Dold-Kan 対応

準猫@8n_Cat

2022 年 3 月 1 日

目次

記法

k を単位的可換環とする.

本稿では鎖複体 (chain complex) といえば k 加群と k 線形写像の列

$$\cdots \to \mathcal{C}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1} \to \cdots$$

を指すことにする. また任意の負の整数 n に対し $\mathcal{C}_n = 0$ を満たす鎖複体のなす充満部分圏を $\mathrm{Ch}(k)_{\geqslant 0}$ と表記する.

1 単体的 k 加群

k 加群の圏 Mod_k の単体的対象 (simplicial object), すなわち反変函手 $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}_k$ を単体的 k 加群 (simplicial k-module) といい, その圏 $[\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Mod}_k]$ を sMod_k と表すことにする.

単体的集合 X:$\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ に対し

$$k[X]_m \coloneqq \bigoplus_{\Delta[m] \xrightarrow{x} X} k$$

$$\alpha^* \left(\sum_{x \in X_n} a_x \boldsymbol{e}_x \right) \coloneqq \sum_{x \in X_n} a_x \boldsymbol{e}_{\alpha^* x}$$

と定めることで単体的 k 加群 $k[X]$ を得る. これは忘却函手 U:$\underline{t\mathrm{Ab}_{\mathbb{F}}} \to \mathrm{sSet}$ の左随伴である.

2 Dold-Kan 対応

M を単体的 k 加群とする. この時

$$C(M)_p \coloneqq \begin{cases} M_p & (p \geqslant 0) \\ 0 & (p < 0) \end{cases}$$

$$\partial_p \coloneqq \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i & (p > 0) \\ 0 & (p \leqslant 0) \end{cases}$$

により k 加群の鎖複体 $C(M) = (C(M)_\bullet, \partial_\bullet)$

$$\cdots \to C(M)_{n+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C(M)_p \xrightarrow{\partial_p} C(M)_{p-1} \to \cdots \to C(M)_{-1} \to 0 \cdots$$

が定まる. この函手を修正してより良い函手を取り出そう.

まず単体的 k 加群 M に対し

$$N(M)_n \coloneqq \begin{cases} \bigcap_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ker} d_i & (n > 0) \\ M_n & (n = 0, -1) \\ 0 & (n < -1) \end{cases}$$

$$\partial_n \coloneqq (-1)^n d_n$$

と定める. $x \in N(M)_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ に対し

$$\partial_n \partial_{n+1}(x) = (-1)^{2n+1} d_n d_{n+1}(x) = -d_n d_n(x) = 0$$

が成り立つので $N(M)$ は鎖複体である. 鎖準同型 f に対し, $N(f) \coloneqq \left\{ f_n \mid_{N(M)_n} \right\}$ は明らかに鎖準同型である. そしてこの構成は函手的である. さらに $N(M)$ は $C(M)$ の部分複体である.

$D(M)_n \subset M_n$ を M の退化 n 単体 (degenerate n-simplex) の生成する部分 k 加群とする. この時 ∂_n の構成より $\partial_n{:}C(M)_n/D(M)_n \to C(M)_{n-1}/D(M)_{n-1}$ が誘導される. これにより鎖複体 $(C/D)(M) \coloneqq (C(M)_\bullet/D(M)_\bullet, \partial_\bullet)$ を得る.

さらに canonical な射 $i{:}N(M) \hookrightarrow C(M), \pi{:}C(M) \twoheadrightarrow (C/D)(M)$ を合成して

$$\phi{:}N(M) \to (C/D)(M)$$

を得る.

命題 2.1. $\phi{:}N(M) \to (C/D)(M)$ は同型射である.

証明. 各 n に関して同型を示す. $n \leqslant 0$ に関しては明らかなので $n > 0$ としてよい.

$0 \leqslant j \leqslant n-1$ に対し

$$\begin{aligned} N_j(M)_n &\coloneqq \bigcap_{i=0}^{j} \mathrm{Ker} d_i \\ D_j(M)_n &\coloneqq \langle s_i(x) | x \in M_{n-1}, 0 \leqslant i \leqslant j \rangle \end{aligned}$$

と定め, canonical な射 $N_j(M)_n \hookrightarrow C(M)_n \overset{\pi_n^j}{\twoheadrightarrow} C(M)_n/D_j(M)_n$ を ϕ_n^j とする. 明らかに $\phi_n^{n-1} = \phi_n$ である. n と j に関する帰納法を用いる.

