Adjunction motivated by Stone-type dualities

hot inoue (@hot_math)

January 25, 2022

Contents

1 準備 **1**

2 関手 Lc: **Top** $\to$ **Loc** の構成 **3**

3 関手 Sp: **Loc** $\to$ **Top** の構成 **6**

4 随伴の構成 **8**

1 準備

定義 1.1. 集合 L_0 に対して，$\langle L_0, \leq_L \rangle$ が**半順序集合**であるとは，$\leq_L$ が L_0 上の反射的かつ反対称的かつ推移的な二項関係であることをいう．

半順序集合 L に対して，L の台集合を L_0 で，L を定める L_0 上の二項関係を $\leq_L$ で表す．

定義 1.2. 半順序集合 L, M に対して，$f\colon L_0 \to M_0$ が**単調写像**であるとは，$a \leq_L a'$ を満たす任意の $a, a' \in L_0$ に対して，$f(a) \leq_M f(a')$ であることをいう．

単調写像 $f\colon L_0 \to M_0$, $g\colon M_0 \to N_0$ を取る．任意の $a, a' \in L_0$ に対して，$a \leq_L a'$ ならば，$f(a) \leq_M f(a')$ であり，

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \leq_N g(f(a')) = (g \circ f)(a')$$

である．故に，$g \circ f$ は単調写像である．半順序集合 L を取る．任意の $a, a' \in L_0$ に対して，$a \leq_L a'$ ならば，

$$\mathrm{id}_{L_0}(a) = a \leq_L a' = \mathrm{id}_{L_0}(a')$$

だから, id_{L_0} は単調写像である．以上より，半順序集合を対象として単調写像を射とする圏 $\mathbf{Pos}$ が定まる．

定義 1.3. $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pos})$, $L'_0 \subseteq L_0$, $a \in L_0$ を取る．

1. a が L'_0 の**上界** (resp. **下界**) であるとは，任意の $x' \in L'_0$ に対して $x' \leq_L a$ (resp. $a \leq_L x'$) が成り立つことをいう．
2. a が L'_0 の**最大元** (resp. **最小元**) であるとは，$a \in L'_0$ かつ a が L'_0 の上界 (resp. 下界) であることをいう．
3. a が L'_0 の**上限** (resp. **下限**) であるとは, a が L'_0 の上界 (resp. 下界) の全体の最小元 (resp. 最大元) であることをいう．

$L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pos})$ を取る．L の最大元 (resp. 最小元) を 1_L (resp. 0_L) で表し, $L'_0 \subseteq L_0$ の上限 (resp. 下限) を $\bigvee_L L'_0$ (resp. $\bigwedge_L L'_0$) 等で表す．L_0 の任意の元は $\emptyset$ の上界かつ下界だから, $\bigvee_L \emptyset = 0_L$ かつ $\bigwedge_L \emptyset = 1_L$ が成り立つ．$a, a' \in L_0$ に対して $a \vee_L a' \coloneqq \bigvee_L \{a, a'\}$ (resp. $a \wedge_L a' \coloneqq \bigwedge_L \{a, a'\}$) と定める．

定義 1.4. $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pos})$ が**フレーム**であるとは，任意の $L'_0 \subseteq L$ が上限と下限をもち，任意の $L'_0 \subseteq L_0$ と $a \in L_0$ に対して $(\bigvee_L L'_0) \wedge_L a = \bigvee_{L, a' \in A} (a' \wedge_L a)$ が成り立つことをいう．

上の議論により，任意のフレームは最大元と最小元をもつ．特に, $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pos})$ がフレームならば, L_0 は空でない．

定義 1.5. $L, M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pos})$ をフレームとする．$\mathbf{Pos}$ の射 $f\colon M \to L$ が**フレーム準同型**であるとは，任意の $M'_0 \subseteq M_0$ に対して $f\big(\bigvee_M M'_0\big) = \bigvee_L f(M'_0)$ であり，任意の $a, b \in M$ に対して $f(a \wedge_M b) = f(a) \wedge_L f(b)$ であり, $f(1_M) = 1_L$ であることをいう．

フレーム準同型 $f\colon N \to M$, $g\colon M \to L$ を取る．任意の $N'_0 \subseteq N_0$ に対して,

$$(g \circ f)\left(\bigvee_N N'_0\right) = g\left(f\left(\bigvee_N N'_0\right)\right) = g\left(\bigvee_M f(N'_0)\right) = \bigvee_L g(f(N'_0)) = \bigvee_L (g \circ f)(N'_0)$$

であり，任意の $a, b \subseteq N_0$ に対して,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a \wedge_N b) &= g(f(a \wedge_N b)) = g(f(a) \wedge_M f(b)) \\ &= g(f(a)) \wedge_L g(f(b)) = (g \circ f)(a) \wedge_L (g \circ f)(b)\end{aligned}$$

であり,

$$(g \circ f)(1_N) = g(f(1_N)) = g(1_M) = 1_L$$

である．故に, $g \circ f$ はフレーム準同型である．フレーム L を取る．任意の $L_0' \subseteq L_0$ に対して,

$$\mathrm{id}_L\left(\bigvee_L L_0'\right) = \bigvee_L L_0' = \bigvee_L \mathrm{id}_L(L_0')$$

であり，任意の $a, b \in L_0$ に対して,

$$\mathrm{id}_L(a \wedge_L b) = a \wedge_L b = \mathrm{id}_L(a) \wedge_L \mathrm{id}_L(b)$$

であり, $\mathrm{id}_L(1_L) = 1_L$ である．故に, id_L はフレーム準同型である．以上より，フレームを対象としてフレーム準同型を射とする圏 **Frm** が定まる．**Frm** の反対圏を **Loc** で表し，その対象を**ロケール**とよぶ．**Frm** の射 $f\colon M \to L$ に対して, f に対応する **Loc** の射 $L \to M$ を f_* で表す．**Loc** の射 $\varphi\colon L \to M$ に対して, φ に対応する **Frm** の射 $M \to L$ を φ^* で表す.

