Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 12

1. Enuncie, mais rigorosamente, as três condições que devem ser satisfeitas para que uma função $f(x)$ seja contínua em um ponto $x = a$.

Solução:

Uma função f é **contínua** no ponto $x = a$ se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

i. $f(a)$ existe;

ii. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

iii. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se pelo menos uma dessas condições não forem verificadas em $x = a$, a função f é dita **descontínua** em a.

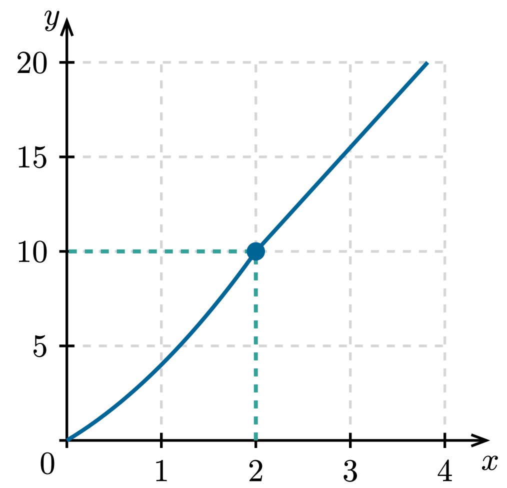
■

2. Determine o valor da constante k para que as funções abaixo sejam contínuas no ponto indicado:

(a) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{se } x < 2 \\ kx - 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{em} \quad x = 2$$

Solução:

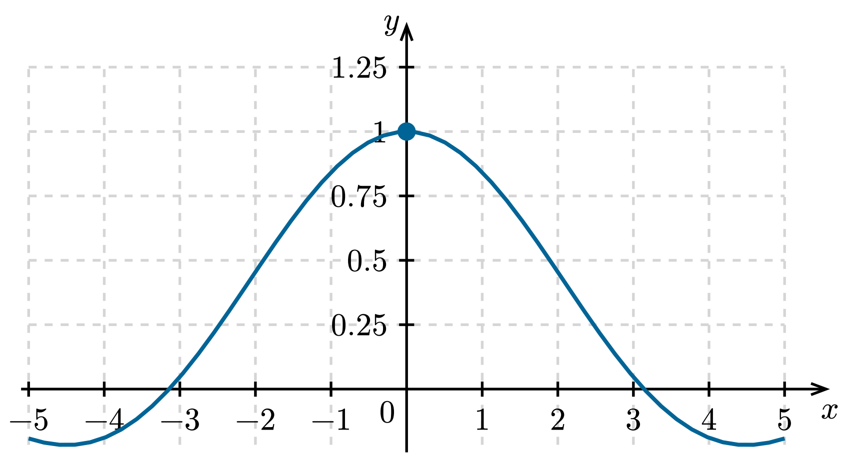
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) &\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 3x) = \lim_{x \to 2^+} (kx - 1) \\ &\Rightarrow 2^2 + 3 \cdot 2 = k \cdot 2 - 1 \\ &\Rightarrow 10 = 2k - 1 \\ &\Rightarrow k = \frac{11}{2} \end{aligned}$$



(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ k, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$

Solução:

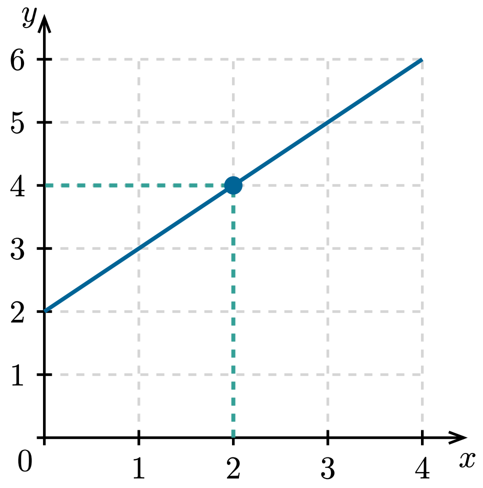
$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \to 0^+} k$$
$$\Rightarrow 1 = k$$
$$\Rightarrow k = 1$$



(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ k, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x) &\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} k \\
&\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2^+} k \\
&\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} x+2 = k \\
&\Rightarrow k = 4
\end{aligned}
$$



3. Defina matematicamente o que significa:

   (a) Uma função ser contínua à direita em $x = a$.

