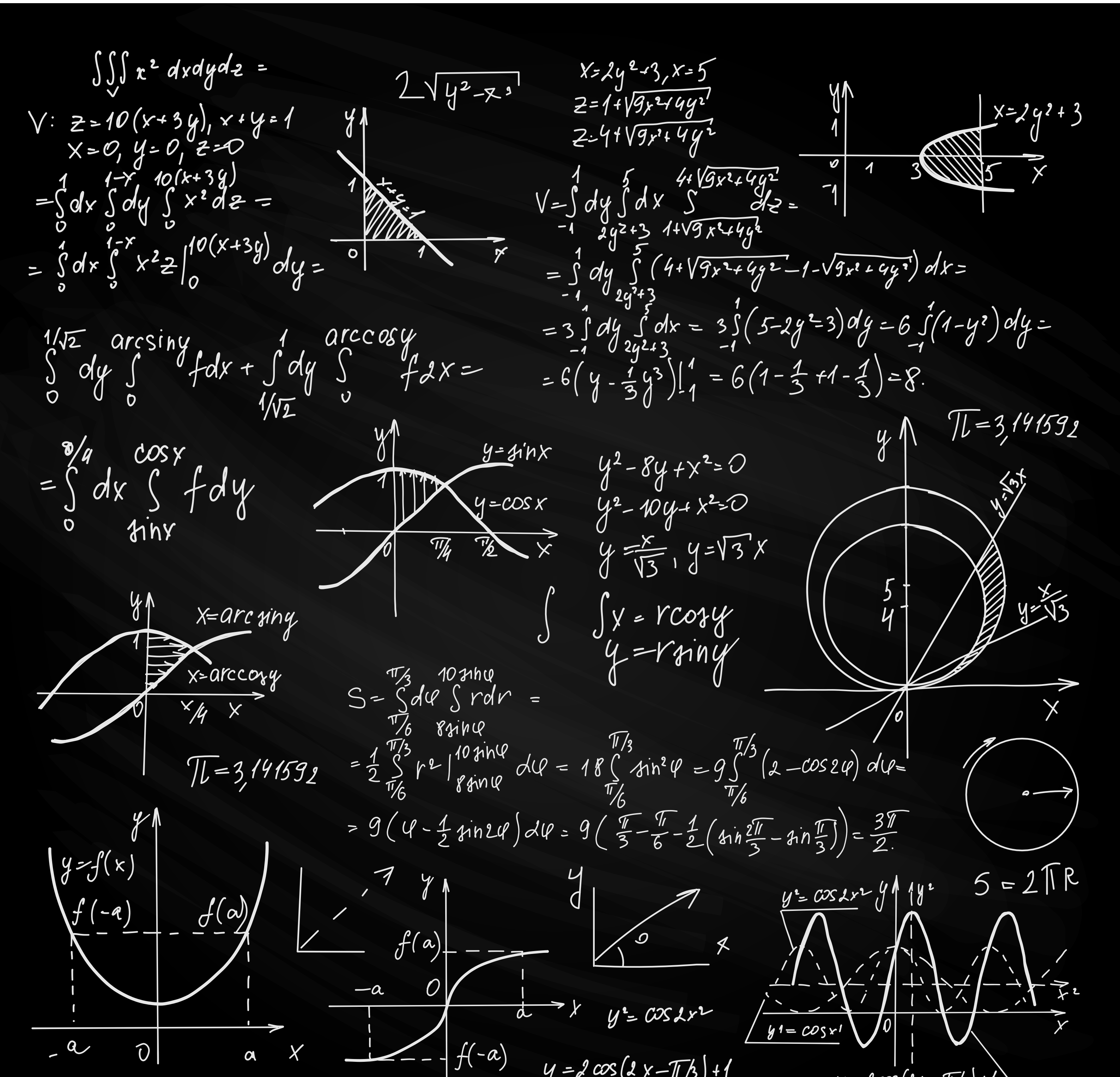
Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

CÁLCULO DE ÁLGEBRA LINEAR VOLUME 1

DE

WILFRED KAPLAN & DONALD J. LEWIS



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1. Problemas da página 6

1. (a) Encontre um inteiro x tal que $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$.

Solução

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow \left(10\sqrt{2}\right)^2 < x^2 < \left(10\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 200 < x^2 < 300$$
$$\Rightarrow x^2 = \begin{cases} 225 \\ 256 \\ 289 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15 \\ 16 \\ 17 \end{cases}$$

■

(b) Encontre um número inteiro x tal que $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$.

Solução

$$-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \cdot (-1) \Rightarrow 5\sqrt{2} > -x > 3\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} < -x < 5\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^2 < (-x)^2 < \left(5\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 27 < (-x)^2 < 50$$
$$\Rightarrow (-x)^2 = \begin{cases} 36 \\ 49 \end{cases} \Rightarrow -x = \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -6 \\ -7 \end{cases}$$

■

(c) Encontre um número racional x tal que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

Solução

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 < x^2 < \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

Podemos escolher arbitrariamente o número $x^2 = 2,25$, tal que:

$$x^2 = 2,25 = \frac{225}{100} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = 1,50$$

■

(d) Encontre um número racional x tal que $\pi < x < \pi + 0,01$.

