Econometria Aplicada

Regressão linear: simples e múltipla

João Ricardo Costa Filho

Econometria Aplicada

Gestão de expectativas

O que vocês esperam deste curso?

O que é Econometria

"The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

O que é Econometria

"In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Tipos de dados

- Cross-section.

Tipos de dados

- Cross-section.
- Dados em painel.

Tipos de dados

- Cross-section.
- Dados em painel.
- Série de tempo

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit)

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit)
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit)
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais
- Aula 5 - Modelos com dados em painel

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit)
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais
- Aula 5 - Modelos com dados em painel
- Aula 6 - Introdução à séries temporais

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit)
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais
- Aula 5 - Modelos com dados em painel
- Aula 6 - Introdução à séries temporais
- Aula 7 - Modelos ARIMA

A nossa jornada

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit)
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais
- Aula 5 - Modelos com dados em painel
- Aula 6 - Introdução à séries temporais
- Aula 7 - Modelos ARIMA
- Aula 8 - Discussão sobre os trabalhos

Livro-texto

Wooldridge, J. M. (2006). Introdução à econometria: uma abordagem moderna. Pioneira Thomson Learning.

Livro-texto

Wooldridge, J. M. (2006). Introdução à econometria: uma abordagem moderna. Pioneira Thomson Learning.

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais [capítulo 2, 3 e 4]

Livro-texto

Wooldridge, J. M. (2006). Introdução à econometria: uma abordagem moderna. Pioneira Thomson Learning.

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit) [capítulo 17]

Livro-texto

Wooldridge, J. M. (2006). Introdução à econometria: uma abordagem moderna. Pioneira Thomson Learning.

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit) [capítulo 17]
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais [capítulo 15]

Livro-texto

Wooldridge, J. M. (2006). Introdução à econometria: uma abordagem moderna. Pioneira Thomson Learning.

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit) [capítulo 17]
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais [capítulo 15]
- Aula 5 - Modelos com dados em painel [capítulo 13]

Livro-texto

Wooldridge, J. M. (2006). Introdução à econometria: uma abordagem moderna. Pioneira Thomson Learning.

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit) [capítulo 17]
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais [capítulo 15]
- Aula 5 - Modelos com dados em painel [capítulo 13]
- Aula 6 - Introdução à séries temporais [capítulo 18]

Livro-texto

Wooldridge, J. M. (2006). Introdução à econometria: uma abordagem moderna. Pioneira Thomson Learning.

- Aula 1 - Regressão linear: simples e múltipla [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 2 - Regressão linear múltipla e formas funcionais [capítulo 2, 3 e 4]
- Aula 3 - Modelos de probabilidade (Probit e Logit) [capítulo 17]
- Aula 4 - Variáveis Instrumentais [capítulo 15]
- Aula 5 - Modelos com dados em painel [capítulo 13]
- Aula 6 - Introdução à séries temporais [capítulo 18]
- Aula 7 - Modelos ARIMA [capítulo 18]

Metodologia ativa

- **Vocês são os protagonistas do próprio aprendizado**.

Metodologia ativa

- **Vocês são os protagonistas do próprio aprendizado**.
- Há evidências de que os alunos aprendem mais com métodos ativos, embora muitas vezes prefiram aulas meramente expositivas. Surge o nosso primeiro conflito.

Metodologia ativa

- **Vocês são os protagonistas do próprio aprendizado**.
- Há evidências de que os alunos aprendem mais com métodos ativos, embora muitas vezes prefiram aulas meramente expositivas. Surge o nosso primeiro conflito.
- Pessoas diferentes respondem à estímulos de maneira diferente.

Metodologia ativa

- **Vocês são os protagonistas do próprio aprendizado**.
- Há evidências de que os alunos aprendem mais com métodos ativos, embora muitas vezes prefiram aulas meramente expositivas. Surge o nosso primeiro conflito.
- Pessoas diferentes respondem à estímulos de maneira diferente.
- A importância de (saber) resolver problemas.

Metodologia ativa

- **Vocês são os protagonistas do próprio aprendizado**.
- Há evidências de que os alunos aprendem mais com métodos ativos, embora muitas vezes prefiram aulas meramente expositivas. Surge o nosso primeiro conflito.
- Pessoas diferentes respondem à estímulos de maneira diferente.
- A importância de (saber) resolver problemas.
- A importância do **silêncio** (não, não é sobre o que você pensa).

Metodologia ativa

- **Vocês são os protagonistas do próprio aprendizado**.
- Há evidências de que os alunos aprendem mais com métodos ativos, embora muitas vezes prefiram aulas meramente expositivas. Surge o nosso primeiro conflito.
- Pessoas diferentes respondem à estímulos de maneira diferente.
- A importância de (saber) resolver problemas.
- A importância do **silêncio** (não, não é sobre o que você pensa).
- **Marquem uma conversa comigo!** (quero saber sobre você, seu interesse no programa e o seu **plano de estudos** para a disciplina).

Avaliação

- Atividades em sala.
- Take-home exam.
- Trabalho – Aplicação.

Ferramental

- Linguagem: R
- Como?
  - RStudio
  - Google Colab: https://colab.research.google.com/#create=true&language=r

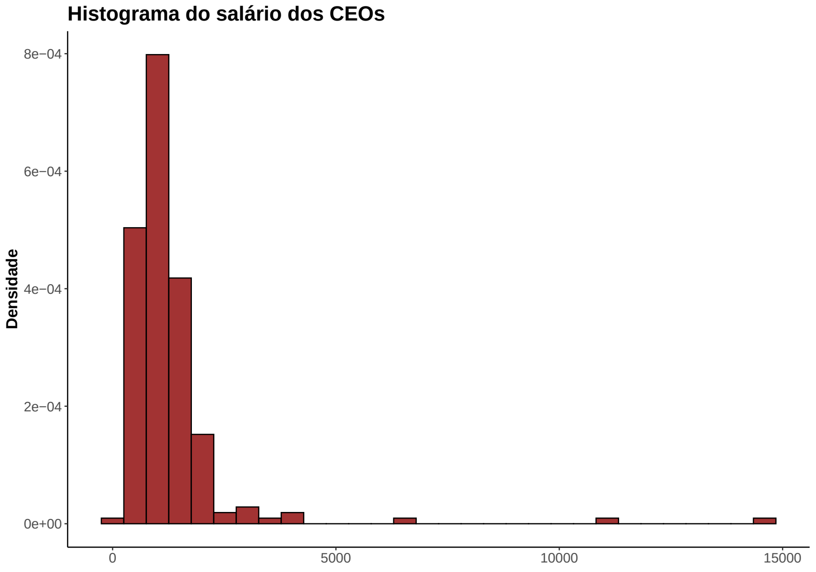
A regressão linear

Será que os salários dos CEOs estão associados ao retorno sobre o patrimônio (ROE)?

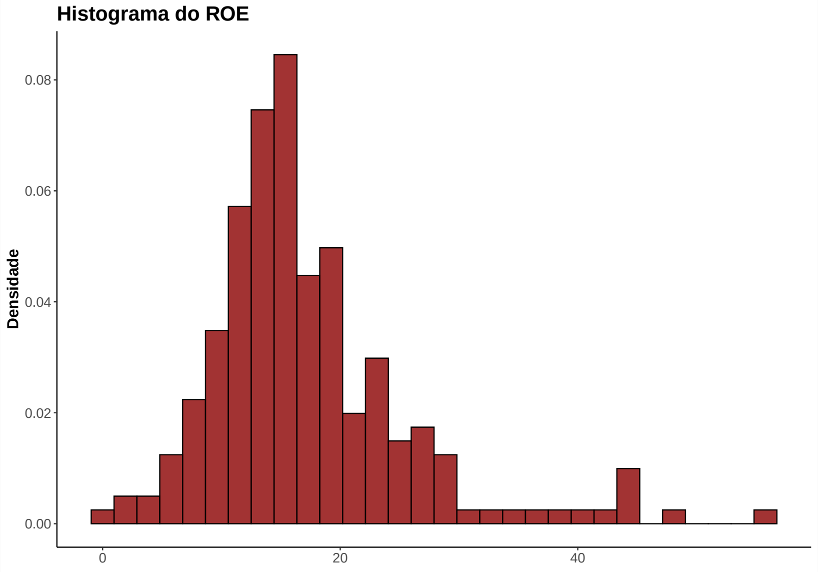
Dados

```r
library(wooldridge)

data(ceosal1)

attach( ceosal1 )
```

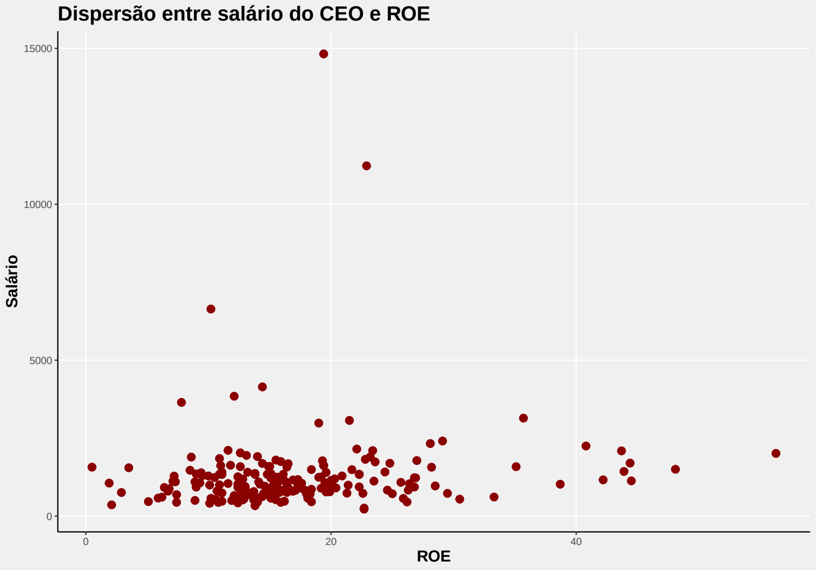
Visualização dos dados (super importante!)



