Econometria de Séries Temporais*

Exercícios sobre modelos VAR

João Ricardo Costa Filho

Abstract

Esta lista de exercícios tem por objetivo auxiliar a(o) aluna(o) a consolidar o estudo sobre os modelos VAR e SVAR.

*joaocostafilho.com.

Questão 1

Com base na motivação da aula sobre "Inflação e riscos geopolíticos", (a) escreva um VAR(1) na sua forma VMA(∞) e (b) defina quais as condições necessárias para que o aumento nos ricos geopolíticos sejam: (i) inflacionários ou (ii) desinflacionários. Por simplicidade, considera apenas o movimento no momento do choque (i.e. $j = 0$).

Suponha que tenhamos duas variáveis: a inflação (π_t) e o risco geopolítico (risco_t). O modelo VAR(1) pode ser escrito, na sua forma reduzida, como:

$$\begin{pmatrix} \text{risco}_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{risco}_{t-1} \\ \pi_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

Vamos assumir a identifição recursiva. Depois de alguma álgebra, a forma VMA(∞) é dada por:

$$\begin{pmatrix} \text{risco}_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{\text{risco}} \\ \mu_{\pi} \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} \pi_{t-1} \\ \text{risco}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

Portanto, em $t = 0$, o sinal de ϕ_{22} define se o choque é inflacionário ($\phi_{22} > 0$) ou desinflacionário ($\phi_{22} < 0$).

Questão 2

Utilize os dados do notebook da aula sobre "Inflação e riscos geopolíticos" e responda:

a) Qual é o efeito do aumento nos riscos geopolíticos globais na taxa de inflação no Brasil?

Estime um VAR com os riscos geopolíticos globais e a taxa de inflação no Brasil. Obtenha as funções impulso-resposta (pode ser com a decomposição de Cholesky ou com restrição de longo prazo).

a) Qual é o efeito do aumento nos riscos geopolíticos domésticos na taxa de inflação no Brasil?

Estime um VAR com os riscos geopolíticos globais e a taxa de inflação no Brasil. Obtenha as funções impulso-resposta (pode ser com a decomposição de Cholesky ou com restrição de longo prazo).

Questão 3

O modelo abaixo é estacionário? Justifique

$$y_t = 4 - 0,5z_t + 0,8y_{t-1} - 0,3z_{t-1} + \varepsilon_t^y$$
$$z_t = 3 + 0,2y_t + 0,1y_{t-1} + 0,6z_{t-1} + \varepsilon_t^z.$$

Primeiro, vamos escrever o modelo como um VAR(p):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$X_t = \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

$$X_{t-1} = \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^y \\ \varepsilon_t^z \end{pmatrix}$$

Para encontrar a matriz inversa de A, usamos a fórmula para a inversa de uma matriz 2×2:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Neste caso, temos:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 - (-0,5) \cdot (-0,2) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Portanto, a inversa de A é:

$$A^{-1} = \frac{1}{0,9} \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0,9} & \frac{0,5}{0,9} \\ \frac{0,2}{0,9} & \frac{1}{0,9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix}$$

Agora, multiplicamos ambos os lados da equação original pela matriz inversa A^{-1}:

$$A^{-1}AX_t = A^{-1}B_0 + A^{-1}B_1X_{t-1} + A^{-1}\varepsilon_t$$

Isso nos dá:

$$X_t = A^{-1}B_0 + A^{-1}B_1X_{t-1} + A^{-1}\varepsilon_t$$

Calculando $A^{-1}B_0$:

$$A^{-1}B_0 = \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,111 \cdot 4 + 0,556 \cdot 3 \\ 0,222 \cdot 4 + 1,111 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,444 + 1,668 \\ 0,888 + 3,333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix}$$

Calculando $A^{-1}B_1$:

$$A^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,111 \cdot 0,8 + 0,556 \cdot 0,1 & 1,111 \cdot (-0,3) + 0,556 \cdot 0,6 \\ 0,222 \cdot 0,8 + 1,111 \cdot 0,1 & 0,222 \cdot (-0,3) + 1,111 \cdot 0,6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8888 + 0,0556 & -0,3333 + 0,3336 \\ 0,1776 + 0,1111 & -0,0666 + 0,6666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix}$$

Finalmente, a matriz A^{-1} aplicada a ε_t é simplesmente:

$$A^{-1}\varepsilon_t = \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t^y \\ \epsilon_t^z \end{pmatrix}$$

Portanto, o sistema na forma desejada é:

$$X_t = \begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix} X_{t-1} + \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t^y \\ \epsilon_t^z \end{pmatrix}$$

Agora, temos duas opções para verificar isso. A primeira, é reescrever o modelo como um VARMA(p,q).

