Econometria de Séries Temporais

O modelo ARMA

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

E se um processo estocástico exibir compenentes AR e MA?

ARMA(p,q)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

ARMA(p,q)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

onde ε_t é um ruído branco.

ARMA(p,q)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

onde ε_t é um ruído branco. Denominamos é um ARMA(p,q).

ARMA(p,q)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

onde ε_t é um ruído branco. Denominamos é um ARMA(p,q). Como seria um ARMA(1,1)?

ARMA(p,q)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

onde ε_t é um ruído branco. Denominamos é um ARMA(p,q). Como seria um ARMA(1,1)? E um ARMA(2,1)?

ARMA(p,q)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

onde ε_t é um ruído branco. Denominamos é um ARMA(p,q). Como seria um ARMA(1,1)? E um ARMA(2,1)? E um ARMA(0,0)?

ARMA(p,q)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

onde ε_t é um ruído branco. Denominamos é um ARMA(p,q). Como seria um ARMA(1,1)? E um ARMA(2,1)? E um ARMA(0,0)? Como representar esses processos – ARMA(1,1) e ARMA(2,1) – com o operador de defasagens?

ARMA(p,q)

ARMA(p,q)

Podemos reescrever um ARMA(p,q) com os polinômios de defasagens

ARMA(p,q)

Podemos reescrever um ARMA(p,q) com os polinômios de defasagens $\Phi(L) = \left(1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p\right)$

ARMA(p,q)

Podemos reescrever um ARMA(p,q) com os polinômios de defasagens $\Phi(L) = \left(1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p\right)$ e $\Theta(L) = \left(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q\right)$:

ARMA(p,q)

Podemos reescrever um ARMA(p,q) com os polinômios de defasagens $\Phi(L) = \left(1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p\right)$ e $\Theta(L) = \left(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q\right)$:

$$\Phi(L) y_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t.$$

ARMA(p,q) – Estacionariedade

Se as raízes de $\Phi(L)$ estiverem **fora** do círculo unitário, o processo é estacionário.

ARMA(1,1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

ARMA(1,1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}.$$

ARMA(1,1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}.$$

Assumindo que o modelo seja estacionário, temos:

$$E\left[y_t\right] = \frac{c}{1 - \phi}$$

ARMA(1,1)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}.$$

Assumindo que o modelo seja estacionário, temos:

$$E\left[y_t\right] = \frac{c}{1-\phi}$$

Onde já vimos esse resultado antes?

ARMA(1,1)

Por ora, trabalhemos com o resultado a ser derivado mais tarde:

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2} \right)$$

ARMA(1,1)

Por ora, trabalhemos com o resultado a ser derivado mais tarde:

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2}\right)$$

Precisamos, portanto de $|\phi_1| < 1$

ARMA(1,1)

Por ora, trabalhemos com o resultado a ser derivado mais tarde:

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2} \right)$$

Precisamos, portanto de $|\phi_1| < 1$ (a mesma condição do AR(1)).

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Para quais valores dos parâmetros ϕ e θ o modelo ARMA(1,1)

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Para quais valores dos parâmetros ϕ e θ o modelo ARMA(1,1) (i) é estacionário,

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Para quais valores dos parâmetros ϕ e θ o modelo ARMA(1,1) (i) é estacionário, (ii) e existe e é útil?

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Para quais valores dos parâmetros ϕ e θ o modelo ARMA(1,1) (i) é estacionário, (ii) e existe e é útil? Temos que

$$y_t = \mu + \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t,$$

onde $\Phi(L) = 1 - \phi L$, $\Theta(L) = 1 + \theta L$ e $\mu = \frac{c}{1-\phi}$.

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Se $|\phi| < 1$, temos:

$$\frac{1}{\phi(L)}\theta(L) = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \dots\right)(1 + \theta L)$$

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Se $|\phi| < 1$, temos:

$$\frac{1}{\phi(L)}\theta(L) = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots\right)(1 + \theta L)$$

$$= 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots + \theta L + \phi\theta L^2 + \phi^2\theta L^3 + \phi^3\theta L^4 + \ldots$$

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Se $|\phi| < 1$, temos:

$$\frac{1}{\phi(L)}\theta(L) = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots\right)(1 + \theta L)$$

$$= 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots + \theta L + \phi\theta L^2 + \phi^2\theta L^3 + \phi^3\theta L^4 + \ldots$$

$$= 1 + (\phi + \theta)L + (\phi^2 + \phi\theta)L^2 + (\phi^3 + \phi^2\theta)L^3 + \ldots$$

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Se $|\phi| < 1$, temos:

$$\frac{1}{\phi(L)}\theta(L) = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots\right)(1 + \theta L)$$

$$= 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots + \theta L + \phi\theta L^2 + \phi^2\theta L^3 + \phi^3\theta L^4 + \ldots$$

$$= 1 + (\phi + \theta)L + (\phi^2 + \phi\theta)L^2 + (\phi^3 + \phi^2\theta)L^3 + \ldots$$

$$= 1 + (\phi + \theta)L + (\phi + \theta)\phi L^2 + (\phi + \theta)\phi^2 L^3 + \ldots$$

