Econometria de Séries Temporais

O modelo Média Móvel (MA)

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

- $E[\varepsilon_t] = 0, \forall t.$

Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

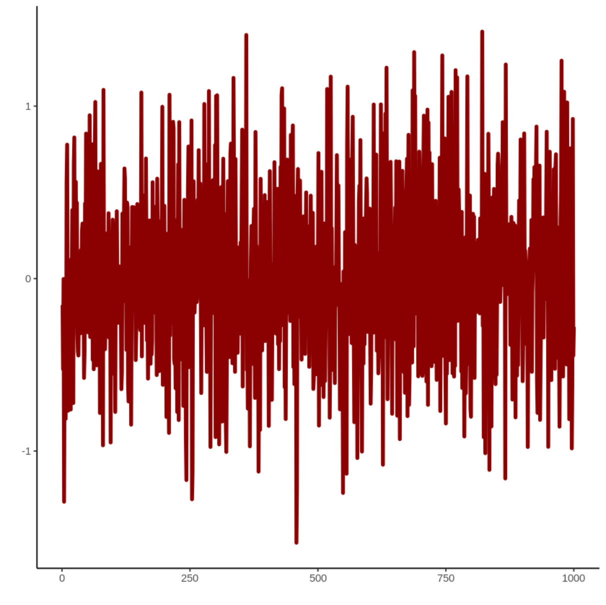
- $E[\varepsilon_t] = 0, \forall t$.
- $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \forall t$.

Ruído branco (Bueno 2012)

Uma sequência $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ é classificada como um **ruído branco** se apresentar as seguintes características:

- $E[\varepsilon_t] = 0, \forall t.$
- $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, \forall t.$
- $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}] = 0, \forall j \neq t$

Ruído branco



Nosso objetivo será o de encontrar modelos que descrevam o PGD até que só sobre um ruído branco!

Média Móvel – MA(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

Média Móvel – MA(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

onde ε_t é um ruído branco.

Média Móvel – MA(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

onde ε_t é um ruído branco. Quando o processo estocástico depende apenas dos erros (contemporâneos e do passado), o modelo que descreve o PGD é denominado média móvel.

Média Móvel – MA(1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

onde ε_t é um ruído branco. Quando o processo estocástico depende apenas dos erros (contemporâneos e do passado), o modelo que descreve o PGD é denominado média móvel. Como temos apenas uma defasagem do erro, este é um MA(1).

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$
\begin{aligned}
E\left[y_t\right] &= E\left[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right] \\
E\left[y_t\right] &= \mu.
\end{aligned}
$$

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$
\begin{aligned}
E\left[y_t\right] &= E\left[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right] \\
E\left[y_t\right] &= \mu.
\end{aligned}
$$

- **Segundo momento**:

$$
Var\left(y_t\right) = E\left[\left(y_t - \mu\right)^2\right]
$$

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$
\begin{aligned}
E[y_t] &= E[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}] \\
E[y_t] &= \mu.
\end{aligned}
$$

- **Segundo momento**:

$$
\begin{aligned}
Var(y_t) &= E\left[(y_t - \mu)^2\right] \\
&= E\left[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2\right]
\end{aligned}
$$

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = E\left[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right]$$
$$E\left[y_t\right] = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$\begin{aligned} Var\left(y_t\right) &= E\left[\left(y_t - \mu\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right)^2\right] \\ &= E\left[\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2\right] \\ &= \sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2 \end{aligned}$$

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left[y_t\right] = E\left[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right]$$
$$E\left[y_t\right] = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$\begin{aligned}
Var\left(y_t\right) &= E\left[\left(y_t - \mu\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\right)^2\right] \\
&= E\left[\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2\right] \\
&= \sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2 \\
&= \left(1 + \theta^2\right)\sigma^2.
\end{aligned}$$

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

$$E\left[\left(y_t-\mu\right)\left(y_{t-1}-\mu\right)\right]=E\left[\left(\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}\right)\left(\varepsilon_{t-1}+\theta\varepsilon_{t-2}\right)\right]$$

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

$$
\begin{aligned}
E\left[(y_t-\mu)(y_{t-1}-\mu)\right] &= E\left[(\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1}+\theta\varepsilon_{t-2})\right] \\
&= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}+\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}+\theta\varepsilon_{t-1}^2+\theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}\right]
\end{aligned}
$$

Um MA(1) é (fracamente) estacionário? (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

$$
\begin{aligned}
E\left[(y_t-\mu)(y_{t-1}-\mu)\right] &= E\left[(\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1}+\theta\varepsilon_{t-2})\right] \\
&= E\left[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}+\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}+\theta\varepsilon_{t-1}^2+\theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}\right] \\
&= \sigma^2\theta.
\end{aligned}
$$

Autocorrelação de um MA(1)

Pela definição de correlação, temos que:

$$\rho_1 = \frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\,\sigma^2} = \frac{\theta}{1+\theta^2},$$

na qual o denominador é a variância de ε_t porque é o produto de dois desvios-padrão que são iguais.

