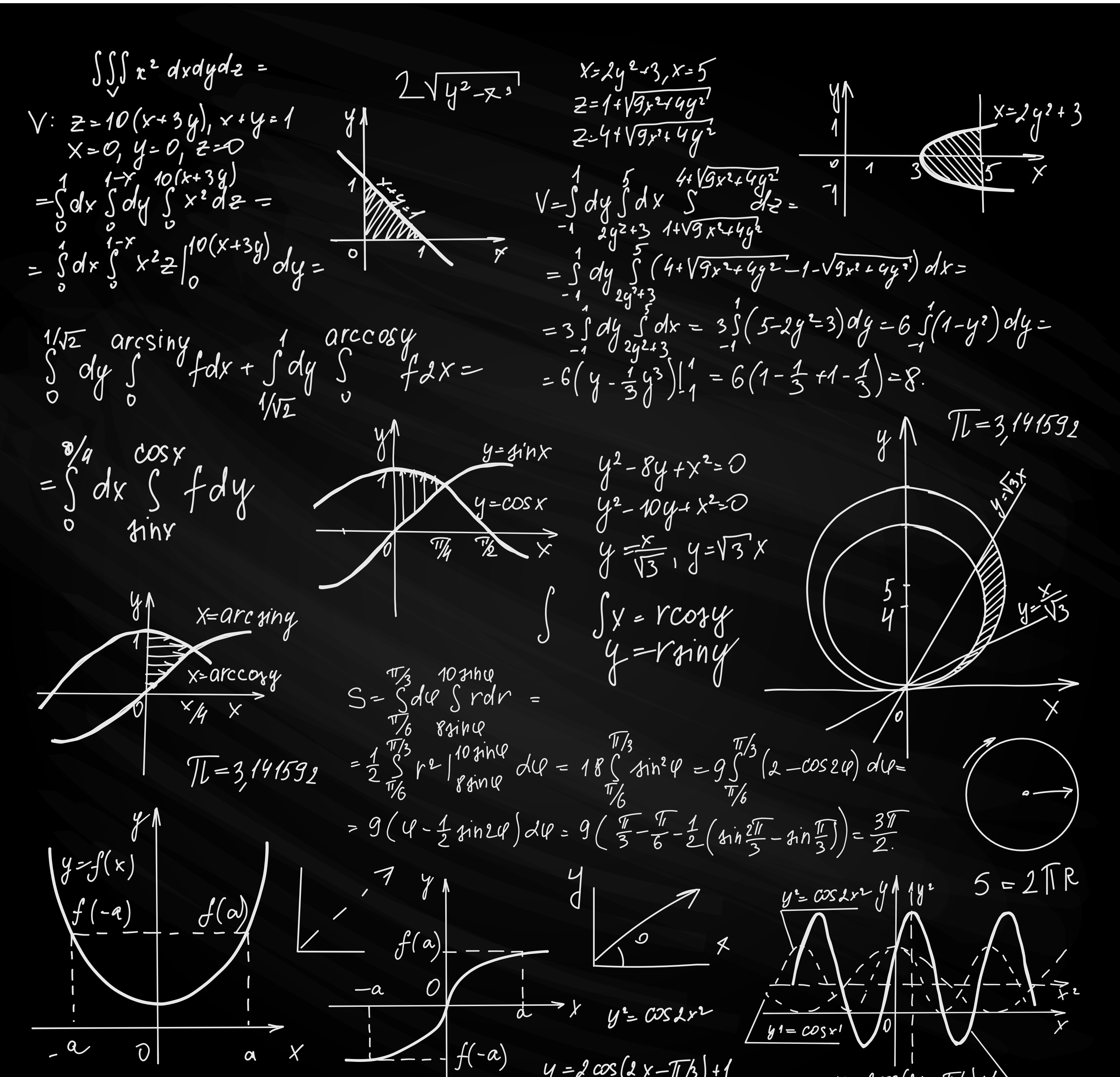
Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

ÁLGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES

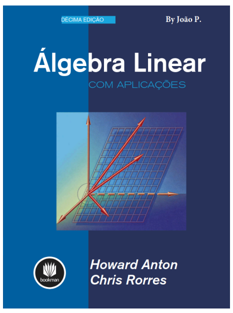
DE

HOWARD ANTON & CHRIS RORRES



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios



ANTON, C., H.; Rorres. **Álgebra Linear com Aplicações**. São Paulo: Bookman, 2010.

SUMÁRIO

1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES

1.1. Introdução aos sistemas de equações lineares

Conjunto de exercícios (página 9)

1. Em cada parte, determine se a equação é linear em x_1, x_2 e x_3.

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$
(b) $x_1 + 3x_2^2 + x_1x_3$
(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$
(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3$
(e) $x_1^{\frac{3}{5}} - 2x_2 + x_3 = 4$
(f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{\frac{1}{3}}$

Solução

São lineares as equações (a), (c) e (f).

■

2. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a)
$$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 2 \\ 3x - \frac{2}{y} &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

Solução

São lineares as equações que formam os sistemas (b), (c) e (d).

