Introdução aos modelos DSGE

Solução de sistemas lineares com expectativas racionais e introdução ao Dynare

João Ricardo Costa Filho

Sobre modelos

Good ideas shine far more brightly when supported by good models
Avinash Dixit (“The making of Economic Policy", 1996, p. 17)

All models are wrong.
George Box

Models are to be used, not believed.
Henri Theil (“Principles of Econometrics", 1971, p. vi)

Como resolver um sistema linear dinâmico com expectativas racionais?

Equações em diferenças: introdução com uma variável

Equações em diferenças e estabilidade

Trabalhemos com uma variáveis y tal que a sua dinâmica ao longo do tempo possa ser expressa da seguinte forma:

$$y_{t+1} = \rho y_t.$$

Equações em diferenças e estabilidade

Trabalhemos com uma variáveis y tal que a sua dinâmica ao longo do tempo possa ser expressa da seguinte forma:

$$y_{t+1} = \rho y_t.$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Equações em diferenças e estabilidade

Trabalhemos com uma variáveis y tal que a sua dinâmica ao longo do tempo possa ser expressa da seguinte forma:

$$y_{t+1} = \rho y_t.$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

Equações em diferenças e estabilidade

Trabalhemos com uma variáveis y tal que a sua dinâmica ao longo do tempo possa ser expressa da seguinte forma:

$$y_{t+1} = \rho y_t.$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis? Infinitas, porque $\forall \rho$ temos infinitos y_0.

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y}.$$

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y}.$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y}.$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis? Apenas uma, porque $y_0 = \bar{y}$ é dado.

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y},$$

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y},$$

y_{t+1}não pode explodir (condição de transversalidade).

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y},$$
$$y_{t+1} \text{não pode explodir (condição de transversalidade).}$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y},$$
$$y_{t+1}\text{não pode explodir (condição de transversalidade).}$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

- $|\rho| > 1$: a solução é explosiva a não ser que $y_0 = 0$.

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t, y_0 = \bar{y},$$
$$y_{t+1} \text{não pode explodir (condição de transversalidade).}$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

- $|\rho| > 1$: a solução é explosiva a não ser que $y_0 = 0$.
- $|\rho| \leq 1$: solução única.

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t,$$

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t,$$

y_{t+1} não pode explodir (condição de transversalidade).

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t,$$
$$y_{t+1} \text{não pode explodir (condição de transversalidade).}$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t,$$
$$y_{t+1} \text{não pode explodir (condição de transversalidade).}$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

- $|\rho| > 1$: a única solução é explosiva a não ser que $y_0 = 0$.

Equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que

$$y_{t+1} = \rho y_t,$$
$$y_{t+1} \text{não pode explodir (condição de transversalidade).}$$

Solução:

$$y_{t+1} = \rho^{t+1} y_0.$$

Quantas soluções possíveis?

- $|\rho| > 1$: a única solução é explosiva a não ser que $y_0 = 0$.
- $|\rho| \leq 1$: infinitas soluções.

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições “desejáveis”:

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições “desejáveis”:
    - Solução única.

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
    - Solução única.
    - Trajetória não-explosiva

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições “desejáveis”:
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = \rho y_t$, dado y_0.

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = \rho y_t$, dado y_0.
  - $|\rho| < 1$ para uma solução ser única e estável.

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições “desejáveis”:
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = \rho y_t$, dado y_0.
  - $|\rho| < 1$ para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial):

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = \rho y_t$, dado y_0.
  - $|\rho| < 1$ para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial):
  - $y_{t+1} = \rho y_t$, y_0 é livre.

Equações em diferenças e estabilidade

- Condições “desejáveis”:
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = \rho y_t$, dado y_0.
  - $|\rho| < 1$ para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial):
  - $y_{t+1} = \rho y_t$, y_0 é livre.
  - $|\rho| \geq 1$ para uma solução ser única e estável.

