Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

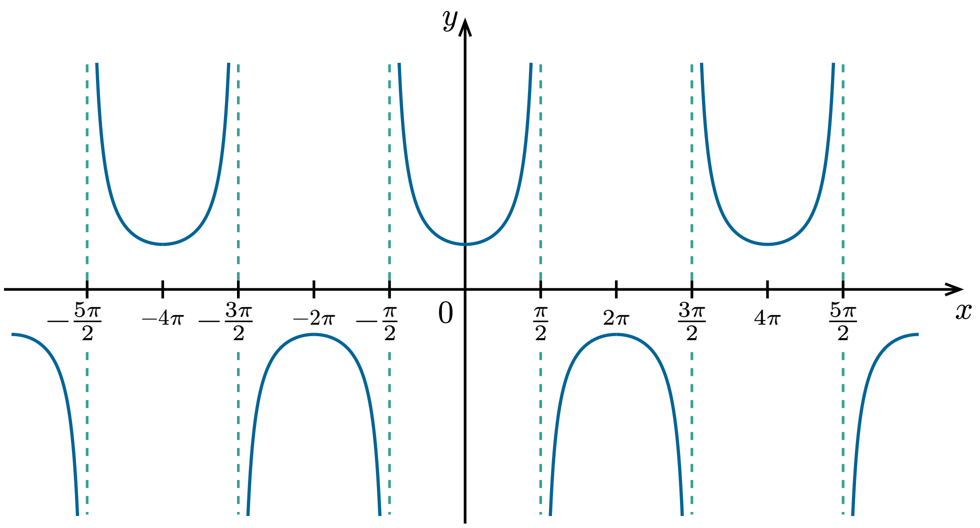
Lista de Exercícios - Aula 10

1. Determinie as assíntotas verticais da função $f(t) = \sec(t)$.

   Solução:

   Lembrando que $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$, a função $f(t)$ possui pontos de indeterminação nos valores de t para os quais $\cos(t) = 0$, ou seja, $f(t)$ não está definida para t tal que:

   $$\cos(t) = 0 \Rightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ para } \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$



■

2. Calcule os limites abaixo:

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{sen } x}{x}$

   Solução:

   Partimos do fato de que a função $\text{sen } x$ é limitada:

   $$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$$

Como estamos tomando o limite x tendendo a $+\infty$, podemos multipliicar a desigualdade acima por $1/x$ sem alterar o sentido das desigualdades:

$$-1 \cdot \frac{1}{x} \leq \text{sen } x \cdot \frac{1}{x} \leq 1 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Finalmente, tomamos o limite $x \to +\infty$ dos três termos na desigualdade:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen } x}{x} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen } x}{x} \leq 0$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen } x}{x} = 0$$

■

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{x^2-1}$

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{\cos x}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}}{1-\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}$$

$$= 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}$$

O último limite pode ser demonstrado lembrando que a função $\cos x$ é limitada.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq \cos x\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 1\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x^2} \geq \frac{\cos x}{x^2} \geq \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \geq \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2} \geq \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2} \geq 0$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{x^2-1}=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}=1$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+\text{sen }x}}{x}$

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+\text{sen }x}}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{\text{sen }x}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{\text{sen }x}{x^2}}}{x}\\ &=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{\text{sen }x}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{\text{sen }x}{x^2}}}{\cancel{x}}\\ &=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\text{sen }x}{x^2}}\\ &=\sqrt{1+0}\\ &=1\end{aligned}$$

A desmonstração de que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\text{sen }x}{x^2}=0$ é idêntica ao caso $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}$ mostrado no item anterior.

3. Resolva os problemas abaixo:

(a) A velocidade de um paraquedista é dada por $v(t)=60(1-e^{-0,2t})$ m/s. Qual é a velocidade terminal?

Solução:

$$v_t=\lim_{t\to+\infty}v(t)=\lim_{t\to+\infty}60(1-e^{-0,2t})=60\text{ m/s}$$

(b) A carga de um capacitor é dada por $Q(t)=500\left(1-e^{-\frac{t}{5}}\right)$ μC. Qual é a carga final do capacitor?

Solução:

$$Q_{\text{final}} = \lim_{t \to +\infty} Q(t) = \lim_{t \to +\infty} 500\left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right) = 500\ \mu\text{C}$$

(c) Em um movimento mass-mola amortecido, a posição é dada por $x(t) = 3e^{-0.1t}\cos(2t)$ cm. Qual é a posição limite quanto $t \to +\infty$?

Solução:

$$x_{\text{limite}} = \lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} 3e^{-0.1t}\cos(2t)$$

Para resolver o limite acima, lembremos que a função cosseno é limitada. Então,

$$\begin{aligned}
-1 \leq \cos(2t) \leq 1 &\Rightarrow -1 \cdot (3e^{-0,1t}) \leq \cos(2t) \cdot (3e^{-0,1t}) \leq 1 \cdot (3e^{-0,1t}) \\
&\Rightarrow -3e^{-0,1t} \leq 3e^{-0,1t}\cos(2t) \leq 3e^{-0,1t} \\
&\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} (-3e^{-0,1t}) \leq \lim_{t \to +\infty} 3e^{-0,1t}\cos(2t) \leq \lim_{t \to +\infty} 3e^{-0,1t} \\
&= 0 \leq \lim_{t \to +\infty} 3e^{-0,1t}\cos(2t) \leq 0
\end{aligned}$$

Pelo teorema do confronto, $\lim_{t \to +\infty} 3e^{-0,1t}\cos(2t) = 0$. Portanto, $x_{\text{limite}} = 0\ \ \text{cm}$.

4. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x}$

Solução:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \ln x$

Solução:

Seja $f(x) = e^x$ e a inversa $f^{-1}(x) = \ln x$. Sabemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctan} x$

Solução:

Seja $f(x) = \tan x$ e a inversa $f^{-1}(x) = \operatorname{arctan} x$. Sabemos que:

$$\lim_{x\to+\pi/2} \tan x = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctan} x = +\frac{\pi}{2}$$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x$

Solução:

Seja $f(x) = \operatorname{cotg} x$ ($\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$ e $\mathbb{I} = \mathbb{R}$) e a inversa $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$). Sabemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$

5. Determine todas as assíntotas (verticais e horizontais) das funções abaixo:

Critérios para Determinação de
Assíntotas Verticais e Horizontais

i. **Assíntotas Verticais**
   - Identificar candidatos, isto é, valores de x para os quais a função não está definida. Por exemplo:
     - o denominador se anula;
     - o argumento de logaritmos é nulo ou negativo;
     - o radicando de raízes de índice par é negativo.
   - Para cada candidato $x = a$, determinar os limites laterais:
     - $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
     - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
   - Verificar **divergência**: se pelo menos um dos limites laterais for $+\infty$ ou $-\infty$, então a reta $x = a$ é uma assíntota vertical.

ii. **Assíntotas Horizontais**
   - Determinar os limites no infinito:
     - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
     - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   - Verificar **convergência**: se algum dos limites existir for um número real finito L, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal.

(a) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$

Solução:

i. Assíntotas Verticais: Não existem, pois a função f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$

ii. Assíntotas Horizontais:
   - Limites no infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\dfrac{1}{e^x}}$$

$$= \frac{2}{1+\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+e^{-x}}$$

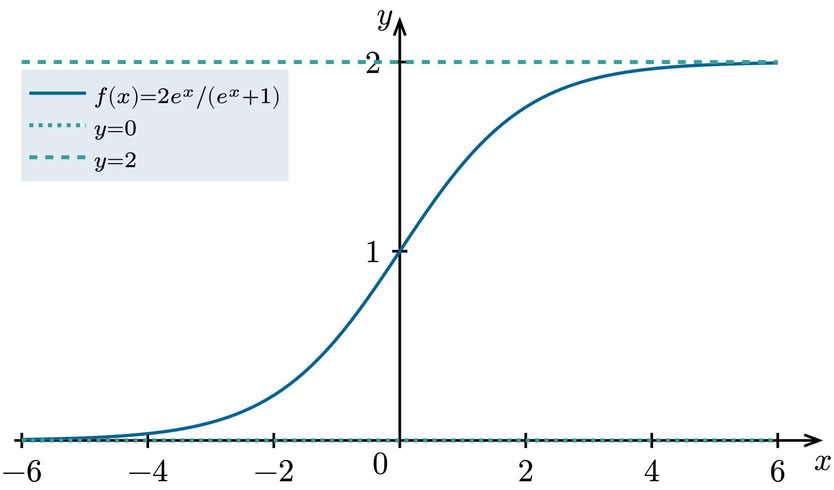
$$= \frac{2}{1+\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}} = 0$$

pois $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

Portanto, a função f não possui assíntotas verticais, mas possui os seguintes assíntotas horizontais:

- $y = 2$ quando $x \to +\infty$, e
- $y = 0$ quando $x \to -\infty$,

como ilustra o gráfico abaixo:



(b) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+x}$

Solução:

i. Assíntotas Verticais:

- Pontos em que o denominador se anula:

$$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

- Determinar os limites laterais para o candidato $x = 0$

  - Caso $x \to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x^3+x}$$

Observemos que, quando $x \to 0^-$, o numerador tende a um valor netativo -1. Por sua vez, como estamos tomando $x < 0$, o denominador $x^3 - x$ tende a zero, mas por valores também negativos. Assim, ao dividir o numerador negativo constante por valores negativos cada vez menores, o resultado é positivo e cresce indefinidamente. Portanto:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = +\infty$$

- Caso $x \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$$

Observemos que, quando $x \to 0^+$, o numerador tende a um valor netativo -1. Por sua vez, como estamos tomando $x > 0$, o denominador $x^3 - x$ tende a zero, mas por valores positivos. Assim, ao dividir o numerador negativo constante por valores positivos cada vez menores, o resultado é negativo e cresce indefinidamente. Portanto:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = -\infty$$

Logo, como os dois limites laterais divergem, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical.

ii. Assíntotas Horizontais:

- Limites no infinito:

  - Caso $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0^+$$

Note que, auando $x \to +\infty$, os termos $1 - \frac{1}{x}$ e $1 + \frac{1}{x^2}$ tendem ao valor constante positivo igual a 1. Por sua vez, $\frac{1}{x}$ tende a zero por valores positivos. Logo, o limite tende a 0^+.

  - Caso $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0^-$$

Note que, auando $x \to -\infty$, os termos $1 - \frac{1}{x}$ e $1 + \frac{1}{x^2}$ tendem ao valor constante positivo igual a 1. Por sua vez, $\frac{1}{x}$ tende a zero por valores negaticvos. Logo, o limite tende a 0^-.

Portanto, a função g possui um assíntota vertical na reta $x = 0$ e assíntotas horizontais na reta $y = 0$, como ilustra o gráfico abaixo: