左右の随伴をもつ忘却関手

秋桜

概要

忘却関手が左随伴をもつことは多いが右随伴をもつことは少ない．そこで本稿では位相空間と微分空間 (diffeological space) を用いて左右の随伴をもつ忘却関手の例をあげる．また, 本稿はほとんど前提知識なしで読めるように心がけた.

1 位相空間

まず, 位相空間を定義する.

Definition 1.1 (位相空間)

X を空でない集合とする. X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ が次の条件をみたすとき, 集合 X の位相構造であるという.

[O_1] $X \in \mathcal{O}$, $\phi \in \mathcal{O}$

[O_2] $O_1, O_2, \cdots O_k \in \mathcal{O}$ に対し, $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathcal{O}$

[O_3] $\mathcal{O}$ の元からなる集合族 $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

位相構造 $\mathcal{O}$ が与えられた集合 X を位相空間といい, $(X, \mathcal{O})$ や単に X と表す.

距離空間は位相空間とみなせる．その基本的な例として以下がある.

Example 1.2

$\mathbf{R}^n$ はユークリッド距離により自然に位相構造が定まる. この位相構造を標準位相構造という.

位相空間の間の射として自然なものを定義する.

Definition 1.3 (連続写像)

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．$f\colon X \to Y$ が,

$$\forall U \in \mathcal{O}_Y,\ f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$$

をみたすとき, 連続写像という.

簡単な例として以下がある.

Example 1.4

$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする. このとき, 恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は連続写像である.

連続写像の重要な性質として以下がある.

Lemma 1.5

連続写像の合成は連続写像である.

Proof: $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y),(Z,\mathcal{O}_Z)$ を位相空間とし, $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to Z$ を連続写像とする.
このとき,

$$\forall U\in\mathcal{O}_Z,\ f^{-1}(g^{-1}(U))=(g\circ f)^{-1}(U)\in\mathcal{O}_X$$

が成立するため, $g\circ f\colon X\to Z$ は連続写像である. ■

位相空間と連続写像のなす圏を **Top** と表す.

2 離散位相構造と密着位相構造

位相構造の例として離散位相構造と密着位相構造をみる.

Definition 2.1 (離散位相構造)

X を空でない集合とし, $\mathcal{O}=\mathfrak{P}(X)$ とすると, $(X,\mathcal{O})$ は位相空間となる. この位相構造を離散位相構造といい, 離散位相構造が与えられた位相空間を離散位相空間という.

Lemma 2.2

離散位相空間の間の写像は連続写像となる.

Proof: $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を離散位相空間とし, $f\colon X\to Y$ を写像とする. このとき,

$$\forall O\in\mathfrak{P}(Y),\ f^{-1}(O)\in\mathfrak{P}(X)$$

となるため, f は連続写像である. ■

より条件を緩め, 離散位相空間からの写像は連続写像であることも同様にわかる.

Definition 2.3 (密着位相構造)

X を空でない集合とし, $\mathcal{O}=\{\phi,X\}$ とすると, $(X,\mathcal{O})$ は位相空間となる. この位相構造を密着位相構造といい, 密着位相構造が与えられた位相空間を密着位相空間という.

Lemma 2.4

密着位相空間の間の写像は連続写像となる.

Proof: $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を密着位相空間とし, $f\colon X\to Y$ を写像とする. このとき,
$f^{-1}(Y)=X$ かつ $f^{-1}(\phi)=\phi$ であるため, f は連続写像である. ■

より条件を緩め, 密着位相空間への写像は連続写像であることも同様にわかる.

3 微分空間 (Diffeological space)

以下 $\mathbf{R}^n$ には, 標準位相構造が与えられているとする.

Definition 3.1 (ドメイン, パラメトリゼーション)

$\mathbf{R}^n$ の開集合を n-ドメイン *(n-domain)* といい, n-ドメイン全体の集合を $\mathrm{Domains}(\mathbf{R}^n)$ と表す. また, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{Domains}(\mathbf{R}^n)$ の元をドメイン *(domain)* という.

