Econometria de Séries Temporais

Estacionariedade em séries de tempo: convergência de equações a diferenças

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Será que a dinâmica de preços se tornará **hiperinflacionária**?

Será que a dinâmica de preços se tornará **hiperinflacionária**?
Assuma que a dinâmica da taxa de inflação (π_t) possa ser descrita da seguinte forma:

Será que a dinâmica de preços se tornará **hiperinflacionária**?
Assuma que a dinâmica da taxa de inflação (π_t) possa ser descrita da seguinte forma:

$$\pi_t = c + \phi\pi_{t-1} + \varepsilon_t$$

Equações a diferenças

Equações a diferenças

- Uma equação a diferenças representa, geralmente, uma variável como função dos seus próprios valores defasados, do tempo e de outras variáveis.

Equações a diferenças

- Uma equação a diferenças representa, geralmente, uma variável como função dos seus próprios valores defasados, do tempo e de outras variáveis.
- A econometria de séries de tempo utiliza equações a diferenças com componentes **estocásticos**.

Equações a diferenças

- Uma equação a diferenças representa, geralmente, uma variável como função dos seus próprios valores defasados, do tempo e de outras variáveis.
- A econometria de séries de tempo utiliza equações a diferenças com componentes **estocásticos**.
- Primeira diferença: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$.

Equações a diferenças

- Uma equação a diferenças representa, geralmente, uma variável como função dos seus próprios valores defasados, do tempo e de outras variáveis.
- A econometria de séries de tempo utiliza equações a diferenças com componentes **estocásticos**.
- Primeira diferença: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$.
    - Exemplo: $y_t - y_{t-1} = 5$

Equações a diferenças

- Uma equação a diferenças representa, geralmente, uma variável como função dos seus próprios valores defasados, do tempo e de outras variáveis.
- A econometria de séries de tempo utiliza equações a diferenças com componentes **estocásticos**.
- Primeira diferença: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$.
  - Exemplo: $y_t - y_{t-1} = 5 \implies \Delta y_t = 5$.

Equações a diferenças

- Uma equação a diferenças representa, geralmente, uma variável como função dos seus próprios valores defasados, do tempo e de outras variáveis.
- A econometria de séries de tempo utiliza equações a diferenças com componentes **estocásticos**.
- Primeira diferença: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$.
  - Exemplo: $y_t - y_{t-1} = 5 \implies \Delta y_t = 5$.
- A solução de uma equação a diferenças é **uma função**!
  - Solução: $y_t\left(t, y_0, x_t\right)$

Equações a diferenças: substituição recursiva

Equações a diferenças: substituição recursiva

- Qual é a solução para $\Delta y_t = 5$?

Equações a diferenças: substituição recursiva

- Qual é a solução para $\Delta y_t = 5$? $y_t = 5t + c$.

Equações a diferenças: substituição recursiva

- Qual é a solução para $\Delta y_t = 5$? $y_t = 5t + c$.
- Assuma que $y_0 = 100$. Faça um gráfico da função para $t \in [0, 20]$.

Equações a diferenças: substituição recursiva

Equações a diferenças: substituição recursiva

Trabalhemos agora com a nossa motivação: $\pi_t = c + \phi\pi_{t-1} + \varepsilon_t$.

Equações a diferenças: substituição recursiva

Trabalhemos agora com a nossa motivação: $\pi_t = c + \phi\pi_{t-1} + \varepsilon_t$. Como a substituição recursiva pode nos ajudar? Utilizemos os apêndices de Bueno (2012) como referência.

Equações a diferenças: substituição recursiva

Equações a diferenças: substituição recursiva

$$\pi_t = c + \phi\pi_{t-1} + \varepsilon_t$$

Equações a diferenças: substituição recursiva

$$\pi_t = c + \phi\pi_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\pi_{t-1} = c + \phi\pi_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

Equações a diferenças: substituição recursiva

$$\pi_t = c + \phi\pi_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\pi_{t-1} = c + \phi\pi_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$
$$\pi_{t-2} = c + \phi\pi_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

Equações a diferenças: substituição recursiva

$$\pi_t = c + \phi\pi_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\pi_{t-1} = c + \phi\pi_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

$$\pi_{t-2} = c + \phi\pi_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$$

$\therefore$ ao repetirmos esse processo t-1 vezes, temos:

$$\pi_t = c\sum_{j=0}^{t-1}\phi^j + \phi^j\pi_0 + \sum_{j=0}^{t-1}\phi^j\varepsilon_{t-j}$$

Função impuso-resposta

Qual é o impacto de um choque?

