Brown Representability Theorem

秋桜

概要

任意の Ω-spectrum が基点付き CW 複体の圏上の簡約コホモロジー論を定める．ここで逆に基点付き CW 複体の圏上の任意の簡約コホモロジー論はある Ω-spectrum により表現されるかという自然な疑問がある．この疑問に肯定的な解答を与えるのが Brown representability theorem である．また, 特異コホモロジー群が Eilenberg-MacLane 空間により表現されるということが具体的な計算により得られるが, Brown representability theorem はその別証明を与える．

本稿は, 簡約懸垂をとる関手とループ空間をとる関手が互いに随伴関手となることの説明から始め, Brown representability theorem の証明を与える．

1 Notation

空間の圏は射集合をホモトピックで割ったものとする.

単位閉区間 [0,1] を I と表す.

基点付き位相空間 $(X, x), (Y, y)$ の基点を保つ連続写像のホモトピー類の集合を $\langle X, Y \rangle$ と表す.

$O = \varinjlim O(n)$ と表し, $U = \varinjlim U(n)$ と表す.

集合と写像のなす圏を **Set** と表す.

基点付き集合と基点を保つ写像のなす圏を $\mathbf{Set}_*$ と表す.

基点付き位相空間と基点を保つ連続写像のなす圏を $\mathbf{Top}_*$ と表す.

基点付き CW 複体のなす $\mathbf{Top}_*$ の充満部分圏を $\mathbf{CW}_*$ と表す.

基点付き連結 CW 複体のなす $\mathbf{CW}_*$ の充満部分圏を $\mathbf{ConCW}_*$ と表す.

アーベル群と群準同型写像のなす圏を **Ab** と表す.

Top の間の錐をとる関手を $C\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ と表す.

$\mathbf{Set}_*$ での写像 f の核の元は f で基点にうつる元とする.

2 Reduced Suspension and Loop Space

この章では, 簡約懸垂をとる関手とループ空間をとる関手が互いに随伴関手となることを示し, Puppe sequence を紹介する.

2.1 Adjoint Functor

この節では簡約懸垂をとる関手とループ空間をとる関手の随伴を紹介する.

位相空間 X に対し, $X \times I$ の中で $X \times \{0\}$ と $X \times \{1\}$ を 1 点に潰した位相空間を X の懸垂といい, SX と表す. また, 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対し, $f \times \mathrm{id}_I\colon X \times I \to Y \times I$ の商写像により, $Sf\colon SX \to SY$ が定まる. これによって, 関手 $S\colon$ **Top**$\to$**Top** を得る. さらに, 基点付き空間 $(X, *)$ に対し, $X \times I$ の中で $X \times \{0\}$ と $X \times \{1\}$ を 1 点に潰し, $I \times \{*\}$ を基点に潰した基点付き位相空間を X の簡約懸垂といい, ΣX と表す. また, 連続写像 $f\colon X \to Y$ に対し, $f \times \mathrm{id}_I\colon X \times I \to Y \times I$ の商写像により, $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$ が定まる. これによって, 関手 $\Sigma\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ を得る.
基点付き位相空間 (X, x) に対し, ループ空間 ΩX を対応させ[*1], 基点を保つ連続写像 f に対し,

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(f) & : & (\Omega X, c_x) & \longrightarrow & (\Omega Y, c_y) \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & [m] & \longmapsto & [f \circ m] \end{array}$$

対応させることにより, 関手 $\Omega\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ を得る.

Theorem 2.1

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Top}_* \arrow[r, shift left=2, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Top}_* \arrow[l, shift left=2, "\Omega"] \end{tikzcd}$$

証明は容易なので読者の演習問題とする.

2.2 Puppe Sequence

この節では, Puppe sequence を紹介する.

基点付き CW 対 (X, A) に対し, 錐を貼り合わせることで列

$$A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA \hookrightarrow (X \cup CA) \cup CX \hookrightarrow ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \hookrightarrow \dots$$

を得る. この図式とホモトピー同値を除いて一致する列

$$A \longrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma(X/A) \longrightarrow \Sigma^2 A \longrightarrow \dots$$

を Puppe sequence という.
Puppe sequence は自然性をもつ. つまり,CW 対の連続写像 $(X, A) \to (Y, B)$ に対し, 以下のホモ

[*1] コンパクト開位相の相対位相を入れる.

トピー可換図式

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A & \longrightarrow & \Sigma A & \longrightarrow & \Sigma X & \longrightarrow & \Sigma(X/A) & \longrightarrow & \Sigma^2 A & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y/B & \longrightarrow & \Sigma B & \longrightarrow & \Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma(Y/B) & \longrightarrow & \Sigma^2 B & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

を得る.

3 Reduced cohomology theory and Ω-spectrum

この章では, 簡約コホモロジー論の 2 つの定義を紹介し, 様々な観察の上で Ω-spectrum を定義し, 任意の Ω-spectrum は $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論を定めることを示す.

3.1 Reduced Cohomology Theory

この節では, $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論の定義を 2 つ紹介し, その同値性について説明する.

Definition 3.1 (簡約コホモロジー論)

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論とは, 整数 n に対し, 関手 $\tilde{h^n}\colon\ \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ と CW 対 (X,A) に対し, 自然な双対境界準同型写像 $\delta^n\colon \tilde{h^n}(A) \to \tilde{h^{n+1}}(X/A)$ が与えられ, 以下をみたすものである.

