Econometria de Séries Temporais

Processos não estacionários, tendência estocástica e regressão espúria

João Ricardo Costa Filho

“The most important questions of life are, for the most part, really only problems in probability."

Laplace (1812)

“In God we trust. All others must bring data."

William Edwards Deming

Por que não podemos utilizar os modelos anteriores quando as séries não são estacionárias?

Processo não-estacionários (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

Processo não-estacionários (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Processo não-estacionários (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Sabemos que em um AR(1), $Var[y_t] = \frac{1}{1-\phi^2}$.

Processo não-estacionários (Bueno 2012)

Seja y_t uma variável aleatória tal que o seu processo estocástico é dado por:

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Sabemos que em um AR(1), $Var[y_t] = \frac{1}{1-\phi^2}$. Portanto, a variância explode.

Processo não-estacionários (Bueno 2012)

Podemos decompor uma série temporal da seguinte forma:

$$y_t = \text{tendência}$$

Processo não-estacionários (Bueno 2012)

Podemos decompor uma série temporal da seguinte forma:

$$y_t = \text{tendência} + \text{componente estacionário}$$

Processo não-estacionários (Bueno 2012)

Podemos decompor uma série temporal da seguinte forma:

$$y_t = \text{tendência} + \text{componente estacionário} + \varepsilon_t$$

Vamos trabalhar com dinâmicas diferentes para a tendência.

Séries temporais com tendências

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_0 + \delta t + \psi(L)\varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_0 + \delta t + \psi(L)\varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. Esse processo flutua ao redor de uma tendência **determinística**.

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_0 + \delta t + \psi(L)\varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. Esse processo flutua ao redor de uma tendência **determinística**. Como podemos induzir estacionariedade?

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_0 + \delta t + \psi(L)\varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. Esse processo flutua ao redor de uma tendência **determinística**. Como podemos induzir estacionariedade? De duas formas: removendo a tendência ou calculando a primeira diferença.

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_0 + \delta t + \psi(L)\varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. Esse processo flutua ao redor de uma tendência **determinística**. Como podemos induzir estacionariedade? De duas formas: removendo a tendência ou calculando a primeira diferença. Será que são equivalentes?

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Vamos remover a tendência do processo:

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Vamos remover a tendência do processo:

$$\tilde{y}_t = y_t - \delta t$$

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Vamos remover a tendência do processo:

$$\tilde{y}_t = y_t - \delta t = y_0 + \psi(L)\varepsilon_t$$

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Vamos remover a tendência do processo:

$$\tilde{y}_t = y_t - \delta t = y_0 + \psi(L)\varepsilon_t$$

Vamos calcular a primeira diferença:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Tendência estacionária (Bueno 2012)

Vamos remover a tendência do processo:

$$\tilde{y}_t = y_t - \delta t = y_0 + \psi(L)\varepsilon_t$$

Vamos calcular a primeira diferença:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = y_t + (1 - L)\,\psi(L)\varepsilon_t$$

Tendência estacionária

De acordo com Bueno (2012):

Tendência estacionária

De acordo com Bueno (2012):

- A diferenciação estacionariza a série.
- Mas introduz ruído.

Tendência estacionária

De acordo com Bueno (2012):

- A diferenciação estacionariza a série.
- Mas introduz ruído.
- Logo, se uma série é tendência estacionária, o recomendado é a remoção da tendência.

Como remover a tendência determinística?

Como remover a tendência determinística?

1) Estime a seguinte regressão por mínimos quadrados ordinários:

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \cdots + \delta_k t^k + e_t$$

Como remover a tendência determinística?

1) Estime a seguinte regressão por mínimos quadrados ordinários:

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \cdots + \delta_k t^k + e_t$$

2) Obtenha os resíduos ($\hat{e}_t = y_t - \hat{y}_t$).

Como remover a tendência determinística?

1) Estime a seguinte regressão por mínimos quadrados ordinários:

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \cdots + \delta_k t^k + e_t$$

2) Obtenha os resíduos ($\hat{e}_t = y_t - \hat{y}_t$). Essa é a série estacionária a ser utilizada nos modelos (e.g.: ARMA(p,q)).

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. A substituição recursiva implica que:

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Considere o seguinte processo estocástico:

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco. A substituição recursiva implica que:

$$y_t = y_0 + \delta t + \sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i$$

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Note que:

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Note que:

1) y_t acumula todos os choques passados ($\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i$).

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Note que:

1) y_t acumula todos os choques passados ($\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i$).
2) Já sabemos que a primeira diferença da série é estacionária.

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Note que:

1) y_t acumula todos os choques passados ($\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i$).
2) Já sabemos que a primeira diferença da série é estacionária.
3) Séries com tendência estocástica são chamadas de **séries integradas**.

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Note que:

1) y_t acumula todos os choques passados $(\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i)$.
2) Já sabemos que a primeira diferença da série é estacionária.
3) Séries com tendência estocástica são chamadas de **séries integradas**.
4) Nesse caso, como a primeira diferença é suficiente para induzir estacionariedade, ela é I(1).

Tendência estocástica (Bueno 2012)

Note que:

1) y_t acumula todos os choques passados $(\sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i)$.
2) Já sabemos que a primeira diferença da série é estacionária.
3) Séries com tendência estocástica são chamadas de **séries integradas**.
4) Nesse caso, como a primeira diferença é suficiente para induzir estacionariedade, ela é I(1).
5) Se mais diferenças fossem necessárias, seria I(d).