Visualização dos dados (super importante!)



Visualização dos dados (super importante!)



Por que visualizar os dados é tão importante assim?

O quarteto de Anscombe

O quarteto de Anscombe (Anscombe 1973)

Imagine quatro conjuntos de dados.

O quarteto de Anscombe (Anscombe 1973)

Imagine quatro conjuntos de dados. Em cada um deles, temos duas variáveis (X e Y). Em todos, temos...

O quarteto de Anscombe (Anscombe 1973)

Imagine quatro conjuntos de dados. Em cada um deles, temos duas variáveis (X e Y). Em todos, temos...

- ...a mesma média e o mesmo desvio-padrão de X.

O quarteto de Anscombe (Anscombe 1973)

Imagine quatro conjuntos de dados. Em cada um deles, temos duas variáveis (X e Y). Em todos, temos...

- ...a mesma média e o mesmo desvio-padrão de X.
- ...a mesma média e o mesmo desvio-padrão de Y.

O quarteto de Anscombe (Anscombe 1973)

Imagine quatro conjuntos de dados. Em cada um deles, temos duas variáveis (X e Y). Em todos, temos...

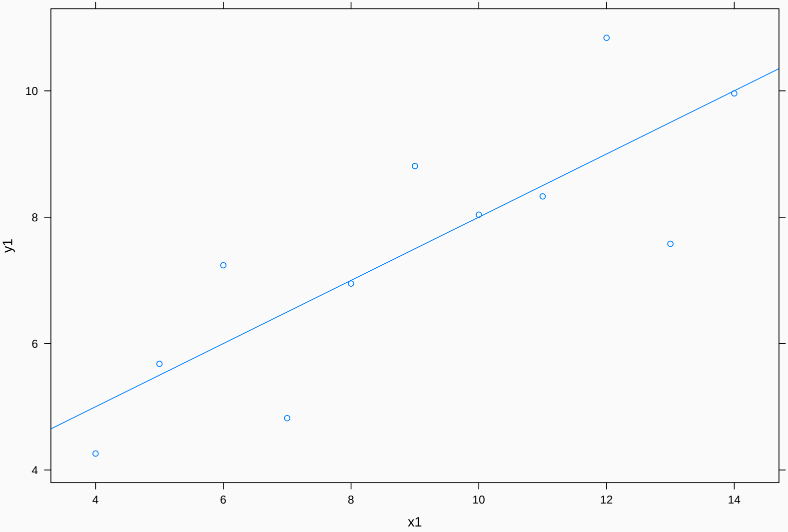
- ...a mesma média e o mesmo desvio-padrão de X.
- ...a mesma média e o mesmo desvio-padrão de Y.
- ...a mesma correlação entre X e Y.

O quarteto de Anscombe (Anscombe 1973)

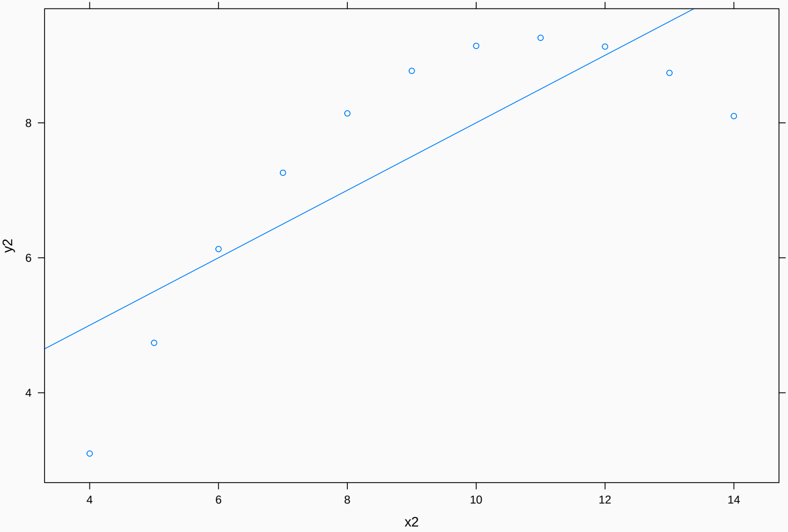
Imagine quatro conjuntos de dados. Em cada um deles, temos duas variáveis (X e Y). Em todos, temos...

