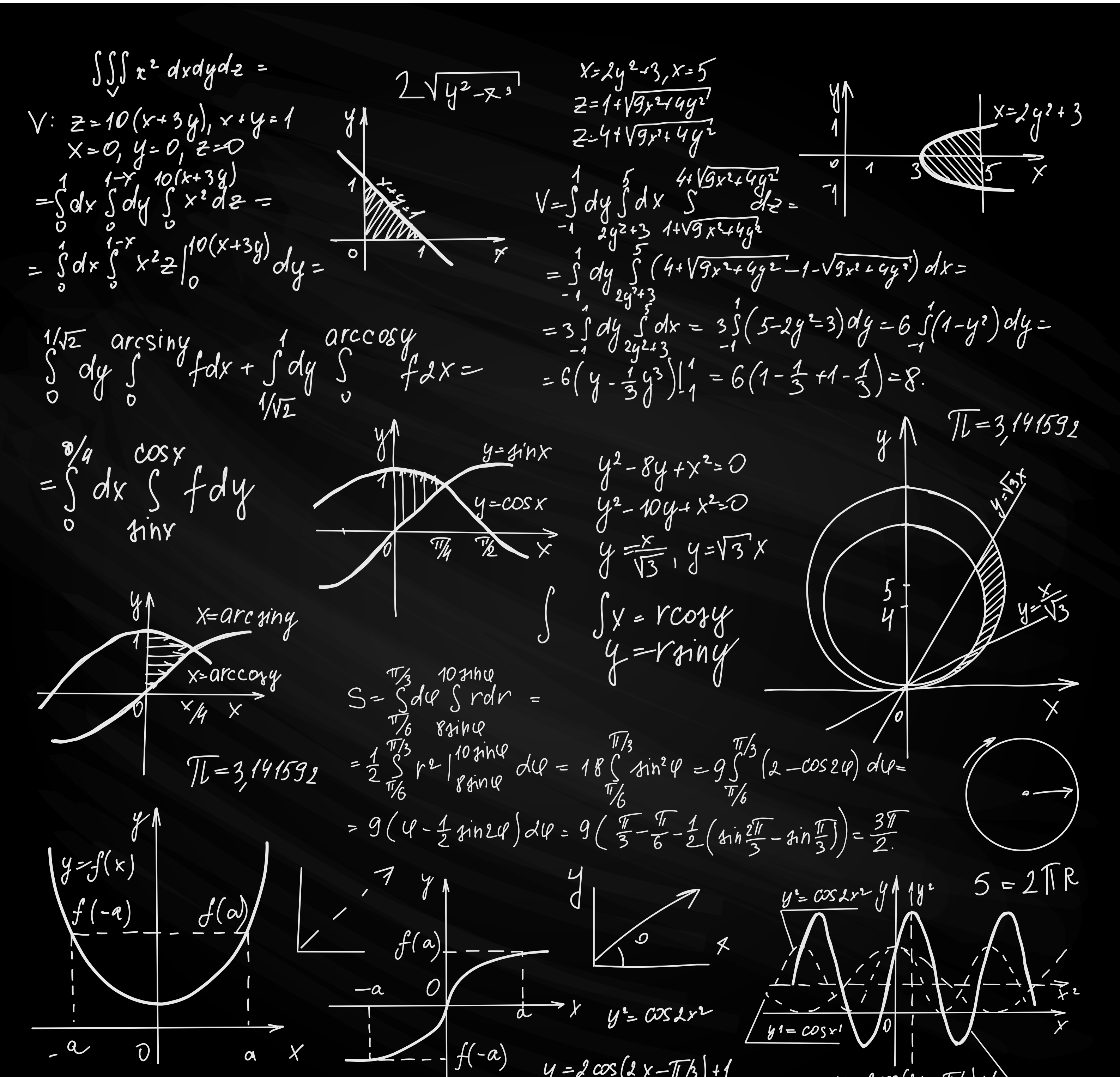
Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

CÁLCULO DE ÁLGEBRA LINEAR VOLUME 1

DE

WILFRED KAPLAN & DONALD J. LEWIS



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1. Problemas da página 6

1. (a) Encontre um inteiro x tal que $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$.

