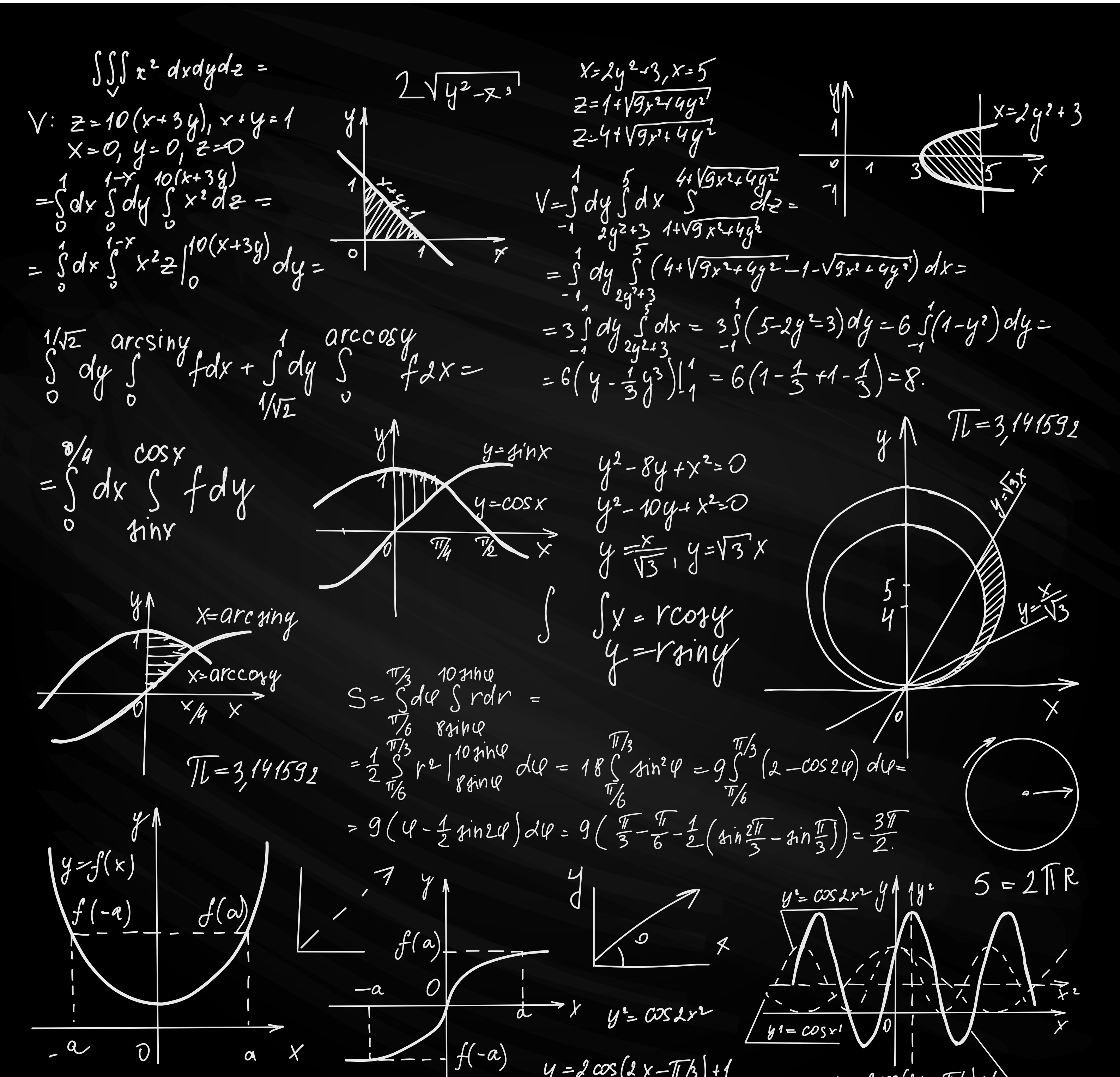
Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

ÁLGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES

DE

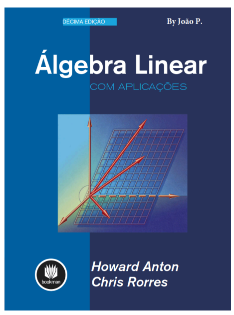
HOWARD ANTON & CHRIS RORRES



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios

ANTON, C., H.; Rorres. **Álgebra Linear com Aplicações**. São Paulo: Bookman, 2010.



