

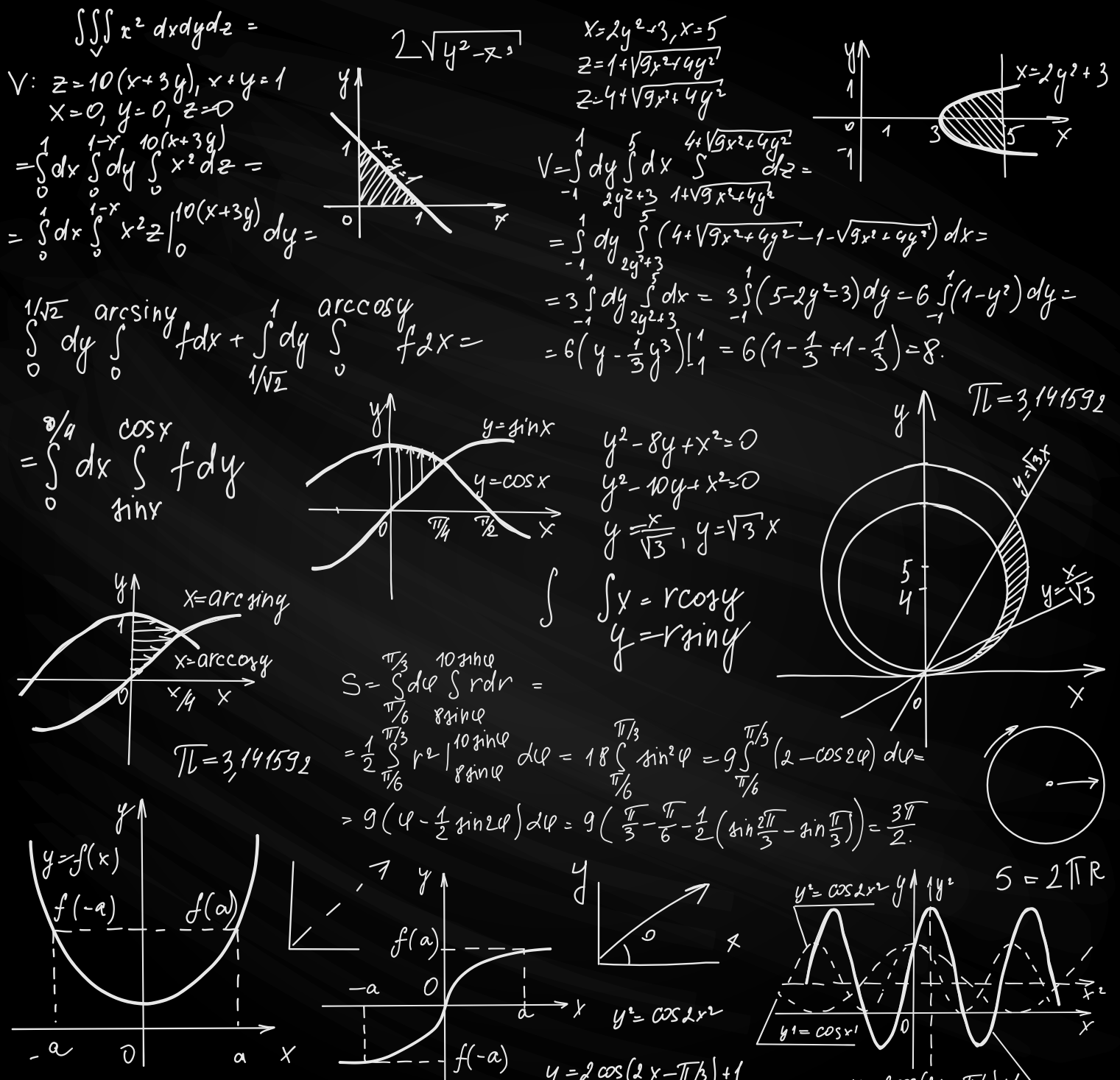
Igo da Costa Andrade

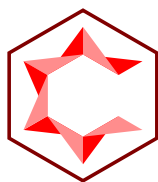
RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

# CÁLCULO DE ÁLGEBRA LINEAR VOLUME 1

DE

WILFRED KAPLAN & DONALD J. LEWIS





**Igo da Costa Andrade**

Resolução Comentada de Exercícios

---

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1

---



**SUMÁRIO**

**1. INTRODUÇÃO ..... 4**

1.1. Problemas da página 6 ..... 4

1.2. Problemas da página 9 ..... 10

**REFERÊNCIAS ..... 22**



## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. Problemas da página 6

1. (a) Encontre um inteiro  $x$  tal que  $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$ .

