

Z と R の間の随伴

ゐぶ

\mathbf{Z} と \mathbf{R} は通常の順序 \leq で順序集合であるため, 圏とみなすことができる. また, 自然な包含写像 $I: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ は順序を保つので関手とみなすことができる.

写像 $\lfloor - \rfloor: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ を $r \in \mathbf{R}$ に対し, $n \leq r < n+1$ を満たす $n \in \mathbf{Z}$ を対応させる写像とすると順序を保つため関手とみなせる.

写像 $\lceil - \rceil: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ を $r \in \mathbf{R}$ に対し, $n-1 < r \leq n$ を満たす $n \in \mathbf{Z}$ を対応させる写像とすると順序を保つため関手とみなせる.

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\lceil - \rceil} & \\ \mathbf{Z} & \xrightarrow{I} & \mathbf{R} \\ & \xleftarrow{\lfloor - \rfloor} & \end{array}$$

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall r \in \mathbf{R}, n \leq r \iff n \leq \lfloor r \rfloor \wedge r \leq n \iff \lceil r \rceil \leq n$$

が成立するため, $\lceil - \rceil \dashv I \dashv \lfloor - \rfloor$ がわかる.

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\lceil - \rceil} & \\ \mathbf{Z} & \xrightarrow{I} & \mathbf{R} \\ & \xleftarrow{\lfloor - \rfloor} & \end{array}$$

参考文献

- [1] Emily Riehl (著)・「Category Theory in Context」・Dover Publications・2016