

# **Desenvolvimento econômico**

Crescimento econômico endógeno

---

João Ricardo Costa Filho

*Good ideas shine far more brightly when supported by good models*

Avinash Dixit ("The making of Economic Policy", 1996, p. 17)

*Models are to be used, not believed.*

Henri Theil ("Principles of Econometrics", 1971, p. vi)

## Pesquisa, desenvolvimento e crescimento (Jones and Vollrath 2013)

## Pesquisa, desenvolvimento e crescimento (Jones and Vollrath 2013)

Vamos trabalhar com a versão de Jones (1995) do modelo de Romer (1990):

## Pesquisa, desenvolvimento e crescimento (Jones and Vollrath 2013)

Vamos trabalhar com a versão de Jones (1995) do modelo de Romer (1990):

- O progresso tecnológico é decorrente da adição de novas variedades de produtos.

## Pesquisa, desenvolvimento e crescimento (Jones and Vollrath 2013)

Vamos trabalhar com a versão de Jones (1995) do modelo de Romer (1990):

- O progresso tecnológico é decorrente da adição de novas variedades de produtos.
- O progresso tecnológico é endógeno.

## Pesquisa, desenvolvimento e crescimento (Jones and Vollrath 2013)

Vamos trabalhar com a versão de Jones (1995) do modelo de Romer (1990):

- O progresso tecnológico é decorrente da adição de novas variedades de produtos.
- O progresso tecnológico é endógeno.
- Ele é decorrente da busca por novas ideias que sejam lucrativas.

## Pesquisa, desenvolvimento e crescimento (Jones and Vollrath 2013)

Vamos trabalhar com a versão de Jones (1995) do modelo de Romer (1990):

- O progresso tecnológico é decorrente da adição de novas variedades de produtos.
- O progresso tecnológico é endógeno.
- Ele é decorrente da busca por novas ideias que sejam lucrativas.
- O modelo parece explicar melhor o crescimento sustentado de economias desenvolvidas.



## Pesquisa, desenvolvimento e crescimento (Jones and Vollrath 2013)

Vamos trabalhar com a versão de Jones (1995) do modelo de Romer (1990):

- O progresso tecnológico é decorrente da adição de novas variedades de produtos.
- O progresso tecnológico é endógeno.
- Ele é decorrente da busca por novas ideias que sejam lucrativas.
- O modelo parece explicar melhor o crescimento sustentado de economias desenvolvidas.
- É, portanto, um modelo que ajuda a explicar a dinâmica da fronteira tecnológica no mundo.

Qual é o impacto das ideias na tecnologia de produção?

## O modelo do Romer

---

# A função de produção

## A função de produção

As empresas recrutam capital físico ( $K$ ) e trabalho ( $L_Y$ ) para produzir o bem final ( $Y$ ),

## A função de produção

As empresas recrutam capital físico ( $K$ ) e trabalho ( $L_Y$ ) para produzir o bem final ( $Y$ ), dado o estoque de ideias ( $A$ ):

## A função de produção

As empresas recrutam capital físico ( $K$ ) e trabalho ( $L_Y$ ) para produzir o bem final ( $Y$ ), dado o estoque de ideias ( $A$ ):

$$Y(t) = K^\alpha(t) (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha}$$

## A função de produção

As empresas recrutam capital físico ( $K$ ) e trabalho ( $L_Y$ ) para produzir o bem final ( $Y$ ), dado o estoque de ideias ( $A$ ):

$$Y(t) = K^\alpha(t) (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha}$$

- Se o estoque de ideias for dado, a função possui retornos constantes de escala.



## A função de produção

As empresas recrutam capital físico ( $K$ ) e trabalho ( $L_Y$ ) para produzir o bem final ( $Y$ ), dado o estoque de ideias ( $A$ ):

$$Y(t) = K^\alpha(t) (A(t)L_Y(t))^{1-\alpha}$$

- Se o estoque de ideias for dado, a função possui retornos constantes de escala.
- Mas, se ela também for um insumo da produção, a função terá retornos crescentes de escala.