Estacionariedade e invertibilidade do ARMA(1,1)

Se $|\phi| < 1$, temos:

$$\frac{1}{\phi(L)}\theta(L) = \left(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots\right)(1 + \theta L)$$

$$= 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \ldots + \theta L + \phi\theta L^2 + \phi^2\theta L^3 + \phi^3\theta L^4 + \ldots$$

$$= 1 + (\phi + \theta)L + (\phi^2 + \phi\theta)L^2 + (\phi^3 + \phi^2\theta)L^3 + \ldots$$

$$= 1 + (\phi + \theta)L + (\phi + \theta)\phi L^2 + (\phi + \theta)\phi^2 L^3 + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j,$$

] onde $\psi_0 = 1$ e $\psi_j = (\phi + \theta)\phi^{j-1}$ para $j = 1, 2, \ldots$.

ARMA(1,1) como um MA(∞)

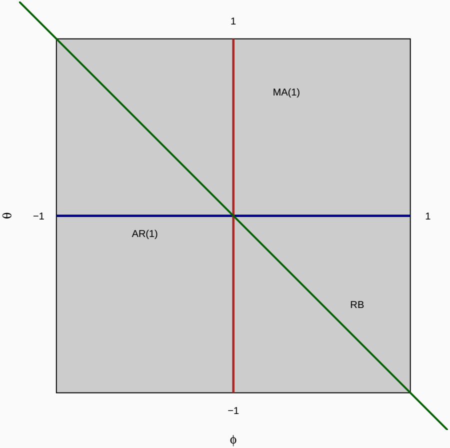
Assim, temos:

ARMA(1,1) como um MA(∞)

Assim, temos:

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

Parâmetros admissíveis para um ARMA(1,1)



Voltando à variância de um ARMA(1,1)

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\mathsf{VAR}[y_t] = \mathsf{VAR}[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\mathsf{VAR}[y_t] = \mathsf{VAR}[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

$$\mathsf{VAR}[y_t] = \mathsf{VAR}[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \mathrm{VAR}[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \mathrm{VAR}[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \mathrm{VAR}[\psi_0 \varepsilon_{t-0} + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\text{VAR}[y_t] = \text{VAR}[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

$$\text{VAR}[y_t] = \text{VAR}[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

$$\text{VAR}[y_t] = \text{VAR}[\psi_0 \varepsilon_{t-0} + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$\text{VAR}[y_t] = \left(\psi_0^2 \sigma^2 + \psi_1^2 \sigma^2 + \psi_2^2 \sigma^2 + \dots\right)$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\text{VAR}[y_t] = \text{VAR}[\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

$$\text{VAR}[y_t] = \text{VAR}[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}]$$

$$\text{VAR}[y_t] = \text{VAR}[\psi_0 \varepsilon_{t-0} + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$\text{VAR}[y_t] = \left(\psi_0^2 \sigma^2 + \psi_1^2 \sigma^2 + \psi_2^2 \sigma^2 + \dots\right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + \sum_{j=2}^{\infty} ((\phi + \theta)\phi^{j-1})^2 \right)$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + \sum_{j=2}^{\infty} ((\phi + \theta)\phi^{j-1})^2 \right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=2}^{\infty} \phi^{2(j-1)} \right)$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi+\theta)^2 + \sum_{j=2}^{\infty} ((\phi+\theta)\phi^{j-1})^2 \right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi+\theta)^2 + (\phi+\theta)^2 \sum_{j=2}^{\infty} \phi^{2(j-1)} \right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi+\theta)^2 + (\phi+\theta)^2 (\frac{\phi^2}{1-\phi^2}) \right)$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + \sum_{j=2}^{\infty}((\phi + \theta)\phi^{j-1})^2\right)$$

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=2}^{\infty} \phi^{2(j-1)}\right)$$

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + (\phi + \theta)^2 (\frac{\phi^2}{1 - \phi^2})\right)$$

$$\mathrm{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 (1 + (\frac{\phi^2}{1 - \phi^2})\right)$$

Voltando à variância de um ARMA(1,1)

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + \sum_{j=2}^{\infty}((\phi + \theta)\phi^{j-1})^2\right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=2}^{\infty} \phi^{2(j-1)}\right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 + (\phi + \theta)^2 (\frac{\phi^2}{1 - \phi^2})\right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + (\phi + \theta)^2 (1 + (\frac{\phi^2}{1 - \phi^2})\right)$$

$$\text{VAR}[y_t] = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2}\right)$$

Estacionariedade do modelo ARMA(p,q)

Veja o capítulo 2 de Bueno (2012) para considerações sobre a estacionariedade de um ARMA(p,d).

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.