2 関手 $\mathsf{Lc}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$ の構成

位相空間を対象として連続写像を射とする圏を **Top** で表す．$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ の台集合 (resp. 位相構造) を X_0 (resp. τ_X) で表す．$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して,

$$\mathsf{Lc}(X)_0 \coloneqq \tau_X,\ \leq_{\mathsf{Lc}(X)} \coloneqq \subseteq,\ \mathsf{Lc}(X) \coloneqq \langle \mathsf{Lc}(X)_0, \leq_{\mathsf{Lc}(X)} \rangle$$

と定める．各 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して, $\mathsf{Lc}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Pos})$ が分かる.

命題 2.1. $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して, $\mathsf{Lc}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ である.

Proof. $\mathsf{Lc}(X)$ は最大元 X_0 と最小元 $\emptyset$ をもつので,

$$\bigvee_{\mathsf{Lc}(X)} \emptyset = 0_{\mathsf{Lc}(X)} = \emptyset$$

かつ

$$\bigwedge_{\mathsf{Lc}(X)} \emptyset = 1_{\mathsf{Lc}(X)} = X_0$$

である．続いて，空でない $L_0' \subseteq \mathsf{Lc}(X)_0$ を任意に取る．先ず, $\bigcup L_0'$ が L_0' の上限であることを示す．$\bigcup L_0' = \bigcup_{U' \in L_0'} U' \in \mathsf{Lc}(X)_0$ である．任意の $U' \in L_0'$ に対して $U' \subseteq \bigcup L_0'$ だから, $\bigcup L_0'$ は L_0' の上界である．L_0' の上界 $U \in \mathsf{Lc}(X)_0$ を任意に取るとき，任意の $U' \in L_0'$ に対して $U' \subseteq U$ だから, $\bigcup L_0' \subseteq U$ を得る．故に $\bigvee_{\mathsf{Lc}(X)} L_0' = \bigcup L_0'$ が成り立つ．続いて, $\bigcap L_0'$ の内部 $\left(\bigcap L_0'\right)^\circ$ が L_0' の下限であることを示す (L_0' は空でないから $\bigcap L_0'$ は集合であることに注意する).

$$\left(\bigcap L_0'\right)^\circ = \bigcup_{U' \in \mathsf{Lc}(X)_0,\, U' \subseteq \bigcap L_0'} U' \in \mathsf{Lc}(X)_0$$

である．任意の $U' \in L'_0$ に対して

$$\left(\bigcap L'_0\right)^\circ \subseteq \bigcap L'_0 \subseteq U'$$

だから，$\left(\bigcap L'_0\right)^\circ$ は L'_0 の下界である．L'_0 の下界 $U \in \mathsf{Lc}(X)_0$ を任意に取るとき，任意の $U' \in L'_0$ に対して $U \subseteq U'$ だから，$U \subseteq \bigcap L'_0$ であり，内部の最大性から $U \subseteq \left(\bigcap L'_0\right)^\circ$ を得る．故に $\bigwedge_{\mathsf{Lc}(X)} L'_0 = \left(\bigcap L'_0\right)^\circ$ が成り立つ．特に，$U, V \in \mathsf{Lc}(X)_0$ に対して，

$$U \wedge_{\mathsf{Lc}(X)} V = \bigwedge_{\mathsf{Lc}(X)} \{U, V\} = \left(\bigcap \{U, V\}\right)^\circ = (U \cap V)^\circ = U \cap V$$

が従う．また，$L'_0 \subseteq A$ と $U \in \mathsf{Lc}(X)_0$ を任意に取るとき，

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{\mathsf{Lc}(X)} L'_0\right) \wedge_{\mathsf{Lc}(X)} U = \left(\bigcup L'_0\right) \wedge_{\mathsf{Lc}(X)} U &= \left(\bigcup L'_0\right) \cap U \\ &= \left(\bigcup_{U' \in L'_0} U'\right) \cap U = \bigcup_{U' \in L'_0} (U' \cap U) \\ &= \bigcup_{U' \in L'_0} (U' \wedge_{\mathsf{Lc}(X)} U) = \bigvee_{\mathsf{Lc}(X),\, U' \in L'_0} (U' \wedge_{\mathsf{Lc}(X)} U)\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，$\mathsf{Lc}(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Frm}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ を得る． □

$f\colon X \to Y$ を $\mathbf{Top}$ の射とする．$V \in \mathsf{Lc}(Y)_0$ ならば，$f^{-1}(V) \in \mathsf{Lc}(X)_0$ である．また，$V, V' \in \mathsf{Lc}(Y)_0$ に対して，$V \subseteq V'$ ならば $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(V')$ である．故に，f は $\mathbf{Pos}$ の射

$$\mathsf{Lc}(f)^*\colon \mathsf{Lc}(Y) \to \mathsf{Lc}(X), V \mapsto f^{-1}(V)$$

を定める．

命題 2.2. $\mathbf{Top}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して，$\mathsf{Lc}(f)^*\colon \mathsf{Lc}(Y) \to \mathsf{Lc}(X)$ は $\mathbf{Frm}$ の射である．即ち，

$$\mathsf{Lc}(f) := (\mathsf{Lc}(f)^*)_*\colon \mathsf{Lc}(X) \to \mathsf{Lc}(Y)$$

は $\mathbf{Loc}$ の射である．

Proof. 任意の $M_0' \subseteq \mathsf{Lc}(X)_0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Lc}(f)^*\Bigl(\bigvee_{\mathsf{Lc}(Y)} M_0'\Bigr) &= \mathsf{Lc}(f)^*\Bigl(\bigcup M_0'\Bigr) = f^{-1}\Bigl(\bigcup M_0'\Bigr) \\
&= f^{-1}\Bigl(\bigcup_{V\in M_0'} V\Bigr) = \bigcup_{V\in M_0'} f^{-1}(V) = \bigcup_{V\in M_0'} \mathsf{Lc}(f)^*(V) \\
&= \bigcup \mathsf{Lc}(f)^*(M_0') = \bigvee_{\mathsf{Lc}(X)} \mathsf{Lc}(f)^*(M_0')
\end{aligned}$$