Sistemas de equações em diferenças

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

Assuma agora que y é um vetor de dimentsão $n \times 1$ e F uma matrix de dimensão $n \times n$:

$$y_{t+1} = Fy_t.$$

Analogamente à situação anterior onde $|\rho| < 1$, temos que O sistema é estável se, e somente se os **autovalores** da matrix F forem menores que 1 em módulo.

Revisão: Autovetores e autovalores

Considere uma matriz quadrada A de tamanho n. O vetor v é um **autovetor** de A se, e somente, se:

$$Av = \lambda v,$$

onde λ representa o seu **autovalor**.

Considere uma matriz quadrada A de tamanho n. O vetor v é um **autovetor** de A se, e somente, se:

$$Av = \lambda v,$$

onde λ representa o seu **autovalor**.

- Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições “desejáveis”:

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = Fy_t$, dado y_0.

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = Fy_t$, dado y_0.
  - $|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = Fy_t$, dado y_0.
  - $|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial:

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = Fy_t$, dado y_0.
  - $|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial:
  - $y_{t+1} = Fy_t$, y_0 é livre.

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = Fy_t$, dado y_0.
  - $|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial:
  - $y_{t+1} = Fy_t$, y_0 é livre.
  - $\lambda_j \geq 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = Fy_t$, dado y_0.
  - $|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial:
  - $y_{t+1} = Fy_t$, y_0 é livre.
  - $\lambda_j \geq 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.
- O sistema precisa ser **explosivo**.

Sistemas de equações em diferenças e estabilidade

- Condições "desejáveis":
  - Solução única.
  - Trajetória não-explosiva
- Variáveis de estado (com valor inicial):
  - $y_{t+1} = Fy_t$, dado y_0.
  - $|\lambda_j| < 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.
- Variáveis de controle (sem valor inicial:
  - $y_{t+1} = Fy_t$, y_0 é livre.
  - $\lambda_j \geq 1, \forall j = 1, \ldots, n$, onde $\lambda = \text{eig}(F)$, para uma solução ser única e estável.
- O sistema precisa ser **explosivo**.
  - A única solução é escolher $y_0 = 0_{n \times 1}$.

Expectativas racionais

Sistema linear de equações com expectativas racionais

$$AE_t\left[Y_{t+1}\right] = BY_t,$$

onde Y_t é um vetor $n + m \times 1$, e A e B são matrizes $n + m \times n + m$.

Sistema linear de equações com expectativas racionais

$$AE_t\left[Y_{t+1}\right] = BY_t,$$

onde Y_t é um vetor $n+m \times 1$, e A e B são matrizes $n+m \times n+m$. Assuma que podemos inverter A tal que

$$E_t\left[Y_{t+1}\right] = FY_t,$$

onde $F = A^{-1}B$.

Sistema linear de equações com expectativas racionais — RBC

$$\varphi \hat{h}_t + \sigma \hat{c}_t = \hat{A}_t + \alpha \left(\hat{k}_t - \hat{h}_t \right) \tag{1}$$

$$E_t \left[\hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t \right] = \frac{1 - \beta \left(1 - \delta \right)}{\sigma} E_t \left[\hat{A}_{t+1} + \left(1 - \alpha \right) \left(\hat{h}_{t+1} - \hat{k}_{t+1} \right) \right] \tag{2}$$

$$\hat{k}_{t+1} = (1 - \delta) \hat{k}_t + \frac{\bar{y}}{\bar{k}} \left(\hat{A}_t + \alpha \hat{k}_t + \left(1 - \alpha \right) \hat{h}_t \right) - \frac{\bar{c}}{\bar{k}} \hat{c}_t \tag{3}$$

$$\hat{A}_t = \rho_A \hat{A}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4}$$

