

Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE
CÁLCULO DE ÁLGEBRA LINEAR VOLUME 1
DE
WILFRED KAPLAN & DONALD J. LEWIS

$$\iiint_V x^2 dx dy dz =$$

V: $z = 10(x+3y)$, $x+y=1$
 $x=0, y=0, z=0$
 $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{10(x+3y)} x^2 dz =$
 $= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 z dy =$

$\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx =$

$= \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} f dy$

$y = \arctan x$

$y = \text{arcosec } x$

$y = f(x)$

$f(-a)$

$f(a)$

$\int_V x^2 dx dy dz =$

$x = 2y^2 + 3, x = 5$
 $z = 1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}$
 $z = 4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}$

$V = \int_{-1}^1 dy \int_{2y^2+3}^5 dx \int_{1+\sqrt{9x^2+4y^2}}^{4+\sqrt{9x^2+4y^2}} dz =$

$= \int_{-1}^1 dy \int_{2y^2+3}^5 (4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2} - 1 - \sqrt{9x^2 + 4y^2}) dx =$

$= 3 \int_{-1}^1 dy \int_{2y^2+3}^5 (5 - 2y^2 - 3) dx = 3 \int_{-1}^1 (5 - 2y^2 - 3) dy = 6 \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy =$

$= 6 \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-1}^1 = 6 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = 8.$

$y^2 - 8y + x^2 = 0$
 $y^2 - 10y + x^2 = 0$
 $y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x$

$\int_V x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$

$S = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_{8\sin \varphi}^{10 \sin \varphi} r dr =$

$= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} r^2 \Big|_{8\sin \varphi}^{10 \sin \varphi} d\varphi = 18 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 \varphi d\varphi = 9 \int_{\pi/6}^{\pi/3} (2 - \cos 2\varphi) d\varphi =$

$= 9 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = 9 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{3\pi}{2}.$

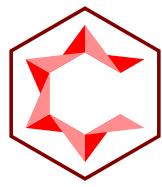
$T = 3,141592$

$5 = 2\pi R$

$y = \cos 2x$

$y = \cos x$

$y = 2 \cos(2x - \pi/3) + 1$



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro:
LTC, 1972. v. 1



SUMÁRIO

0. INTRODUÇÃO	4
0.1. Problemas da página 6	4
1. GEOMETRIA VETORIAL EM DUAS DIMENSÕES	8
2. LIMITES	8
2.1. Seção de segundo nível	8
2.1.1. Seção de terceiro nível	8
3. CÁLCULO DIFERENCIAL	9
4. CÁLCULO INTEGRAL	10
REFERÊNCIAS	11

0. INTRODUÇÃO

0.1. Problemas da página 6

1. (a) Encontre um inteiro x tal que $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$.

Solução

$$\begin{aligned} 10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} &\Rightarrow (10\sqrt{2})^2 < x^2 < (10\sqrt{3})^2 \Rightarrow 200 < x^2 < 300 \\ &\Rightarrow x^2 = \begin{cases} 225 \\ 256 \\ 289 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15 \\ 16 \\ 17 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Encontre um número inteiro x tal que $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$.

Solução

$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \cdot (-1) &\Rightarrow 5\sqrt{2} > -x > 3\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} < -x < 5\sqrt{2} \\ &\Rightarrow (3\sqrt{3})^2 < (-x)^2 < (5\sqrt{2})^2 \\ &\Rightarrow 27 < (-x)^2 < 50 \\ &\Rightarrow (-x)^2 = \begin{cases} 36 \\ 49 \end{cases} \Rightarrow -x = \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -6 \\ -7 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Encontre um número racional x tal que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

Solução

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

Podemos escolher arbitrariamente o número $x^2 = 2,25$, tal que:

$$x^2 = 2,25 = \frac{225}{100} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = 1,50$$



- (d) Encontre um número racional x tal que $\pi < x < \pi + 0,01$.

Solução

Com cinco casas decimais após a vírgula, temos $\pi \approx 3,14159$, donde $\pi + 0,01 \approx 3,15159$. Dado que nosso objetivo é encontrar um número racional que esteja entre esses dois valores, podemos escolher arbitrariamente o número

$$x = 3,142$$



2. Determine se $x < y$, $x = y$ ou $x > y$ para cada um dos seguintes casos:

- (a) $x = -3, y = 2$

Solução

$$x - y = -3 - 2 = -5 < 0 \Rightarrow x < y$$



- (b) $x = 1, y = -2$

Solução

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$



- (c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}, y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

Solução

$$y - x = \sqrt{7} - \sqrt{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Note que $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, então

$$y - x = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$



$$(d) \quad x = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$$

Solução

Sejam $u = \frac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{11}$ e $v = \frac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{13}$. Façamos:

$$u - v = \sqrt{3} - \sqrt{11} - (\sqrt{3} - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \sqrt{11} - \sqrt{3} + \sqrt{13} = \sqrt{13} - \sqrt{11}$$

Note que

$$\sqrt{13} > \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{13} - \sqrt{11} > 0 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$$



3. Calcule:

$$(a) \quad |-3, 5|$$

Solução

$$|-3, 5| = -(-3, 5) = 3, 5, \text{ pois } -3, 5 < 0.$$



$$(b) \quad |0, 2|$$

Solução

$$|0, 2| = 0, 2, \text{ pois } 0, 2 > 0.$$



$$(c) \quad ||x||$$

Solução

Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$||x|| = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



(d) $|-|x||$ **Solução**Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$-|x| \leq 0 \Rightarrow |-|x|| = -(-|x|) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(e) $|x-y| - |y-x|$ **Solução**

$$\begin{aligned} |x-y| - |y-x| &= |x-y| - |-(x-y)| = |x-y| - |-1| \cdot |x-y| \\ &= |x-y| - 1 \cdot |x-y| = |x-y| - |x-y| = 0 \end{aligned}$$

4. Mostre que $|a-b|$ pode ser interpretado como a distância entre a e b sobre o eixo dos números.**Solução**

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{se } a-b \geq 0 \\ -(a-b), & \text{se } a-b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a-b, & \text{se } a \geq b \\ b-a, & \text{se } a < b \end{cases}$$

A definição geométrica da distância entre dois pontos na reta real é dada pela diferença entre o maior e o menor, ou seja:

$$d(a, b) = \max(a, b) = \min(a, b).$$

Então, para cada caso:

- Se $a \geq b$, $d(a, b) = \max(a, b) = \min(a, b) = a - b = |a - b|$;
- Se $a < b$, $d(a, b) = \max(a, b) = \min(a, b) = b - a = |a - b|$.

Em ambos os casos, $d(a, b) = |a - b|$.

1. GEOMETRIA VETORIAL EM DUAS DIMENSÕES

2. LIMITES

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim aenean doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

2.1. Seção de segundo nível

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim aenean doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim aenean doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

2.1.1. Seção de terceiro nível

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim aenean doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.



3. CÁLCULO DIFERENCIAL

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat voluptatem. Ut enim aequo doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat voluptatem. Ut enim aequo doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat.



4. CÁLCULO INTEGRAL

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat voluptatem. Ut enim aequo doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat voluptatem. Ut enim aequo doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lore ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua quaerat.



REFERÊNCIAS

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1

