Notes on Stratified Simplicial Sets

準猫@8n_Cat

January 25, 2022

Abstract

Stratified simplicial set は比較的扱いやすそうな対象という印象を受けるにも関わらずあまり普及していないと感じる. そこでごくごく一部しか触れられないが, 他の圏との随伴の存在をあげると共に stratified simplicial set について紹介する.

これは元々は stratified simplicial set の初歩の初歩に関する個人的なノートであり, どういう数学的対象なのか, なぜそんなものを考えたいのかについて自分なりの意見を含めながら記録している. (勉強不足に加え執筆途中なので内容はかなり薄いと思うが).

Contents

1 Introduction

1.1 motivation

lifting property を満たす simplicial set を考える:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^r[n] \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta[n] \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

- *Kan complex*
  r, n の動く範囲が $n \geqslant 2, 0 \leqslant r \leqslant n$ で与えられているとき, 上の lifting property を満たす simplicial set のことを Kan complex という. これは "よい"simplicial set として知られており, $(\infty, 0)$-category の model になる. simplicial set の圏 sSet に standard な model 構造を入れたときの fibrant object と一致する.

- *nerve of category*
  r, n の動く範囲を $n \geqslant 2, 0 < r < n$ で与える. このとき small category $\mathcal{C}$ に対し圏 $\mathcal{C}$ の脈体 (nerve), すなわち $\mathrm{N}\mathcal{C} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\bullet, \mathcal{C})$ で定まる simplicial set は上の lifting property を満たす. 特に lift が一意的に定まる. 逆にこの lifting property を満たし, かつ lift が一意に定まる simplicial set X に対し small category $\mathcal{C}$ で $X \cong \mathrm{N}\mathcal{C}$ となるものが存在する. さらに函手 N は忠実充満であり, 圏と圏の nreve は "等価" である.

- *quasi-category*
  r, n の動く範囲を $n \geqslant 2, 0 < r < n$ で与える. (ただし lift に一意性は課さない.) この条件は Kan complex や圏の nerve に対するそれを緩めたものでる. この lifting property を満たす simplicial set は最初 Boardman, Vogt が weak Kan complex として導入したものであり, Joyal は quasi-category と呼んだ. 最近では (Lurie のように)∞-category と呼んでいる人もいる. これは Kan complex と圏の nerve を両方含んでおり, $(\infty, 1)$-category の model になる. simplicial set の圏 sSet に Joyal の model 構造を入れたときの fibrant object に一致する.

ここから自然な問いとして "より高次の圏に対し analogy を考えられないか?" というものが出てくる. これに対する答えが "weak complicial set" である.

1.2 history of (weak) complicial set

Complicial set は数理物理学者の John Roberts によって 1970 年代半ばに strict ω-category の nerve として考えられたらしい. その後 Ross Street によって調べられ, nerve の候補が構成されたらしい. これは Street-Robert conjecture と呼ばれ, 2004 年に Dominic Verity が [3] で肯定的に解決した.

1.3 definition of stratified simplicial set

(weak) complicial set は付加構造を持つ simplicial set のうち適当な lifting property を満たすもののことである. どのような付加構造を考えればよいだろうか.

quasi-category における (1-)morphism の合成を思い出してみる:

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & \\ x_0 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & {} & x_2 \end{tikzcd}.$$

上の “絵” のように 0-simplex を object, 1-simplex を 1-morphism, 2-simplex を 2-morphism と思っていた. これに倣ってやはり n-simplex が n-cell だと思いたい. 今考えたいのはより高次の無限圏, (∞, n)-category なので 2-simplex に可逆ではないものが含まれうる. そこで “どの simplex が可逆か” という情報を付与することにする.

Definition 1.3.0.1 *stratified simplicial set* とは simplicial set $\tilde{X}$ と以下を満たす部分集合 $tX \subset \bigcup_{n>0} \tilde{X}_n$ の組 $(\tilde{X}, tX)$ のことである:

$$s_i x \in tX \text{ for all } x \in X_n \text{ amd } 0 \leqslant i \leqslant n.$$

stratified simplicial set $(\tilde{X}, tX)$ に対し tX の元を *thin simplex* と呼ぶ[1].