## Exercício 1 (para casa)

Mostre que ao dobrarmos o estoque de capital físico e a força de trabalho destinada à produção, dado o estoque de ideias  $A(t)$ , a produção dobra (retornos constantes de escala), mas se dobrarmos também o estoque de ideias, a produção mais do que dobra (retornos crescentes de escala).

# A lei de movimento do capital

## A lei de movimento do capital

A dinâmica do capital depende do investimento ( $I(t)$ ) e da taxa de depreciação ( $\delta$ ) do mesmo:

## A lei de movimento do capital

A dinâmica do capital depende do investimento ( $I(t)$ ) e da taxa de depreciação ( $\delta$ ) do mesmo:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t).$$

## A lei de movimento do capital

A dinâmica do capital depende do investimento ( $I(t)$ ) e da taxa de depreciação ( $\delta$ ) do mesmo:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t).$$

Em equilíbrio, temos que  $S(t) = I(t)$  e, assumindo que os agentes poupem uma fração constante da renda, temos:

$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta K(t).$$

# A dinâmica da força de trabalho

## A dinâmica da força de trabalho

Assim como no modelo de Solow, o crescimento da força de trabalho é exógeno:



## A dinâmica da força de trabalho

Assim como no modelo de Solow, o crescimento da força de trabalho é exógeno:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \implies L(t) = L(0)e^{nt}.$$

# A dinâmica do progresso tecnológico

## A dinâmica do progresso tecnológico

O estoque de novas ideias depende do número de pesquisadores dedicado a descobri-las ( $L_A(t)$ ):

## A dinâmica do progresso tecnológico

O estoque de novas ideias depende do número de pesquisadores dedicado a descobri-las ( $L_A(t)$ ):

$$\dot{A}(t) = \bar{\theta}(t)L_A^\lambda(t).$$

onde  $0 < \lambda < 1$  e  $\bar{\theta}(t)$  representa a taxa de descoberta de novas ideias.

# A dinâmica do progresso tecnológico

## A dinâmica do progresso tecnológico

$$\bar{\theta}(t) = \theta A^\phi(t).$$

onde  $\theta$  é uma constante e  $0 < \phi < 1$  é um parâmetro que indica que a produtividade dos pesquisadores ( $\bar{\theta}(t)$ ) aumenta com o estoque de ideias.

Portanto,

$$\dot{A}(t) = \theta L_A^\lambda(t) A^\phi(t). \quad (1)$$

# A força de trabalho



## A força de trabalho

Trabalhemos com a seguinte restrição:

## A força de trabalho

Trabalhemos com a seguinte restrição:

$$L(t) = L_Y(t) + L_A(t).$$

## A força de trabalho

Trabalhemos com a seguinte restrição:

$$L(t) = L_Y(t) + L_A(t).$$

Adicionalmente, vamos assumir que

## A força de trabalho

Trabalhemos com a seguinte restrição:

$$L(t) = L_Y(t) + L_A(t).$$

Adicionalmente, vamos assumir que

$$\frac{L_A(t)}{L(t)} = s_R,$$

$$\frac{L_Y(t)}{L(t)} = (1 - s_R).$$

## **A transição para o equilíbrio estacionário**

---

## **“Balance growth path”**

## “Balance growth path”

Note que 1 não depende do estoque de capital. Portanto, podemos realizar as mesmas etapas do modelo de Solow.

## “Balance growth path”

Note que 1 não depende do estoque de capital. Portanto, podemos realizar as mesmas etapas do modelo de Solow. Portanto, temos:

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (g + n + \delta)k(t).$$

Quando  $\dot{k}(t) = 0$ , obtemos:

$$k^* = \left( \frac{s}{n + g + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$



## “Balance growth path”

Note que 1 não depende do estoque de capital. Portanto, podemos realizar as mesmas etapas do modelo de Solow. Portanto, temos:

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (g + n + \delta)k(t).$$

Quando  $\dot{k}(t) = 0$ , obtemos:

$$k^* = \left( \frac{s}{n + g + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

E, portanto:

## “Balance growth path”

Note que 1 não depende do estoque de capital. Portanto, podemos realizar as mesmas etapas do modelo de Solow. Portanto, temos:

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (g + n + \delta)k(t).$$

Quando  $\dot{k}(t) = 0$ , obtemos:

$$k^* = \left( \frac{s}{n + g + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

E, portanto:

$$y^* = \left( \frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

## **“Balance growth path”**

## “Balance growth path”

Como já vimos anteriormente, no longo prazo, o crescimento do PIB por trabalhador é dado pelo progresso tecnológico ( $g_Y = g_K = g_A$ ).