Dada a equação:

$$X_t = \begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix} X_tL + \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Subtraímos o termo $\begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix} X_tL$ de ambos os lados:

$$X_t - \begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix} X_t L = \begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Fatoramos X_t no lado esquerdo:

$$(I - \begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix} L) X_t = \begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Multiplicamos ambos os lados pela matriz inversa de $(I - \begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix} L)$ para isolar X_t:

$$X_t = (I - \begin{pmatrix} 0,9444 & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 \end{pmatrix} L)^{-1} \left[\begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,111 & 0,556 \\ 0,222 & 1,111 \end{pmatrix} \varepsilon_t \right]$$

A matriz dada é:

$$\begin{pmatrix} 1 - 0,9444L & -0,0003L \\ -0,2887L & 1 - 0,6000L \end{pmatrix}$$

Vamos calcular o determinante desta matriz:

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 - 0,9444L & -0,0003L \\ -0,2887L & 1 - 0,6000L \end{pmatrix} \right) = (1-0,9444L)(1-0,6000L) - (-0,0003L)(-0,2887L)$$

Simplificando:

$$\det = (1 - 0,9444L)(1 - 0,6000L) - 0,0003L \cdot 0,2887L$$

Agora, calculamos a matriz adjunta. A matriz adjunta de uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é:

$$\operatorname{adj} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz adjunta da nossa matriz é:

$$\operatorname{adj} \left(\begin{pmatrix} 1 - 0,9444L & -0,0003L \\ -0,2887L & 1 - 0,6000L \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 - 0,6000L & 0,0003L \\ 0,2887L & 1 - 0,9444L \end{pmatrix}$$

Finalmente, a inversa da matriz é dada por:

$$\left(\begin{pmatrix} 1-0,9444L & -0,0003L \\ -0,2887L & 1-0,6000L \end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot \mathrm{adj}$$

Substituindo os valores, temos:

$$\left(\begin{pmatrix} 1-0,9444L & -0,0003L \\ -0,2887L & 1-0,6000L \end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{(1-0,9444L)(1-0,6000L)-0,0003L \cdot 0,2887L} \cdot \begin{pmatrix} 1-0,6000L & \\ 0,2887L & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, a equação final é:

$$X_t = \frac{1}{(1-0,9444L)(1-0,6000L)-0,0003L \cdot 0,2887L} \cdot \begin{pmatrix} 1-0,6000L & 0,0003L \\ 0,2887L & 1-0,9444L \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,111 \\ 0,222 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left[(1-0,9444L)(1-0,6000L)-0,0003L \cdot 0,2887L\right] X_t = \begin{pmatrix} 1-0,6000L & 0,0003L \\ 0,2887L & 1-0,9444L \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 6,112 \\ 4,221 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,11 \\ 0,22 \end{pmatrix}\right.$$

Vamos focar na equação para y_t, que é o primeiro elemento de X_t. Primeiro, identificamos o polinômio característico que precisamos resolver.

A expressão para a equação de y_t é dada por:

$$(1-0,9444L)(1-0,6000L)-0,0003L \cdot 0,2887L$$

Primeiro, expandimos os termos:

$$(1-0,9444L)(1-0,6000L) = 1-0,6000L-0,9444L+0,56664L^2$$

$$-0,0003L \cdot 0,2887L = -0,00008661L^2$$

Então, combinamos os termos:

$$1-0,6000L-0,9444L+0,56664L^2-0,00008661L^2 = 1-1,5444L+(0,56664-0,00008661)L^2$$

Simplificando:

$$1-1,5444L+0,56655339L^2$$

Para encontrar as raízes do polinômio $1 - 1,5444L + 0,56655339L^2 = 0$, usamos a fórmula quadrática:

$$L = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde $a = 0,56655339$, $b = -1,5444$, e $c = 1$.

As raízes do polinômio $1 - 1,5444L + 0,56655339L^2 = 0$ são aproximadamente:

$$L_1 \approx 1,6674$$

$$L_2 \approx 1,0586$$

Como estão fora do círculo unitário, o modelo é estacionário.

Alternativamente, podemos calcular os autovalores da matriz Φ_1:

Para encontrar os autovalores de uma matriz 2×2, precisamos resolver o polinômio característico $\det(A - \lambda I) = 0$, onde A é a matriz dada e λ são os autovalores.