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t$$

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t$$

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta\left(y_t - y_{t-1}\right)$$

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta\left(y_t - y_{t-1}\right) = \left(y_t - y_{t-1}\right) - \left(y_{t-1} - y_{t-2}\right)$$

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta\left(y_t - y_{t-1}\right) = \left(y_t - y_{t-1}\right) - \left(y_{t-1} - y_{t-2}\right)$$
$$\Delta^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta\left(y_t - y_{t-1}\right) = \left(y_t - y_{t-1}\right) - \left(y_{t-1} - y_{t-2}\right)$$
$$\Delta^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Uma série I(2) possui duas raízes unitárias.

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta\left(y_t - y_{t-1}\right) = \left(y_t - y_{t-1}\right) - \left(y_{t-1} - y_{t-2}\right)$$
$$\Delta^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Uma série I(2) possui duas raízes unitárias. Temos que:

$$(1 - L)^2\, y_t$$

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta\left(y_t - y_{t-1}\right) = \left(y_t - y_{t-1}\right) - \left(y_{t-1} - y_{t-2}\right)$$
$$\Delta^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Uma série I(2) possui duas raízes unitárias. Temos que:

$$(1 - L)^2 y_t = \left(1 - 2L + L^2\right) y_t$$

Série I(2) (Bueno 2012)

A segunda diferença de uma série é dada por:

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \Delta\left(y_t - y_{t-1}\right) = \left(y_t - y_{t-1}\right) - \left(y_{t-1} - y_{t-2}\right)$$
$$\Delta^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Uma série I(2) possui duas raízes unitárias. Temos que:

$$(1-L)^2 y_t = \left(1 - 2L + L^2\right) y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Passeios aleatórios

Passeio aleatório (Bueno 2012)

Assuma uma série I(1) com $\delta = 0$:

Passeio aleatório (Bueno 2012)

Assuma uma série I(1) com $\delta = 0$:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco.

Passeio aleatório (Bueno 2012)

Passeio aleatório (Bueno 2012)

- **Esperança incondicional**

$$E[y_t] = E[y_{t-1} + \varepsilon_t] = y_{t-1}$$

Passeio aleatório (Bueno 2012)

- **Esperança incondicional**

$$E[y_t] = E[y_{t-1} + \varepsilon_t] = y_{t-1}$$

- **Variância**

$$Var[y_t] = Var[\sum_{i=t}^{t} \varepsilon_i] = t\sigma^2$$

Passeio aleatório (Bueno 2012)

Passeio aleatório (Bueno 2012)

- **Covariância**

$$Cov[y_t, y_{t-j}] = E[\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right) \left(\sum_{s=1}^{t-j} \varepsilon_s\right)] = (t-j)\,\sigma^2.$$

Passeio aleatório com drift (Bueno 2012)

Assuma uma série I(1) com $\delta \neq 0$:

Passeio aleatório com drift (Bueno 2012)

Assuma uma série I(1) com $\delta \neq 0$:

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

Passeio aleatório com drift (Bueno 2012)

Assuma uma série I(1) com $\delta \neq 0$:

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \iff y_t = y_0 + \delta t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

onde ε_t é um ruído branco.

Passeio aleatório com drift (Bueno 2012)

Passeio aleatório com drift (Bueno 2012)

- **Previsão**

$$E[y_{t+H}] = y_t + \delta H + E[\sum_{h=1}^{H} \varepsilon_{t+h}] = y_t + \delta H$$

Passeio aleatório com drift (Bueno 2012)

- **Previsão**

$$E[y_{t+H}] = y_t + \delta H + E[\sum_{h=1}^{H} \varepsilon_{t+h}] = y_t + \delta H$$

Regressão espúria

Regressão espúria

Regressão espúria

Ao estimarmos a regressão abaixo,

Regressão espúria

Ao estimarmos a regressão abaixo,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t,$$

Regressão espúria

Ao estimarmos a regressão abaixo,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t,$$

provavelmente teremos um alto R^2 e coeficientes estatisticamente significativos.

Regressão espúria

Ao estimarmos a regressão abaixo,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t,$$

provavelmente teremos um alto R^2 e coeficientes estatisticamente significativos. Por quê?

Teste Durbin-Watson

Em algumas regressões, pode-se utilizar o teste Durbin-Watson, cuja razão tende a zero quando for o caso de uma regressão espúria (Fukushige and Wago 2002), conforme indica Pfaff (2008).

Regressão espúria (Bueno 2012)

Regressão espúria (Bueno 2012)

- Se X e Y forem estacionárias, a regressão convencial pode ser utilizada (respeitadas as hipóteses do modelo).

Regressão espúria (Bueno 2012)

- Se X e Y forem estacionárias, a regressão convencial pode ser utilizada (respeitadas as hipóteses do modelo).
- Se X e Y forem integradas de diferentes ordens, a regressão será espúria.

Regressão espúria (Bueno 2012)

- Se X e Y forem estacionárias, a regressão convencial pode ser utilizada (respeitadas as hipóteses do modelo).
- Se X e Y forem integradas de diferentes ordens, a regressão será espúria.
- Se X e Y forem integradas com as mesma ordem e os resíduos forem integrados, a regressão será espúria.

Regressão espúria (Bueno 2012)

- Se X e Y forem estacionárias, a regressão convencial pode ser utilizada (respeitadas as hipóteses do modelo).
- Se X e Y forem integradas de diferentes ordens, a regressão será espúria.
- Se X e Y forem integradas com as mesma ordem e os resíduos forem integrados, a regressão será espúria.
- Se X e Y forem integradas com as mesma ordem e os resídos forem estacionários, há cointegração.

Leia os livros e os artigos, não fique só com os slides!!!!

Referências

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira. 2012. *Econometria de Séries Temporais*. Cengage Learning.

Fukushige, M, and H Wago. 2002. "Using the Durbin-Watson Ratio to Detect a Spurious Regressions: Can We Make a Rule of Thumb?"

Pfaff, Bernhard. 2008. *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*. Springer Science & Business Media.