Econometria de Séries Temporais

O modelo Autorregressivo (AR)

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Autorregressivo – AR(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

Autorregressivo – AR(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Autorregressivo – AR(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. Como temos apenas uma defasagem do erro, este é um AR(1).

Autorregressivo – AR(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. Como temos apenas uma defasagem do erro, este é um AR(1). Como seria o modelo com duas defasagens?

Autorregressivo – AR(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. Como temos apenas uma defasagem do erro, este é um AR(1). Como seria o modelo com duas defasagens? E com três?

O operador de defasagens (lag operator)

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t = y_{t-1}$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t = y_{t-1}$
  - $L^3 y_t$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t = y_{t-1}$
  - $L^3 y_t = y_{t-3}$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t = y_{t-1}$
  - $L^3 y_t = y_{t-3}$
  - $L^5 y_t$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t = y_{t-1}$
  - $L^3 y_t = y_{t-3}$
  - $L^5 y_t = y_{t-5}$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t = y_{t-1}$
  - $L^3 y_t = y_{t-3}$
  - $L^5 y_t = y_{t-5}$
  - $L\left(L^5 y_t\right)$

O operador de defasagens (lag operator)

- Operador: L
  - $L^j y_t = y_{t-j}$
  - $L^1 y_t = y_{t-1}$
  - $L^3 y_t = y_{t-3}$
  - $L^5 y_t = y_{t-5}$
  - $L\left(L^5 y_t\right) = y_{t-6}$

O operador de defasagens (lag operator)

Propriedades (Enders 2014; Bueno 2012):

O operador de defasagens (lag operator)

Propriedades (Enders 2014; Bueno 2012):

- $Lc = c$

O operador de defasagens (lag operator)

Propriedades (Enders 2014; Bueno 2012):

- $Lc = c$
- $L(y_t + x_t) = y_{t-1} + x_{t-1}$

O operador de defasagens (lag operator)

Propriedades (Enders 2014; Bueno 2012):

- $Lc = c$
- $L(y_t + x_t) = y_{t-1} + x_{t-1}$
  - $\left(L^i + L^j\right) y_t = y_{t-i} + y_{t-j}$

O operador de defasagens (lag operator)

Propriedades (Enders 2014; Bueno 2012):

- $Lc = c$
- $L\left(y_t + x_t\right) = y_{t-1} + x_{t-1}$
  - $\left(L^i + L^j\right) y_t = y_{t-i} + y_{t-j}$
- $L\left(y_t x_t\right) = y_{t-1} x_{t-1}$

O operador de defasagens (lag operator)

Propriedades (Enders 2014; Bueno 2012):

- $Lc = c$
- $L\left(y_t + x_t\right) = y_{t-1} + x_{t-1}$
  - $\left(L^i + L^j\right) y_t = y_{t-i} + y_{t-j}$
- $L\left(y_t x_t\right) = y_{t-1} x_{t-1}$
- $L^{-1} y_t = y_{t+1}$ (lead operator)

AR(1) e o operador de defasagens

Represente o processo AR(1) descrito anteriormente utilizando o operador de defasagens.

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \Longrightarrow (1 - \phi L) y_t = c + \varepsilon_t$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \Longrightarrow (1 - \phi L) y_t = c + \varepsilon_t$$

como $\dfrac{1}{(1 - \phi L)} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots$, temos:

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \implies (1 - \phi L) y_t = c + \varepsilon_t$$

como $\dfrac{1}{(1 - \phi L)} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots$, temos:

$$y_t = \frac{c + \varepsilon_t}{(1 - \phi L)}$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \implies (1 - \phi L) y_t = c + \varepsilon_t$$

como $\dfrac{1}{(1-\phi L)} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots$, temos:

$$y_t = \frac{c + \varepsilon_t}{(1-\phi L)} = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots\right)(c + \varepsilon_t)$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \implies (1 - \phi L) y_t = c + \varepsilon_t$$

como $\dfrac{1}{(1-\phi L)} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots$, temos:

$$y_t = \frac{c + \varepsilon_t}{(1-\phi L)} = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots\right)(c + \varepsilon_t) \iff$$