Solução

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow \left(10\sqrt{2}\right)^2 < x^2 < \left(10\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 200 < x^2 < 300$$
$$\Rightarrow x^2 = \begin{cases} 225 \\ 256 \\ 289 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15 \\ 16 \\ 17 \end{cases}$$

■

(b) Encontre um número inteiro x tal que $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$.

Solução

$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \cdot (-1) \Rightarrow 5\sqrt{2} > -x > 3\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} < -x < 5\sqrt{2} \\ \Rightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^2 < (-x)^2 < \left(5\sqrt{2}\right)^2 \\ \Rightarrow 27 < (-x)^2 < 50 \\ \Rightarrow (-x)^2 = \begin{cases} 36 \\ 49 \end{cases} \Rightarrow -x = \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -6 \\ -7 \end{cases} \end{aligned}$$

■

(c) Encontre um número racional x tal que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

Solução

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 < x^2 < \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

Podemos escolher arbitrariamente o número $x^2 = 2,25$, tal que:

$$x^2 = 2,25 = \frac{225}{100} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{15}{10} = 1,50$$

■

(d) Encontre um número racional x tal que $\pi < x < \pi + 0,01$.

Solução

Com cinco cadas decimais após a vírgula, temos $\pi \approx 3,14159$, donde $\pi + 0,01 \approx 3,15159$. Dado que nosso objetivo é encontrar um número racional que esteja entre esses dois valores, podemos escolher arbitrariamente o número

$$x = 3,142$$

■

2. Determine se $x < y$, $x = y$ ou $x > y$ para cada um dos seguintes casos:

(a) $x = -3, y = 2$

Solução

$$x - y = -3 - 2 = -5 < 0 \Rightarrow x < y$$

■

(b) $x = 1, y = -2$

Solução

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

■

(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}, y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

Solução

$$y - x = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

Note que $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, então

$$y - x = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

■

(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}$

Solução

Sejam $u = \dfrac{1}{x} = \sqrt{3}-\sqrt{11}$ e $v = \dfrac{1}{y} = \sqrt{3}-\sqrt{13}$. Façamos:

$$u - v = \sqrt{3}-\sqrt{11}-\left(\sqrt{3}-\sqrt{13}\right) = \sqrt{3}-\sqrt{11}-\sqrt{3}+\sqrt{13} = \sqrt{13}-\sqrt{11}$$

Note que

$$\sqrt{13} > \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{13}-\sqrt{11} > 0 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y$$

■

3. Calcule:

(a) $|-3,5|$

Solução

$|-3,5| = -(-3,5) = 3,5$, pois $-3,5 < 0$.

■

(b) $|0,2|$

Solução

$|0,2| = 0,2$, pois $0,2 > 0$.

■

(c) $|\ |x|\ |$

Solução

Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$|\ |x|\ | = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } & x \geq 0 \\ -x, \text{ se } & x < 0 \end{cases}$$

■

(d) $|-|x||$

Solução

Dado que $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$-|x| \leq 0 \Rightarrow |-|x|| = -(-|x|) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } & x \geq 0 \\ -x, \text{ se } & x < 0 \end{cases}$$

■

(e) $|x-y| - |y-x|$

Solução

$$|x-y| - |y-x| = |x-y| - |-(x-y)| = |x-y| - |-1| \cdot |x-y|, = |x-y| - 1 \cdot |x-y| = |x-y| - |x-y| =$$

■

4. Mostre que $|a-b|$ pode ser interpretado como a distância entre a e b sobre o eixo dos números.

Solução

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & , \text{ se } \ a-b \geq 0 \\ -(a-b) & , \text{ se } \ a-b < 0 \end{cases} = \begin{cases} a-b \ , \text{ se } & a \geq b \\ b-a \ , \text{ se } & a < b \end{cases}$$

A definição geométrica da distância entre dois pontos na reta real é dada pela diferença entre o maior e o menor, ou seja:

$$d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b).$$

Então, para cada caso:

- Se $a \geq b$, $d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b) = a-b = |a-b|$;
- Se $a < b$, $d(a,b) = \max(a,b) = \min(a,b) = b-a = |a-b|$.

