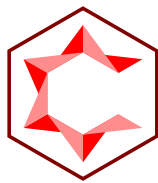




# CÁLCULO DE ÁLGEBRA LINEAR VOLUME 1

**WILFRED KAPLAN & DONALD J. LEWIS**

$$\zeta = 2\pi R$$



**Igo da Costa Andrade**

Resolução Comentada de Exercícios

---

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro:  
LTC, 1972. v. 1

---



# SUMÁRIO

<b>0. INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
0.1. Problemas da página 6	4
<b>1. GEOMETRIA VETORIAL EM DUAS DIMENSÕES</b>	<b>8</b>
<b>2. LIMITES</b>	<b>8</b>
2.1. Seção de segundo nível	8
2.1.1. Seção de terceiro nível	8
<b>3. CÁLCULO DIFERENCIAL</b>	<b>9</b>
<b>4. CÁLCULO INTEGRAL</b>	<b>10</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>11</b>



## 0. INTRODUÇÃO

### 0.1. Problemas da página 6

1. (a) Encontre um inteiro  $x$  tal que  $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$ .

**Solução**

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow (10\sqrt{2})^2 < x^2 < (10\sqrt{3})^2 \Rightarrow 200 < x^2 < 300$$

$$\Rightarrow x^2 = \begin{cases} 225 \\ 256 \\ 289 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15 \\ 16 \\ 17 \end{cases}$$

(b) Encontre um número inteiro  $x$  tal que  $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$ .

**Solução**

$$-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \cdot (-1) \Rightarrow 5\sqrt{2} > -x > 3\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} < -x < 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (3\sqrt{3})^2 < (-x)^2 < (5\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 27 < (-x)^2 < 50$$

$$\Rightarrow (-x)^2 = \begin{cases} 36 \\ 49 \end{cases} \Rightarrow -x = \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -6 \\ -7 \end{cases}$$

(c) Encontre um número racional  $x$  tal que  $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ .

**Solução**

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

Podemos escolher arbitrariamente o número  $x^2 = 2,25$ , tal que:

$$x^2 = 2,25 = \frac{225}{100} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = 1,50$$



- (d) Encontre um número racional  $x$  tal que  $\pi < x < \pi + 0,01$ .

**Solução**

Com cinco casas decimais após a vírgula, temos  $\pi \approx 3,14159$ , donde  $\pi + 0,01 \approx 3,15159$ . Dado que nosso objetivo é encontrar um número racional que esteja entre esses dois valores, podemos escolher arbitrariamente o número

$$x = 3,142$$

■

2. Determine se  $x < y$ ,  $x = y$  ou  $x > y$  para cada um dos seguintes casos:

- (a)  $x = -3, y = 2$

**Solução**

$$x - y = -3 - 2 = -5 < 0 \Rightarrow x < y$$

■

- (b)  $x = 1, y = -2$

**Solução**

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

■

- (c)  $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}, y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

**Solução**

$$y - x = \sqrt{7} - \sqrt{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Note que  $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$  e  $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$ , então

$$y - x = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

■



(d)  $x = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}, y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

**Solução**

Sejam  $u = \frac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{11}$  e  $v = \frac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{13}$ . Façamos:

$$u - v = \sqrt{3} - \sqrt{11} - (\sqrt{3} - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \sqrt{11} - \sqrt{3} + \sqrt{13} = \sqrt{13} - \sqrt{11}$$

Note que

$$\sqrt{13} > \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{13} - \sqrt{11} > 0 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$$

■

3. Calcule:

(a)  $|-3, 5|$

**Solução**

$$|-3, 5| = -(-3, 5) = 3, 5, \text{ pois } -3, 5 < 0.$$

■

(b)  $|0, 2|$

**Solução**

$$|0, 2| = 0, 2, \text{ pois } 0, 2 > 0.$$

■

(c)  $||x||$

**Solução**

Dado que  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$||x|| = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

■



(d)  $|-|x||$

**Solução**Dado que  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$-|x| \leq 0 \Rightarrow |-|x|| = -(-|x|) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

■

(e)  $|x - y| - |y - x|$

**Solução**

$$\begin{aligned} |x - y| - |y - x| &= |x - y| - |-(x - y)| = |x - y| - |-1| \cdot |x - y| \\ &= |x - y| - 1 \cdot |x - y| = |x - y| - |x - y| = 0 \end{aligned}$$

■

4. Mostre que  $|a - b|$  pode ser interpretado como a distância entre  $a$  e  $b$  sobre o eixo dos números.

**Solução**

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & \text{se } a - b \geq 0 \\ -(a - b), & \text{se } a - b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a - b, & \text{se } a \geq b \\ b - a, & \text{se } a < b \end{cases}$$

A definição geométrica da distância entre dois pontos na reta real é dada pela diferença entre o maior e o menor, ou seja:

$$d(a, b) = \max(a, b) - \min(a, b).$$

Então, para cada caso:

- Se  $a \geq b$ ,  $d(a, b) = \max(a, b) - \min(a, b) = a - b = |a - b|$ ;
- Se  $a < b$ ,  $d(a, b) = \max(a, b) - \min(a, b) = b - a = |a - b|$ .

Em ambos os casos,  $d(a, b) = |a - b|$ .

■



# 1. GEOMETRIA VETORIAL EM DUAS DIMENSÕES

---

## 2. LIMITES

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

### 2.1. Seção de segundo nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequaleam animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

#### 2.1.1. Seção de terceiro nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.



### 3. CÁLCULO DIFERENCIAL

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequi doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequi doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.



## 4. CÁLCULO INTEGRAL

---

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequi doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequi doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.



## REFERÊNCIAS

---

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1

