次数付き代数に現れる随伴

@kyo_math1729

概要

次数付き代数を定義してその理論の中で出てくるいくつかの随伴についてまとめる．簡単のためある程度の有限次元性を仮定して話を進める．テンソル代数や外積代数の定義等の知識や圏論の基本的知識は仮定する．

目次

1 準備：次数付き代数

まず初めに次数付き代数とその基本的な用語の定義をまとめる．$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とし，以下特に断らない限り線形空間は $\mathbb{K}$ 上のものであるとする．

定義 1.1 (次数付き代数)**.** $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ を線形空間の列とする．線形空間

$$A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$$

上に以下を満たす積 $A \times A \to A$ が定義されているとき A を $\mathbb{K}$ 上次数付き代数，または単に次数付き代数 (graded algebra) という．

(1) $A^k A^l \subset A^{k+l}$
(2) $x(yz) = (xy)z$
(3) $x(y+z) = xy + xz$, $(x+y)z = xz + yz$
(4) 単位元 $1 \in A^0$ をもつ

次数付き代数 A がさらに次を満たすとき可換 (commutative) であるという[*1].

(5) $x \in A^k, y \in A^l \Rightarrow xy = (-1)^{kl} yx$

可換次数付き代数 (commutative graded algebra) のことを略して c.g.a. とよぶこともある．次数付き代数に関する用語をいくつか定義しておこう．

定義 1.2. A を次数付き代数とする．

(1) 各 A^k が有限次元であるとき A は有限型 (finite type) であるという．
(2) $A^0 = \mathbb{K}$ のとき A は連結 (connected) であるという．
(3) 直和因子の元 $x \in A^k$ を斉次元 (homogeneous element) という．$x \in A^k$ なる斉次元 x を次数 k の元といい $|x| = k$ や $\deg(x) = k$ などと書く．

この記号を用いると次数付き代数の可換性は斉次元 x, y について

$$xy = (-1)^{|x||y|} yx$$

のように書ける．

例 1.3. 線形空間 V に対し V の外積代数

$$E(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k V$$

は可換次数付き代数である．また V のテンソル代数

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V$$

は非可換な次数付き代数である．

定義 1.4 (g.a. 準同型)**.** A, B を次数付き代数とする．線形写像 $f\colon A \to B$ は以下を満たすとき g.a. 準同型という．

(1) $f(A^k) \subset B^k$
(2) $f(xy) = f(x)f(y)$
(3) $f(1) = 1$

これにより次数付き代数の圏を考えることができる．具体的には，今回は技術上の都合により以下のように定義する．

定義 1.5. 有限型連結可換次数付き代数を対象とし g.a. 準同型を射とする圏を **CGA** と書く．

[*1] 多元環として可換であることとは異なるため注意が必要である．これを強調するために次数付き代数の意味で可換などということもある．

2　次数付き代数とベクトル空間の随伴

例 1.3 によると外積代数は可換次数付き代数なのであった．この可換次数付き代数は次の普遍性を持っている．

命題 2.1. V は有限次元線形空間，A は可換次数付き代数とする．任意の線形写像 $f\colon V \to A^1$ について以下の図式を可換にする g.a. 準同型 $\bar{f}\colon E(V) \to A$ がただ一つ存在する．ただし縦の射は包含である．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A^1 \arrow[d] \\ E(V) \arrow[r, "\bar{f}"'] & A \end{tikzcd}$$

Proof. $\bar{f}$ の存在は $\bar{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = f(v_1)\cdots f(v_k)$ と定めることでわかる．

逆に $\bar{f}$ が図式を可換にする g.a. 準同型であれば V の基底 $\{x_i\}$ について

$$\bar{f}(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}) = f(x_{i_1})\cdots f(x_{i_k})$$

となるので一意性もわかる． □

この命題を圏論的に書き換える．まず次の圏を用意する．

定義 2.2. 有限次元線形空間を対象とし線形写像を射とする圏を **Vect** と書く．

関手 $E\colon \mathbf{Vect} \to \mathbf{CGA}$ と関手 $()^1\colon \mathbf{CGA} \to \mathbf{Vect}$ を次で定義する．