Em ambos os casos, $d(a,b) = |a-b|$.

■

5. Achar x em cada um dos casos:

(a) $|x| = 0$

Solução

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

■

(b) $|x| = 2$

Solução

$$|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

■

(c) $|x-1| = 2$

Solução

$$|x-1| = 2 \Rightarrow x-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = & 2 \\ x-1 = & -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 3 \\ x = & -1 \end{cases}$$

■

(d) $|x+1| = 1$

Solução

$$|x+1| = 1 \Rightarrow x+1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = & 1 \\ x+1 = & -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 0 \\ x = & -2 \end{cases}$$

■

6. O símbolo $\sqrt{x}$ indica 0 se $x = 0$ e a raiz quadrada positiva de x, se $x > 0$. Justifique as seguintes regras para todos reais x e y.

(a) $\sqrt{x^2} = |x|$

Solução

Para $x = 0$, a identidade é imediata. Se $x > 0$ $\sqrt{x^2} = x = |x|$ e se $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x = |x|$. Em todo caso,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

■

(b) $\sqrt{x^4} = x^2$

Solução

$$\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$$

■

(c) $(x|x|)^2 = x^4$

Solução

$$(x|x|)^2 = x^2 \cdot (|x|)^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

■

(d) $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$

Solução

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$$

■

7. Mostre que as regras 20 e 21 são válidas para todos os números reais a e b.

Solução

- Regra 20: $|a| = |-a|$
  - Para $a = 0$, a identidade é imediatamente válida;
  - Para $a > 0$, temos: $|a| = a$ e $|-a| = -(-a) = a = |a|$;
  - Para $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, temos: $|a| = -a$ e $|-a| = -a = |a|$.

  Portanto, a regra 20 é verdadeira para todo número real.
- Regra 21: $|ab| = |a|\ |b|$
  - Para $a = b = 0$, a identidade é imediatamente válida;
  - Caso 1: a e b têm mesmo sinal.

    Quando ambos os números são positivos, ou seja, $a > 0$ e $b > 0$, temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a|\ |b|$$

Quando ambos os número são negativos, ou seja, $a < 0$ e $b < 0$, temos:

$$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$$

- Caso 2: a e b têm sinais distintos. Sem perda de generalidade, consideremos: $a > 0$ e $b < 0$. O produto entre os números é negativos. Então,

$$ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a(-b) = |a|\ |b|.$$

■

8. (a) $a < b$ implica $a^2 < b^2$?

Solução

Não, basta considerar o contra-exemplo $a = -2$ e $b = -1$, tal que $a < b$, mas $a^2 > b^2$.

■

(b) $a < b$ implica $a^3 < b^3$?

Solução

■

1.2. Problemas da página 9

1. Seja $\mathbb{N}$ o conjuto de todos os inteiros positivos. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é finito e exiba seus elementos.

(a) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\}$

Solução

$$\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

■

(b) $\{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\}$

Solução

$$\begin{aligned} 11 < x^3 < 134 &\Rightarrow 3^3 \leq x^3 \leq 5^3 \\ &\Rightarrow \{x \mid x \text{ está em } \mathbb{N} \text{ e } 11 < x^3 < 134\} = \{3, 4, 5\} \end{aligned}$$

(c) $\{x \mid x \ \text{ está em } \ \mathbb{N} \ \text{ e } \ x^2 + x - 1 < 50\}$

Solução

$$\{x \mid x \ \text{ está em } \ \mathbb{N} \ \text{ e } \ x^2 + x - 1 < 50\} = \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$$

(d) $\left\{x \mid |x| < \sqrt{2} \ \text{ e } \ x \ \text{ ou } \ -x \ \text{ está em } \ \mathbb{N}\right\}$.

