

Modelo de markowitz na otimização de carteiras de investimentos usando o software r**Markowitz model in investment portfolio optimization using the r software**

DOI:10.34117/bjdv5n12-205

Recebimento dos originais: 15/11/2019

Aceitação para publicação: 13/12/2019

Tuany Esthefany Barcellos de Carvalho Silva

Bacharel em Estatística pela Universidade Federal Fluminense

Instituição: Universidade Federal Fluminense

Endereço: Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/n, Blocos G e H – Campus do Gragoatá

São Domingos – Niterói/RJ, Brasil

E-mail: tuanybarcellos@id.uff.br

Daiane Rodrigues do Santos

Doutora em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica

Instituição: Universidade Veiga de Almeida

Endereço: Rua Ibituruna, 108, Campos Tijuca – Rio de Janeiro/RJ, Brasil

E-mail: daianesantoseco@gmail.com

Marco Aurélio do Santos Sanfins

Doutor em Estatística pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituição: Universidade Federal Fluminense

Endereço: Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/n, Blocos G e H – Campus do Gragoatá

São Domingos – Niterói/RJ, Brasil

E-mail: marcosanfins@id.uff.br

RESUMO

Atualmente existem inúmeras opções de investimentos no mercado de capitais, e os investidores buscam cada vez mais maneiras de minimizar o risco de sua carteira de investimentos, a fim de manter o retorno desejado. Os estudos de Markowitz, 1952 foram a base para a Moderna Teoria de Carteiras, apresentando o método de diversificação como principal instrumento para a redução do risco global de uma carteira (portfolio) de investimentos. A Moderna Teoria de Carteiras teve início com a publicação do artigo Portfolio Selection por Markowitz (1952). A utilização da diversificação como forma de redução do risco de uma carteira foi amplamente discutida e comprovada por meio de estudos sobre a correlação entre os ativos.

A eficiência de uma carteira é relacionada pelo binômio risco e retorno, possibilitando que o investidor reduza o risco de seus investimentos para um determinado nível de retorno, alterando a alocação dos ativos. Assim sendo, nota-se a necessidade de monitoramento periódico das carteiras de investimentos. Para resolver tal problemática é de grande utilidade a aplicação de modelos matemáticos que ofereçam suporte às escolhas dos ativos e na definição de seus percentuais em uma carteira.

A finalidade deste trabalho, é empregar o modelo de Markowitz para otimizar carteiras de ativos negociados na B3. Utilizar o software R-project na modelagem dos dados, aplicando os pacotes e funções do mesmo objetivando construir uma Fronteira Eficiente.

Palavras chave: Markowitz, Otimização, Diversificação.

ABSTRACT

Today there are numerous investment options in the capital market, and investors are increasingly looking for ways to minimize the risk of their investment portfolio in order to maintain the desired return. Markowitz's studies, 1952, were the basis for the Modern Portfolio Theory, presenting the diversification method as the main instrument for reducing the overall risk of an investment portfolio. Modern Portfolio Theory began with the publication of the Portfolio Selection article by Markowitz (1952). The use of diversification as a way to reduce a portfolio's risk has been widely discussed and proven through studies on the correlation between assets.

The efficiency of a portfolio is related to the risk and return binomial, enabling investors to reduce the risk of their investments to a certain level of return by changing the allocation of assets. Thus, there is a need for periodic monitoring of investment portfolios. To solve this problem, it is very useful to apply mathematical models that support the choice of assets and the definition of their percentages in a portfolio.

The purpose of this paper is to employ the Markowitz model to optimize current equity portfolios. Use R-project software in data modeling, applying its packages and functions in order to build an Efficient Frontier.

Keywords: Markowitz, Optimization, Diversification.

1. INTRODUÇÃO

Harry Markowitz é um economista, cujo os estudos foram a base para a Moderna Teoria de Carteiras, essa teoria apresenta a diversificação como principal instrumento para a redução do risco global de um portfólio de investimentos. Chama – se de carteira de investimentos o conjunto de aplicações de um investidor, a eficiência de uma carteira é relacionada pelo binômio risco e retorno, ou seja, o investidor pode reduzir o risco de seus investimentos, alterando a alocação dos ativos, com o intuito de manter o retorno desejado.