- 対象 $V \in \mathbf{Vect}$ に対し対象 $E(V) \in \mathbf{CGA}$ は外積代数
- **Vect** の射 $f\colon V \to W$ に対し **CGA** の射 $E(f)\colon E(V) \to E(W)$ は f の自然な拡張

- 対象 $A \in \mathbf{CGA}$ に対し対象 $A^1 \in \mathbf{Vect}$ は次数 1 の空間
- **CGA** の射 $f\colon A \to B$ に対し **Vect** の射 $f^1\colon A^1 \to B^1$ は f の制限

$E(f)\colon E(V) \to E(W)$ は $f\colon V \to \wedge^1 W$ から命題 2.1 によって得られる g.a. 準同型であるともいえる．以上の準備の下で命題 2.1 は次のように書ける．

系 2.3. E と $()^1$ は随伴 $E \dashv ()^1$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vect} \arrow[r, bend left, "E"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{CGA} \arrow[l, bend left, "()^1"] \end{tikzcd}$$

Proof. 命題 2.1 は $V \in \mathbf{Vect}$ について恒等写像 $V \to \wedge^1 V = E(V)^1$ がコンマ圏 $V \downarrow ()^1$ の始対象であることをいっている. □

なおこの随伴の余単位は可換次数付き代数 $A \in \mathbf{CGA}$ について

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \mapsto x_1 \cdots x_k$$

なる g.a. 準同型 $E(A^1) \to A$ を成分にもつが，この写像は一般には包含ではない.

3 次数付き代数と次数付きベクトル空間の随伴

命題 2.1 の結果を一般化，あるいは系 2.3 の随伴を広げることを考えよう．ベクトル空間の一般化として次の定義をする.

定義 3.1 (次数付きベクトル空間)**.** $\{V^k\}_{k=0}^{\infty}$ を線形空間の列とする．線形空間

$$V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^k$$

を次数付きベクトル空間 (graded vector space) という．次数付き加群 (graded module) ということもある.

定義 1.2 の用語は次数付きベクトル空間に対しても用いる．ただし連結性については次数付きベクトル空間では以下のように定義する. *2

定義 3.2. 次数付きベクトル空間 V が $V^0 = 0$ を満たすとき V は連結 (connected) であるという.

次数付き代数は当然次数付きベクトル空間でもある．逆に次数付きベクトル空間が与えられればそこから次のように可換次数付き代数が得られる.

定義 3.3. V を次数付きベクトル空間とするとき可換次数付き代数 $\wedge V$ を次のように定義する.

$$\wedge V = T(V)/I$$

ただし $I \subset T(V)$ は次の集合から生成される両側イデアルである.

$$\left\{ x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x \mid x, y \in V \text{ は斉次元} \right\}$$

$\wedge V$ を V から自由生成された可換次数付き代数という.

なお $\wedge V$ の次数付けは $(\wedge V)^k$ を次の集合が張る $\wedge V$ の部分線形空間として定められる.

$$\left\{ [x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \in \wedge V \mid x_1, \cdots, x_n \in V \text{ は斉次元で } |x_1| + \cdots + |x_n| = k \right\}$$

特に V の斉次元 $x_1, \cdots, x_n$ について $|[x_1] \cdots [x_n]| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ となっている.

*2 理論的にはホモトピー群に対応するものを意図している.