Sistema linear de equações com expectativas racionais — RBC

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\beta(1-\delta)(1-\alpha)}{\sigma} & 1 & -\frac{1-\beta(1-\delta)(1-\alpha)}{\sigma} & -\frac{1-\beta(1-\delta)}{\sigma} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_t \begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \\ \hat{h}_{t+1} \\ \hat{A}_{t+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\sigma & -(\phi+\alpha) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\delta)+\frac{\bar{y}\alpha}{\bar{k}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} & \frac{\bar{y}(1-\alpha)}{\bar{k}} & \frac{\bar{y}}{\bar{k}} \\ 0 & 0 & 0 & \rho_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \\ \hat{h}_t \\ \hat{A}_t \end{bmatrix}$$

Blanchard and Kahn (1980)

Dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking** (ou jumping):

Blanchard and Kahn (1980)

Dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking** (ou jumping):

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

onde $F = A^{-1}B$.

Blanchard and Kahn (1980)

Dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking** (ou jumping):

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

onde $F = A^{-1}B$.

- x_{t+1} é um vetor $n \times 1$ de variáveis **pré-determinadas** (conhecidas em t), com $E_t\left[x_{t+1}\right] = x_{t+1}$.

Blanchard and Kahn (1980)

Dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking** (ou jumping):

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

onde $F = A^{-1}B$.

- x_{t+1} é um vetor $n \times 1$ de variáveis **pré-determinadas** (conhecidas em t), com $E_t\left[x_{t+1}\right] = x_{t+1}$.
- z_{t+1} é um vetor $m \times 1$ de variáveis **forward-looking**.
    - No modelo RBC:

Dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking** (ou jumping):

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

onde $F = A^{-1}B$.

- x_{t+1} é um vetor $n \times 1$ de variáveis **pré-determinadas** (conhecidas em t), com $E_t\left[x_{t+1}\right] = x_{t+1}$.
- z_{t+1} é um vetor $m \times 1$ de variáveis **forward-looking**.
  - No modelo RBC:
  - $\hat{k}_{t+1}$ é pré-determinado.

Blanchard and Kahn (1980)

Dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking** (ou jumping):

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

onde $F = A^{-1}B$.

- x_{t+1} é um vetor $n \times 1$ de variáveis **pré-determinadas** (conhecidas em t), com $E_t\left[x_{t+1}\right] = x_{t+1}$.
- z_{t+1} é um vetor $m \times 1$ de variáveis **forward-looking**.
  - No modelo RBC:
  - $\hat{k}_{t+1}$ é pré-determinado.
  - $\hat{c}_t, \hat{h}_t, \hat{A}_t$ são forward-lookıng.

Blanchard and Kahn (1980)

Dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking** (ou jumping):

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix},$$

onde $F = A^{-1}B$.

- x_{t+1} é um vetor $n \times 1$ de variáveis **pré-determinadas** (conhecidas em t), com $E_t\left[x_{t+1}\right] = x_{t+1}$.
- z_{t+1} é um vetor $m \times 1$ de variáveis **forward-looking**.
  - No modelo RBC:
  - $\hat{k}_{t+1}$ é pré-determinado.
  - $\hat{c}_t, \hat{h}_t, \hat{A}_t$ são forward-looking.

Vamos diagonalizar a matriz $F = PDP^{-1}$.

Revisão: Decomposição de Jordan

Uma matriz quadrada A pode ser decomposta na forma diagonal dada por:

Revisão: Decomposição de Jordan

Uma matriz quadrada A pode ser decomposta na forma diagonal dada por:

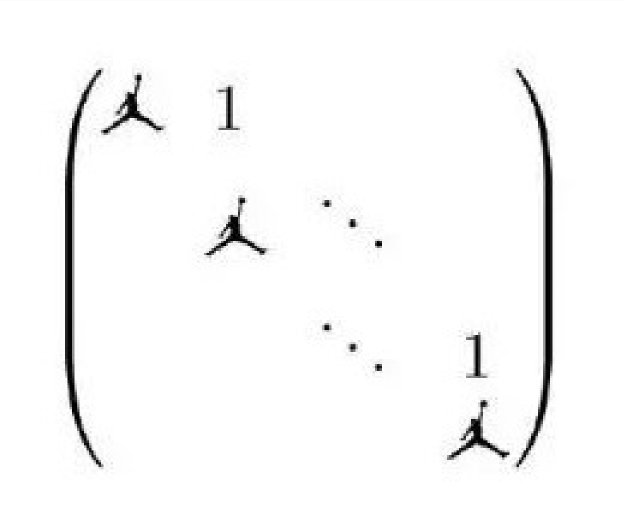
$$A = PDP^{-1},$$

onde P é a matriz composta pelos **autovetores** de A e D é a matriz diagonal com os **autovalores** correspondentes:

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Revisão: Decomposição de Jordan



Blanchard and Kahn (1980)

- $F = PDP^{-1}$, na qual D é a matriz diagonal cujos elementos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ estão definidas em ordem crescente de valor absoluto. Temos que (a ordem dos autovalores não importa):

Blanchard and Kahn (1980)

- $F = PDP^{-1}$, na qual D é a matriz diagonal cujos elementos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ estão definidas em ordem crescente de valor absoluto. Temos que (a ordem dos autovalores não importa):

$$D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a \times b} \\ 0_{b \times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Blanchard and Kahn (1980)

- $F = PDP^{-1}$, na qual D é a matriz diagonal cujos elementos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ estão definidas em ordem crescente de valor absoluto. Temos que (a ordem dos autovalores não importa):

$$D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a \times b} \\ 0_{b \times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

- Λ_1 é uma matriz diagonal de tamanho a com os autovalores menores que 1 (em módulo).

Blanchard and Kahn (1980)

- $F = PDP^{-1}$, na qual D é a matriz diagonal cujos elementos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ estão definidas em ordem crescente de valor absoluto. Temos que (a ordem dos autovalores não importa):

$$D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a \times b} \\ 0_{b \times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

- Λ_1 é uma matriz diagonal de tamanho a com os autovalores menores que 1 (em módulo).
- Λ_2 é uma matriz diagonal de tamanho b com os autovalores maiores do que 1 (em módulo).

Blanchard and Kahn (1980)

- $F = PDP^{-1}$, na qual D é a matriz diagonal cujos elementos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ estão definidas em ordem crescente de valor absoluto. Temos que (a ordem dos autovalores não importa):

$$D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a \times b} \\ 0_{b \times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

- Λ_1 é uma matriz diagonal de tamanho a com os autovalores menores que 1 (em módulo).
- Λ_2 é uma matriz diagonal de tamanho b com os autovalores maiores do que 1 (em módulo).
- $a + b = m + n$.

Blanchard and Kahn (1980)

Reescrevendo o sistema, temos:

$$E_t\left[Y_{t+1}\right] = PDP^{-1}Y_t.$$

Blanchard and Kahn (1980)

Reescrevendo o sistema, temos:

$$E_t\left[Y_{t+1}\right] = PDP^{-1}Y_t.$$

Ao multiplicarmos os dois lados da equação por P^{-1} :, obtemos:

$$P^{-1}E_t\left[Y_{t+1}\right] = DP^{-1}Y_t.$$

Blanchard and Kahn (1980)

Reescrevendo o sistema, temos:

$$E_t\left[Y_{t+1}\right] = PDP^{-1}Y_t.$$

Ao multiplicarmos os dois lados da equação por P^{-1} :, obtemos:

$$P^{-1}E_t\left[Y_{t+1}\right] = DP^{-1}Y_t.$$

Defina $\tilde{Y}_t = P^{-1}Y_t$. Então temos que:

$$E_t\left[\tilde{Y}_{t+1}\right] = D\tilde{Y}_t.$$

Blanchard and Kahn (1980)

Decompondo $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, temos:

Decompondo $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix}.$$

Blanchard and Kahn (1980)

Decompondo $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix} \tag{5}$$

Condições de Blanchard and Kahn (1980)

- Se o número de **autovalores maiores que** 1 for igual ao número de **variáveis forward-looking** $(b = n)$, então o sistema dinâmico tem equilíbrio único.

