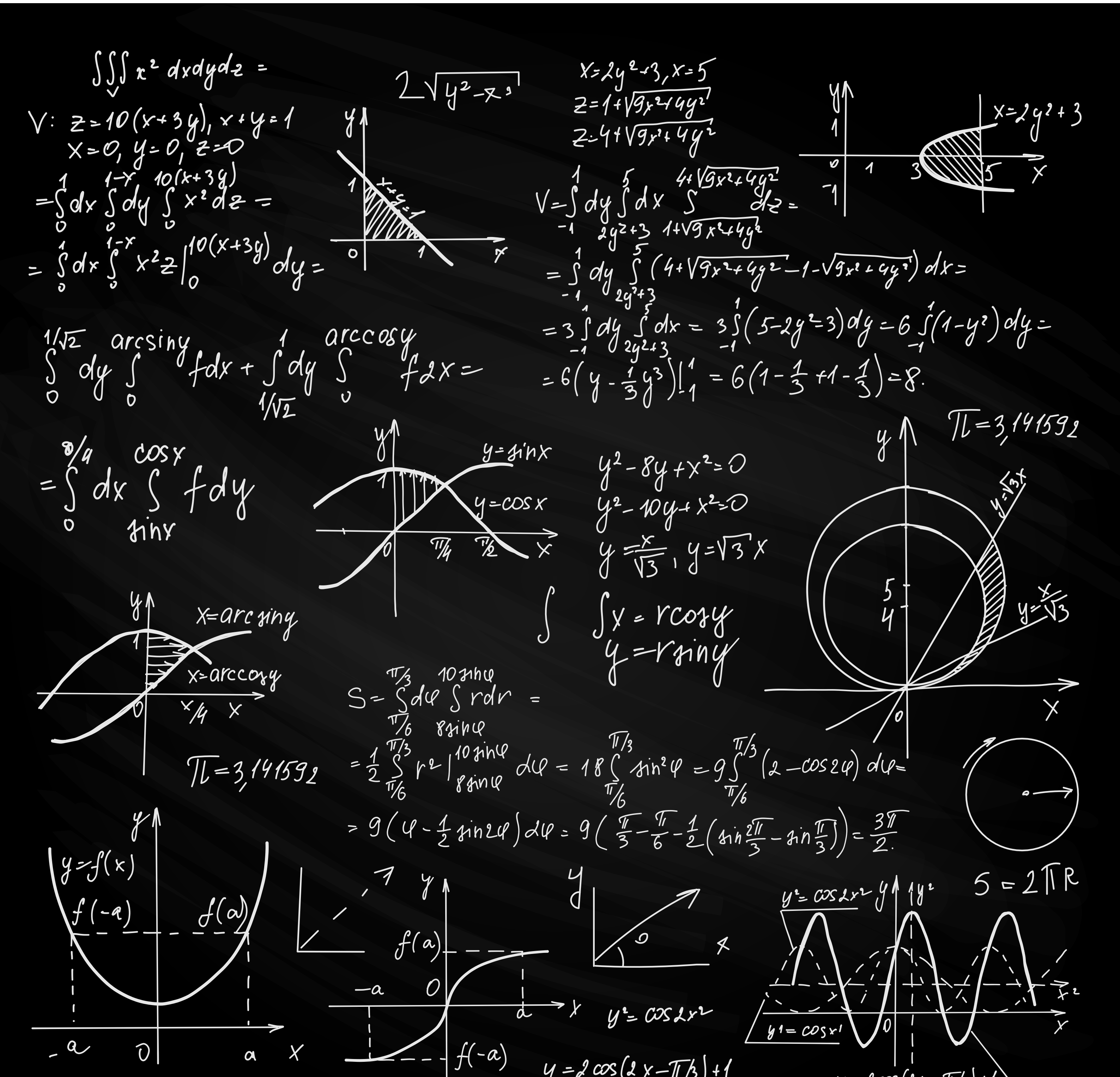
Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

CÁLCULO DE ÁLGEBRA LINEAR VOLUME 1

DE

WILFRED KAPLAN & DONALD J. LEWIS



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1. Problemas da página 6

1. (a) Encontre um inteiro x tal que $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$.

