Desenvolvimento econômico

Crescimento econômico de longo prazo: o modelo Solow-Swan

João Ricardo Costa Filho

Good ideas shine far more brightly when supported by good models
Avinash Dixit (“The making of Economic Policy", 1996, p. 17)

Models are to be used, not believed.
Henri Theil (“Principles of Econometrics", 1971, p. vi)

O que explica a diferença na riqueza das nações?

O modelo

O modelo de Solow-Swan

O modelo neoclássico de crescimento econômico tem origem nos trabalhos de Solow (1956), Solow (1957) e Swan (1956), sintetizados no capítulo 2 de Jones and Vollrath (2013).

Estrutura do modelo

- Economia fechada e sem governo.

Estrutura do modelo

- Economia fechada e sem governo.
- Apenas um bem final.

Estrutura do modelo

- Economia fechada e sem governo.
- Apenas um bem final.
- A tecnologia de produção possui retornos contantes de escala.

Estrutura do modelo

- Economia fechada e sem governo.
- Apenas um bem final.
- A tecnologia de produção possui retornos contantes de escala.
- Mercados perfeitamente competitivos.

Estrutura do modelo

- Economia fechada e sem governo.
- Apenas um bem final.
- A tecnologia de produção possui retornos contantes de escala.
- Mercados perfeitamente competitivos.
- O progresso tecnológico é exógeno.

Estrutura do modelo

- Economia fechada e sem governo.
- Apenas um bem final.
- A tecnologia de produção possui retornos contantes de escala.
- Mercados perfeitamente competitivos.
- O progresso tecnológico é exógeno.
- O crescimento da força de trabalho é exógeno.

Estrutura do modelo

- Economia fechada e sem governo.
- Apenas um bem final.
- A tecnologia de produção possui retornos contantes de escala.
- Mercados perfeitamente competitivos.
- O progresso tecnológico é exógeno.
- O crescimento da força de trabalho é exógeno.
- Tempo contínuo.

A função de produção

As empresas recrutam capital (K) e trabalho (L) para produzir o bem final (Y),

A função de produção

As empresas recrutam capital (K) e trabalho (L) para produzir o bem final (Y), dado o nível de produtividade total dos fatores de produção (A):

A função de produção

As empresas recrutam capital (K) e trabalho (L) para produzir o bem final (Y), dado o nível de produtividade total dos fatores de produção (A):

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\,(A(t)L(t))^{1-\alpha}$$

A função de produção

As empresas recrutam capital (K) e trabalho (L) para produzir o bem final (Y), dado o nível de produtividade total dos fatores de produção (A):

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\,(A(t)L(t))^{1-\alpha}$$

Exercício para casa: mostre que a função de produção Cobb-Douglas é homogêna de grau 1 quando $0 < \alpha < 1$.

Tecnologia

Tecnologia

- $F(K, AL) \implies$ "labor augmenting" ou "Harrod-neutral".

Tecnologia

- $F(K, AL) \implies$ "labor augmenting" ou "Harrod-neutral".
- $F(AK, L) \implies$ "capital-augmenting" ou "Solow-neutral".

Tecnologia

- $F(K, AL) \implies$ "labor augmenting" ou "Harrod-neutral".
- $F(AK, L) \implies$ "capital-augmenting" ou "Solow-neutral".
- $AF(K, L) \implies$ "Hicks-neutral".

Na função Cobb-Douglas, não faz muita diferença para o modelo de Solow-Swan (Jones and Vollrath 2013).

Exercício 1

1) Faça um gráfico da produção em função do capital, considerando $A(t) = 1$, $L(t) = 27$ e $\alpha = 1/3$.

Exercício 1

1) Faça um gráfico da produção em função do capital, considerando $A(t) = 1$, $L(t) = 27$ e $\alpha = 1/3$.
2) No mesmo gráfico, desenha a nova função de produção quando $A(t) = 2$.

Exercício 1

1) Faça um gráfico da produção em função do capital, considerando $A(t) = 1$, $L(t) = 27$ e $\alpha = 1/3$.
2) No mesmo gráfico, desenha a nova função de produção quando $A(t) = 2$.
3) Mostre o efeito do aumento de $A(t)$ no item 2 em um gráfico da fronteira de possibilidade de produção com base nos insumos capital e trabalho.