Apesar de termos diversos modelos para otimização de investimentos, o presente trabalho utilizará o modelo de Markowitz, essa abordagem é baseada no modelo de otimização por média-variância, que tem como objetivo a alocação ótima ao longo da fronteira eficiente, minimizando o risco do portfólio. A teoria nos mostra que ao se realizar o processo para vários níveis de retorno, cria-se a denominada curva de Markowitz, que determina a fronteira para a qual as diferentes combinações de proporções de ativos de uma carteira promovam os maiores retornos com os menores riscos possíveis.

Temos então que o risco de uma carteira não é dado simplesmente pela soma ponderada do risco dos ativos individuais, para efetuar o cálculo deste risco é preciso considerar a correlação entre os ativos escolhidos. Se os Ativos fossem perfeitamente correlacionados, a diversificação do portfólio poderia eliminar o risco. O fato de os retornos dos ativos terem um alto grau de correlação, mas não serem perfeitamente correlacionados, implica em que a diversificação pode reduzir, mas não eliminar o risco.

2. OBJETIVO

Aplicar a teoria de otimização de portfólio de investimentos de Markowitz para otimizar carteiras de ações, listadas na bolsa de valores brasileira (B3), a fim de obter diferentes alocações para as classes de ativos minimizando o risco.

3. MATERIAL E MÉTODO

3.1 RISCO

Segundo Assaf Neto (2006), chama-se de risco o grau de incerteza sobre a rentabilidade de um investimento, ou seja, a chance de um certo investimento dar um retorno diferente do esperado, gerando ganho ou perda de capital e podendo, em casos extremos, se igualar ao valor investido. Na área financeira existem diversos tipos de risco, e ele é um dos principais fatores analisados pelos investidores. A volatilidade, ou desvio padrão, é uma medida de dispersão dos retornos de um título ou índice de mercado, ou seja, quanto mais o preço de uma ação varia num período curto de tempo, maior o risco de se ganhar ou perder dinheiro negociando esta ação. Risco de mercado pode ser definido como as oscilações de preço decorrentes de eventos que atingem sistematicamente todo o mercado. Por isso, também é conhecido como risco sistêmico. Visando mensurar o risco de uma carteira, para um retorno pré-definido, foi que surgiu a teoria de Markowitz, a qual traz a equação do risco (desvio-padrão) de uma carteira de dois ativos (i e j) como sendo:

$$\sigma_p = \sqrt{(w_i^2 \cdot \sigma_i^2) + (w_j^2 \cdot \sigma_j^2) + 2 \cdot w_i \cdot w_j \cdot \text{cov}_{i,j}} \quad (3.1)$$

De acordo com Sharpe (1995) as premissas adotadas por Markowitz para a construção de sua inovadora teoria foram: os investidores avaliam as carteiras baseando - se no retorno esperado e no desvio padrão dos retornos em um dado período, repelem o risco e escolhem carteiras com o menor risco dentre as carteiras de mesmo retorno, são completamente

racionais, sejam eles iniciantes ou profissionais da área, sempre escolhendo a carteira de maior retorno dentre as carteiras de mesmo risco, os ativos individuais são continuamente divisíveis, o que possibilita aos investidores a compra de frações dos ativos, existe uma taxa livre de risco, na qual os investidores podem tanto emprestar quanto tomar emprestado, os investidores têm a mesma opinião acerca da distribuição das probabilidades das taxas de retorno dos ativos, havendo, assim, um único conjunto de carteiras eficientes, impostos e custos de transação são irrelevantes. Após o estudo das premissas, Markowitz-1952 afirma que as variáveis que interessam aos investidores na hora de selecionar uma carteira, seriam o retorno esperado e o risco.