Função impuso-resposta

Qual é o impacto de um choque?

- $\frac{\partial \pi_t}{\varepsilon_{t-j}} = \phi^j$.

Função impuso-resposta

Qual é o impacto de um choque?

- $\frac{\partial \pi_t}{\varepsilon_{t-j}} = \phi^j$.
- Assuma $\phi = 0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.

Função impuso-resposta

Qual é o impacto de um choque?

- $\frac{\partial \pi_t}{\varepsilon_{t-j}} = \phi^j$.
- Assuma $\phi = 0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = -0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.

Função impuso-resposta

Qual é o impacto de um choque?

- $\frac{\partial \pi_t}{\varepsilon_{t-j}} = \phi^j$.
- Assuma $\phi = 0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = -0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = 1,2$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.

Função impuso-resposta

Qual é o impacto de um choque?

- $\frac{\partial \pi_t}{\varepsilon_{t-j}} = \phi^j$.
- Assuma $\phi = 0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = -0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = 1,2$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = -1,2$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.

Função impuso-resposta

Qual é o impacto de um choque?

- $\frac{\partial \pi_t}{\varepsilon_{t-j}} = \phi^j$.
- Assuma $\phi = 0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = -0,7$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = 1,2$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.
- Assuma $\phi = -1,2$. Faça um gráfico com o impacto de um choque para $j \in [0, 20]$.

Qual caso parece descrever uma hiperinflação?

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

- $|\phi| < 1$:

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

- $|\phi| < 1$: quanto mais longe for o choque, **menor** o seu impacto hoje.

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

- $|\phi| < 1$: quanto mais longe for o choque, **menor** o seu impacto hoje.
- $|\phi| = 1$:

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

- $|\phi| < 1$: quanto mais longe for o choque, **menor** o seu impacto hoje.
- $|\phi| = 1$: o impacto do choque é permanente.

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

- $|\phi| < 1$: quanto mais longe for o choque, **menor** o seu impacto hoje.
- $|\phi| = 1$: o impacto do choque é permanente.
- $|\phi| > 1$:

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

- $|\phi| < 1$: quanto mais longe for o choque, **menor** o seu impacto hoje.
- $|\phi| = 1$: o impacto do choque é permanente.
- $|\phi| > 1$: quanto mais longe for o choque, **maior** o seu impacto hoje.

Função impuso-resposta

Temos, portanto, três possibilidades:

- $|\phi| < 1$: quanto mais longe for o choque, **menor** o seu impacto hoje.
- $|\phi| = 1$: o impacto do choque é permanente.
- $|\phi| > 1$: quanto mais longe for o choque, **maior** o seu impacto hoje.

Qual caso parece descrever uma hiperinflação?

Solução geral (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que

$$y_t = c + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

A solução geral quando podemos definir a condição inicial (y_0) é dada por:

$$y_t = c \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j + \phi^t y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}.$$

Solução geral (Bueno 2012)

E se não pudermos definir a condição inicial, podemos iterar $m+1$ vezes:

$$y_t = c\sum_{j=0}^{t+m}\phi^j + \phi^{t+m+1}y_{t-m-1} + \sum_{j=0}^{t+m}\phi^j\varepsilon_{t-j}$$

Solução geral (Bueno 2012)

E se não pudermos definir a condição inicial, podemos iterar $m+1$ vezes:

$$y_t = c \sum_{j=0}^{t+m} \phi^j + \phi^{t+m+1} y_{t-m-1} + \sum_{j=0}^{t+m} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

