Introdução aos modelos DSGE

Modelo de Ciclos de Negócios Reais: equilíbrio

João Ricardo Costa Filho

TH 2020

Modelos

Sobre modelos

We've got facts, they say. But facts aren't everything; at least half the battle consists in how one makes use of them!

Fyodor Dostoyevsky

Good ideas shine far more brightly when supported by good models

Avinash Dixit (“The making of Economic Policy", 1996, p. 17)

All models are wrong.

George Box

Models are to be used, not believed.

Henri Theil (“Principles of Econometrics", 1971, p. vi)

Sobre modelos

To become wise you've got to have models in your head. And you've got to array your experience – both vicarious and direct – on this latticework of models.

Charlie Munger

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.

Albert Einstein

Knowing reality means constructing systems of transformations that correspond, more or less adequately, to reality.

Jean Piaget

Modelos para quê? Page (2018)

- Entender a razão (implicações lógicas)

Modelos para quê? Page (2018)

- Entender a razão (implicações lógicas)
- Explicar

Modelos para quê? Page (2018)

- Entender a razão (implicações lógicas)
- Explicar
- Desenhar (instituições, mecanismos, incentivos...)

Modelos para quê? Page (2018)

- Entender a razão (implicações lógicas)
- Explicar
- Desenhar (instituições, mecanismos, incentivos...)
- Comunicar

Modelos para quê? Page (2018)

- Entender a razão (implicações lógicas)
- Explicar
- Desenhar (instituições, mecanismos, incentivos...)
- Comunicar
- Agir (política econômica)

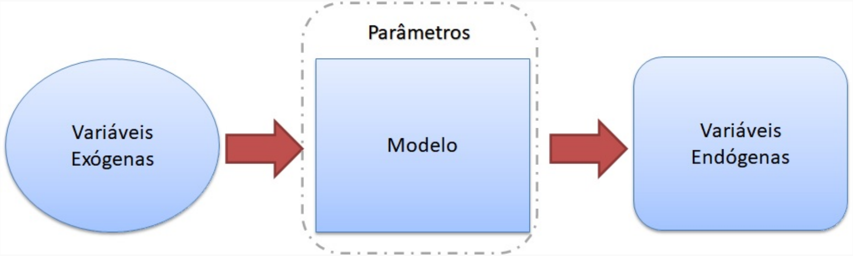
Modelos para quê? Page (2018)

- Entender a razão (implicações lógicas)
- Explicar
- Desenhar (instituições, mecanismos, incentivos...)
- Comunicar
- Agir (política econômica)
- Prever

Modelos para quê? Page (2018)

- Entender a razão (implicações lógicas)
- Explicar
- Desenhar (instituições, mecanismos, incentivos...)
- Comunicar
- Agir (política econômica)
- Prever
- Explorar

Modelos: como?



Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?

- Famílias, empresas e governo.

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?

- Famílias, empresas e governo.

2) O que os agentes possuem

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?

- Famílias, empresas e governo.

2) O que os agentes possuem

- Dotações e tecnologia.

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?
   - Famílias, empresas e governo.
2) O que os agentes possuem
   - Dotações e tecnologia.
3) Como os agentes **podem** interagir?

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?

- Famílias, empresas e governo.

2) O que os agentes possuem

- Dotações e tecnologia.

3) Como os agentes **podem** interagir?

- Mercados e arranjos comerciais.

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?
   - Famílias, empresas e governo.
2) O que os agentes possuem
   - Dotações e tecnologia.
3) Como os agentes **podem** interagir?
   - Mercados e arranjos comerciais.
4) Como os agentes **vão** interagir?

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?
   - Famílias, empresas e governo.
2) O que os agentes possuem
   - Dotações e tecnologia.
3) Como os agentes **podem** interagir?
   - Mercados e arranjos comerciais.
4) Como os agentes **vão** interagir?
   - Equilíbrio.