Solução

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow \left(10\sqrt{2}\right)^2 < x^2 < \left(10\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 200 < x^2 < 300$$
$$\Rightarrow x^2 = \begin{cases} 225 \\ 256 \Rightarrow x = \\ 289 \end{cases} \begin{cases} 15 \\ 16 \\ 17 \end{cases}$$

■

(b) Encontre um número inteiro x tal que $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$.

Solução

$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \cdot (-1) \Rightarrow 5\sqrt{2} > -x > 3\sqrt{3} &\Rightarrow 3\sqrt{3} < -x < 5\sqrt{2} \\ &\Rightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^2 < (-x)^2 < \left(5\sqrt{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow 27 < (-x)^2 < 50 \\ &\Rightarrow (-x)^2 = \begin{cases} 36 \\ 49 \end{cases} \Rightarrow -x = \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -6 \\ -7 \end{cases} \end{aligned}$$

■

(c) Encontre um número racional x tal que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

Solução

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 < x^2 < \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

Podemos escolher arbitrariamente o número $x^2 = 2,25$, tal que:

$$x^2 = 2,25 = \frac{225}{100} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = 1,50$$

■

(d) Encontre um número racional x tal que $\pi < x < \pi + 0,01$.

Solução

Com cinco cadas decimais após a vírgula, temos $\pi \approx 3,14159$, donde $\pi + 0,01 \approx 3,15159$. Dado que nosso objetivo é encontrar um número racional que esteja entre esses dois valores, podemos escolher arbitrariamente o número

$$x = 3,142$$

■

2. Determine se $x < y$, $x = y$ ou $x > y$ para cada um dos seguintes casos:

(a) $x = -3, y = 2$

Solução

$$x - y = -3 - 2 = -5 < 0 \Rightarrow x < y$$

■

(b) $x = 1, y = -2$

Solução

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

■

(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}, y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

Solução

$$y - x = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

Note que $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, então

$$y - x = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

■

(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}$

Solução

Sejam $u = \dfrac{1}{x} = \sqrt{3}-\sqrt{11}$ e $v = \dfrac{1}{y} = \sqrt{3}-\sqrt{13}$. Façamos:

$$u - v = \sqrt{3}-\sqrt{11} - \left(\sqrt{3}-\sqrt{13}\right) = \sqrt{3}-\sqrt{11}-\sqrt{3}+\sqrt{13} = \sqrt{13}-\sqrt{11}$$

Note que

$$\sqrt{13} > \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{13}-\sqrt{11} > 0 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$$

■

3. Calcule:

(a) $|-3,5|$

Solução

$|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$, pois $-3,5 < 0$.

■

(b) $|0,2|$

Solução

$|0,2| = 0,2$, pois $0,2 > 0$.

■

(c) $|\ |x|\ |$

Solução

Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$|\ |x|\ | = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } & x \geq 0 \\ -x, \text{ se } & x < 0 \end{cases}$$

■

(d) $|-|x||$

Solução

Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$-|x| \leq 0 \Rightarrow |-|x|| = -(-|x|) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } & x \geq 0 \\ -x, \text{ se } & x < 0 \end{cases}$$

■

(e) $|x-y| - |y-x|$

Solução

$$|x-y| - |y-x| = |x-y| - |-(x-y)| = |x-y| - |-1| \cdot |x-y|, = |x-y| - 1 \cdot |x-y| = |x-y| - |x-y| =$$

■

4. Mostre que $|a-b|$ pode ser interpretado como a distância entre a e b sobre o eixo dos números.

Solução

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & , \text{ se } \; a-b \geq 0 \\ -(a-b) & , \text{ se } \; a-b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a-b \text{ , se } & a \geq b \\ b-a \text{ , se } & a < b \end{cases}$$

A definição geométrica da distância entre dois pontos na reta real é dada pela diferença entre o maior e o menor, ou seja:

$$d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b).$$

Então, para cada caso:

- Se $a \geq b$, $d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b) = a-b = |a-b|$;
- Se $a < b$, $d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b) = b-a = |a-b|$.

Em ambos os casos, $d(a,b) = |a-b|$.

