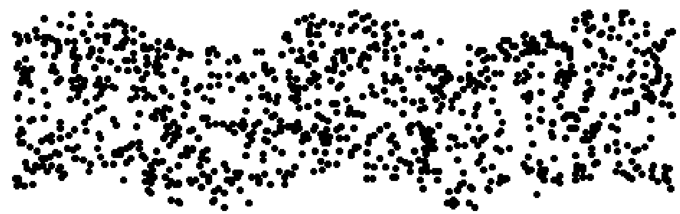


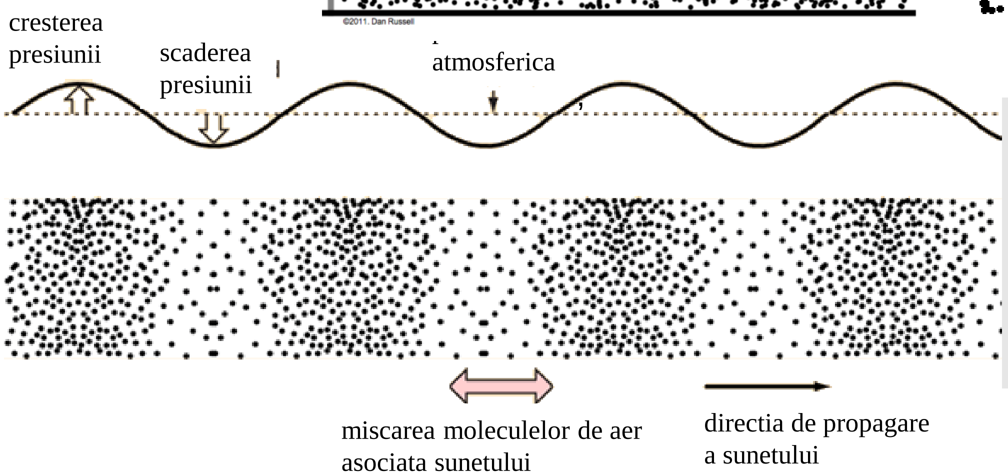
# UNDE ELASTICE

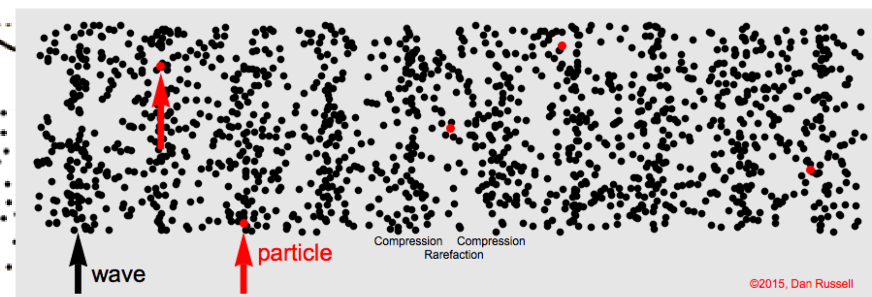
•**longitudinale** dacă particulele mediului oscilează de-a lungul direcţiei de propagare a undei

•**transversale** dacă particulele mediului oscilează perpendicular pe direcţia de propagare a undei






Atunci când oscilațiile sunt armonice și au aceeași frecvență în fiecare punct atins de undă spunem că unda este monocromatică

[https://ophysics.com/waves2.html](https://ophysics.com/waves2.html)