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?
   - Famílias, empresas e governo.
2) O que os agentes possuem
   - Dotações e tecnologia.
3) Como os agentes **podem** interagir?
   - Mercados e arranjos comerciais.
4) Como os agentes **vão** interagir?
   - Equilíbrio.
5) "It Takes a Model to Beat a Model".

Ainda sobre modelos – Athreya (2013)

1) Quem faz parte da economia?
   - Famílias, empresas e governo.
2) O que os agentes possuem
   - Dotações e tecnologia.
3) Como os agentes **podem** interagir?
   - Mercados e arranjos comerciais.
4) Como os agentes **vão** interagir?
   - Equilíbrio.
5) "It Takes a Model to Beat a Model".

Modelos RBC

- Expectativas racionais (Sargent and Wallace 1975, 1976) e crítica de Lucas (Lucas Jr 1976; Lucas and Sargent 1978)

Modelos RBC

- Expectativas racionais (Sargent and Wallace 1975, 1976) e crítica de Lucas (Lucas Jr 1976; Lucas and Sargent 1978)
- Modelos iniciais
  - Long Jr and Plosser (1983): *Real business cycles*
  - Kydland and Prescott (1982): *Time to build and aggregate fluctuations*
  - Hansen (1985): *Indivisible labor and the business cycle*

Modelos RBC

- Expectativas racionais (Sargent and Wallace 1975, 1976) e crítica de Lucas (Lucas Jr 1976; Lucas and Sargent 1978)
- Modelos iniciais
  - Long Jr and Plosser (1983): *Real business cycles*
  - Kydland and Prescott (1982): *Time to build and aggregate fluctuations*
  - Hansen (1985): *Indivisible labor and the business cycle*
- Algumras referências:

Modelos RBC

- Expectativas racionais (Sargent and Wallace 1975, 1976) e crítica de Lucas (Lucas Jr 1976; Lucas and Sargent 1978)
- Modelos iniciais
  - Long Jr and Plosser (1983): *Real business cycles*
  - Kydland and Prescott (1982): *Time to build and aggregate fluctuations*
  - Hansen (1985): *Indivisible labor and the business cycle*
- Algumras referências:
  - King and Rebelo (1999): *Resuscitating real business cycles*
  - Cooley and Prescott (1995): *Frontiers of business cycle research*
  - McCandless (2008) *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*
  - Kehoe and Prescott (2002): *Great Depressions of the Twentieth Century*

O modelo

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

- **Famílias**

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

- **Famílias**
  - Ofertam trabalho.

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

- **Famílias**
  - Ofertam trabalho.
  - Detêm o capital.

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

- **Famílias**
    - Ofertam trabalho.
    - Detêm o capital.
    - Compram os bens e serviços.

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

- **Famílias**
  - Ofertam trabalho.
  - Detêm o capital.
  - Compram os bens e serviços.
- **Empresas**
  - Recrutam trabalhadores.

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

- **Famílias**
  - Ofertam trabalho.
  - Detêm o capital.
  - Compram os bens e serviços.
- **Empresas**
  - Recrutam trabalhadores.
  - Utilizam o estoque de capital.

Agentes

Tomemos como base o modelo de Hansen (1985) desenvolvido no capítulo 6 de McCandless (2008). Trabalharemos com dois tipos de **agentes representativos**:

- **Famílias**
  - Ofertam trabalho.
  - Detêm o capital.
  - Compram os bens e serviços.
- **Empresas**
  - Recrutam trabalhadores.
  - Utilizam o estoque de capital.
  - Vendem os bens e serviços.

“Bird’s eye view”

Vamos relacionar o modelo de ciclos de negócios reais à um modelo provavelmente conhecido por todos aqui.