- ...a mesma média e o mesmo desvio-padrão de X.
- ...a mesma média e o mesmo desvio-padrão de Y.
- ...a mesma correlação entre X e Y.
- ...os mesmos coeficientes estimados para uma regressão linear de Y em X.

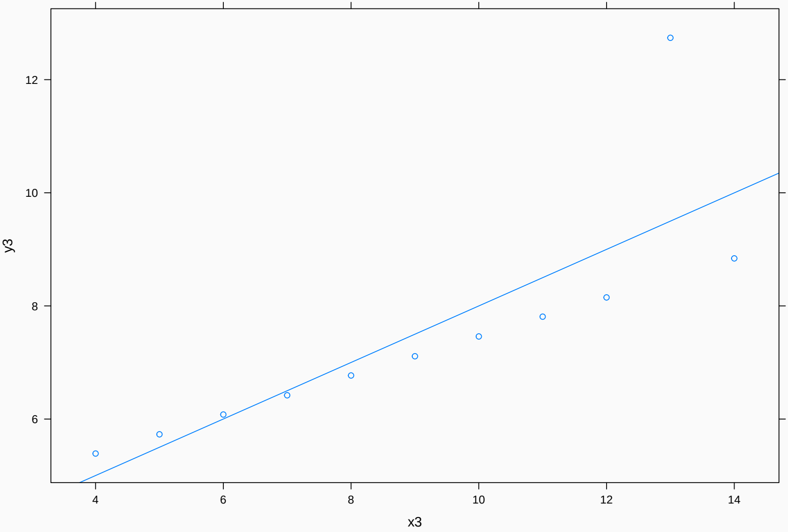
O quarteto de Anscombe - olhem para os dados!



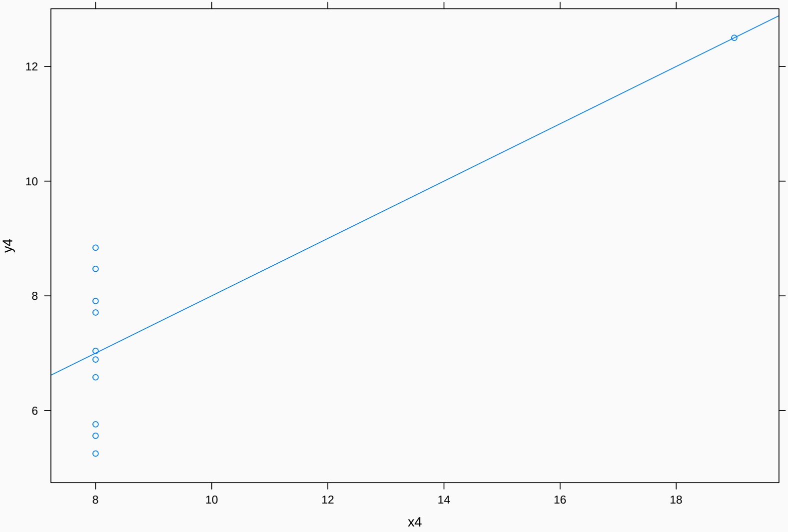
O quarteto de Anscombe - olhem para os dados!



O quarteto de Anscombe - olhem para os dados!



O quarteto de Anscombe - olhem para os dados!



Voltemos à questão dos salários dos CEOs e o ROE.

Estatísticas descritivas (super importante!)

```
##                              Salário   ROE
## Média                        1281.12 17.18
## Variância                 1883331.64 72.56
## Desvio-padrão                1372.35  8.52
## Coeficiente de Variação         1.07  0.50

## [1] "Covariância entre salários e ROE"

## [1] 1342.54

## [1] "Correlação entre salários e ROE"

## [1] 0.11
```

Como responder a questão que motivou a nossa análise?

A regressão linear

Assuma que possamos relacionar o salários dos CEOS com o ROE da seguinte forma:

$$salario_i = \beta_0 + \beta_1 ROE_i.$$

A regressão linear

Assuma que possamos relacionar o salários dos CEOS com o ROE da seguinte forma:

$$salario_i = \beta_0 + \beta_1 ROE_i.$$

O que os parâmetros significam?

A regressão linear

Assuma que possamos relacionar o salários dos CEOS com o ROE da seguinte forma:

$$salario_i = \beta_0 + \beta_1 ROE_i.$$

O que os parâmetros significam? Como estimá-los?

Regressão linear com MQO

Assuma que busquemos um estimador que minimize o erro quadrado. Por quê erro quadrado?