Primeiro, escrevemos a matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0,9444 - \lambda & 0,0003 \\ 0,2887 & 0,6000 - \lambda \end{pmatrix}$$

O determinante dessa matriz é:

$$\det(A - \lambda I) = (0,9444 - \lambda)(0,6000 - \lambda) - (0,0003)(0,2887)$$

Expandindo os termos:

$$\det(A - \lambda I) = (0,9444 - \lambda)(0,6000 - \lambda) - 0,00008661$$

$$= 0,56664 - 0,9444\lambda - 0,6000\lambda + \lambda^2 - 0,00008661$$

$$= \lambda^2 - 1,5444\lambda + 0,56655339$$

Agora, resolvemos o polinômio quadrático:

$$\lambda^2 - 1,5444\lambda + 0,56655339 = 0$$

Usando a fórmula quadrática:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde $a = 0,56655339$, $b = -1,5444$, e $c = 1$.

As raízes são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1,5444 \pm \sqrt{1,5444^2 - 4 \cdot 0,56655339}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1,5444 \pm \sqrt{2,38510736 - 2,26621356}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1,5444 \pm \sqrt{0,1188938}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1,5444 \pm 0,34491}{2}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1,5444 + 0,34491}{2} \approx \frac{1,88931}{2} \approx 0,94465$$

$$\lambda_2 \approx \frac{1,5444 - 0,34491}{2} \approx \frac{1,19949}{2} \approx 0,59975$$

Portanto, os autovalores da matriz são aproximadamente $0,94465$ e $0,59975$ (os inversos das raízes anteriores). Como estão dentro do círculo unitário, o modelo é estacionário.

Questão 4

Utilize os modelos VAR II e VAR III (com dados mensais) disponíveis aqui para estimar a taxa de inflação de preços livres deste ano.

Estime os modelos indicados e projete a taxa de inflação de preços livres deste ano. Lembre-se que a inflação deste ano é acumulada e deve conter (i) a inflação acumulada com os dados observados e (ii) a inflação projetada apenas para o resto do ano.

Questão 5

Utilize os mesmos modelos da questão anterior e compare a taxa de câmbio nominal esperada para o final deste ano da última pesquisa Focus disponível com a projeção de cada um dos modelos. Se os modelos estiverem corretos, a recomendação é de compra ou de venda da moeda estrangeira? (Lembre-se que este é apenas um exercício acadêmico e não configura, em hipótese alguma, uma recomendação de investimento financeiro).

Estime os modelos indicados e projete a variação da taxa de câmbio nominal. Com ela, calcule o nível da taxa de câmbio nominal no final do ano e compare a sua projeção com o Focus para recomendar compra ou venda.

Questão 6

Considere a seguinte economia:

$$
\begin{aligned}
g_t &= 0.5g_{t-1} - 0.1y_{t-1} + \varepsilon_t^g \\
y_t &= 0.1g_t + 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t^y,
\end{aligned}
$$

onde y_t representa o componente transitório do PIB e g_t é o componente transitório dos gastos do governo. Defina $m_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta g_0}$ como o **multiplicador de impacto** dos gastos do governo e $m_T = \frac{\sum_{t=0}^{T}(1+i_t)^t \Delta y_t}{(1+i_t)^t \Delta g_t}$ o **multiplicador acumulado** dos gastos do governo.

a) O modelo é estável? Justifique.

O sistema na forma matricial:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^g \\ \varepsilon_t^y \end{pmatrix}
$$

Para resolver o sistema, vamos encontrar a inversa da matriz A:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix}
$$

A inversa de A é:

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Multiplicando ambos os lados da equação pela matriz inversa A^{-1}:

$$
A^{-1}A \begin{pmatrix} g_t \\ y_t \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^g \\ \varepsilon_t^y \end{pmatrix} \right)
$$

Isso nos dá:

$$\begin{pmatrix} g_t \\ y_t \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^g \\ \varepsilon_t^y \end{pmatrix}$$

Calculando $A^{-1}B_1$:

$$A^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Calculando $A^{-1}\varepsilon_t$:

$$A^{-1}\varepsilon_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^g \\ \varepsilon_t^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^g \\ 0.1\varepsilon_t^g + \varepsilon_t^y \end{pmatrix}$$

Portanto, o sistema na forma desejada é:

$$\begin{pmatrix} g_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^g \\ 0.1\varepsilon_t^g + \varepsilon_t^y \end{pmatrix}$$