Famílias

Problema de maximização

As famílias possuem preferências acerca do consumo (c) e das horas trabalhadas (h) de tal forma que desejam maximizar a seguinte utilidade intertemporal:

Problema de maximização

As famílias possuem preferências acerca do consumo (c) e das horas trabalhadas (h) de tal forma que desejam maximizar a seguinte utilidade intertemporal:

$$\max_{c_s, h_s, k_{s+1}} E_t\left[\sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} u\big(c_s, h_s\big)\right], \tag{1}$$

Problema de maximização

As famílias possuem preferências acerca do consumo (c) e das horas trabalhadas (h) de tal forma que desejam maximizar a seguinte utilidade intertemporal:

$$\max_{c_s, h_s, k_{s+1}} E_t\Big[\sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} u\big(c_s, h_s\big)\Big], \tag{1}$$

s.a.

$$c_s + i_s = w_s h_s + r_s k_s, \tag{2}$$

onde i representa os gastos com investimentos, w é o salário nominal, r é o retorno do capital (k).

A lei de movimento do capital

Finalmente, a dinâmica do estoque de capital é dada por:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t. \tag{3}$$

Lagrangiano

A partir das equações (1), (2) e (3), temos:

$$\mathcal{L} = E_t \Big[\sum_{s=t}^{\infty} \beta^t u\big(c_s, h_s\big) +$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{s-t} \lambda_s \big(w_s h_s + r_s k_s - c_s - k_{s+1} + (1-\delta) k_s\big)\Big].$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_s} = 0 \iff u_{c,t} - \lambda_t = 0, \tag{4}$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_s} = 0 \iff u_{c,t} - \lambda_t = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_s} = 0 \iff u_{h,t} + \lambda_t w_t = 0, \tag{5}$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_s} = 0 \iff u_{c,t} - \lambda_t = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_s} = 0 \iff u_{h,t} + \lambda_t w_t = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \iff -\lambda_t + \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\left(1 - \delta + r_{t+1}\right)\right] = 0, \tag{6}$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_s} = 0 \iff u_{c,t} - \lambda_t = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_s} = 0 \iff u_{h,t} + \lambda_t w_t = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = 0 \iff -\lambda_t + \beta E_t \left[\lambda_{t+1}\left(1 - \delta + r_{t+1}\right)\right] = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = 0 \iff c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t. \tag{7}$$

Escolhas ótimas

À partir das equações (4) e (5), temos que a taxa marginal de substituição entre trabalho e consumo é igual ao salário real:

$$-u_{h,t} = u_{c,t} w_t. \tag{8}$$

Escolhas ótimas

À partir das equações (4) e (5), temos que a taxa marginal de substituição entre trabalho e consumo é igual ao salário real:

$$-u_{h,t} = u_{c,t} w_t. \tag{8}$$

E a **equação de Euler** pode ser obtida ao combinarmos as equações (4) e (6):

$$u_{c,t} = \beta E_t \left[u_{c,t+1} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]. \tag{9}$$

Condição de transversalidade

Além das C.P.O., precisamos também da condição de transversalidade, que pode ser representada por:

$$\lim_{k \to \infty} \beta^t E\left[\lambda_t k_{t+1}\right] = 0. \tag{10}$$

Empresas

Problema de maximização

Em um ambiente de **concorrência perfeita**, as empresas possuem a seguinte tecnologia de produção:

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}. \tag{11}$$

Problema de maximização

Em um ambiente de **concorrência perfeita**, as empresas possuem a seguinte tecnologia de produção:

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}. \tag{11}$$

As empresas maximizam os seus lucros escolhendo a quantidade de insumos e tomando os preços como dados:

$$\max_{k_t, h_t} \Pi_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - w_t h_t - r_t k_t. \tag{12}$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial h_t} = 0 \iff w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{h_t}, \tag{13}$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial h_t} = 0 \iff w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{h_t}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial k_t} = 0 \iff r_t = \alpha\frac{y_t}{k_t}. \tag{14}$$

Dinâmica da Produtividade

$$\ln A_t = (1 - \rho_A) \ln \overline{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{15}$$

onde $\bar{A}$ representa o valor da variável no equilíbrio estacionário e ε é um choque exógeno com média zero e variância σ_ε^2.