Condições de Blanchard and Kahn (1980)

- Se o número de **autovalores maiores que** 1 for igual ao número de **variáveis forward-looking** $(b = n)$, então o sistema dinâmico tem equilíbrio único.
- Se $(b = n)$, então o número de **variáveis pré-determinadas** é igual ao número de **autovalores menores que** 1 $(a = m)$.

Blanchard and Kahn (1980)

Sob as condições de Blanchard and Kahn (1980), podemos reescrever o sistema

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{x}_{t+1} \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{array}\right]$$

como dois sistemas separados para $\tilde{x}_t$ e $\tilde{z}_t$:

Blanchard and Kahn (1980)

Sob as condições de Blanchard and Kahn (1980), podemos reescrever o sistema

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix}$$

como dois sistemas separados para $\tilde{x}_t$ e $\tilde{z}_t$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t+1} &= \Lambda_1 \tilde{x}_t \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] &= \Lambda_2 \tilde{z}_t. \end{aligned} \tag{6}$$

Blanchard and Kahn (1980)

Sob as condições de Blanchard and Kahn (1980), podemos reescrever o sistema

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix}$$

como dois sistemas separados para $\tilde{x}_t$ e $\tilde{z}_t$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t+1} &= \Lambda_1 \tilde{x}_t \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] &= \Lambda_2 \tilde{z}_t. \end{aligned} \tag{6}$$

- Como Λ_1 tem os **autovalores menores que** 1, o primeiro sistema é estável.

Blanchard and Kahn (1980)

Sob as condições de Blanchard and Kahn (1980), podemos reescrever o sistema

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{x}_{t+1} \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{array}\right]$$

como dois sistemas separados para $\tilde{x}_t$ e $\tilde{z}_t$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t+1} &= \Lambda_1 \tilde{x}_t \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] &= \Lambda_2 \tilde{z}_t. \end{aligned} \tag{6}$$

- Como Λ_1 tem os **autovalores menores que** 1, o primeiro sistema é estável.
- Como Λ_2 tem os **autovalores maiores que** 1, o sistema é explosivo a menos que $\hat{z}_t = 0$.

Blanchard and Kahn (1980)

Assuma $\tilde{z}_t = 0$ na parte **instável** do sistema representado pela equação (6):

$$\tilde{z}_t = P_{21}x_t + P_{22}z_t = 0_{m\times 1} \implies$$
$$z_t = -P_{22}^{-1}P_{21}x_t.$$

Blanchard and Kahn (1980)

Assuma $\tilde{z}_t = 0$ na parte **instável** do sistema representado pela equação (6):

$$\tilde{z}_t = P_{21}x_t + P_{22}z_t = 0_{m\times 1} \implies$$
$$z_t = -P_{22}^{-1}P_{21}x_t.$$

Na parte **estável** do mesmo sistema, temos

$$x_{t+1} = F_{11}x_t + F_{12}z_t.$$

Blanchard and Kahn (1980)

Assuma $\tilde{z}_t = 0$ na parte **instável** do sistema representado pela equação (6):

$$\begin{aligned} &\tilde{z}_t = P_{21}x_t + P_{22}z_t = 0_{m\times 1} \implies \\ &z_t = -P_{22}^{-1}P_{21}x_t. \end{aligned}$$

Na parte **estável** do mesmo sistema, temos

$$x_{t+1} = F_{11}x_t + F_{12}z_t.$$

Substituindo o resultado para z_t, obtemos:

$$x_{t+1} = \left(F_{11} - F_{12}P_{22}^{-1}P_{21}\right)x_t.$$

Blanchard and Kahn (1980) — Passo-a-passo

1) Escreve o sistema considerando dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking**.

$$AE_t\left[Y_{t+1}\right] = BY_t \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

onde $F = A^{-1}B$.