3.2 RETORNO ESPERADO DE UMA CARTEIRA

No mercado financeiro chamamos de retorno a expectativa em relação a um investimento, ou seja, quanto se espera ganhar ao investir em determinado ativo. Segundo Samanez (2007), o retorno esperado de um ativo em uma carteira de Ativo é a média central da distribuição probabilística dos retornos desse ativo. Este pode ser estimado calculando-se a soma dos produtos dos retornos possíveis pelos respectivos pesos de cada ativo na carteira.

Sendo:

$$E = \sum_{i=1}^n w_i \times \mu_i$$

(3.2)

Temos então,

E = Retorno esperado para carteira (%)

w_i = Peso/Proporção do ativo i na carteira.

μ_i = Média de retorno (valor esperado para o retorno) do i-ésimo ativo.

Financeiramente tratamos retorno como o ganho sobre um ativo, ou seja, a variação percentual do principal investido num determinado período.

3.3 COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO

Em probabilidade, a covariância de duas variáveis X e Y é uma medida da variabilidade conjunta destas variáveis aleatórias. Se as variáveis têm covariância positiva tendem a mostrar um comportamento no mesmo sentido e se tem covariância negativa tendem a mostrar

comportamento em sentido contrário. Segundo Assaf Neto (2008) temos que covariância e correlação são medidas que relacionam duas variáveis. A Covariância identifica de que forma duas variáveis se relacionam ao mesmo tempo. Se são variáveis aleatórias integráveis. Temos que a covariância entre X e Y é definida por:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

(3.3)

Se essa esperança existe, então pela linearidade da esperança temos que:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY - YE(X) - XE(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (3.4)$$

Assim, temos que existe a covariância entre duas variáveis integráveis se, e somente se, existe a esperança $E(XY)$.

Se $\text{Cov}(X, Y) = 0$, dizemos que são não-correlacionados, ou seja, essas variáveis não possuem nenhuma relação entre si. Se as variáveis apresentam covariância positiva $\text{Cov}(X, Y) > 0$, dizemos que elas são relacionadas diretamente, ou seja, o aumento de uma implica no aumento da outra. A covariância negativa $\text{Cov}(X, Y) < 0$ é observada quando a associação entre as variáveis ocorre de maneira inversa, ou seja, quando uma aumenta a outra diminui. A correlação explica o grau de relacionamento das variáveis. Essa medida de relação mostra como duas variáveis se movimentam e é medida pelo coeficiente de correlação, que varia entre -1 e 1. A correlação é expressada pela covariância das variáveis e seus respectivos desvio padrão.

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

(3.5)

Teremos correlação nula ($\rho = 0$) quando as variáveis apresentarem comportamentos independentes, ou seja, uma não influencia a outra. Chamamos de variáveis bem

correlacionadas quando o coeficiente for igual a um ($\rho = 1$) ou seja, se uma aumenta, a outra também aumentara, na mesma proporção. Se o valor correlacionado estiver entre 0 e 1, ($0 < \rho < 1$), temos variáveis positivamente correlacionadas, o que significa que, se uma aumenta, a outra também aumentara no mesmo sentido, mas não na mesma proporção.

3.4 MODELO DE MARKOWITZ: A ORIGEM DA MODERNA TEORIA DE CARTEIRAS

Na área financeira os investidores buscam obter o maior rendimento dos seus investimentos e ao mesmo tempo querem minimizar o risco. A principal contribuição aos modelos financeiros no que diz respeito aos desenhos dos fundamentos da teoria de composição de carteiras deve-se aos trabalhos de Harry Markowitz na década de 1950. A Teoria Moderna de Carteira é muito utilizada para seleção de carteiras de investimento, demonstrando como investidores podem utilizar o princípio da diversificação para buscar a melhor relação risco retorno de seus portfólios.