A restrição de recursos

Da equação (7), temos que a restrição orçamentária das famílias é dada por:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t, \tag{7}$$

e, com os resultados do problemas das empresas (equações 13 e 14), temos que

$$c_t + i_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{h_j} h_t + \alpha \frac{y_t}{k_t} k_t = y_t. \tag{16}$$

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
- **Quanto trabalhar**

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
- **Quanto trabalhar**
  - $-\frac{u_{h,t}}{u_{c,t}} = w_t$

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
- **Quanto trabalhar**
  - $-\frac{u_{h,t}}{u_{c,t}} = w_t$
- **Quanto poupar**

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
- **Quanto trabalhar**
  - $-\frac{u_{h,t}}{u_{c,t}} = w_t$
- **Quanto poupar**
  - $u_{c,t} = \beta E_t \left[u_{c,t+1} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
- **Quanto trabalhar**
  - $-\frac{u_{h,t}}{u_{c,t}} = w_t$
- **Quanto poupar**
  - $u_{c,t} = \beta E_t \left[u_{c,t+1} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
- **Como dividir os recursos**

Quatro grandes decisões macroeconômicas

- **Quanto produzir**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
- **Quanto trabalhar**
  - $-\frac{u_{h,t}}{u_{c,t}} = w_t$
- **Quanto poupar**
  - $u_{c,t} = \beta E_t \left[u_{c,t+1} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
- **Como dividir os recursos**
  - $y_t = c_t + i_t$

Formas funcionais

Utilizemos uma função utilidade CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), separável em c_t e h_t, para representar as preferências das famílias:

Formas funcionais

Utilizemos uma função utilidade CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), separável em c_t e h_t, para representar as preferências das famílias:

$$u\left(c_t, h_t\right) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{h_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}. \tag{17}$$

Formas funcionais

Utilizemos uma função utilidade CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), separável em c_t e h_t, para representar as preferências das famílias:

$$u\left(c_t, h_t\right) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \psi \frac{h_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}. \tag{17}$$

Então, temos que $u_c = c_t^{-\sigma}$ e $u_h = -\psi h_t^{\varphi}$.

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$
- **Empresas**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$
- **Empresas**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
  - $r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$
- **Empresas**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
  - $r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$
  - $w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{h_t}$

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$
- **Empresas**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
  - $r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$
  - $w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{h_t}$
- **Restrição de recursos**
  - $y_t = c_t + i_t$

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$
- **Empresas**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
  - $r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$
  - $w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{h_t}$
- **Restrição de recursos**
  - $y_t = c_t + i_t$
- **Lei de movimento da produtividade**

Sistema de Equações – 8 variáveis endógenas (c, h, k, w, r, y, i, A)

- **Famílias**
  - $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = w_t$
  - $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + r_{t+1} - \delta \right) \right]$
  - $k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t$
- **Empresas**
  - $y_t = A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$
  - $r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$
  - $w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{h_t}$
- **Restrição de recursos**
  - $y_t = c_t + i_t$
- **Lei de movimento da produtividade**
  - $\ln A_t = (1 - \rho_A) \ln \bar{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + \varepsilon_t$

Sistema de Equações (reduzido) – 4 variáveis endógenas (c, h, k, A)

Sistema de Equações (reduzido) – 4 variáveis endógenas (c, h, k, A)

- $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha}$

Sistema de Equações (reduzido) – 4 variáveis endógenas (c, h, k, A)

- $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha}$
- $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + \alpha A_{t+1} \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}}\right)^{\alpha-1} - \delta \right) \right]$

Sistema de Equações (reduzido) – 4 variáveis endógenas (c, h, k, A)

- $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha}$
- $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + \alpha A_{t+1} \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}}\right)^{\alpha-1} - \delta\right)\right]$
- $k_{t+1} = (1-\delta) k_t + A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - c_t$

Sistema de Equações (reduzido) – 4 variáveis endógenas (c, h, k, A)

- $\psi h_t^{\varphi} c_t^{\sigma} = (1-\alpha) A_t \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha}$
- $c_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[c_{t+1}^{-\sigma} \left(1 + \alpha A_{t+1} \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}}\right)^{\alpha-1} - \delta \right) \right]$
- $k_{t+1} = (1-\delta) k_t + A_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} - c_t$
- $\ln A_t = (1-\rho_A) \ln \bar{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + \varepsilon_t$

