# Econometria de Séries Temporais

## O modelo de vetores autorregressivos

João Ricardo Costa Filho

*“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."*

Laplace (1812)

*“In God we trust. All others must bring data."*

William Edwards Deming

# Macroeconometria

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.

# Macroeconometria

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.
- Aconselhar os gestores de política econômica.

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.
- Aconselhar os gestores de política econômica.

Como fazer isso?

# Macroeconometria

Qual é o papel do macroeconometrista? De acordo com Stock and Watson (2001), temos quatro funções:

- Descrever e sumarizar dados macroeconômicos.
- Realizar projeções.
- Quantificar a estrutura da macroeconomia.
- Aconselhar os gestores de política econômica.

Como fazer isso? Sims (1980) sugeriu os **modelos VAR**.

# VAR(p)

Seja $X_t$ um vetor $n \times 1$ com $n$ variáveis **endógenas** tal que:

# VAR(p)

Seja $X_t$ um vetor $n \times 1$ com $n$ variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

# VAR(p)

Seja $X_t$ um vetor $n \times 1$ com $n$ variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde $A$ é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas,

# VAR(p)

Seja $X_t$ um vetor $n \times 1$ com $n$ variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde $A$ é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas, $B_0$ é um vetor $n \times 1$ de constantes,

# VAR(p)

Seja $X_t$ um vetor $n \times 1$ com $n$ variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde $A$ é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas, $B_0$ é um vetor $n \times 1$ de constantes, $B_i$ é a matriz $n \times n$ da i-ésima defasagem

# VAR(p)

Seja $X_t$ um vetor $n \times 1$ com $n$ variáveis **endógenas** tal que:

$$AX_t = B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t.$$

onde $A$ é uma matriz $n \times n$ de restrições contemporâneas, $B_0$ é um vetor $n \times 1$ de constantes, $B_i$ é a matriz $n \times n$ da i-ésima defasagem e $\varepsilon_t$ é um vetor $n \times 1$ de termos-erro tal que $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0; I_n)$ de um VAR de ordem p (Bueno 2012).

# VAR(p)

Em função da endogeneidade, vamos estimá-lo na sua forma **reduzida**.

# VAR(p) na forma reduzida

Assumindo que possamos inverter a matriz $A$, temos:

$$X_t = A^{-1}B_0 + \sum_{i=1}^{p} A^{-1}B_i X_{t-i} + A^{-1}B\varepsilon_t$$

# VAR(p) na forma reduzida

Assumindo que possamos inverter a matriz $A$, temos:

$$X_t = A^{-1}B_0 + \sum_{i=1}^{p} A^{-1}B_i X_{t-i} + A^{-1}B\varepsilon_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} + e_t.$$

# VAR(p) na forma reduzida

Assumindo que possamos inverter a matriz $A$, temos:

$$X_t = A^{-1}B_0 + \sum_{i=1}^{p} A^{-1}B_i X_{t-i} + A^{-1}B\varepsilon_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i X_{t-i} + e_t.$$

onde $\Phi_0 \equiv A^{-1}B_0$, $\Phi_i \equiv A^{-1}B_i, i = 0, 1, \ldots, p$ e $B\varepsilon_t \equiv Ae_t$ (Bueno 2012).

# VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}.
\end{aligned}
$$

# VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}.
\end{aligned}
$$

onde $y_t$ e $z_t$ são estacionários,

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12}z_t + b_{11}y_{t-1} + b_{12}z_{t-1} + \sigma_y\varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21}y_t + b_{21}y_{t-1} + b_{22}z_{t-1} + \sigma_z\varepsilon_{zt}.$$

onde $y_t$ e $z_t$ são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e

# VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$y_t = b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}.$$

onde $y_t$ e $z_t$ são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0,1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0,1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$.

# VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}.
\end{aligned}
$$

onde $y_t$ e $z_t$ são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Qual é a ordem do VAR?

# VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}.
\end{aligned}
$$

onde $y_t$ e $z_t$ são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0,1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0,1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \implies \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Qual é a ordem do VAR? Escreva o modelo matricialmente.

# VAR(p)

Trabalhemos com um VAR na sua **forma estrutural** no qual $n = 2$ (Enders 2015; Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_1 - a_{12} z_t + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \sigma_y \varepsilon_{yt} \\
z_t &= b_2 - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_{zt}.
\end{aligned}
$$

onde $y_t$ e $z_t$ são estacionários, $\varepsilon_{yt} \sim RB\,(0, 1)$ e $\varepsilon_{zt} \sim RB\,(0, 1)$, e $\varepsilon_{yt} \perp \varepsilon_{zt} \Longrightarrow \text{Cov}\,(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$. Qual é a ordem do VAR? Escreva o modelo matricialmente. Note que **não podemos estimar essse modelo diretamente**!

# VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$X_t = \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t,$$

# VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0,
\end{aligned}
$$

# VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1,
\end{aligned}
$$

# VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1, \\
A e_t &\equiv B \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

# VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1, \\
A e_t &\equiv B \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Reescreva o modelo acima com um **vetor de operadores defasagem**. Qual é a condição de estabilidade do sistema?

# VAR(1) na forma reduzida

Podemos escrever o modelo anterior na forma reduzia (Bueno 2012):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t, \\
\Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0, \\
\Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1, \\
A e_t &\equiv B \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Reescreva o modelo acima com um **vetor de operadores defasagem**. Qual é a condição de estabilidade do sistema? Note que agora podemos estimar o modelo!

# VAR(1) na forma reduzida

Trabalhemos com o vetor de termos-erro (Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \equiv A^{-1}B\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_y \varepsilon_{yt} - a_{12}\sigma_z \varepsilon_{zt}}{1 - a_{12}a_{21}} \\ \frac{\sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21}\sigma_y \varepsilon_{yt}}{1 - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}.$$

Temos que:

# VAR(1) na forma reduzida

Trabalhemos com o vetor de termos-erro (Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \equiv A^{-1}B\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_y \varepsilon_{yt} - a_{12}\sigma_z \varepsilon_{zt}}{1 - a_{12}a_{21}} \\ \frac{\sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21}\sigma_y \varepsilon_{yt}}{1 - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}.$$

Temos que:

- $E\left[e_t\right] = 0$

# VAR(1) na forma reduzida

Trabalhemos com o vetor de termos-erro (Bueno 2012):

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \equiv A^{-1}B\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_y \varepsilon_{yt} - a_{12}\sigma_z \varepsilon_{zt}}{1-a_{12}a_{21}} \\ \frac{\sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21}\sigma_y \varepsilon_{yt}}{1-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix}.$$

Temos que:

- $E\left[e_t\right] = 0$
- $\text{Cov}\left(e_t\right) \equiv \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_y^2 + a_{12}^2\sigma_z^2}{(1-a_{12}a_{21})^2} & -\frac{a_{21}\sigma_y^2 + a_{12}\sigma_z^2}{(1-a_{12}a_{21})^2} \\ -\frac{a_{21}\sigma_y^2 + a_{12}\sigma_z^2}{(1-a_{12}a_{21})^2} & \frac{\sigma_z^2 + a_{21}^2\sigma_y^2}{(1-a_{12}a_{21})^2} \end{bmatrix}$$

## VAR(1) na forma reduzida

# VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?

# VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?
- E por que poderíamos querer fazer isso?

# VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?
- E por que poderíamos querer fazer isso? Para poder estudar política econômica, por exemplo.

# VAR(1) na forma reduzida

- Será que conseguimos recuperar os parâmetros estruturais à partir da forma reduzida?
- E por que poderíamos querer fazer isso? Para poder estudar política econômica, por exemplo. Caso contrário, apenas com a forma reduzida, a implementação da política poderia alterar a trajetória das variáveis (Crítica de Lucas (Lucas Jr 1976; Lucas and Sargent 1978)).

# Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)?

# Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

# Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

$$AIC(m) = \ln \left| \widehat{\Gamma}_0(m) \right| + \frac{2}{T} m n^2;$$

# Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

$$AIC(m) = \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{2}{T}mn^2;$$
$$BIC(m) = \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{\ln T}{T}mn^2;$$

# Ordem do VAR

Como escolher a ordem de um VAR(p)? Com critérios de informação!

$$AIC(m) = \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{2}{T}mn^2;$$
$$BIC(m) = \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{\ln T}{T}mn^2;$$
$$HQ(m) = \ln\left|\widehat{\Gamma}_0(m)\right| + \frac{\ln\ln T}{T}2mn^2,$$

onde $m$ é representa a ordem do modelo, $mn^2$ é o número de parâmetros a serem estimados e$\widehat{\Gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\widehat{e_t}\widehat{e_t}'}{T}$ é a matriz de covariância dos resíduos.

Vamos aos dados!

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

## Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.

Enders, Walter. 2015. *Applied Econometric Time Series Fourth Edition*. *New York (US): University of Alabama*.

Lucas, Robert, and Thomas Sargent. 1978. "After the Phillips Curve: Persistence of High Inflation and High Unemployment." In *FRBB, Conference Series*, 49–68. 19.

Lucas Jr, Robert E. 1976. "Econometric Policy Evaluation: A Critique." In *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1:19–46. 1.

Sims, Christopher A. 1980. "Macroeconomics and Reality." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1–48.

Stock, James H, and Mark W Watson. 2001. "Vector