Introdução aos modelos DSGE

Modelo de Ciclos de Negócios Reais: dinâmica

João Ricardo Costa Filho

Sobre modelos

Good ideas shine far more brightly when supported by good models
Avinash Dixit (“The making of Economic Policy", 1996, p. 17)

All models are wrong.
George Box

Models are to be used, not believed.
Henri Theil (“Principles of Econometrics", 1971, p. vi)

Solução do modelo

Solução do modelo

Desafios para resolvermos o modelo:

- Sistema de equações não-lineares.

Solução do modelo

Desafios para resolvermos o modelo:

- Sistema de equações não-lineares.
- Sistema é dinâmico com:

Solução do modelo

Desafios para resolvermos o modelo:

- Sistema de equações não-lineares.
- Sistema é dinâmico com:
  - Equação de Euler forward-looking.

Solução do modelo

Desafios para resolvermos o modelo:

- Sistema de equações não-lineares.
- Sistema é dinâmico com:
  - Equação de Euler forward-looking.
  - Lei de movimento do capital backward-looking.

Solução do modelo

Desafios para resolvermos o modelo:

- Sistema de equações não-lineares.
- Sistema é dinâmico com:
  - Equação de Euler forward-looking.
  - Lei de movimento do capital backward-looking.
- Os agentes fazem escolhas com base em expectativas.

Solução do modelo

Desafios para resolvermos o modelo:

- Sistema de equações não-lineares.
- Sistema é dinâmico com:
    - Equação de Euler forward-looking.
    - Lei de movimento do capital backward-looking.
- Os agentes fazem escolhas com base em expectativas.

Expectativas + não-linearidade é algo difícil de lidar.

Solução do modelo

Desafios para resolvermos o modelo:

- Sistema de equações não-lineares.
- Sistema é dinâmico com:
  - Equação de Euler forward-looking.
  - Lei de movimento do capital backward-looking.
- Os agentes fazem escolhas com base em expectativas.

Expectativas + não-linearidade é algo difícil de lidar.
Não-linearidade + sistema dinâmico é (provavelmente) difícil de lidar.

Solução do modelo

Podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$E_t\left[f\left(x_t, x_{t+1}, s_t, s_{t-1}, z_t, \Theta\right)\right] = 0$$

onde

- $f(\cdot)$ é uma função não-linear
- x representa as variáveis de controle
- s são variáveis de estado
- z representa os choques estocásticos
- Θ é o vetor de parâmetros

Solução do modelo

Utilizando métodos de Programação Dinâmica, sabemos que a solução tem a forma:

$$s_t = h\left(s_{t-1}, z_t\right)$$

$$x_t = g\left(s_{t-1}, z_t\right)$$

onde $h(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são as **policy functions**.

Solução do modelo

Utilizando métodos de Programação Dinâmica, sabemos que a solução tem a forma:

$$s_t = h\left(s_{t-1}, z_t\right)$$
$$x_t = g\left(s_{t-1}, z_t\right)$$

onde $h(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são as **policy functions**.

- Modelos simples: **métodos globais** que encontram as **policy functions** (e.g. *value function iteration*).

Solução do modelo

Utilizando métodos de Programação Dinâmica, sabemos que a solução tem a forma:

$$s_t = h\left(s_{t-1}, z_t\right)$$
$$x_t = g\left(s_{t-1}, z_t\right)$$

onde $h(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são as **policy functions**.

- Modelos simples: **métodos globais** que encontram as **policy functions** (e.g. *value function iteration*).
- Modelos mais complexos: os métodos globais costumam não funcionar. (Com *deep learning* e computação quântica isso pode mudar).

Solução do modelo

Utilizando métodos de Programação Dinâmica, sabemos que a solução tem a forma:

$$s_t = h\left(s_{t-1}, z_t\right)$$
$$x_t = g\left(s_{t-1}, z_t\right)$$

onde $h(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são as **policy functions**.

- Modelos simples: **métodos globais** que encontram as **policy functions** (e.g. *value function iteration*).
- Modelos mais complexos: os métodos globais costumam não funcionar. (Com *deep learning* e computação quântica isso pode mudar).
- Alternativa: **métodos locais** (e.g. *método de perturbação*) à partir de aproximação/linearização do sistema (e.g. *expansão de Taylor*).

Solução do modelo — “Método de Perturbação”

Aproximação de qualquer ordem.

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

Aproximação de qualquer ordem. Dynare: até a terceira ordem.

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

Aproximação de qualquer ordem. Dynare: até a terceira ordem.

Qual ordem devo escolher?

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

Aproximação de qualquer ordem. Dynare: até a terceira ordem.

Qual ordem devo escolher? Depende.

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

Aproximação de qualquer ordem. Dynare: até a terceira ordem.

Qual ordem devo escolher? Depende.

- Se o objetivo for obter apenas funções impulso-resposta, uma aproximação de primeira ordem pode ser suficiente (Smets and Wouters 2003).

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

Aproximação de qualquer ordem. Dynare: até a terceira ordem.

Qual ordem devo escolher? Depende.

- Se o objetivo for obter apenas funções impulso-resposta, uma aproximação de primeira ordem pode ser suficiente (Smets and Wouters 2003).
- Se o objetivo for analisar o impacto no bem-estar social, o modelo deveria ter uma aproximação de segunda ordem (Schmitt-Grohé and Uribe 2007).

Solução do modelo — “Método de Perturbação”

Aproximação de qualquer ordem. Dynare: até a terceira ordem.

Qual ordem devo escolher? Depende.

