

# Econometria de Séries Temporais

## O modelo Média Móvel (MA)

---

João Ricardo Costa Filho

*"The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."*

Laplace (1812)

*"In God we trust. All others must bring data."*

William Edwards Deming

## Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência  $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$  é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

## Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência  $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$  é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

- $E[\varepsilon_t] = 0, \forall t.$

## Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência  $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$  é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

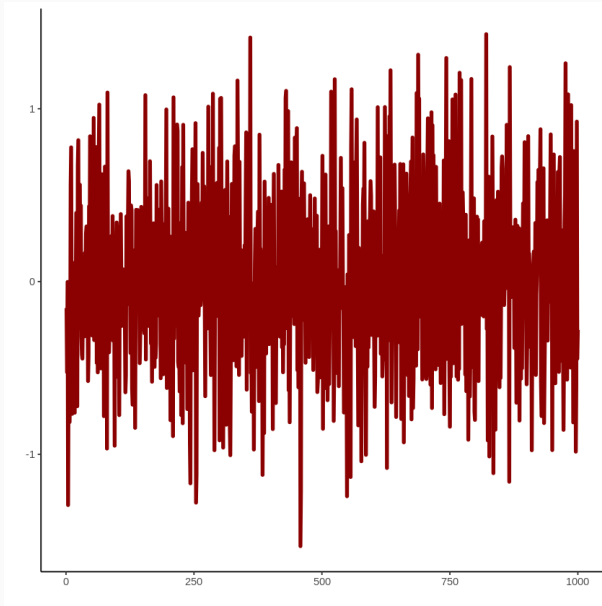
- $E[\varepsilon_t] = 0, \forall t.$
- $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \forall t.$

## Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência  $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$  é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

- $E[\varepsilon_t] = 0, \forall t.$
- $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \forall t.$
- $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}] = 0, \forall j \neq t$

# Ruído branco



Nosso objetivo será o de encontrar modelos que descrevam o PGD até que só sobre um ruído branco!



## Média Móvel – MA(1)

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

onde  $\varepsilon_t$  é um ruído branco.

## Média Móvel – MA(1)

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

onde  $\varepsilon_t$  é um ruído branco. Quando o processo estocástico depende apenas dos erros (contemporâneos e do passado), o modelo que descreve o PGD é denominado média móvel.

## Média Móvel – MA(1)

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

onde  $\varepsilon_t$  é um ruído branco. Quando o processo estocástico depende apenas dos erros (contemporâneos e do passado), o modelo que descreve o PGD é denominado média móvel. Como temos apenas uma defasagem do erro, este é um MA(1).

**Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)**

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E[y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]$$

$$E[y_t] = \mu.$$

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E[y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]$$

$$E[y_t] = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\text{Var}(y_t) = E[(y_t - \mu)^2]$$



## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E[y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]$$

$$E[y_t] = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= E[(y_t - \mu)^2] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2] \end{aligned}$$

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E[y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]$$

$$E[y_t] = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= E[(y_t - \mu)^2] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2] \\ &= E[\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2] \\ &= \sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2 \end{aligned}$$

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E[y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}]$$

$$E[y_t] = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= E[(y_t - \mu)^2] \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2] \\ &= E[\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2] \\ &= \sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2 \\ &= (1 + \theta^2)\sigma^2. \end{aligned}$$

**Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)**

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Autocovariância:

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Autocovariância:

$$E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})]$$

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Autocovariância:

$$\begin{aligned} E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})] \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-1}^2 + \theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}] \end{aligned}$$

## Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- Autocovariância:

$$\begin{aligned} E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})] \\ &= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-1}^2 + \theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}] \\ &= \sigma^2\theta. \end{aligned}$$



## Autocorrelação de um MA(1)

Pela definição de correlação, temos que:

$$\rho_1 = \frac{\theta\sigma^2}{(1 + \theta^2)\sigma^2} = \frac{\theta}{1 + \theta^2},$$

na qual o denominador é a variância de  $\varepsilon_t$  porque é o produto de dois desvios-padrão que são iguais.