Agora, vamos verificar a estacionariedade calculando os autovalores da matriz Φ_1:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Os autovalores são encontrados resolvendo o polinômio característico $\det(\Phi_1 - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 0.5 - \lambda & -0.1 \\ 0.05 & 0.2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Isso nos dá:

$$(0.5 - \lambda)(0.2 - \lambda) - (-0.1)(0.05) = 0$$

Simplificando:

$$(0.5 - \lambda)(0.2 - \lambda) + 0.005 = 0$$

$$0.1 - 0.5\lambda - 0.2\lambda + \lambda^2 + 0.005 = 0$$

$$\lambda^2 - 0.7\lambda + 0.105 = 0$$

Resolvendo para λ:

$$\lambda = \frac{0.7 \pm \sqrt{0.7^2 - 4 \cdot 0.105}}{2}$$

$$\lambda = \frac{0.7 \pm \sqrt{0.49 - 0.42}}{2}$$

$$\lambda = \frac{0.7 \pm \sqrt{0.07}}{2}$$

$$\lambda = \frac{0.7 \pm 0.2646}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{0.9646}{2} = 0.4823$$

$$\lambda_2 = \frac{0.4354}{2} = 0.2177$$

Como ambos os autovalores têm módulo menor que 1, o sistema é estacionário.

b) Qual é a média de longo prazo das variáveis? Explique a intuição econômica.

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Como as variáveis representam componentes transitórios, no longo prazo, espera-se que as variáveis se encontrem na sua tendência de longo e, portanto, $g_t = y_t = 0$.

c) Calcule o multiplicador de impacto dos gastos do governo.

Existem algumas formas de resolver essa questão. A primeira é perceber que, da equação do y_t, temos que $\Delta y_t = 0,1\Delta g_t \implies \frac{\Delta y_t}{\Delta g_t} = m_0 = 0,1$.

Alternativamente, podemos utilizar a representação de um VMA(∞) (Por quê? Porque nos ajuda no próximo item):

$$\begin{pmatrix} g_t \\ y_t \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} \varepsilon_t^g \\ 0.1\varepsilon_t^g + \varepsilon_t^y \end{pmatrix}$$

d) Calcule o multiplicador acumulado dos gastos do governo para $T = 4$ trimestres. Assuma que a taxa de juros anual é igual à 10%.

A taxa de juros é dada por: $i_t = (1 + 0,10)^{1/4} = 0,0241$. Assim, temos:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0.1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.5 & -0.1\\ 0.05 & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0.1\end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix}0.245 & -0.07\\ 0.035 & 0.035\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0.1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.119 & -0.0385\\ 0.01925 & 0.0035\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0.1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.057575 & -0.0196\\ 0.0098 & -0.001225\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0.1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1\\ 0.1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.49\\ 0.07\end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix}0.238\\ 0.0385\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.11515\\ 0.0196\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.055615\\ 0.0096775\end{pmatrix}$$

Considerando apenas a equação do produto com a atualização pela taxa de juros, temos:

$$\sum_{t=0}^{T}(1+i_t)^t \Delta y_t =$$
$$0.1\,(1+0,0241)^0 + 0.07\,(1+0,0241)^1 + 0.0385\,(1+0,0241)^2 + 0.0196\,(1+0,0241)^3 + 0.0096775$$
$$= 0.24376$$

Portanto, temos que $m_4 = \frac{\sum_{t=0}^{4}(1+i_t)^t \Delta y_t}{(1+i_t)^t \Delta g_t} = \frac{0.24376}{1} = 0.24376$.

e) Qual é o percentual da variância dos erros de projeção no PIB que é explicada pelos choques nos gastos do governo?

$$\begin{aligned}
\text{VAR}\left[y_{t+4}\right] &= \sigma_g^2\left(\psi_{0,21}^2 + \psi_{1,21}^2 + \psi_{2,21}^2 + \psi_{3,21}^2 + \psi_{4,21}^2\right) + \\
&\quad + \sigma_y^2\left(\psi_{0,22}^2 + \psi_{1,22}^2 + \psi_{2,22}^2 + \psi_{3,22}^2 + \psi_{4,22}^2\right) \\
\text{VAR}\left[y_{t+4}\right] &= 1^2\left(0^2 + 0,05^2 + 0,035^2 + 0,01925^2 + 0,0098^2\right) + \\
&\quad + 1^2\left(1^2 + 0,2^2 + 0,035^2 + 0,0035^2 + (-0,001225)^2\right) \\
\text{VAR}\left[y_{t+4}\right] &= 0,0041916025 + 1,041238750625 = 1,045430353125
\end{aligned}$$

Portanto, em quatro $T = 4$, $0,0041916025/1,045430353125 \approx 0,4\%$ da variância dos erros de previsão do PIB é explicada por choques nos gastos do governo.

f) A política fiscal é pró-cíclica ou anticíclica? Justifique.

