Econometria de Séries Temporais

Cointegração e a relação de longo prazo entre variáveis

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

A relação de longo prazo entre variáveis

O que fazer se as variáveis não forem estacionárias?

Modelos univariados e multivariados

Modelos univariados e multivariados

- Em **modelos univariados** (e.g. ARIMA), podemos induzir estacionariedade.

Modelos univariados e multivariados

- Em **modelos univariados** (e.g. ARIMA), podemos induzir estacionariedade.
- E se tivermos modelos multivariados (e.g. VAR), devemos fazer o mesmo?

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Considere que a demanda por moeda (m_t) é função do nível de preços (p_t), da renda real (y_t) e da taxa de juros nominal (i_r) e pode ser representada pela equação abaixo (em logs) (Enders 2015):

$$m_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 i_t + \epsilon_t.$$

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Considere que a demanda por moeda (m_t) é função do nível de preços (p_t), da renda real (y_t) e da taxa de juros nominal (i_r) e pode ser representada pela equação abaixo (em logs) (Enders 2015):

$$m_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 i_t + \epsilon_t.$$

A teoria econômica nos diz que espera-se $\beta_1 = 1$, $\beta_2 > 0$ e $\beta_3 < 0$.

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Podemos reescrever a equação de demanda por moeda da seguinte forma (Enders 2015):

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Podemos reescrever a equação de demanda por moeda da seguinte forma (Enders 2015):

$$\epsilon_t$$

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Podemos reescrever a equação de demanda por moeda da seguinte forma (Enders 2015):

$$\underbrace{\epsilon_t}_{\text{estacionário}}$$

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Podemos reescrever a equação de demanda por moeda da seguinte forma (Enders 2015):

$$\underbrace{\epsilon_t}_{\text{estacionário}} = m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t - \beta_3 i_t$$

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Podemos reescrever a equação de demanda por moeda da seguinte forma (Enders 2015):

$$\underbrace{\epsilon_t}_{\text{estacionário}} = \underbrace{m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t - \beta_3 i_t}_{\text{portanto, estacionário também}}$$

Demanda por moeda e a combinação de variáveis integradas

Podemos reescrever a equação de demanda por moeda da seguinte forma (Enders 2015):

$$\underbrace{\epsilon_t}_{\text{estacionário}} = \underbrace{m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t - \beta_3 i_t}_{\text{portanto, estacionário também}}$$

Ou seja, existe uma combinação linear estacionária de variáveis não estacionárias!

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**:

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$ Assuma que c_t e y_t sejam I(1).

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$ Assuma que c_t e y_t sejam I(1). Temos que $c_t^T = c_t - \beta_1 y_t^P$ é I(0).

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$ Assuma que c_t e y_t sejam I(1). Temos que $c_t^T = c_t - \beta_1 y_t^P$ é I(0).
- **Eficiência no mercado futuro de câmbio**:

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$ Assuma que c_t e y_t sejam I(1). Temos que $c_t^T = c_t - \beta_1 y_t^P$ é I(0).
- **Eficiência no mercado futuro de câmbio**: as taxas futuras representam o equivalente de certeza em relação ao futuro das taxas à vista.

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$ Assuma que c_t e y_t sejam I(1). Temos que $c_t^T = c_t - \beta_1 y_t^P$ é I(0).
- **Eficiência no mercado futuro de câmbio**: as taxas futuras representam o equivalente de certeza em relação ao futuro das taxas à vista. Condicional à hipótese de que os mercados são eficientes e/ou racionais,

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$ Assuma que c_t e y_t sejam I(1). Temos que $c_t^T = c_t - \beta_1 y_t^P$ é I(0).
- **Eficiência no mercado futuro de câmbio**: as taxas futuras representam o equivalente de certeza em relação ao futuro das taxas à vista. Condicional à hipótese de que os mercados são eficientes e/ou racionais, espera-se que, em média, as taxas futuras possuam informação sobre o futuro das taxas de câmbio à vista: $E_t\left[s_{t+1}\right] = f_t \implies s_{t+1} - E_t\left[s_{t+1}\right] = \epsilon_{t+1}$ (onde s_{t+1} e $E_t\left[s_{t+1}\right]$ são I(1)).