変換が “可逆な射” を保つという要求は自然である. そこで stratified simplicial set $(\tilde{X}, tX), (\tilde{Y}, tY)$ に対し simplicial map $f{:}\tilde{X} \to \tilde{Y}$ で thin simplex を保つ, すなわち $f(tX) \subset tY$ を満たすものを $(\tilde{X}, tX)$ から $(\tilde{Y}, tY)$ への stratified map と定義する. stratified simplicial set と stratified map は明らかに圏をなす. この圏を stratified simplicial set の圏と呼び, Strat と表記する.

任意の simplicial set X から以下の 2 種類の極端な方法で stratified simplicial set を構成することができる:

$$\begin{aligned} X^\flat &:= (X, d(X)) && \text{(minimal stratification)} \\ X^\sharp &:= (X, \bigcup_{n>0} X_n) && \text{(maximal stratfication)} \end{aligned}$$

ただしここで $d(X)$ は X の degenerate simplex の集合である.

$$d(X) := \{\text{degenerat simplex of } X\} = \bigcup_{n\geqslant 0} \{s_i x | x \in X_n, 0 \leqslant i \leqslant n\}$$

この二つは忠実充満函手 $(-)^\flat, (-)^\sharp{:}\mathrm{sSet} \to \mathrm{Strat}$ を与える.

Proposition 1.3.0.2 $(-)^\flat$ は忘却函手 U の左随伴であり, $(-)^\sharp$ は忘却函手 U の右随伴である.

Proof. 明らかに $\mathrm{U}(-)^\flat = \mathrm{id} = \mathrm{U}(-)^\sharp$ が成り立つ. また構成より自然変換 $(\mathrm{U}-)^\flat \Rightarrow \mathrm{id}, \mathrm{id} \Rightarrow (\mathrm{U}-)^\sharp$ が存在する. これらが随伴の (余) 単位を与える.
□

特に standared n-simplex $\Delta[n]$ から stratified simplicial set $\Delta[n]^\flat$ を得る. 誤解の恐れがない限り, この stratified simplicial set も standard n-simplex と呼び, $\Delta[n]$ と表記する.

これらは自明な例である. 非自明な例も挙げよう.

- $n > 0$ に対し

$$\Delta[n]_t := (\Delta[n], d(\Delta[n]) \cup \{\mathrm{id}_{[n]}{:}[n] \to [n]\})$$

で与えられる stratified simplicial set を *standard thin n-simplex* という.

[1]marked simplex とも呼ぶが本稿では thin simplex に統一する.

- $n > 0, 0 \leqslant r \leqslant n$ に対し
$$\Delta^r[n] \coloneqq (\Delta[n], d(\Delta[n]) \cup \{\alpha \in \bigcup_{h>0} \Delta[n]_h | \mathrm{Im}\alpha \supset \{r-1, r, r+1\} \cap [n]\})$$
で与えられる stratified simplicial set を *r-admissible n-simplex* という.
- $n > 0, 0 \leqslant r \leqslant n$ に対し
$$\Lambda^r[n] \coloneqq (\Lambda^k[n], d(\Lambda^k[n]) \cup \{\alpha \in \bigcup_{h>0} \Lambda^r[n]_h | \mathrm{Im}\alpha \supset \{r-1, r, r+1\} \cap [n]\})$$
で与えられる stratified simplicial set を *r-admissible n-horn* という.
- $\Delta^r[n]' \coloneqq (\Delta[n], t\Delta^r[n] \cup \{\delta_{r-1}, \delta_{r+1}\})$.
- $\Delta^r[n]'' \coloneqq (\Delta[n], t\Delta^r[n] \cup \{\delta_{r-1}, \delta_r, \delta_{r+1}\})$.
- $\Delta[3]_{\mathrm{eq}} \coloneqq (\Delta[3], \{\delta_3\delta_1, \delta_2\delta_0\} \cup \bigcup_{n>1} \Delta[3]_n)$.
- $\partial\Delta[n] \coloneqq (\partial\Delta[n], d(\partial\Delta[n]))$.