$$y_t = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots\right) c + \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots\right) \varepsilon_t$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \implies (1 - \phi L) y_t = c + \varepsilon_t$$

como $\dfrac{1}{(1-\phi L)} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots$, temos:

$$y_t = \frac{c + \varepsilon_t}{(1 - \phi L)} = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right)(c + \varepsilon_t) \iff$$

$$y_t = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right) c + \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right) \varepsilon_t \iff$$

$$y_t = \frac{c}{1 - \phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \implies (1 - \phi L)y_t = c + \varepsilon_t$$

$$\text{como } \frac{1}{(1-\phi L)} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots, \text{temos:}$$

$$y_t = \frac{c + \varepsilon_t}{(1 - \phi L)} = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right)(c + \varepsilon_t) \iff$$

$$y_t = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right) c + \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right) \varepsilon_t \iff$$

$$y_t = \frac{c}{1 - \phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

onde $\mu = \frac{c}{1-\phi}$.

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Vamos reescrever o AR assumindo que $|\phi| < 1$:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \Longrightarrow (1 - \phi L) y_t = c + \varepsilon_t$$

como $\dfrac{1}{(1 - \phi L)} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots$, temos:

$$y_t = \frac{c + \varepsilon_t}{(1 - \phi L)} = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right)(c + \varepsilon_t) \iff$$

$$y_t = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right) c + \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \ldots\right) \varepsilon_t \iff$$

$$y_t = \frac{c}{1 - \phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

onde $\mu = \frac{c}{1-\phi}$. Qual tipo de modelo é esse?

A decomposição de Wold (1938)

Qualquer processo y_t que seja **fracamente estacionário** pode ser reescrito como uma função linear de variáveis não-correlacionadas, a_t:

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i a_{t-i}$$

onde a_t é um ruído branco e $\phi_1 = 1$.

Um AR(1) é (fracamente) estacionário?

Voltando à estacionariedade do AR(1)...

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right]$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E[y_t] = E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right] = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E[\varepsilon_{t-j}]$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right] = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E\left[\varepsilon_{t-j}\right] = \mu.$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right] = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E\left[\varepsilon_{t-j}\right] = \mu.$$

- **Segundo momento**:

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E[y_t] = E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right] = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E[\varepsilon_{t-j}] = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$Var[y_t] = E\left[(y_t - \mu)^2\right]$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right] = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E\left[\varepsilon_{t-j}\right] = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$Var\left[y_t\right] = E\left[\left(y_t - \mu\right)^2\right] = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right]^2$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right] = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j E\left[\varepsilon_{t-j}\right] = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$Var\left[y_t\right] = E\left[\left(y_t - \mu\right)^2\right] = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} E\left[\varepsilon_{t-j}^2\right] = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}.$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

$$E\left[(y_t - \mu)\left(y_{t-j} - \mu\right)\right] = E\left[\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \varepsilon_{t-s}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \varepsilon_{t-s-j}\right)\right] =$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

$$E\left[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)\right] = E\left[\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \varepsilon_{t-s}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s \varepsilon_{t-s-j}\right)\right] =$$

$$= \sigma^2 \left(\phi^j + \phi^{j+2} + \phi^{j+4} + \cdots\right) = \left(\frac{\phi^j}{1-\phi^2}\right)\sigma^2$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

$$E\left[(y_t-\mu)(y_{t-j}-\mu)\right]=E\left[\left(\sum_{s=0}^{\infty}\phi^s\varepsilon_{t-s}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\phi^s\varepsilon_{t-s-j}\right)\right]=$$
$$=\sigma^2\left(\phi^j+\phi^{j+2}+\phi^{j+4}+\cdots\right)=\left(\frac{\phi^j}{1-\phi^2}\right)\sigma^2$$

- **Autocorrelação**:

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

$$E\left[(y_t-\mu)(y_{t-j}-\mu)\right]=E\left[\left(\sum_{s=0}^{\infty}\phi^s\varepsilon_{t-s}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\phi^s\varepsilon_{t-s-j}\right)\right]=$$

$$=\sigma^2\left(\phi^j+\phi^{j+2}+\phi^{j+4}+\cdots\right)=\left(\frac{\phi^j}{1-\phi^2}\right)\sigma^2$$

- **Autocorrelação**:

$$\rho_j=\frac{\left(\frac{\phi^j}{1-\phi^2}\right)\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}}=\phi^j, j=1,2,\ldots$$

Um AR(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Mas e então, o AR(1) é um processo (fracamente) estacionário?