## Autocorrelação de um MA(1)

Pela definição de correlação, temos que:

$$\rho_1 = \frac{\theta\sigma^2}{(1 + \theta^2)\sigma^2} = \frac{\theta}{1 + \theta^2},$$

na qual o denominador é a variância de  $\varepsilon_t$  porque é o produto de dois desvios-padrão que são iguais. Qual é o coeficiente **em um MA(1)** para os erros de outras defasagens?

## Autocorrelação de um MA(1)

Pela definição de correlação, temos que:

$$\rho_1 = \frac{\theta\sigma^2}{(1 + \theta^2)\sigma^2} = \frac{\theta}{1 + \theta^2},$$

na qual o denominador é a variância de  $\varepsilon_t$  porque é o produto de dois desvios-padrão que são iguais. Qual é o coeficiente **em um MA(1)** para os erros de outras defasagens? Portanto, qual é o valor da autocorrelação com as outras defasagens?

## Média Móvel – MA(2)

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

onde  $\varepsilon_t$  é um ruído branco.



$$\gamma_j = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2), & j = 0 \\ \sigma^2 (\theta_1 + \theta_1\theta_2), & j = 1 \\ \sigma^2\theta_2, & j = 2 \\ 0, & j > 2. \end{cases}$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2), & j = 0 \\ \sigma^2 (\theta_1 + \theta_1\theta_2), & j = 1 \\ \sigma^2\theta_2, & j = 2 \\ 0, & j > 2. \end{cases}$$

$$\rho_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \frac{(\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}, & j = 1 \\ \frac{\theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}, & j = 2 \\ 0, & j > 2. \end{cases}$$



Por que a autocorrelação com defasagens maiores do que 2 é zero em um MA(2)?

## MA(q) (Bueno 2012)

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que:

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

onde  $\theta_0 = 1$ .

Seja  $y_t$  uma variável aleatória tal que:

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

onde  $\theta_0 = 1$ . Será que esse processo é (fracamente) estacionário?

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E(y_t) = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu.$$

- Segundo momento:

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E(y_t) = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\text{Var}[y_t]$$

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E(y_t) = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\text{Var}[y_t] = E[y_t - \mu]^2$$



## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E(y_t) = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\text{Var}[y_t] = E[y_t - \mu]^2 = E\left[\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}\right]^2$$

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E(y_t) = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\text{Var}[y_t] = E[y_t - \mu]^2 = E\left[\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \sum_{j=0}^q \theta_j^2 E[\varepsilon_{t-j}^2]$$

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Expectativa incondicional:

$$E(y_t) = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu.$$

- Segundo momento:

$$\text{Var}[y_t] = E[y_t - \mu]^2 = E\left[\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \sum_{j=0}^q \theta_j^2 E[\varepsilon_{t-j}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2.$$

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- Autocovariância:

## MA( $q$ ) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Autocovariância:**

Para  $j = 1, 2, \dots, q$  temos:

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Autocovariância:**

Para  $j = 1, 2, \dots, q$  temos:

$$\gamma_j = E \left[ \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i-j} \right] =$$

## MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Autocovariância:**

Para  $j = 1, 2, \dots, q$  temos:

$$\begin{aligned}\gamma_j &= E \left[ \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i-j} \right] = \\ &= E \left[ \theta_j \varepsilon_{t-j}^2 + \theta_{j+1} \theta_1 \varepsilon_{t-j-1}^2 + \theta_{j+2} \theta_2 \varepsilon_{t-j-2}^2 + \dots + \theta_q \theta_{q-j} \varepsilon_{t-q}^2 \right].\end{aligned}$$



Mas e então, é ou não é um processo  
(fracamente) estacionário?

Leia os **livros** e os **artigos**, não  
fique só com os slides!!!!

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.