Solução

Com cinco cadas decimais após a vírgula, temos $\pi \approx 3,14159$, donde $\pi + 0,01 \approx 3,15159$. Dado que nosso objetivo é encontrar um número racional que esteja entre esses dois valores, podemos escolher arbitrariamente o número

$$x = 3,142$$

■

2. Determine se $x < y$, $x = y$ ou $x > y$ para cada um dos seguintes casos:

(a) $x = -3, y = 2$

Solução

$$x - y = -3 - 2 = -5 < 0 \Rightarrow x < y$$

■

(b) $x = 1, y = -2$

Solução

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

■

(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}, y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

Solução

$$y - x = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

Note que $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, então

$$y - x = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

■

(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}$

Solução

Sejam $u = \dfrac{1}{x} = \sqrt{3}-\sqrt{11}$ e $v = \dfrac{1}{y} = \sqrt{3}-\sqrt{13}$. Façamos:

$$u - v = \sqrt{3}-\sqrt{11}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{13}\right) = \sqrt{3}-\sqrt{11}-\sqrt{3}+\sqrt{13} = \sqrt{13}-\sqrt{11}$$

Note que

$$\sqrt{13} > \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{13}-\sqrt{11} > 0 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$$

■

3. Calcule:

(a) $|-3,5|$

Solução

$|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$, pois $-3,5 < 0$.

■

(b) $|0,2|$

Solução

$|0,2| = 0,2$, pois $0,2 > 0$.

■

(c) $|\ |x|\ |$

Solução

Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$|\ |x|\ | = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } & x \geq 0 \\ -x, \text{ se } & x < 0 \end{cases}$$

■

(d) $|-|x||$

Solução

Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$-|x| \leq 0 \Rightarrow |-|x|| = -(-|x|) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } & x \geq 0 \\ -x, \text{ se } & x < 0 \end{cases}$$

■

(e) $|x-y| - |y-x|$

Solução

$$|x-y| - |y-x| = |x-y| - |-(x-y)| = |x-y| - |-1| \cdot |x-y|, = |x-y| - 1 \cdot |x-y| = |x-y| - |x-y| =$$

■

4. Mostre que $|a-b|$ pode ser interpretado como a distância entre a e b sobre o eixo dos números.

Solução

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{, se } \; a-b \geq 0 \\ -(a-b) & \text{, se } \; a-b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a-b \text{ , se } & a \geq b \\ b-a \text{ , se } & a < b \end{cases}$$

A definição geométrica da distância entre dois pontos na reta real é dada pela diferença entre o maior e o menor, ou seja:

$$d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b).$$

Então, para cada caso:

- Se $a \geq b$, $d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b) = a-b = |a-b|$;
- Se $a < b$, $d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b) = b-a = |a-b|$.

Em ambos os casos, $d(a,b) = |a-b|$.

■

5. Achar x em cada um dos casos:

(a) $|x| = 0$

Solução

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

■

(b) $|x| = 2$

Solução

$$|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

■

(c) $|x - 1| = 2$

Solução

$$|x-1| = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = & 2 \\ x - 1 = & -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 3 \\ x = & -1 \end{cases}$$

■

(d) $|x + 1| = 1$

Solução

$$|x+1| = 1 \Rightarrow x + 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = & 1 \\ x + 1 = & -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 0 \\ x = & -2 \end{cases}$$

■

6. O símbolo $\sqrt{x}$ indica 0 se $x = 0$ e a raiz quadrada positiva de x, se $x > 0$. Justifique as seguintes regras para todos reais x e y.

(a) $\sqrt{x^2} = |x|$

Solução

Para $x = 0$, a identidade é imediata. Se $x > 0$ $\sqrt{x^2} = x = |x|$ e se $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x = |x|$. Em todo caso,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

■

(b) $\sqrt{x^4} = x^2$

Solução

$$\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$$

■

(c) $(x|x|)^2 = x^4$

Solução

$$(x|x|)^2 = x^2 \cdot (|x|)^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

■

(d) $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$

Solução

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

■

7. Mostre que as regras 20 e 21 são válidas para todos os números reais a e b.

Solução

- Regra 20: $|a| = |-a|$
  - Para $a = 0$, a identidade é imediatamente válida;
  - Para $a > 0$, temos: $|a| = a$ e $|-a| = -(-a) = a = |a|$;
  - Para $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, temos: $|a| = -a$ e $|-a| = -a = |a|$.

  Portanto, a regra 20 é verdadeira para todo número real.

- Regra 21: $|ab| = |a|\ |b|$
  - Para $a = b = 0$, a identidade é imediatamente válida;
  - Caso 1: a e b têm mesmo sinal.