Solução

$$\left\{x \mid |x| < \sqrt{2} \ \text{ e } \ x \ \text{ ou } \ -x \ \text{ está em } \ \mathbb{N}\right\} = \{-1,\, 0,\, 1\}$$

2. Determine se 3 pertence aos seguintes conjuntos:

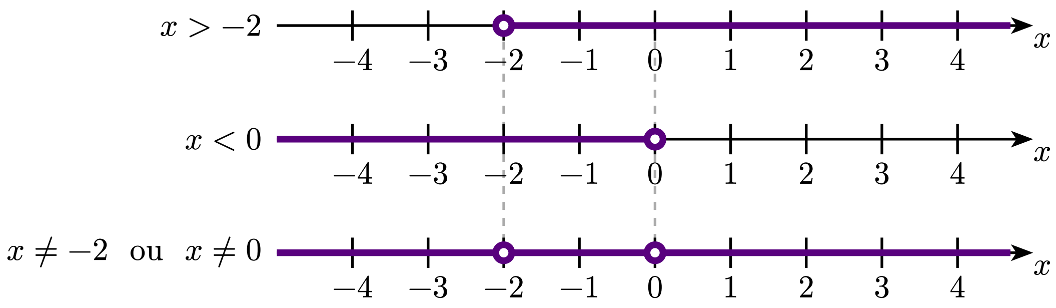
(a) $\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\}$

Solução

Note que:

$$\{x \mid x > -2\} \cup \{x \mid x < 0\} = \{x \mid x \neq -2 \ \text{ ou } \ x \neq 0\}.$$

Portanto, $3 \in \{x \mid x \neq -2 \ \text{ ou } \ x \neq 0\}$, como ilustra o diagrama abaixo:



(b) $\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\}$

Solução

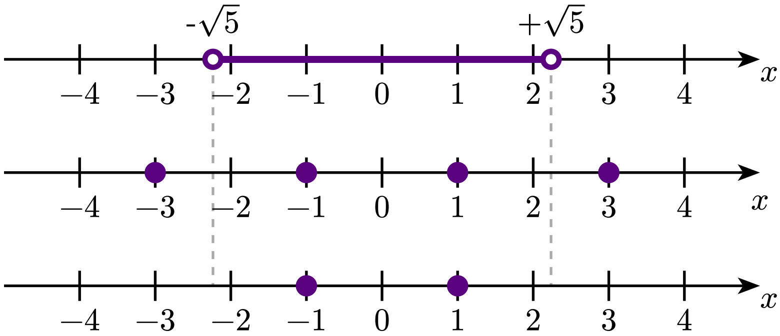
O primeiro conjunto é facilmente identificável: $x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. Quanto ao segundo conjunto, observemos que

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \;\; \text{é um número par} &\Rightarrow x^2 - 1 = 2k \;\; \text{para} \;\; k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x^2 = 2k + 1 \;\; \text{para} \;\; k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x^2 \text{ é um número ímpar} \\ &\Rightarrow x \text{ é um número ímpar} \end{aligned}$$

Então,

$$\{x \mid x^2 < 5\} \cap \{x^2 - 1 \text{ é um número par}\} = \{-1, 1\},$$

Portanto, $3 \notin \{-1, 1\}$, como ilustra o diagrama seguinte:



■

(c) O conjunto vazio.

Solução

$$3 \notin \emptyset$$

■

3. Descreva todos os subconjuntos de cada um dos conjuntos:

(a) O conjunto consistindo de 0 e 1.

Solução

Seja $A = \{0, 1\}$. Sabendo que A possui $n = 2$ elementos, devemos ter $2^n = 2^2 = 4$ subconjuntos, quais sejam:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}.$$

■

(b) O conjunto consistindo de uma caneta, um lápis e uma borracha.