これらの例は全てのちに登場する大事なものばかりである.

1.4 "resolution" of stratified simplicial sets

Proposition 1.4.0.1 Strat は完備かつ余完備である.

Proof. coequalizer のみ構成する. $f, g{:}(\tilde{X}, tX) \to (\tilde{Y}, tY)$ を stratified map とする. このとき simplicial map $f, g{:}\tilde{X} \to \tilde{Y}$ の coequalizer として simplicial map $\pi{:}\tilde{Y} \to \tilde{C}$ が得られる. 部分集合 $tC \subset \bigcup_{n>0} \tilde{C}_n$ を $tC \coloneqq \bigcup_n \pi_n(tY \cap \tilde{Y}_n)$ と定める. 任意の n に対し π_n は全射なので tC は $\tilde{C}$ の degenerate simplex を全て含んでおり, stratified simplicial set $(\tilde{C}, tC)$ が得られる. これが coequalizer になる.
□

sSet では colimit を用いたある種の分解が考えられる. この類似を考えていこう.

Proposition 1.4.0.2 Strat の射
$$\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n] | n \geqslant 0\} \cup \{\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]_t | n > 0\}$$
の *coproduct* の *pushuout* の *transfinite composition* によって生成される射は *monic* である.

Proof. $f{:}X \to Y$ を stratified map とする. 忘却函手 U は左随伴を持つので f が monic ならば Uf もまた monic である. 逆に Uf が monic ならば任意の stratified map $g, h{:}A \to X$ に対し
$$(\mathrm{U}f)(\mathrm{U}g) = \mathrm{U}(fg) = \mathrm{U}(fh) = (\mathrm{U}f)(\mathrm{U}h)$$
が成り立つので f は monic である. すなわち f が monic であることと Uf が monic であることは同値である. 忘却函手 U は右随伴も持つので余極限を保存する. よって議論は sSet に帰着される. simplicial set の余極限は pointwise に見ればよいので Set の議論に帰着できる. 残りは容易である.
□

Proposition 1.4.0.3 Strat の任意の *monic* 射は

$$\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n] | n \geqslant 0\} \cup \{\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]_t | n > 0\}$$

の *coproduct* の *pushuout* の *transfinite composition* によって生成される.

Proof. $f{:}(\tilde{X}, tX) \to (\tilde{Y}, tY)$ を monic 射とする. 集合族 $\{(N_f)_n\}_n, \{(T_f)_n\}_n$ を以下で定める:

$$\begin{aligned}
(N_f)_n &\coloneqq \{y \in \tilde{Y}_n | y\text{:non-degenerate}, y \notin \mathrm{Im} f_n\} \\
(T_f)_n &\coloneqq \{y \in tY \cap \tilde{Y} | y \notin d(\tilde{Y}) \cup f(tX)\}.
\end{aligned}$$

これを用いて $(\omega+\omega)$-sequence $E{:}(\omega+\omega) \to \mathrm{Strat}$ を以下で帰納的に定める:

$$E_0 \coloneqq X \qquad\qquad E_\omega \coloneqq \varinjlim_{n<\omega} E_n$$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{(N_f)_n} \partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{(N_f)_n} \Delta[n] \arrow[d] \\
E_{n-1} \arrow[r] & E_n \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{(T_f)_n} \Delta[n] \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{(T_f)_n} \Delta[n]_t \arrow[d] \\
E_{\omega+n-1} \arrow[r] & E_{\omega+n} \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

この $(\omega+\omega)$-sequence E の transfinite composition として $f{:}X \to Y$ が得られる. □

これは simplicial set の間の monic は $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n] | n \geqslant 0\}$ で生成されることの類似である. この証明では f を 2 種類の射に分解し, それぞれを tranfinite composition で構成しているようにみえる.