**Solução**

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow (10\sqrt{2})^2 < x^2 < (10\sqrt{3})^2 \Rightarrow 200 < x^2 < 300$$

$$\Rightarrow x^2 = \begin{cases} 225 \\ 256 \\ 289 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15 \\ 16 \\ 17 \end{cases}$$

(b) Encontre um número inteiro  $x$  tal que  $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$ .

**Solução**

$$-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \cdot (-1) \Rightarrow 5\sqrt{2} > -x > 3\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} < -x < 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (3\sqrt{3})^2 < (-x)^2 < (5\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 27 < (-x)^2 < 50$$

$$\Rightarrow (-x)^2 = \begin{cases} 36 \\ 49 \end{cases} \Rightarrow -x = \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -6 \\ -7 \end{cases}$$

(c) Encontre um número racional  $x$  tal que  $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ .

**Solução**

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

Podemos escolher arbitrariamente o número  $x^2 = 2,25$ , tal que:

$$x^2 = 2,25 = \frac{225}{100} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = 1,50$$



- (d) Encontre um número racional  $x$  tal que  $\pi < x < \pi + 0,01$ .

**Solução**

Com cinco casas decimais após a vírgula, temos  $\pi \approx 3,14159$ , donde  $\pi + 0,01 \approx 3,15159$ . Dado que nosso objetivo é encontrar um número racional que esteja entre esses dois valores, podemos escolher arbitrariamente o número

$$x = 3,142$$

■

2. Determine se  $x < y$ ,  $x = y$  ou  $x > y$  para cada um dos seguintes casos:

- (a)  $x = -3, y = 2$

**Solução**

$$x - y = -3 - 2 = -5 < 0 \Rightarrow x < y$$

■

- (b)  $x = 1, y = -2$

**Solução**

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

■

- (c)  $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}, y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

**Solução**

$$y - x = \sqrt{7} - \sqrt{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Note que  $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$  e  $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$ , então

$$y - x = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

■



(d)  $x = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}, y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

**Solução**

Sejam  $u = \frac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{11}$  e  $v = \frac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{13}$ . Façamos:

$$u - v = \sqrt{3} - \sqrt{11} - (\sqrt{3} - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \sqrt{11} - \sqrt{3} + \sqrt{13} = \sqrt{13} - \sqrt{11}$$

Note que

$$\sqrt{13} > \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{13} - \sqrt{11} > 0 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$$

■

3. Calcule:

(a)  $|-3, 5|$

**Solução**

$$|-3, 5| = -(-3, 5) = 3, 5, \text{ pois } -3, 5 < 0.$$

■

(b)  $|0, 2|$

**Solução**

$$|0, 2| = 0, 2, \text{ pois } 0, 2 > 0.$$

■

(c)  $||x||$

**Solução**

Dado que  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$||x|| = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

■



(d)  $|-|x||$

**Solução**

Dado que  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$-|x| \leq 0 \Rightarrow |-|x|| = -(-|x|) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



(e)  $|x - y| - |y - x|$

**Solução**

$$|x - y| - |y - x| = |x - y| - |-(x - y)| = |x - y| - |-1| \cdot |x - y| = |x - y| - 1 \cdot |x - y| = |x - y| - |x - y| = 0$$



4. Mostre que  $|a - b|$  pode ser interpretado como a distância entre  $a$  e  $b$  sobre o eixo dos números.

**Solução**

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & \text{se } a - b \geq 0 \\ -(a - b), & \text{se } a - b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a - b, & \text{se } a \geq b \\ b - a, & \text{se } a < b \end{cases}$$

A definição geométrica da distância entre dois pontos na reta real é dada pela diferença entre o maior e o menor, ou seja:

$$d(a, b) = \max(a, b) - \min(a, b).$$

Então, para cada caso:

- Se  $a \geq b$ ,  $d(a, b) = \max(a, b) - \min(a, b) = a - b = |a - b|$ ;
- Se  $a < b$ ,  $d(a, b) = \max(a, b) - \min(a, b) = b - a = |a - b|$ .