Regressão linear com MQO

Assuma que busquemos um estimador que minimize o erro quadrado. Por quê erro quadrado?

- Erro: $\varepsilon_i = salario_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 ROE_i$.

Regressão linear com MQO

Assuma que busquemos um estimador que minimize o erro quadrado. Por quê erro quadrado?

- Erro: $\varepsilon_i = salario_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 ROE_i$.
- $\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\epsilon_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(salario_i - \hat{\beta_0} - \hat{\beta_1} ROE_i\right)^2$

Regressão linear com MQO

Assuma que busquemos um estimador que minimize o erro quadrado. Por quê erro quadrado?

- Erro: $\varepsilon_i = salario_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 ROE_i$.
- $\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\epsilon_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(salario_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 ROE_i\right)^2$
  - $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(ROE_i - \overline{ROE}\right)\left(salario_i - \overline{salario}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(ROE_i - \overline{ROE}\right)^2}$
  - $\hat{\beta}_0 = \overline{salario} - \hat{\beta}_1 \overline{ROE}$

Regressão linear com MQO

Genericamente

$$\hat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \frac{cov(X, Y)}{var(X)} = corr(X, Y)\frac{s_X}{s_y}$$

e

$$\hat{\beta_0} = \bar{Y} - \hat{\beta_1}\bar{X}$$

Regressão linear com MQO – Salário CEOs e ROE

```
reg = lm( salary ~ roe, data = ceosal1)
```

Regressão linear com MQO – Salário CEOs e ROE

```
##
## Call:
## lm(formula = salary ~ roe, data = ceosal1)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -1160.2  -526.0  -254.0   138.8 13499.9
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   963.19     213.24   4.517 1.05e-05 ***
## roe            18.50      11.12   1.663   0.0978 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1
##
```

Regressão linear com MQO – Salário CEOs e ROE

Ou seja, a relação que estimamos é tal que:

$$\widehat{salário} = 963.19 + 18.50\ ROE.$$

Regressão linear com MQO – Salário CEOs e ROE

Ou seja, a relação que estimamos é tal que:

$$\widehat{salário} = 963.19 + 18.50 \ ROE.$$

Sendo assim, qual é o valor do salário **esperado** de um CEO cuja empresa tem um ROE de 20? E um ROE de 15? E de 10?

Inferência

Definição importante

Vocês aceitam errar quantas vezes para cada 100 tentativas?

Inferência

Como verificar se a associação entre as variáveis é estatísticamente significativa?

Inferência

Como verificar se a associação entre as variáveis é estatísticamente significativa?Realizados testes de hipótese sobre os parâmetros!

Inferência

Como verificar se a associação entre as variáveis é estatísticamente significativa?Realizados testes de hipótese sobre os parâmetros!

- Para $\hat{\beta}_0$:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = 0$$
$$\mathcal{H}_a : \beta_0 \neq 0$$

- Para $\hat{\beta}_1$:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$$
$$\mathcal{H}_a : \beta_1 \neq 0$$

(Não precisam ser apenas com $\neq$ e nem com zero!)

Vamos simular o comportamento de β_0 e β_1 em diferentes amostras?

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

Imagine que tenhamos 500 amostras de tamanho 200 com duas variáveis, X e Y.

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

Imagine que tenhamos 500 amostras de tamanho 200 com duas variáveis, X e Y. E que saibamos que $Y_i = 2 + 3X_i + \epsilon_i$.

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

Imagine que tenhamos 500 amostras de tamanho 200 com duas variáveis, X e Y. E que saibamos que $Y_i = 2 + 3X_i + \epsilon_i$. Ou seja, que $\beta_0 = 2$ e $\beta_1 = 3$.

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

Imagine que tenhamos 500 amostras de tamanho 200 com duas variáveis, X e Y. E que saibamos que $Y_i = 2 + 3X_i + \epsilon_i$. Ou seja, que $\beta_0 = 2$ e $\beta_1 = 3$. Quais seriam os resultados dos estimadores ($\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$) em cada uma delas?

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

Imagine que tenhamos 500 amostras de tamanho 200 com duas variáveis, X e Y. E que saibamos que $Y_i = 2 + 3X_i + \epsilon_i$. Ou seja, que $\beta_0 = 2$ e $\beta_1 = 3$. Quais seriam os resultados dos estimadores ($\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$) em cada uma delas? Podemos identificar algum padrão?