Solução

Seja $B = \{\text{caneta}, \text{lápis}, \text{borracha}\}$ um conjunto de $n = 3$ elementos. Temos $2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos, como mostrado abaixo:

$$\begin{gathered}\emptyset,\\ \{\text{caneta}\}, \{\text{lápis}\}, \{\text{borracha}\},\\ \{\text{caneta}, \text{lápis}\}, \{\text{caneta}, \text{borracha}\}, \{\text{lápis}, \text{borracha}\},\\ \{\text{caneta}, \text{lápis}, \text{borracha}\}\end{gathered}$$

■

(c) O conjunto consistindo de todos os pares (x, y), onde $x = 0$ ou 1 e $y = 0$ ou 1.

Solução

Seja o conjunto

$$C = \{(x, y) \mid x \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad y \in \{0, 1\}\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Como o cojunto C possui $n = 4$ elementos, terá $2^n = 2^4 = 16$ subconjuntos, quais sejam:

$$\begin{gathered}\emptyset,\\ \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\},\\ \{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \{(1,0),(1,1)\},\\ \{(0,0),(0,1),(1,0)\}, \{(0,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0),(1,1)\},\\ \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.\end{gathered}$$

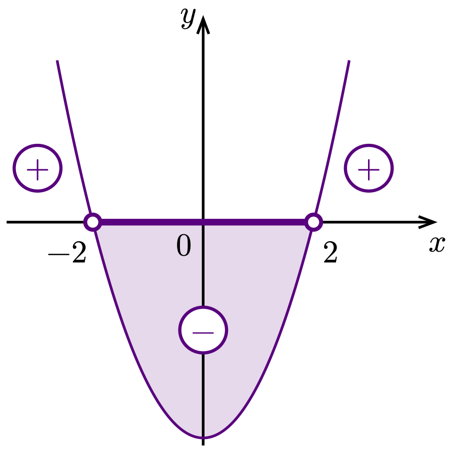
■

4. Para cada uma das seguintes desigualdades descreva o conjunto de números reais x para os quais a desigualdade é válida:

(a) $x^2 < 4$

Solução

$$x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$$



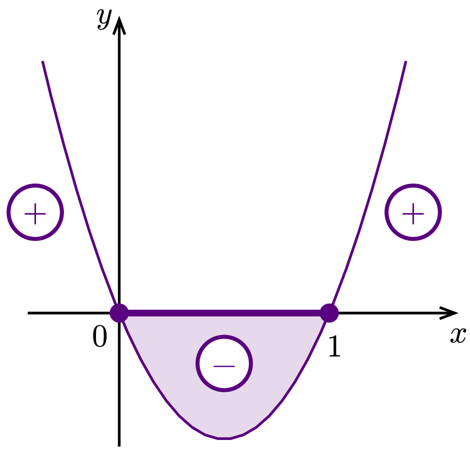
(b) $x(x-1) \leq 0$

Solução

Inicialmente, determinemos os zeros de $f(x) = x(x-1)$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Note que a função $f(x) = x(x-1)$ é uma parábola cujo coeficiente do termo x^2 é $a = 1 < 0$. Ou seja, uma parábola cujo vértice é um ponto de mínimo, como ilustra o esboço abaixo:



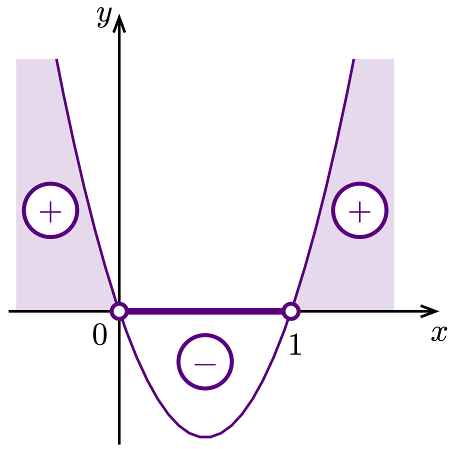
Portanto,

$$x(x-1) \leq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

(c) $x(x-1) > 0$

Solução

Note que o lado esquerdo da desigualdade acima é idêntico ao da expressão do item (b). Conforme análise gráfica do sinal da função $f(x) = x(x-1)$,



