Econometria de Séries Temporais

VAR: função impulso-resposta

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Como a economia se comporta após um choque?

O problema da identificação de parâmetros

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},
\end{aligned}
$$

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},
\end{aligned}
$$

onde y_t e z_t são estacionários,

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},
\end{aligned}
$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \Longrightarrow \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$.

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0,1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0,1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \Longrightarrow \mathrm{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Já sabemos que podemos escrever o modelo anterior na forma reduzida (Bueno 2012):

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t,$$

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},
\end{aligned}
$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Já sabemos que podemos escrever o modelo anterior na forma reduzida (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0,
\end{aligned}
$$

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},
\end{aligned}
$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0,1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0,1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \Longrightarrow \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Já sabemos que podemos escrever o modelo anterior na forma reduzida (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1,
\end{aligned}
$$

O problema da identificação de parâmetros

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt},$$

onde y_t e z_t são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\left(0, 1\right)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\left(0, 1\right)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}\right) = 0$. Já sabemos que podemos escrever o modelo anterior na forma reduzida (Bueno 2012):

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t,$$
$$\Phi_0 \equiv A^{-1} B_0,$$
$$\Phi_1 \equiv A^{-1} B_1,$$
$$A e_t \equiv B \varepsilon_t$$

O problema da identificação de parâmetros

O problema da identificação de parâmetros

- Não conseguimos identificar todos os parâmetros do modelo estrutural sem restrições adicionais (Bueno 2012).

O problema da identificação de parâmetros

- Não conseguimos identificar todos os parâmetros do modelo estrutural sem restrições adicionais (Bueno 2012). Por quê?

O problema da identificação de parâmetros

- Não conseguimos identificar todos os parâmetros do modelo estrutural sem restrições adicionais (Bueno 2012). Por quê?
  - Veja que, no modelo reduzido, estimamos nove parâmetros (seis da equação + $VAR[e_{1,t}]$, $VAR[e_{2,t}]$ e $Cov[e_{1,t}, e_{2,t}]$).

O problema da identificação de parâmetros

- Não conseguimos identificar todos os parâmetros do modelo estrutural sem restrições adicionais (Bueno 2012). Por quê?
  - Veja que, no modelo reduzido, estimamos nove parâmetros (seis da equação + $VAR[e_{1,t}]$, $VAR[e_{2,t}]$ e $Cov[e_{1,t}, e_{2,t}]$).
  - Já no modelo estrutural, são dez parâmetros.

O problema da identificação de parâmetros

- Não conseguimos identificar todos os parâmetros do modelo estrutural sem restrições adicionais (Bueno 2012). Por quê?
  - Veja que, no modelo reduzido, estimamos nove parâmetros (seis da equação + $VAR[e_{1,t}]$, $VAR[e_{2,t}]$ e $Cov[e_{1,t}, e_{2,t}]$).
  - Já no modelo estrutural, são dez parâmetros. O que fazer?

O problema da identificação de parâmetros

- Não conseguimos identificar todos os parâmetros do modelo estrutural sem restrições adicionais (Bueno 2012). Por quê?
  - Veja que, no modelo reduzido, estimamos nove parâmetros (seis da equação + $VAR[e_{1,t}]$, $VAR[e_{2,t}]$ e $Cov[e_{1,t}, e_{2,t}]$).
  - Já no modelo estrutural, são dez parâmetros. O que fazer?
- Sims (1980) propõe uma identificação recursiva: impor que alguns coeficientes sejam iguais a zero.

A decomposição de Cholesky

A decomposição de Cholesky

Vamos seguir Bueno (2012) e impor que $a_{12} = 0$. Sob essa restrição, temos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

A decomposição de Cholesky

Vamos seguir Bueno (2012) e impor que $a_{12} = 0$. Sob essa restrição, temos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}.$$

A decomposição de Cholesky

Os erros do modelo reduzido se tornam, portanto(Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y \varepsilon_{yt} \\ \sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21} \sigma_y \varepsilon_{yt} \end{bmatrix}.$$

A decomposição de Cholesky

Os erros do modelo reduzido se tornam, portanto(Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y \varepsilon_{yt} \\ \sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21} \sigma_y \varepsilon_{yt} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}\left[e_1\right] &= \sigma_y^2; \\ \mathrm{COV}\left[e_1, e_2\right] &= -a_{21}\sigma_y^2; \\ \mathrm{VAR}\left[e_2\right] &= \sigma_z^2 + a_{21}^2 \sigma_y^2. \end{aligned}$$