   Solução:

   Dizemos que uma função f é contínua à direita em $x = a$ se satizfaz simultaneamente as seguintes condições:

   i. $f(a)$ está definida;

   ii. existe o limite à direita de $f(x)$ em a, isto é,

   $$\lim_{x\to a^+} f(a) \quad \text{existe;}$$

   iii. o valor do limite à direita coincide com o valor da função em a:

   $$\lim_{x\to a^+} f(a) = f(a)$$

   De forma compacta:

   $$f \quad \text{é contínua à direita em} \quad a \iff \lim_{x\to a^+} f(a) = f(a).$$

(b) Uma função ser contínua à esquerda em $x = a$.

Solução:

Dizemos que uma função f é contínua à esquerda em $x = a$ se satizfaz simultaneamente as seguintes condições:

i. $f(a)$ está definida;

ii. existe o limite à esquerda de $f(x)$ em a, isto é,

$$\lim_{x \to a^-} f(a) \quad \text{existe;}$$

iii. o valor do limite à esquerda coincide com o valor da função em a:

$$\lim_{x \to a^-} f(a) = f(a)$$

De forma compacta:

$$f \quad \text{é contínua à esquerda em} \quad a \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(a) = f(a).$$

4. Para a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0, \\ x^2+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

analise:

(a) A continuidade à esquerda em $x = 0$.

Solução:

Inicialmente, observemos a primeira condição de continuidade à esquerda, definida no item (b) do problema anterior: no ponto $x = 0$, a função f está definida e vale $f(0) = 2$.

Em seguida, determinemos o limite à esquerda de f em $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 0 + 1 = 1 \neq 2 = f(0).$$

Note que o limite à esquerda não coincide com o valor de f em $x = 0$. Portanto, a função f não é contínua à esquerda em $x = 0$.

(b) A continuidade à direita em $x = 0$.

Solução:

A primeira condição de continuidade à direita, definida no item (a) do problema anterior é satisfeita, pois no ponto $x = 0$, a função f está definida e vale $f(0) = 2$.

O limite à direita de f em $x = 0$ existe e é igual a:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1 \neq 2 = f(0).$$

Como o limite à direira é diferente do valor de f em $x = 0$ a função f não é contínua à direita em $x = 0$.

(c) A continuidade em $x = 0$.

Solução:

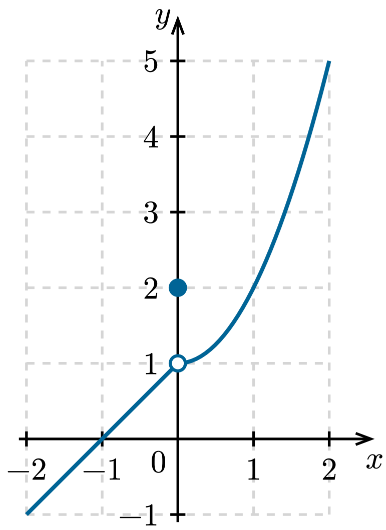
Dos itens anteriores, temos os seguintes fatos:

- A função f está definida no ponto $x = 0$, ou seja, $f(0)$ existe. No caso, $f(0) = 2$;
- O limite de f em $x = 2$ existe. De fato,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

- O limite de f em $x = 0$ não é igual ap valor de f no referido ponto.

Dos fatos acima, conclumos que a função não é contínua em $x = 0$ como ilustra o gráfico abaixo:



5. Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determine os valores das constantes a e b para que $g(x)$ seja contínua em $x = 1$ e $g(2) = 5$.