Blanchard and Kahn (1980) — Passo-a-passo

1) Escreve o sistema considerando dois tipos de variáveis: **pré-determinadas** e **forward-looking**.

$$AE_t\left[Y_{t+1}\right] = BY_t \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ E_t\left[z_{t+1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

onde $F = A^{-1}B$.

2) Faça a decomposição de Jordan (diagonalização) de $F = PDP^{-1}$, na qual

$$D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}.$$

Blanchard and Kahn (1980) — Passo-a-passo

3) Reescreva o sistema em termos de $\tilde{z}_t = P^{-1} z_t$ e $\tilde{x}_t = P^{-1} x_t$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix}.$$

3) Reescreva o sistema em termos de $\tilde{z}_t = P^{-1} z_t$ e $\tilde{x}_t = P^{-1} x_t$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ E_t\left[\tilde{z}_{t+1}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0_{a\times b} \\ 0_{b\times a} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{z}_t \end{bmatrix}.$$

4) Se as condições de Blanchard and Kahn (1980) forem satisfeitas, há uma única solução não-explosiva:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \left(F_{11} - F_{12} P_{22}^{-1} P_{21}\right) x_t \\ z_t &= -P_{22}^{-1} P_{21} x_t. \end{aligned}$$

Blanchard and Kahn (1980) — Passo-a-passo

- Hipótese importante para satisfazer as conduções de Blanchard and Kahn (1980): a matriz A ser inversível. Klein (2000) utiliza a decomposição de Schur (decomposição QZ).

- Hipótese importante para satisfazer as conduções de Blanchard and Kahn (1980): a matriz A ser inversível. Klein (2000) utiliza a decomposição de Schur (decomposição QZ).
- Condições de Blanchard and Kahn (1980) não satisfeitas: o modelo tem múltiplos equilíbrios, raiz unitária, ...

Introdução ao Dynare

Recursos

- **Dynare** é um software para resolver e simular modelos econômicos.
  - Manual

Recursos

- **Dynare** é um software para resolver e simular modelos econômicos.
    - Manual
- Por enquanto, ele necessita de algum outro software como:
    - **MATLAB**.
    - **OCTAVE**.
    - A sintaxe é parecida, mas não igual.

Recursos

- **Dynare** é um software para resolver e simular modelos econômicos.
    - Manual
- Por enquanto, ele necessita de algum outro software como:
    - **MATLAB**.
    - **OCTAVE**.
    - A sintaxe é parecida, mas não igual.

Dynare — Uma síntese

1) Arquivo **.mod** (fundamentalmente, um arquivo de texto) que contém

1) Arquivo **.mod** (fundamentalmente, um arquivo de texto) que contém (i) a lista de variáveis,

Dynare — Uma síntese

1) Arquivo **.mod** (fundamentalmente, um arquivo de texto) que contém (i) a lista de variáveis, (ii) a lista de parâmetros,

1) Arquivo **.mod** (fundamentalmente, um arquivo de texto) que contém (i) a lista de variáveis, (ii) a lista de parâmetros, (iii) as equações do modelo

Dynare — Uma síntese

1) Arquivo **.mod** (fundamentalmente, um arquivo de texto) que contém (i) a lista de variáveis, (ii) a lista de parâmetros, (iii) as equações do modelo e (iv) as funções computacionais a serem performadas (e.g. calcular o equilíbrio, simular IRFs).

Dynare — Uma síntese

1) Arquivo **.mod** (fundamentalmente, um arquivo de texto) que contém (i) a lista de variáveis, (ii) a lista de parâmetros, (iii) as equações do modelo e (iv) as funções computacionais a serem performadas (e.g. calcular o equilíbrio, simular IRFs).
2) Usar o MATLAB/OCTAVE: **dynare yyyy.mod** (onde 'yyyy' é o nome do seu arquivo).