Half-life de um AR(1)

Quanto tempo um choque demora para dissipar **metade** do seu efeito em um AR(1)?

Half-life de um AR(1)

Quanto tempo um choque demora para dissipar **metade** do seu efeito em um AR(1)? Sabemos que $\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-j}} = \phi^j$, onde j representa a distância do choque em relação a y_t.

Half-life de um AR(1)

Quanto tempo um choque demora para dissipar **metade** do seu efeito em um AR(1)? Sabemos que $\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-j}} = \phi^j$, onde j representa a distância do choque em relação a y_t. Defina $t_{1/2}$ como o tempo necessário para que o efeito inicial do choque seja reduzido para **metade** de seu valor original:

Half-life de um AR(1)

Quanto tempo um choque demora para dissipar **metade** do seu efeito em um AR(1)? Sabemos que $\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-j}} = \phi^j$, onde j representa a distância do choque em relação a y_t. Defina $t_{1/2}$ como o tempo necessário para que o efeito inicial do choque seja reduzido para **metade** de seu valor original:

$$\varepsilon_{t-j}\phi^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{t-j}$$

Half-life de um AR(1)

Quanto tempo um choque demora para dissipar **metade** do seu efeito em um AR(1)? Sabemos que $\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-j}} = \phi^j$, onde j representa a distância do choque em relação a y_t. Defina $t_{1/2}$ como o tempo necessário para que o efeito inicial do choque seja reduzido para **metade** de seu valor original:

$$\varepsilon_{t-j}\phi^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{t-j} \implies \phi^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Half-life de um AR(1)

Quanto tempo um choque demora para dissipar **metade** do seu efeito em um AR(1)? Sabemos que $\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-j}} = \phi^j$, onde j representa a distância do choque em relação a y_t. Defina $t_{1/2}$ como o tempo necessário para que o efeito inicial do choque seja reduzido para **metade** de seu valor original:

$$\varepsilon_{t-j}\phi^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{t-j} \implies \phi^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Tomando o logaritmo natural em ambos os lados, temos:

$$\ln\left(\phi^{t_{1/2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Half-life de um AR(1)

Quanto tempo um choque demora para dissipar **metade** do seu efeito em um AR(1)? Sabemos que $\frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_{t-j}} = \phi^j$, onde j representa a distância do choque em relação a y_t. Defina $t_{1/2}$ como o tempo necessário para que o efeito inicial do choque seja reduzido para **metade** de seu valor original:

$$\varepsilon_{t-j}\phi^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{t-j} \implies \phi^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Tomando o logaritmo natural em ambos os lados, temos:

$$\ln\left(\phi^{t_{1/2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \implies t_{1/2}\ln(\phi) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Half-life de um AR(1)

Finalmente, resolvemos para $t_{1/2}$:

Half-life de um AR(1)

Finalmente, resolvemos para $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(\phi)}$$

Half-life de um AR(1)

Finalmente, resolvemos para $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(\phi)} \implies t_{1/2} = \frac{-0.6931}{\ln(\phi)}$$

Half-life de um AR(1)

Finalmente, resolvemos para $t_{1/2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(\phi)} \implies t_{1/2} = \frac{-0.6931}{\ln(\phi)}$$

Interpretação: a meia-vida (half-life) é um número positivo que representa o **tempo necessário** para que um choque se dissipe pela **metade**.