Quando $m \to \infty$ e $|\phi| < 1$,

Solução geral (Bueno 2012)

E se não pudermos definir a condição inicial, podemos iterar $m+1$ vezes:

$$y_t = c\sum_{j=0}^{t+m}\phi^j + \phi^{t+m+1}y_{t-m-1} + \sum_{j=0}^{t+m}\phi^j\varepsilon_{t-j}$$

Quando $m \to \infty$ e $|\phi| < 1$, temos que $\phi^{t+m+1} \to 0$

Solução geral (Bueno 2012)

E se não pudermos definir a condição inicial, podemos iterar $m+1$ vezes:

$$y_t = c\sum_{j=0}^{t+m}\phi^j + \phi^{t+m+1}y_{t-m-1} + \sum_{j=0}^{t+m}\phi^j\varepsilon_{t-j}$$

Quando $m \to \infty$ e $|\phi| < 1$, temos que $\phi^{t+m+1} \to 0$ e sabemos que $\sum_{j=0}^{t+m}\phi^j = \frac{1}{1-\phi}$, portanto:

Solução geral (Bueno 2012)

E se não pudermos definir a condição inicial, podemos iterar $m+1$ vezes:

$$y_t = c\sum_{j=0}^{t+m}\phi^j + \phi^{t+m+1}y_{t-m-1} + \sum_{j=0}^{t+m}\phi^j\varepsilon_{t-j}$$

Quando $m \to \infty$ e $|\phi| < 1$, temos que $\phi^{t+m+1} \to 0$ e sabemos que $\sum_{j=0}^{t+m}\phi^j = \frac{1}{1-\phi}$, portanto:

$$y_t = \frac{c}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{\infty}\phi^j\varepsilon_{t-j}.$$

Solução geral

Note que a solução anterior não é única (veja as páginas 311 e 312 de Bueno (2012))

E se tivermos duas defasagens?

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Para encontrarmos a solução para uma eq. a diferenças de ordem 2, podemos seguir os seguintes passos:

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Para encontrarmos a solução para uma eq. a diferenças de ordem 2, podemos seguir os seguintes passos:

1) Encontrar a solução particular.

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Para encontrarmos a solução para uma eq. a diferenças de ordem 2, podemos seguir os seguintes passos:

1) Encontrar a solução particular.
2) Encontrar a solução da parte homogêna

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Para encontrarmos a solução para uma eq. a diferenças de ordem 2, podemos seguir os seguintes passos:

1) Encontrar a solução particular.
2) Encontrar a solução da parte homogêna
3) Encontrar a solção geral, dado que: solção geral = solução particular + solução da parte homogêna.

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Para encontrarmos a solução para uma eq. a diferenças de ordem 2, podemos seguir os seguintes passos:

1) Encontrar a solução particular.
2) Encontrar a solução da parte homogêna
3) Encontrar a solção geral, dado que: solção geral = solução particular + solução da parte homogêna.
4) Eliminar constantes arbitrárias com a imposição de condições iniciais.

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2}.$$

Uma solução particular ocorre quando $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = \ldots$.

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2}.$$

Uma solução particular ocorre quando $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = \ldots$.
Assim, temos:

$$y_t^p = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}, \quad \phi_1 + \phi_2 \neq 1.$$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

A solução homogêna da equação é obtida ao associarmos para cada uma das p defasagens uma constante (a_p) e uma das suas raízes caracterìsticas (λ_p), com $y_t = A\lambda^t, \forall t$:

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

A solução homogêna da equação é obtida ao associarmos para cada uma das p defasagens uma constante (a_p) e uma das suas raízes caracterìsticas (λ_p), com $y_t = A\lambda^t, \forall t$:

$$y_t^h = a_1 y_{t-1}^h + a_2 y_{t-2}^h$$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

A solução homogêna da equação é obtida ao associarmos para cada uma das p defasagens uma constante (a_p) e uma das suas raízes caracterìsticas (λ_p), com $y_t = A\lambda^t, \forall t$:

$$y_t^h = a_1 y_{t-1}^h + a_2 y_{t-2}^h \iff$$
$$A\lambda^t = a_1 A\lambda^{t-1} + a_2 A\lambda^{t-2}$$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

