Econometria de Séries Temporais

Estacionariedade em séries de tempo: simulações

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Fundamentos

Probabilidade condicional

- Qual a probabilidade de uma queda no preço de uma ação em 12 meses?

Probabilidade condicional

- Qual a probabilidade de uma queda no preço de uma ação em 12 meses?
- Qual a probabilidade de uma queda no preço de uma ação em 12 meses, sabendo que houve uma queda na confiança do consumidor?

Probabilidade condicional

- Qual a probabilidade de uma queda no preço de uma ação em 12 meses?
- Qual a probabilidade de uma queda no preço de uma ação em 12 meses, sabendo que houve uma queda na confiança do consumidor?

Em qual dos dois casos nós temos **mais** informações?

Probabilidade condicional

- Qual a probabilidade de uma queda no preço de uma ação em 12 meses?
- Qual a probabilidade de uma queda no preço de uma ação em 12 meses, sabendo que houve uma queda na confiança do consumidor?

Em qual dos dois casos nós temos **mais** informações?

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

- $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

Probabilidade condicional

- $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.
- $\forall$ eventos mutualmente excludentes e exaustivos $A_1, A_2, ..., A_n$, temos:

Probabilidade condicional

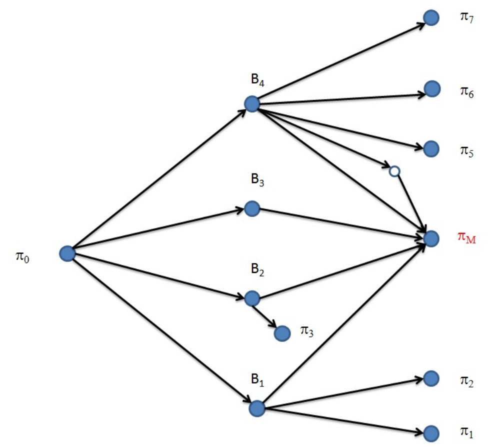
- $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.
- $\forall$ eventos mutualmente excludentes e exaustivos $A_1, A_2, ..., A_n$, temos:
  (i) $P(A_1|B) + P(A_2|B) + ... + P(A_n|B) = 1$.

Probabilidade condicional

- $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.
- $\forall$ eventos mutualmente excludentes e exaustivos $A_1, A_2, ..., A_n$, temos:
  (i) $P(A_1|B) + P(A_2|B) + ... + P(A_n|B) = 1$.
  (ii) $\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) = P(B)$

Exercício – Projeção de inflação

Você quer projetar a inflação do ano que vem e o seu modelo produz alguns cenários, conforme a figura ao lado. Partindo do ponto π_0, qual é a probabilidade de atingir a meta (π_M)



(Inspirado no exemplo 1 do capítulo 3 de Rozanov (2013)).

Exercício – Projeção de inflação

- Resposta: 0.5

Exercício – Projeção de inflação

- Resposta: 0.5

Onde temos mais informação: em π_0 ou em B_2?

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
    - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega]$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
  - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t]$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
  - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[\varepsilon_t]$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
  - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[\varepsilon_t] = 0.5$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
    - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[\varepsilon_t] = 0.5$
- $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t|\Omega]$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
    - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[\varepsilon_t] = 0.5$
- $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t]$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
  - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[\varepsilon_t] = 0.5$
- $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[0.8y_{t-1}] + E[\varepsilon_t]$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
    - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[\varepsilon_t] = 0.5$
- $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t]$ $= E[0.5] + E[0.8y_{t-1}] + E[\varepsilon_t] = 2.5$

Esperança e esperança condicional (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua experança **incondicional** é dada por:

- $E[y_t|\Omega] = E[y_t]$, onde Ω representa o **espaço amostral**.
- A lei das expectativas totais nos diz que $E[E[y_t|\Omega]] = E[y_t|\Omega] = E[y_t]$.
  - $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + \varepsilon_t] = E[0.5] + E[\varepsilon_t] = 0.5$
- $E[y_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t|\Omega] = E[0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t]$ $= E[0.5] + E[0.8y_{t-1}] + E[\varepsilon_t] = 2.5$

O último resultado assume que $E[y_t] = E[y_{t-1}]$. Será que faz sentido?

Estacionariedade

Estacionariedade

Um dos principais conceitos da econometria de séries temporais é o de **estacionariedade**.

Estacionariedade

Um dos principais conceitos da econometria de séries temporais é o de **estacionariedade**. Por quê?

Estacionariedade

Um dos principais conceitos da econometria de séries temporais é o de **estacionariedade**. Por quê? Porque é fundamental para compreendermos o **processo gerador dos dados** (PGD).

Estacionariedade

Um dos principais conceitos da econometria de séries temporais é o de **estacionariedade**. Por quê? Porque é fundamental para compreendermos o **processo gerador dos dados** (PGD). Trabalhemos com quatro exemplos análogos aos apresentados na Figura 1.1 de Bueno (2012).