- Se o objetivo for obter apenas funções impulso-resposta, uma aproximação de primeira ordem pode ser suficiente (Smets and Wouters 2003).
- Se o objetivo for analisar o impacto no bem-estar social, o modelo deveria ter uma aproximação de segunda ordem (Schmitt-Grohé and Uribe 2007).
- Choques de incerteza requerem aproximação de terceira ordem (Fernández-Villaverde et al. 2011).

Solução do modelo — “Método de Perturbação”

Expansão de Taylor de primeira ordem: $f(x; s; z)$ em torno do ponto $(x_0; s_0; z_0)$:

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

Expansão de Taylor de primeira ordem: $f(x;s;z)$ em torno do ponto $(x_0;s_0;z_0)$:

$$
\begin{aligned}
f(x,s,z) \cong\ & f(x_0,s_0,z_0) + f_x(x_0,s_0,z_0)(x-x_0) + f_s(x_0,s_0,z_0)(s-s_0) \\
& + f_z(x_0,s_0,z_0)(z-z_0)
\end{aligned}
$$

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

Expansão de Taylor de primeira ordem: $f(x; s; z)$ em torno do ponto $(x_0; s_0; z_0)$:

$$\begin{aligned} f(x,s,z) \cong\ & f(x_0,s_0,z_0) + f_x(x_0,s_0,z_0)(x-x_0) + f_s(x_0,s_0,z_0)(s-s_0) \\ & + f_z(x_0,s_0,z_0)(z-z_0) \end{aligned}$$

A aproximação será feita em torno de qual ponto?

Solução do modelo — "Método de Perturbação"

- Geralmente, nós conhecemos o equilíbrio estacionário do modelo. A aproximação será feita em torno desse ponto.

Solução do modelo — “Método de Perturbação”

- Geralmente, nós conhecemos o equilíbrio estacionário do modelo. A aproximação será feita em torno desse ponto.
- Aproximação de primeira ordem:

$$x_t = h_s \left(s_{t-1} - \bar{s}\right) + h_z z_t$$
$$y_t = g_s \left(s_{t-1} - \bar{s}\right) + g_z z_t$$

Aproximação de $f(x_t)$ em torno de $\bar{x}$:

- **Linearização**

Aproximação de $f(x_t)$ em torno de $\bar{x}$:

- **Linearização**

$$f\left(x_t\right) \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\left(x_t - \bar{x}\right)$$

Aproximação de $f(x_t)$ em torno de $\bar{x}$:

- **Linearização**

$$f\left(x_t\right) \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\left(x_t - \bar{x}\right)$$

- **Log-Linearização**

Aproximação de $f(x_t)$ em torno de $\bar{x}$:

- **Linearização**

$$f\left(x_t\right) \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\left(x_t - \bar{x}\right)$$

- **Log-Linearização**

$$\ln\left(f\left(x_t\right)\right) \cong \ln(f(\bar{x})) + \frac{f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}\left(x_t - \bar{x}\right)$$

Aproximação de $f(x_t)$ em torno de $\bar{x}$:

- **Linearização**

$$f\left(x_t\right) \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\left(x_t - \bar{x}\right)$$

- **Log-Linearização**

$$\begin{aligned} \ln\left(f\left(x_t\right)\right) &\cong \ln(f(\bar{x})) + \frac{f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}\left(x_t - \bar{x}\right) \\ &= \ln(f(\bar{x})) + \frac{\bar{x} f'(\bar{x})}{f(\bar{x})} \frac{\left(x_t - \bar{x}\right)}{\bar{x}} \end{aligned}$$

Aproximação de $f(x_t)$ em torno de $\bar{x}$:

- **Linearização**

$$f(x_t) \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x})$$

- **Log-Linearização**

$$\begin{aligned}
\ln(f(x_t)) &\cong \ln(f(\bar{x})) + \frac{f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}(x_t - \bar{x}) \\
&= \ln(f(\bar{x})) + \frac{\bar{x}f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}\frac{(x_t - \bar{x})}{\bar{x}} \\
&= \ln(f(\bar{x})) + \varepsilon_{f,x}\hat{x}_t
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon_{f,x}$ representa a elasticidade de $f(x)$ com relação a x e $\hat{x}_t$ é a variação percentual em torno do equilíbrio.

Log-linearização — Expansão de Taylor

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

Log-linearização — Expansão de Taylor

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

$$\ln(y_t) = \ln(A_t) + \alpha \ln(k_t) + (1-\alpha)\ln(h_t)$$

Log-linearização — Expansão de Taylor

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

$$\ln\left(y_t\right) = \ln\left(A_t\right) + \alpha \ln\left(k_t\right) + \left(1-\alpha\right)\ln\left(h_t\right)$$

$$\ln(\bar{y}) + \frac{y_t - \bar{y}}{\bar{y}} \cong \ln(\bar{A}) + \frac{A_t - \bar{A}}{\bar{A}} + \alpha\left(\ln(\bar{k}) + \frac{k_t - \bar{k}}{\bar{k}}\right)$$