X を集合とし, U をドメインとする. このとき, $P\colon U \to X$ を X のパラメトリゼーション (parametrization) といい, X のパラメトリゼーション全体の集合を $\mathrm{Param}(X)$ と表す.

まず, 微分空間を定義する.

Definition 3.2 (微分空間)

X を空でない集合とする. X のパラメトリゼーションの集合 $\mathcal{D}$ が次の条件をみたすとき, 集合 X の微分構造 (*diffeology*) であるという.

[D_1] 任意のドメインから X への定値写像は $\mathcal{D}$ に属する.

[D_2] $P\colon U \to X$ を X のパラメトリゼーションとする. このとき,

$$\forall u \in U,\ V : u \text{ の開近傍 } s.t.\ P|_V \in \mathcal{D} \Longrightarrow P \in \mathcal{D}$$

が成立する.

[D_3]

$$\forall (P\colon U \to X) \in \mathcal{D},\ \forall F \in C^\infty(V, U),\ P \circ F \in \mathcal{D}$$

が成立する.

微分構造 $\mathcal{D}$ が与えられた集合 X を微分空間 (*diffeological space*) といい, $(X, \mathcal{D})$ や単に X と表す.

微分空間の間の射として自然なものを定義する.

Definition 3.3 (滑らかな写像)

$(X, \mathcal{D}_X), (Y, \mathcal{D}_Y)$ を微分空間とする. $f\colon X \to Y$ が,

$$\forall P \in \mathcal{D}_X,\ f \circ P \in \mathcal{D}_Y$$

をみたすとき, 滑らかな写像 (*smooth map*) という.

簡単な例として以下がある.

Example 3.4

$(X, \mathcal{D}_X)$ を微分空間とする. このとき, 恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は滑らかな写像である.

滑らかな写像の重要な性質として以下がある.

Lemma 3.5

滑らかな写像の合成は滑らかな写像である.

Proof: $(X, \mathcal{D}_X), (Y, \mathcal{D}_Y), (Z, \mathcal{D}_Z)$ を微分空間とし, $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ を滑らかな写像とする.
f は滑らかな写像であるため, 任意の $P \in \mathcal{D}_X$ に対し,

$$f \circ P \in \mathcal{D}_Y$$

が成立し, g も滑らかな写像であるため,

$$g \circ f \circ P \in \mathcal{D}_Z$$

が成立する. したがって, $g \circ f$ は滑らかな写像である. ■

微分空間と滑らかな写像のなす圏を **Diff** と表す.

4 離散微分構造と密着微分構造

微分構造の例として, 離散微分構造と密着微分構造をみる.

Definition 4.1 (局所定値パラメトリゼーション)

X を空でない集合とする. パラメトリゼーション $P\colon U \to X$ が,

$$\forall u \in U,\ \exists V : u \text{ の開近傍 } s.t.\ P|_V \text{は定値写像}$$

をみたすとき, 局所定値パラメトリゼーション *(locally constant parametrization)* という.

Definition 4.2 (離散微分構造)

X を空でない集合とし, $\mathcal{D} = \{P \in Param(X) \mid P \text{ は局所定値パラメトリゼーション }\}$ とすると, $(X, \mathcal{D})$ は微分構造となる. この微分構造を離散微分構造 *(discrete diffeology)* といい, 離散微分構造が与えられた微分空間を離散微分空間という.

Lemma 4.3

離散微分空間の間の写像は滑らかな写像となる.