(ホモトピー公理) $f \simeq g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}}((X,x),(Y,y))$ と整数 n に対し, $\tilde{h^n}(f) = \tilde{h^n}(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\tilde{h^n}(Y), \tilde{h^n}(X))$

(完全列公理) CW 対 (X,A) に対し, 長完全列

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h^n}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h^n}(q)} \tilde{h^n}(X) \xrightarrow{\tilde{h^n}(i)} \tilde{h^n}(A) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h^{n+1}}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h^{n+1}}(i)} \dots$$

が存在する.

(ウェッジ和公理) 包含写像 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ は整数 n に対し, 同型 $\prod_\alpha \tilde{h^n}(i_\alpha)\colon \tilde{h^n}\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{h^n}(X_\alpha)$ を誘導する.

Definition 3.2 (簡約コホモロジー論)

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論とは, 整数 n に対し, 関手 $\tilde{h^n}\colon\ \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ と $X \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, 自然同型 $\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$ が与えられ, 以下をみたすものである.

(ホモトピー公理) $f \simeq g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}}((X,x),(Y,y))$ と整数 n に対し, $\tilde{h^n}(f) = \tilde{h^n}(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\tilde{h^n}(Y), \tilde{h^n}(X))$

(完全列公理) CW 対 (X, A) に対し, 列

$$\tilde{h^n}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h^n}(q)} \tilde{h^n}(X) \xrightarrow{\tilde{h^n}(i)} \tilde{h^n}(A)$$

は完全列である.

(ウェッジ和公理) 包含写像 $i_\alpha \colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ は整数 n に対し, 同型 $\prod_\alpha \tilde{h^n}(i_\alpha) \colon \tilde{h^n}\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{h^n}(X_\alpha)$ を誘導する.

この 2 つの定義は同値である.

実際, **Definition 3.1** を仮定すると, CW 対 (CX, X) に対し, 完全列公理を用いることで自然同型 $\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$ が得られる[*2]. 逆に, **Definition 3.2** を仮定すると, Puppe sequence を考えることで **Definition 3.1** をみたす.

3.2 Ω-spectrum

この節では, 様々な観察の上で Ω-spectrum を定義し, その例をあげる.

ループ空間を考えることでホモトピー群の次数を下げることができる. 実際, 任意の $n \geq 0$ と $X \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し,

$$\pi_{n+1}(X) = \langle S^{n+1}, X \rangle = \langle SS^n, X \rangle \cong \langle \Sigma S, X \rangle \cong \langle S^n, \Omega X \rangle = \pi_n(\Omega X)$$

となる. 更に, $K, L \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, 弱ホモトピー同値 $K \to \Omega L$ が存在すると, 任意の $X \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, $\langle X, K \rangle \cong \langle X, \Omega L \rangle$ となり, $\Sigma \dashv \Omega$ より, $\langle X, \Omega L \rangle \cong \langle \Sigma X, L \rangle$ となるため, $\langle X, K \rangle$ に $\langle \Sigma X, L \rangle$ の群構造が定まる[*3].

以上によりループ空間, もう少し詳しく, ループ空間への弱ホモトピー同値を考えることが有用であることがわかった. そこで, 以下のように Ω-spectrum を定義する.

Definition 3.3 (Ω-*spectrum*)

各整数 n に対し, 弱ホモトピー同値 $K_n \to \Omega K_{n+1}$ が存在する基点付き CW 複体の列 $(K_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ を Ω-spectrum という.

Ω-spectrum の重要な例でもある Eilenberg-MacLane 空間を定義する.

[*2] CX は可縮であることと $CX/X \simeq \Sigma X$ であることを用いる.

[*3] $f, g \in \langle \Sigma X, L \rangle$ に対し, $f + g$ を真ん中を潰す $c \colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$ と $f \vee g \colon \Sigma X \vee \Sigma X \to L$ の合成で定める.

Definition 3.4 (*Eilenberg-MacLane* 空間)

自明でない群 G と自然数 n に対し, 連結な位相空間 X で

$$\pi_i(X) = \begin{cases} G & (i = n) \\ 0 & (i \neq n) \end{cases}$$

となるものを (G, n) 型 Eilenberg-MacLane 空間といい, $K(G, n)$ と表す.

Example 3.5 (*Eilenberg-MacLane spectrum*)

基点付き CW 複体である Eilenberg-MacLane 空間の列 $(K(G,n))_{n\in\mathbf{Z}}$ は Ω-*spectrum* である.

実際,

$$\begin{aligned}
\pi_n(\Omega K(G, n+1)) &= \langle S^n, \Omega K(G, n+1)\rangle \\
&\cong \langle \Sigma S^n, K(G, n+1)\rangle \\
&= \langle S^{n+1}, K(G, n+1)\rangle \\
&= \pi_{n+1}(K(G, n+1)) \\
&= G
\end{aligned}$$

となるため, $\Omega K(G, n+1)$ は (G, n) 型 Eilenberg-MacLane 空間である.

