Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 02

1. **Definição de limite.** Defina o que significa $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Solução:

Dado um ponto x pertencente ao intervalo aberto (b, c), com $b < a < c$, dizemos que a função $f(x)$ **tende** ao valor L quando x **se aproxima** de a se, ao tomarmos valores de x cada vez mais próximos de a (mas distintos de a), os valores de $f(x)$ aproximam-se tanto quanto desejarmos de L.

Em outras palavras, o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L, o que representamos por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Essa notação expressa que o comportamento de $f(x)$ nas vizinhanças de a é bem definido, independentemente do valor de $f(a)$ ou mesmo da função estar definida em a.

2. **Investigação numérica.** Considere a função $f(x) = 2x^2 = 3x + 1$ e complete a tabela abaixo usando uma calculadora. Com base nos valores obtidos, qual é a sua estimativa para $\lim_{x \to 2} f(x)$?

Solução:

Utilizando uma calculadora para deverminar o valor de $f(x)$ em cada um dos pontos dados na tabela abaixo, observamos que há uma tendência quando x se aproxima de 2.

x	1,999	1,99	1,9	2,1	2,01	2,001
$f(x)$	2,9950	2,9502	2,5200	3,5200	3,0502	3,0050

Coforme se observa na tabela acima, a medida que x se aproxima de 2, tanto à direita quanto à esquerda, o valor de $f(x)$ *tende* a 3. Portanto, temos a seguinte estivativa para o limite:

Estimativa: $\lim_{x\to 2} f(x) \approx$ $\boxed{3{,}0}$

3. **Calculando limites com propriedades.** Use as propriedades de limites para calcular os limites abaixo.

(a) $\lim_{x\to 3}(2x+5)$

Solução:

$$\lim_{x\to 3}(2x+5) = \lim_{x\to 3}(2x) + \lim_{x\to 3} 5 = 2\underbrace{\left(\lim_{x\to 3} x\right)}_{3} + \underbrace{\left(\lim_{x\to 3} 5\right)}_{5} = 2\cdot 3 + 5 = 11$$

(b) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}$

Solução:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+9)} = \sqrt{\left[\lim_{x\to 4}(x^2)\right] + \left(\lim_{x\to 4} 9\right)}$$

$$= \sqrt{\left[\underbrace{\left(\lim_{x\to 4} x\right)}_{4}\right]^2 + \underbrace{\left(\lim_{x\to 4} 9\right)}_{9}} = \sqrt{4^2+9}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

(c) $\lim_{x\to 2}(x-1)^3$

Solução:

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^3 = \left[\lim_{x\to 2}(x-1)\right]^3 = \left[\underbrace{\left(\lim_{x\to 2} x\right)}_{2} - \underbrace{\left(\lim_{x\to 2} 1\right)}_{1}\right]^3 = \left(2^2-1\right)^3 = 27$$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-1}{x+3}$

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-1}{x+3} &= \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-1)}{\lim_{x\to 1}(x+3)} = \frac{(\lim_{x\to 1} x)^2 + 2(\lim_{x\to 1} x)+1}{(\lim_{x\to 1} x)+3}\\ &= \frac{1^2+2\cdot 1-1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(e) $\lim_{x\to 1}[3(x^2+1)-2(x-3)]$

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[3(x^2+1)-2(x-3)] &= 3\Big[\lim_{x\to 1}(x^2+1)\Big] - 2\Big[\lim_{x\to 1}(x-3)\Big]\\ &= 3\Big[\Big(\lim_{x\to 1} x\Big)^2+1\Big] - 2\Big[\Big(\lim_{x\to 1} x\Big)-3\Big]\\ &= 3\cdot(1^2+1)-2(1-3)\\ &= 3\cdot 2 - 2\cdot(-2)\\ &= 10\end{aligned}$$

(f) $\lim_{x\to 2}[(x+1)(x^2-3x+2)]$

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}[(x+1)(x^2-3x+2)] &= \Big[\lim_{x\to 2}(x+1)\Big]\Big[\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)\Big]\\ &= \Big[\Big(\lim_{x\to 2} x\Big)+1\Big]\Big[\Big(\lim_{x\to 2} x\Big)^2 - 3\Big(\lim_{x\to 2} x\Big)+2\Big]\\ &= (2+1)(2^2-3\cdot 2+2)\\ &= 3\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

4. **Desafio da aula.** Analise o limite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
   (a) Por que não podemos aplicar diretamente a propriedade do quociente de limites?

   Solução:

   Ao aplicar diretamente a propriedade do quociente de limites, obtemos uma **forma indeterminada** do tipo $\dfrac{0}{0}$.

   (b) Você consegue imaginar uma corma de "contornar" esse problema? (Dica: pense em fatoração!)

   Solução:

   No caso em questão, podemos fatorar o numerador usando a identidade algébrica de **diferença de quadrados**:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

   Portanto, desde que $x \neq 1$, temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2.$$

   A figura a seguir mostra o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, cujo domínio é $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq 1\}$.

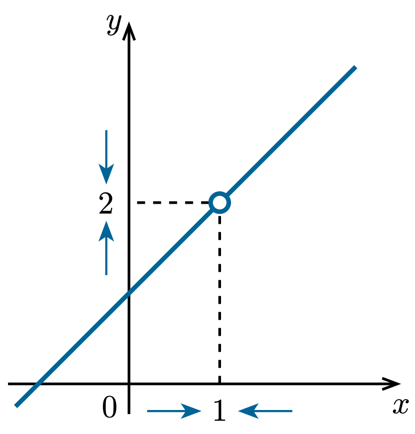

Figura 1: Gráfico

   Note que no ponto $x = 1$, a função f não está definida. Entretanto, quando x aproxima-se de 1, $f(x)$ tende ao valor 2, que corresponde ao limite calculado acima.