位相群のハウスドルフ性について

@kyo_math1729

位相群のハウスドルフ化についてまとめます．群論，位相空間論と初歩的な圏論は仮定します．

1　位相群

位相群の定義と基本的事実を復習しておく．

定義 1.1. 集合 G が群かつ位相空間であって次を満たすとき G を位相群という．

(1) $(x, y) \mapsto xy$ で定まる写像 $G \times G \to G$ は連続である．
(2) $x \mapsto x^{-1}$ で定まる写像 $G \to G$ は連続である．

位相群の定義の条件 (1), (2) が成り立つとき G 上の群構造と位相構造が両立するという．群 G の部分集合 $A, B \subset G$ について

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\} \quad A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

と書く記法を用いると両立の条件はそれぞれ次のように書ける．

(1) $x, y \in G$ のとき xy の任意の近傍系 U についてある x の近傍 V と y の近傍 W があって $VW \subset U$ となる．
(2) $x \in G$ のとき x^{-1} の任意の近傍系 U についてある x の近傍 V があって $V^{-1} \subset U$ となる．

以下，混乱のない限り考えている群の単位元を e で書くこととする．

命題 1.1. G は位相群とする．元 $x \in G$ について写像 $L_x, R_x \colon G \to G$ をそれぞれ

$$L_x(g) = xg \quad R_x(g) = gx \ (g \in G)$$

とすると任意の $x \in G$ について L_x, R_x は同相写像である．

証明. 両立条件 (1) より L_x, R_x は連続であり，$L_{x^{-1}}, R_{x^{-1}}$ がそれぞれの逆写像であることが確認できる． □

なお，$I(g) = g^{-1}$ で定まる写像 $I \colon G \to G$ も同相写像で $I^{-1} = I$ であることも簡単に確認できる[*1]．

[*1] L_x, R_x, I をそれぞれ左移動，右移動，反転とよぶ．

命題 1.2. G は位相群で $H \subset G$ とする．

(1) H が G の部分群ならば $\overline{H}$ も G の部分群である．
(2) H が G の正規部分群ならば $\overline{H}$ も G の正規部分群である．

証明． (1) は straightforward なので省略する．

(2) を示すには任意の $x \in G$ をとって $x\overline{H}x^{-1} = \overline{H}$ を示せばよい．写像 $\psi\colon G \to G$ を $\psi(g) = xgx^{-1}$ とするとこれは同相写像なので $\psi(\overline{H}) = \overline{\psi(H)}$，つまり $x\overline{H}x^{-1} = \overline{xHx^{-1}}$ が成り立つ．H が正規のとき $xHx^{-1} = H$ なので $x\overline{H}x^{-1} = \overline{H}$ がわかる． □

系 1.3. G を位相群とするとき $\overline{\{e\}}$ は G の最小の閉正規部分群である．

注意 1.4. G を位相群とするとき命題 1.1 より元 $x \in G$ について

$$x\overline{\{e\}} = \overline{\{e\}}x = \overline{\{x\}}$$

である．

命題 1.5. 位相群は T_0 空間ならばハウスドルフである[*2]．

証明． G を T_0 位相群として異なる 2 元 $x, y \in G$ をとる．T_0 公理より x, y のどちらか一方のみを含む開集合 $U \subset G$ が存在する．命題 1.1 より $y \in U$ かつ $y = e$ として一般性を失わない．

$e = e^2$ なので両立条件 (1) より e の開近傍 V があって $V^2 \subset U$ となる．このとき $W = (\overline{V})^c$ とおくとこれは開集合で

$$x \in W\ ,\ y \in V\ ,\ W \cap V = \emptyset$$

となっていることが確認できる． □

なおこの命題は任意の一様空間まで一般化できる．

系 1.6. 位相群において T_0，T_1，ハウスドルフは同値．

位相群 G の部分群 H は相対位相を入れて位相群となる．また H が正規部分群のとき剰余群 G/H は商位相を入れて位相群となる．（証明は略）

命題 1.7. G は位相群で $H \subset G$ は正規部分群とする．このとき以下は同値．

(1) G/H はハウスドルフ位相群
(2) H は閉集合

証明． $\pi\colon G \to G/H$ を標準射影とすると $H = \pi^{-1}(G/H$ の単位元$)$ なので命題 1.1 と系 1.6 よりわかる． □

次の定理が今回の主定理となる．

[*2] 実際には $T_0 \Rightarrow$ 完全正則までいえる．

定理 1.8. 位相群 G について $\tilde{G} = G/\overline{\{e\}}$ とおき $\pi\colon G \to \tilde{G}$ を標準射影とする．このとき $\tilde{G}$ はハウスドルフ位相群であって次の普遍性を満たす．

任意のハウスドルフ位相群 H と連続準同型 $f\colon G \to H$ についてある連続準同型 $\tilde{f}\colon \tilde{G} \to H$ がただ一つ存在して $f = \tilde{f} \circ \pi$ となる．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "\pi"'] & \forall H \\ \tilde{G} \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