Eilenberg-MacLane 空間の他にも無限次元直交群 O や無限次元ユニタリ群 U は Bott 周期性定理より, 弱ホモトピー同値 $O \to \Omega^8 O$ や $U \to \Omega^2 U$ が存在するため, 周期的な Ω-spectrum が得られる[*4].

3.3 Ω-spectrum Define Reduced Cohomology Theory

この節では, 任意の Ω-spectrum は $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論を定めることを示す.

Theorem 3.6

任意の Ω-*spectrum* $(K_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ は各 n に対し, 関手を $\tilde{h^n}(X) = \langle X, K_n\rangle$ と定めることで $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論を定める.

Proof: ホモトピー公理と完全列公理とウェッジ和公理をみたすことを示せばよい.

基点を保つ連続写像 $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ は各 n に対し, 準同型写像

$$\begin{array}{cccc}
\tilde{h^n}(f) \ : & \langle Y, K_n\rangle \cong \langle Y, \Omega K_{n+1}\rangle & \longrightarrow & \langle X, K_n\rangle \cong \langle X, \Omega K_{n+1}\rangle \\
& \cup & & \cup \\
& [m] & \longmapsto & [m \circ f]
\end{array}$$

を誘導し, $f \simeq g$ ならば $\tilde{h^n}(f) = \tilde{h^n}(g)$ となるため, ホモトピー公理をみたす.

[*4] K 理論などで重要だが本稿ではこれ以上立ち入らないことにする.

包含写像 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ は整数 n に対し, 同型写像

$$\begin{array}{ccccc} \prod_\alpha \tilde{h^n}(i_\alpha) & : & \left\langle \bigvee_\alpha X_\alpha, K_n \right\rangle \cong \left\langle \bigvee_\alpha X_\alpha, \Omega K_{n+1} \right\rangle & \longrightarrow & \prod_\alpha \langle X_\alpha, K_n\rangle \cong \prod_\alpha \langle X_\alpha, \Omega K_{n+1}\rangle \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & [m] & \longmapsto & \prod_\alpha [m|_{X_\alpha \circ i_\alpha}] \end{array}$$

を誘導するため, $\prod_\alpha \tilde{h^n}(i_\alpha)\colon \tilde{h^n}\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{h^n}(X_\alpha)$ を得る. よってウェッジ和公理をみたす.

CW 対 (X, A) に対し, Puppe Sequence

$$A \longrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma(X/A) \longrightarrow \Sigma^2 A \longrightarrow \dots$$

を考えると, 列

$$\langle A, K_n\rangle \xleftarrow{-\circ} \langle X, K_n\rangle \xleftarrow{-\circ} \langle X/A, K_n\rangle$$

が完全列となることを示せば完全列公理がみたされる.
$[f] \in \langle X, K_n\rangle$ が $\langle A, K_n\rangle$ の単位元にうつることと f の A への制限が nullhomotopic であることは同値であり, これは, f が $\langle X \cup CA, K_n\rangle \cong \langle X/A, K_n\rangle$ に拡張されることと同値である.
したがって, 長完全列

$$\begin{tikzcd}
\dots & \langle A, K_n\rangle \arrow[l] \arrow[d, equal] & \langle X, K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, equal] & \langle X/A, K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, equal] & \langle \Sigma A, K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, "\simeq"] & \dots \arrow[l] \\
\dots & \langle A, K_n\rangle \arrow[l] \arrow[d, equal] & \langle X, K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, equal] & \langle X/A, K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, equal] & \langle A, \Omega K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, "\simeq"] & \dots \arrow[l] \\
\dots & \langle A, K_n\rangle \arrow[l] \arrow[d, equal] & \langle X, K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, equal] & \langle X/A, K_n\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, equal] & \langle A, K_{n-1}\rangle \arrow[l, "-\circ"'] \arrow[d, equal] & \dots \arrow[l] \\
\dots & \tilde{h}^n(A) \arrow[l] & \tilde{h}^n(X) \arrow[l] & \tilde{h}^n(X/A) \arrow[l] & \tilde{h}^{n-1}(A) \arrow[l] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

が得られる. ■

4 Brown Representability Theorem

Theorem 3.6 で任意の Ω-spectrum は $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論を定めることをみた. この章では Brown Representability Theorem を示し, 任意の $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論はある Ω-spectrum で表現できることを示す.

4.1 Brown Functor

この節では, Brown 関手を定義し, その例をあげる.

Definition 4.1 (*Mayer-Vietoris* 公理)

A, B を $X \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ の部分複体で $A \cup B = X$ となるもの, $h\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ を関手とする. このとき, 以下の条件を Mayer-Vietoris 公理という.

以下の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, hook, "j_A"] \arrow[d, hook, "j_B"'] & A \arrow[d, hook, "k_A"] \\
B \arrow[r, hook, "k_B"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h(A \cap B) & h(A) \arrow[l, "j_A^*"'] \\
h(B) \arrow[u, "j_B^*"] & h(X) \arrow[l, "k_B^*"] \arrow[u, "k_A^*"']
\end{tikzcd}
$$

このとき, $a \in h(A),\ b \in h(B)$ で $j_A^*(a) = j_B^*(b)$ となるならば, $x \in h(X)$ で $k_A^*(x) = a$ かつ $k_B^*(x) = b$ となるものが存在する.