■

3. Em cada parte, determine se as equações formam um sistema linear.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad - \quad x_4 &= 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sin(2x_1 + x_3) &= \sqrt{5} \\ e^{-2x_2 - 2x_4} &= \frac{1}{x_2} \\ 4x + 4 &= 4 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 7x_1 - \quad x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ 2x_1 + \quad x_2 - x_3x_4 \quad &= 3 \\ -x_1 + 5 \quad x_2 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

Solução

São lineares as equações que formam os sistemas em (a) e (d).

■

4. Para cada sistema do Exercício 2 que for linear, detemine se é consistente.

(b)
$$\begin{aligned} x &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

Solução

No sistema dado, consideremos a segunda equação: $2x = 8$. Dividindo-a por 2, obtemos $x = 4$, que é exatamente a primeira equação. Assim, o sistema possui uma solução: $x = 4$ e é **consistente**.

■

(b)
$$\begin{aligned} 4x - \qquad y + 2z &= -1 \\ -x + (\ln 2)y - 3z \quad &= 0 \end{aligned}$$

Solução

Temos duas equações e três incógnitas. Geometricamente, representam dois planos no espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$). Inicialmente, vamos eliminar x da primeira equação somando 4 vezes a segunda equação à primeira. O sistema simplificado é mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} (4\ln 2 - 1)y - 10z &= -1 \\ -x + \qquad (\ln 2)y - 3\ z &= 0 \end{aligned}$$

Arbitrariamente, parametrizemos $y = t$. Assim, a primeira equação assume a forma:

$$\begin{aligned} (4\ln 2 - 1)y - 10z = -1 &\Rightarrow (4\ln 2 - 1)t - 10z = -1 \\ &\Rightarrow z = \frac{1 + (1 - 4\ln 2)t}{10} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões parametrizadas de y e z na segunda equação, obtemos:

$$\begin{aligned} -x + (\ln 2)y - 3z = 0 &\Rightarrow x = (\ln 2)y - 3z \\ &\Rightarrow x = (\ln 2)t - 3 \cdot \frac{1 + (1 - 4\ln 2)t}{10} \\ &\Rightarrow x = \frac{(10\ln 2)t - 3 - (1 + 4\ln 2)t}{10} \\ &\Rightarrow x = \frac{(6\ln 2 - 1)t - 3}{10} \end{aligned}$$

A solução do sistema é

$$\begin{cases} x = \dfrac{(6\ln 2 - 1)t - 3}{10} \\ y = t \\ z = \dfrac{1 + (1 - 4\ln 2)t}{10} \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Em particular, tomando $t = 0$, encontramos a solução $(x, y, z) = \left(-\frac{3}{10}, 0, \frac{1}{10}\right)$.

Portanto, o sistema possui infinitas soluções e é **consistente**.

■

(b)
$$\begin{aligned} 3z + x &= -4 \\ y + 5z &= 1 \\ 6x + 2z &= 3 \\ -x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

Solução

A matriz aumentada representativa do sistema dado é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

No que segue, consideremos a seguinte notação, representativa das operações elementares sobre matrizes:

- L_m: Representa a linha m, com $m = 1, 2, 3, 4$;
- $L_m \leftrightarrow L_n$: As linhas m e n trocam de lugar, com $m, n = 1, 2, 3, 4$;
- $L_m \to aL_m + bL_n$: A linha m é substituída por a vezes a linha m somado a b vezes a linha n, em que a e b.

Assim, façamos as seguinte manipulações sobre a matriz aumentada:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\
(L_3 \to 6L_1 - L_3) \quad \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & -21 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\
\left(L_3 \to \frac{L_3}{7}\right) \quad \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\
(L_4 \to L_1 + L_2 + L_4) \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \\
\left(L_4 \to \frac{L_4}{7}\right) \quad \Rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Note que as linhas 3 e 4 acima equivalem às equações $z = -\frac{3}{2}$ e $z = \frac{1}{7}$, respectivamente. Isso representa uma contradição. Portanto, o sistema não possui solução e é **inconsistente**.

■

5. Para cada sistema do Exercício 3 que for linear, determine se é consistente.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\quad - \quad x_4 &= 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Solução

Parametrizemos:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} 2\,x_1 \qquad\qquad - \quad x_4 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\,r \qquad\qquad - \quad x_4 = 5 \\ -r + 4s + 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2r - 5 \\ x_3 = \dfrac{-1 + r - 4s + 2x_4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2r - 5 \\ x_3 = \dfrac{-1 + r - 4s + 2 \cdot (2r - 5)}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2r - 5 \\ x_3 = \dfrac{-11 + 5r - 4s}{3} \end{cases}$$

Portanto, o sistema possui infintas soluções da forma:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = \dfrac{-11 + 5r - 4s}{3} \\ x_4 = 2r - 5 \end{cases}$$

Em particular, tomando $r = s = 0$, obtemos a solução $\left(0, 0, -\frac{11}{3}, 5\right)$.

■

(d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

Solução

Parametrizemos:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

Portanto,

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \Rightarrow r + s = t + x_4 \Rightarrow x_4 = r + s - t$$

O sistema possui infinitas soluções da forma:

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = r + s - t \end{cases}$$

Em particular, tomando $r = s = t = 0$, obtemos a solução trivial $(0, 0, 0, 0)$.

2. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1. Seção de segundo nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1.1. Seção de terceiro nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

3. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

4. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

5. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

REFERÊNCIAS

ANTON, C., H.; Rorres. **Álgebra Linear com Aplicações**. São Paulo: Bookman, 2010.