集合と順序集合の双対随伴

@kyo_math1729

定義 1. 順序集合 M の部分集合 $V \subset M$ について任意の $a, b \in M$ で

$$a \leq b,\ a \in V \Rightarrow b \in V$$

が成り立つとき，V は upper set であるという．

順序集合 M に対してその upper set 全体の集合を $U(M)$ と書く．

$$U(M) = \{V \subset M \mid V \text{ は upper set}\}$$

命題 2. $f\colon M \to N$ は順序集合の間の順序を保つ写像とする．このとき $V \subset N$ が upper set ならば $f^{-1}(V) \subset M$ も upper set である．

証明. $a, b \in M$ が $a \leq b,\ a \in f^{-1}(V)$ とすると $f(a) \leq f(b),\ f(a) \in V$ で V は upper set なので $f(b) \in V$. よって $b \in f^{-1}(V)$. □

この命題から U が反変関手を定めることがわかる．即ち，Set を集合と写像の圏，Ord を順序集合と順序を保つ写像の圏としたとき

$$\begin{array}{ccc} N & & U(N) \\ {\scriptstyle f}\uparrow & \mapsto & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} \\ M & & U(M) \end{array}$$

で関手 $U\colon \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ が定まる．

また写像の逆像は反変関手

$$\begin{array}{ccc} P & & \mathcal{P}(P) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \mapsto & \uparrow{\scriptstyle f^{-1}} \\ Q & & \mathcal{P}(Q) \end{array}$$

を定めるのだった．これを $I\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}$ と書く．

定理 3. U と I は随伴 $U \dashv I$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "U"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Set} \arrow[l, bend left, "I"] \end{tikzcd}$$

証明. 集合 P と順序集合 M に対して順序を保つ写像 $M \to \mathcal{P}(P)$ と写像 $P \to U(M)$ が一対一に対応することを示そう．

自然な同型 $\mathcal{P}(P) \cong 2^P$ と Curry 化の随伴に注意すると以下の同型を得る．(Hom 集合はすべて Set のもの)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M, \mathcal{P}(P)) &\cong \mathrm{Hom}(M,\ 2^P) \\ &\cong \mathrm{Hom}(M \times P,\ 2) \\ &\cong \mathrm{Hom}(P,\ 2^M) \\ &\cong \mathrm{Hom}(P,\ \mathcal{P}(M)) \end{aligned}$$

よって写像 $f\colon M \to \mathcal{P}(P)$ について f が順序を保つことと，f をこの同型で写した写像 $\bar{\bar{f}}\colon P \to \mathcal{P}(M)$ の像が $U(M) \subset \mathcal{P}(M)$ に入ることの同値性を示せばよい．

　上の同型は $a \in M$ と $p \in P$ に対して

$$\begin{aligned} p \in f(a) \ &\Leftrightarrow\ \bar{f}(a, p) = 1 \\ &\Leftrightarrow\ a \in \bar{\bar{f}}(p) \end{aligned}$$

とすることで与えられている．よって f の順序保存条件の対応を考えると，$a, b \in M$ と $p \in P$ に対して

$$\begin{aligned} a \leq b \Rightarrow f(a) \subset f(b) \iff& a \leq b,\ p \in f(a) \Rightarrow p \in f(b) \\ \iff& a \leq b,\ a \in \bar{\bar{f}}(p) \Rightarrow b \in \bar{\bar{f}}(p) \end{aligned}$$

となる．最右辺の条件は任意の $p \in P$ について $\bar{\bar{f}}(p)$ が upper set であることを示している． □