Equilíbrio Estacionário

Sistema de Equações (reduzido) – no equilíbrio

$$\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = (1-\alpha)\bar{A}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha} \tag{18}$$

$$\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = (1-\alpha)\bar{A}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha} \tag{18}$$

$$\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma}\left(1 + \alpha \bar{A}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha-1} - \delta\right) \tag{19}$$

Sistema de Equações (reduzido) – no equilíbrio

$$\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = (1-\alpha)\bar{A}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha} \tag{18}$$

$$\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma}\left(1 + \alpha \bar{A}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha-1} - \delta\right) \tag{19}$$

$$\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + \bar{A}\bar{k}^{\alpha}\bar{h}^{1-\alpha} - \bar{c} \tag{20}$$

Sistema de Equações (reduzido) – no equilíbrio

$$\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = (1-\alpha)\bar{A}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha} \tag{18}$$

$$\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma}\left(1 + \alpha \bar{A}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha-1} - \delta\right) \tag{19}$$

$$\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + \bar{A}\bar{k}^{\alpha}\bar{h}^{1-\alpha} - \bar{c} \tag{20}$$

$$\bar{A} = \bar{A} \tag{21}$$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \left(1 + \bar{r} - \delta\right)$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \left(1 + \bar{r} - \delta\right)$
  - $\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i}$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \left(1 + \bar{r} - \delta\right)$
  - $\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i}$
- **Empresas**
  - $\bar{y} = \bar{A} \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha}$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \left(1 + \bar{r} - \delta\right)$
  - $\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i}$
- **Empresas**
  - $\bar{y} = \bar{A}\bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha}$
  - $\bar{r} = \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}}$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \left(1 + \bar{r} - \delta\right)$
  - $\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i}$
- **Empresas**
  - $\bar{y} = \bar{A} \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha}$
  - $\bar{r} = \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}}$
  - $\bar{w} = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{h}}$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \left(1 + \bar{r} - \delta\right)$
  - $\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i}$
- **Empresas**
  - $\bar{y} = \bar{A} \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha}$
  - $\bar{r} = \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}}$
  - $\bar{w} = \left(1 - \alpha\right) \frac{\bar{y}}{\bar{h}}$
- **Restrição de recursos**
  - $\bar{y} = \bar{c} + \bar{i}$

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \big(1 + \bar{r} - \delta\big)$
  - $\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i}$
- **Empresas**
  - $\bar{y} = \bar{A} \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha}$
  - $\bar{r} = \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}}$
  - $\bar{w} = \big(1 - \alpha\big) \frac{\bar{y}}{\bar{h}}$
- **Restrição de recursos**
  - $\bar{y} = \bar{c} + \bar{i}$
- **Lei de movimento da produtividade**

Sistema de Equações (completo) – no equilíbrio

- **Famílias**
  - $\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = \bar{w}$
  - $\bar{c}^{-\sigma} = \beta \bar{c}^{-\sigma} \left(1 + \bar{r} - \delta\right)$
  - $\bar{k} = (1 - \delta)\bar{k} + \bar{i}$
- **Empresas**
  - $\bar{y} = \bar{A} \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha}$
  - $\bar{r} = \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}}$
  - $\bar{w} = (1 - \alpha) \frac{\bar{y}}{\bar{h}}$
- **Restrição de recursos**
  - $\bar{y} = \bar{c} + \bar{i}$
- **Lei de movimento da produtividade**
  - $\bar{A} = \bar{A}$

O equilíbrio estacionário

Podemos aproveitar a equação (21) para normalizarmos $\bar{A} = 1$.

O equilíbrio estacionário

Podemos aproveitar a equação (21) para normalizarmos $\bar{A} = 1$.

Da equação de Euler (19), temos:

O equilíbrio estacionário

Podemos aproveitar a equação (21) para normalizarmos $\bar{A} = 1$.

