

# Econometria de Séries Temporais\*

## Exercícios sobre os modelos MA e AR

João Ricardo Costa Filho

### Abstract

Esta lista de exercícios tem por objetivo auxiliar a(o) aluna(o) a consolidar os conceitos **teóricos** dos processos MA e AR, com base na dinâmica de equações a diferenças que estudamos no começo do curso. São fundamentais, portanto, a definição de estacionariedade (e como verificar se um processo estocástico a satisfaz), equação característica e as suas raízes, polinômio do operador defasagem e as suas raízes e os resultados do Teorema de Wold.

---

\*[joacostafilho.com](http://joacostafilho.com).

## Questão 0

Mostre que  $\text{VAR}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ .

## Questão 1

Quais são as condições para que um processo estocástico seja um ruído branco?

## Questão 2

Mostre que  $\text{VAR}[\epsilon_t] = E[\epsilon_t^2]$  se  $\epsilon_t$  for um ruído branco.

## Questão 3

Quais são as condições para que um processo estocástico seja estacionário?

## Questão 4

Um MA(1) com  $|\theta| < 1$  é (fracamente) estacionário? Justifique matematicamente.

## Questão 5

Um MA(1) com  $|\theta| = 1$  é (fracamente) estacionário? Justifique matematicamente.

## Questão 6

Um AR(1) com  $|\phi| < 1$  é (fracamente) estacionário? Justifique matematicamente.

## Questão 7

Um AR(1) com  $|\phi| = 1$  é (fracamente) estacionário? Justifique matematicamente.

## Questão 8

Considere as respostas das questões (4)-(7). Em quais dos processos estocásticos os choques são permanentes? E em quais dos processos estocásticos os choques são transitórios?

## Questão 9

Sabemos que podemos escrever um  $AR(p)$  como um  $MA(\infty)$ . Mas será que há resultado análogo para  $MA(q)$ ? Vejamos:

- a) Considere o seguinte processo estocástico:  $y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$ . Qual é o modelo descreve o processo estocástico?
- b) Reescreva o processo do item (a) com o operador defasagem.
- c) Reescreva o resultado do item (b) com o polinômio do operador defasagem  $(\theta(L))$ .
- d) Divida os dois lados de (c) pelo polinômio do operador defasagem.
- e) Qual é a hipótese necessária para o resultado do item (d)?
- f) Quais as condições necessárias para que essa hipótese se verifique?
- g) Qual é o modelo que temos no item (d)?

## Questão 10

(Exercício baseado nos exercícios do capítulo 2 de [Enders, 2014](#)) Considere o seguinte processo estocástico:  $y_t = 1,5y_{t-1} - 0,5y_{t-2} + \varepsilon_t$ .

- a) Encontre as raízes da equação característica da parte homogênea do processo.
- b) Escreva o processo com o operador defasagem  $(L)$ .
- c) Compare a equação característica ao polinômio  $\phi(L)$ .
- d) Compare as raízes do polinômio  $\phi(L)$  com as raízes da equação característica.
- e) Simule o processo para  $t \in [2, 100]$  (assuma  $y_0 = y_1 = 5$ ) sem choques aleatórios.
- f) Simule o processo para  $t \in [2, 100]$  (assuma  $y_0 = y_1 = 5$ ) com choques aleatórios.
- g) Discuta o papel das duas raízes no resultado da simulação no item (f).
- h) O processo é (fracamente) estacionário? Justifique.
- i) Com base na sua análise nos itens (a)-(h), se a taxa de inflação  $(\pi_t)$  puder ser representada pelo processo estocástico  $\pi_t = 1,5\pi_{t-1} - 0,5\pi_{t-2} + \varepsilon_t$ , você diria que a economia poderia entrar em um processo hiperinflacionário? Justifique.
- j) E se a taxa de inflação  $(\pi_t)$  puder ser representada pelo processo estocástico  $\pi_t = 1,6\pi_{t-1} - 0,5\pi_{t-2} + \varepsilon_t$ , você diria que a economia poderia entrar em um processo hiperinflacionário?? (Utilize os mesmos choques do item (f) para visualizar a dinâmica do processo, mas justifique matematicamente a sua resposta).

## References

Enders, W. (2014). *Applied econometric time series*. Wiley Series in Probability and Statistics, fourth edition.