Processo estocásticos

Com base no exemplo do primeiro capítulo de Bueno (2012), trabalhemos com quatro processos estocásticos:

- $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$

Processo estocásticos

Com base no exemplo do primeiro capítulo de Bueno (2012), trabalhemos com quatro processos estocásticos:

- $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$
- $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$

Processo estocásticos

Com base no exemplo do primeiro capítulo de Bueno (2012), trabalhemos com quatro processos estocásticos:

- $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$
- $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$
- $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$

Processo estocásticos

Com base no exemplo do primeiro capítulo de Bueno (2012), trabalhemos com quatro processos estocásticos:

- $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$
- $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$
- $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
- $y_t = 0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$

Processo estocásticos

Com base no exemplo do primeiro capítulo de Bueno (2012), trabalhemos com quatro processos estocásticos:

- $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$
- $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$
- $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
- $y_t = 0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$

Vamos assumir que $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ com $\sigma^2 = 0.5^2$.

Exercício 1

Calcule a esperança incondicional de y_t quando:

a) $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$

b) $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$

c) $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$

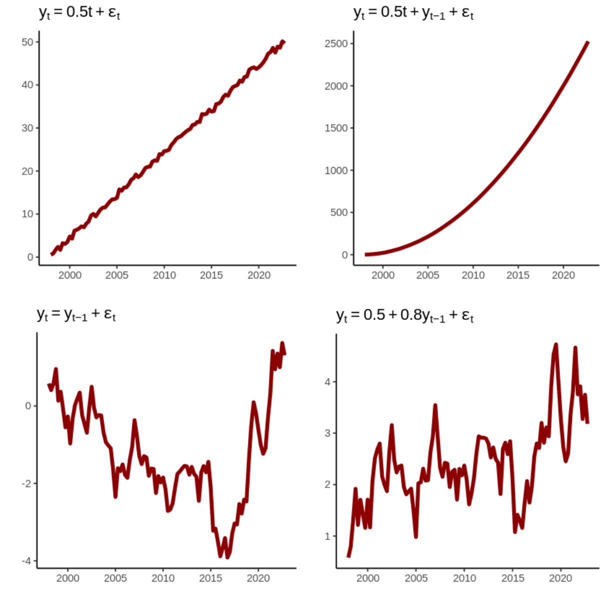
d) $y_t = 0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$

Exercício 2

Simule uma sequência de choques aleatórios e, a partir dela, a série temporal de y_t quando (assuma o mesmo y_0 em todas as simulações):

a) $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$
b) $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$
c) $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
d) $y_t = 0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$

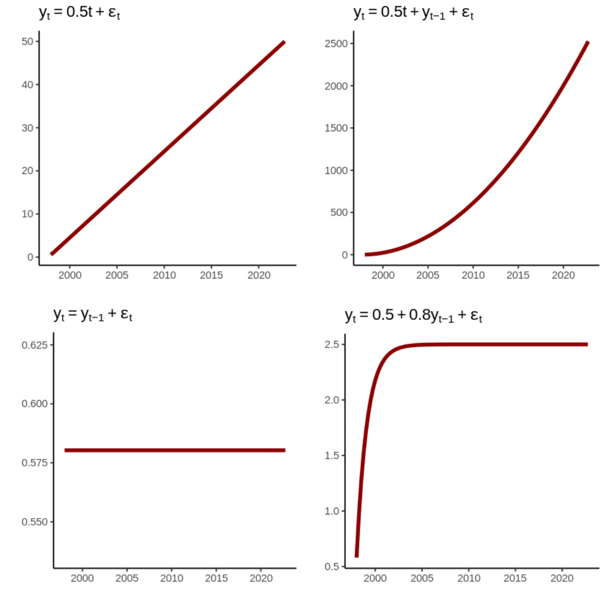
Exercício 2 – Solução



Exercício 3

Refaça as simulações anteriores, mas considere **apenas o choque no primeiro período** (ou seja, em todos os outros períodos, os choques serão iguais à zero). Quais séries são mais impactadas? Por quê? Explique o comportamento de cada uma das séries.

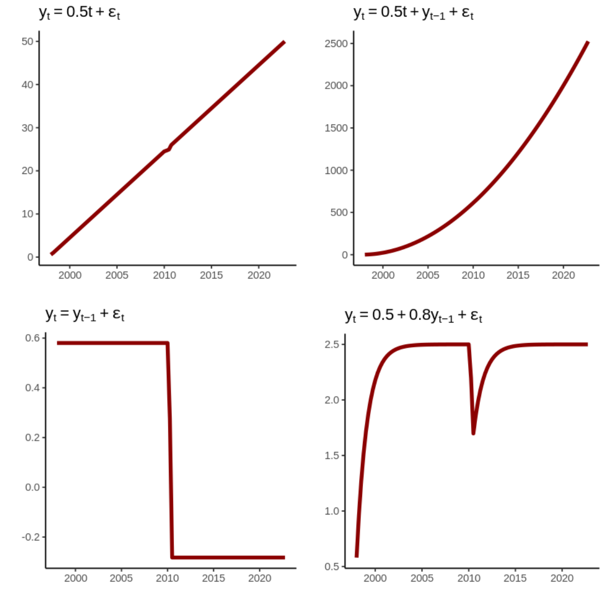
Exercício 3 – Solução



Exercício 4

Refaça as simulações anteriores, mas considere **três choques**: no primeiro período e nos períodos 50 e 51. Explique o comportamento de cada uma das séries.