Autocorrelação de um MA(1)

Pela definição de correlação, temos que:

$$\rho_1 = \frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\,\sigma^2} = \frac{\theta}{1+\theta^2},$$

na qual o denominador é a variância de ε_t porque é o produto de dois desvios-padrão que são iguais. Qual é o coeficiente **em um MA(1)** para os erros de outras defasagens?

Autocorrelação de um MA(1)

Pela definição de correlação, temos que:

$$\rho_1 = \frac{\theta\sigma^2}{\left(1+\theta^2\right)\sigma^2} = \frac{\theta}{1+\theta^2},$$

na qual o denominador é a variância de ε_t porque é o produto de dois desvios-padrão que são iguais. Qual é o coeficiente **em um MA(1)** para os erros de outras defasagens? Portanto, qual é o valor da autocorrelação com as outras defasagens?

Média Móvel – MA(2)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

Média Móvel – MA(2)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

onde ε_t é um ruído branco.

Média Móvel – MA(2) (Bueno 2012)

Média Móvel – MA(2) (Bueno 2012)

$$\gamma_j = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right), & j = 0 \\ \sigma^2 \left(\theta_1 + \theta_1 \theta_2\right), & j = 1 \\ \sigma^2 \theta_2, & j = 2 \\ 0, & j > 2. \end{cases}$$

Média Móvel – MA(2) (Bueno 2012)

$$\gamma_j = \begin{cases} \sigma^2\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right), & j=0 \\ \sigma^2\left(\theta_1+\theta_1\theta_2\right), & j=1 \\ \sigma^2\theta_2, & j=2 \\ 0, & j>2. \end{cases}$$

$$\rho_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ \frac{(\theta_1+\theta_1\theta_2)}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)}, & j=1 \\ \frac{\theta_2}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)}, & j=2 \\ 0, & j>2. \end{cases}$$

Média Móvel – MA(2)

Por que a autocorrelação com defasagens maiores do que 2 é zero em um MA(2)?

MA(q) (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que:

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

onde $\theta_0 = 1$.

MA(q) (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que:

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

onde $\theta_0 = 1$. Será que esse processo é (fracamente) estacionário?

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left(y_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j E\left(\varepsilon_{t-j}\right) = \mu.$$

- **Segundo momento**:

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left(y_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j E\left(\varepsilon_{t-j}\right) = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$Var\left[y_t\right]$

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left(y_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j E\left(\varepsilon_{t-j}\right) = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$Var\left[y_t\right] \; = E\left[y_t - \mu\right]^2$$

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left(y_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j E\left(\varepsilon_{t-j}\right) = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$Var\left[y_t\right] = E\left[y_t - \mu\right]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}\right]^2$$

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left(y_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j E\left(\varepsilon_{t-j}\right) = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$Var\left[y_t\right] = E\left[y_t - \mu\right]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2 E\left[\varepsilon_{t-j}^2\right]$$

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Expectativa incondicional**:

$$E\left(y_t\right) = \mu + \sum_{j=0}^{q} \theta_j E\left(\varepsilon_{t-j}\right) = \mu.$$

- **Segundo momento**:

$$Var\left[y_t\right] = E\left[y_t - \mu\right]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2 E\left[\varepsilon_{t-j}^2\right] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2.$$

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

Para $j = 1, 2, \ldots, q$ temos:

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

Para $j = 1, 2, \ldots, q$ temos:

$$\gamma_j = E\left[\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i-j}\right] =$$

MA(q) e estacionariedade (Bueno 2012)

- **Autocovariância**:

Para $j = 1, 2, \ldots, q$ temos:

$$\gamma_j = E\left[\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} \sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i-j}\right] =$$
$$= E\left[\theta_j \varepsilon_{t-j}^2 + \theta_{j+1}\theta_1 \varepsilon_{t-j-1}^2 + \theta_{j+2}\theta_2 \varepsilon_{t-j-2}^2 + \cdots + \theta_q \theta_{q-j} \varepsilon_{t-q}^2\right].$$

Para $j > q$ a esperança é nula.

Mas e então, é ou não é um processo (fracamente) estacionário?

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.