Os conceitos desta teoria foram inicialmente formulados por H. Markowitz, com a publicação do famoso artigo *Portfolio Selection* em 1952, assim foi instituída a nova abordagem para o conceito de risco dos investimentos, contrariando a ideia de que a melhor opção para a composição da carteira consistia na concentração de investimentos em ativos que ofereciam os maiores retornos e menor risco o que limitava as opções de investimentos e nem sempre se obtinha o retorno esperado, então Markowitz propôs que seria possível obter combinações mais eficientes de alocação de recursos por meio da avaliação e compensação do risco dos ativos que compunham a carteira e, assim, estruturou as bases sobre as quais se firmou a Teoria Moderna de Carteiras. O método de Markowitz possibilita que os investidores possam ser capazes de definir todas as carteiras ótimas, em relação ao binômio risco e retorno formando assim a fronteira eficiente, que nada mais é do que a melhor combinação de um conjunto de ativos que tenha o maior retorno dado um nível de risco ou com menor risco para um determinado retorno (SANTOS, 2006).

3.5 FRONTEIRA EFICIENTE

O conceito de fronteira eficiente trata-se da combinação de um determinado grupo de ações formando infinitas e diferentes carteiras. As carteiras da fronteira são chamadas de carteiras ótimas, ou seja, pela definição de Markowitz, fronteira eficiente é a linha das carteiras que apresentam o máximo retorno para um determinado nível de risco. Considerando o binômio risco-retorno, o investidor deverá sempre escolher uma das carteiras que compõem a fronteira

eficiente, em detrimento de qualquer outra carteira possível de ser construída com os ativos que ele selecionar. Um investidor tem como objetivo a maximização do retorno no seu investimento combinado ao menor risco que se possa obter para atingi-lo, ou seja, para um nível fixo de risco, os investidores buscariam o retorno máximo. Incontáveis carteiras podem ser formadas através das diferentes alocações dos ativos (LIMA 2016).

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a realização da análise foram coletados dados dos retornos mensais de quatro grandes empresas que compõem o Índice BOVESPA (IBOVESPA), os dados são referentes ao período de janeiro de 2019 a novembro de 2019.

Foram utilizadas funções criadas no software R juntamente com o pacote fPortfolio para aplicar o modelo Markowitz média-variância eficiente, usando o log retorno para efetuar os cálculos, a fim de exemplificar o modelo. As quatro ações analisadas, seus códigos e respectivos setores estão relacionados na tabela 1.

| Empresa | Código | Classificação setorial |
|------------------|--------|--|
| JBS | JBSS3 | Consumo não cíclico / Alimentos Processados / Carnes e Derivados |
| MRV | MRVE3 | Consumo Cíclico / Construção Civil / Incorporações |
| QUALICORP | QUAL3 | Saúde / Serv.Méd.Hospit. Análises e Diagnósticos |
| VALE | VAL3 | Materiais Básicos / Mineração / Minerais Metálicos |

Tabela 1 – Ações consideradas.

Fonte: Elaboração própria (2019)

Considerando um intervalo de tempo mensal, fazendo o log retorno dos ativos individualmente, pode - se observar abaixo na tabela 2, as estatísticas descritivas da rentabilidade dos ativos. Nota - se que o Ativo com menor risco e retorno é o VALE3, rendendo em média 0,0057 com um risco de 0,0025.

| Ativos | Mín | Média | Máx | Variância | Desvio padrão |
|--------------|----------|--------|--------|-----------|---------------|
| JBSS3 | - 0,1476 | 0,0563 | 0,2165 | 0,0178 | 0,1336 |
| MRVE3 | - 0,1104 | 0,0167 | 0,1700 | 0,0083 | 0,0915 |
| QUAL3 | - 0,0833 | 0,0833 | 0,281 | 0,0097 | 0,0987 |

| | | | | | |
|-------|---|--------|-------|--------|--------|
| | | 0,0 | 0 | | |
| | | 33 | | | |
| | | 2 | | | |
| VALE3 | - | 0,0057 | 0,078 | 0,0025 | 0,0506 |
| | | 0,0 | 1 | | |
| | | 88 | | | |
| | | 9 | | | |

Tabela 2 – Rentabilidade dos Ativos.