まず $j=0$ の時を考える. $\boldsymbol{x} \in C(M)_n/D_0(M)_n$ に対し $x \in \boldsymbol{x}$ をとる.

$$\begin{aligned} d_0(x - s_0 d_0 x) &= d_0 x - d_0 s_0 d_0 x = d_0 x - d_0 x = 0 \\ \phi_n^0(x - s_0 d_0 x) &= \pi_n^0(x) - \pi_n^0(s_0 d_0 x) = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

より ϕ_n^0 は全射である. $x \in \mathrm{Ker}\phi_n^0$ はある $y \in M_{n-1}$ を用いて $x = s_0 y$ とかける. このとき

$$x = s_0 y = s_0 d_0 s_0 y = s_0 d_0 x = 0$$

が成り立つので ϕ_n^0 は単射である.

$0 \leqslant l < j$ に対し ϕ_n^l が同型であるとする. この時次のような可換図式が考えられる:

$$\begin{tikzcd} N_j(M)_n \arrow[r, "\phi_n^j"] & C(M)_n/D_j(M)_n \\ N_{j-1}(M)_n \arrow[u, hookleftarrow] \arrow[r, "\simeq", "\phi_n^{j-1}"'] & C(M)_n/D_{j-1}(M)_n \arrow[u, twoheadrightarrow] \end{tikzcd}$$

.

$\boldsymbol{x} \in C(M)_n/D_j(M)_n$ に対し $x \in N_{j-1}(M)_n$ で $x + D_j(M)_n = \boldsymbol{x}$ となるものがとれる. この x に対し

$$d_i(x - s_j d_j x) = \begin{cases} d_i x - s_{j-1} d_{j-1} d_i x & (0 \leqslant i < j) \\ d_j x - d_j x & (i = j) \end{cases}$$
$$=0$$

より $x - s_j d_j x \in N_j(M)_n$ が成り立つ. よって ϕ_n^j は全射である.

あとは ϕ_n^j が単射であることを示せばよい. $x \in N_{j-1}(M)_{n-1}, 0 \leqslant i \leqslant j-1$ に対し

$$d_i s_j x = s_{j-1} d_i x = 0$$

より $s_j(N_{j-1}(M)_{n-1}) \subset N_{j-1}(M)_n$ である. また $x \in M_{n-2}$ に対し

$$s_j s_i x = s_i s_{j-1} x \quad \text{for } 0 \leqslant i < j$$

より $s_j(D_{j-1}(M)_{n-1}) \subset D_{j-1}(M)_n$ であり, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} N_{j-1}(M)_{n-1} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "s_j"'] & C(M)_{n-1}/D_{j-1}(M)_{n-1} \arrow[d, "s_j"] \\ N_{j-1}(M)_n \arrow[r, "\simeq"] & C(M)_n/D_{j-1}(M)_n \end{tikzcd}.$$

また次の列は完全である:

$$0 \to C(M)_{n-1}/D_{j-1}(M)_{n-1} \xrightarrow{s_j} C(M)_n/D_{j-1}(M)_n \to C(M)_n/D_j(M)_n \to 0.$$

$x \in N_j(M)_n$ で $C(M)_n/D_j(M)_n$ において $\phi_n^j(x) = 0$ を満たすものをとる. これは準同型

$$N_{j-1}(M)_n \xrightarrow{\simeq} C(M)_n/D_{j-1}(M)_n \to C(M)_n/D_j(M)_n$$

の核に属する. それゆえ $\phi_n^{j-1}(x) \in \mathrm{Ker}(C(M)_n/D_{j-1}(M)_n \to C(M)_n/D_j(M)_n)$ であり, 可換図式と完全列から $y \in N_{j-1}(M)_{n-1}$ で $x = s_j y$ なるものを得る.

$$x = s_j y = s_j d_j s_j y = s_j d_j x = 0$$

より $\mathrm{Ker}\phi_n^j = 0$ が従う. □

函手 Γ:sMod$_k \to$ Ch$(k)_{\geqslant 0}$ を構成しよう. まず負の整数 $n<0$ に対し $\mathcal{C}_n = 0$ を満たす鎖複体 $\mathcal{C}$ に対し k 加群 $\Gamma(\mathcal{C})_n$ を

$$\Gamma(\mathcal{C})_n \coloneqq \bigoplus_{[n]\twoheadrightarrow[p]} \mathcal{C}_p$$