であり，任意の $V, V' \subseteq \mathsf{Lc}(Y)_0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Lc}(f)^*\bigl(V \wedge_{\mathsf{Lc}(Y)} V'\bigr) &= \mathsf{Lc}(f)^*\bigl(V \cap V'\bigr) = f^{-1}(V \cap V') = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V') \\
&= \mathsf{Lc}(f)^*(V) \cap \mathsf{Lc}(f)^*(V') = \mathsf{Lc}(f)^*(V) \wedge_{\mathsf{Lc}(X)} \mathsf{Lc}(f)^*(V')
\end{aligned}$$

であり,

$$\mathsf{Lc}(f)^*(1_{\mathsf{Lc}(Y)}) = \mathsf{Lc}(f)^*(Y) = f^{-1}(Y) = X = 1_{\mathsf{Lc}(X)}$$

である．故に, $\mathsf{Lc}(f)^*$ は **Frm** の射であり, $\mathsf{Lc}(f) = (\mathsf{Lc}(f)^*)_*$ は **Loc** の射である． □

命題 2.3. **Top** の射 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ に対して, $\mathsf{Lc}(g \circ f) = \mathsf{Lc}(g) \circ \mathsf{Lc}(f)$ が成り立つ．$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して, $\mathsf{Lc}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathsf{Lc}(X)}$ である．

Proof. 任意の $W \in \mathsf{Lc}(Z)_0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Lc}(g \circ f)^*(W) &= (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = f^{-1}(\mathsf{Lc}(g)^*(W)) \\
&= \mathsf{Lc}(f)^*(\mathsf{Lc}(g)^*(W)) = (\mathsf{Lc}(f)^* \circ \mathsf{Lc}(g)^*)(W)
\end{aligned}$$

だから, $\mathsf{Lc}(g \circ f)^* = \mathsf{Lc}(f)^* \circ \mathsf{Lc}(g)^*$ であり,

$$\mathsf{Lc}(g\circ f) = (\mathsf{Lc}(g\circ f)^*)_* = (\mathsf{Lc}(f)^*\circ\mathsf{Lc}(g)^*)_* = (\mathsf{Lc}(g)^*)_*\circ(\mathsf{Lc}(f)^*)_* = \mathsf{Lc}(g)\circ\mathsf{Lc}(f)$$

である．任意の $U \in \mathsf{Lc}(X)_0$ に対して,

$$\mathsf{Lc}(\mathrm{id}_X)^*(U) = \mathrm{id}_X^{-1}(U) = U = \mathrm{id}_{\mathsf{Lc}(X)}(U)$$

だから, $\mathsf{Lc}(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathsf{Lc}(X)}$ であり,

$$\mathsf{Lc}(\mathrm{id}_X) = (\mathsf{Lc}(\mathrm{id}_X)^*)_* = (\mathrm{id}_{\mathsf{Lc}(X)})_* = \mathrm{id}_{\mathsf{Lc}(X)}$$

である． □

以上より，関手 $\mathsf{Lc}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$ の構成が完了した.

3　関手 $\mathsf{Sp}\colon \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$ の構成

関手 Sp を構成する前に, $\mathbf{Top}$ での "点" に相当する概念を, $\mathbf{Loc}$ に於いて導入する. $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して，各 $x \in X_0$ は x の近傍系

$$\mathcal{U}_X(x) \coloneqq \{U \in \tau_X \mid x \in U\}$$

と密接に関係している．$\mathsf{Lc}(X)$ に於ける近傍系のもつ性質を抽象化した cp フィルターという概念を定める.

定義 3.1. $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ に対して, $\mathcal{F} \subsetneq L_0$ が L の **cp フィルター**であるとは，以下を満たすことをいう:

1. $1_L \in \mathcal{F}$ である.
2. 任意の $a, b \in \mathcal{F}$ に対して, $a \wedge_L b \in \mathcal{F}$ である.
3. 任意の $a, b \in L_0$ に対して, $a \leq_L b$ かつ $a \in \mathcal{F}$ ならば $b \in \mathcal{F}$ である.
4. 任意の $L'_0 \subseteq L_0$ に対して, $\bigvee_L L'_0 \in \mathcal{F}$ ならば $a \in L'_0$ が存在して $a \in \mathcal{F}$ を満たす.

$L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ に対して, L の cp フィルターの全体を $\mathsf{Sp}(L)_0$ で表し, $a \in L_0$ に対して

$$\Sigma_{L,a} \coloneqq \{\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0 \mid a \in \mathcal{F}\}$$

と定めて,

$$\tau_{\mathsf{Sp}(L)} \coloneqq \{\Sigma_{L,a} \mid a \in L_0\},\ \mathsf{Sp}(L) \coloneqq \langle \mathsf{Sp}(L)_0, \tau_{\mathsf{Sp}(L)} \rangle$$

と定める.

命題 3.2. $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ に対して，$\tau_{\mathsf{Sp}(L)}$ は $\mathsf{Sp}(L)_0$ 上の位相構造である．即ち, $\mathsf{Sp}(L) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ が成り立つ.