SUMÁRIO

1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES

1.1. Introdução aos sistemas de equações lineares

Conjunto de exercícios 1.1 (página 9)

1. Em cada parte, determine se a equação é linear em x_1, x_2 e x_3.

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$
(b) $x_1 + 3x_2^2 + x_1x_3$
(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3$
(e) $x_1^{\frac{3}{5}} - 2x_2 + x_3 = 4$
(f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{\frac{1}{3}}$

Solução

São lineares as equações (a), (c) e (f).

■

2. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a)
$$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 2 \\ 3x - \frac{2}{y} &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

Solução

São lineares as equações que formam os sistemas (b), (c) e (d).

■

3. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad - \quad x_4 &= 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sin(2x_1 + x_3) &= \sqrt{5} \\ e^{-2x_2-2x_4} &= \frac{1}{x_2} \\ 4x + 4 &= 4 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 7x_1 - \quad x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ 2x_1 + \quad x_2 - x_3x_4 \quad &= 3 \\ -x_1 + 5 \quad x_2 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

Solução

São lineares as equações que formam os sistemas em (a) e (d).

■

4. Para cada sistema do Exercício 2 que for linear, detemine se é consistente.

(b)
$$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

Solução

No sistema dado, consideremos a segunda equação: $2x = 8$. Dividindo-a por 2, obtemos $x = 4$, que é exatamente a primeira equação. Assim, o sistema possui uma solução: $x = 4$ e é **consistente**.

■

(b)
$$\begin{aligned} 4x - \qquad y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z \quad &= 0 \end{aligned}$$

Solução

Temos duas equações e três incógnitas. Geometricamente, representam dois planos no espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$). Inicialmente, vamos eliminar x da primeira equação somando 4 vezes a segunda equação à primeira. O sistema simplificado é mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} (4\ln 2 - 1)y - 10z &= -1 \\ -x + \qquad (\ln 2)y - 3\ \ z &= 0 \end{aligned}$$

Arbitrariamente, parametrizemos $y = t$. Assim, a primeira equação assume a forma:

$$\begin{aligned} (4\ln 2 - 1)y - 10z = -1 &\Rightarrow (4\ln 2 - 1)t - 10z = -1 \\ &\Rightarrow z = \frac{1 + (1 - 4\ln 2)t}{10} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões parametrizadas de y e z na segunda equação, obtemos:

$$\begin{aligned} -x + (\ln 2)y - 3z = 0 &\Rightarrow x = (\ln 2)y - 3z \\ &\Rightarrow x = (\ln 2)t - 3 \cdot \frac{1 + (1 - 4\ln 2)t}{10} \\ &\Rightarrow x = \frac{(10\ln 2)t - 3 - (1 + 4\ln 2)t}{10} \\ &\Rightarrow x = \frac{(6\ln 2 - 1)t - 3}{10} \end{aligned}$$

A solução do sistema é

$$\begin{cases} x = \dfrac{(6\ln 2 - 1)t - 3}{10} \\ y = t \\ z = \dfrac{1 + (1 - 4\ln 2)t}{10} \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Em particular, tomando $t = 0$, encontramos a solução $(x, y, z) = \left(-\dfrac{3}{10}, 0, \dfrac{1}{10}\right)$.

Portanto, o sistema possui infinitas soluções e é **consistente**.