Definition 1.4.0.4 *stratified map* $f{:}(\tilde{X}, tX) \to (\tilde{Y}, tY)$ は*,* $f^{-1}(tY) = tX$ を満たすとき *regular* であるという*.*

Definition 1.4.0.5 *stratified map* $f{:}(\tilde{X}, tX) \to (\tilde{Y}, tY)$ は*, underlying simplicial map* $\mathrm{U}f$ が全射であるとき *entire* であるという*.*

Definition 1.4.0.6 *stratified map* $f{:}(\tilde{X}, tX) \to (\tilde{Y}, tY)$ は*, underlying simplicial map* $\mathrm{U}f$ が単射であるとき *inclusion* であるという*.*

Remark 1.4.0.7 この定義は *[3]* によるものである*. [4]* や *[6]* では f が *monic* である場合に限って定義されている*.*

Remark 1.4.0.8 乱暴な言い方をすれば次のように思える*:*

- *regular* とは *thin* ではない *simplex* を追加する射である*.*
- *entire* とは *thin* と見なす射を増やす一方で *simplex* は追加しない射である*.*

simplicial set には skeleton という概念が存在する. この類似を考えよう.

Definition 1.4.0.9 *stratified simplicial set* $X = (\tilde{X}, tX)$ の *regular subcomplex* $\mathrm{Sk}^n X \coloneqq (\mathrm{Sk}^n \tilde{X}, tX \cap \bigcup_{r>0} \mathrm{Sk}^n \tilde{X}_r)$ を X の *n-skeleton* という*.*

これは明らかに自己函手 Sk^n:Strat $\to$ Strat を定める.

Proposition 1.4.0.10 Sk^n は右随伴 Csk^n をもつ.

stratified simplicial set X に対し $\mathrm{Csk}^n X$ を X の *n-coskeleton* という.

Definition 1.4.0.11 $X = (\tilde{X}, tX)$ を *stratified simplicial set* とする. このとき *stratified simplicial set* $\mathrm{Th}^n X \coloneqq (\tilde{X}, tX \cup \bigcup_{r>n} \tilde{X}_r)$ を X の *n-trivialisation* という.

これは自己函手 Th^n:Strat $\to$ Strat を定める.

Proposition 1.4.0.12 Th^n は右随伴 Sp^n をもつ.

stratified simplicial set X に対し $\mathrm{Sp}^n X$ を X の *n-superstructure* という. $\mathrm{Sp}^n X$ もまた X の regular subcomplex である. これらは後に示す命題の系として得られる.

Definition 1.4.0.13 *stratified simplicial set* X が $X = \mathrm{Th}^n X$ を満たすとき X は *n-trivial* であるという.

1.5 an analogy of Yoneda

本小節における目標の一つは Strat が locally finitely presentable であることを示すことである. まず Yoneda lemma の analgy を考えよう:

Proposition 1.5.0.1 任意の *stratified simplicial set* X と各 n に対し

$$\tilde{y}^{\bullet}_{X,n}(x) \coloneqq x_n(\mathrm{id}_{[n]})$$

で与えられる同型

$$\begin{aligned} \tilde{y}^s_{X,n}&:\mathrm{Nat}(\Delta[n], X) \xrightarrow{\cong} X_n && (\textit{for } n \geqslant 0) \\ \tilde{y}^t_{X,n}&:\mathrm{Nat}(\Delta[n]_t, X) \xrightarrow{\cong} tX_n && (\textit{for } n \geqslant 1) \end{aligned}$$

が存在する. さらに $\tilde{y}^{\bullet}$ は X, n に関して自然であり, 任意の $n \geqslant 1$ に対し以下の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Nat}(\Delta[n]_t, X) \arrow[r, "y^t_{X,n}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & tX_n \arrow[d, hook] \\ \mathrm{Nat}(\Delta[n], X) \arrow[r, "y^s_{X,n}"'] & X_n \end{tikzcd}.$$

Proof. 随伴対 $(-)^\flat \dashv \mathrm{U}$ と Yoneda lemma より次の自然同型を得る:

$$\mathrm{Nat}(\Delta[n], X) \cong \mathrm{Nat}(\Delta[n], \mathrm{U}X) \cong X_n.$$