Example 4.2

任意の $K \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}}(-, K)\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ は Mayer-Vietoris 公理をみたす.

Homotopy Extension Property を考えれば容易にわかるため, 読者の演習問題とする.

Definition 4.3 (*Brown* 関手)

ホモトピー公理と Mayer-Vietoris 公理とうウェッジ和公理をみたす関手を Brown 関手という.

Example 4.4

任意の $K \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}}(-, K)\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ は Brown 関手である.

実際, **Theorem 3.6** と同様の議論と **Example 4.2** よりわかる.

Example 4.5

簡約コホモロジー論 $\tilde{h}^n\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ は Brown 関手である.

実際, ホモトピー公理とウェッジ和公理が成立することは簡約コホモロジー論の定義よりわかり, 簡約コホモロジー論は Mayer-Vietoris 完全列を導き*5, その完全性が Mayer-Vietoris 公理にあたる.

Lemma 4.6

$h\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ をウェッジ和公理をみたす関手とする. このとき, $h(\{*\}) = 0$ となる.

Proof: 任意の $X \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, $X = X \vee \{*\}$ である. ここで, $X \hookrightarrow X \vee \{*\}$ が誘導する $h(X \vee \{*\}) \cong h(X) \times h(\{*\}) \to h(X)$ は全単射射影写像であるため, $h(\{*\}) = 0$ となる. ■

*5 容易なホモロジー代数の議論なので読者への演習問題とする.

Lemma 4.7

$h\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ を *Brown* 関手とする．このとき, 任意の *CW* 対 (X, A) に対し, 列

$$h(X \cup CA) \xrightarrow{\psi^*} h(X) \xrightarrow{\phi^*} h(A)$$

は完全列となる．

Proof: $A \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\psi} X \cup CA \simeq X/A$ は全ての元を基点にうつす写像とホモトピックなので, $\mathrm{Im}\ \psi^* \subset \mathrm{Ker}\ \phi^*$ となる．

$X \cup CA$ を CA の真ん中で A のコピーに沿ってわけることで Y と Z に分解する． X は Z の強変位レトラクトであるため, $x \in h(X)$ は $h(Z)$ の元とみなせる．ここで $x \in$Ker ϕ^* とすると, $\tau\colon Y \cap Z \hookrightarrow Z$ に対し, $\tau^*(x)$ は $h(Y \cap Z)$ の基点にうつる．また, $\tau^*(x)$ は $h(Y)$ の基点でもあるため, Mayer-Vietoris 公理より, $h(X \cup CA)$ の元で $x \in h(X)$ にうつるものがとれる．よって, Ker $\phi^* \subset$ Im ψ^* となる． ■

4.2 Brown Representability Theorem

この節では, Brown Representability Theorem の主張を述べ, 証明に必要な定義と補題を説明する．

Theorem 4.8 (*Brown Representability Theorem*)

$h\colon \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ を *Brown* 関手とする．このとき, $K \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$ と $u \in h(K)$ が存在し, 任意の $X \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, 写像

$$\begin{array}{cccc} T_u : & \langle X, K\rangle & \longrightarrow & h(X) \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & [f] & \longmapsto & f^*(u) \end{array}$$

は全単射となる．つまり, *Brown* 関手は表現可能関手である．

上の様な (K, u) を h の普遍対という．普遍対はホモトピー同値を除いて一意である．

次に, 証明に必要な定義と補題を説明する．

Definition 4.9 (*n*-普遍対,π_*-普遍対)

$h\colon \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ を *Brown* 関手とする．このとき, $K \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$ と $u \in h(K)$ の対 (K, u) が以下をみたすとき, h の n-普遍対という．

写像

$$\begin{array}{cccc} T_u : & \langle S^i, K\rangle = \pi_i(K) & \longrightarrow & h(S^i) \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & [f] & \longmapsto & f^*(u) \end{array}$$

は $i < n$ に対し, 全単射であり, $i = n$ に対し, 全射である．

また, 任意の n に対し, n-普遍対のとき, h の π_*-普遍対という．

n-普遍対はホモトピー同値を除いて一意ではないが, π_*-普遍対はホモトピー同値を除いて一意である.

$X \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$ と $x \in h(K)$ の対 (X, x) から π_*-普遍対を構成できる.

Lemma 4.10

$h\colon \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ を *Brown* 関手とする. このとき, $X \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$ と $x \in h(K)$ の対 (X, x) に対し, X を部分複体として含む K で $j\colon X \hookrightarrow K$ に対し, $j^*(u) = x$ となる h の π_*-普遍対 (K, u) が存在する.

Proof: 胞体を接着する帰納的な過程により, X から K を構成する.

まず, $K_1 := X \bigvee_{\alpha \in h(S^1)} S^1_\alpha$ とすると, ウェッジ和公理より, $j_1\colon X \hookrightarrow K_1$ と $k_\beta\colon S^1_\beta \hookrightarrow K_1$ に対し,

$$\begin{array}{ccccccc} j_1^* & : & h(K_1) = h\left(X \bigvee_{\alpha \in h(S^1)} S^1_\alpha\right) & \cong & h(X) \prod_{\alpha \in h(S^1)} h(S^1_\alpha) & \longrightarrow & h(X) \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ & & u_1 & \cong & (x, \dots) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} k_\beta^* & : & h(K_1) = h\left(X \bigvee_{\alpha \in h(S^1)} S^1_\alpha\right) & \cong & h(X) \prod_{\alpha \in h(S^1)} h(S^1_\alpha) & \longrightarrow & h(S^1_\beta) \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ & & u_1 & \cong & (, \dots, \beta, \dots) & \mapsto & \beta \end{array}$$

となるため, $u_1 \in h(K_1)$ が存在して, $j_1^*(u_1) = x$ かつ $k_\beta^*(u_1) = \beta$ となる. よって, 写像

$$\begin{array}{ccccc} T_{u_1} & : & \langle S^1, K_1 \rangle = \pi_1(K_1) & \longrightarrow & h(S^1) \\ & & \cup & & \cup \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u_1) \end{array}$$

は全射となる. したがって, (K_1, u_1) は条件をみたす 1-普遍対である.

X を部分複体として含む K_n で $j_n\colon X \hookrightarrow K_n$ に対し, $j_n^*(u_n) = x$ となる n-普遍対 (K_n, u_n) が構成できたとする.

写像

$$\begin{array}{ccccc} T_{u_n} & : & \langle S^n, K_n \rangle = \pi_n(K_n) & \longrightarrow & h(S^n) \\ & & \cup & & \cup \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u_n) \end{array}$$

の核の元を $g_\alpha\colon S^n \to K_n$ と表し, $g := \bigvee_\alpha g_\alpha\colon \bigvee_\alpha S^n_\alpha \to K_n$ とおく.

C_g を g の簡約写像錐, M_g を g の簡約写像柱とし, $l\colon \bigvee_\alpha S^n_\alpha \hookrightarrow M_g$, $m\colon h(K_n) \hookrightarrow h(C_g)$ とすると, **Lemma 4.7** より, 列

$$h(C_g) \xrightarrow{m^*} h(K_n) \cong h(M_g) \xrightarrow{l^*} h\left(\bigvee_\alpha S^n_\alpha\right)$$

は完全列となる. ここで, K_n は M_g の強変位レトラクトであるため, $u_n \in h(K_n)$ は $h(M_g)$ の元とみなせ, g の定義より, $l^*(u_n) = \{*\}$ となる. よって, 完全性より, $c \in h(C_g)$ が存在して, $m^*(c) = u_n$ となる.

C_g は K_n に f_α で $n+1$-胞体 e_α^{n+1} を接着して得られる．そこで, $K_{n+1} := C_g \bigvee_{\beta \in h(S^{n+1})} S_\beta^{n+1}$ とすると, ウェッジ和公理より, $j_{n+1}\colon C_g \hookrightarrow K_{n+1}$ と $k_\gamma\colon S_\gamma^{n+1} \to K_{n+1}$ に対し,

$$\begin{array}{ccccccc} j_{n+1}^* & : & h(K_{n+1}) = h\left(C_g \bigvee\limits_{\beta \in h(S^{n+1})} S_\beta^{n+1}\right) & \cong & h(C_g) \prod\limits_{\beta \in h(S^{n+1})} h(S_\beta^{n+1}) & \longrightarrow & h(C_g) \\ & & \uplus & & \uplus & & \uplus \\ & & u_{n+1} & \cong & (x, \dots) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} k_\gamma^* & : & h(K_{n+1}) = h\left(C_g \bigvee\limits_{\beta \in h(S^{n+1})} S_\beta^{n+1}\right) & \cong & h(C_g) \prod\limits_{\beta \in h(S^{n+1})} h(S_\beta^{n+1}) & \longrightarrow & h(S_\gamma^{n+1}) \\ & & \uplus & & \uplus & & \uplus \\ & & u_{n+1} & \cong & (, \dots, \gamma, \dots) & \mapsto & \gamma \end{array}$$

となるため, $u_{n+1} \in h(K_{n+1})$ が存在して, $j_{n+1}^*(u_{n+1}) = x$ かつ $k_\gamma^*(u_{n+1}) = \gamma$ となる．よって, 写像

$$\begin{array}{ccccc} T_{u_{n+1}} & : & \langle S^{n+1}, K_{n+1} \rangle = \pi_{n+1}(K_{n+1}) & \longrightarrow & h(S^{n+1}) \\ & & \uplus & & \uplus \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u_{n+1}) \end{array}$$

は全射となる．あとは, $i < n+1$ に対し, 写像

$$\begin{array}{ccccc} T_{u_{n+1}} & : & \langle S^{i}, K_{n+1} \rangle = \pi_{i}(K_{n+1}) & \longrightarrow & h(S^{i}) \\ & & \uplus & & \uplus \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u_{n+1}) \end{array}$$

が全単射であることを示せば (K_{n+1}, u_{n+1}) が条件をみたす $(n+1)$-普遍対となることがわかる．
$r_n\colon K_n \hookrightarrow K_{n+1}$ に対し, 可換図式

$$\begin{tikzcd} \langle S^i, K_n \rangle = \pi_i(K_n) \arrow[rr, "r_n \circ -"] \arrow[dr, "T_{u_n}"'] & & \langle S^i, K_{n+1} \rangle = \pi_i(K_{n+1}) \arrow[dl, "T_{u_{n+1}}"] \\ & h(S^i) & \end{tikzcd}$$

を考える． K_{n+1} は K_n に $n+1$-胞体を接着して得られるため, $r_n \circ -$ は $i < n$ に対し, 全単射であり, $i = n$ に対し, 全射である．また, (K_n, u_n) は n-普遍対であるため, T_{u_n} も $i < n$ に対し, 全単射であり, $i = n$ に対し, 全射である．よって, 図式の可換性より, $T_{u_{n+1}}$ も $i < n$ に対し, 全単射であり, $i = n$ に対し, 全射である．$i = n$ のとき, $r_n \circ -$ の全射性より, $m \circ -(\mathrm{Ker}\ T_{u_n}) = \mathrm{Ker}\ T_{u_{n+1}}$ となる．ここで, K_{n+1} は $\mathrm{Ker}\ T_{u_n}$ の全ての写像を接着写像として構成されていたため, $\mathrm{Ker}\ T_{u_{n+1}}$ は自明となる．したがって, (K_{n+1}, u_{n+1}) が条件をみたす $(n+1)$-普遍対となる．

最後に, $K_1, K_2, \dots$ を用いて条件をみたす π_*-普遍対 (K, u) を構成する．
$K := \bigcup_{i=1}^\infty K_i$ とする．$K_1 \hookrightarrow K_2 \hookrightarrow \dots$ の望遠鏡 $T := \bigcup\limits_{i=1}^\infty (K_i \times [i, i+1])$ の標準射影 $T \twoheadrightarrow K$ はホモトピー同値である[*6]．ここで, $A := \bigcup\limits_{i=1}^\infty (K_{2i-1} \times [2i-1, 2i])$, $B := \bigcup\limits_{i=1}^\infty (K_{2i} \times [2i, 2i+1])$ とすると,

$$A \cup B = T,\ A \cap B = \bigvee_{i=1}^\infty K_i,\ A \simeq \bigvee_{i=1}^\infty K_{2i-1},\ B \simeq \bigvee_{i=1}^\infty K_{2i}$$

[*6] ここで $\times$ は簡約直積を表す.

となる.
ホモトピー公理とウェッジ和公理より, $p\colon K_i \hookrightarrow A$ と $q\colon K_i \hookrightarrow B$ に対し,

$$
\begin{array}{ccccccc}
p^* & : & h(A) \cong h\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} K_{2i-1}\right) & \cong & \prod_{i=1}^{\infty} h(K_{2i-1}) & \longrightarrow & h(K_{2i-1}) \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup \\
 & & a & \cong & (,\dots,u_{2i-1},\dots) & \mapsto & u_{2i-1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
r_{2i-1}^* \circ q^* & : & h(B) \cong h\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} K_{2i}\right) & \cong & \prod_{i=1}^{\infty} h(K_{2i}) & \longrightarrow & h(K_{2i}) & \longrightarrow & h(K_{2i-1}) \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup \\
 & & b & \cong & (,\dots,u_{2i},\dots) & \mapsto & u_{2i} & \mapsto & u_{2i-1}
\end{array}
$$

となるため, $a \in h(A)$ と $b \in h(B)$ が存在し, a と b は u_i にうつる.
ここで, 可換図式

$$
\begin{tikzcd}
A \cap B = \bigvee_{i=1}^{\infty} K_i \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \cong \bigvee_{i=1}^{\infty} K_{2i-1} \arrow[d, hook, "v"] \\
B \simeq \bigvee_{i=1}^{\infty} K_{2i} \arrow[r, hook, "w"'] & A \cup B = T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h(A \cap B) \cong \prod_{i=1}^{\infty} h(K_i) & h(A) \cong \prod_{i=1}^{\infty} h(K_{2i-1}) \arrow[l] \\
h(B) \cong \prod_{i=1}^{\infty} h(K_{2i}) \arrow[u] & h(T) \cong h(K) \arrow[l, "w^*"] \arrow[u, "v^*"']
\end{tikzcd}
$$

に対し, Mayer-Vietoris 公理を用いると, $u \in h(T) \cong h(K)$ が存在し, 任意の $r'_n\colon K_n \hookrightarrow K$ に対し, $r'^*_n(u) = u_n$ となる.

最後に, (K,u) が π_*-普遍対であることを示す. 可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\langle S^i, K_n\rangle = \pi_i(K_n) \arrow[rr, "r'_n \circ -"] \arrow[dr, "T_{u_n}"'] & & \langle S^i, K\rangle = \pi_i(K) \arrow[dl, "T_u"] \\
 & h(S^i) &
\end{tikzcd}
$$

を考えると, $i+1<n$ に対し, $r'_n \circ -$ は全単射であり, (K_n, u_n) は n-普遍対なので, $i+1<n$ に対し, T_{u_n} も全単射である. よって, T_u も全単射である. したがって, (K,u) は求めていた π_*-普遍対である. ■

Lemma 4.11

$h\colon \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ を *Brown* 関手, (K,u) を h の π_*-普遍対, (X,A) を連結 CW 対とする. このとき, $x \in h(X)$ と $f\colon A \to K$ が $\phi\colon A \hookrightarrow X$ に対し, $f^*(u) = \phi^*(x)$ をみたすならば, f を拡張して, $g\colon X \to K$ で $g^*(u) = x$ となるものが存在する.