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Trabalhemos alguns exemplos seguindo o capítulo 6 de Enders (2015):

- **Hipótese da renda permanente**: $c_t = \beta_1 y_t^P + c_t^T$ Assuma que c_t e y_t sejam I(1). Temos que $c_t^T = c_t - \beta_1 y_t^P$ é I(0).
- **Eficiência no mercado futuro de câmbio**: as taxas futuras representam o equivalente de certeza em relação ao futuro das taxas à vista. Condicional à hipótese de que os mercados são eficientes e/ou racionais, espera-se que, em média, as taxas futuras possuam informação sobre o futuro das taxas de câmbio à vista: $E_t\left[s_{t+1}\right] = f_t \implies s_{t+1} - E_t\left[s_{t+1}\right] = \epsilon_{t+1}$ (onde s_{t+1} e $E_t\left[s_{t+1}\right]$ são I(1)).

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

- **Paridade de poder de compra** (PPP):

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

- **Paridade de poder de compra** (PPP): a teoria da PPP absoluta nos diz que $\text{REER}_t = S_t \frac{P_t^F}{P_t}$.

- **Paridade de poder de compra** (PPP): a teoria da PPP absoluta nos diz que $\text{REER}_t = S_t \frac{P_t^F}{P_t}$. Em logs, temos: $\text{reer}_t = s_t + p_t^F - p_t$

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

- **Paridade de poder de compra** (PPP): a teoria da PPP absoluta nos diz que $\text{REER}_t = S_t \frac{P_t^F}{P_t}$. Em logs, temos: $\text{reer}_t = s_t + p_t^F - p_t$, onde s_t, p_t^F e p_t são I(1)

Teoria econômica e combinação de variáveis integradas

- **Paridade de poder de compra** (PPP): a teoria da PPP absoluta nos diz que $\text{REER}_t = S_t \frac{P_t^F}{P_t}$. Em logs, temos: $\text{reer}_t = s_t + p_t^F - p_t$, onde s_t, p_t^F e p_t são I(1) e, por arbitragem, espera-se que reer_t seja I(0).

Cointegração

Cointegração

O equilíbrio de longo prazo de um conjunto de variáveis ocorre quando (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

Cointegração

O equilíbrio de longo prazo de um conjunto de variáveis ocorre quando (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

$$\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \cdots + \beta_n x_{n,t} = 0.$$

Cointegração

O equilíbrio de longo prazo de um conjunto de variáveis ocorre quando (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

$$\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \cdots + \beta_n x_{n,t} = 0.$$

Portanto, o desvio do equilíbrio é dado por:

Cointegração

O equilíbrio de longo prazo de um conjunto de variáveis ocorre quando (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

$$\beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \cdots + \beta_n x_{n,t} = 0.$$

Portanto, o desvio do equilíbrio é dado por:

$$e_t = \beta' x_t.$$

Cointegração

Cointegração

As variáveis do vetor $x_t = [x_{1,t}, x_{2,t} + \cdots , x_{n,t}]'$ são cointegradas de ordem d,b, ou seja, $x_t \sim CI(d, b)$, se (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

Cointegração

As variáveis do vetor $x_t = [x_{1,t}, x_{2,t} + \cdots, x_{n,t}]'$ são cointegradas de ordem d,b, ou seja, $x_t \sim CI(d, b)$, se (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

- Todos os elementos de x_t forem I(d).

Cointegração

As variáveis do vetor $x_t = [x_{1,t}, x_{2,t} + \cdots, x_{n,t}]'$ são cointegradas de ordem d,b, ou seja, $x_t \sim CI(d, b)$, se (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

- Todos os elementos de x_t forem I(d).
- Existe um vetor $\beta = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]'$ tal que:

Cointegração

As variáveis do vetor $x_t = [x_{1,t}, x_{2,t} + \cdots, x_{n,t}]'$ são cointegradas de ordem d,b, ou seja, $x_t \sim CI(d,b)$, se (Engle and Granger 1987; Enders 2015):

- Todos os elementos de x_t forem I(d).
- Existe um vetor $\beta = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]'$ tal que: $\beta x_t = \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \cdots + \beta_n x_{n,t}$ é $I(d-b)$, com $b > 0$

Cointegração

Cointegração

- A maior parte da literatura sobre cointegração foca em casos onde as variáveis são $I(1)$.

Cointegração

- A maior parte da literatura sobre cointegração foca em casos onde as variáveis são $I(1)$. Por quê?

Cointegração

- A maior parte da literatura sobre cointegração foca em casos onde as variáveis são $I(1)$. Por quê? Porque a maioria das variáveis econômicas é $I(1)$.