# UNDE ELASTICE

**ψ** – funcţie de undă = **elongaţia în cazul undelor elastice**

**u** –viteza de propagare a undei sau **viteza de fază**

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

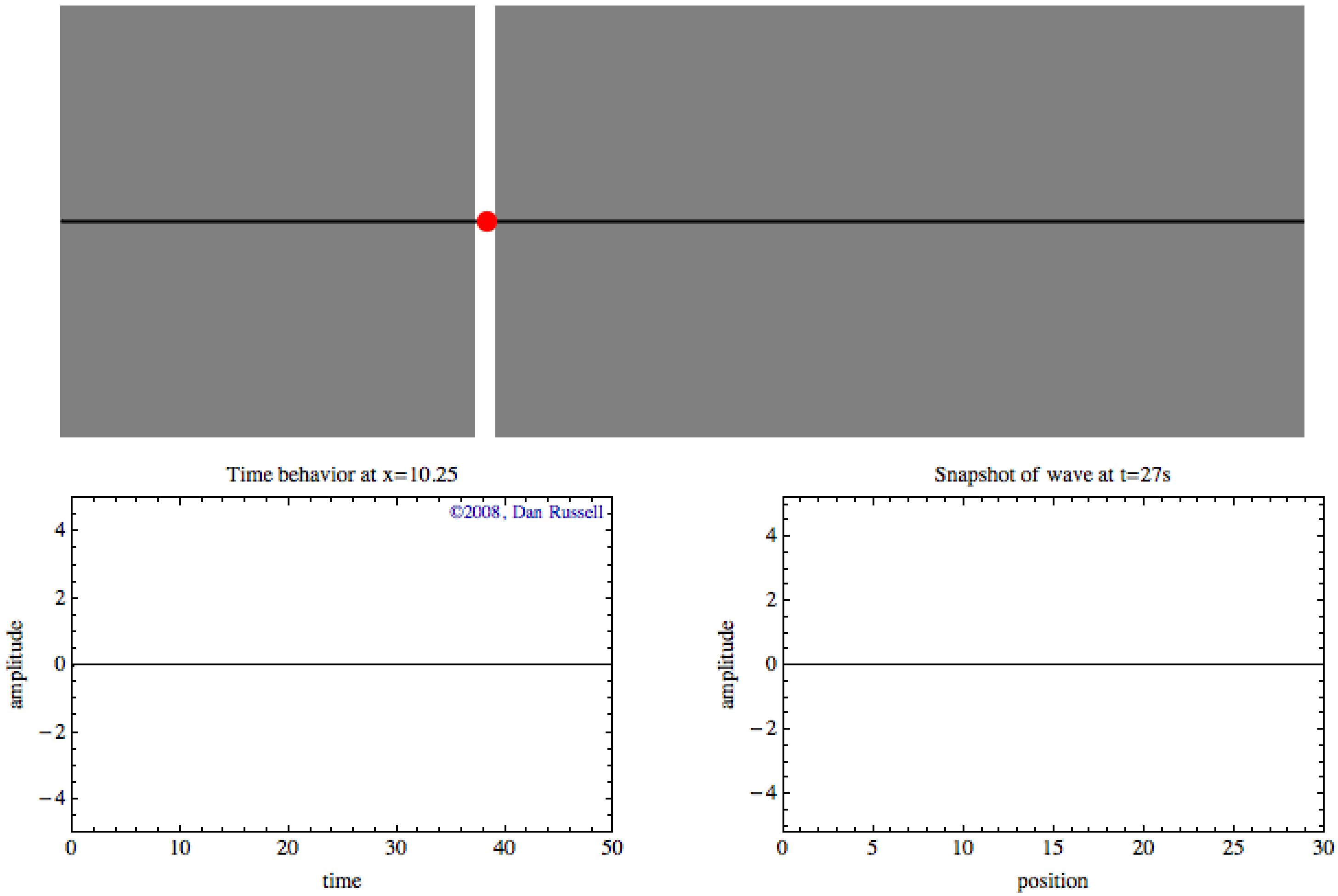
Ecuaţia diferenţială a undei armonice monocromatice ce se propagă pe direcţia x.

$$\Delta\psi-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

Ecuaţia diferenţială a undei armonice monocromatice ce se propagă într-o direcţie oarecare în spaţiu

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# UNDE ELASTICE




Acoustics and Vibration Animations - Dan Russell, Grad. Prog. Acoustics, Penn State

https://www.physicsclassroom.com/Physics-Interactives/Waves-and-Sound/Wave-Addition/Wave-Addition-Interactive

# UNDE ELASTICE

Funcţia de undă în forma sinusoidală (elongaţia în cazul undelor elastice) pentru **unda plană monocromatică** ce se propagă în spaţiu (fără atenuare) pe direcţia x:

$$\psi(x,t) = A_0 \sin \omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = A_0 \sin\left(\omega t - \omega\frac{x}{u}\right) = A_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ număr de undă

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$\lambda = u \cdot T$$ lungime de undă

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

**u** –viteza de propagare a undei sau **viteza de fază**

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$ viteza de oscilație a particulelor mediului elastic

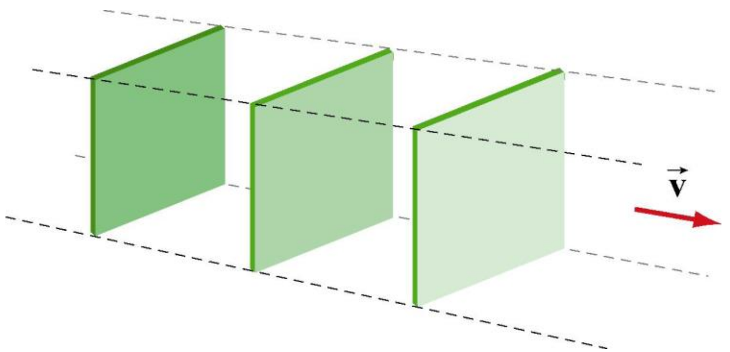
Compară undele elastice după amplitudine, frecvenţă, lungime de undă

# UNDE ELASTICE

Funcţia de undă în forma sinusoidală (elongaţia în cazul undelor elastice) pentru **unda plană monocromatică** ce se propagă în spaţiu (fără atenuare) pe direcţia $\vec{k}$ :