AR(2)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

AR(2)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$E\left[y_t\right] = c + \phi_1 E\left[y_{t-1}\right] + \phi_2 E\left[y_{t-2}\right] + E\left[\varepsilon_t\right] \Longrightarrow$$

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$E[y_t] = c + \phi_1 E[y_{t-1}] + \phi_2 E[y_{t-2}] + E[\varepsilon_t] \Longrightarrow$$

$$E[y_t] \equiv \mu =$$

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$
\begin{aligned}
&E\left[y_t\right] = c + \phi_1 E\left[y_{t-1}\right] + \phi_2 E\left[y_{t-2}\right] + E\left[\varepsilon_t\right] \Longrightarrow \\
&E\left[y_t\right] \equiv \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}.
\end{aligned}
$$

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$
\begin{aligned}
&E\left[y_t\right] = c + \phi_1 E\left[y_{t-1}\right] + \phi_2 E\left[y_{t-2}\right] + E\left[\varepsilon_t\right] \Longrightarrow \\
&E\left[y_t\right] \equiv \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos:

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$E\left[y_t\right] = c + \phi_1 E\left[y_{t-1}\right] + \phi_2 E\left[y_{t-2}\right] + E\left[\varepsilon_t\right] \Longrightarrow$$
$$E\left[y_t\right] \equiv \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}.$$

Portanto, temos:

$$y_t - \mu =$$

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$
\begin{aligned}
&E\left[y_t\right] = c + \phi_1 E\left[y_{t-1}\right] + \phi_2 E\left[y_{t-2}\right] + E\left[\varepsilon_t\right] \Longrightarrow \\
&E\left[y_t\right] \equiv \mu = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos:

$$
y_t - \mu = \phi_1\left(y_{t-1}-\mu\right) + \phi_2\left(y_{t-2}-\mu\right) + \varepsilon_t
$$

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$E\left[y_t\right] = c + \phi_1 E\left[y_{t-1}\right] + \phi_2 E\left[y_{t-2}\right] + E\left[\varepsilon_t\right] \Longrightarrow$$
$$E\left[y_t\right] \equiv \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}.$$

Portanto, temos:

$$y_t - \mu = \phi_1\left(y_{t-1} - \mu\right) + \phi_2\left(y_{t-2} - \mu\right) + \varepsilon_t$$
$$E\left[\left(y_t - \mu\right)\left(y_{t-j} - \mu\right)\right]$$

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

A esperança incondicional de um AR(2) é dada por:

$$
\begin{aligned}
&E\left[y_t\right] = c + \phi_1 E\left[y_{t-1}\right] + \phi_2 E\left[y_{t-2}\right] + E\left[\varepsilon_t\right] \Longrightarrow \\
&E\left[y_t\right] \equiv \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos:

$$
\begin{aligned}
y_t - \mu &= \phi_1\left(y_{t-1} - \mu\right) + \phi_2\left(y_{t-2} - \mu\right) + \varepsilon_t \\
E\left[\left(y_t - \mu\right)\left(y_{t-j} - \mu\right)\right] &= \phi_1 E\left[\left(y_{t-1} - \mu\right)\left(y_{t-j} - \mu\right)\right] + \\
&\quad + \phi_2 E\left[\left(y_{t-2} - \mu\right)\left(y_{t-j} - \mu\right)\right] + E\left[\varepsilon_t\left(y_{t-j} - \mu\right)\right].
\end{aligned}
$$

Um AR(2) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Finalmente, temos que a autocovariância (γ_j) do processo AR(2) segue um AR(2):

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2}, j = 1, 2, \ldots$$

E, portanto, para a autocorrelação:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}, j = 1, 2, \ldots$$

AR(p)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

AR(p)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

AR(p)

Veja se um AR(p) é (fracamente) estacionário em Bueno (2012).

AR(p)

Veja se um AR(p) é (fracamente) estacionário em Bueno (2012).

Mas dada a decomposição de Wold, o que podemos inferir?

AR(p)

- **Expectativa incondicional**:

AR(p)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p y_{t-p}}$$

AR(p)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p y_{t-p}}$$

- **Equação característica**:

AR(p)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p y_{t-p}}$$

- **Equação característica**:

$$1 - \phi_1 \lambda - \phi_2 \lambda^2 - \cdots - \phi_p \lambda^p = 0$$

AR(p)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p y_{t-p}}$$

- **Equação característica**:

$$1 - \phi_1 \lambda - \phi_2 \lambda^2 - \cdots - \phi_p \lambda^p = 0$$

O que precisamos para que exista convergência?

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.

Enders, Walter. 2014. "Applied Econometric Time Series Fourth Edition." *New York (US): University of Alabama*.

Wold, Herman. 1938. "A Study in the Analysis of Stationary Time Series." PhD thesis, Almqvist & Wiksell.