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

```r
# Para replicarmos as variáveis pseudo aleatórias
set.seed(1301)

# Definindo os parâmetros

amostras <- 500 # número de amostras

n <- 200         # tamanho de cada amostra

b0 <- 2

b1 <- 3
```

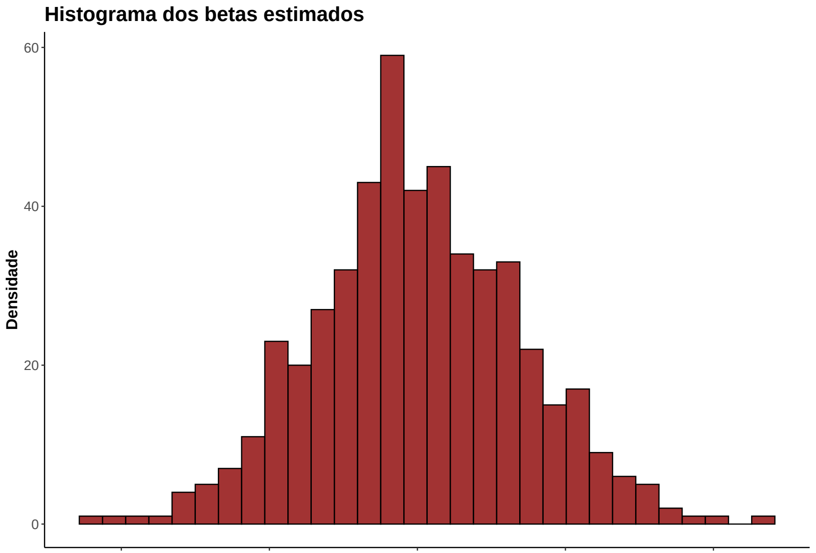
Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

```r
# Criando as amostras

X <- replicate( amostras, rnorm( n, mean = 10, sd = 2 ) )

e <- replicate( amostras, rnorm( n, mean = 0, sd = 1 ) )

Y <- b0 + b1 * X + e
```

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese

```r
# Fazendo as regressões

regressoes <- lapply( 1:amostras,
                      function(i) lm( Y[ , i ] ~ X[ , i ] )

betas <- sapply(regressoes,
                function(modelo) coef(modelo)[2])

beta1 = mean( betas )
```

Vamos simular para entender o que significa um teste de hipótese



Distribuição amostral

Ou seja, tanto $\hat{\beta}_0$ quanto $\hat{\beta}_1$ são **estatísticas** (i.e. funções dos valores amostrais) e cada estatística possui uma **distribuição**. Em função disso, podemos (i) definir um nível de significância e (ii) fazer um teste de hipótese sobre o parâmetro de interesse.

Teste t

- Para $\hat{\beta}_1$:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \mu$$
$$\mathcal{H}_a : \beta_1 \neq \mu$$

A estatística do teste é dada por:

$$t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1 - \mu}{se(\hat{\beta}_1)}$$

porque $t_{\hat{\beta}_1} \sim T_{n-k-1}$.

Teste t

No caso que trabalhamos (salários dos CEOs e ROE):

$$t_{\hat{\beta}_1} = \frac{18.5 - 0}{11.12} = 1.663669,$$

cujo valor-p associado é igual a 0.0978. O que concluímos?

Quanto o modelo explica a variação dos salários dos CEOs?

Goodness of fit

Quanto eu consigo explicar sobre a variação dos salários dos CEOs com base nas variações de ROE?

- Do total da soma (dos quadrados) dos residuos, $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = (n-1)s_Y^2 \ldots$

Goodness of fit

Quanto eu consigo explicar sobre a variação dos salários dos CEOs com base nas variações de ROE?

- Do total da soma (dos quadrados) dos residuos, $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = (n-1)s_Y^2 \ldots$
- $\ldots$ uma parte é explicada pelo modelo, $\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = s_{\hat{Y}}^2 \ldots$

Goodness of fit

Quanto eu consigo explicar sobre a variação dos salários dos CEOs com base nas variações de ROE?

- Do total da soma (dos quadrados) dos residuos, $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = (n-1)s_Y^2 \ldots$
- $\ldots$ uma parte é explicada pelo modelo, $\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = s_{\hat{Y}}^2 \ldots$
- $\ldots$ e outra parte é explicada pelo erro, $\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_i - 0\right)^2 = s_{\varepsilon}^2 \ldots$

Goodness of fit

Quanto eu consigo explicar sobre a variação dos salários dos CEOs com base nas variações de ROE?

- Do total da soma (dos quadrados) dos residuos, $\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = (n-1)s_Y^2 \ldots$
- ...uma parte é explicada pelo modelo, $\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = s_{\hat{Y}}^2 \ldots$
- ...e outra parte é explicada pelo erro, $\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_i - 0\right)^2 = s_{\varepsilon}^2 \ldots$
- Assim, podemos definir uma estatística que avalia quâo aderente é o modelo aos dados: $R^2 = \frac{s_{\hat{Y}}^2}{s_Y^2} = 1 - \frac{s_{\varepsilon}^2}{s_Y^2}$

Por quê MQO?