Número de restrições

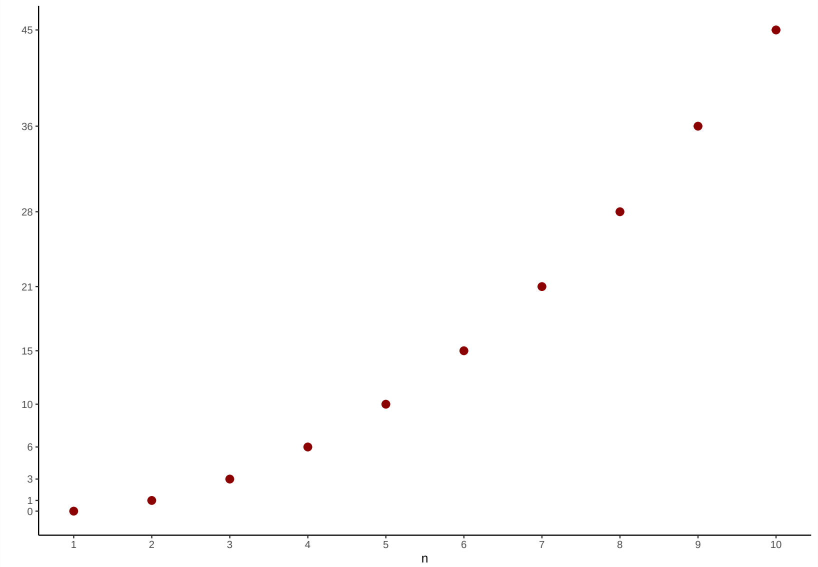
Quantas restrições precisamos impor em um VAR?

Número de restrições

Quantas restrições precisamos impor em um VAR? $\frac{n^2-n}{2}$.

Número de restrições

Quantas restrições precisamos impor em um VAR? $\frac{n^2-n}{2}$.



A decomposição triangular

No VAR com duas variáveis, a imposição foi:

A decomposição triangular

No VAR com duas variáveis, a imposição foi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

A decomposição triangular

No VAR com duas variáveis, a imposição foi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

E se fossem três variáveis?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

A decomposição triangular

No VAR com duas variáveis, a imposição foi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

E se fossem três variáveis?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Note que **a ordem das variáveis importa para as IRFs**!

Funções impulso-resposta

Em um VAR(p), se os autovalores do polinômio $I - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i L^i$ estiverem **fora** do círculo unitário, podemos utilizar a decomposição de Wold e rescrever o modelo como um VMA(∞).

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j e_{t-j}.$$

Funções impulso-resposta

Em um VAR(p), se os autovalores do polinômio $I - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i L^i$ estiverem **fora** do círculo unitário, podemos utilizar a decomposição de Wold e rescrever o modelo como um VMA(∞).

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j e_{t-j}.$$

(Note que o Bueno (2012) utilizou $\bar{X}$ ao invés de μ).

As três representações de um VAR(p)

O processo estocástico

Assim como os processos univariados, nós podemos, sob certas condições determinadas pelos parâmetros, escrever o processo estocástico de três formas:

O processo estocástico

Assim como os processos univariados, nós podemos, sob certas condições determinadas pelos parâmetros, escrever o processo estocástico de três formas:

- VAR(p):

O processo estocástico

Assim como os processos univariados, nós podemos, sob certas condições determinadas pelos parâmetros, escrever o processo estocástico de três formas:

- VAR(p): projeções.

O processo estocástico

Assim como os processos univariados, nós podemos, sob certas condições determinadas pelos parâmetros, escrever o processo estocástico de três formas:

- VAR(p): projeções.
- VARMA(p,q):

O processo estocástico

Assim como os processos univariados, nós podemos, sob certas condições determinadas pelos parâmetros, escrever o processo estocástico de três formas:

- VAR(p): projeções.
- VARMA(p,q): estacionariedade.

O processo estocástico

Assim como os processos univariados, nós podemos, sob certas condições determinadas pelos parâmetros, escrever o processo estocástico de três formas:

- VAR(p): projeções.
- VARMA(p,q): estacionariedade.
- VMA(∞):

O processo estocástico

Assim como os processos univariados, nós podemos, sob certas condições determinadas pelos parâmetros, escrever o processo estocástico de três formas:

- VAR(p): projeções.
- VARMA(p,q): estacionariedade.
- VMA(∞): funções impulso-resposta.

Vamos aos dados!

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.

Enders, Walter. 2015. *Applied Econometric Time Series Fourth Edition*. *New York (US): University of Alabama*.

Sims, Christopher A. 1980. "Macroeconomics and Reality." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1–48.