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados (2019)

Na figura 1 é possível observar os retornos mensais de cada ativo, nota – se que o ativo JBSS3 apresenta uma maior variabilidade no período analisado, juntamente com QUAL3 que apresentou o maior retorno dentre os ativos selecionados, chegando ao seu ponto de máximo em agosto de 2019, a VALE3 foi o ativo que expôs menor retorno mensal neste período.



Figura 1 – Retornos mensais dos ativos

Fonte: Elaboração própria (2019)

4.1 ANÁLISES

Para os seguintes cálculos foram utilizados o vetor de retorno esperado e a matriz de covariância dos ativos em questão.

Para a criação de portfólios contendo os ativos, a fim de mostrar pontos relativos a cada ativo individualmente, foram utilizados inicialmente os pacotes **fPortfolio** e **timeSeries**. Para uma melhor compreensão sobre a modelagem, foram criadas séries temporais dos ativos com a função **as.timeSeries** do pacote **timeSeries**.

Para obter o portfólio de tangência aplicou - se a função **tangencyPortfolio**, essa função tem como objetivo retornar o portfólio com a maior relação retorno/risco na fronteira eficiente.

Para o portfólio de Markowitz, isso é o mesmo que o índice de Sharpe. Para encontrar este ponto na fronteira, a relação retorno/risco é calculada a partir do retorno desejado e do risco alvo, como pode - se observar na tabela 3.

Na tabela 3 observa - se os pesos e riscos individuais de cada ativo no portfólio com a maior relação retorno/risco, onde MRVE3 possui peso e risco 0 e os ativos JBSS3 possui peso igual a 0,0771, risco igual a 0,1063, QUAL3 peso de 0,4024, risco de 0,8210 e VALE3 possui peso e risco de 0,5205 e 0,0727 respectivamente.

| Ativos | Pesos | Risco |
|---------------|--------------|--------------|
| JBSS3 | 0,0771 | 0,1063 |
| MRVE3 | 0,0000 | 0,0000 |
| QUAL3 | 0,4024 | 0,8210 |
| VALE3 | 0,5205 | 0,0727 |

Tabela 3 – Portfólio de tangência.

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados (2019)

A tabela 4 apresenta o retorno esperado de 0,0408 e o risco do portfólio eficiente de 0,0382. Neste portfólio obteve - se a melhor relação risco e retorno dentre os ativos selecionados, onde há um equilíbrio entre o risco e o retorno esperado pelo investidor.

| Retorno | Risco |
|----------------|--------------|
| 0,0408 | 0,0382 |

Tabela 4 – Retorno e Risco – geral do portfólio de tangência.

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados (2019)

Na figura 2 pode - se visualizar graficamente o portfólio de tangência, observando os gráficos de barras que apresentam os pesos e o risco dos ativos na carteira, foi escolhida como medida de risco a covariância dos ativos.

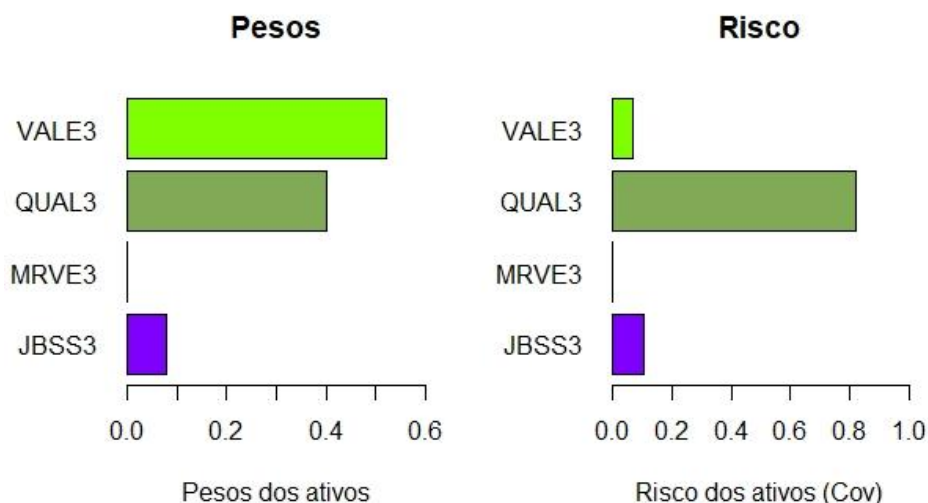


Figura 2 – Portfólio de Tangência

Fonte: Elaboração própria (2019)