Log-linearização — Expansão de Taylor

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(y_t\right) = \ln\left(A_t\right) + \alpha \ln\left(k_t\right) + (1-\alpha)\ln\left(h_t\right) \\
&\ln(\bar{y}) + \frac{y_t - \bar{y}}{\bar{y}} \cong \ln(\bar{A}) + \frac{A_t - \bar{A}}{\bar{A}} + \alpha\left(\ln(\bar{k}) + \frac{k_t - \bar{k}}{\bar{k}}\right) \\
&+ (1-\alpha)\left(\ln(\bar{h}) + \frac{h_t - \bar{h}}{\bar{h}}\right) \\
&\hat{y}_t \cong \hat{A}_t + \alpha \hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{h}_t
\end{aligned}
$$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln\left(X_t\right) - \ln(\bar{X})$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t/\bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t / \bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$
- Portanto: $e^{\hat{X}_t} \cong e^0 + e^0 \left(\hat{X}_t - 0\right) = 1 + \hat{X}_t \Rightarrow \hat{X}_t \cong \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t / \bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$
- Portanto: $e^{\hat{X}_t} \cong e^0 + e^0 \left(\hat{X}_t - 0\right) = 1 + \hat{X}_t \Rightarrow \hat{X}_t \cong \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$
- Ou seja, $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t / \bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$
- Portanto: $e^{\hat{X}_t} \cong e^0 + e^0 \left(\hat{X}_t - 0\right) = 1 + \hat{X}_t \Rightarrow \hat{X}_t \cong \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$
- Ou seja, $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t$

Em resumo:

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t / \bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$
- Portanto: $e^{\hat{X}_t} \cong e^0 + e^0 \left(\hat{X}_t - 0\right) = 1 + \hat{X}_t \Rightarrow \hat{X}_t \cong \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$
- Ou seja, $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t$

Em resumo:

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t / \bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$
- Portanto: $e^{\hat{X}_t} \cong e^0 + e^0 \left(\hat{X}_t - 0\right) = 1 + \hat{X}_t \Rightarrow \hat{X}_t \cong \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$
- Ou seja, $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t$

Em resumo:

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- $X_t = \bar{X} e^{\hat{X}_t}$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t/\bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$
- Portanto: $e^{\hat{X}_t} \cong e^0 + e^0\left(\hat{X}_t - 0\right) = 1 + \hat{X}_t \Rightarrow \hat{X}_t \cong \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$
- Ou seja, $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t$

Em resumo:

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- $X_t = \bar{X}e^{\hat{x}_t}$
- $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\tilde{X}_t + b\hat{Y}_t$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- Note que $e^{\hat{X}_t} = X_t/\bar{X}$ e $\overline{\hat{X}} = 0$
- Portanto: $e^{\hat{X}_t} \cong e^0 + e^0\left(\hat{X}_t - 0\right) = 1 + \hat{X}_t \Rightarrow \hat{X}_t \cong \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$
- Ou seja, $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t$

Em resumo:

- $\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$
- $X_t = \bar{X}e^{\hat{x}_t}$
- $e^{a\hat{X}_t + b\hat{Y}_t} \cong 1 + a\tilde{X}_t + b\hat{Y}_t$
- $\hat{x}_t\hat{y}_t \cong 0$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

$$\ln y_t = \ln A_t + \alpha \ln k_t + (1-\alpha) \ln h_t$$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

$$\ln y_t = \ln A_t + \alpha \ln k_t + (1-\alpha) \ln h_t$$
$$\ln y_t - \ln \bar{y} = \ln A_t - \ln \bar{A} + \alpha \ln k_t - \alpha \ln \bar{k} + (1-\alpha) \ln h_t - (1-\alpha) \ln \bar{h}$$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Função de produção: $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

$$\begin{aligned}
&\ln y_t = \ln A_t + \alpha \ln k_t + (1-\alpha)\ln h_t \\
&\ln y_t - \ln \bar{y} = \ln A_t - \ln \bar{A} + \alpha \ln k_t - \alpha \ln \bar{k} + (1-\alpha)\ln h_t - (1-\alpha)\ln \bar{h} \\
&\hat{y}_t \cong \hat{A}_t + \alpha \hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{h}_t
\end{aligned}$$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Lei de movimento do capital: $k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Lei de movimento do capital: $k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t$

Temos que

$$\bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} = \bar{i}e^{\hat{i}_t} + (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t}$$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Lei de movimento do capital: $k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t$

Temos que

$$\bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} = \bar{i}e^{\hat{i}_t} + (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t}$$

Divida os dois lados por $\bar{k}$ e lembre-se que $\frac{\bar{i}}{\bar{k}} = \delta$:

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Lei de movimento do capital: $k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t$

Temos que

$$\bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} = \bar{i}e^{\hat{i}_t} + (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t}$$

Divida os dois lados por $\bar{k}$ e lembre-se que $\frac{\bar{i}}{\bar{k}} = \delta$:

$$e^{\hat{k}_{t+1}} = \delta e^{\hat{i}_t} + (1-\delta)e^{\hat{k}_t}$$

Log-linearização — Método Uhlig (1999)

Lei de movimento do capital: $k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t$

Temos que

$$\bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} = \bar{i}e^{\hat{i}_t} + (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t}$$

Divida os dois lados por $\bar{k}$ e lembre-se que $\frac{\bar{i}}{\bar{k}} = \delta$:

$$\begin{aligned}
e^{\hat{k}_{t+1}} &= \delta e^{\hat{i}_t} + (1-\delta)e^{\hat{k}_t} \\
1 + \hat{k}_{t+1} &= \delta(1+\hat{i}_t) + (1-\delta)(1+\hat{k}_t) \\
\hat{k}_{t+1} &= \delta\hat{i}_t + (1-\delta)\hat{k}_t
\end{aligned}$$

Log-linearização do modelo RBC básico

Equação 1

$$\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha} \implies$$

Equação 1

$$\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha} \implies$$

$$\ln(\psi) + \varphi \ln(h_t) + \sigma \ln(c_t) = \ln(1-\alpha) + \ln(A_t) + \alpha\left(\ln(k_t) - \ln(h_t)\right)$$