A solução homogêna da equação é obtida ao associarmos para cada uma das p defasagens uma constante (a_p) e uma das suas raízes caracterìsticas (λ_p), com $y_t = A\lambda^t, \forall t$:

$$y_t^h = a_1 y_{t-1}^h + a_2 y_{t-2}^h \iff$$
$$A\lambda^t = a_1 A\lambda^{t-1} + a_2 A\lambda^{t-2}$$

divida os dois lados por $A\lambda^{t-2}$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

A solução homogêna da equação é obtida ao associarmos para cada uma das p defasagens uma constante (a_p) e uma das suas raízes caracterìsticas (λ_p), com $y_t = A\lambda^t, \forall t$:

$$y_t^h = a_1 y_{t-1}^h + a_2 y_{t-2}^h \iff$$

$$A\lambda^t = a_1 A\lambda^{t-1} + a_2 A\lambda^{t-2}$$

$$\text{divida os dois lados por } A\lambda^{t-2}$$

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0.$$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

A solução homogêna da equação é obtida ao associarmos para cada uma das p defasagens uma constante (a_p) e uma das suas raízes caracterìsticas (λ_p), com $y_t = A\lambda^t, \forall t$:

$$
\begin{aligned}
& y_t^h = a_1 y_{t-1}^h + a_2 y_{t-2}^h \iff \\
& A\lambda^t = a_1 A\lambda^{t-1} + a_2 A\lambda^{t-2} \\
& \text{ divida os dois lados por } A\lambda^{t-2} \\
& \lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0.
\end{aligned}
$$

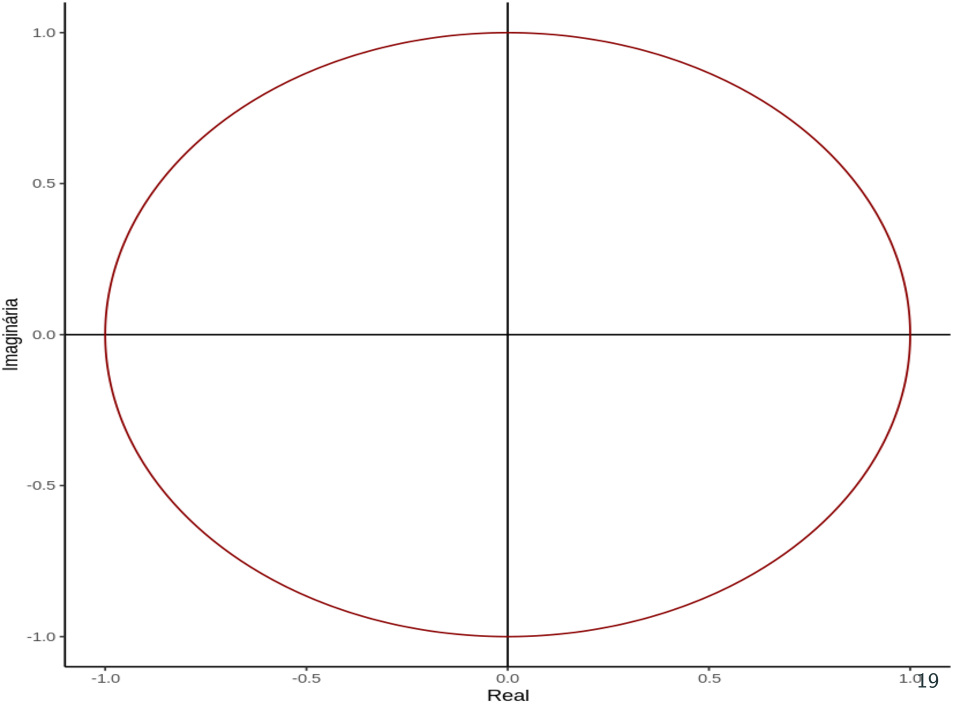
Essa é a chamada equação característica.