Após aplicar o princípio da dominância para todas as combinações possíveis de portfólios e a função **minvariancePortfolio** obteve – se a Carteira de Variância Mínima (CMV) **minvariancePortfolio** portfólio da fronteira eficiente com o risco mínimo. Podemos observar os pesos e riscos do portfólio com risco mínimo, na tabela 5.

| Ativos | Pesos | Risco |
|--------|------------|--------|
| JBSS3 | 0,061 5 | 0,0615 |
| MRVE3 | 0,084 4 | 0,0844 |
| QUAL3 | 0,212 2 | 0,2122 |
| VALE3 | 0,641 9 | 0,6419 |

Tabela 5 – Portfólio de Variância Mínima.

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados (2019)

A tabela 6 traz os dados da Carteira de Variância Mínima (CMV), observa - se um retorno esperado de 0,0262, para um risco de 0,0309, este é o portfólio de menor risco dentre os quatro Ativos selecionados. O processo utilizado para encontrar a Carteira de Variância Mínima (CMV) se resume em buscar o portfólio de menor desvio-padrão, ou seja, risco dentre todas as combinações possíveis dos Ativos.

| Retorn o | Risco |
|-------------|--------|
| 0,0262 | 0,0309 |

Tabela 6 – Retorno e Risco – geral (CMV).

Fonte: Elaboração própria com base nos dados publicados (2019)

Para melhor visualização do portfólio, na figura 3 pode – se observar através dos gráficos de barras os pesos e os riscos individuais dos ativos na carteira de variância mínima (CMV).

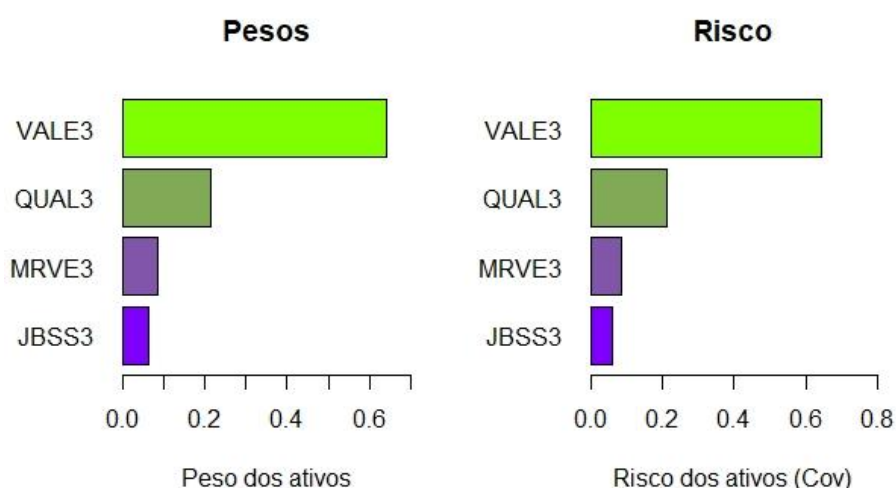


Figura 3 – Carteira de Variância Mínima

Fonte: Elaboração própria (2019)