Portanto,

$$x(x-1) > 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

■

(d) $(x-1)(x-2) < 0$

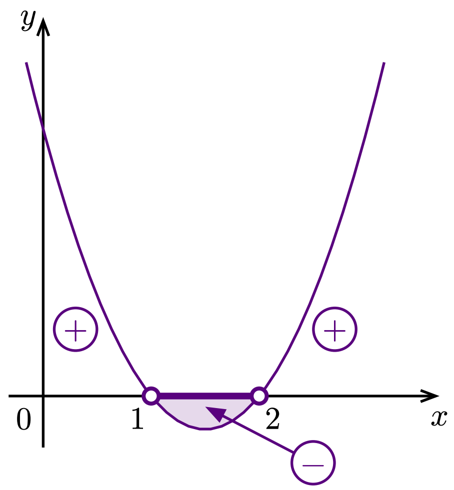
Solução

consideremos a função $f(x) = (x-1)(x-2)$. Iniciamos determinando os zeros de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \text{ ou} \\ x-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou} \\ x = 2 \end{cases}$$

Reescrevendo $f(x)$ como $f(x) = x^2 - 3x + 2$, temos que o coeficiente do termo x^2 é igual a $1 < 0$, ou seja, o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para cima.

O seguinte esboço do gráfico de $f(x)$ mostra o estudo do sinal da função:



Portanto,

$$(x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}.$$

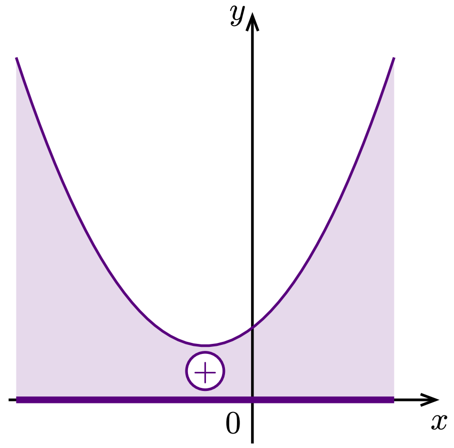
(e) $x^2 + x + 1 > 0$

Solução

Façamos o estudo do sinal da função $f(x) = x^2 + x + 1$. Inicialmente, determinemos as raízes ou zeros de $f(x)$. Sejam $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$ respectivamente os coeficientes dos termos x^2, x e termo independente do polinômio de segundo grau. Então, as raízes de $f(x)$ são

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ \Rightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

Note que não existem raízes reais. Logo, a parábola não toca o eixo horizontal (eixo x) em nenhum ponto. Para completar a análise, observemos que o coeficiente $a = 1$ é negatico. Isso significa que a parábola possui ponto de mínimo e concavidade voltada para cima. O esboço seguinte ilustra o estudo do sinal de $f(x)$:



Portanto, $x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

■

(f) $\dfrac{x}{x-1} \geq 0$

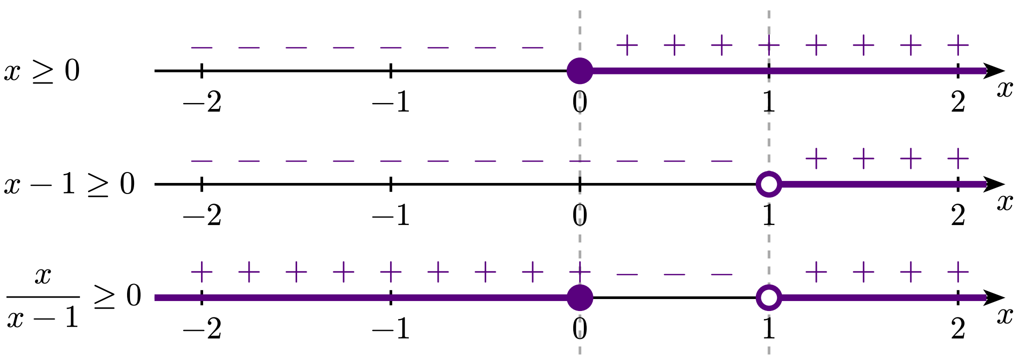
Solução

Trata-se de uma inequação racional da forma $p(x)/q(x)$ em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$. Para resolvê-la, seguimos o procedimento:

- Determinação dos pontos críticos de $p(x)$ e $q(x)$:

$$\begin{cases} p(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ q(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

- Análise de sinais:



Portanto,

$$\frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \quad \text{ou} \quad x > 1\}$$

■

(g) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{x+1} \geq 0$

Solução

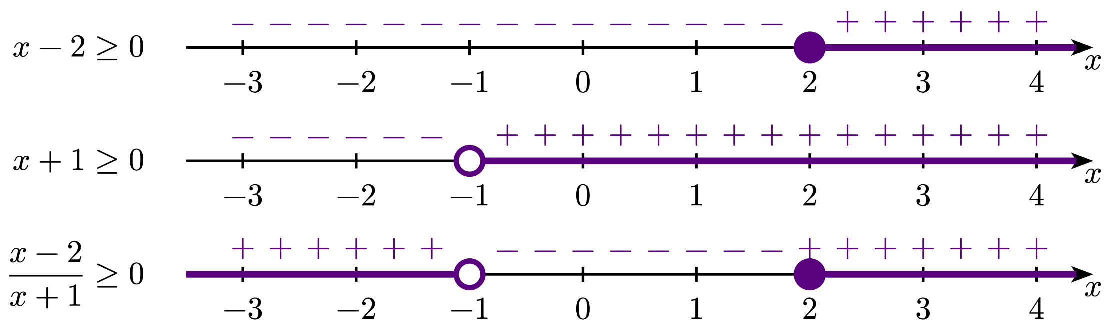
Organizando a inequação acima, temos:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 0$$

- Determinnemos os pontos críticos de $p(x) = x - 2$ e $q(x) = x + 1$:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

- Análise de sinais:



Portanto,

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 2\}$$

■

(h) $\frac{1}{x} < -1$

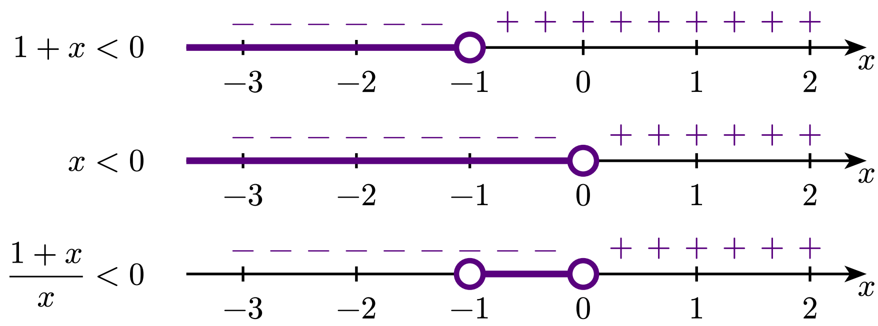
Solução

$$\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} < 0$$

- Pontos críticos:

$$\begin{cases} 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

- Análise de sinais



Portanto,

$$\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x+1}\geq 0 \Rightarrow \{x\in\mathbb{R}\mid x<-1 \quad \text{ou} \quad x\geq 2\}$$

■

1. GEOMETRIA VETORIAL EM DUAS DIMENSÕES

1.1. Teste

2. LIMITES

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1. Seção de segundo nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1.1. Seção de terceiro nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

3. CÁLCULO DIFERENCIAL

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

4. CÁLCULO INTEGRAL

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

REFERÊNCIAS

KAPLAN, D. J., W.; Lewis. **Cálculo e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: LTC, 1972. v. 1