残りの主張もこの同型から従う.
□
これより以下で定まる充満部分圏 $t\mathbf{\Delta}$ が重要な役割を担うと期待できる:

$$\mathrm{Obj}t\mathbf{\Delta} \coloneqq \{\Delta[n] | n \geqslant 0\} \cup \{\Delta[n]_t | n > 0\}.$$

自明な埋め込み $t\mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathrm{Strat}$ の米田埋め込みに沿った左 Kan 拡張として随伴対

$$\begin{tikzcd} {[t\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathrm{Strat} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

を得る. この随伴の単位 (resp. 余単位) を η (resp.ε) とする. 米田埋め込みは忠実充満なので Proposition 1.4.2.1 より

$$\begin{aligned} RX(\Delta[n]) &= \mathrm{Hom}(L\,よ\Delta[n], X) \cong \mathrm{Hom}(\Delta[n], X) \cong X_n \\ RX(\Delta[n]_t) &= \mathrm{Hom}(L\,よ\Delta[n]_t, X) \cong \mathrm{Hom}(\Delta[n]_t, X) \cong tX \cap X_n \end{aligned}$$

が従う. これより R は忠実充満であることが従う. よって任意の stratified simplicial set X に対し $R\bar{\varepsilon}_X = \eta_{RX}$ を満たす射 $\bar{\varepsilon}_X{:}X \to LRX$ が存在する. この射に対し

$$\begin{aligned} R(\varepsilon_X \bar{\varepsilon}_X) =& (R\varepsilon_X)(\eta_{RX}) \\ =& R\mathrm{id}_X \\ \bar{\varepsilon}_X \varepsilon_X =& \varepsilon_{LRX}(LR\bar{\varepsilon}_X) \\ =& \varepsilon_{LRX}(L\eta_{RX}) \\ =& \mathrm{id}_{LRX} \end{aligned}$$

が成り立つので自然同型 $\varepsilon{:}\mathrm{id} \overset{\cong}{\Rightarrow} LR$ を得る. これより任意の stratified simplicial set は次のような余極限として記述できることが従う:

$$\begin{aligned} X \cong& LRX \\ &= \int^{\Delta[n]_?} \mathrm{Hom}(よ\Delta[n]_?, RX) \cdot \Delta[n]_? \\ &\cong \int^{\Delta[n]_?} RX(\Delta[n]_?) \cdot \Delta[n]_? \\ &\cong \int^{\Delta[n]_?} \mathrm{Hom}(\Delta[n]_?, X) \cdot \Delta[n]_?. \end{aligned}$$

これより次が示された:

Proposition 1.5.0.2 次の自然同型が存在する*:*

$$X \cong \int^{\Delta[n]_?} \mathrm{Hom}(\Delta[n]_?, X) \cdot \Delta[n]_?.$$

右辺の余極限は函手

$$\int_X t\mathbf{\Delta} \xrightarrow{\mathrm{pr}} t\mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathrm{Strat}$$

の余極限と同型である. よって正則基数 κ を $|\mathrm{Obj}\int_X t\mathbf{\Delta}|, |\mathrm{Arr}\int_X t\mathbf{\Delta}| < \kappa$ となるようとれば, κ-filtered category $\mathcal{J}$ からの函手 $\mathcal{F}{:}\mathcal{J} \to \mathrm{Strat}$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(X, \varinjlim_j \mathcal{F}_j) &\cong \varprojlim \mathrm{Hom}(\Delta[n]_?, \varinjlim_j \mathcal{F}) \\
&\cong \varprojlim \varinjlim_j \mathrm{Hom}(\Delta[n]_?, \mathcal{F}) \\
&\cong \varinjlim_j \varprojlim \mathrm{Hom}(\Delta[n]_?, \mathcal{F}) \\
&\cong \varinjlim_j \mathrm{Hom}(X, \mathcal{F})
\end{aligned}$$

が成り立つ[2]. これより次が示された:

Proposition 1.5.0.3 任意の *stratified simplicial set* は *small* である.

Corollary 1.5.0.4 Strat は局所表示可能 *(locally presentable)* である.