A lei de movimento do capital

A dinâmica do capital depende do investimento $(I(t))$ e da taxa de depreciação (δ) do mesmo:

A lei de movimento do capital

A dinâmica do capital depende do investimento $(I(t))$ e da taxa de depreciação (δ) do mesmo:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t).$$

A lei de movimento do capital

A dinâmica do capital depende do investimento $(I(t))$ e da taxa de depreciação (δ) do mesmo:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t).$$

Em equilíbrio, temos que $S(t) = I(t)$ e, assumindo que os agentes poupem uma fração constante da renda, temos:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), \tag{1}$$

onde $\dot{K}(t) = \frac{dK(t)}{dt}$.

O problema de maximização das firmas

$$\max_{K(t),L(t)} \Pi(t) = F(K(t), A(t)L(t)) - r(t)K(t) - w(t)L(t),$$

onde o preço no qual o produto é vendido é igual a 1. As empresas tomam tanto o custo para utilizar o capital $(r(t))$ como o salário $(w(t))$ como dados. Por quê?

Escolhas ótimas

Escolhas ótimas

- **Capital**

$$PMgK = \alpha \cdot \left(\frac{A(t)L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha} = \alpha \cdot \frac{Y(t)}{K(t)} = r(t).$$

- **Capital**

$$PMgK = \alpha \cdot \left(\frac{A(t)L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha} = \alpha \cdot \frac{Y(t)}{K(t)} = r(t).$$

- **Trabalho**

$$PMgL = (1-\alpha) \cdot A(t)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha} = (1-\alpha) \cdot \frac{Y(t)}{L(t)} = w(t).$$

Óticas do PIB

Óticas do PIB

- **Produção**: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}$

Óticas do PIB

- **Produção**: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}$
- **Renda**: $Y(t) = r(t)K(t) + w(t)L(t)$

Óticas do PIB

- **Produção**: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}$
- **Renda**: $Y(t) = r(t)K(t) + w(t)L(t)$
  - Capital share: $\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha$

Óticas do PIB

- **Produção**: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\left(A(t)L(t)\right)^{1-\alpha}$
- **Renda**: $Y(t) = r(t)K(t) + w(t)L(t)$
  - Capital share: $\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha$
  - Labour share: $\frac{w(t)L(t)}{Y(t)} = (1-\alpha)$

Óticas do PIB

- **Produção**: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\,(A(t)L(t))^{1-\alpha}$
- **Renda**: $Y(t) = r(t)K(t) + w(t)L(t)$
  - Capital share: $\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha$
  - Labour share: $\frac{w(t)L(t)}{Y(t)} = (1-\alpha)$
  - Esses dois resultados (participação igual ao parâmetro) só valem na concorrência perfeita.

Óticas do PIB

- **Produção**: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K^{\alpha}(t)\,(A(t)L(t))^{1-\alpha}$
- **Renda**: $Y(t) = r(t)K(t) + w(t)L(t)$
  - Capital share: $\frac{r(t)K(t)}{Y(t)} = \alpha$
  - Labour share: $\frac{w(t)L(t)}{Y(t)} = (1-\alpha)$
  - Esses dois resultados (participação igual ao parâmetro) só valem na concorrência perfeita.
- **Despesa**: $Y(t) = C(t) + I(t)$

A dinâmica da produtividade

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g \implies, A(t) = A(0)e^{gt}$$

A dinâmica da força de trabalho

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \implies, L(t) = L(0)e^{nt}$$

Exercício 2

Considere $t = 0, \ldots, 100$. Para $t < 50$, assuma $g = 2\%$. Depois disso, $g = 3\%$.

1) Faça um gráfico do nível da produtividade.
2) Faça um gráfico do ln do nível da produtividade.

Vamos escrever o modelo como variáveis por trabalhado intensivo.

Dinâmica do modelo

A equação (1) pode ser reescrita como:

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{sY(t)}{K(t)} - \delta. \tag{2}$$

Dinâmica do modelo

A equação (1) pode ser reescrita como:

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{sY(t)}{K(t)} - \delta. \tag{2}$$

assim como a função de produção:

$$y(t) = k^{\alpha}(t)$$

onde $y(t) = Y(t)/A(t)L(t)$ e $k(t) = K(t)/A(t)L(t)$.

Dinâmica do modelo

Defina $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$.