補題 3.4. $x \mapsto [x]$ で定まる自然な線形写像 $V \to \wedge V$ は単射である．

Proof. $x \in V$ が $[x] = 0$ であるとすると $x \in I$ である．ここで $V, I \subset T(V)$ について I の定義から $V \cap I = 0$ なので $x = 0$ がわかる． □

以下ではこの補題から $x \in V$ と $[x] \in \wedge V$ を同一視して $V \subset \wedge V$ とみなす．

例 3.5. 次数付きベクトル空間 V の次数 1 以外の空間が 0 であるとき $\wedge V$ は V^1 の外積代数に一致する．

$$\wedge V = E(V^1)$$

この意味で可換次数付き代数の自由生成は外積代数の構成の一般化だと思える．また次数付きベクトル空間の連結性を定義 3.2 のように定義する理由は以下の命題による．

命題 3.6. 次数付きベクトル空間 V が連結ならば次数付き代数 $\wedge V$ も連結である．

Proof. V は連結から $T(V)^0 = \mathbb{K}$ である．よって $\wedge V$ の構成から

$$(\wedge V)^0 = T(V)^0/(I \cap T(V)^0) = \mathbb{K}/0 = \mathbb{K}$$

□

定義 3.7 (次数を保つ写像)**.** V, W を次数付きベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V \to W$ は $f(V^k) \subset W^k$ を満たすとき次数を保つという．

これらの言葉を用いると外積代数のときの命題 2.1 に対応する次の命題が成り立つ．

命題 3.8. V は次数付きベクトル空間，A は可換次数付き代数とする．任意の次数を保つ線形写像 $f\colon V \to A$ について以下の図式を可換にする g.a. 準同型 $\bar{f}\colon \wedge V \to A$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \\
\wedge V \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof. $v_1, \cdots, v_n \in V$ について $\bar{f}(v_1 \cdots v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n)$ と定義すれば $\bar{f}$ は積を保つ線形写像である．また f が次数を保つことと $\wedge V$ の次数付けから

$$\begin{aligned}
|\bar{f}(v_1 \cdots v_n)| &= |f(v_1) \cdots f(v_n)| \\
&= |f(v_1)| + \cdots + |f(v_n)| \\
&= |v_1| + \cdots + |v_n| \\
&= |v_1 \cdots v_n|
\end{aligned}$$

となるので $\bar{f}$ は次数を保つ．つまり $\bar{f}$ は g.a. 準同型である．また $\bar{f}$ の一意性は命題 2.1 と同様に示せる．

なお $\bar{f}$ の well-defined 性は次の補題からわかる． □

補題 3.9. A, B を多元環として $I \subset A$ を $S \subset A$ から生成される両側イデアルとする．このとき多元環準同型 $f\colon A \to B$ が $f(S) = 0$ を満たせば $\bar{f}([x]) = f(x)$ で定まる写像 $\bar{f}\colon A/I \to B$ は well-defined である．

命題 2.1 と同様に命題 3.8 も圏論を用いて定式化できる．まず次の圏を用意する．

定義 3.10. 有限型連結次数付きベクトル空間を対象とし次数を保つ線形写像を射とする圏を **GVect** と書く．

また関手 $\wedge\colon \mathbf{GVect} \to \mathbf{CGA}$ と $U\colon \mathbf{CGA} \to \mathbf{GVect}$ を次のように定義する．

- 対象 $V \in \mathbf{GVect}$ に対し対象 $\wedge V \in \mathbf{CGA}$ は自由生成
- $\mathbf{GVect}$ の射 $f\colon V \to W$ に対し $\mathbf{CGA}$ の射 $\wedge f\colon \wedge V \to \wedge W$ は f の自然な拡張

- 対象 $A \in \mathbf{CGA}$ に対し $U(A) = A^+ \in \mathbf{GVect}$
- $\mathbf{CGA}$ の射 $f\colon A \to B$ に対し $U(f)\colon U(A) \to U(B)$ は f の制限

ただし可換次数付き代数 A に対して $A^+ \subset A$ は以下で定義される．

$$A^+ = \bigoplus_{k>0} A^k$$

また関手 $\wedge$ には以下の補題が用いられている．

補題 3.11. 次数付きベクトル空間 V が有限型連結ならば次数付き代数 $\wedge V$ も有限型連結である．

Proof. 命題 3.6 より $\wedge V$ は連結なので有限型であることを示せばよい．
各 V^k の基底を集めて V の基底 x_i をとる．このとき $(\wedge V)^k$ は部分集合

$$S = \{x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}\ ,\ |x_{i_1}| + \cdots + |x_{i_n}| = k\}$$