■

5. Achar x em cada um dos casos:

(a) $|x| = 0$

Solução

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

■

(b) $|x| = 2$

Solução

$$|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

■

(c) $|x - 1| = 2$

Solução

$$|x-1| = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = & 2 \\ x - 1 = & -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 3 \\ x = & -1 \end{cases}$$

■

(d) $|x + 1| = 1$

Solução

$$|x+1| = 1 \Rightarrow x + 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = & 1 \\ x + 1 = & -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 0 \\ x = & -2 \end{cases}$$

■

6. O símbolo $\sqrt{x}$ indica 0 se $x = 0$ e a raiz quadrada positiva de x, se $x > 0$. Justifique as seguintes regras para todos reais x e y.

(a) $\sqrt{x^2} = |x|$

Solução

Para $x = 0$, a identidade é imediata. Se $x > 0$ $\sqrt{x^2} = x = |x|$ e se $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x = |x|$. Em todo caso,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

■

(b) $\sqrt{x^4} = x^2$

Solução

$$\sqrt{x^4} = \sqrt{\left(x^2\right)^2} = x^2$$

■

(c) $(x|x|)^2 = x^4$

Solução

$$(x|x|)^2 = x^2 \cdot (|x|)^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

■

(d) $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$

Solução

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$$

■

7. Mostre que as regras 20 e 21 são válidas para todos os números reais a e b.

Solução

- Regra 20: $|a| = |-a|$
  - Para $a = 0$, a identidade é imediatamente válida;
  - Para $a > 0$, temos: $|a| = a$ e $|-a| = -(-a) = a = |a|$;
  - Para $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, temos: $|a| = -a$ e $|-a| = -a = |a|$.

  Portanto, a regra 20 é verdadeira para todo número real.

- Regra 21: $|ab| = |a|\ |b|$
  - Para $a = b = 0$, a identidade é imediatamente válida;
  - Caso 1: a e b têm mesmo sinal.

    Quando ambos os números são positivos, ou seja, $a > 0$ e $b > 0$, temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a|\ |b|$$

Quando ambos os número são negativos, ou seja, $a < 0$ e $b < 0$, temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$$

- Caso 2: a e b têm sinais distintos. Sem perda de generalidade, consideremos: $a > 0$ e $b < 0$. O produto entre os números é negativos. Então,

$$ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a(-b) = |a|\ |b|.$$

■

8. (a) $a < b$ implica $a^2 < b^2$?

   Solução

   Não, basta considerar o contra-exemplo $a = -2$ e $b = -1$, tal que $a < b$, mas $a^2 > b^2$.

   ■

   (b) $a < b$ implica $a^3 < b^3$?

   Solução

   ■

1.2. Problemas da página 9

1. Seja $\mathbb{N}$ o conjuto de todos os inteiros positivos. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é finito e exiba seus elementos.

   (a) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\}$

   Solução

   $$\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

   ■

   (b) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\}$

   Solução

   $$\begin{aligned} 11 < x^3 < 134 &\Rightarrow 3^3 \leq x^3 \leq 5^3 \\ &\Rightarrow \{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\} = \{3, 4, 5\} \end{aligned}$$

■

(c) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x^2 + x - 1 < 50\}$

Solução

$$\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x^2 + x - 1 < 50\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

■

(d) $\left\{x \mid |x| < \sqrt{2} \text{ e } x \text{ ou } -x \text{ está em } \mathbb{N}\right\}$.

Solução

$$\left\{x \mid |x| < \sqrt{2} \text{ e } x \text{ ou } -x \text{ está em } \mathbb{N}\right\} = \{-1,\ 0,\ 1\}$$

■

2. Determine se 3 pertence aos seguintes conjuntos:

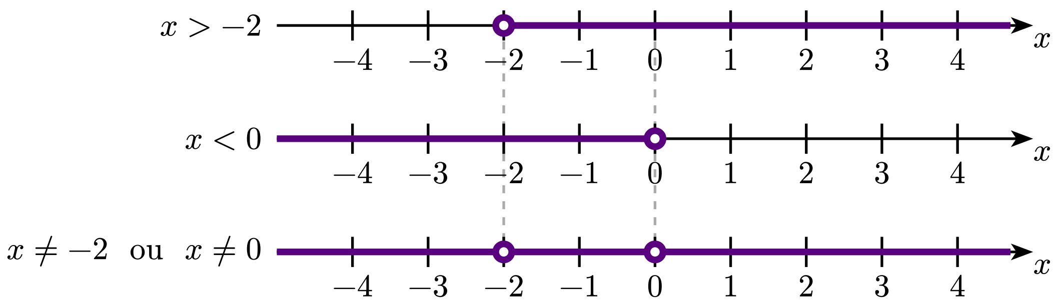
(a) $\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\}$