Em ambos os casos,  $d(a, b) = |a - b|$ .



5. Achar  $x$  em cada um dos casos:

(a)  $|x| = 0$

**Solução**





$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

■

(b)  $|x| = 2$

Solução

$$|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

■

(c)  $|x - 1| = 2$

Solução

$$|x - 1| = 2 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

■

(d)  $|x + 1| = 1$

Solução

$$|x + 1| = 1 \Rightarrow x + 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 \\ x + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

■

6. O símbolo  $\sqrt{x}$  indica 0 se  $x = 0$  e a raiz quadrada positiva de  $x$ , se  $x > 0$ . Justifique as seguintes regras para todos reais  $x$  e  $y$ .

(a)  $\sqrt{x^2} = |x|$

Solução

Para  $x = 0$ , a identidade é imediata. Se  $x > 0$   $\sqrt{x^2} = x = |x|$  e se  $x < 0$ ,  $\sqrt{x^2} = -x = |x|$ . Em todo caso,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

■



(b)  $\sqrt{x^4} = x^2$

**Solução**

$$\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$$

(c)  $(x|x|)^2 = x^4$

**Solução**

$$(x|x|)^2 = x^2 \cdot (|x|)^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

(d)  $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$

**Solução**

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

7. Mostre que as regras 20 e 21 são válidas para todos os números reais  $a$  e  $b$ .

**Solução**

• Regra 20:  $|a| = |-a|$

- Para  $a = 0$ , a identidade é imediatamente válida;
- Para  $a > 0$ , temos:  $|a| = a$  e  $|-a| = -(-a) = a = |a|$ ;
- Para  $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ , temos:  $|a| = -a$  e  $|-a| = -a = |a|$ .

Portanto, a regra 20 é verdadeira para todo número real.

• Regra 21:  $|ab| = |a| |b|$

- Para  $a = b = 0$ , a identidade é imediatamente válida;
- Caso 1:  $a$  e  $b$  têm mesmo sinal.

Quando ambos os números são positivos, ou seja,  $a > 0$  e  $b > 0$ , temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a| |b|$$



Quando ambos os números são negativos, ou seja,  $a < 0$  e  $b < 0$ , temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$$

- Caso 2:  $a$  e  $b$  têm sinais distintos. Sem perda de generalidade, consideremos:  $a > 0$  e  $b < 0$ . O produto entre os números é negativo. Então,

$$ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|.$$

■

8. (a)  $a < b$  implica  $a^2 < b^2$ ?

**Solução**

Não, basta considerar o contra-exemplo  $a = -2$  e  $b = -1$ , tal que  $a < b$ , mas  $a^2 > b^2$ .

■

(b)  $a < b$  implica  $a^3 < b^3$ ?

**Solução**

■

## 1.2. Problemas da página 9

1. Seja  $\mathbb{N}$  o conjunto de todos os inteiros positivos. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é finito e exiba seus elementos.

(a)  $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\}$

**Solução**

$$\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

■

(b)  $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\}$

**Solução**

$$11 < x^3 < 134 \Rightarrow 3^3 \leq x^3 \leq 5^3$$

$$\Rightarrow \{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\} = \{3, 4, 5\}$$



(c)  $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x^2 + x - 1 < 50\}$

**Solução**

$$\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x^2 + x - 1 < 50\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(d)  $\{x \mid |x| < \sqrt{2} \text{ e } x \text{ ou } -x \text{ está em } \mathbb{N}\}.$

**Solução**

$$\{x \mid |x| < \sqrt{2} \text{ e } x \text{ ou } -x \text{ está em } \mathbb{N}\} = \{-1, 0, 1\}$$

2. Determine se 3 pertence aos seguintes conjuntos:

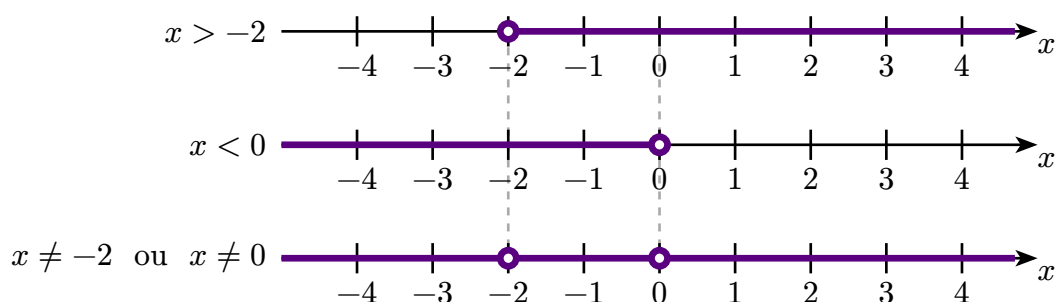
(a)  $\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\}$