Proof. Proposition 1.4.0.1. より余完備である. Proposition 1.4.2.2. より $t\mathbf{\Delta}$ により Strat は生成されることが従う. Proposition 1.4.2.3. より任意の object が small である. locally small であることは明らかである.
□

Proposition 1.4.2.2. より余完備な圏への随伴についての次の命題が従う:

Proposition 1.5.0.5 $\mathcal{C}$ を余完備な *locally small category* とする. このとき函手 $\mathcal{F}$:Strat $\to \mathcal{C}$ に対し以下は同値である*:*

1. $\mathcal{F}$ は右随伴をもつ.
2. $\mathcal{F}$ は余極限を保つ.
3. $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}|_{t\mathbf{\Delta}}$ の左 *Kan* 拡張であり, *epic* $\Delta[n] \to \Delta[n]_t$ を保つ.

Proof. 1 から 2 が, 2 から 3 が従うことは明らかである. $\mathcal{F}\Delta[n] \to \mathcal{F}\Delta[n]_t$ が epic ならば単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}\Delta[n]_t, C) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}\Delta[n], C)$$

が得られる. これより右随伴が定まる.
□

[2]極限と余極限の交換については例えば MacLane の圏論の基礎などを参考にすれば証明できる.

2 weak complicial set

weak complicial set を定義しよう. 前述の通り適当な lifting property を満たす stratified simplicial set として定義する:

Definition 2.0.0.1 *weak complicial set* とは以下の二つの extension property を満たす stratified simplicial set X のことである:

- <u>horn extension</u>
  任意の $n \geqslant 2, 0 \leqslant r \leqslant n$ に対し次の lift が存在する:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^r[n] \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^r[n] \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}.$$

- <u>thinness extension</u>
  任意の $n \geqslant 2, 0 \leqslant r \leqslant n$ に対し次の lift が存在する:

$$\begin{tikzcd} \Delta^r[n]' \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^r[n]'' \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}.$$

拡張が一意に定まる weak complicial set を complicial set と呼ぶ.

一つ目の extension property (horn extension) は Kan complex や quasi-category のように"cell の合成"ができることを保証している. 二つ目の extension property (thinnness extension) は"可逆な cell の合成が可逆"であることを保証する. 具体例によってこのことを確認しよう.

2.1 Kan complexes and weak complicial sets

次の命題は明らかである.

Proposition 2.1.0.1 任意の *simplicial set* X に対し以下は同値である*:*

1. X は *Kan complex* である*.*
2. $X^\sharp$ は *weak complicial set* である*.*

2.2 quasi-categories and weak complicial sets

Proposition 2.2.0.1 $X = (\tilde{X}, tX)$ を *weak complicial set* とする*.*
このとき X が 1*-trivial* ならば $\tilde{X}$ は *quasi-category* である*.*

Proof. $0 < r < n$ に対し horn $\Lambda^r[n] \to \tilde{X}$ を考える. $n > 2$ ならば X が 1-trivial なので明らかである. $r = 1, n = 2$ のときも horn $\Lambda^r[n] \to X$ が考えられ, 拡張が得られる.
□

Proposition 2.2.0.2 *X を quasi-category とする. horn $x{:}\Lambda^0[n] \to X$ は以下を満たすとき n-simplex $\Delta[n] \to X$ に拡張できる:*

- *2-simplex $y \in X_2$ で $d_1 y = s_0 d_0 d_1 y, d_2 y = x|_{\Delta\{0,1\}}$ を満たすものが存在する.*

Proposition 2.2.0.3 *X を quasi-category とする. horn $x{:}\Lambda^n[n] \to X$ は以下を満たすとき n-simplex $\Delta[n] \to X$ に拡張できる:*

- *2-simplex $y \in X_2$ で $d_1 y = s_0 d_0 d_1 y, d_2 y = x|_{\Delta\{n-1,n\}}$ を満たすものが存在する.*

Proof. See [2]. (Theorem 1.3)
□

Proposition 2.2.0.4 *任意の simplicial set X に対し以下は同値である:*

1. *X は quasi-category である.*
2. *$(X, q(X))$ は weak complicial set である.*
   ここで $q(X) \coloneqq d(X) \cup \{d_0 x | x \in X_2, d_1 x \in d(X)\} \cup \bigcup_{n>2} X_n$ である.