Proof. 定義 3.1, 1 より，任意の $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ に対して $1_L \in \mathcal{F}$ だから,

$$\mathsf{Sp}(L)_0 = \Sigma_{L,1_L} \in \tau_{\mathsf{Sp}(L)}$$

である．一方, $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ に対して, $\mathcal{F} \subsetneq L_0$ より $b_{\mathcal{F}} \in L_0 \setminus \mathcal{F}$ が取れ, $0_L \leq_L b_{\mathcal{F}}$ と定義 3.1, 3 より $0_L \in L_0 \setminus \mathcal{F}$ を得る．故に $0_L \in \mathcal{F}$ を満たす $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ は存在せず,

$$\emptyset = \Sigma_{L,0_L} \in \tau_{\mathsf{Sp}(L)}$$

を得る．$a, b \in L_0$ を取り, $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ を任意に取る．$\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a} \cap \Sigma_{L,b}$ ならば, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a}$ かつ $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,b}$ であり, $a \in \mathcal{F}$ かつ $b \in \mathcal{F}$ であり，定義 3.1, 2 より

$a \wedge_L b \in \mathcal{F}$ であり, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a\wedge_L b}$ である．また, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a\wedge_L b}$ ならば, $a \wedge_L b \in \mathcal{F}$ であり, $a \wedge_L b \leq_L a$ かつ $a \wedge_L b \leq_L b$ だから定義 3.1, 3 より $a \in \mathcal{F}$ かつ $b \in \mathcal{F}$ であり, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a}$ かつ $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,b}$ であり, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a} \cap \Sigma_{L,b}$ である．従って,

$$\Sigma_{L,a} \cap \Sigma_{L,b} = \Sigma_{L,a\wedge_L b} \in \tau_{\mathsf{Sp}(L)}$$

を得る．続いて, $L_0' \subseteq L_0$ を取り, $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ を任意に取る．$\mathcal{F} \in \bigcup_{a\in L_0'} \Sigma_{L,a}$ ならば, $a \in L_0'$ が存在して $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a}$ を満たし, $a \in \mathcal{F}$ であり, $a \leq_L \bigvee_L L_0'$ だから定義 3.1, 3 より $\bigvee_L L_0' \in \mathcal{F}$ であり, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,\bigvee_L L_0'}$ である．また, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,\bigvee_L L_0'}$ ならば, $\bigvee_L L_0' \in \mathcal{F}$ であり, 定義 3.1, 4 より $a \in L_0'$ が存在して $a \in \mathcal{F}$ を満たし, $\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a}$ であり, $\mathcal{F} \in \bigcup_{a\in L_0'} \Sigma_{L,a}$ である．従って,

$$\bigcup_{a\in L_0'} \Sigma_{L,a} = \Sigma_{L,\bigvee_L L_0'} \in \tau_{\mathsf{Sp}(L)}$$

を得る．以上より, $\mathsf{Sp}(L) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ が成り立つ． □

命題 3.3. $\mathbf{Frm}$ の射 $f\colon M \to L$ と $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ に対して, $f^{-1}(\mathcal{F}) \in \mathsf{Sp}(M)_0$ である．

Proof. 定義 3.1, 1 より

$$f(1_M) = 1_L \in \mathcal{F}$$

であり, $1_M \in f^{-1}(\mathcal{F})$ を得る．$a, b \in f^{-1}(\mathcal{F})$ ならば, $f(a), f(b) \in \mathcal{F}$ であり, 定義 3.1, 1 より

$$f(a \wedge_M b) = f(a) \wedge_L f(b) \in \mathcal{F}$$

であり, $a \wedge_M b \in f^{-1}(\mathcal{F})$ を得る．$a, b \in M_0$ に対して, $a \leq_M b$ かつ $b \in f^{-1}(\mathcal{F})$ ならば, f は $\mathbf{Pos}$ の射だから $f(a) \leq_L f(b)$ かつ $f(b) \in \mathcal{F}$ であり, 定義 3.1, 3 より $f(a) \in \mathcal{F}$ であり, $a \in f^{-1}(\mathcal{F})$ である．$M_0' \subseteq M_0$ に対して, $\bigvee_M M_0' \in f^{-1}(\mathcal{F})$ ならば,

$$\bigvee_L f(M_0') = f\left(\bigvee_M M_0'\right) \in \mathcal{F}$$

であり, 定義 3.1, 4 から $a \in M_0'$ が存在して $f(a) \in \mathcal{F}$ を満たし, $a \in f^{-1}(\mathcal{F})$ である．以上より, $f^{-1}(\mathcal{F}) \in \mathsf{Sp}(M)_0$ を得る． □

$\varphi\colon L \to M$ を $\mathbf{Loc}$ の射とする．$\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ に対して, 命題 3.3 より $(\varphi^*)^{-1}(\mathcal{F}) \in \mathsf{Sp}(M)_0$ である．故に,

$$\mathsf{Sp}(\varphi)\colon \mathsf{Sp}(L)_0 \to \mathsf{Sp}(M)_0, \mathcal{F} \mapsto (\varphi^*)^{-1}(\mathcal{F})$$

が定まる．

命題 3.4. $\mathbf{Loc}$ の射 $\varphi\colon L \to M$ に対して, $\mathsf{Sp}(\varphi)\colon \mathsf{Sp}(L) \to \mathsf{Sp}(M)$ は $\mathbf{Top}$ の射である.

Proof. 任意の $a \in M_0$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathsf{Sp}(\varphi)^{-1}(\Sigma_{M,a}) &= \{\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0 \mid \mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(\varphi)^{-1}(\Sigma_{M,a})\}\\ &= \{\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0 \mid \mathsf{Sp}(\varphi)(\mathcal{F}) \in \Sigma_{M,a}\}\\ &= \{\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0 \mid (\varphi^*)^{-1}(\mathcal{F}) \in \Sigma_{M,a}\}\\ &= \{\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0 \mid a \in (\varphi^*)^{-1}(\mathcal{F})\}\\ &= \{\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0 \mid \varphi^*(a) \in \mathcal{F}\} = \Sigma_{L,\varphi^*(a)}\end{aligned}$$

が成り立つ．故に，任意の $a \in M_0$ に対して

$$\mathsf{Sp}(\varphi)^{-1}(\Sigma_{M,a}) = \Sigma_{L,\varphi^*(a)} \in \tau_{\mathsf{Sp}(L)}$$

であり, $\mathsf{Sp}(\varphi)\colon \mathsf{Sp}(L) \to \mathsf{Sp}(M)$ は $\mathbf{Top}$ の射である. □

命題 3.5. $\mathbf{Loc}$ の射 $\varphi\colon L \to M$, $\psi\colon M \to N$ に対して, $\mathsf{Sp}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{Sp}(\psi) \circ \mathsf{Sp}(\varphi)$ が成り立つ．$L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ に対して, $\mathsf{Sp}(\mathrm{id}_L) = \mathrm{id}_{\mathsf{Sp}(L)}$ である.