Equação 1

$$\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha} \implies$$

$$\ln(\psi) + \varphi \ln(h_t) + \sigma \ln(c_t) = \ln(1-\alpha) + \ln(A_t) + \alpha \left(\ln(k_t) - \ln(h_t)\right)$$

$$-\ln(\psi) + \varphi \ln(\bar{h}) + \sigma \ln(\bar{c}) = \ln(1-\alpha) + \ln(\bar{A}) + \alpha \left(\ln(\bar{k}) - \ln(\bar{h})\right) =$$

Equação 1

$$\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha} \implies$$

$$\ln(\psi) + \varphi \ln(h_t) + \sigma \ln(c_t) = \ln(1-\alpha) + \ln(A_t) + \alpha\left(\ln(k_t) - \ln(h_t)\right)$$

$$-\ln(\psi) + \varphi \ln(\bar{h}) + \sigma \ln(\bar{c}) = \ln(1-\alpha) + \ln(\bar{A}) + \alpha\left(\ln(\bar{k}) - \ln(\bar{h})\right) =$$

$$\varphi \hat{h}_t + \sigma \hat{c}_t = \hat{A}_t + \alpha\left(\hat{k}_t - \hat{h}_t\right) \tag{1}$$

Equação 2

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + \alpha A_t \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha - 1} - \delta \right) \right] \iff$$

Equação 2

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + \alpha A_t \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha - 1} - \delta \right) \right] \iff$$

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right] \implies$$

Equação 2

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + \alpha A_t \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}} \right)^{\alpha-1} - \delta \right) \right] \iff$$

$$c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right] \implies$$

$$(-\sigma)\bar{c}^{-\sigma-1} dc_t = \beta \left(1 + \bar{r} - \delta\right) (-\sigma) \bar{c}^{-\sigma-1} E_t \left[dc_{t+1} \right] + \beta \bar{c}^{-\sigma} E_t \left[dr_{t+1} \right]$$

Equação 2

$$
\begin{aligned}
&c_t^{-\sigma} = \beta E_t\left[c_{t+1}^{-\sigma}\left(1 + \alpha A_t \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}}\right)^{\alpha-1} - \delta\right)\right] \iff \\
&c_t^{-\sigma} = \beta E_t\left[c_{t+1}^{-\sigma}\left(1 + r_{t+1} - \delta\right)\right] \implies \\
&(-\sigma)\bar{c}^{-\sigma-1}dc_t = \beta\left(1 + \bar{r} - \delta\right)(-\sigma)\bar{c}^{-\sigma-1}E_t\left[dc_{t+1}\right] + \beta\bar{c}^{-\sigma}E_t\left[dr_{t+1}\right] \\
&\vdots \\
&E_t\left[\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t\right] = \frac{\beta}{\sigma}\bar{r}E_t\left[\hat{r}_{t+1}\right] \implies
\end{aligned}
$$

Equação 2

$$
\begin{aligned}
&c_t^{-\sigma} = \beta E_t\big[c_{t+1}^{-\sigma}\big(1 + \alpha A_t \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}}\right)^{\alpha-1} - \delta\big)\big] \iff \\
&c_t^{-\sigma} = \beta E_t\big[c_{t+1}^{-\sigma}\big(1 + r_{t+1} - \delta\big)\big] \implies \\
&(-\sigma)\bar{c}^{-\sigma-1}dc_t = \beta\left(1 + \bar{r} - \delta\right)(-\sigma)\bar{c}^{-\sigma-1}E_t\left[dc_{t+1}\right] + \beta\bar{c}^{-\sigma}E_t\left[dr_{t+1}\right] \\
&\vdots \\
&E_t\left[\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t\right] = \frac{\beta}{\sigma}\bar{r}E_t\left[\hat{r}_{t+1}\right] \implies \\
&E_t\left[\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t\right] = \frac{1 - \beta\left(1 - \delta\right)}{\sigma}E_t\left[\hat{A}_{t+1} + (1 - \alpha)\left(\hat{h}_{t+1} - \hat{k}_{t+1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2}
$$

Equação 3

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - c_t \implies$$

Equação 3

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - c_t \implies$$
$$dk_{t+1} = (1-\delta)dk_t + \bar{k}^{\alpha}\bar{h}^{1-\alpha}dA_t + \alpha\bar{A}\bar{k}^{\alpha-1}\bar{h}^{1-\alpha}dk_t +$$
$$(1-\alpha)\,\bar{A}\bar{k}^{\alpha}\bar{h}^{1-\alpha-1}dh_t - dc_t$$

Equação 3

$$
\begin{aligned}
&k_{t+1} = (1-\delta)k_t + A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - c_t \implies \\
&dk_{t+1} = (1-\delta)dk_t + \bar{k}^{\alpha}\bar{h}^{1-\alpha} dA_t + \alpha \bar{A}\bar{k}^{\alpha-1}\bar{h}^{1-\alpha} dk_t + \\
&(1-\alpha)\,\bar{A}\bar{k}^{\alpha}\bar{h}^{1-\alpha-1} dh_t - dc_t \\
&\vdots \\
&\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\hat{k}_t + \frac{\bar{y}}{\bar{k}}\left(\hat{A}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\,\hat{h}_t\right) - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Equação 4

$$\ln A_t = (1 - \rho_A) \ln \bar{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + \varepsilon_t$$

Equação 4

$$\ln A_t = (1-\rho_A)\ln \bar{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$-\ln \bar{A} = (1-\rho_A)\ln \bar{A} + \rho_A \ln \bar{A}_{t-1} =$$