Após aplicação do modelo de Markowitz obteve - se o portfólio de tangência e a carteira de variância mínima, sempre buscando portfólios que ofereçam o maior retorno para um determinado nível de risco, sendo possível determinar a Fronteira Eficiente (figura 4). A Fronteira apresenta as carteiras ótimas de Markowitz, ou seja, aquelas com melhor relação risco/retorno. A partir da CMV, foi feito um ponto em todas as combinações de Ativos que possuem o menor nível de risco para qualquer retorno superior ao da CMV. Ainda observando a figura 4, de acordo com a Teoria de Markowitz, não são indicados investimentos nos portfólios abaixo do ponto destacado em vermelho, pois com o mesmo nível de risco pode - se investir nos portfólios acima do ponto, obtendo um retorno estimado maior. No geral o gráfico inclui a fronteira eficiente, a linha de tangência e o portfólio de tangência para uma taxa livre de risco, representado pelo ponto de cor azul na fronteira e o portfólio onde todos os ativos possuem pesos iguais, nomeado por EWP. O intervalo da proporção é impresso no eixo do lado direito do gráfico.

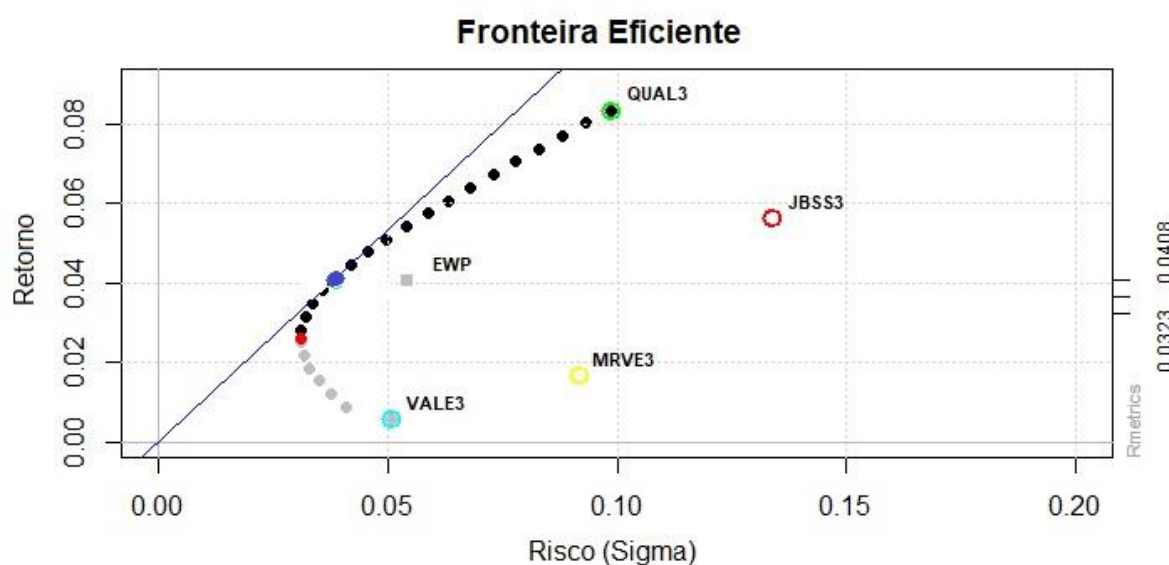


Figura 4 – Fronteira Eficiente

Fonte: Elaboração própria (2019)

A diversificação melhora a eficiência do portfólio, pois na medida em que novos ativos são adicionados o risco total do portfólio é reduzido, quando favorecidos por correlações negativas, já o retorno da carteira será determinado pela ponderação dos retornos dos ativos individuais.

A diversificação entre investimentos tem como objetivo evitar que toda a sua rentabilidade esteja exposta ao mesmo tipo de risco, o que é de extrema importância para obter uma melhor relação risco/retorno do portfólio, a figura 4 propõe a melhor relação, indicando o ponto ótimo da carteira do retorno esperado em relação ao risco a ser tomado.