Proof: $(X, \mathcal{D}_X), (Y, \mathcal{D}_Y)$ を離散微分空間とし, $f\colon X \to Y$ を写像とする.
任意の $(P\colon U \to X) \in \mathcal{D}_X$ に対し,

$$\forall u \in U,\ \exists V : u \text{ の開近傍 } s.t.\ P|_V \text{は定値写像}$$

が成立する. よって,

$$\begin{array}{cccccc} f \circ P|_V : & V & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \\ & \cup\!\!\!\!\! \cdot & & \cup\!\!\!\!\! \cdot & & \cup\!\!\!\!\! \cdot \\ & u & \longmapsto & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

は定値写像である. よって, $f \circ P$ は局所定値パラメトリゼーションとなるため, $f \circ P \in \mathcal{D}_Y$ が成立する. したがって, f は滑らかな写像である. ■

より条件を緩め, 離散微分空間からの写像は滑らかな写像であることも同様にわかる.

Definition 4.4 (密着微分構造)

X を空でない集合とし, $\mathcal{D} = \{P\colon U \to X \mid P \in Param(X)\}$ とすると, $(X, \mathcal{D})$ は微分空間となる. この微分構造を密着微分構造 *(coarse diffeology)* という.

Lemma 4.5

密着微分空間の間の写像は滑らかな写像となる.

Proof: $(X, \mathcal{D}_X), (Y, \mathcal{D}_Y)$ を密着微分空間とし, $f\colon X \to Y$ を写像とする.
密着微分構造の定義より,

$$\forall P \in \mathcal{D}_X,\ f \circ P \in \mathcal{D}_Y$$

となるため, f は滑らかな写像である. ■

より条件を緩め, 密着微分空間への写像は滑らかな写像であることも同様にわかる.

5　充満忠実関手

今までの例が充満忠実関手を定めることをみる．まず, 充満忠実関手の定義をする．

Definition 5.1 (充満忠実関手)

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 圏とする. 関手 $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ は任意の $X, Y \in ob(\mathscr{A})$ に対し, 写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X),F(Y)) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

が全射であるとき充満といい, 単射であるとき忠実といい, 全単射であるとき充満忠実という．

集合と写像のなす圏を **Set** と表す.

$X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Set})$ に対し, 離散位相空間を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ に対し, f を離散位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の連続写像とみなしたものを対応させる関手 $D_T\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ が定まる.

$X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Set})$ に対し, 密着位相空間を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ に対し, f を密着位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の連続写像とみなしたものを対応させる関手 $I_T\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ が定まる.

$X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Set})$ に対し, 離散微分空間を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ に対し, f を離散微分空間 $(X, \mathcal{D}_X)$ と $(Y, \mathcal{D}_Y)$ の間の滑らかな写像とみなしたものを対応させる関手 $D_D\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Diff}$ が定まる.

$X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Set})$ に対し, 密着微分空間を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ に対し, f を密着微分空間 $(X, \mathcal{D}_X)$ と $(Y, \mathcal{D}_Y)$ の間の滑らかな写像とみなしたものを対応させる関手 $C_D\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Diff}$ が定まる.

2 章と 4 章の議論により, D_T, I_T, D_D, C_D は充満忠実関手である.

6　随伴関手

今までの例が随伴関手を定めることをみる．まず, 随伴関手の定義をする.

Definition 6.1 (随伴関手)

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を圏とし, $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ を関手とする. $X \in ob(\mathscr{A}), Y \in ob(\mathscr{B})$ に対し, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, G(Y))$$

が存在するとき, F は G の左随伴関手といい, G は F の右随伴関手といい, $F \dashv G$ と表す.

$(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{ob}(\mathbf{Top})$ に対し, 台集合 X を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,Y)$ に対し, f を X から Y への単なる写像とみなしたものを対応させる忘却関手 $U_T\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ が定まる.

$(X, \mathcal{D}_X) \in ob(\mathbf{Diff})$ に対し, 台集合 X を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(X,Y)$ に対し, f を X から Y への単なる写像とみなしたものを対応させる忘却関手 $U_D\colon \mathbf{Diff} \to \mathbf{Set}$ が定まる.