**Solução**

Note que:

$$\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\} = \{x \mid x \neq -2 \text{ ou } x \neq 0\}.$$

Portanto,  $3 \in \{x \mid x \neq -2 \text{ ou } x \neq 0\}$ , como ilustra o diagrama abaixo:



(b)  $\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\}$

**Solução**



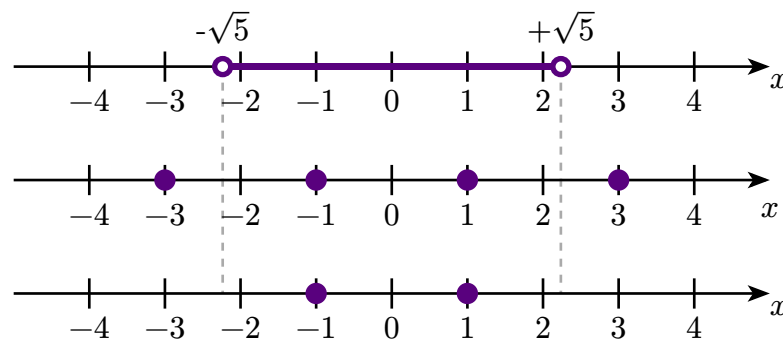
O primeiro conjunto é facilmente identificável:  $x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ . Quanto ao segundo conjunto, observemos que

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \text{ é um número par} &\Rightarrow x^2 - 1 = 2k \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x^2 = 2k + 1 \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x^2 \text{ é um número ímpar} \\ &\Rightarrow x \text{ é um número ímpar} \end{aligned}$$

Então,

$$\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\} = \{-1, 1\},$$

Portanto,  $3 \notin \{-1, 1\}$ , como ilustra o diagrama seguinte:



■

(c) O conjunto vazio.

**Solução**

$$3 \notin \emptyset$$

■

3. Descreva todos os subconjuntos de cada um dos conjuntos:

(a) O conjunto consistindo de 0 e 1.

**Solução**



Seja  $A = \{0, 1\}$ . Sabendo que  $A$  possui  $n = 2$  elementos, devemos ter  $2^n = 2^2 = 4$  subconjuntos, quais sejam:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}.$$



(b) O conjunto consistindo de uma caneta, um lápis e uma borracha.

**Solução**

Seja  $B = \{\text{caneta}, \text{lápis}, \text{borracha}\}$  um conjunto de  $n = 3$  elementos. Temos  $2^n = 2^3 = 8$  subconjuntos, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} &\emptyset, \\ &\{\text{caneta}\}, \{\text{lápis}\}, \{\text{borracha}\}, \\ &\{\text{caneta}, \text{lápis}\}, \{\text{caneta}, \text{borracha}\}, \{\text{lápis}, \text{borracha}\}, \\ &\{\text{caneta}, \text{lápis}, \text{borracha}\} \end{aligned}$$



(c) O conjunto consistindo de todos os pares  $(x, y)$ , onde  $x = 0$  ou  $1$  e  $y = 0$  ou  $1$ .

**Solução**

Seja o conjunto

$$C = \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\} \text{ e } y \in \{0, 1\}\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Como o conjunto  $C$  possui  $n = 4$  elementos, terá  $2^n = 2^4 = 16$  subconjuntos, quais sejam:

$$\begin{aligned} &\emptyset, \\ &\{(0, 0)\}, \{(0, 1)\}, \{(1, 0)\}, \{(1, 1)\}, \\ &\{(0, 0), (0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \\ &\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \\ &\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}. \end{aligned}$$



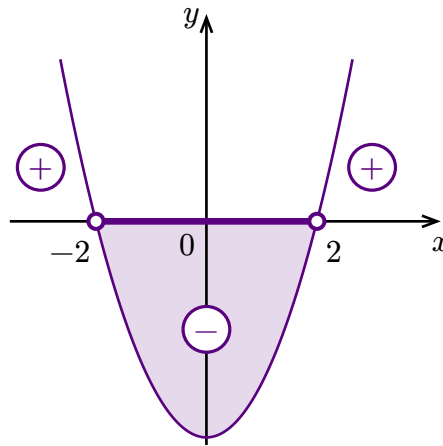
4. Para cada uma das seguintes desigualdades descreva o conjunto de números reais  $x$  para os quais a desigualdade é válida:

(a)  $x^2 < 4$



**Solução**

$$x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$$



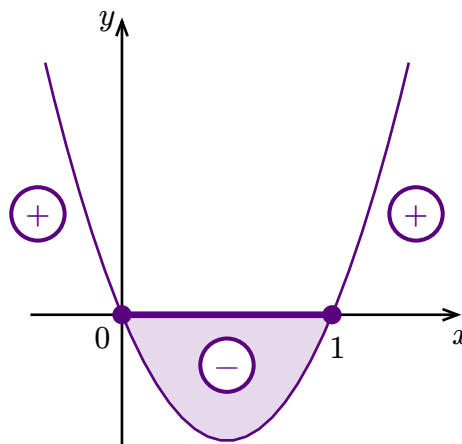
(b)  $x(x - 1) \leq 0$

**Solução**

Inicialmente, determinemos os zeros de  $f(x) = x(x - 1)$ :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Note que a função  $f(x) = x(x - 1)$  é uma parábola cujo coeficiente do termo  $x^2$  é  $a = 1 < 0$ . Ou seja, uma parábola cujo vértice é um ponto de mínimo, como ilustra o esboço abaixo:



Portanto,

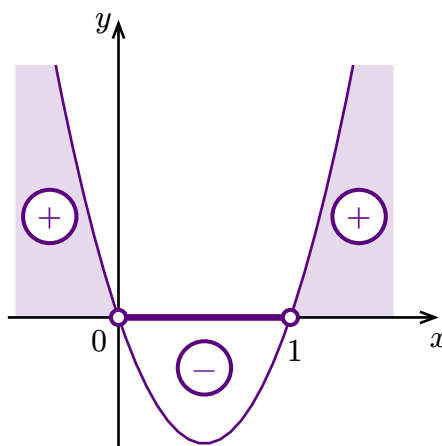
$$x(x - 1) \leq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$



(c)  $x(x - 1) > 0$

**Solução**

Note que o lado esquerdo da desigualdade acima é idêntico ao da expressão do item (b). Conforme análise gráfica do sinal da função  $f(x) = x(x - 1)$ ,



Portanto,

$$x(x - 1) > 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

(d)  $(x - 1)(x - 2) < 0$

**Solução**

Consideremos a função  $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ . Iniciamos determinando os zeros de  $f(x)$ :

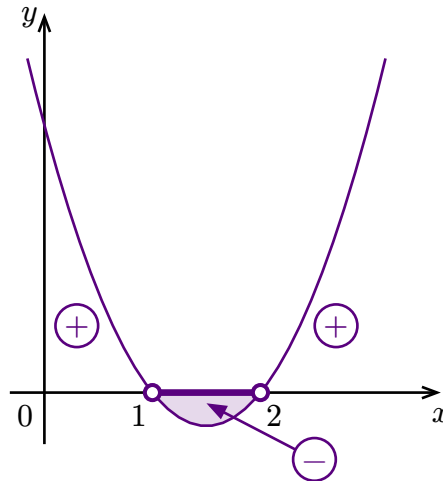
$$f(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \text{ ou} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou} \\ x = 2 \end{cases}$$

Reescrevendo  $f(x)$  como  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , temos que o coeficiente do termo  $x^2$  é igual a  $1 > 0$ , ou seja, o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para cima.

O seguinte esboço do gráfico de  $f(x)$  mostra o estudo do sinal da função:







Portanto,

$$(x - 1)(x - 2) < 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}.$$

■

(e)  $x^2 + x + 1 > 0$

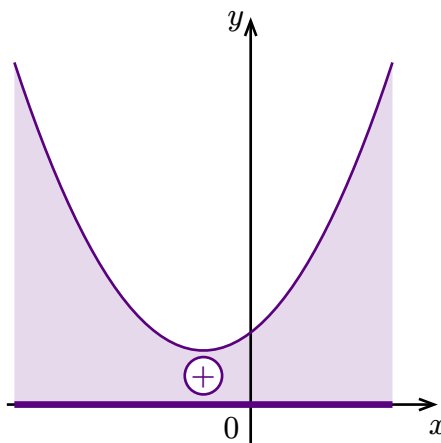
**Solução**

Façamos o estudo do sinal da função  $f(x) = x^2 + x + 1$ . Inicialmente, determinemos as raízes ou zeros de  $f(x)$ . Sejam  $a = 1$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$  respectivamente os coeficientes dos termos  $x^2$ ,  $x$  e termo independente do polinômio de segundo grau. Então, as raízes de  $f(x)$  são