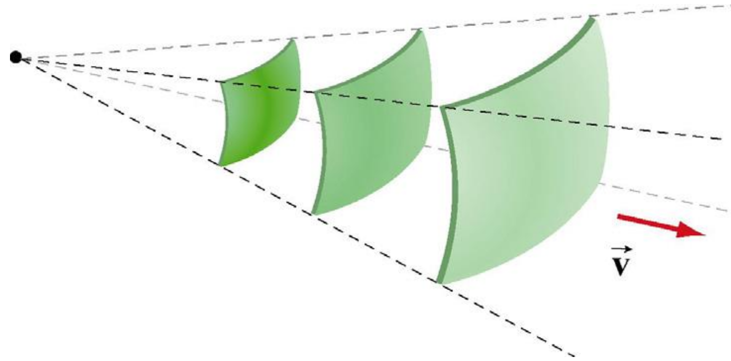
$$\psi(\vec{r},t) = A_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

$\vec{k}$-vector de undă;




Funcţia de undă în forma sinusoidală pentru **unda sferică monocromatică** este:

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{A_0}{r}\sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$



# LEGEA LUI HOOKE

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} = \mathbf{E}\frac{\mathbf{\Delta l}}{\mathbf{l_0}}$$

Pentru orice material elastic, la alungire, efortul unitar este proportional cu alungirea relativă.

**F** –forţa de întindere; $\mathbf{F_e = -F}$

S – aria secțiunii transversale;

$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}}$ - efort unitar;

**E** - modul de elasticitate la întindere;

$\frac{\mathbf{\Delta l}}{\mathbf{l_0}}$ - alungire relativă;

$l_0$ - lungime nedeformată;

$$\mathbf{F = E\frac{S}{l_0}\Delta l}$$

$$\mathbf{F = k_{el}\Delta l}$$

$$\mathbf{k_{el} = E\frac{S}{l_0}}$$

Deformarea relativă pentru mediul elastic în care se propagă unda monocromatică este $\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$

$$\psi(x,t) = A_0 \sin(\omega t - k \cdot x)$$

# UNDE ELASTICE

Viteza de propagare a undelor

- longitudinale în solide $\mathbf{u} = \sqrt{\frac{\mathbf{E}}{\boldsymbol{\rho}}}$; **E** - modul de elasticitate;
- transversale în solide $\mathbf{u} = \sqrt{\frac{\mathbf{G}}{\boldsymbol{\rho}}}$; **G** modul de forfecare;
- longitudinale în lichide $\mathbf{u} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\chi}}{\boldsymbol{\rho}}}$; $\chi$ modul de compresibilitate;

Undele transversale **nu** se propagă în fluide- nu există forţe elastice de forfecare, adică forţe proporţionale cu distanţa de lunecare a unui strat faţă de altul.

Pentru materiale solide obişnuite **G≈0,4 E**, adică, $\mathbf{v_{tr} \approx 0{,}62 \cdot u_{long}}$

**Ex**. Undele seismice sunt un amestec de unde longitudinale şi transversale. Unda P (primară) este longitudinală, iar unda S (secundară) este transversală şi este întârziată cu câteva zeci de secunde.

Unde S şi P

Seismograf cu înregistrarea undelor P şi S

# ENERGIA UNDELOR ELASTICE

$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$ –funcţie de undă = **elongaţia pt. unde elastice**

Energia particulelor de masă **dm** dintr-un volum **dV**, care oscilează este suma dintre energia cinetică a acestora și energia potenţială (elastică) de deformare

Densitatea volumică de energie este energia totală a particulelor din unitatea de volum

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{dE_c + dE_p}}{\mathbf{dV}}$$

Media pe o perioadă a densităţii volumice de energie

$$\mathbf{w_m} = \frac{\frac{\text{const elast.} \times A^2}{2}}{dV} = \frac{dm \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2dV} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

**Intensitatea undei** I reprezintă cantitatea de energie transportată de undă în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă perpendiculară pe direcţia de propagare a undei in decurs de o perioadă.

Pentru unda plană, respectiv sferică sinusoidală intensitatea este dată de densitatea mediului, viteza de propagare a undei, frecvența și amplitudinea undei. :

$$\mathbf{I = w_m u = \frac{1}{2}\rho\, u\, A^2\omega^2}$$

23. Compunerea oscilaţiilor armonice perpendiculare (de aceeaşi pulsaţie și cu pulsaţii diferite);
24. Oscilatorul (liniar) amortizat;
25. Oscilatorul (liniar) întreţinut; rezonanța;
26. Unde elastice longitudinale și transversale; Exemple;
27. Unde elastice- ecuaţia diferenţială, ecuaţia de propagare a undelor plane şi sferice; viteza de propagare a undelor elastice;
28. Unde elastice-energia undelor elastice, densitatea volumică de energie, intensitatea undei;