■

(b)
$$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

Solução

A matriz aumentada representativa do sistema dado é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

No que segue, consideremos a seguinte notação, representativa das operações elementares sobre matrizes:

- L_m: Representa a linha m, com $m = 1, 2, 3, 4$;
- $L_m \leftrightarrow L_n$: As linhas m e n trocam de lugar, com $m, n = 1, 2, 3, 4$;
- $L_m \to aL_m + bL_n$: A linha m é substituída por a vezes a linha m somado a b vezes a linha n, em que a e b.

Assim, façamos as seguinte manipulações sobre a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(L_3 \to 6L_1 - L_3) \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & -21 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left(L_3 \to \frac{L_3}{7}\right) \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(L_4 \to L_1 + L_2 + L_4) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(L_4 \to \frac{L_4}{7}\right) \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Note que as linhas 3 e 4 acima equivalem às equações $z = -\frac{3}{2}$ e $z = \frac{1}{7}$, respectivamente. Isso representa uma contradição. Portanto, o sistema não possui solução e é **inconsistente**.

■

5. Para cada sistema do Exercício 3 que for linear, determine se é consistente.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}+4x_2+3x_3} - x_4 &= 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Solução

Parametrizemos:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} 2\,x_1 \quad\quad\quad\quad\quad - \quad x_4 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\,r \quad\quad\quad\quad - \quad x_4 = 5 \\ -r + 4s + 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2r - 5 \\ x_3 = \dfrac{-1 + r - 4s + 2x_4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2r - 5 \\ x_3 = \dfrac{-1 + r - 4s + 2 \cdot (2r - 5)}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2r - 5 \\ x_3 = \dfrac{-11 + 5r - 4s}{3} \end{cases}$$

Portanto, o sistema possui infintas soluções da forma:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = \dfrac{-11 + 5r - 4s}{3} \\ x_4 = 2r - 5 \end{cases}$$

Em particular, tomando $r = s = 0$, obtemos a solução $\left(0, 0, -\frac{11}{3}, 5\right)$.

■

(d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

Solução

Parametrizemos:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

Portanto,

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \Rightarrow r + s = t + x_4 \Rightarrow x_4 = r + s - t$$

O sistema possui infinitas soluções da forma:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = r + s - t \end{cases}$$

Em particular, tomando $r = s = t = 0$, obtemos a solução trivial $(0, 0, 0, 0)$.

■

6. Escreva um sistema de equações lineares constituído de três equações em três incógnitas com

(a) nenhuma solução

Solução

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

■

(b) exatamente uma solução

Solução

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \phantom{x + {}} y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

■

(c) uma infinidade de soluções

Solução

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \phantom{{}+y} - z = 5 \\ 2x + y \phantom{{}+z} = 6 \end{cases}$$

■

7. Em cada parte, determine se o terno ordenado é uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 \quad - 3x_2 + x_3 & = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 & = 1 \end{cases}$$

(a) $(3, 1, 1)$

Solução

Substituindo o terno ordenado $(3, 1, 1)$ na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 1 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad 6 - 4 - 1 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad\qquad 1 &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo na segunda equação:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow 3 - 3 \cdot 1 + 1 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad 3 - 3 - 1 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad\qquad 1 &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 1 \Rightarrow 3 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad 9 - 5 - 3 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad\qquad 1 &= 1 \end{aligned}$$

Logo, o terno $(3, 1, 1)$ é solução do sistema de equações.

■

(b) $(3, -1, 1)$

Solução

Substituindo o terno na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) - 1 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad 6 + 4 - 1 &= 1 \\ \Rightarrow \qquad\qquad 9 &= 1 (\text{inválido}) \end{aligned}$$

Como o terno ordenado não é solução da primeira equação, também não será solução do sistema.

■

(c) $(13, 5, 2)$

Solução

Substituindo o terno na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 &\Rightarrow 2\cdot 13 - 4\cdot 5 - 2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 26 - 20 - 2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 4 = 1 \quad \text{(inválido)} \end{aligned}$$

Como o terno ordenado não é solução da primeira equação, também não será solução do sistema.