Dinâmica do modelo

Defina $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$. Passe o log em $k(t)$ e diferencie em relação ao tempo:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n.$$

Dinâmica do modelo

Defina $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$. Passe o log em $k(t)$ e diferencie em relação ao tempo:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n.$$

Substituindo (2) no resultado acima, temos:

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (g + n + \delta)k(t).$$

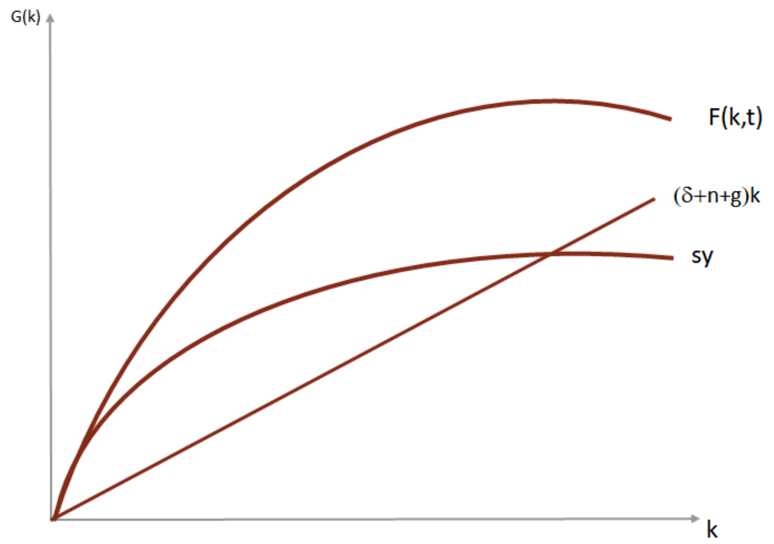
Exercício 3

Faça um gráfico com duas curvas como função do capital ($G(k)$ no eixo vertical e k no eixo horizontal): Curva 1 $= sy(t)$ e Curva 2 $= (g + n + \delta)k(t)$.

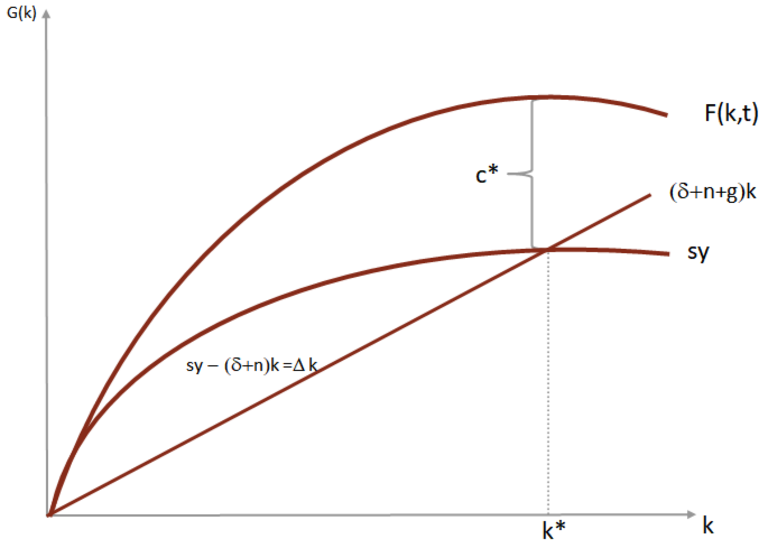
1) O que acontece na economia quando $sy(t) > (g + n + \delta)k(t)$?
2) O que acontece na economia quando $sy(t) < (g + n + \delta)k(t)$?
3) O que acontece na economia quando $sy(t) = (g + n + \delta)k(t)$?

O equilíbrio estacionário

Equilíbrio de longo prazo



Equilíbrio de longo prazo



Exercício 4

Encontre k^* e y^* e responda:

1) Qual é o sinal de $\frac{\partial k^*}{\partial s}$? Explique a intuição econômica e o que acontece com y^*.
2) Qual é o sinal de $\frac{\partial k^*}{\partial g}$? Explique a intuição econômica e o que acontece com y^*.
3) Qual é o sinal de $\frac{\partial k^*}{\partial n}$? Explique a intuição econômica e o que acontece com y^*.
4) Qual é o sinal de $\frac{\partial k^*}{\partial \delta}$? Explique a intuição econômica e o que acontece com y^*.
5) Qual é o sinal de $\frac{\partial k^*}{\partial \alpha}$? Explique a intuição econômica e o que acontece com y^*.