BLUE

- Sob algumas hipóteses (Gauss-Markov), o estimador de mínimos quadros é **BLUE** (*best linear unbiased estimator*). Mesmo sem assumirmos a normalidade dos erros!

BLUE

- Sob algumas hipóteses (Gauss-Markov), o estimador de mínimos quadros é **BLUE** (*best linear unbiased estimator*). Mesmo sem assumirmos a normalidade dos erros!
- Sob a hipótese de normalidade dos erros, o estimador de MQO é o mais eficiente entre os estimadores lineares e não-lineares (Cramér–Rao)!

BLUE

- Sob algumas hipóteses (Gauss-Markov), o estimador de mínimos quadros é **BLUE** (*best linear unbiased estimator*). Mesmo sem assumirmos a normalidade dos erros!
- Sob a hipótese de normalidade dos erros, o estimador de MQO é o mais eficiente entre os estimadores lineares e não-lineares (Cramér–Rao)!
- E quais são essas hipóteses?

Hipóteses

- **Linearidade**: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ (linear nos parâmetros, as variáveis podem ser não-lineares).

Hipóteses

- **Linearidade**: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ (linear nos parâmetros, as variáveis podem ser não-lineares).
- **Exogeneidade**: $E[\varepsilon_i | X_i] = E[\varepsilon_i] = 0$.

Hipóteses

- **Linearidade**: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ (linear nos parâmetros, as variáveis podem ser não-lineares).
- **Exogeneidade**: $E[\varepsilon_i | X_i] = E[\varepsilon_i] = 0$.
- **Multicolinearidade não-perfeita**: se tivermos mais de uma variável X (e.g. $X_1, X_2, \cdots, X_k$), elas não podem ser perfeitamente correlacionadas.

Hipóteses

- **Linearidade**: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ (linear nos parâmetros, as variáveis podem ser não-lineares).
- **Exogeneidade**: $E[\varepsilon_i | X_i] = E[\varepsilon_i] = 0$.
- **Multicolinearidade não-perfeita**: se tivermos mais de uma variável X (e.g. $X_1, X_2, \cdots, X_k$), elas não podem ser perfeitamente correlacionadas.
- **Homocedasticidade**: $Var[\varepsilon_i | X_i] = \sigma^2$ e $Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j | X_i] = 0$.

Exogeneidade

Esse é um ponto crucial para nós.

- O termo erro (ε_i) inclui, por definição, tudo o que não está no modelo. Ele **não** pode influenciar as variáveis explicativas (X). Se isso acontecer, é porque temos:
  - Variáveis omitdas.

Exogeneidade

Esse é um ponto crucial para nós.

- O termo erro (ε_i) inclui, por definição, tudo o que não está no modelo. Ele **não** pode influenciar as variáveis explicativas (X). Se isso acontecer, é porque temos:
  - Variáveis omitdas.
  - Erro de mensuração das variáveis explicativas.

Exogeneidade

Esse é um ponto crucial para nós.

- O termo erro (ε_i) inclui, por definição, tudo o que não está no modelo. Ele **não** pode influenciar as variáveis explicativas (X). Se isso acontecer, é porque temos:
  - Variáveis omitdas.
  - Erro de mensuração das variáveis explicativas.
  - Simultaneidade

BLUE

Sob exogeneidade e Multicolinearidade não-perfeita, o estimador de MQO é **consistente** e **não-viesado**.

BLUE

Sob exogeneidade e Multicolinearidade não-perfeita, o estimador de MQO é **consistente** e **não-viesado**.

- Consistência: $plim_{n \to \infty} |\hat{\beta}_1 - \beta| = 0$.

BLUE

Sob exogeneidade e Multicolinearidade não-perfeita, o estimador de MQO é **consistente** e **não-viesado**.

- Consistência: $plim_{n \to \infty} |\hat{\beta}_1 - \beta| = 0$.
- Não-viesado: $E[\hat{\beta}_1] = \beta$

Regressão múltipla

Será que podemos melhorar a maneira como respondemos a questão proposta?

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada,

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada, (ii) a(s) variável(is) de interesse

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada, (ii) a(s) variável(is) de interesse e (iii) variáveis de controle.

Regressão múltipla

- Generalização da regressão simples na qual incluímos mais de uma variável explicativa.
- Podemos ter (i) a variável explicada, (ii) a(s) variável(is) de interesse e (iii) variáveis de controle.
- A diferença é que agora temos diversas dimensões, mas continuamos com uma reta que se ajusta ao minimizar a soma do erro quadrado.

E se o salário do CEO não pender só do ROE, mas também das vendas da empresa?