Proof. horn $\Lambda^r[n] \to (X, q(X))$ を考える. $0 < r < n$ のときは明らかなので $r = 0, n$ としてよい. また考え方は同じなので $r = 0$ のみ考える. 定義より $\Delta\{0,1\} \hookrightarrow \Lambda^r[n] \to (X, q(X))$ は thin simplex である. よって Proposition 2.2.0.2 より拡張が存在する.

$x{:}\Delta^r[n]' \to (X, q(X))$ を考える. $n > 2$ に対しては明らかなので $n = 2$ としてよい. $r = 0$ のとき $d_1 x$ は thin simplex なので $d_0 y = d_1 x, d_1 y = s_0 d_0 d_1 x$ を満たす 2-simplex $y \in X_2$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_0 x"] & \\
0 \arrow[ur, "d_2 x"] \arrow[rr, "d_1 x"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "x"] & & 2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_1 x"] & \\
0 \arrow[ur] \arrow[rr, "s_0 d_0 d_1 x"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "y"] & & 2
\end{tikzcd}
$$

horn $\langle d_2 x, \bullet, d_2 y \rangle{:}\Lambda^1[2] \to X$ より 2-simplex $z{:}\Delta[2] \to X$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_2 x"] & \\
0 \arrow[ur, "d_2 y"] & & 2
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_2 x"] & \\
0 \arrow[ur, "d_2 y"] \arrow[rr] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "z"] & & 2
\end{tikzcd}
$$

これを用いて得られる horn $\langle x, \bullet, y, z\rangle \Lambda^1[3] \to X$ の拡張 $w \in X_3$ より 2-simplex $d_1w \in X_2$ を得る. これより $d_0x \in q(X)$ が従う.

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[rd, "d_0x"] & \\
& 1 \arrow[u, "d_2x"] \arrow[r, "d_1x"] & 3 \\
0 \arrow[ruu, "d_1z"] \arrow[ru] \arrow[rru, "s_0d_0d_1x"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[rd, "d_0x"] \arrow[d, phantom, "d_1w"] & \\
0 \arrow[ru, "d_1z"] \arrow[rr, "s_0d_0d_1x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}$$

$r = 1$ のとき d_0x, d_2x は thin simplex なので $d_0y = d_2x, d_1y = s_0d_0d_2x, d_0z = d_0x, d_1z = s_0d_0d_0x$ を満たす 2-simplex $y, z \in X_2$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[rd, "d_0x"] \arrow[d, phantom, "x"] & \\
0 \arrow[ru, "d_2x"] \arrow[rr, "d_1x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[rd, "d_2x"] \arrow[d, phantom, "y"] & \\
0 \arrow[ru] \arrow[rr, "s_0d_0d_2x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[rd, "d_0x"] \arrow[d, phantom, "z"] & \\
0 \arrow[ru] \arrow[rr, "s_0d_0d_0x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}$$

horn $\langle x, s_0d_0x, \bullet, y\rangle{:}\Lambda^2[3] \to X$ より 2-simplex $u \in X_2$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d, "d_2x"] \arrow[rd, "d_1x"] & \\
& 2 \arrow[r, "d_0x"] & 3 \\
0 \arrow[ruu, "d_2y"] \arrow[ru] \arrow[rru, "d_0x"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[rd, "d_1x"] \arrow[d, phantom, "u"] & \\
0 \arrow[ru, "d_2y"] \arrow[rr, "d_0x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}$$

また horn $\langle d_2y, \bullet, d_2z\rangle{:}\Lambda^1[2] \to X$ より 2-simplex $v{:}\Delta[2] \to X$ を得る.