    Quando ambos os números são positivos, ou seja, $a > 0$ e $b > 0$, temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a|\ |b|$$

Quando ambos os número são negativos, ou seja, $a < 0$ e $b < 0$, temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$$

- Caso 2: a e b têm sinais distintos. Sem perda de generalidade, consideremos: $a > 0$ e $b < 0$. O produto entre os números é negativos. Então,

$$ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a(-b) = |a|\ |b|.$$

■

8. (a) $a < b$ implica $a^2 < b^2$?

Solução

Não, basta considerar o contra-exemplo $a = -2$ e $b = -1$, tal que $a < b$, mas $a^2 > b^2$.

■

(b) $a < b$ implica $a^3 < b^3$?

Solução

■

1.2. Problemas da página 9

1. Seja $\mathbb{N}$ o conjuto de todos os inteiros positivos. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é finito e exiba seus elementos.

(a) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\}$

Solução

$$\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

■

(b) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\}$

Solução

$$\begin{aligned} 11 < x^3 < 134 &\Rightarrow 3^3 \leq x^3 \leq 5^3 \\ &\Rightarrow \{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\} = \{3, 4, 5\} \end{aligned}$$

(c) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x^2 + x - 1 < 50\}$

Solução

$$\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x^2 + x - 1 < 50\} = \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$$

(d) $\left\{x \mid |x| < \sqrt{2} \text{ e } x \text{ ou } -x \text{ está em } \mathbb{N}\right\}$.

Solução

$$\left\{x \mid |x| < \sqrt{2} \text{ e } x \text{ ou } -x \text{ está em } \mathbb{N}\right\} = \{-1,\, 0,\, 1\}$$

2. Determine se 3 pertence aos seguintes conjuntos:

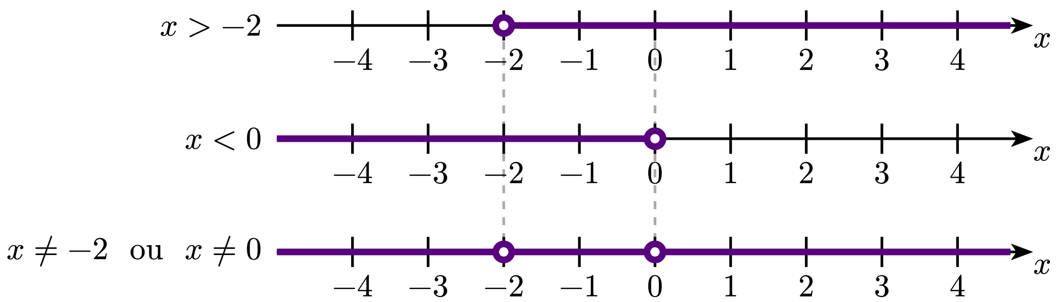
(a) $\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\}$

Solução

Note que:

$$\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\} = \{x \mid x \neq -2 \text{ ou } x \neq 0\}.$$

Portanto, $3 \in \{x \mid x \neq -2 \text{ ou } x \neq 0\}$, como ilustra o diagrama abaixo:



(b) $\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\}$

Solução

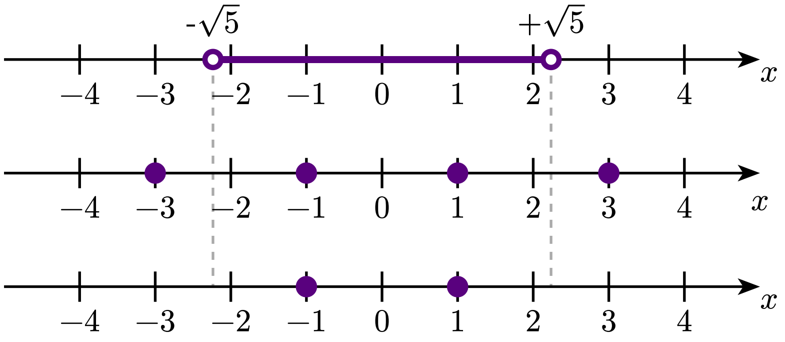
O primeiro conjunto é facilmente identificável: $x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. Quanto ao segundo conjunto, observemos que

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \ \text{ é um número par} &\Rightarrow x^2 - 1 = 2k \ \text{ para } \ k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x^2 = 2k + 1 \ \text{ para } \ k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x^2 \text{ é um número ímpar} \\ &\Rightarrow x \text{ é um número ímpar} \end{aligned}$$

Então,

$$\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\} = \{-1, 1\},$$

Portanto, $3 \notin \{-1, 1\}$, como ilustra o diagrama seguinte:



■

(c) O conjunto vazio.

Solução

$$3 \notin \emptyset$$

■

1. GEOMETRIA VETORIAL EM DUAS DIMENSÕES

2. LIMITES

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1. Seção de segundo nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1.1. Seção de terceiro nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

3. CÁLCULO DIFERENCIAL

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

4. CÁLCULO INTEGRAL

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

REFERÊNCIAS

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1