開核作用子と閉包作用子の圏論的考察

ゐぶ

1 開核作用子と随伴

X を位相空間とする. このとき, X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ と X の開部分集合全体の集合 $\mathfrak{O}(X)$ は順序 $\subset$ によって順序集合となるため圏とみなすことができる.

開核作用子

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Int}: & \mathfrak{P}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{O}(X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & A^i \end{array}$$

は順序 $\subset$ を保つため関手とみなせる.

また, 包含写像

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{I}: & \mathfrak{O}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & B & \longmapsto & B \end{array}$$

も順序 $\subset$ を保つため関手とみなせる.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P}(X) \arrow[r, shift right, "\mathrm{Int}"'] & \mathfrak{O}(X) \arrow[l, shift right, "\mathrm{I}"'] \end{tikzcd}$$

$$\forall A \in \mathfrak{O}(X),\ \forall B \in \mathfrak{P}(X),\ A \subset B \Longleftrightarrow A \subset \mathrm{Int}(B)$$

が成立するため, $\mathrm{I} \dashv \mathrm{Int}$ が成立する.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P}(X) \arrow[r, shift right, "\mathrm{Int}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathfrak{O}(X) \arrow[l, shift right, "\mathrm{I}"'] \end{tikzcd}$$

2 閉包作用子と随伴

X を位相空間とする. このとき, X の閉部分集合全体の集合 $\mathfrak{C}(X)$ は順序 $\subset$ によって順序集合となるため圏とみなすことができる.

閉包作用子

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Cl}: & \mathfrak{P}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}$$

は順序 $\subset$ を保つため関手とみなせる.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P}(X) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Cl}"] & \mathfrak{C}(X) \arrow[l, shift left, "\mathrm{I}"] \end{tikzcd}$$

$$\forall A \in \mathfrak{P}(X),\ \forall B \in \mathfrak{C}(X),\ \mathrm{Cl}(A) \subset B \Longleftrightarrow A \subset B$$

が成立するため, $\mathrm{Cl} \dashv \mathrm{I}$ が成立する.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{P}(X) \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{Cl}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathfrak{C}(X) \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{I}"] \end{tikzcd}$$