1) Arquivo **.mod** (fundamentalmente, um arquivo de texto) que contém (i) a lista de variáveis, (ii) a lista de parâmetros, (iii) as equações do modelo e (iv) as funções computacionais a serem performadas (e.g. calcular o equilíbrio, simular IRFs).
2) Usar o MATLAB/OCTAVE: **dynare yyyy.mod** (onde 'yyyy' é o nome do seu arquivo).
3) O MATLAB/OCTAVE cria o arquivo '.m' com os resultados.

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

- Variáveis endógenas.

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

- Variáveis endógenas.
- Variáveis exógenas.

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

- Variáveis endógenas.
- Variáveis exógenas.
- Parâmetros.

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

- Variáveis endógenas.
- Variáveis exógenas.
- Parâmetros.
- Modelo (e tipo).

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

- Variáveis endógenas.
- Variáveis exógenas.
- Parâmetros.
- Modelo (e tipo).
- Condições iniciais para encontrar o equilíbrio estacionário.

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

- Variáveis endógenas.
- Variáveis exógenas.
- Parâmetros.
- Modelo (e tipo).
- Condições iniciais para encontrar o equilíbrio estacionário.
- Definição dos choques.

Dynare — Arquivo .mod

Blocos:

- Variáveis endógenas.
- Variáveis exógenas.
- Parâmetros.
- Modelo (e tipo).
- Condições iniciais para encontrar o equilíbrio estacionário.
- Definição dos choques.
- Definição dos procedimentos a serem realizados (e.g. solução, simulação, IRFs, estimação de parâmetros).

Dynare — (Log-)linearização

Como escrever um modelo no Dynare? Três formas:

Como escrever um modelo no Dynare? Três formas:

1) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a linearização.

Dynare — (Log-)linearização

Como escrever um modelo no Dynare? Três formas:

1) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a linearização.
2) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a log-linearização.

Dynare — (Log-)linearização

Como escrever um modelo no Dynare? Três formas:

1) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a linearização.
2) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a log-linearização.

- Importante: o Dynare apenas **lineariza** o modelo. Assim, é preciso redefinr as variáveis.

Dynare — (Log-)linearização

Como escrever um modelo no Dynare? Três formas:

1) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a linearização.
2) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a log-linearização.

- Importante: o Dynare apenas **lineariza** o modelo. Assim, é preciso redefinr as variáveis.

3) Escrever o modelo linear.

Dynare — (Log-)linearização

1) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a linearização.

```
Y = A * ( K(-1) ^alpha ) * ( L ^( 1 - alpha ) );
```

Dynare — (Log-)linearização

1) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a linearização.

```
Y = A * ( K(-1) ^alpha ) * ( L ^( 1 - alpha ) );
```

2) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a log-linearização.

```
exp(Y)=exp(A)*(exp(K(-1))^alpha) * (exp(L)^( 1 - alpha ));
```

Dynare — (Log-)linearização

1) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a linearização.

```
Y = A * ( K(-1) ^alpha ) * ( L ^( 1 - alpha ) );
```

2) Escrever o modelo não-linear e o Dynare faz a log-linearização.

```
exp(Y)=exp(A)*(exp(K(-1))^alpha) * (exp(L)^( 1 - alpha ));
```

3) Escrever o modelo linear.

```
Y = A + alpha * K(-1) + ( 1 - alpha ) * L;
```

Dynare — Timing

O estoque de capital no modelo RBC é uma variável **pré-determinada**, portanto, ao escrevermos a sua lei de movimento ($\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t * (1 - \delta) + \hat{i}_t$) no Dynare, temos que lembrar essa definição:

```
k = k(-1) * ( 1 - delta ) + i;
```

Vamos às simulações!

Referências i

Blanchard, Olivier Jean, and Charles M Kahn. 1980. "The Solution of Linear Difference Models Under Rational Expectations." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1305–11.

Klein, Paul. 2000. "Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model." *Journal of Economic Dynamics and Control* 24 (10): 1405–23.