$$
\begin{tikzcd}
(A, f^*(u) = \phi^*(x)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\phi"'] & (K,u) \\
(X,x) \arrow[ur, "\exists g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Proof: K は M_f の強変位レトラクトなので f は部分複体からの包含写像とみなせる. $X \cup K$ で A を同一視したものを Z とおくと, 可換図式

$$
\begin{tikzcd}
X \cap K = A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, hook, "\phi"'] & K \simeq M_f \arrow[d, hook, "\tau"] \\
X \arrow[r, hook, "\psi"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h(A) & h(K) \arrow[l, "f^*"'] \\
h(X) \arrow[u, "\phi^*"] & h(Z) \arrow[l, "\psi^*"] \arrow[u, "\tau^*"']
\end{tikzcd}
$$

に仮定と Mayer-Vietoris 公理を用いると, $z \in h(Z)$ が存在し, $\psi^*(z) = x$ かつ $\tau^*(z) = u$ となる. ここで, **Lemma 4.10** より, (Z, z) から h の π_*-普遍対 (K', u') が構成でき, π_*-普遍対はホモトピー同値を除いて一意であるため, $(K, u) \hookrightarrow (K', u')$ はホモトピー群の同型を誘導する. よって, Whitehead の定理より, K は K' の強変位レトラクトである. このレトラクションは $X \hookrightarrow K'$ から $g\colon X \to K$ への A を法としたホモトピーであり, $g^*(u) = x$ となる. ■

4.3 Proof of Brown Representability Theorem

この節では, Brown Representability Theorem を示す.

Lemma 4.10 より, π_*-普遍対 (K, u) が得られるため, それが普遍対になることを示せばよい. **Lemma 4.6** と **Lemma 4.11** より, 図式

$$
\begin{tikzcd}
(\{*\}, 0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\phi"'] & (K, u) \\
(X, x) \arrow[ur, "\exists g"'] &
\end{tikzcd}
$$

を得るため,

$$
\begin{array}{cccccc}
T_u & : & \langle X, K\rangle & \longrightarrow & h(X) \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & [f] & \longmapsto & f^*(u)
\end{array}
$$

は全射である.

任意の $[f_0], [f_1] \in \langle X, K\rangle$ に対し, $T_u([f_0]) = T_u([f_1])$ とする. つまり, $f_0^*(u) = f_1^*(u)$ となる. ここで, Lemma 2.6 より, 図式

$$
\begin{tikzcd}
(X \times \partial I)/(* \times \partial I) = X \vee X \arrow[r, "f_0 \vee f_1"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & (K, u) \\
(X \times I)/(* \times I) \arrow[ur, "\exists H"'] &
\end{tikzcd}
$$

を得る. よって, H は f_0 から f_1 へのホモトピーである. したがって, $[f_0] = [f_1]$ となるため,

$$
\begin{array}{cccccc}
T_u & : & \langle X, K\rangle & \longrightarrow & h(X) \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & [g] & \longmapsto & g^*(u)
\end{array}
$$

は単射である. したがって, Brown Representability Theorem は示された.

4.4 Corollary of Brown Representability Theorem

任意の Ω-spectrum は簡約コホモロジー論を定めたが, 驚くべきことに逆も成立する. つまり, 任意の $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論はある Ω-spectrum $(K_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ を用いて, $\widetilde{h^n}(X) \cong \langle X, K_n\rangle$ と表現できる. この節ではこの結果を Brown Representability Theorem を用いて示す.

Lemma 4.12

$h\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}_*$ をホモトピー公理とウェッジ和公理をみたす関手とする. このとき, 任意の $X \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, $h(\Sigma X)$ は群となり, h の普遍対 (K, u) に対し, 写像

$$\begin{array}{cccc} T_u & : & \langle \Sigma X, K\rangle & \longrightarrow & h(\Sigma X) \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u) \end{array}$$

は群準同型写像となる.

Proof: まず, $h(\Sigma X)$ が群となることを示す.
簡約懸垂の真ん中を基点に潰し 2 つの簡約懸垂をつくる写像 $c\colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$ を考える. ウェッジ和公理より, $c^*\colon h(\Sigma X \vee \Sigma X) \cong h(\Sigma X) \times h(\Sigma X) \to h(\Sigma X)$ が得られるため, これを $h(\Sigma X)$ 上の演算とする.
実際に群になることを示す.

$$\Sigma X \xrightarrow{c} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{c\vee \mathrm{id}_{\Sigma X}} \Sigma X \vee \Sigma X \vee \Sigma X, \qquad \Sigma X \xrightarrow{c} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Sigma X}\vee c} \Sigma X \vee \Sigma X \vee \Sigma X$$

はホモトピックなのでホモトピー公理より, 結合法則が成立する.
$q_1\colon \Sigma X \vee \Sigma X \to \Sigma X$ を下の簡約懸垂を基点に潰す写像とし, $q_2\colon \Sigma X \vee \Sigma X \to \Sigma X$ を上の簡約懸垂を基点に潰す写像とする. このとき,

$$\Sigma X \xrightarrow{c} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{q_1} \Sigma X, \qquad \Sigma X \xrightarrow{c} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{q_2} \Sigma X, \qquad \Sigma X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Sigma X}} \Sigma X$$