Regressão múltipla

$$salario_i = \beta_0 + \beta_1 ROE_i + \beta_2 vendas_i + \varepsilon_i.$$

Ao incluirmos mais variáveis temos, genericamente,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdot + \beta_k X_{k,i} + \varepsilon_i.$$

Clique aqui para a matemática do estimador

Regressão múltipla no R

```r
reg = lm( salary ~ roe + sales, data = ceosal1)
```

R^2 e R^2 ajustado

- Como podemos comparar modelos? A estatística R^2 **não** é uma boa maneira.

R^2 e R^2 ajustado

- Como podemos comparar modelos? A estatística R^2 **não** é uma boa maneira.
- Podemos utilizar o R^2 ajustado, no entanto:

$$R^2_{\text{adj}} = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-k-1} \tag{1}$$

onde n é o número de observações da amostra e k representa o número de variáveis independentes do modelo.

Teste-F

Podemos testar a significância conjunta dos estimadores:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$
$$\mathcal{H}_a : \beta_j \neq 0, \text{ para menos um valor de} j$$

$$F = \frac{\sum_i \epsilon_i^2 - \sum_i e_i^2}{\sum_i e_i^2} \frac{n - k_2}{k_2 - k_1} \sim F_{k_2 - k_1, n - k_2} \tag{2}$$

onde k_2 é o número de parâmetros do modelos irrestrito e k_1 o número de parâmetros do modelo restrito.

Extra

Teorema Frisch-Waugh-Lovell

Podemos “quebrar” uma regressão múltipla em regressões que extraem os efeitos parciais das variáveis independentes.

Teorema Frisch-Waugh-Lovell

Podemos “quebrar” uma regressão múltipla em regressões que extraem os efeitos parciais das variáveis independentes. Vamos aplicar isso ao nosso caso sobre o salário dos CEOs:

1) Faça a regressão de ‘salario’ em ‘ROE’.
2) Calcule os resíduos da regressão do item (1).

Podemos “quebrar” uma regressão múltipla em regressões que extraem os efeitos parciais das variáveis independentes. Vamos aplicar isso ao nosso caso sobre o salário dos CEOs:

1) Faça a regressão de ‘salario’ em ‘ROE’.
2) Calcule os resíduos da regressão do item (1). Os resíduos contêm o efeito que **não é capturado** pelo ‘salario’ através de ‘ROE’.
3) Faça a regressão de ‘vendas’ em ‘ROE’.

4) Calcule os resíduos da regressão do item (3). Os resíduos contêm apenas a variação em 'vendas' que **não é explicada** por 'ROE'. Essa é a **variação parcial de 'vendas'**, controlando por 'ROE'.
5) Faça a regressão dos resíduos do item (1) nos resíduos do item (3) para extrair os **efeitos parciais de 'vendas' em 'salario'**. Esta é exatamente a interpretação do coeficiente como definido acima.

Apêndice

Regressão múltipla – estimador de MQO

- $\min_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\epsilon_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(salario_i - \hat{\beta_0} - \hat{\beta_1} ROE_i - \hat{\beta_2} vendas_i\right)^2$

Regressão múltipla – estimador de MQO

- $\min_{\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\epsilon_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(salario_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 ROE_i - \hat{\beta}_2 vendas_i\right)^2$
  - $\hat{\beta}_1 = \frac{\rho_{ROE,salario} - \rho_{ROE,vendas} \times \rho_{vendas,salario}}{1-\rho^2_{ROE,salario}}$
  - $\hat{\beta}_2 = \frac{\rho_{vendas,salario} - \rho_{ROE,vendas} \times \rho_{ROE,salario}}{1-\rho^2_{ROE,salario}}$
  - $\hat{\beta}_0 = sal\bar{a}rio - \hat{\beta}_1 \overline{ROE} - \hat{\beta}_2 \overline{vendas}$

Retornar

Regressão múltipla – estimador de MQO

E com mais variáveis?

Regressão múltipla – estimador de MQO

E com mais variáveis? Vamos utilizar álgebra matricial! Podemos escrever o modelo da seguinte forma:

$$
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix}_{n\times k} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{k\times 1} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}_{n\times 1}
$$

Ou, simplesmente

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Regressão múltipla – estimador de MQO

O resíduo (não o erro) pode ser definido como

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \tag{3}$$

A soma dos quadrados dos resíduos pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix}_{1\times n} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = [e_1 \times e_1 + e_2 \times e_2 + \ldots + e_n \times e_n]_{1\times 1}$$

◂ Retornar

Regressão múltipla – estimador de MQO

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}) \\
&= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} + \hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} \\
&= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - 2\hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \hat{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\beta}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Assim, temos

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\partial \hat{\beta}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\beta} = 0 \tag{5}
$$

é igual a

$$
\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}\right).
$$

◂ Retornar

Referências i

Anscombe, Francis J. 1973. "Graphs in Statistical Analysis." *The American Statistician* 27 (1): 17–21.