

Régression Linéaire et Généralisation

14 mars 2017

1 Contexte

1.1 Régression Linéaire, Erreur de Généralisation

Soit $f : E \subset [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ une fonction inconnue avec E **fini**. On suppose que l'on connaît f en quelques points : On dispose de $D = \{(x_i, y_i) \mid y_i = f(x_i)\}$ fini avec $m = |D| \ll |E|$. Le but de la **régression linéaire** est d'approcher f au mieux avec f_θ , modèle linéaire, défini par :

$$f_\theta(x) = \theta^T x$$

Avec $\theta \in \mathbb{R}$ le paramètre de f_θ . Plus formellement on veut trouver θ qui minimise **l'erreur absolue** :

$$J(\theta) = \sum_{x \in E} (f(x) - f_\theta(x))^2$$

Cependant comme on ne connaît pas E , on doit se contenter d'approcher J par \hat{J} **l'erreur empirique** sur D :

$$\hat{J}(\theta) = \sum_i (y_i - f_\theta(x_i))^2 = \sum_i (y_i - \theta^T x_i)^2$$

1) Que signifie $J(\theta) = 0$? $\hat{J}(\theta) = 0$?

2) Montrer

$$\hat{J}(\theta) \leq J(\theta)$$

3) Minimiser $\hat{J}(\theta)$ revient-il à minimiser $J(\theta)$?

Dans l'idéal on voudrait donc minimiser $J(\theta)$, cependant c'est $\hat{J}(\theta)$ que l'on

peut minimiser en pratique. Ce qui nous intéresserait ce serait trouver un terme $M > 0$ tel que :

$$J(\theta^*) \leq \hat{J}(\theta^*) + M$$

Avec θ^* qui minimise \hat{J} .

4) En quoi peut-on qualifier M d'**erreur de généralisation** ?

1.2 Régression Linéaire Ridge-Régularisée

Pour des raisons passées sous silence, on considère ici les minimisations de :

$$J_r(\theta) = J(\theta) + \lambda \|\theta\|_2^2$$

$$\hat{J}_r(\theta) = \hat{J}(\theta) + \lambda \|\theta\|_2^2$$

Avec λ un scalaire donné. On parle alors de **régression linéaire ridge-régularisée**. On admet qu'il existe un algorithme capable de fournir θ^* qui minimise \hat{J}_r . On cherche toujours une inégalité du type :

$$J_r(\theta^*) \leq \hat{J}_r(\theta^*) + M$$

2 Stabilité Uniforme

Dans la suite on note :

- θ qui minimise \hat{J}_r sur D
- $\theta^{\setminus i}$ qui minimise \hat{J}_r sur $D \setminus \{(x_i, y_i)\}$

Pour trouver la borne M on dispose du théorème suivant :

Théorème : S'il existe β tel que :

$$\forall i \in \{1 \dots m\}, \quad \sup_{x \in E} |l(\theta, x) - l(\theta^{\setminus i}, x)| \leq \frac{\beta}{m}$$

Avec $l(\theta, x) = (\theta^T x - f(x))^2$ et $l(\theta^{\setminus i}, x) = (\theta^{\setminus i T} x - f(x))^2$

Et si $l(\theta, x)$ est bornée par M

Alors :

Avec probabilité $1 - \delta$:

$$J_r(\theta) \leq \hat{J}_r(\theta) + 2\frac{\beta}{m} + (4\beta + M)\sqrt{\frac{\ln(\frac{1}{\delta})}{2m}}$$

5) Que se passe-t-il lorsque m est grand ? Comment l'interprétez vous ?

3 Trouvons β

Nous avons toujours

- θ qui minimise \hat{J}_r sur D
- $\theta^{\setminus i}$ qui minimise \hat{J}_r sur $D \setminus \{(x_i, y_i)\}$

6) Montrer que $\|\theta\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda}$ 7) En déduire $l(\theta, x) \leq 1$

On remplit donc la deuxième condition du théorème avec $M=1$. Passons à la première.

8) Montrer que l est convexe en son premier argument 9) Montrer qu'il existe $\sigma > 0$ tel que :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \forall x \quad |l(\theta_1, x) - l(\theta_2, x)| \leq \sigma |(\theta_1 - \theta_2)^T x|$$

10) En déduire ce **lemme** :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|\theta\|_2^2 - \|\theta + t\Delta\theta\|_2^2 + \|\theta^{\setminus i}\|_2^2 - \|\theta^{\setminus i} - t\Delta\theta\|_2^2 \leq \frac{t\sigma}{\lambda m} |\Delta\theta^T x_i|$$

Avec $\Delta\theta = \theta^{\setminus i} - \theta$. 11) Constater que pour $t = \frac{1}{2}$ on a $\|\theta\|_2^2 - \|\theta + t\Delta\theta\|_2^2 + \|\theta^{\setminus i}\|_2^2 - \|\theta^{\setminus i} - t\Delta\theta\|_2^2 = \frac{1}{2} \|\Delta\theta\|_2^2$ 12) En déduire une majoration de :

$$|l(\theta, x) - l(\theta^{\setminus i}, x)|$$

13) Conclure

4 Correction

Coming soon

5 Sources

- Sujet (adapté) : http://perso.univ-st-etienne.fr/habrarda/ENSMML/td_uniform_stab
- Correction : http://perso.univ-st-etienne.fr/habrarda/ENSMML/recap_uniform_stab
- Papier d'origine : Olivier Bousquet, André Elisseeff : Stability and Generalization. Journal of Machine Learning Research 2 : 499-526 (2002)