Proof. 任意の $\mathcal{H} \in \mathsf{Sp}(N)_0$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathsf{Sp}(\psi \circ \varphi)(\mathcal{H}) &= ((\psi \circ \varphi)^*)^{-1}(\mathcal{H}) = ((\varphi^*) \circ (\psi^*))^{-1}(\mathcal{H}) = (\psi^*)^{-1}((\varphi^*)^{-1}(\mathcal{H}))\\ &= (\psi^*)^{-1}(\mathsf{Sp}(\varphi)(\mathcal{H})) = \mathsf{Sp}(\psi)(\mathsf{Sp}(\varphi)(\mathcal{H})) = (\mathsf{Sp}(\psi) \circ \mathsf{Sp}(\varphi))(\mathcal{H})\end{aligned}$$

だから, $\mathsf{Sp}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{Sp}(\psi) \circ \mathsf{Sp}(\varphi)$ である．任意の $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ に対して,

$$\mathsf{Sp}(\mathrm{id}_L)(\mathcal{F}) = ((\mathrm{id}_L)^*)^{-1}(\mathcal{F}) = \mathrm{id}_L^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathsf{Sp}(L)}(\mathcal{F})$$

だから, $\mathsf{Sp}(\mathrm{id}_L) = \mathrm{id}_{\mathsf{Sp}(L)}$ である. □

以上より, 関手 $\mathsf{Sp}\colon \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$ の構成が完了した.

4 随伴の構成

本節では，上で構成した関手 Lc, Sp が $\mathbf{Top}$ と $\mathbf{Loc}$ の間の随伴を導くことを示す．集合を対象として写像を射とする圏を $\mathbf{Set}$ で表し, $\mathbf{Top}$ の反対圏を $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}$ で表し, $\mathbf{Top}$ (resp. $\mathbf{Loc}$) の恒等関手を $\mathrm{id}_{\mathbf{Top}}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathbf{Loc}}$) で表し，関手の合成を $\circ$ で表す．$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-), -)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathsf{Sp}(-))$) の恒等自然変換を $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-)}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))}$) で表し，自然変換の合成を $\odot$ で表す.

空位相空間 $\emptyset := \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して, $\varepsilon_\emptyset\colon \emptyset_0 \to \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(\emptyset))_0$ を包含写像とする．これは $\mathbf{Top}$ の射 $\varepsilon_\emptyset\colon \emptyset \to \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(\emptyset))$ を定める.

主張 4.1. *X_0 が空でない $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ と $x \in X_0$ に対して, $\mathcal{U}_X(x) \in \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))_0$ である.*

Proof. $1_{\mathsf{Lc}(X)} = X_0$ であり, $x \in X_0$ より

$$1_{\mathsf{Lc}(X)} = X_0 \in \mathcal{U}_X(x)$$

である. $U, V \in \mathcal{U}_X(x)$ ならば, $x \in U$ かつ $x \in V$ であり, $x \in U \cap V$ だから,

$$U \wedge_{\mathsf{Lc}(X)} V = U \cap V \in \mathcal{U}_X(x)$$

である. $U, V \in \mathsf{Lc}(X)_0$ が $U \leq_{\mathsf{Lc}(X)} V$ かつ $U \in \mathcal{U}_X(x)$ を満たすならば, $U \subseteq V$ かつ $x \in U$ だから, $x \in V$ であり, $V \in \mathcal{U}_X(x)$ である. $L_0' \subseteq \mathsf{Lc}(X)_0$ が $\bigvee_{\mathsf{Lc}(X)} L_0' \in \mathcal{U}_X(x)$ を満たすならば,

$$x \in \bigvee_{\mathsf{Lc}(X)} L_0' = \bigcup L_0'$$

であり, $U \in L_0'$ が存在して $x \in U$ を満たし, $U \in \mathcal{U}_X(x)$ である. 故に, $\mathcal{U}_X(x) \in \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))_0$ を得る. $\square$

X_0 が空でない $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ を取る. $x \in X_0$ に対して, 主張 4.1 より $\mathcal{U}_X(x) \in \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))_0$ だから,

$$\varepsilon_X \colon X_0 \to \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))_0, x \mapsto \mathcal{U}_X(x)$$

が定まる.

命題 4.2. *$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ に対して, $\varepsilon_X \colon X \to \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))$ は $\mathbf{Top}$ の射である.*

Proof. X_0 が空でない場合に示せば良い. 任意の $U \in \mathsf{Lc}(X)_0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X^{-1}(\Sigma_{\mathsf{Lc}(X),U}) &= \{x \in X_0 \mid x \in \varepsilon_X^{-1}(\Sigma_{\mathsf{Lc}(X),U})\} = \{x \in X_0 \mid \varepsilon_X(x) \in \Sigma_{\mathsf{Lc}(X),U}\} \\
&= \{x \in X_0 \mid \mathcal{U}_X(x) \in \Sigma_{\mathsf{Lc}(X),U}\} = \{x \in X_0 \mid U \in \mathcal{U}_X(x)\} \\
&= \{x \in X_0 \mid x \in U\} = U
\end{aligned}$$

が成り立つ. 故に, 任意の $U \in \mathsf{Lc}(X)_0$ に対して

$$\varepsilon_X^{-1}(\Sigma_{\mathsf{Lc}(X),U}) = U \in \tau_X$$

であり, $\varepsilon_X \colon X \to \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))$ は $\mathbf{Top}$ の射である. $\square$

続いて, $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ を取る. $a \in L_0$ に対して, $\tau_{\mathsf{Sp}(L)}$ の定義から

$$\Sigma_{L,a} \in \tau_{\mathsf{Sp}(L)} = (\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L)))_0$$

だから，

$$(\eta_L)^*\colon L_0 \to \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))_0, a \mapsto \Sigma_{L,a}$$