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

As raízes da equação característica são dadas por:

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}, \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}) \right)$$

Se as raízes da equação característica estiverem **dentro** do círculo unitário, então a solução da parte homogênea é convergente.


Imaginária
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
Real

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Exemplos:

a) $y_t = c + 0.7y_{t-1} + 0.1y_{t-2} \implies$

Exemplos:

a) $y_t = c + 0.7y_{t-1} + 0.1y_{t-2} \implies \lambda_1 = -0.2$ e $\lambda_2 = -0.5$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Exemplos:

a) $y_t = c + 0.7 y_{t-1} + 0.1 y_{t-2} \implies \lambda_1 = -0.2$ e $\lambda_2 = -0.5$

b) $y_t = c + 1.1 y_{t-1} - 0.2 y_{t-2} \implies$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Exemplos:

a) $y_t = c + 0.7y_{t-1} + 0.1y_{t-2} \implies \lambda_1 = -0.2$ e $\lambda_2 = -0.5$

b) $y_t = c + 1.1y_{t-1} - 0.2y_{t-2} \implies \lambda_1 = 0.2$ e $\lambda_2 = -1.3$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Exemplos:

a) $y_t = c + 0.7y_{t-1} + 0.1y_{t-2} \implies \lambda_1 = -0.2$ e $\lambda_2 = -0.5$

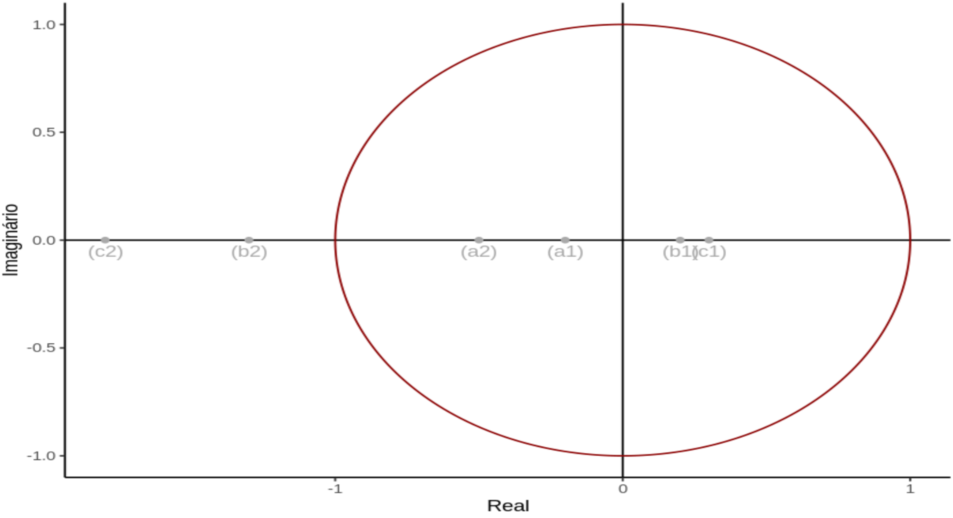
b) $y_t = c + 1.1y_{t-1} - 0.2y_{t-2} \implies \lambda_1 = 0.2$ e $\lambda_2 = -1.3$

c) $y_t = c + 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} \implies$

Solução para eq. a diferenças de ordem 2

Exemplos:

a) $y_t = c + 0.7y_{t-1} + 0.1y_{t-2} \implies \lambda_1 = -0.2$ e $\lambda_2 = -0.5$
b) $y_t = c + 1.1y_{t-1} - 0.2y_{t-2} \implies \lambda_1 = 0.2$ e $\lambda_2 = -1.3$
c) $y_t = c + 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} \implies \lambda_1 = 0.3$ e $\lambda_2 = -1.8$


1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
Imaginário
(c2)
(b2)
(a2)
(a1)
(b1)
(c1)
-1
0
1
Real

Solução para eq. a diferenças de ordem 2 (Bueno 2012)

A solução geral é, portanto:

$$y_t = y_t^p + y_t^h = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2} + a_1 \lambda_1^t + a_2 \lambda_2^t.$$

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.