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[rd, "d_2y"] & \\
0 \arrow[ru, "d_2z"] & & 2
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[rd, "d_2y"] \arrow[d, phantom, "v"] & \\
0 \arrow[ru, "d_2z"] \arrow[rr] & {} & 2
\end{tikzcd}$$

これを用いて得られる horn $\langle u, \bullet, z, v\rangle{:}\Lambda^1[3] \to X$ より 2-simplex $w \in X_2$ を得る.

これより $d_1x \in q(X)$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "d_1x"] & \\
 & 1 \arrow[u, "d_2y"'] \arrow[r, "d_0x"] & 3 \\
0 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[urr, "s_0d_0d_1x"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_1x"] \arrow[d, phantom, "w"] & \\
0 \arrow[ur] \arrow[rr, "s_0d_0d_1x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}
$$

$r = 2$ のとき d_1x は thin simplex なので $d_0y = d_1x, d_1y = s_0d_0d_1x$ を満たす 2-simplex $y \in X_2$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_0x"] \arrow[d, phantom, "x"] & \\
0 \arrow[ur, "d_2x"] \arrow[rr, "d_1x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_1x"] \arrow[d, phantom, "y"] & \\
0 \arrow[ur] \arrow[rr, "s_0d_0d_1x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}
$$

Proposition 2.2.0.3 より horn $\langle y, s_0d_1x, s_1d_1x, \bullet\rangle{:}\Lambda^3[3] \to X$ は拡張 $z \in X_3$ をもつ. これは

$$d_0d_3z = d_2d_0z = d_2y, \quad d_1d_3z = d_2d_1z = s_0d_1d_1x, \quad d_2d_3z = d_2d_2z = d_1x$$

を満たす.

$$
\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[d, "d_1x"] & \\
 & 3 & 1 \arrow[ul, "d_2y"'] \arrow[l, "s_0d_1d_1x"'] \\
0 \arrow[uur, "s_0d_1d_1x"] \arrow[ur] \arrow[urr, "d_1x"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "d_3z"] & \\
0 \arrow[ur, "d_1x"] \arrow[rr, "s_0d_1d_1x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}
$$

また horn $\langle d_2y, \bullet, d_0x\rangle{:}\Lambda^1[2] \to X$ より 2-simplex $w{:}\Delta[2] \to X$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_2y"] & \\
0 \arrow[ur, "d_0x"] & & 2
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_2y"] \arrow[d, phantom, "w"] & \\
0 \arrow[ur, "d_0x"] \arrow[rr] & {} & 2
\end{tikzcd}
$$

これらを用いて得られる horn $\langle w, d_3z, \bullet, x\rangle{:}\Lambda^2[3] \to X$ の拡張 u は

$$d_0d_2u = d_1d_0u = d_1w, \quad d_1d_2u = d_1d_1u = s_0d_1d_1x, \quad d_2d_2u = d_2d_3u = d_2x$$

を満たす.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d, "d_0x"] \arrow[dr, "d_1w"] & \\
 & 2 \arrow[r, "d_2y"] & 3 \\
0 \arrow[uur, "d_2x"] \arrow[ur] \arrow[urr, "s_0d_1d_1x"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr, "d_1w"] \arrow[d, phantom, "d_2u"] & \\
0 \arrow[ur, "d_2x"] \arrow[rr, "s_0d_1d_1x"'] & {} & 2
\end{tikzcd}
$$

先と同様にして

$$d_0v = d_2x \qquad d_1v = s_0d_1d_1x, \qquad d_2v = d_1w,$$

を満たす 2-simplex $v \in X_2$ がとれるので $d_2x \in q(X)$ である.
□

References

[1] Goerss, Paul G., Jardine, John, Simplicial Homotopy Theory

[2] Andre Joyal Quasi-categories and Kan complexes

[3] Dominic Verity, Complicial Sets

[4] Dominic Verity, Weak Complicial Sets I, Basic Homotopy Theory

[5] Dominic Verity, Weak Complicial Sets II, Nerves of Complicial Gray-Categories

[6] Emily Riehl, Complicial Sets, an Overture

[7] Ross Street, Parity complexes, Cahiers d Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques, Tome 32 (1991) no. 4, pp. 315-343.