Equação 4

$$
\begin{aligned}
&\ln A_t = (1-\rho_A)\ln \bar{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \\
&-\ln \bar{A} = (1-\rho_A)\ln \bar{A} + \rho_A \ln \bar{A}_{t-1} = \\
&\hat{A}_t = \rho_A \hat{A}_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned} \tag{4}
$$

Sistema log-linearizado

$$\varphi\hat{h}_t + \sigma\hat{c}_t = \hat{A}_t + \alpha\left(\hat{k}_t - \hat{h}_t\right) \tag{1}$$

$$E_t\left[\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t\right] = \frac{1-\beta\left(1-\delta\right)}{\sigma}E_t\left[\hat{A}_{t+1} + \left(1-\alpha\right)\left(\hat{h}_{t+1} - \hat{k}_{t+1}\right)\right] \tag{2}$$

$$\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\hat{k}_t + \frac{\bar{y}}{\bar{k}}\left(\hat{A}_t + \alpha\hat{k}_t + \left(1-\alpha\right)\hat{h}_t\right) - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\hat{c}_t \tag{3}$$

$$\hat{A}_t = \rho_A\hat{A}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4}$$

Como definir os valores dos parâmetros?

Como definir os valores dos parâmetros?

- Estimação

Como definir os valores dos parâmetros?

- Estimação
  - Método de máxima verossimilhança.

Como definir os valores dos parâmetros?

- Estimação
  - Método de máxima verossimilhança.
  - Método dos momentos.

Como definir os valores dos parâmetros?

- Estimação
  - Método de máxima verossimilhança.
  - Método dos momentos.
  - Métodos bayesianos

Como definir os valores dos parâmetros?

- Estimação
  - Método de máxima verossimilhança.
  - Método dos momentos.
  - Métodos bayesianos
- Calibração

Calibração

Quando calibrar? (Canova 2007, cap. 7)

- "[...]one wants to calibrate a model (in the sense of selecting reasonable parameters values) because there is no data to estimate its parameters." (e.g. alteração de alíquota de tributos em uma reforma).

Quando calibrar? (Canova 2007, cap. 7)

- "[...]one wants to calibrate a model (in the sense of selecting reasonable parameters values) because there is no data to estimate its parameters." (e.g. alteração de alíquota de tributos em uma reforma).
- "[...] a procedure is employed because the sample is too short to obtain reasonable estimates of a large scale and possible intricate model."

Quando calibrar? (Canova 2007, cap. 7)

- "[...]one wants to calibrate a model (in the sense of selecting reasonable parameters values) because there is no data to estimate its parameters." (e.g. alteração de alíquota de tributos em uma reforma).
- "[...] a procedure is employed because the sample is too short to obtain reasonable estimates of a large scale and possible intricate model."
- "Finally, some users interpret calibration as an econometric technique where the parameters are estimated using "economic", as opposed to "statistical", criteria."

Sobre a calibração

Calibration is just moment matching without standard errors.

Jon Steinsson

Veja aqui (dica do Tomás R. Martinez)

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

1) Escolha a pergunta a ser respondida.

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

1) Escolha a pergunta a ser respondida.
2) Escolha o arcabouço teórico (modelo) apropriado.

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

1) Escolha a pergunta a ser respondida.
2) Escolha o arcabouço teórico (modelo) apropriado.

- "[. . .] modern business cycle models are stochastic versions of neoclassical growth theory."

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

1) Escolha a pergunta a ser respondida.
2) Escolha o arcabouço teórico (modelo) apropriado.

- "[...] modern business cycle models are stochastic versions of neoclassical growth theory."

3) Construa o modelo.

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

1) Escolha a pergunta a ser respondida.
2) Escolha o arcabouço teórico (modelo) apropriado.

- “[. . .] modern business cycle models are stochastic versions of neoclassical growth theory.”

3) Construa o modelo.

- “A model environment must be selected based on the question being addressed.”

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

1) Escolha a pergunta a ser respondida.
2) Escolha o arcabouço teórico (modelo) apropriado.

- “[. . .] modern business cycle models are stochastic versions of neoclassical growth theory.”

3) Construa o modelo.

- “A model environment must be selected based on the question being addressed.”

4) Calibre o modelo

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

1) Escolha a pergunta a ser respondida.
2) Escolha o arcabouço teórico (modelo) apropriado.

- "[. . .] modern business cycle models are stochastic versions of neoclassical growth theory."

3) Construa o modelo.

- "A model environment must be selected based on the question being addressed."

4) Calibre o modelo

- "data are used to calibrate the model economy so that it mimics the world as closely as possible along a limited, but clearly specified, number of dimensions."

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

5) Faça o experimento

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

5) Faça o experimento

- "first a set of statistics that summarize relevant aspects of the behavior of the actual economy is selected.

5) Faça o experimento

- "first a set of statistics that summarize relevant aspects of the behavior of the actual economy is selected. Then the computational experiment is used to generate many independent realizations of the equilibrium process for the model economy."

Experimentos computacionais (Kydland and Prescott 1996)

5) Faça o experimento

- "first a set of statistics that summarize relevant aspects of the behavior of the actual economy is selected. Then the computational experiment is used to generate many independent realizations of the equilibrium process for the model economy."
- "[the] set of statistics can be determined to any degree of accuracy for the model economy and compared with the values of the set of statistics for the actual economy."

Calibração: passo-a-passo[1]

1) Determine o maior conjunto possível de parâmetros à partir dos dados.

[1] Baseado em um slide do Tomás R. Martinez.