が定まる．

命題 4.3. $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ に対して，$(\eta_L)^*\colon L \to \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))$ は **Frm** の射である．即ち，

$$\eta_L \coloneqq ((\eta_L)^*)_*\colon \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L)) \to L$$

は **Loc** の射である．

Proof. $a \leq_L b$ を満たす $a, b \in L_0$ を任意に取る．任意の $\mathcal{F} \in \mathsf{Sp}(L)_0$ に対して，$\mathcal{F} \in \Sigma_{L,a}$ ならば，$a \in \mathcal{F}$ であり，$a \leq_L b$ と定義 3.1, 3 より $b \in \mathcal{F}$ であり，$\mathcal{F} \in \Sigma_{L,b}$ だから，$\Sigma_{L,a} \subseteq \Sigma_{L,b}$，即ち

$$(\eta_L^*)(a) = \Sigma_{L,a} \leq_{\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))} \Sigma_{L,b} = (\eta_L^*)(b)$$

を得る．故に，$(\eta_L)^*$ は **Pos** の射である．任意の $L_0' \subseteq L_0$ に対して，命題 3.2 の証明より

$$\begin{aligned}(\eta_L)^*\left(\bigvee_L L_0'\right) &= \Sigma_{L,\bigvee_L L_0'} = \bigcup_{a \in L_0'} \Sigma_{L,a} \\ &= \bigcup_{a \in L_0'} (\eta_L)^*(a) = \bigcup (\eta_L)^*(L_0') = \bigvee_{\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))} (\eta_L)^*(L_0')\end{aligned}$$

であり，任意の $a, b \in L_0$ に対して，命題 3.2 の証明より

$$\begin{aligned}\eta_L)^*(a \wedge_L b) &= \Sigma_{L,a\wedge_L b} = \Sigma_{L,a} \cap \Sigma_{L,b} \\ &= (\eta_L)^*(a) \cap (\eta_L)^*(b) = (\eta_L)^*(a) \wedge_{\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))} (\eta_L)^*(b)\end{aligned}$$

であり，命題 3.2 の証明より

$$(\eta_L)^*(1_L) = \Sigma_{L,1_L} = \mathsf{Sp}(L)_0 = 1_{\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))}$$

である．故に，$(\eta_L)^*\colon L \to \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))$ は **Frm** の射であり，$\eta_L = ((\eta_L)^*)_*$ は **Loc** の射である． ∎

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-), -), \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathsf{Sp}(-))$ は $\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc}$ から **Set** への関手である．

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}) \times \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}) \times \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$$

であることに注意する．$\langle X, L \rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ を取る．$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ かつ $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ である．$\mathsf{Lc}(X), L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ である．**Loc** の射 $\varphi\colon \mathsf{Lc}(X) \to L$ に対

して，**Top** の射 $\mathsf{Sp}(\varphi)\colon \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X)) \to \mathsf{Sp}(L)$ が定まり，命題 4.2 で定めた **Top** の射 $\varepsilon_X\colon X \to \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))$ との合成

$$\mathsf{Sp}(\varphi)\circ\varepsilon_X\colon X \to \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X)) \to \mathsf{Sp}(L)$$

が定まる．故に，各 $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc})$ に対して

$$\alpha_{\langle X,L\rangle}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X), L) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathsf{Sp}(L)), \varphi \mapsto \mathsf{Sp}(\varphi)\circ\varepsilon_X$$

が定まる:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X), L) \arrow[r, "\mathsf{Sp}"] \arrow[dr, "\alpha_{\langle X,L\rangle}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X)), \mathsf{Sp}(L)) \arrow[d, "-\circ\varepsilon_X"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathsf{Sp}(L))
\end{tikzcd}$$

一方で，$X, \mathsf{Sp}(L) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ であり，**Top** の射 $f\colon X \to \mathsf{Sp}(L)$ に対して，**Loc** の射 $\mathsf{Lc}(f)\colon \mathsf{Lc}(X) \to \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))$ が定まり，命題 4.3 で定めた **Loc** の射 $\eta_L\colon \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L)) \to L$ との合成

$$\eta_L\circ\mathsf{Lc}(f)\colon \mathsf{Lc}(X) \to \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L)) \to L$$

が定まる．故に，各 $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc})$ に対して

$$\beta_{\langle X,L\rangle}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathsf{Sp}(L)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X), L), f \mapsto \eta_L\circ\mathsf{Lc}(f)$$

が定まる:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathsf{Sp}(L)) \arrow[r, "\mathsf{Lc}"] \arrow[dr, "\beta_{\langle X,L\rangle}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X), \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L))) \arrow[d, "\eta_L\circ-"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X), L)
\end{tikzcd}$$

写像の族 α, β を

$$\alpha := \langle\alpha_{\langle X,L\rangle}\rangle_{\langle X,L\rangle\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc})},\ \beta := \langle\beta_{\langle X,L\rangle}\rangle_{\langle X,L\rangle\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc})}$$

と定める．$\langle X, L\rangle, \langle Y, M\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc})$ に対して，$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ かつ $L, M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Loc})$ であり，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc}}(\langle X, L\rangle, \langle Y, M\rangle) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}}(X, Y)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(L, M) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, X)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(L, M)
\end{aligned}$$

であることに注意する．

命題 4.4. α は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-)$ から $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))$ への自然変換である．

Proof. $\langle X,L\rangle,\langle Y,M\rangle\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc})$ と

$$\langle f,\psi\rangle\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc}}(\langle X,L\rangle,\langle Y,M\rangle)$$