Exercício 5

Represente graficamente:

1) O que acontece no equilíbrio quando $\uparrow s$.
2) O que acontece no equilíbrio quando $\downarrow \delta$.
3) O que acontece no equilíbrio quando $\uparrow n$.

Exercício 6

Encontre os valores de k^*, y^* e c^* com $\delta = 0,05$, $s = 0,3$, $\alpha = 0,45$, $n = 0,015$ e $g = 0,02$.

Quanto mais poupança, melhor?

“Balance growth path”

O que acontece com a economia quando $\dot{k}(t)/k(t) = 0$?

“Balance growth path”

O que acontece com a economia quando $\dot{k}(t)/k(t) = 0$?

- $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0\Big|_{k(t)=k^*} \implies \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = 0.$

“Balance growth path”

O que acontece com a economia quando $\dot{k}(t)/k(t) = 0$?

- $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0|_{k(t)=k^*} \implies \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = 0.$
- $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} \implies \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g + n$

"Balance growth path"

O que acontece com a economia quando $\dot{k}(t)/k(t) = 0$?

- $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0|_{k(t)=k^*} \implies \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = 0.$
- $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} \implies \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g + n$
    - $\implies \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = g$

"Balance growth path"

O que acontece com a economia quando $\dot{k}(t)/k(t) = 0$?

- $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 0|_{k(t)=k^*} \implies \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = 0.$
- $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} \implies \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = g + n$
    - $\implies \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = g$
    - Ou seja, no longo prazo, o crescimento do PIB per capita é dado pelo crescimento da produtividade!

Como podemos introduzir política econômica no modelo?

Qual poderia ser o seu objetivo, portanto?

A regra de ouro

No equilíbrio estacionário, temos que:

$$c^* = y^* - (g + n + \delta)k^*. \tag{3}$$

A regra de ouro

No equilíbrio estacionário, temos que:

$$c^* = y^* - (g + n + \delta)k^*. \tag{3}$$

Como procedemos à partir daqui?

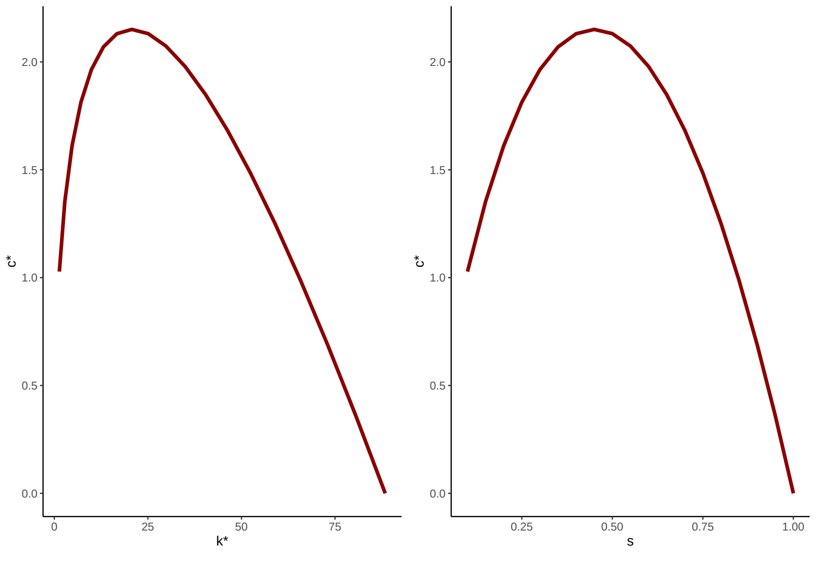
A regra de ouro

No equilíbrio estacionário, temos que:

$$c^* = y^* - (g + n + \delta)k^*. \tag{3}$$

Como procedemos à partir daqui?

A regra de ouro



Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Jones, Charles I, and Dietrich Vollrath. 2013. *Introduction to Economic Growth*. Third edition. W.W. Norton & Company.

Solow, Robert M. 1956. "A Contribution to the Theory of Economic Growth." *The Quarterly Journal of Economics* 70 (1): 65–94.

———. 1957. "Technical Change and the Aggregate Production Function." *The Review of Economics and Statistics* 39 (3): 312–20.

Swan, Trevor W. 1956. "Economic Growth and Capital Accumulation." *Economic Record* 32 (2): 334–61.