Então, o que muda nesse modelo?

## Progreso tecnológico no “balance growth path”

## Progresso tecnológico no “balance growth path”

A taxa de progresso tecnológico no “balance growth path” é dada por:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{L_A^\lambda}{A^{1-\phi}(t)}$$

## Progresso tecnológico no “balance growth path”

A taxa de progresso tecnológico no “balance growth path” é dada por:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{L_A^\lambda}{A^{1-\phi}(t)}$$

O que tem que acontecer para ela ser constante ( $g_A$ )?



## Progresso tecnológico no “balance growth path”

Passe o log no numerado e no denominador da razão anterior e derive em relação ao tempo:

$$0 = \lambda \frac{\dot{L}_A(t)}{L_A(t)} - (1 - \phi) \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$$

## Progresso tecnológico no “balance growth path”

Passe o log no numerado e no denominador da razão anterior e derive em relação ao tempo:

$$0 = \lambda \frac{\dot{L}_A(t)}{L_A(t)} - (1 - \phi) \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$$

No longo prazo, temos  $\frac{\dot{L}_A(t)}{L_A(t)} = n$ . Portanto,

$$g_A = \frac{\lambda n}{1 - \phi}.$$

## Choque permanente em P&D

---

Vamos seguir Jones and Vollrath (2013) e assumir  $\lambda = 1$  e  $\phi$  em

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{L_A^\lambda}{A^{1-\phi(t)}},$$

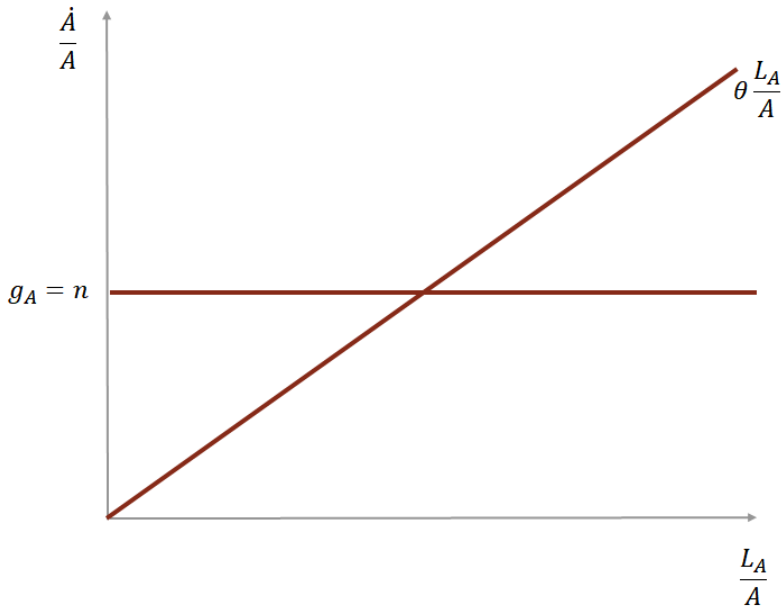
Vamos seguir Jones and Vollrath (2013) e assumir  $\lambda = 1$  e  $\phi$  em

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{L_A^\lambda}{A^{1-\phi(t)}},$$