■

(d) $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$

Solução

Substituindo o terno na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 &\Rightarrow 2\cdot \frac{13}{2} - 4\cdot \frac{5}{2} - 2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 13 - 10 - 2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 1 = 1 \end{aligned}$$

Substituindo o terno na segunda equação, temos:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 &\Rightarrow \frac{13}{2} - 3\cdot \frac{5}{2} + 2 = 1 \\ &\Rightarrow \frac{13}{2} - \frac{15}{2} + 2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad -1 + 2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 1 = 1 \end{aligned}$$

Substituindo o terno na terceira equação, temos:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 - 3x_2 = 1 &\Rightarrow 3\cdot \frac{13}{2} - 5\cdot \frac{5}{2} - 3\cdot 2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{39}{2} - \frac{25}{2} - 6 = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{14}{2} - 6 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 1 = 1 \end{aligned}$$

Logo, o terno $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ é solução do sistema de equações.

■

(e) $(17, 7, 5)$

Solução

Substituindo o terno ordenado na primeira equação:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_2 = 1 &\Rightarrow 2 \cdot 17 - 4 \cdot 7 - 5 = 1 \\ &\Rightarrow \qquad 34 - 28 - 5 = 1 \\ &\Rightarrow \qquad\qquad\qquad 1 = 1 \end{aligned}$$

Substituindo o terno ordenado na segunda equação:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 &\Rightarrow 17 - 3 \cdot 5 + 5 = 1 \\ &\Rightarrow \qquad\qquad 7 = 1 \quad \text{(inválido)} \end{aligned}$$

Como o terno ordenado não é solução da segunda equação, também não será solução do sistema.

Observemsos que encontramos dois ternos ordenados os quais são solução so sistema de equações. Nesse caso, podemos conluir que o sistema possui infinitas soluções. De fato,

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (L_1 \leftrightarrow L_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (L_2 \to L_2 - 2L_1; L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(L_2 \leftrightarrow \frac{L_2}{2}; L_3 \leftrightarrow \frac{L_3}{4}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (L_1 \to L_1 + 3L_2; L_3 \to L_3 - L_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O desenvolvimento acima mostra que o sistema de equações pode ser parametrizado em função de x_3:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{7}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

Em particular, tomando $x_3 = 1$, obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases},$$

que corresponde ao terno do item (a) $(3, 1, 1)$. E, tomando $x_3 = 2$, obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \cdot 2 = -\frac{1}{2} + \frac{14}{2} = \frac{13}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 2 = -\frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{5}{2} \end{cases},$$

que corresponde ao terno do item (d) $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$.

■

8. Em cada parte, determine se o terno dado é uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3\,x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

(a) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$

Solução

Substituindo o terno ordenado no sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3\,x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} + 2 \cdot \frac{8}{7} - 2 \cdot 1 = 3 \\ 3 \cdot \frac{5}{7} - \ \ \frac{8}{7} + \ \ 1 = 1 \\ -\ \frac{5}{7} + 5 \cdot \frac{8}{7} - 5 \cdot 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} + \frac{16}{7} - 2 = 3 \\ \frac{15}{7} - \frac{8}{7} + 1 = 1 \\ -\frac{5}{7} + \frac{40}{7} - 5 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 3 & ✗ \\ 2 = 1 & ✗ \\ 0 = 5 & ✗ \end{cases}$$

O terno não satisfaz nenhuma das três equações, confirmando que ele não é a solução do sistema.

■

(b) $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$

Solução

Substituindo o terno no sistema, temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3\,x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} + 2 \cdot \frac{8}{7} - 2 \cdot 0 = 3 \\ 3 \cdot \frac{5}{7} - \ \ \frac{8}{7} + \ \ 0 = 1 \\ -\ \frac{5}{7} + 5 \cdot \frac{8}{7} - 5 \cdot 0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} + \frac{16}{7} = 3 \\ \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1 \\ -\frac{5}{7} + \frac{40}{7} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 & \checkmark \\ 1 = 1 & \checkmark \\ 5 = 6 & \checkmark \end{cases}$$

Portando o terno $\left(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$ é uma solução do sistema de equações.