Calibração: passo-a-passo[1]

1) Determine o maior conjunto possível de parâmetros à partir dos dados.
2) Utilize a mesma parametrização de outras referências na literatura.

[1] Baseado em um slide do Tomás R. Martinez.

Calibração: passo-a-passo[1]

1) Determine o maior conjunto possível de parâmetros à partir dos dados.
2) Utilize a mesma parametrização de outras referências na literatura.
3) Calibre os parâmetros restantes para igualar momentos dos dados.

[1] Baseado em um slide do Tomás R. Martinez.

Calibração: passo-a-passo[1]

1) Determine o maior conjunto possível de parâmetros à partir dos dados.
2) Utilize a mesma parametrização de outras referências na literatura.
3) Calibre os parâmetros restantes para igualar momentos dos dados.

- "In calibration, we sometimes make the model economy inconsistent with the data on one dimension so that it will be consistent on another." (Kydland and Prescott 1996)

[1] Baseado em um slide do Tomás R. Martinez.

Calibração: passo-a-passo[1]

1) Determine o maior conjunto possível de parâmetros à partir dos dados.
2) Utilize a mesma parametrização de outras referências na literatura.
3) Calibre os parâmetros restantes para igualar momentos dos dados.

- "In calibration, we sometimes make the model economy inconsistent with the data on one dimension so that it will be consistent on another." (Kydland and Prescott 1996)

4) Valide os parâmetros com base em momentos dos dados que **não** foram utilizados para calibrar o modelo.

[1] Baseado em um slide do Tomás R. Martinez.

Vamos calibrar o nosso modelo

Parâmetros do nosso modelo

Quais os parâmetros do modelo RBC com o qual estamos trabalhando?

Parâmetro	Descrição
φ	Curvatura da função utilidade em relação às horas trabalhadas.
ψ	Peso da desutilidade do trabalho na função utilidade.
σ	Curvatura da função utilidade em relação ao consumo.
α	Participação do capital na função de produção.
β	Fator de desconto.
δ	Taxa de depreciação.
ρ_A	Coeficiente AR da produtividade.
σ_ε	Desvio-padrão dos erros do processo da produtividade.
$\bar{A}$	Nível da produtividade no equilíbrio estacionário.

Calibração dos parâmetros

Calibração dos parâmetros

- $\varphi = 1$: arbitrário (não façam isso em casa!)

Calibração dos parâmetros

- $\varphi = 1$: arbitrário (não façam isso em casa!)
- $\sigma = 2$: um valor muito comum na literatura.

Calibração dos parâmetros

- $\varphi = 1$: arbitrário (não façam isso em casa!)
- $\sigma = 2$: um valor muito comum na literatura.

Calibração: α

Calibração: α

Das C.P.O. das firmas, temos:

Calibração: α

Das C.P.O. das firmas, temos:

$$w_t = (1 - \alpha)\frac{y_t}{h_t}$$

Calibração: α

Das C.P.O. das firmas, temos:

$$w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{h_t}$$

Portanto,

$$\frac{P_t w_t h_t}{P_t y_t} = (1-\alpha)\frac{P_t y_t h_t}{h_t P_t y_t} = (1-\alpha) \tag{5}$$

Renda do trabalho (Penn World Table 10.01; média 2000-2019) $\approx 0.56 \therefore \alpha = 0.44$.

Calibração: δ

No equilíbrio estacionário sabemos que

$$\bar{I} = \delta \bar{K} \iff \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} = \delta \frac{\bar{K}}{\bar{Y}} \tag{6}$$

Dados da Penn World Table 10.01 (média 2000-2019): $\delta = 0.05$. Para dados trimestrais, podemos assumir uma taxa de depreciação linear (i.e. $\delta = 0.05/4$)

Calibração: β

- No equilíbrio estacionário, sabemos que:

$$\beta = \frac{1}{1 + \bar{r} + \delta}$$

- Média histórica da TIR real (Penn World Table 10.01; média 2000-2019): $\bar{r} = 7\%$ a.a.
  - Assumi a TIR bruta e reduzi a taxa de depreciação.

Calibração: β

- No equilíbrio estacionário, sabemos que:

$$\beta = \frac{1}{1 + \bar{r} + \delta}$$

- Média histórica da TIR real (Penn World Table 10.01; média 2000-2019): $\bar{r} = 7\%$ a.a.
    - Assumi a TIR bruta e reduzi a taxa de depreciação.
- Período (t): trimestre

Calibração: β

- No equilíbrio estacionário, sabemos que:

$$\beta = \frac{1}{1 + \bar{r} + \delta}$$

- Média histórica da TIR real (Penn World Table 10.01; média 2000-2019): $\bar{r} = 7\%$ a.a.
  - Assumi a TIR bruta e reduzi a taxa de depreciação.
- Período (t): trimestre
- $\beta = \frac{1}{(1+\bar{r}+\delta)^{1/4}} = 0.97$

Calibração: ψ

No equilíbrio estacionário, temos que $\bar{h} = \left[\frac{1-\alpha}{\psi} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}} \right)^{\alpha} \left(\frac{\bar{c}}{\bar{h}} \right)^{-\sigma} \right]^{\frac{1}{\varphi+\sigma-1}}$.

Calibração: ψ

No equilíbrio estacionário, temos que $\bar{h} = \left[\frac{1-\alpha}{\psi}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\bar{c}}{\bar{h}}\right)^{-\sigma}\right]^{\frac{1}{\varphi+\sigma-1}}$.