U_T, U_D は充満関手である。

Theorem 6.2

$D_T \dashv U_T \dashv I_T$

Proof: $\phi_{X,Y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(D_T(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_T(Y))$ を連続写像 $h \colon D_T(X) \to Y$ に対し, 単なる写像とみなした $h \colon X \to U_T(Y)$ を対応させる写像とする.

離散位相空間からの写像は連続写像であるため, $\phi_{X,Y}$ は全単射であり, $f \colon Y \to Y'$ と $g \colon X' \to X$ に対し, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(D_T(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_T(Y)) \arrow[d, "U_T(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(D_T(X), Y') \arrow[r, "\phi_{X,Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_T(Y'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(D_T(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "-\circ D_T(g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_T(Y)) \arrow[d, "-\circ g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(D_T(X'), Y) \arrow[r, "\phi_{X',Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X', U_T(Y))
\end{tikzcd}$$

は可換であるため, $D_T \dashv U_T$ である.

$\psi_{X,Y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_T(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, I_T(Y))$ を写像 $h \colon U_T(X) \to Y$ に対し, 連続写像とみなした $h \colon X \to I_T(Y)$ を対応させる写像とする.

密着位相空間への写像は連続写像であるため, $\psi_{X,Y}$ は全単射であり, $f \colon Y \to Y'$ と $g \colon X' \to X$ に対し, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_T(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, I_T(Y)) \arrow[d, "I_T(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_T(X), Y') \arrow[r, "\psi_{X,Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, I_T(Y'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_T(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "-\circ U_T(g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, U_T(Y)) \arrow[d, "-\circ g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_T(X'), Y) \arrow[r, "\psi_{X',Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X', I_T(Y))
\end{tikzcd}$$

は可換であるため, $U_T \dashv I_T$ である.

したがって, $D_T \dashv U_T \dashv I_T$ が成立する. ■

Theorem 6.3

$D_D \dashv U_D \dashv C_D$

Proof: $\phi_{X,Y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(D_D(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_D(Y))$ を滑らかな写像 $h \colon D_D(X) \to Y$ に対し, 単なる写像とみなした $h \colon X \to U_D(Y)$ を対応させる写像とする.

離散微分空間からの写像は滑らかな写像であるため, $\phi_{X,Y}$ は全単射であり, $f \colon Y \to Y'$ と $g \colon X' \to X$ に対し, 図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(D_D(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_D(Y)) \arrow[d, "U_D(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(D_D(X), Y') \arrow[r, "\phi_{X,Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_D(Y'))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(D_D(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "-\circ D_D(g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U_D(Y)) \arrow[d, "-\circ g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(D_D(X'), Y) \arrow[r, "\phi_{X',Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X', U_D(Y))
\end{tikzcd}
$$

は可換であるため, $D_D \dashv U_D$ である.

$\psi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_D(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(X, I_D(Y))$ を写像 $h\colon U_D(X) \to Y$ に対し, 滑らかな写像とみなした $h\colon X \to C_D(Y)$ を対応させる写像とする.

密着微分空間への写像は滑らかな写像であるため, $\psi_{X,Y}$ は全単射であり, $f\colon Y \to Y'$ と $g\colon X' \to X$ に対し, 図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_D(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(X, I_D(Y)) \arrow[d, "C_D(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_D(X), Y') \arrow[r, "\psi_{X,Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(X, I_D(Y'))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_D(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "-\circ U_D(g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(X, U_D(Y)) \arrow[d, "-\circ g"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U_D(X'), Y) \arrow[r, "\psi_{X',Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Diff}}(X', C_D(Y))
\end{tikzcd}
$$

は可換であるため, $U_D \dashv C_D$ である.

したがって, $D_D \dashv U_D \dashv C_D$ が成立する. ■

参考文献

[1] Patrick Iglesias-zemmour (著)・「Diffeology」・Amer Mathematical Society・2013