Solução

Note que:

$$\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\} = \{x \mid x \neq -2 \text{ ou } x \neq 0\}.$$

Portanto, $3 \in \{x \mid x \neq -2 \text{ ou } x \neq 0\}$, como ilustra o diagrama abaixo:



■

(b) $\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\}$

Solução

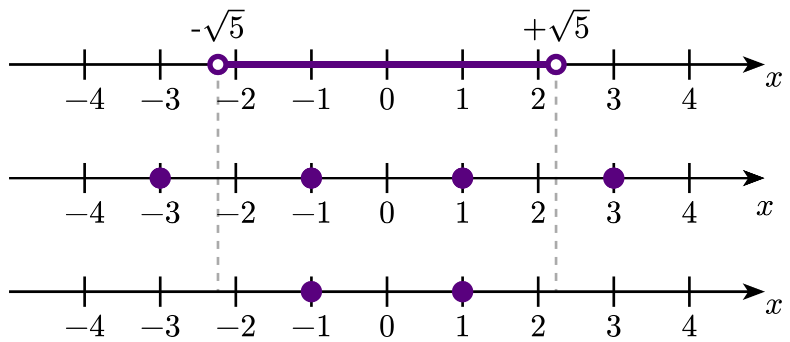
O primeiro conjunto é facilmente identificável: $x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. Quanto ao segundo conjunto, observemos que

$$\begin{aligned}
x^2 - 1 \ \text{ é um número par} &\Rightarrow x^2 - 1 = 2k \ \text{ para } \ k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow x^2 = 2k + 1 \ \text{ para } \ k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow x^2 \text{ é um número ímpar} \\
&\Rightarrow x \text{ é um número ímpar}
\end{aligned}$$

Então,

$$\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\} = \{-1, 1\},$$

Portanto, $3 \notin \{-1, 1\}$, como ilustra o diagrama seguinte:



■

(c) O conjunto vazio.

Solução

$$3 \notin \emptyset$$

■

3. Descreva todos os subconjuntos de cada um dos conjuntos:

(a) O conjunto consistindo de 0 e 1.

Solução

Seja $A = \{0, 1\}$. Sabendo que A possui $n = 2$ elementos, devemos ter $2^n = 2^2 = 4$ subconjuntos, quais sejam:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}.$$

■

(b) O conjunto consistindo de uma caneta, um lápis e uma borracha.

Solução

Seja $B = \{\text{caneta}, \text{lápis}, \text{borracha}\}$ um conjunto de $n = 3$ elementos. Temos $2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos, como mostrado abaixo:

$$\begin{gathered}\emptyset,\\ \{\text{caneta}\}, \{\text{lápis}\}, \{\text{borracha}\},\\ \{\text{caneta}, \text{lápis}\}, \{\text{caneta}, \text{borracha}\}, \{\text{lápis}, \text{borracha}\},\\ \{\text{caneta}, \text{lápis}, \text{borracha}\}\end{gathered}$$

■

(c) O conjunto consistindo de todos os pares (x, y), onde $x = 0$ ou 1 e $y = 0$ ou 1.

Solução

Seja o conjunto

$$C = \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad y \in \{0, 1\}\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Como o cojunto C possui $n = 4$ elementos, terá $2^n = 2^4 = 16$ subconjuntos, quais sejam:

$$\begin{gathered}\emptyset,\\ \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\},\\ \{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \{(1,0),(1,1)\},\\ \{(0,0),(0,1),(1,0)\}, \{(0,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0),(1,1)\},\\ \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.\end{gathered}$$

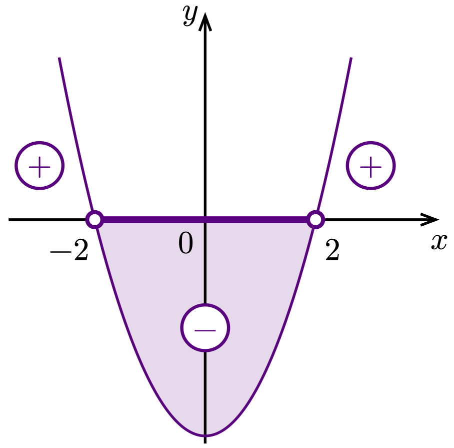
■

4. Para cada uma das seguintes desigualdades descreva o conjunto de números reais x para os quais a desigualdade é válida:

(a) $x^2 < 4$

Solução

$$x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$$



$\blacksquare$

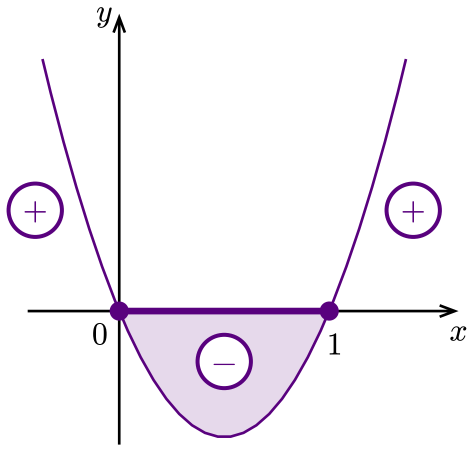
(b) $x(x-1) \leq 0$

Solução

Inicialmente, determinemos os zeros de $f(x) = x(x-1)$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Note que a função $f(x) = x(x-1)$ é uma parábola cujo coeficiente do termo x^2 é $a = 1 < 0$. Ou seja, uma parábola cujo vértice é um ponto de mínimo, como ilustra o esboço abaixo:



Portanto,

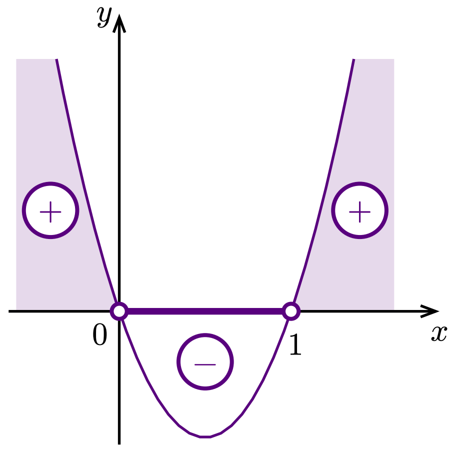
$$x(x-1) \leq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

$\blacksquare$

(c) $x(x-1) > 0$

Solução

Note que o lado esquerdo da desigualdade acima é idêntico ao da expressão do item (b). Conforme análise gráfica do sinal da função $f(x) = x(x-1)$,



Portanto,

$$x(x-1) > 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

■

(d) $(x-1)(x-2) < 0$

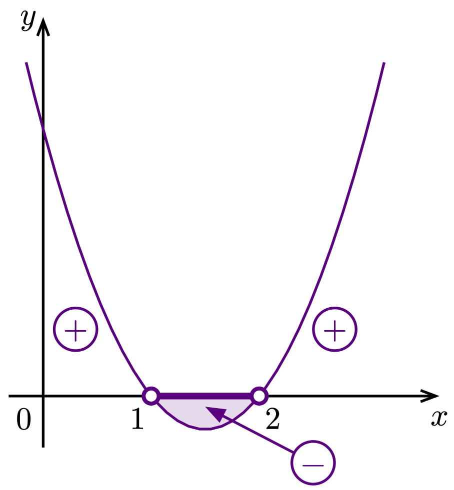
Solução

consideremos a função $f(x) = (x-1)(x-2)$. Iniciamos determinando os zeros de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \text{ ou} \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou} \\ x=2 \end{cases}$$

Reescrevendo $f(x)$ como $f(x) = x^2 - 3x + 2$, temos que o coeficiente do termo x^2 é igual a $1 < 0$, ou seja, o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para cima.

O seguinte esboço do gráfico de $f(x)$ mostra o estudo do sinal da função:



Portanto,

$$(x-1)(x-2)<0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 1<x<2\}.$$

■

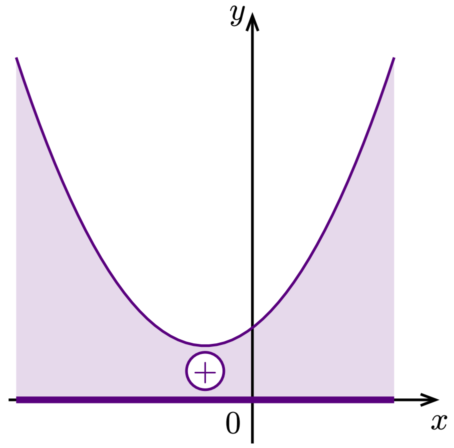
(e) $x^2+x+1>0$

Solução

Façamos o estudo do sinal da função $f(x)=x^2+x+1$. Inicialmente, determinemos as raízes ou zeros de $f(x)$. Sejam $a=1$, $b=1$ e $c=1$ respectivamente os coeficientes dos termos x^2, x e termo independente do polinômio de segundo grau. Então, as raízes de $f(x)$ são

$$\begin{aligned} f(x)=0 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

Note que não existem raízes reais. Logo, a parábola não toca o eixo horizontal (eixo x) em nenhum ponto. Para completar a análise, observemos que o coeficiente $a=1$ é negatico. Isso significa que a parábola possui ponto de mínimo e concavidade voltada para cima. O esboço seguinte ilustra o estudo do sinal de $f(x)$:



Portanto, $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

■

(f) $\dfrac{x}{x-1} \geq 0$

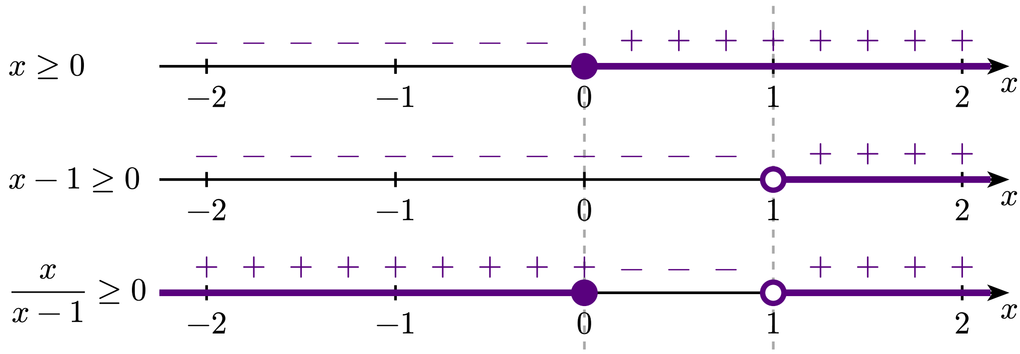
Solução

Trata-se de uma inequação racional da forma $p(x)/q(x)$ em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$. Para resolvê-la, seguimos o procedimento:

- Determinação dos pontos críticos de $p(x)$ e $q(x)$:

$$\begin{cases} p(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ q(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

- Análise de sinais:



Portanto,

$$\frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \quad \text{ou} \quad x > 1\}$$

■

(g) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{x+1} \geq 0$

Solução

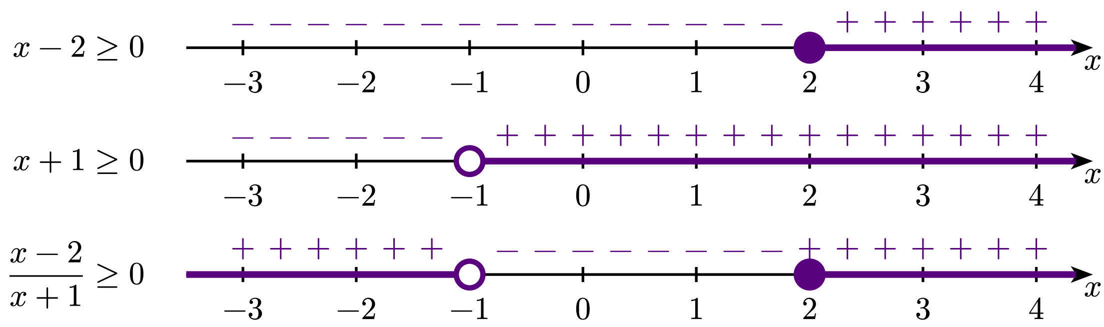
Organizando a inequação acima, temos:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 0$$

- Determinnemos os pontos críticos de $p(x) = x - 2$ e $q(x) = x + 1$:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

- Análise de sinais:



Portanto,

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 2\}$$

■

(h) $\frac{1}{x} < -1$

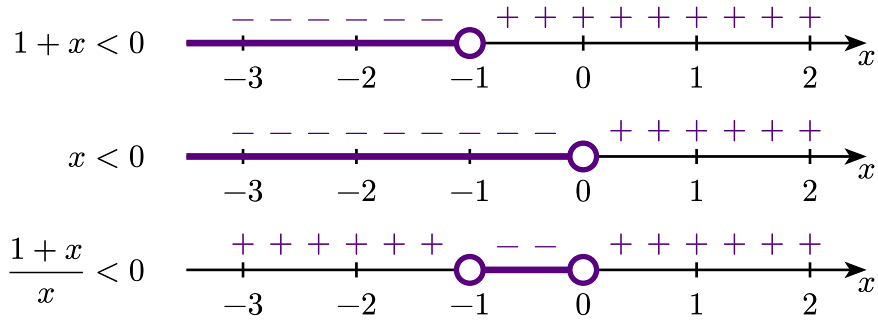
Solução

$$\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} < 0$$

- Pontos críticos:

$$\begin{cases} 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

- Análise de sinais



Portanto,

$$\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$$

5. Classifique cada um dos seguintes intervalos em função dos tipos mostrados na Fig. 0-5.
   (a) $-1 \leq x \leq 1$
   (b) $-2 < x$
   (c) $3 < x < 100$
   (d) $x \geq 0$
   (e) $x < 0$

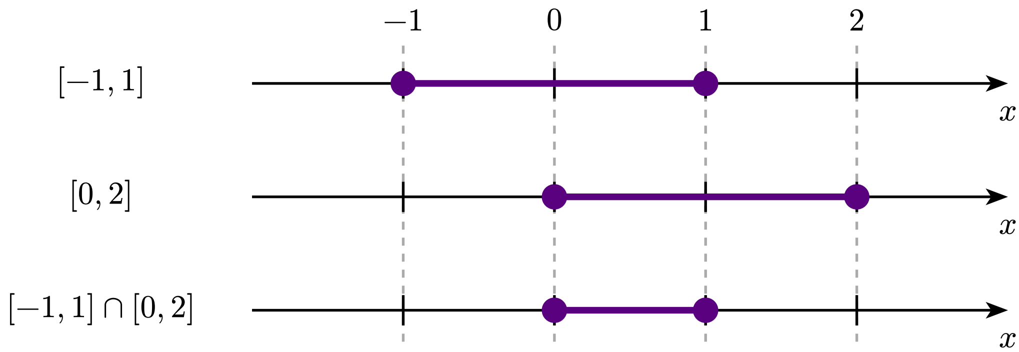
   Solução

Intervalo	Clasificação
$-1 \leq x \leq 1$	intervalo fechado
$-2 < x$	intervalo infinito
$3 < x < 100$	intervalo aberto
$x \geq 0$	intervalo infinito
$x < 0$	intervalo infinito

6. Encontre a intersecção de cada uma dos seguintes pares de intervalos e classifique:

   (a) $[-1, 1]$ e $[0, 2]$

   Solução

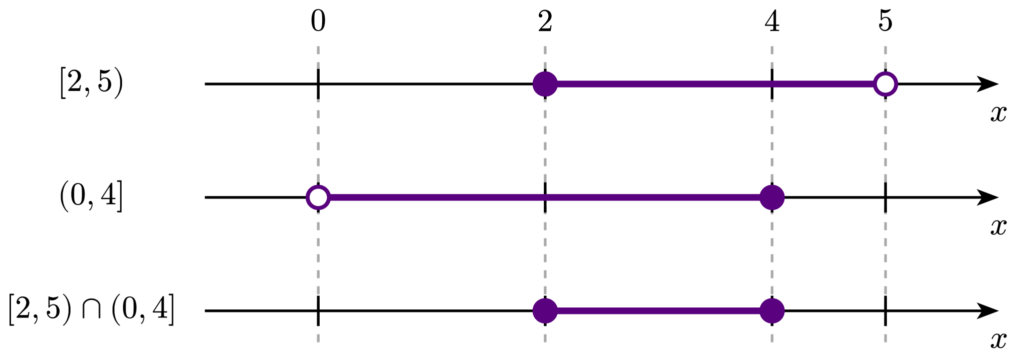


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo fechado**: $[0, 1]$.