- Podemos utilizar as médias das horas trabalhadas anuais (Penn World Table 10.01; média 2000-2019):
  1766 horas $\implies \bar{h} = 1766/(14 \times 365) \approx 0.35$.

Calibração: ψ

No equilíbrio estacionário, temos que $\bar{h} = \left[\frac{1-\alpha}{\psi}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\bar{c}}{\bar{h}}\right)^{-\sigma}\right]^{\frac{1}{\varphi+\sigma-1}}$.

- Podemos utilizar as médias das horas trabalhadas anuais (Penn World Table 10.01; média 2000-2019):
  1766 horas $\Longrightarrow$ $\bar{h} = 1766/(14 \times 365) \approx 0.35$.
- Portanto, dados os outros parâmetros, temos que $\psi = 2.29$.

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1 - \alpha) \ln L_t$$

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital?

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital? Inventário perpétuo.

- Assuma K_0.

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital? Inventário perpétuo.

- Assuma K_0.
- Utilize a lei de movimento do capital.

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1 - \alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital? Inventário perpétuo.

- Assuma K_0.
- Utilize a lei de movimento do capital.
- Calcule A_t.

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital? Inventário perpétuo.

- Assuma K_0.
- Utilize a lei de movimento do capital.
- Calcule A_t.
  - E.g.: dados do "Observatório da Produtividade Regis Bonelli"

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital? Inventário perpétuo.

- Assuma K_0.
- Utilize a lei de movimento do capital.
- Calcule A_t.
  - E.g.: dados do "Observatório da Produtividade Regis Bonelli"
- Filtre a série de $\ln A_t$ e calcule $\hat{A}_t$.

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital? Inventário perpétuo.

- Assuma K_0.
- Utilize a lei de movimento do capital.
- Calcule A_t.
  - E.g.: dados do "Observatório da Produtividade Regis Bonelli"
- Filtre a série de $\ln A_t$ e calcule $\hat{A}_t$.
- Estime um AR(1) com a série de $\hat{A}_t$.

Calibração: ρ_A e σ_ε

Da função de produção, temos o resíduo de Solow:

$$A_t = \ln Y_t - \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln L_t$$

Como determinar o estoque de capital? Inventário perpétuo.

- Assuma K_0.
- Utilize a lei de movimento do capital.
- Calcule A_t.
  - E.g.: dados do "Observatório da Produtividade Regis Bonelli"
- Filtre a série de $\ln A_t$ e calcule $\hat{A}_t$.
- Estime um AR(1) com a série de $\hat{A}_t$.
- Vou usar os arbitrários $\rho_A = 0.9$ e $\sigma_\varepsilon = 0.01$ (não faça isso em casa!).

Parâmetros do nosso modelo

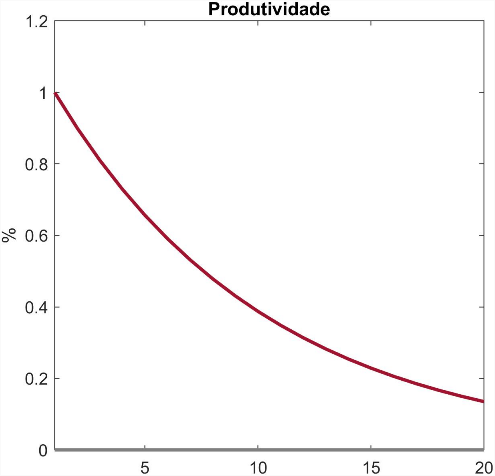
Quais os parâmetros do modelo RBC com o qual estamos trabalhando?

Parâmetro	Valor	Descrição
φ	1.00	Curvatura da função utilidade em relação às horas trabalhadas.
ψ	2.29	Peso da desutilidade do trabalho na função utilidade.
σ	2.00	Curvatura da função utilidade em relação ao consumo.
α	0.44	Participação do capital na função de produção.
β	0.97	Fator de desconto.
δ	0.05	Taxa de depreciação.
ρ_A	0.90	Coeficiente AR da produtividade.
σ_ε	0.01	Desvio-padrão dos erros do processo da produtividade.
$\bar{A}$	1.00	Nível da produtividade no equilíbrio estacionário.

O que acontece após um choque de produtividade?

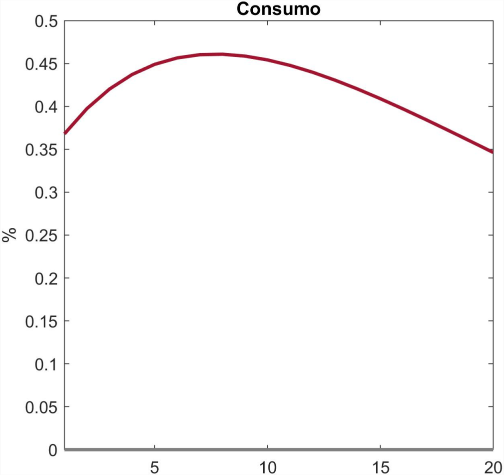
Simulação – Funções impulso-resposta

Produtividade



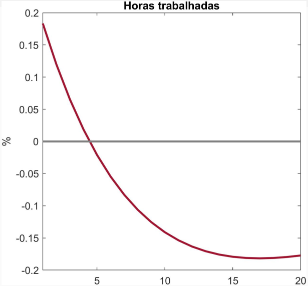
- Choque positivo de 1% (acima do equilíbrio estacionário).
- Comportamento auto-regressivo.

