Econometria de Séries Temporais

O modelo de vetores autorregressivos

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.

Macroeconometria

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.
- Aconselhar os gestores de política econômica.

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.
- Aconselhar os gestores de política econômica.

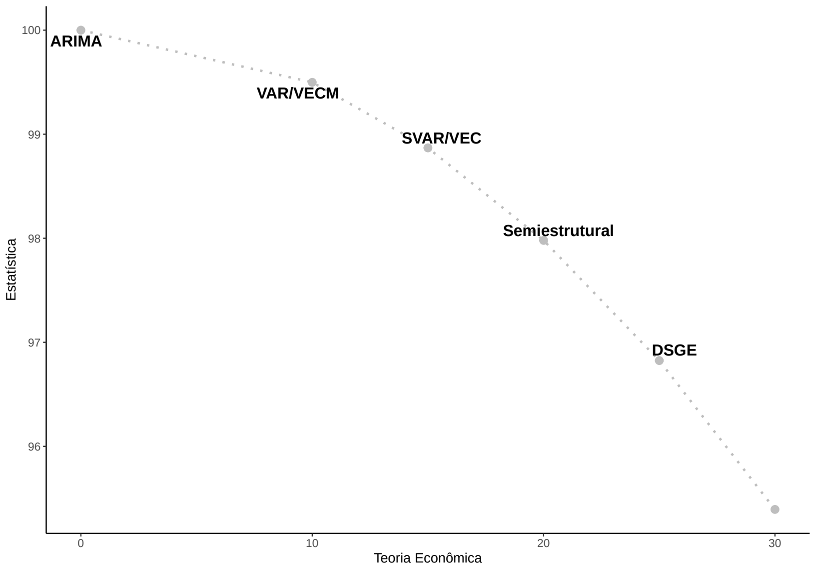
Como fazer isso?

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.
- Aconselhar os gestores de política econômica.

Como fazer isso? Sims (1980) sugeriu os **modelos VAR**.

Macroeconomia Quantitativa: peso relativo da estat x teoria



VAR(p)

Seja X_t um vetor $n \times 1$ com n variáveis **endógenas** tal que:

VAR(p)

Seja X_t um vetor $n \times 1$ com n variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

VAR(p)

Seja X_t um vetor $n \times 1$ com n variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde A é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas,

VAR(p)

Seja X_t um vetor $n \times 1$ com n variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde A é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas, B_0 é um vetor $n \times 1$ de constantes,

VAR(p)

Seja X_t um vetor $n \times 1$ com n variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde A é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas, B_0 é um vetor $n \times 1$ de constantes, B_i é a matriz $n \times n$ da i-ésima defasagem

VAR(p)

Seja X_t um vetor $n \times 1$ com n variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde A é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas, B_0 é um vetor $n \times 1$ de constantes, B_i é a matriz $n \times n$ da i-ésima defasagem e ε_t é um vetor $n \times 1$ de termos-erro tal que $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0; I_n)$ de um VAR de ordem p (Bueno 2012).

Em função da endogeneidade, vamos estimá-lo na sua forma **reduzida**.

VAR(p) na forma reduzida

Assumindo que possamos inverter a matriz A, temos:

$$X_t = A^{-1}B_0 + \sum_{i=1}^{p} A^{-1}B_i X_{t-i} + A^{-1}B\varepsilon_t$$

VAR(p) na forma reduzida

Assumindo que possamos inverter a matriz A, temos:

$$X_t = A^{-1}B_0 + \sum_{i=1}^{p} A^{-1}B_i X_{t-i} + A^{-1}B\varepsilon_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} + e_t.$$

VAR(p) na forma reduzida

Assumindo que possamos inverter a matriz A, temos:

$$X_t = A^{-1}B_0 + \sum_{i=1}^{p} A^{-1}B_i X_{t-i} + A^{-1}B\varepsilon_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} + e_t.$$

onde $\Phi_0 \equiv A^{-1}B_0$, $\Phi_i \equiv A^{-1}B_i, i = 0, 1, \ldots, p$ e $B\varepsilon_t \equiv Ae_t$ (Bueno 2012).

VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},$$

VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$\begin{aligned} y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\ z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}, \end{aligned}$$

onde y_t e z_t são estacionários,

VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},
\end{aligned}
$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\left(0, 1\right)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\left(0, 1\right)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \text{Cov}\left(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}\right) = 0$.

VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \mathrm{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Qual é a ordem do VAR?

VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$\begin{aligned} y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\ z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}, \end{aligned}$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0,1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0,1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Qual é a ordem do VAR? Escreva o modelo matricialmente.

VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},
\end{aligned}
$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Qual é a ordem do VAR? Escreva o modelo matricialmente. Note que **não podemos estimar essse modelo diretamente**!

VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t,$$

VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0,
\end{aligned}
$$

VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1,
\end{aligned}
$$

VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1, \\
A e_t &\equiv B \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1, \\
A e_t &\equiv B \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Reescreva o modelo acima com um **vetor de operadores defasagem**. Qual é a condição de estabilidade do sistema?

VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1, \\
A e_t &\equiv B \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Reescreva o modelo acima com um **vetor de operadores defasagem**. Qual é a condição de estabilidade do sistema? Note que agora podemos estimar o modelo!

VAR(1) na forma reduzida

Trabalhemos com o vetor de termos-erro (Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \equiv A^{-1}B\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_y \varepsilon_{yt} - a_{12}\sigma_z \varepsilon_{zt}}{1 - a_{12}a_{21}} \\ \frac{\sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21}\sigma_y \varepsilon_{yt}}{1 - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}.$$

Temos que:

VAR(1) na forma reduzida

Trabalhemos com o vetor de termos-erro (Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \equiv A^{-1}B\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_y \varepsilon_{yt} - a_{12}\sigma_z \varepsilon_{zt}}{1 - a_{12}a_{21}} \\ \frac{\sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21}\sigma_y \varepsilon_{yt}}{1 - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}.$$

Temos que:

- $E[e_t] = 0$

VAR(1) na forma reduzida

Trabalhemos com o vetor de termos-erro (Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \equiv A^{-1} B \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_y \varepsilon_{yt} - a_{12} \sigma_z \varepsilon_{zt}}{1 - a_{12} a_{21}} \\ \frac{\sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21} \sigma_y \varepsilon_{yt}}{1 - a_{12} a_{21}} \end{bmatrix}.$$

Temos que:

- $E\left[e_t\right] = 0$
- $\text{Cov}\left(e_t\right) \equiv \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_y^2 + a_{12}^2 \sigma_z^2}{(1 - a_{12} a_{21})^2} & -\frac{a_{21} \sigma_y^2 + a_{12} \sigma_z^2}{(1 - a_{12} a_{21})^2} \\ -\frac{a_{21} \sigma_y^2 + a_{12} \sigma_z^2}{(1 - a_{12} a_{21})^2} & \frac{\sigma_z^2 + a_{21}^2 \sigma_y^2}{(1 - a_{12} a_{21})^2} \end{bmatrix}$$

VAR(1) na forma reduzida

VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?

VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?
- E por que poderíamos querer fazer isso?

VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?
- E por que poderíamos querer fazer isso? Para poder estudar política econômica, por exemplo.

VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?
- E por que poderíamos querer fazer isso? Para poder estudar política econômica, por exemplo. Caso contrário, apenas com a forma reduzida, a implementação da política poderia alterar a trajetória das variáveis (Crítica de Lucas (Lucas Jr 1976; Lucas and Sargent 1978)).

Como escolher a ordem de um VAR(p)?

Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

$$AIC(m) = \ln \left| \widehat{\Gamma}_0(m) \right| + \frac{2}{T} m n^2;$$

Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

$$
\begin{aligned}
AIC(m) &= \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{2}{T} mn^2; \\
BIC(m) &= \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{\ln T}{T} mn^2;
\end{aligned}
$$

Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

$$
\begin{aligned}
AIC(m) &= \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{2}{T}mn^2;\\
BIC(m) &= \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{\ln T}{T}mn^2;\\
HQ(m) &= \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{\ln\ln T}{T}2mn^2,
\end{aligned}
$$

onde m é representa a ordem do modelo, mn^2 é o número de parâmetros a serem estimados e$\widehat{\Gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\widehat{e_t}\widehat{e_t}'}{T}$ é a matriz de covariância dos resíduos.

Vamos aos dados!

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.

Enders, Walter. 2015. *Applied Econometric Time Series Fourth Edition*. *New York (US): University of Alabama*.

Lucas, Robert, and Thomas Sargent. 1978. "After the Phillips Curve: Persistence of High Inflation and High Unemployment." In *FRBB, Conference Series*, 49–68. 19.

Lucas Jr, Robert E. 1976. "Econometric Policy Evaluation: A Critique." In *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1:19–46. 1.

Referências ii

Sims, Christopher A. 1980. "Macroeconomics and Reality." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1–48.

Stock, James H, and Mark W Watson. 2001. "Vector Autoregressions." *Journal of Economic Perspectives* 15 (4): 101–15.