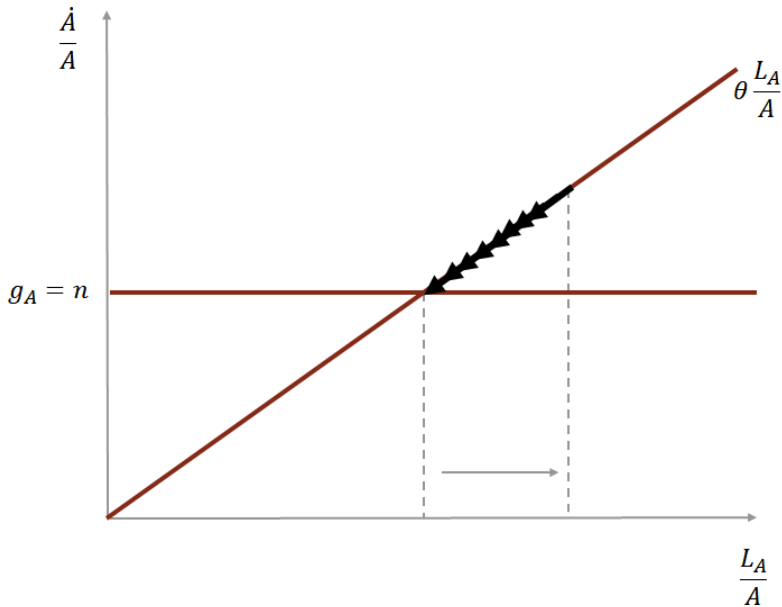
## Exercício 2

Faça um gráfico com **duas curvas**: a curva 1 é  $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$  em qualquer instante do tempo e a curva 2 é  $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$  no balance growth path.  
(coloque  $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$  no eixo vertical e  $\frac{L_A}{A(t)}$  no eixo horizontal).

## Equilíbrio de longo prazo



## Choque em $s_R$





## Exercício 3

Faça um gráfico com  $\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$  após o choque em  $s_R$ .

Podemos reescrever a equação

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{L_A^\lambda}{A^{1-\phi(t)}},$$

Podemos reescrever a equação

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{L_A^\lambda}{A^{1-\phi}(t)},$$

como:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{(s_R L)^\lambda}{A^{1-\phi}(t)}$$

Podemos reescrever a equação

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{L_A^\lambda}{A^{1-\phi}(t)},$$

como:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \theta \frac{(s_R L)^\lambda}{A^{1-\phi}(t)}$$

## PIB no “balance growth path”

## PIB no “balance growth path”

Seguindo Jones and Vollrath (2013), temos:

$$\left(\frac{y}{A}\right)^* = \left(\frac{s_K}{n + g_A + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1 - s_R).$$

## PIB no “balance growth path”

Seguindo Jones and Vollrath (2013), temos:

$$\left(\frac{y}{A}\right)^* = \left(\frac{s_K}{n + g_A + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1 - s_R).$$

Temos também que

$$A(t) = \frac{\theta s_R L(t)}{g_A}.$$

## PIB no “balance growth path”

Seguindo Jones and Vollrath (2013), temos:

$$\left(\frac{y}{A}\right)^* = \left(\frac{s_K}{n + g_A + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1 - s_R).$$

Temos também que

$$A(t) = \frac{\theta s_R L(t)}{g_A}.$$

Portanto, o PIB per capita é dado por:



## PIB no “balance growth path”

Seguindo Jones and Vollrath (2013), temos:

$$\left(\frac{y}{A}\right)^* = \left(\frac{s_K}{n + g_A + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1 - s_R).$$

Temos também que

$$A(t) = \frac{\theta s_R L(t)}{g_A}.$$

Portanto, o PIB per capita é dado por:

$$y^*(t) = \left(\frac{s_K}{n + g_A + \delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1 - s_R) \frac{\theta s_R}{g_A} L(t).$$

Leia os **livros** e os **artigos**, não  
fique só com os slides!!!!

Jones, Charles I. 1995. "R & d-Based Models of Economic Growth." *Journal of Political Economy* 103 (4): 759–84.

Jones, Charles I, and Dietrich Vollrath. 2013. *Introduction to Economic Growth*. Third edition. W.W. Norton & Company.

Romer, Paul M. 1990. "Endogenous Technological Change." *Journal of Political Economy* 98 (5): 2.