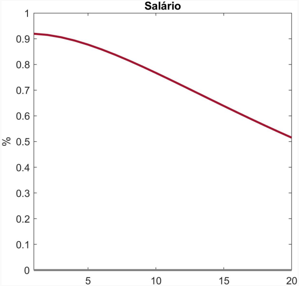
Consumo: *hump-shaped*



- As pessoas não gostam apenas de consumir (nível), mas também de manter o padrão de consumo.
- Esse é o padrão que observamos nos estudos empíricos com SVARs.
- Como chegamos nesse padrão sem nenhum tipo de custo de ajustamento ou formação de hábitos?

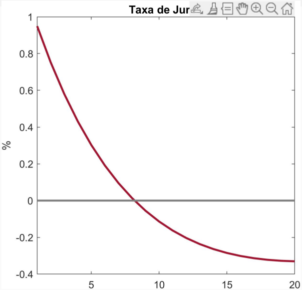
Trabalho

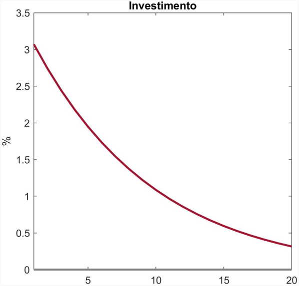




- Os trabalhadores estão mais produtivos.
- Isso aumenta a demanda por trabalho.
- E, em equilíbrio, aumentam o salário real e as horas trabalhadas inicialmente.

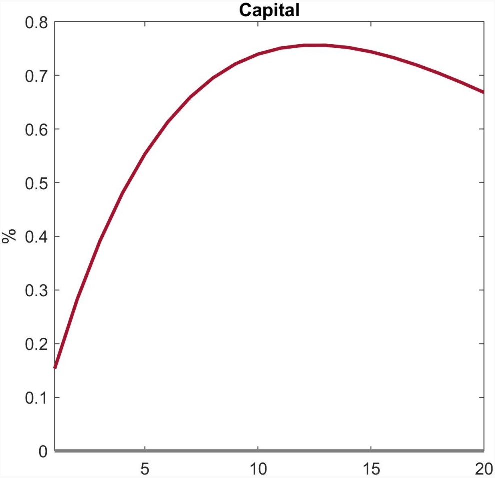
Investimento





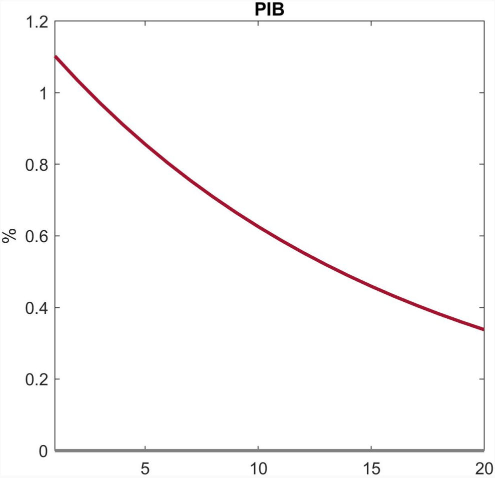
- O capital também está mais produtivo.
- Isso aumenta a demanda por capital.
- E, em equilíbrio, aumentam a taxa de juros real e o investimento, inicialmente.
- Ao longo do tempo, aumenta a oferta de capital e a taxa de juros cai.

Capital



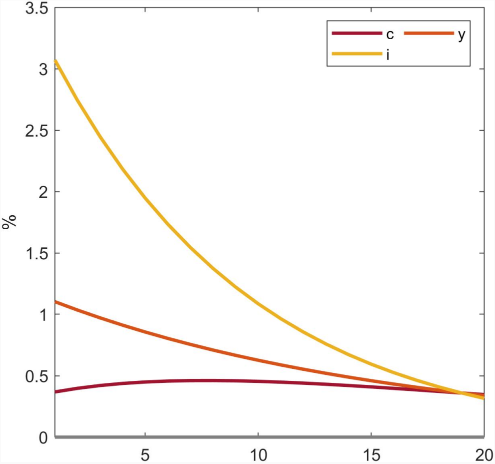
- O maior investimento aumenta o estoque de capital ao longo do tempo.
- Note que o capital não "pula".

PIB



- Ótica da renda: aumentos tantos na remuneração dos fatores, quanto nas quantidades.
- Ótica de produção: as empresas recrutaram mais trabalhadores e mais capital para produzir mais.
- Ótica do dispêndio: maior gasto com consumo e gasto com investimento.

IRFs em perspectiva



- PIB e investimento não são "hump-shaped".
- O consumo aumenta menos do que o 1% inicialmente.
- O PIB aumenta mais do que 1% inicialmente.

Canova, Fabio. 2007. *Methods for Applied Macroeconomic Research*. Vol. 13. Princeton university press.

Fernández-Villaverde, Jesús, Pablo Guerrón-Quintana, Juan F Rubio-Ramirez, and Martin Uribe. 2011. "Risk Matters: The Real Effects of Volatility Shocks." *American Economic Review* 101 (6): 2530–61.

Kydland, Finn E, and Edward C Prescott. 1996. "The Computational Experiment: An Econometric Tool." *Journal of Economic Perspectives* 10 (1): 69–85.

Schmitt-Grohé, Stephanie, and Martin Uribe. 2007. "Optimal Simple and Implementable Monetary and Fiscal Rules." *Journal of Monetary Economics* 54 (6): 1702–25.

Smets, Frank, and Raf Wouters. 2003. "An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area." *Journal of the European Economic Association* 1 (5): 1123–75.

Uhlig, Harald. 1999. "A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily." In *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, edited by R. Marimon and A. Scott, 30–61. Oxford: Oxford University Press.