を任意に取る．$\mathbf{Top}$ の射 $f\colon Y\to X$ と $\mathbf{Loc}$ の射 $\psi\colon L\to M$ が定まる．$\mathbf{Loc}$ の射 $\varphi\colon \mathsf{Lc}(X)\to L$ を任意に取る．任意の $y\in Y_0$ に対して，

$$\begin{aligned}
(\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f))\circ\varepsilon_Y)(y)&=\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f))(\varepsilon_Y(y))=\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f))(\mathcal{U}_Y(y))\\
&=(\mathsf{Lc}(f)^*)^{-1}(\mathcal{U}_Y(y))\\
&=\{V\in\mathsf{Lc}(X)_0\mid V\in(\mathsf{Lc}(f)^*)^{-1}(\mathcal{U}_Y(y))\}\\
&=\{V\in\tau_X\mid V\in(\mathsf{Lc}(f)^*)^{-1}(\mathcal{U}_Y(y))\}\\
&=\{V\in\tau_X\mid \mathsf{Lc}(f)^*(V)\in\mathcal{U}_Y(y)\}\\
&=\{V\in\tau_X\mid f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_Y(y)\}\\
&=\{V\in\tau_X\mid y\in f^{-1}(V)\}=\{V\in\tau_X\mid f(y)\in V\}\\
&=\mathcal{U}_X(f(y))=\varepsilon_X(f(y))=(\varepsilon_X\circ f)(y)
\end{aligned}$$

が成り立つので，図式

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_Y"'] & X \arrow[d, "\varepsilon_X"] \\
\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(Y)) \arrow[r, "\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f))"'] & \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(X))
\end{tikzcd}$$

は可換である．故に，

$$\begin{aligned}
((\mathsf{Sp}(\psi)\circ-\circ f)\circ\alpha_{\langle X,L\rangle})(\varphi)&=(\mathsf{Sp}(\psi)\circ-\circ f)(\alpha_{\langle X,L\rangle}(\varphi))\\
&=(\mathsf{Sp}(\psi)\circ-\circ f)(\mathsf{Sp}(\varphi)\circ\varepsilon_X)\\
&=\mathsf{Sp}(\psi)\circ\mathsf{Sp}(\varphi)\circ\varepsilon_X\circ f\\
&=\mathsf{Sp}(\psi)\circ\mathsf{Sp}(\varphi)\circ\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f))\circ\varepsilon_Y\\
&=\mathsf{Sp}(\psi\circ\varphi\circ\mathsf{Lc}(f))\circ\varepsilon_Y\\
&=\alpha_{\langle Y,M\rangle}(\psi\circ\varphi\circ\mathsf{Lc}(f))\\
&=\alpha_{\langle Y,M\rangle}((\psi\circ-\circ\mathsf{Lc}(f))(\varphi))\\
&=(\alpha_{\langle Y,M\rangle}\circ(\psi\circ-\circ\mathsf{Lc}(f)))(\varphi)
\end{aligned}$$

が成り立ち，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X), L) \arrow[r, "\psi\circ - \circ \mathsf{Lc}(f)"] \arrow[d, "\alpha_{\langle X,L\rangle}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(Y), M) \arrow[d, "\alpha_{\langle Y,M\rangle}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathsf{Sp}(L)) \arrow[r, "\mathsf{Sp}(\psi)\circ - \circ f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, \mathsf{Sp}(M))
\end{tikzcd}$$

は可換である．従って，自然変換

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathsf{Sp}(-))$$

が定まる． □

命題 4.5. β は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathsf{Sp}(-))$ から $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-), -)$ への自然変換である．

Proof. $\langle X, L\rangle, \langle Y, M\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ と

$$\langle g, \varphi\rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Loc}}(\langle X, L\rangle, \langle Y, M\rangle)$$

を任意に取る．**Top** の射 $g\colon Y \to X$ と **Loc** の射 $\varphi\colon L \to M$ が定まる．**Top** の射 $f\colon X \to \mathsf{Sp}(L)$ を任意に取る．任意の $a \in M$ に対して，命題 3.4 の証明より

$$\begin{aligned}(\eta_L^* \circ \varphi^*)(a) &= \eta_L^*(\varphi^*(a)) = \Sigma_{L,\varphi^*(a)} = (\mathsf{Sp}(\varphi)^*)^{-1}(\Sigma_{M,a}) \\ &= \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))^*(\Sigma_{M,a}) = \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))^*(\eta_M^*(a)) = (\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))^* \circ \eta_M^*)(a)\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}\varphi \circ \eta_L &= (\varphi^*)_* \circ (\eta_L^*)_* = (\eta_L^* \circ \varphi^*)_* \\ &= (\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))^* \circ \eta_M^*)_* = (\eta_M^*)_* \circ (\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))^*)_* = \eta_M \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))\end{aligned}$$

が成り立ち，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(L)) \arrow[r, "\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))"] \arrow[d, "\eta_L"'] & \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(M)) \arrow[d, "\eta_M"] \\
L \arrow[r, "\varphi"'] & M
\end{tikzcd}$$

は可換である．故に，

$$
\begin{aligned}
((\varphi \circ - \circ \mathsf{Lc}(g)) \circ \beta_{\langle X,L\rangle})(f) &= (\varphi \circ - \circ \mathsf{Lc}(g))(\beta_{\langle X,L\rangle}(f)) \\
&= (\varphi \circ - \circ \mathsf{Lc}(g))(\eta_L \circ \mathsf{Lc}(f)) \\
&= \varphi \circ \eta_L \circ \mathsf{Lc}(f) \circ \mathsf{Lc}(g) \\
&= \eta_M \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi)) \circ \mathsf{Lc}(f) \circ \mathsf{Lc}(g) \\
&= \eta_M \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi) \circ f \circ g) = \beta_{\langle Y,M\rangle}(\mathsf{Sp}(\varphi) \circ f \circ g) \\
&= \beta_{\langle Y,M\rangle}((\mathsf{Sp}(\varphi) \circ - \circ g)(f)) \\
&= (\beta_{\langle Y,M\rangle} \circ (\mathsf{Sp}(\varphi) \circ - \circ g))(f)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, \mathsf{Sp}(L)) \arrow[r, "\mathsf{Sp}(\varphi) \circ - \circ g"] \arrow[d, "\beta_{\langle X,L\rangle}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, \mathsf{Sp}(M)) \arrow[d, "\beta_{\langle Y,M\rangle}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X), L) \arrow[r, "\varphi \circ - \circ \mathsf{Lc}(g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(Y), M)
\end{tikzcd}
$$