■

(b) $[2, 5)$ e $(0, 4]$

Solução

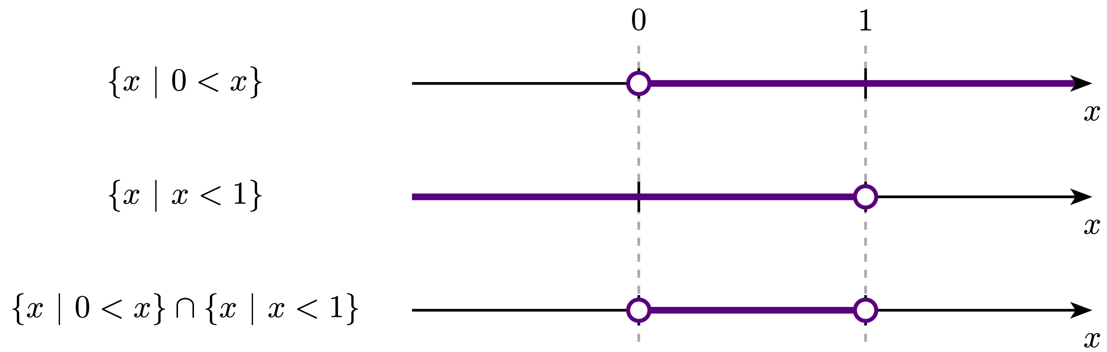


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo fechado**: $[2, 4]$.

■

(c) $0 < x$ e $x < 1$

Solução

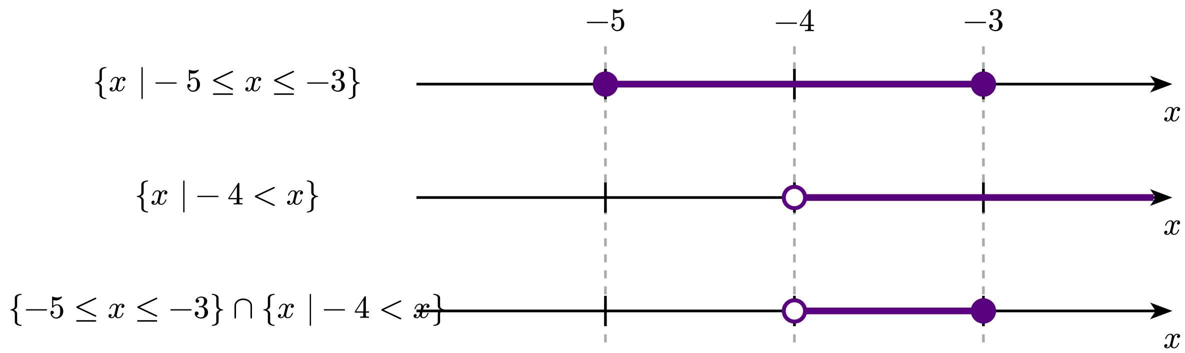


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo aberto**: $(0, 1)$ ou ainda $\{x \mid 0 < x < 1\}$.

■

(d) $-5 \leq x \leq -3$ e $-4 < x$

Solução

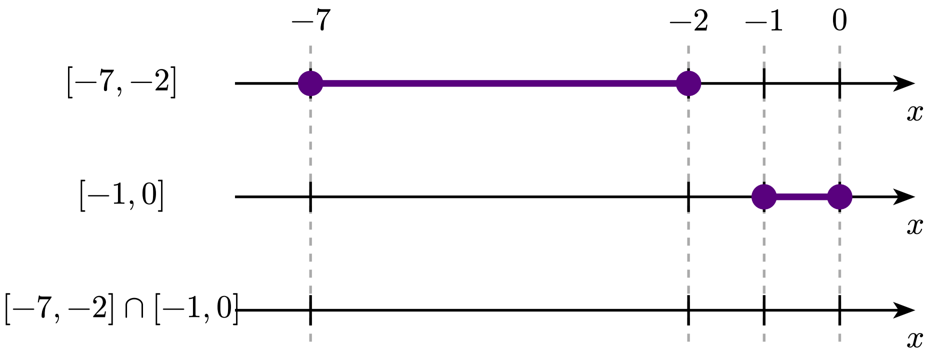


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo semi-aberto**: $(-4, 3]$ ou ainda $\{x \mid -4 < x \leq -3\}$.

■

(e) $[-7, -2]$ e $[-1, 0]$

Solução



Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo vazio**: $\emptyset$.

■

REFERÊNCIAS

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1