■

(c) $(5,8,1)$

Solução

Substituindo o terno ordenado no sistema de equações, obtemos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3\,x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2\cdot 8 - 2\cdot 1 = 3 \\ 3\cdot 5 - \ \ 8 + \ \ 1 = 1 \\ -\ 5 + 5\cdot 8 - 5\cdot 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19 = 3 & ✗ \\ 8 \ = 1 & ✗ \\ 30 = 5 & ✗ \end{cases}$$

O terno não é solução do sistema de equações.

■

(d) $\left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$

Solução

Substituindo o terno no sistema, temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3\,x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} + 2\cdot\frac{10}{7} - 2\cdot\frac{2}{7} = 3 \\ 3\cdot\frac{5}{7} - \ \frac{10}{7} + \ \frac{2}{7} = 1 \\ -\ \frac{5}{7} + 5\cdot\frac{10}{7} - 5\cdot\frac{2}{7} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} + \frac{20}{7} - \frac{4}{7} = 3 \\ \frac{15}{7} - \frac{10}{7} + \frac{2}{7} = 1 \\ -\frac{5}{7} + \frac{50}{7} - \frac{10}{7} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{21}{7} = 3 \\ \frac{7}{7} = 1 \\ \frac{35}{7} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 & \checkmark \\ 1 = 1 & \checkmark \\ 5 = 5 & \checkmark \end{cases}$$

Portanto, o terno $\left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$ é uma solução do sistema de equações.

■

(e) $\left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, 2\right)$

Solução

Substituindo o terno ordenado no sistema de equações, obtemos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3\,x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} + 2\cdot\frac{22}{7} - 2\cdot 2 = 3 \\ 3\cdot\frac{5}{7} - \ \frac{22}{7} + \ 2 = 1 \\ -\ \frac{5}{7} + 5\cdot\frac{22}{7} - 5\cdot 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{21}{3} = 3 \\ \frac{7}{7} = 1 \\ \frac{35}{7} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 & \checkmark \\ 1 = 1 & \checkmark \\ 5 = 5 & \checkmark \end{cases}$$

Portanto, o terno $\left(\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, 2\right)$ é uma solução do sistema de equações.

Dado que encontramos mais de uma solução, o sistema deve ter infinitas soluções. De fato,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3\,x_1 - \;\; x_2 + \;\; x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (L_2 \to 3L_1 - L_2; L_3 \to L_1 + L_3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(L_2 \to \frac{L_2}{5}; L_3 \to L_2 - L_3\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (L_1 \to L_1 - 2L_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz acima, podemos escrever uma forma parametrizada para as infinitas soluções do sistema de equações. Seja $x_3 = k$. Então:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{7} \\ x_2 - x_3 = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{7} \\ x_2 = \frac{8}{7} + k \\ x_3 = k \end{cases}$$

Em particular,

k	x_1	x_2	x_3
0	$\frac{5}{7}$	$\frac{8}{7}$	0
1	$\frac{5}{7}$	$\frac{15}{7}$	1
2	$\frac{5}{7}$	$\frac{22}{7}$	2
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{7}$

■

9. Em cada parte, encontre o conjunto de soluções da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $7x - 5y = 3$

(b) $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

10. Em cda parte, encontre o conjunto solução da equação linear usando um parâmetro, se necessário.

(a) $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$

(b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

2. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1. Seção de segundo nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1.1. Seção de terceiro nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

3. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

4. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

5. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

REFERÊNCIAS

ANTON, C., H.; Rorres. **Álgebra Linear com Aplicações**. São Paulo: Bookman, 2010.