Da equação de Euler (19), temos:

$$\frac{1}{\beta} + \delta - 1 = \alpha \left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}} \right)^{\alpha - 1}$$

e como da equação de Euler do modelo "completo", sabemos que

$\bar{r} = \dfrac{1}{\beta} - 1 + \delta,$ então temos:

$$\frac{\bar{k}}{\bar{h}} = \left[\frac{\bar{r}}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

O equilíbrio estacionário

Podemos aproveitar a equação (21) para normalizarmos $\bar{A} = 1$.

Da equação de Euler (19), temos:

$$\frac{1}{\beta} + \delta - 1 = \alpha \left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}} \right)^{\alpha - 1}$$

e como da equação de Euler do modelo "completo", sabemos que

$\bar{r} = \dfrac{1}{\beta} - 1 + \delta,$ então temos:

$$\frac{\bar{k}}{\bar{h}} = \left[\frac{\bar{r}}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

O equilíbrio estacionário

Da equação de movimento do capital (20), podemos obter o valor, no equilíbrio, da razão $\frac{\bar{c}}{\bar{h}}$:

$$\delta \bar{k} = \bar{k}^{\alpha} \bar{h}^{1-\alpha} - \bar{c} \iff$$

$$\frac{\bar{c}}{\bar{h}} = \left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}} \right)^{\alpha} - \delta \frac{\bar{k}}{\bar{h}}.$$

O equilíbrio estacionário

Com base nos resultados anteriores, podemos encontraro valor de $\bar{h}$ à opartir da equação (18):

$$\psi \bar{h}^{\varphi} \bar{c}^{\sigma} = (1-\alpha)\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha} \iff$$

$$\frac{\bar{h}^{\varphi}}{\bar{h}^{1-\sigma}}\left(\frac{\bar{c}}{\bar{h}}\right)^{\sigma} = \frac{1-\alpha}{\psi}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha} \iff$$

$$\bar{h} = \left[\frac{1-\alpha}{\psi}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{h}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\bar{c}}{\bar{h}}\right)^{-\sigma}\right]^{\frac{1}{\varphi+\sigma-1}}$$

Referências i

Athreya, Kartik B. 2013. *Big Ideas in Macroeconomics: A Nontechnical View*. Mit Press.

Cooley, Thomas F, and Edward C Prescott. 1995. *Frontiers of Business Cycle Research*. Vol. 3. Princeton University Press Princeton, NJ.

Hansen, Gary D. 1985. "Indivisible Labor and the Business Cycle." *Journal of Monetary Economics* 16 (3): 309–27.

Kehoe, Timothy J, and Edward Prescott. 2002. *Great Depressions of the Twentieth Century*. Academic Press.

King, Robert G, and Sergio T Rebelo. 1999. "Resuscitating Real Business Cycles." *Handbook of Macroeconomics* 1: 927–1007.

Kydland, Finn E, and Edward C Prescott. 1982. “Time to Build and Aggregate Fluctuations.” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1345–70.

Long Jr, John B, and Charles I Plosser. 1983. “Real Business Cycles.” *Journal of Political Economy* 91 (1): 39–69.

Lucas, Robert, and Thomas Sargent. 1978. “After the Phillips Curve: Persistence of High Inflation and High Unemployment.” In *FRBB, Conference Series*, 49–68. 19.

Lucas Jr, Robert E. 1976. “Econometric Policy Evaluation: A Critique.” In *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1:19–46. 1.

McCandless, George. 2008. *The Abcs of Rbcs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*. Harvard University Press.

Page, Scott E. 2018. *The Model Thinker: What You Need to Know to Make Data Work for You*. Basic Books.

Sargent, Thomas J, and Neil Wallace. 1975. "" Rational" Expectations, the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule." *Journal of Political Economy* 83 (2): 241–54.

———. 1976. "Rational Expectations and the Theory of Economic Policy." *Journal of Monetary Economics* 2 (2): 169–83.