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

Note que não existem raízes reais. Logo, a parábola não toca o eixo horizontal (eixo  $x$ ) em nenhum ponto. Para completar a análise, observemos que o coeficiente  $a = 1$  é positivo. Isso significa que a parábola possui ponto de mínimo e concavidade voltada para cima. O esboço seguinte ilustra o estudo do sinal de  $f(x)$ :





Portanto,  $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

(f)  $\frac{x}{x-1} \geq 0$

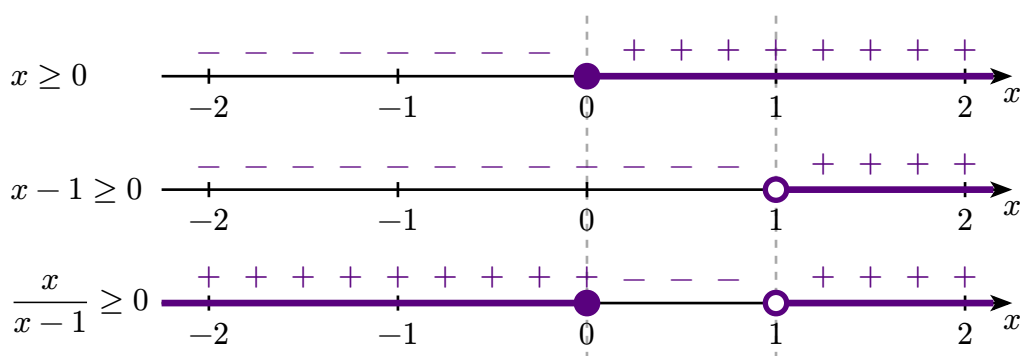
**Solução**

Trata-se de uma inequação racional da forma  $p(x)/q(x)$  em que  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinômios e  $q(x) \neq 0$ . Para resolvê-la, seguimos o procedimento:

- Determinação dos pontos críticos de  $p(x)$  e  $q(x)$ :

$$\begin{cases} p(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ q(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

- Análise de sinais:



Portanto,

$$\frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$$



(g)  $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1} \geq 0$

**Solução**

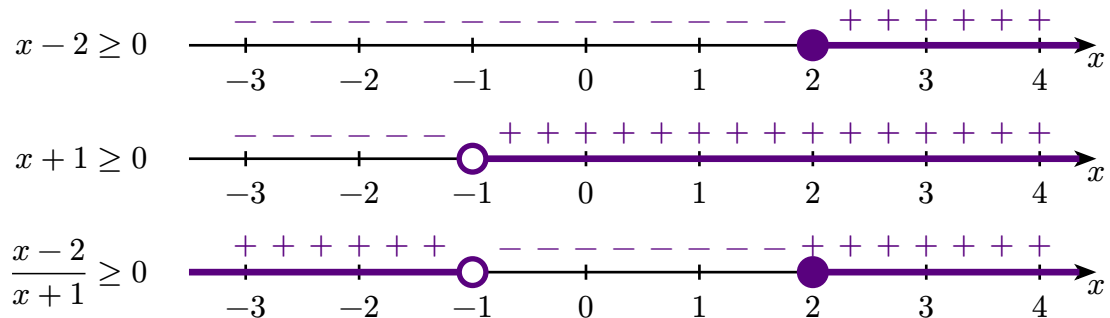
Organizando a inequação acima, temos:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 0$$

- Determinnemos os pontos críticos de  $p(x) = x - 2$  e  $q(x) = x + 1$ :

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

- Análise de sinais:



Portanto,

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

■

(h)  $\frac{1}{x} < -1$

**Solução**

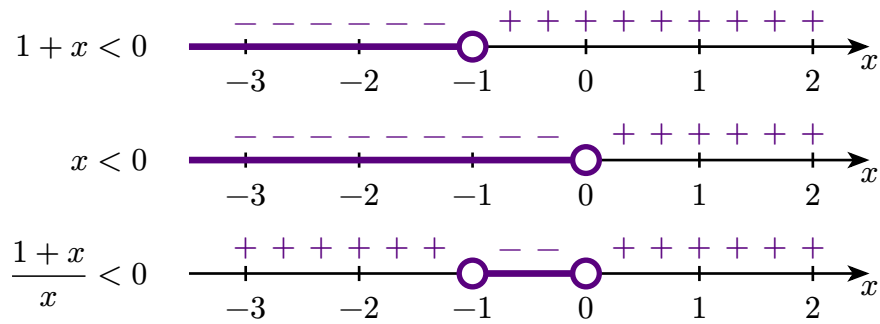
$$\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} < 0$$

- Pontos críticos:

$$\begin{cases} 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

- Análise de sinais





Portanto,

$$\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$$



5. Classifique cada um dos seguintes intervalos em função dos tipos mostrados na Fig. 0-5.

- (a)  $-1 \leq x \leq 1$
- (b)  $-2 < x$
- (c)  $3 < x < 100$
- (d)  $x \geq 0$
- (e)  $x < 0$

**Solução**

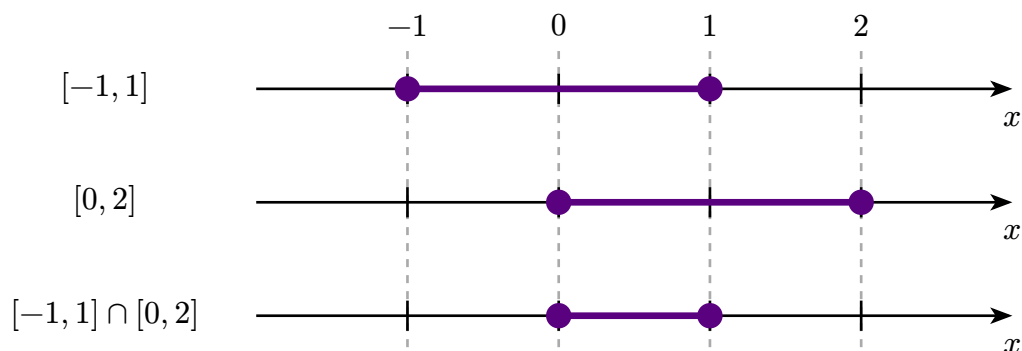
Intervalo	Classificação
$-1 \leq x \leq 1$	intervalo fechado
$-2 < x$	intervalo infinito
$3 < x < 100$	intervalo aberto
$x \geq 0$	intervalo infinito
$x < 0$	intervalo infinito



6. Encontre a intersecção de cada uma dos seguintes pares de intervalos e classifique:

(a)  $[-1, 1]$  e  $[0, 2]$

Solução

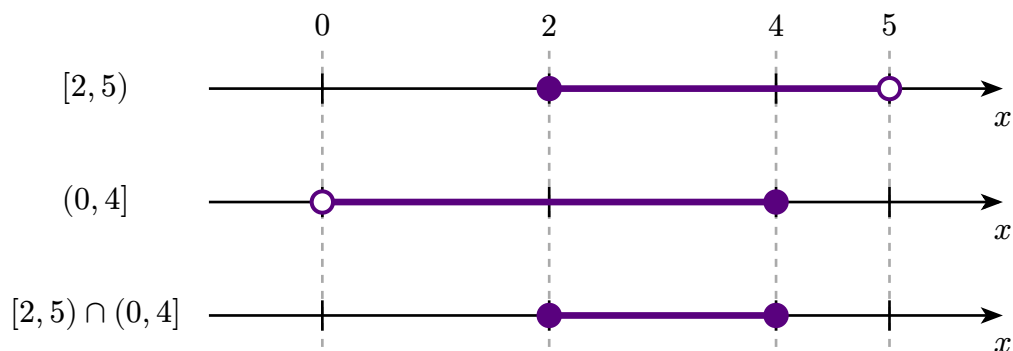


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo fechado**:  $[0, 1]$ .