Cointegração

- A maior parte da literatura sobre cointegração foca em casos onde as variáveis são $I(1)$. Por quê? Porque a maioria das variáveis econômicas é $I(1)$.
- Contudo, pode haver multicointegração:

Cointegração

- A maior parte da literatura sobre cointegração foca em casos onde as variáveis são $I(1)$. Por quê? Porque a maioria das variáveis econômicas é $I(1)$.
- Contudo, pode haver multicointegração: variáveis $I(2)$ cuja combinação linear delas é $I(1)$, por exemplo.

Cointegração

- A maior parte da literatura sobre cointegração foca em casos onde as variáveis são $I(1)$. Por quê? Porque a maioria das variáveis econômicas é $I(1)$.
- Contudo, pode haver multicointegração: variáveis $I(2)$ cuja combinação linear delas é $I(1)$, por exemplo.
- Podemos usar essa combinação linear junto com as outras variáveis que são $I(1)$ e ter cointegração.

Demanda por moeda e cointegração

Demanda por moeda e cointegração

No nosso exemplo, temos:

Demanda por moeda e cointegração

No nosso exemplo, temos:

$$m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t - \beta_3 i_t = \epsilon_t.$$

Demanda por moeda e cointegração

No nosso exemplo, temos:

$$m_t - \beta_0 - \beta_1 p_t - \beta_2 y_t - \beta_3 i_t = \epsilon_t.$$

Qual é o vetor de cointegração de $x_t = [m_t, 1, p_t, y_t, i_t]'$?

Pode haver mais de um vetor de cointegração?

Oferta de moeda e cointegração

Assuma que o banco central administre os encaixes monetários da seguinte forma (Enders 2015):

Oferta de moeda e cointegração

Assuma que o banco central administre os encaixes monetários da seguinte forma (Enders 2015):

$$m_t = \gamma_0 - \gamma_1 y_t - \gamma_1 p_t + e_t$$

Oferta de moeda e cointegração

Assuma que o banco central administre os encaixes monetários da seguinte forma (Enders 2015):

$$m_t = \gamma_0 - \gamma_1 y_t - \gamma_1 p_t + e_t$$

Qual é o vetor de cointegração de $x_t = [m_t, 1, p_t, y_t, i_t]'$?

Oferta e demanda de moeda e cointegração

Oferta e demanda de moeda e cointegração

Quando observamos dados de agragrados monetários (e.g. M_2), o que eles representam?

Oferta e demanda de moeda e cointegração

Quando observamos dados de agragrados monetários (e.g. M_2), o que eles representam?

Dadas as equações anteriores, temos duas combinações lineares estacionárias:

Quando observamos dados de agragrados monetários (e.g. M_2), o que eles representam?

Dadas as equações anteriores, temos duas combinações lineares estacionárias:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ 1 & -\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Número de vetores de cointegração

Número de vetores de cointegração

Quantos vetores de cointegração podemos ter?

Número de vetores de cointegração

Quantos vetores de cointegração podemos ter?

- Até $n - 1$ vetores linearmente independentes.

Número de vetores de cointegração

Quantos vetores de cointegração podemos ter?

- Até $n-1$ vetores linearmente independentes.
- Exemplo: com $n=3$ pode haver, no máximo, $r=2$ vetores de cointegração linearmente independentes.

Número de vetores de cointegração

Quantos vetores de cointegração podemos ter?

- Até $n-1$ vetores linearmente independentes.
- Exemplo: com $n=3$ pode haver, no máximo, $r=2$ vetores de cointegração linearmente independentes.
- Por que não podemos ter n?

Número de vetores de cointegração

Quantos vetores de cointegração podemos ter?

- Até $n - 1$ vetores linearmente independentes.
- Exemplo: com $n = 3$ pode haver, no máximo, $r = 2$ vetores de cointegração linearmente independentes.
- Por que não podemos ter n?
- Porque nesse caso, qualquer combinação linear das variáveis é estacionária.

Número de vetores de cointegração

Quantos vetores de cointegração podemos ter?

- Até $n-1$ vetores linearmente independentes.
- Exemplo: com $n=3$ pode haver, no máximo, $r=2$ vetores de cointegração linearmente independentes.
- Por que não podemos ter n?
- Porque nesse caso, qualquer combinação linear das variáveis é estacionária. E isso só pode ocorrer se (e somente se) todas as variáveis forem estacionárias.

Tendência Comum

Tendência Comum

Séries cointegradas compartilham uma **tendência estocástica comum**.