証明． $\overline{\{e\}}$ は閉正規部分群だったので $\tilde{G}$ はハウスドルフ位相群である．

普遍性を示す．H はハウスドルフ位相群で $f\colon G \to H$ を連続準同型とする．$\tilde{f}\colon \tilde{G} \to H$ を次で定義する．（注意 1.4 より $\tilde{G} = \left\{\overline{\{x\}} \mid x \in G\right\}$ である）

$$\tilde{f}\left(\overline{\{x\}}\right) = f(x)$$

こう定義すると明らかに $f = \tilde{f} \circ \pi$ が成り立ち，また $\tilde{f}$ の一意性は π の全射性から自明なので，あとは $\tilde{f}$ の well-defined 性さえ確認すればよい．

$x, y \in G$ が $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ であるとしよう．$y = e$ として一般性を失わない．もし $f(x) \neq f(e)$ ならば H のハウスドルフ性より開集合 $U, V \subset H$ があって次を満たす．

$$f(x) \in U\ ,\ f(e) \in V\ ,\ U \cap V = \emptyset$$

よって $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は x と e を分離する開集合である．しかし $\overline{\{x\}} = \overline{\{e\}}$ より $x \in \overline{\{e\}}$ なので x は e から位相的に分離できず矛盾である．従って $f(x) = f(e)$ となるので $\tilde{f}$ は well-defined である． $\square$

2 圏論的考察

定理 1.8 を圏論的に再考察してみよう．次のように 2 つの圏を定義する．

TopGrp：位相群と連続準同型のなす圏
HGrp：ハウスドルフ位相群と連続準同型のなす圏

このとき **HGrp** は **TopGrp** の部分圏なので包含関手 $I\colon \mathbf{HGrp} \to \mathbf{TopGrp}$ がある．これらの記号を用いると定理 1.8 は次のように圏論の言葉で言い換えられる．

定理 2.1. 各対象 $G \in \mathbf{TopGrp}$ について $(G/\overline{\{e\}}, \pi)$ はコンマ圏 $G \downarrow I$ の始対象である．

系 2.2. 包含関手 $I\colon \mathbf{HGrp} \to \mathbf{TopGrp}$ は左随伴をもつ.

このIの左随伴関手について少しみておこう．実は位相群 G に対してハウスドルフ位相群 $G/\overline{\{e\}}$ を得る操作は関手 $\mathbf{TopGrp} \to \mathbf{HGrp}$ を定めている.

補題 2.3. 位相群の間の連続準同型 $f\colon G_1 \to G_2$ に対して連続準同型 $\tilde{f}\colon G_1/\overline{\{e\}} \to G_2/\overline{\{e\}}$ で以下の図式を可換にするものがただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{G_1}"'] & G_2 \arrow[d, "\pi_{G_2}"] \\
G_1/\overline{\{e\}} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & G_2/\overline{\{e\}}
\end{tikzcd}$$

ただし π_{G_1}, π_{G_2} はそれぞれの標準射影とする.

証明. $\pi_{G_2} \circ f\colon G_1 \to G_2/\overline{\{e\}}$ に対して定理 1.8 を用いればよい. □

命題 2.4. 補題 2.3 により定まる $\mathbf{TopGrp}$ から $\mathbf{HGrp}$ への対応を H とするとこれは関手 $H\colon \mathbf{TopGrp} \to \mathbf{HGrp}$ である．つまり,

- $G \in \mathbf{TopGrp}$ に対し $H(G) = G/\overline{\{e\}}$
- 補題 2.3 の状況で $H(f) = \tilde{f}$

で関手が定まる.

証明. 位相群の恒等写像 $\mathrm{id}\colon G \to G$ について図式

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi_G"'] & G \arrow[d, "\pi_G"] \\
G/\overline{\{e\}} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & G/\overline{\{e\}}
\end{tikzcd}$$

は可換なので $H(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である.

また位相群の間の連続準同型 $f\colon G_1 \to G_2$，$g\colon G_2 \to G_3$ について図式

$$
\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{G_1}"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & G_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_{G_2}"] & G_3 \arrow[d, "\pi_{G_2}"] \\
G_1/\overline{\{e\}} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & G_2/\overline{\{e\}} \arrow[r, "\tilde{g}"'] & G_3/\overline{\{e\}}
\end{tikzcd}
$$

は可換なので $H(g \circ f) = H(g) \circ H(f)$ である． □

この関手 H が実は I の左随伴であることが確認できる．

定理 2.5. $H \dashv I$

証明． straightfoward なので省略する． □

3　一様空間論からの考察

最後に一様空間論からの考察も簡単にだが述べておく．前に命題 1.5 は一般に一様空間で成り立つことを述べた．G を位相群とするとき単位元の各開近傍 O に対して

$$U_O = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in O\}$$

とおくと $\mathcal{B} = \{U_O \mid O$ は単位元の開近傍 $\}$ を基本近縁系として G は一様空間となる．さらにこうして定まる一様構造について位相群の間の連続準同型 $f\colon G_1 \to G_2$ は一様連続となることが確認できる．

一様空間は一様構造で識別不能の同値関係で割ってハウスドルフ化できるのだった．この一様空間のハウスドルフ化のときの同値関係が位相群では正規部分群 $\overline{\{e\}}$ が導く同値関係と一致する．そのため位相群の一様空間としてのハウスドルフ化に群構造が well-defined に定義されるというのが定理 1.8 の主張であると思える．

参考文献

[1]　壬生雅道，位相群論概説，岩波書店，1976

[2]　T. レンスター，土岡俊介 訳，ベーシック圏論，丸善出版，2017

[3]　http://alg-d.com/math