で張られる．V が連結であることから基底は $|x_{i_j}| \geq 1$ であり，これから $|x_{i_1}| + \cdots + |x_{i_n}| = k$ なる n は $n \leq k$ であることがわかる．各 n ごとに

$$\{x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid |x_{i_1}| + \cdots + |x_{i_n}| = k\}$$

は有限集合なので S は有限集合である．よって $(\wedge V)^k$ は有限集合で張られるので有限次元であり，$\wedge V$ は有限型である． □

以上の用語の下で命題 3.8 は次のように言い換えられる．

系 3.12. $\wedge$ と U は随伴 $\wedge \dashv U$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{GVect} \arrow[rr, bend left, "\wedge"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{CGA} \arrow[ll, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

Proof. 命題 3.8 は $V \in \mathbf{GVect}$ について包含写像 $V \to \wedge V = U(\wedge V)$ がコンマ圏 $V \downarrow U$ の始対象であることをいっている． □

可換次数付き代数 A に対して $U(A) = A^+$ は演算と単位元の構造を忘れたものであり，U は忘却関手とみれる．よって系 3.12 の意味で $\wedge$ は「自由関手」である．

4　次数付きベクトル空間とベクトル空間の随伴

例 3.5 では可換次数付き代数の自由生成が外積代数の一般化だと思えることを見た．実はここからも随伴を取り出すことができる．

関手 $G_1 \colon \mathbf{Vect} \to \mathbf{GVect}$ と $()^1 \colon \mathbf{GVect} \to \mathbf{Vect}$ を次のように定義する[*3]．

- 対象 $V \in \mathbf{Vect}$ に対し対象 $G_1(V) \in \mathbf{GVect}$ は以下で定まる次数付きベクトル空間

$$(G_1(V))^k = \begin{cases} V & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 1) \end{cases}$$

- $\mathbf{Vect}$ の射 $f \colon V \to W$ に対し $\mathbf{GVect}$ の射 $G_1(f) \colon G_1(V) \to G_1(W)$ は V 上では f となる次数を保つ線形写像

- 対象 $V \in \mathbf{GVect}$ に対し対象 $V^1 \in \mathbf{Vect}$ は次数 1 の空間
- $\mathbf{GVect}$ の射 $f \colon V \to W$ に対し $\mathbf{Vect}$ の射 $f^1 \colon V^1 \to W^1$ は f の制限

このとき次の命題が成り立つことが容易に確認できる．

命題 4.1. V は有限次元線形空間，W は次数付きベクトル空間とする．任意の線形写像 $f \colon V \to W^1$ について以下の図式を可換にする次数を保つ線形写像 $\bar{f} \colon G_1(V) \to W$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W^1 \arrow[d] \\ G_1(V) \arrow[r, "\bar{f}"'] & W \end{tikzcd}$$

---

*3 ここでの $()^1$ は系 2.3 の $()^1$ とは別の関手だが記号の濫用で同じ記号を用いている．

系 4.2. G_1 と $()^1$ は随伴 $G_1 \dashv ()^1$ である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Vect} \arrow[r, bend left, "G_1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{GVect} \arrow[l, bend left, "()^1"]
\end{tikzcd}$$

このとき系 2.3 の随伴は系 3.12 と系 4.2 の随伴の合成になっている.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Vect} \arrow[r, bend left, "G_1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[rr, bend left=50, "E"] & \mathbf{GVect} \arrow[l, bend left, "()^1"] \arrow[r, bend left, "\wedge"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{CGA} \arrow[l, bend left, "U"] \arrow[ll, bend left=50, "()^1"]
\end{tikzcd}$$

参考文献

[1] Yves Felix,"Algebraic Models in Geometry",Oxford Graduate Texts in Mathematics

[2] Y. Felix, S.Halperin, J.C.Thomas, "Rational Homotopy Theory", Springer

[3] 森田茂之,「特性類と幾何学」, 岩波書店