と定める. 次に α:$[m] \to [n]$ に対し α^*:$\Gamma(\mathcal{C})_n \to \Gamma(\mathcal{C})_m$ を以下で定める:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{[n]\twoheadrightarrow[p]} \mathcal{C}_p \arrow[r, equal] & \Gamma(\mathcal{C})_n \arrow[r, dashed, "\alpha^*"] & \Gamma(\mathcal{C})_m \arrow[r, equal] & \bigoplus_{[m]\twoheadrightarrow[q]} \mathcal{C}_q \\
\mathcal{C}_p \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_\sigma"] \arrow[rrr, "\delta_\alpha^*"'] & & & \mathcal{C}_q \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{\sigma\alpha}"']
\end{tikzcd}.$$

ただしここで δ_α は単射, σ_α は全射であり, $\sigma\alpha = \delta_\alpha\sigma_\alpha$ を満たすとする. また単射 δ に対し

$$\delta^* \coloneqq \begin{cases} (-1)^n\partial_n & (\delta = \delta^n{:}[n-1]\to[n]) \\ \quad 0 & (\text{others}) \end{cases}$$

と定める. 単調増加関数 α:$[l] \to [m], \beta$:$[m] \to [n]$ 及び全射 σ:$[n] \to [p]$ に対し

$$\begin{aligned}
\sigma\beta\alpha &= \delta_\beta\sigma_\beta\alpha \\
&= \delta_\beta\delta_\alpha\sigma_\alpha \\
\sigma\beta\alpha &= \delta_{\beta\alpha}\sigma_{\beta\alpha}
\end{aligned}$$

を得る. ただしここで $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_{\beta\alpha}$ は単射, $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_{\beta\alpha}$ は全射である. 分解の一意性より $\delta_\beta\delta_\alpha = \delta_{\beta\alpha}, \sigma_\alpha = \sigma_{\beta\alpha}$ である. 構成より $\delta_\alpha^*\delta_\beta^* = \delta_{\beta\alpha}^*$ であり, $(\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*$ が従う. よって $\Gamma(\mathcal{C})$ は単体的 k 加群である. 直和の普遍性より canonical な方法でこれは函手になる.

定理 2.2 (Dold-Kan correspondence)**.** N:sMod$_k \to$ Ch$(k)_{\geqslant 0}$ は圏同値である.

証明. 単体的 k 加群 M と各 n に対し $\Psi_{M\,n}$:$\Gamma N(M)_n \to M_n$ を以下で定める:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{[n]\twoheadrightarrow[p]} N(M)_p \arrow[r, equal] & \Gamma N(M)_n \arrow[r, dashed, "(\Psi_M)_n"] & M_n \\
N(M)_p \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_\sigma"] \arrow[rr, hook] & & M_p \arrow[u, "\sigma^*"']
\end{tikzcd}.$$

単調増加関数 $\alpha:[m] \to [n]$ と $x \in N(M)_p \xhookrightarrow{\mathrm{in}_\sigma} \Gamma N(M)_n$ に対し

$$\begin{aligned}
(\Psi_M)_m \alpha^*(x) &= (\Psi_M)_m \mathrm{in}_{\sigma_\alpha} \delta_\alpha^*(x) && (\delta_\alpha \sigma_\alpha = \sigma\alpha) \\
&= \sigma_\alpha^* \delta_\alpha^*(x) && (x \in N(M)_p \text{ より } M\delta_\alpha(x) = \delta_\alpha^*(x)) \\
&= \alpha^* \sigma^*(x) \\
&= \alpha^* (\Psi_M)_n(x)
\end{aligned}$$

が成り立つのでこれは単体的 k 加群の射である. 任意の単体的 k 加群の射 $\varphi:L \to M$ と $x \in N(M)_p \xhookrightarrow{\mathrm{in}_\sigma} \Gamma N(M)_n$ に対し,

$$(\Psi_L)_n \Gamma N \varphi_n(x) = \Psi_{Ln} \mathrm{in}_\sigma \varphi_p(x) = \sigma^* \varphi_p(x) = \varphi_n \sigma^*(x) = \varphi_n (\Psi_M)_n(x)$$

が成り立つので自然変換 $\Psi:\Gamma N \to \mathrm{id}$ を得る. Ψ が同型であることを示そう. 証明は n に関する帰納法による. $n \leqslant 0$ の時は明らかに全単射である.

$n > 0$ とし, $p < n$ に対し $(\Psi_M)_p$ が全単射であるとする. $s_j x \in M_n$ に対しては仮定よりある $y \in \Gamma N(M)_{n-1}$ を用いて $(\Psi_M)_n(s_j y)$ と書くことができる. 任意の $x \in M_n$ に対し

$$\begin{aligned}
x &= \phi_n^{-1}\pi_n(x) + (x - \phi_n^{-1}\pi_n(x)) \\
&= \phi_n^{-1}\pi_n(x) + (\Psi_M)_n(y) && (\phi \text{ の構成より } x - \phi_n^{-1}\pi_n(x) \in D(M)_n) \\
&= (\Psi_M)_n(\phi_n^{-1}\pi_n(x) + y)
\end{aligned}$$

が成り立つので Ψ_{Mn} は全射である.