Anticíclica. Temos que $\Delta g_t = -0,1\Delta y_t \implies \frac{\Delta g_t}{\Delta y_t} = -0,1 < 0$

Questão 7

Considere a seguinte economia:

$$\Delta e_t = 0,8\Delta e_{t-1} - 0,5 i_t - 0,2 i_{t-1} + \varepsilon_t^e$$
$$i_t = 1 + 0,3\Delta e_{t-1} + 0,9 i_{t-1} + \varepsilon_t^i.$$

onde Δe_t representa a primeira diferença da taxa de câmbio nominal e i_t é a taxa de juros nominal. Assuma que as variáveis sejam estacionárias e responda:

a) Qual é a média de longo prazo de Δe_t e i_t?

O sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta e_t \\ i_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta e_{t-1} \\ i_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_t^i \end{pmatrix}$$

Para resolver o sistema, vamos encontrar a inversa da matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando ambos os lados da equação pela matriz inversa A^{-1}:

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} \Delta e_t \\ i_t \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta e_{t-1} \\ i_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_t^i \end{pmatrix} \right)$$

Isso nos dá:

$$\begin{pmatrix} \Delta e_t \\ i_t \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta e_{t-1} \\ i_{t-1} \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_t^i \end{pmatrix}$$

Calculando $A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculando $A^{-1} B_1$:

$$A^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 - 0.15 & 0.2 - 0.45 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Calculando $A^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_t^i \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_t^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_t^i \end{pmatrix}$$

Portanto, a representação VAR na forma reduzida é dada por:

$$\begin{pmatrix} \Delta e_t \\ i_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta e_{t-1} \\ i_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^e \\ \varepsilon_t^i \end{pmatrix}$$

Fatoramos X_t no lado esquerdo:

$$(I - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} L)X_t = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_t$$

Multiplicamos ambos os lados pela matriz inversa de $(I - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} L)$ para isolar X_t:

$$X_t = (I - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} L)^{-1} \left[\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon_t \right]$$

Para calcular $\left(I - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$, primeiro vamos encontrar a inversa da matriz $\left(I - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \right)$.

Primeiro, formamos a matriz $I - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$:

$$I - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.65 & -0.25 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.25 \\ -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Agora, encontramos a inversa dessa matriz. A inversa de uma matriz 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aplicando isso à nossa matriz $\begin{pmatrix} 0.35 & 0.25 \\ -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = (0.35)(0.1) - (0.25)(-0.3) = 0.035 + 0.075 = 0.11$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} 0.35 & 0.25 \\ -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0.11}\begin{pmatrix} 0.1 & -0.25 \\ 0.3 & 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.1}{0.11} & \frac{-0.25}{0.11} \\ \frac{0.3}{0.11} & \frac{0.35}{0.11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9091 & -2.2727 \\ 2.7273 & 3.1818 \end{pmatrix}$$

Agora, multiplicamos essa matriz inversa pelo vetor $\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0.9091 & -2.2727 \\ 2.7273 & 3.1818 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.9091)(-0.5) + (-2.2727)(1) \\ (2.7273)(-0.5) + (3.1818)(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.45455 - 2.2727 \\ -1.36365 + 3.1818 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.72725 \\ 1.81815 \end{pmatrix}$$

Portanto, O vetor de médias de longo prazo (μ) é dado por

$$\mu = \begin{pmatrix} -2.72725 \\ 1.81815 \end{pmatrix}$$

Assim, a média de longo prazo de Δe_t é -2.72725 e de i_t é 1.81815.

b) A resposta da taxa de câmbio nominal à um choque na taxa de juros nominal está em linha com a teoria da Paridade Descoberta da Taxa de Juros (UIP)? Justifique.

Sim. Dado que $\frac{\partial \Delta e_t}{\partial i_t}|_{t=0} = -0,2$.

Se a taxa de câmbio nominal estiver em 5 BRL/USD (no período anterior estava em 4,90 BRL/USD) e a taxa de juros em 10 p.p., qual é a previsão do modelo para os próximos dois períodos para o nível da taxa de câmbio nominal?

Utilize o VAR na forma reduzida com $\Delta e_t = 0,1$ e $i_t = 10$ para obter a projeção para Δe_{t+1} e i_{t+1}. Utilize os resultados para projetar Δe_{t+2} e i_{t+2}. Depois, acumule as variações para obter o nível da taxa de câmbio.