Tendência Comum

Séries cointegradas compartilham uma **tendência estocástica comum**. Trabalhemos com o exemplo de Enders (2015) com duas variáveis não-estacionárias:

Tendência Comum

Séries cointegradas compartilham uma **tendência estocástica comum**. Trabalhemos com o exemplo de Enders (2015) com duas variáveis não-estacionárias:

$$y_t = \mu_{y,t} + \epsilon_{y,t},$$

e

$$z_t = \mu_{z,t} + \epsilon_{z,t}$$

onde $\mu_{i,t}$ é um passeio aleatório e $\epsilon_{i,t}$ é um ruído branco.

Tendência Comum

Séries cointegradas compartilham uma **tendência estocástica comum**. Trabalhemos com o exemplo de Enders (2015) com duas variáveis não-estacionárias:

$$y_t = \mu_{y,t} + \epsilon_{y,t},$$

e

$$z_t = \mu_{z,t} + \epsilon_{z,t}$$

onde $\mu_{i,t}$ é um passeio aleatório e $\epsilon_{i,t}$ é um ruído branco. A combinação linear delas é dada por:

$$\begin{aligned} \beta_1 y_t + \beta_2 z_t &= \beta_1(\mu_{yt} + \epsilon_{y,t}) + \beta_2(\mu_{zt} + e_{zt}) \\ &= (\beta_1\mu_{yt} + \beta_2\mu_{zt}) + (\beta_1\epsilon_{y,t} + \beta_2\epsilon_{z,t}) \end{aligned}$$

Tendência Comum

Séries cointegradas compartilham uma **tendência estocástica comum**. Trabalhemos com o exemplo de Enders (2015) com duas variáveis não-estacionárias:

$$y_t = \mu_{y,t} + \epsilon_{y,t},$$

e

$$z_t = \mu_{z,t} + \epsilon_{z,t}$$

onde $\mu_{i,t}$ é um passeio aleatório e $\epsilon_{i,t}$ é um ruído branco. A combinação linear delas é dada por:

$$\begin{aligned} \beta_1 y_t + \beta_2 z_t &= \beta_1(\mu_{yt} + \epsilon_{y,t}) + \beta_2(\mu_{zt} + e_{zt}) \\ &= (\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) + (\beta_1 \epsilon_{y,t} + \beta_2 \epsilon_{z,t}) \end{aligned}$$

Qual é a condição necessária para que a combinação linear seja $I(0)$?

Tendência Comum

Tendência Comum

Dado que ϵ_t são $I(0)$, para que y_t e z_t sejam cointegrados, deve ser o caso que:

$$(\beta_1\mu_{yt} + \beta_2\mu_{zt}) = 0.$$

Tendência Comum

Dado que ϵ_t são $I(0)$, para que y_t e z_t sejam cointegrados, deve ser o caso que:

$$(\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) = 0.$$

Portanto,

$$\mu_{y,t} = -\frac{\beta_2 \mu_{z,t}}{\beta_1}.$$

Ou seja, para que exista cointegração entre y_t e z_t, as suas tendências estocásticas devem ser idênticas até um escalar.

Tendência Comum

Dado que ϵ_t são $I(0)$, para que y_t e z_t sejam cointegrados, deve ser o caso que:

$$(\beta_1 \mu_{yt} + \beta_2 \mu_{zt}) = 0.$$

Portanto,

$$\mu_{y,t} = -\frac{\beta_2 \mu_{z,t}}{\beta_1}.$$

Ou seja, para que exista cointegração entre y_t e z_t, as suas tendências estocásticas devem ser idênticas até um escalar. Ou seja, os parâmetros do vetor de cointegração devem ser tais que eliminem a tendência da combinação linear (Stock and Watson 1988).

Testes de cointegração

Testes de cointegração

- Engle-Granger (verifica se os resíduos da relação de equilíbrio são estacionários)

Testes de cointegração

- Engle-Granger (verifica se os resíduos da relação de equilíbrio são estacionários)
- Johansen (utiliza a representação VECM – que veremos na próxima aula – e testa o posto da matriz π)

Vamos aos dados!

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências i

Enders, Walter. 2015. *Applied Econometric Time Series Fourth Edition. New York (US): University of Alabama*.

Engle, Robert F, and Clive WJ Granger. 1987. "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 251–76.

Stock, James H, and Mark W Watson. 1988. "Variable Trends in Economic Time Series." *Journal of Economic Perspectives* 2 (3): 147–74.