は可換である．従って，自然変換

$$\beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, \mathsf{Sp}(-)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-), -)$$

が定まる． □

命題 4.6. $\beta \odot \alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-)}$ である．

Proof. 任意の $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ と $\mathbf{Loc}$ の射 $\varphi\colon \mathsf{Lc}(X) \to L$ と $a \in L_0$ に対して，命題 3.4，命題 4.2 の証明より

$$
\begin{aligned}
(\eta_L \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi)) \circ \mathsf{Lc}(\varepsilon_X))^*(a) &= (\mathsf{Lc}(\varepsilon_X)^* \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))^* \circ \eta_L^*)(a) \\
&= \mathsf{Lc}(\varepsilon_X)^*(\mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi))^*(\Sigma_{L,a})) \\
&= \mathsf{Lc}(\varepsilon_X)^*(\mathsf{Sp}(\varphi)^{-1}(\Sigma_{L,a})) \\
&= \mathsf{Lc}(\varepsilon_X)^*(\Sigma_{\mathsf{Lc}(X),\varphi^*(a)}) \\
&= \varepsilon_X^{-1}(\Sigma_{\mathsf{Lc}(X),\varphi^*(a)}) = \varphi^*(a)
\end{aligned}
$$

だから，

$$\eta_L \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi)) \circ \mathsf{Lc}(\varepsilon_X) = ((\eta_L \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi)) \circ \mathsf{Lc}(\varepsilon_X))^*)_* = (\varphi^*)_* = \varphi$$

であり，任意の $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ と $\mathbf{Loc}$ の射 $\varphi\colon \mathsf{Lc}(X) \to L$ に対して，

$$(\beta \odot \alpha)_{\langle X,L\rangle}(\varphi) = (\beta_{\langle X,L\rangle} \circ \alpha_{\langle X,L\rangle})(\varphi) = \beta_{\langle X,L\rangle}(\alpha_{\langle X,L\rangle}(\varphi)) = \beta_{\langle X,L\rangle}(\mathsf{Sp}(\varphi) \circ \varepsilon_X)$$

$$\begin{aligned} &= \eta_L \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi) \circ \varepsilon_X) = \eta_L \circ \mathsf{Lc}(\mathsf{Sp}(\varphi)) \circ \mathsf{Lc}(\varepsilon_X) = \varphi \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(X),L)}(\varphi) = \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-)}\big)_{\langle X,L\rangle}(\varphi) \end{aligned}$$

であり，任意の $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ に対して

$$(\beta \odot \alpha)_{\langle X,L\rangle} = \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-)}\big)_{\langle X,L\rangle}$$

であり, $\beta \odot \alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-)}$ を得る. □

命題 4.7. $\alpha \odot \beta = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))}$ である.

Proof. 任意の $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ と $\mathbf{Top}$ の射 $f\colon X \to \mathsf{Sp}(L)$ と $x \in X_0$ に対して，命題 4.4 の証明より

$$\begin{aligned} (\mathsf{Sp}(\eta_L) \circ \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f)) \circ \varepsilon_X)(x) &= \mathsf{Sp}(\eta_L)(\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f))(\varepsilon_X(x))) \\ &= \mathsf{Sp}(\eta_L)(\mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f))(\mathcal{U}_X(x))) \\ &= \mathsf{Sp}(\eta_L)((\mathsf{Lc}(f)^*)^{-1}(\mathcal{U}_X(x))) \\ &= \mathsf{Sp}(\eta_L)(\mathcal{U}_{\mathsf{Sp}(L)}(f(x))) \\ &= (\eta_L^*)^{-1}(\mathcal{U}_{\mathsf{Sp}(L)}(f(x))) \\ &= \{a \in L_0 \mid a \in (\eta_L^*)^{-1}(\mathcal{U}_{\mathsf{Sp}(L)}(f(x)))\} \\ &= \{a \in L_0 \mid \eta_L^*(a) \in \mathcal{U}_{\mathsf{Sp}(L)}(f(x))\} \\ &= \{a \in L_0 \mid \Sigma_{L,a} \in \mathcal{U}_{\mathsf{Sp}(L)}(f(x))\} \\ &= \{a \in L_0 \mid f(x) \in \Sigma_{L,a}\} \\ &= \{a \in L_0 \mid a \in f(x)\} = f(x) \end{aligned}$$

だから，任意の $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ と $\mathbf{Top}$ の射 $f\colon X \to \mathsf{Sp}(L)$ に対して，

$$\begin{aligned} (\alpha \odot \beta)_{\langle X,L\rangle}(f) &= (\alpha_{\langle X,L\rangle} \circ \beta_{\langle X,L\rangle})(f) = \alpha_{\langle X,L\rangle}(\beta_{\langle X,L\rangle}(f)) \\ &= \alpha_{\langle X,L\rangle}(\eta_L \circ \mathsf{Lc}(f)) = \mathsf{Sp}(\eta_L \circ \mathsf{Lc}(f)) \circ \varepsilon_X \\ &= \mathsf{Sp}(\eta_L) \circ \mathsf{Sp}(\mathsf{Lc}(f)) \circ \varepsilon_X = f \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\mathsf{Sp}(L))}(f) = \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))}\big)_{\langle X,L\rangle}(f) \end{aligned}$$

だから，任意の $\langle X, L\rangle \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Loc})$ に対して

$$(\alpha \odot \beta)_{\langle X,L\rangle} = \big(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))}\big)_{\langle X,L\rangle}$$

であり, $\alpha \odot \beta = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))}$ を得る. □

命題 4.6，命題 4.7 より，命題 4.4 で定めた自然変換

$$\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))$$

は自然同型である．故に, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathsf{Lc}(-),-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-,\mathsf{Sp}(-))$ であり, $\langle \mathsf{Lc}, \mathsf{Sp} \rangle$ は随伴を定めることが示された.

References

[Leh15] Lehner G. *Pointless Topology*. Seminar in Analysis, 2015.

[PP12] Picado J., Pultr A. *Frames and Locales*. Front. Math. Springer Basel, 2012.