Exercício 4 – Solução



Estacionariedade fraca (Bueno 2012)

Uma série é **fracamente estacionária** se e somente se:

- $E[y^2] < \infty$

Estacionariedade fraca (Bueno 2012)

Uma série é **fracamente estacionária** se e somente se:

- $E[y^2] < \infty$
- $E[y] = \mu, \forall t$

Estacionariedade fraca (Bueno 2012)

Uma série é **fracamente estacionária** se e somente se:

- $E[y^2] < \infty$
- $E[y] = \mu, \forall t$
- $E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = \gamma_j$

Estacionariedade fraca (Bueno 2012)

Ou seja,

Estacionariedade fraca (Bueno 2012)

Ou seja,

- Segundo momento finito.

Estacionariedade fraca (Bueno 2012)

Ou seja,

- Segundo momento finito.
- Expectativa incondicional (média) igual para todos os períodos t.

Estacionariedade fraca (Bueno 2012)

Ou seja,

- Segundo momento finito.
- Expectativa incondicional (média) igual para todos os períodos t.
- A autocovariância não depende do tempo (t) e sim da distância (j) entre as observações.

Tipos de séries

- **Estacionárias**:
  - $y_t = 0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - $y_t = 0.5 + \varepsilon_t$
- **Não-Estacionárias**:
  - $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$
  - $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$

Tipos de séries

- **Estacionárias**:
  - $y_t = 0.5 + 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - $y_t = 0.5 + \varepsilon_t$
- **Não-Estacionárias**:
  - $y_t = 0.5t + \varepsilon_t$
  - $y_t = 0.5t + y_{t-1} + \varepsilon_t$
  - $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$

Como vimos, isso faz toda diferença na dinâmica da série e, portanto, no modelo utilizado para capturar o PGD.

Estacionariedade estrita (Bueno 2012)

Uma série é **estritamente estacionária** se e somente se:

A função de distribuição conjunta de $\{y_{t_i}\}_{i=1}^{k}$ é igual à função de distribuição conjunta de $\{y_{t_i+h}\}_{i=1}^{k}, h \in \mathbb{Z}$. De outra maneira: $F\left(y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_k}\right) = F\left(y_{t_1+h}, y_{t_2+h}, \ldots, y_{t_k+h}\right)$

Estacionariedade estrita (Bueno 2012)

Ou seja,

Estacionariedade estrita (Bueno 2012)

Ou seja, para quaisquer dois (ou mais) intervalos,

Estacionariedade estrita (Bueno 2012)

Ou seja, para quaisquer dois (ou mais) intervalos, na população teremos o mesmo PGD

Estacionariedade estrita (Bueno 2012)

Ou seja, para quaisquer dois (ou mais) intervalos, na população teremos o mesmo PGD e na amostra, estatísticas semelhantes.

Estacionariedade estrita (Bueno 2012)

Ou seja, para quaisquer dois (ou mais) intervalos, na população teremos o mesmo PGD e na amostra, estatísticas semelhantes.

Além de estacionariedade, precisamos de algo mais?

Ergodicidade (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua média temporal, $\overline{y}^s$, para um dado estado da natureza s é dada por:

Ergodicidade (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua média temporal, $\overline{y}^s$, para um dado estado da natureza s é dada por:

$$\overline{y}^s = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y^s$$

Ergodicidade (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua média temporal, $\overline{y}^s$, para um dado estado da natureza s é dada por:

$$\overline{y}^s = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y^s$$

O processo estocástico fracamente estacionário é ergódigo se

$$E[\overline{y}^s] = plim\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y^s = plim\frac{1}{S}\sum_{t=1}^{S} y^s = E[y_t]$$

Ergodicidade (Bueno 2012)

Seja y_t uma variavel aleatória tal que a sua média temporal, $\overline{y}^s$, para um dado estado da natureza s é dada por:

$$\overline{y}^s = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y^s$$

O processo estocástico fracamente estacionário é ergódigo se

$$E[\overline{y}^s] = plim\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y^s = plim\frac{1}{S}\sum_{t=1}^{S} y^s = E[y_t]$$

Ergodicidade (Bueno 2012)

Ou seja,

Ergodicidade (Bueno 2012)

Ou seja, a média temporal converge para a esperança incondicional.

Ergodicidade (Bueno 2012)

Ou seja, a média temporal converge para a esperança incondicional.

Para haver ergodicidade, deve-se haver estacionariedade fraca. O contrário não é verdadeiro. Veja o exemplo 2.7 de Bueno (2012).

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.

Rozanov, Yurii A. 2013. *Probability Theory: A Concise Course*. Courier Corporation.