$(x_{\sigma:[n]\to[p]}) \in \mathrm{Ker}(\Psi_M)_n \subset \Gamma N(M)_n$ を任意にとる. $p < n$ に対し全射 σ は切断, すなわち $\sigma\delta = \mathrm{id}$ となる射 $\delta:[p] \to [n]$ をもつ.

$$(\Psi_M)_p \delta^*(x_\sigma) = \delta^* \Psi_{Mn}(x_\sigma) = 0$$

と帰納法の仮定より $\delta^*(x_\sigma) = 0$ であり, それゆえ $x_\sigma = 0$ である. $\sigma = \mathrm{id}_{[n]}$ に対しては $(\Psi_M)_n \mathrm{in}_{\mathrm{id}_{[n]}}:N(M)_n \hookrightarrow M_n$ が単射なので

$$(\Psi_M)_n(x_{\mathrm{id}_{[n]}}) = x_{\mathrm{id}_{[n]}}$$

であり, $x_{\mathrm{id}} = 0$ が従う. よって $(\Psi_M)_n$ は単射である.

鎖複体 M と $n \in \mathbb{Z}$ に対し得られる合成 Φ_M

$$M_n \xhookrightarrow{\mathrm{in}_{\mathrm{id}}} \bigoplus_{[n]\twoheadrightarrow[p]} M_p \twoheadrightarrow C(\Gamma M)_n / D(\Gamma M)_n \xrightarrow{\simeq} N\Gamma M_n$$

は明らかに自然同型 $\Phi:\mathrm{id} \xrightarrow{\simeq} N\Gamma$ を与える. $\square$

3　チェインホモトピー

単体的集合 $\Delta[1]$ はしばしば “区間 $[0,1]$” の代わりの役目を果たす. これの k 線形化 $k[\Delta[1]]$ を Dold-Kan 対応で移して得られる鎖複体は命題 2.1 より

$$\cdots 0 \to k \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} k \otimes k \to 0 \to \cdots$$

である. 鎖複体 $\mathcal{C}$ と $Nk[\Delta[1]]$ をテンソルした $\mathcal{C} \otimes Nk[\Delta[1]]$ は

$$\cdots 0 \to \mathcal{C}_p \oplus \mathcal{C}_{p+1} \oplus \mathcal{C}_{p+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_p & 0 & 0 \\ (-1)^p & d_{p+1} & 0 \\ (-1)^{p+1} & 0 & d_{p+1} \end{pmatrix}} \mathcal{C}_{p-1} \oplus \mathcal{C}_p \oplus \mathcal{C}_p \to 0 \to \cdots$$

で与えられる. 鎖準同型 $H{:}\mathcal{C} \otimes Nk[\Delta[1]] \to \mathcal{D}$ は k 線形写像

$$f_p{:}\mathcal{C}_p \to \mathcal{D}_p, \qquad g_p{:}\mathcal{C}_p \to \mathcal{D}_p, \qquad h_p{:}\mathcal{C}_p \to \mathcal{D}_{p+1}$$

の族で

$$\begin{aligned} d_p f_p =& f_{p-1} d_p \\ d_p g_p =& g_{p-1} d_p \\ f_p - g_p =& d_p h_{p-1} + h_{p-2} d_{p-1} \end{aligned}$$

を満たすものを与える. 逆にこのような族が与えられたとき $H_n \coloneqq (-1)^{n-1} h_{n-1} \oplus f_n \oplus g_n$ と定めることで鎖準同型 $H{:}\mathcal{C} \otimes Nk[\Delta[1]] \to \mathcal{D}$ が得られる.

この条件はチェインホモトピーの定義に他ならない. 特に二つの射 $\delta_{0*}, \delta_{1*}{:}\Delta[0] \to \Delta[1]$ から得られる鎖準同型 $Nk[\Delta[0]] \to Nk[\Delta[1]]$ で H を制限したときに出てくる鎖準同型がちょうど f, g である.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \otimes Nk[\Delta[0]] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{C} \otimes Nk[\Delta[1]] \arrow[r, "H"] & \mathcal{D} \\
\mathcal{C} \otimes Nk[\Delta[0]] \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

参考文献

[1] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*.