(b)  $[2, 5)$  e  $(0, 4]$

Solução

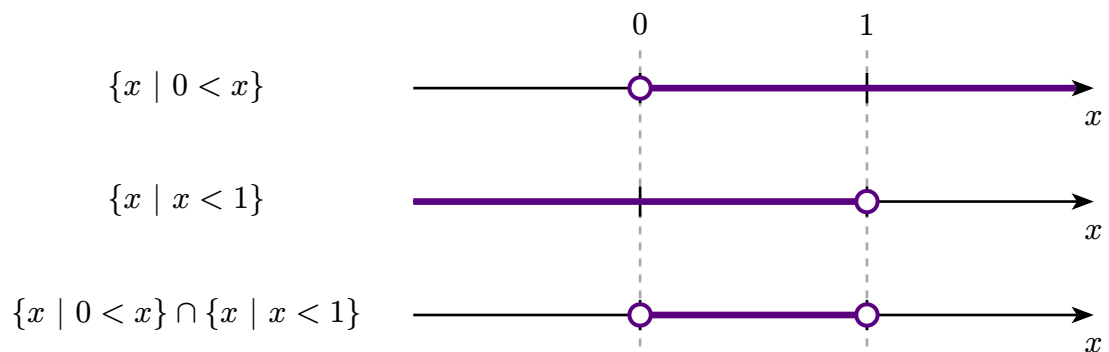


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo fechado**:  $[2, 4]$ .



(c)  $0 < x$  e  $x < 1$

**Solução**

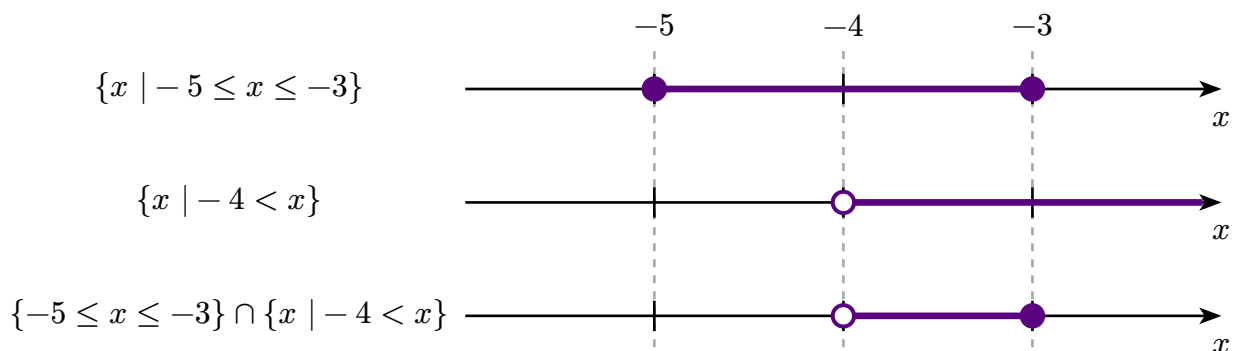


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo aberto**:  $(0, 1)$  ou ainda  $\{x \mid 0 < x < 1\}$ .



(d)  $-5 \leq x \leq -3$  e  $-4 < x$

**Solução**

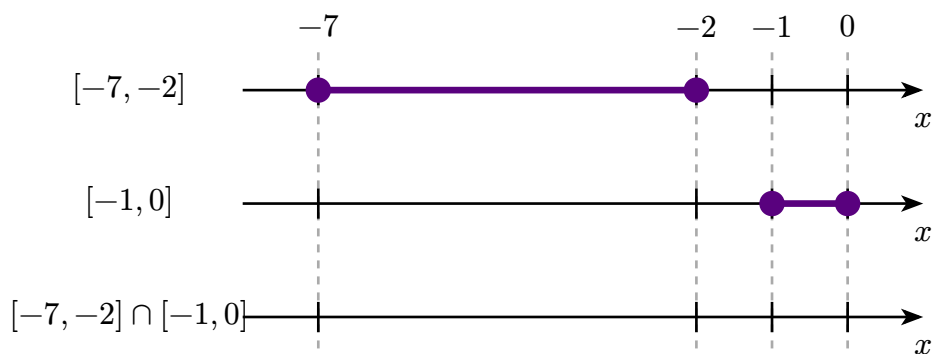


Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo semi-aberto**:  $(-4, 3]$  ou ainda  $\{x \mid -4 < x \leq -3\}$ .



(e)  $[-7, -2]$  e  $[-1, 0]$

Solução



Como mostra a figura acima, trata-se do **intervalo vazio**:  $\emptyset$ .



## REFERÊNCIAS

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1