はホモトピックなのでホモトピー公理より, 単位法則が成立する.
$r\colon \Sigma X \to \Sigma X$ を上下反転させる写像とする. このとき,

$$\Sigma X \xrightarrow{c} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{r\vee \mathrm{id}_{\Sigma X}} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Sigma X}\vee \mathrm{id}_{\Sigma X}} \Sigma X,$$

$$\Sigma X \xrightarrow{c} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Sigma X}\vee r} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Sigma X}\vee \mathrm{id}_{\Sigma X}} \Sigma X,$$

$$\Sigma X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Sigma X}} \Sigma X$$

はホモトピックなのでホモトピー公理より, 逆元の法則が成立する.
写像

$$\begin{array}{cccc} T_u & : & \langle \Sigma X, K\rangle & \longrightarrow & h(\Sigma X) \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u) \end{array}$$

が群準同型写像となることは 3.2 節で書いたように $f, g\colon \Sigma X \to K$ に対し, $f + g := (f \vee g) \circ c\colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X \to K$ と定めることを思い出すと, 関手性よりしたがう. ■

Theorem 4.13

> 任意の $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論はある Ω-*spectrum* $(K_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ を用いて, $\tilde{h^n}(X) \cong \langle X, K_n\rangle$ と表現できる.

Proof: 簡約コホモロジー論では簡約懸垂が同型を導き, 基点付き CW 複体の簡約懸垂は連結なので, 基点付き連結 CW 複体を考えれば十分である.

簡約コホモロジー論は **Example 4.5** でみたように Brown 関手だったので, **Theorem 4.8 (Brown Representability Theorem)** より, 任意の n に対し, $\tilde{h}^n(X) \cong \langle X, K_n\rangle$ となる基点付き連結 CW 複体の列 $(K_n)_{n\in Z}$ が得られる.

次に弱ホモトピー同値写像 $K_n \to \Omega K_{n+1}$ が存在することを示す.

簡約懸垂が導く自然同型 $\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$ と随伴 $\Sigma \dashv \Omega$ は自然同型

$$\Phi_X \colon \langle X, K_n\rangle \xrightarrow{\cong} \langle \Sigma X, K_{n+1}\rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega K_{n+1}\rangle$$

を導く.

Φ_X の自然性より, 任意の $f\colon X \to K_n$ に対し, 図式

$$\begin{tikzcd}
\langle K_n, K_n\rangle \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "\Phi_{K_n}"'] & \langle X, K_n\rangle \arrow[d, "\Phi_X"] \\
\langle K_n, \Omega K_{n+1}\rangle \arrow[r, "-\circ f"'] & \langle X, \Omega K_{n+1}\rangle
\end{tikzcd}$$

を得る. よって, $\Phi_X = \Phi_{K_n}(\mathrm{id}_{K_n}) \circ -$ となり[*7],

$$\Phi_{S^i} = \Phi_{K_n}(\mathrm{id}_{K_n}) \circ - \colon \pi_i(K_n) = \langle S^i, K_n\rangle \xrightarrow{\cong} \langle S^i, \Omega K_{n+1}\rangle = \pi_i(\Omega K_{n+1})$$

を導くため, $\Phi_{K_n}(\mathrm{id}_{K_n})\colon K_n \to \Omega K_{n+1}$ は弱ホモトピー同値である. したがって, $\tilde{h^n}(X) \cong \langle X, K_n\rangle$ と表現する Ω-spectrum $(K_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ を得られた. ■

Example 4.14

> 簡約コホモロジー群の誘導する関手 $\tilde{H}(-;G)$ を表現する Ω-*spectrum* は *Eilenberg-MacLane spectrum* である.

[*7] 図式を追うとわかる.

5　まとめ

本稿では詳しく紹介しなかったが, Brown representability theorem は主 G 束を分類したりなど, 様々なものを分類することができる. また, 一般化として性質の良い三角圏上の Brown representability theorem もある. 実際, Ω-spectrum のなす圏から性質の良い三角圏が得られるがその圏上の Brown representability theorem が本稿で示したものにあたる. 性質の良い三角圏上の Brown representability theorem は一般化だけでなく Grothendieck duality を導いたり, 三角圏の随伴関手定理を導いたり, 三角圏の積の存在を保証したりととても有用である. また, さらなる一般化として, 性質の良い Presentable stable ∞-category 上での Brown representability theorem も示されている.

本稿の内容は 1 年間卒業研究ゼミで発表した内容をまとめたものである. この内容を 1 年で勉強できたのは指導して頂いた先生やゼミをきいてもらったり, 一緒に勉強してくれた友人のおかげである. 最後に, お世話になったたくさんの方々に感謝申し上げる.

参考文献

[1]　荒木 捷朗. 一般コホモロジー. 紀伊國屋書店. 1975.
[2]　河野 明, 玉木 大. 一般コホモロジー. 岩波書店. 2008.
[3]　西田 吾郎. ホモトピー論. 共立出版.1985.
[4]　Amnon Neeman. Triangulated Categories. Princeton University Press. 2014.
[5]　Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press. 2001.
[6]　J. P. P. May. A Concise Course in Algebraic Topology. University of Chicago Press. 1999.
[7]　Jacob Lurie. Higher Algebra. 2017.