5. CONCLUSÃO

A Teoria desenvolvida por Markowitz (1952) é uma forma muito interessante para efetuar cálculos de proporções de ativos em um portfólio diversificado. Este trabalho objetivou exemplificar a Teoria Moderna do Portfólio com uma aplicação no software R, buscando aumentar o retorno esperado, sem que fosse preciso aumentar em demasiado o risco. A aplicação da teoria mostrou que o risco de uma carteira não é dado simplesmente pela soma ponderada do risco dos ativos individuais, precisa - se considerar a correlação existente entre os ativos, evidenciando as vantagens de uma correlação negativa entre os mesmos, para que estes compensem em suas oscilações as grandes volatilidades. Partindo do entendimento que todo investidor busca o maior retorno possível dado certo nível de risco.

Para qualquer valor de risco, a fronteira eficiente de Markowitz identifica um ponto que é a carteira eficiente de maior retorno para um dado risco, assim como, para qualquer valor de

retorno, a fronteira também identifica carteira com risco mínimo. A Fronteira Eficiente é representada por uma linha composta de infinitos pontos correspondentes a diferentes carteiras e se estende da carteira de retorno máximo à Carteira de Variância Mínima. Essa diversidade de carteiras possibilita a escolha da melhor opção para cada investidor de acordo com suas preferências em relação ao risco retorno do investimento (SUCOLOTTI, 2007). A Teoria apresentada é uma ferramenta útil para a composição de carteiras que maximizem a relação risco retorno frente à volatilidade do mercado financeiro, os estudos de Markowitz (1952) trouxeram a diversificação de ativos como forma de redução do risco de uma carteira.

Obteve-se um portfólio de tangência com um nível de retorno (log retorno) esperado igual a 0,0408, para um risco de 0,0382, sendo este o portfólio com melhor relação risco e retorno para os ativos selecionados. Para a Carteira de Variância Mínima (CMV) observa-se um retorno esperado de 0,0262 com um nível de risco de 0,0309, dentre todos os portfólios gerados para tais ativos, este portfólio é o de menor risco.

Os resultados encontrados demonstram o mérito do desempenho da carteira gerada através do modelo Markowitz, com a aplicação do modelo usando os recursos do software foi alcançado o resultado esperado, determinando a Fronteira Eficiente dos ativos o portfólio de tangência e a carteira de variância mínima (CMV).

REFERÊNCIAS

- [1] FILHO ZWINGLIO DE OLIVEIRA GUIMARÃES; LIMA FERNANDO GUSTAVO NOGUEIRA. **Análise Estatística do Índice Ibovespa** ed. [S.l.: s.n.], 2015.
- [2] LIMA, T. C. **Aplicação do modelo de Markowitz para a otimização de carteiras de títulos públicos**. [S.l.]: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.
- [3] MARKOWITZ, H. M. **Portfolio Selection**. [S.l.]: Journal of finance n. 1, v. 7, p.77-91, 1952
- [4] NETO, A. A. **Mercado Financeiro**. [S.l.]: Atlas, 2007.
- [5] PEREIRA LEONARDO BOECHAT TAVARES; HENRIQUE, D. C. **Otimização de Investimentos pelo modelo de Markowitz via desenvolvimento de uma ferramenta em excel**. [S.l.]: UFSC, 2016.
- [6] SAMANEZ, C. P. **Gestão de investimentos e geração de valor**. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2007.

- [7] SANTOS H. P. DOS; AMBROSI, I. L. J. C. B. L. **Análise de risco em quatro sistemas de rotação de culturas para trigo, num período de dez anos, em Passo Fundo.** [S.l.]: Pesquisa Agropecuária Tropical - RS, 1999.
- [8] SANTOS, M. C. D. **Utilizando as Finanças Comportamentais para Promover o Desenvolvimento Economico? A Criação e Aplicação de um Novo Axioma Comportamental.** [S.l.]: PUC - RS, 2006.
- [9] SHARPE WILLIAN F.; ALEXANDER, G. J. B. J. V. I. **New Jersey: Prentice Hall.** 5. ed. [S.l.: s.n.], 1995.
- [10] WURTZ DIETHELM.; SETZ TOBIAS.; CHALABI YOHAN.; CHEN WILLIAN.; ELLIS ANDREW. **Portfolio optimization with R/ Rmetrics.** [S.l.: s.n.], 2015.