Solução:

Para que g seja contínua em $x = 1$, devemos verificar a condição:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$$

Façamos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax + b = a \cdot 1 + b = a + b \\ \\ g(1) = 1^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1) \Rightarrow a + b = 0$$

Por poutro lado, da condição $g(2) = 5$, temos:

$$g(2) = 5 \Rightarrow a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$$

Note que temos um sistema linear de duas equações:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Utilizando a **Regra de Cramer**[1] , temos a seguinte solução:

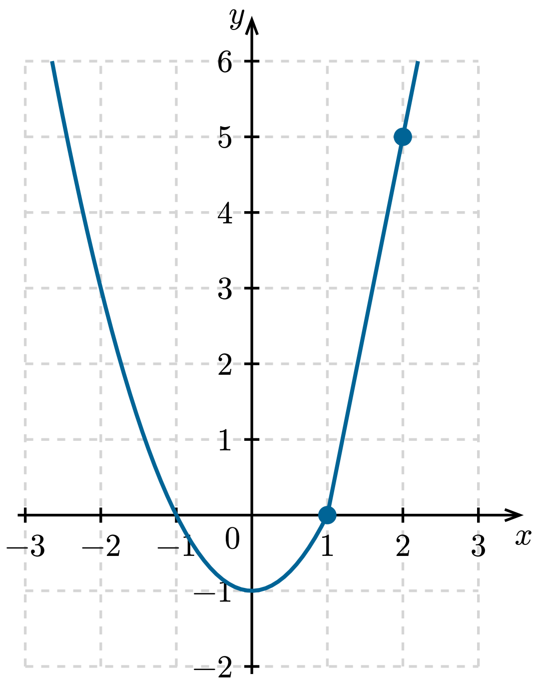
[1] A **Regra de Cramer** (em homenagem a Grabriel Cramer (1707-1752)) é um método de solução de sistemas lineares por determinantes. Envolve calcular o determinante principal (D) da matriz dos coeficientes e os determinantes auxiliares ($D_1, D_2, ..., D_n$) substituindo a coluna de i-ésima incógnica pelos termos independentes. A i-ésima incógnita é encontrada dividindo D_i/D. Se $D \neq 0$, há uma única solução (Sistema Possível e Determinado - SPD); se $D = 0$ e algum $D_i \neq 0$, o sistema é impossível (SI); se todos os determinantes forem nulos, há infinitas soluções (Sistema Possível e Indeterminado - SPI).

$$
\begin{cases}
a = \dfrac{D_a}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{0 \cdot 1 - 5 \cdot 1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \dfrac{-5}{-1} = \quad 5 \\[2ex]
b = \dfrac{D_b}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1 \cdot 5 - 2 \cdot 0}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \dfrac{5}{-1} = -5
\end{cases}
$$

Finalmente, a função

$$
g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 5x - 5, & \text{se } x < 1 \end{cases}
$$

é contínua em $x = 1$ e é tal que $g(2) = 5$, como ilustra o gráfico abaixo:



6. Para cada afirmação, diga se é gerdadeira ou falsa e justifique:

   (a) A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é descontínua em $x = 0$.

   Solução:

   A afirmação é **verdadeira** pois o ponto $x = 0$ não pertence ao domínio de definição de f:

$$
D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.
$$

Em $x = 0$, obtemos a indeterinação de tipo $1/0$.

(b) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, então, f é contínua em $x = a$.

Solução:

A afirmação é **falsa**. De fato, a existência do limite $\lim_{x\to a} f(x)$ é uma das condições de existência. Além dela, deve-se verificar se $f(a)$ existe e se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Por exemplo, consideremos a função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Observamos que o limite de f quando x tende a 0 existe, pois $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. A função também está definida no referido ponto. Ou seja, $f(0)$ existe pois $f(0) = 1$. Entretanto,

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0).$$

(c) Se f não é contínua em $x = a$, então, $f(a)$ não existe.

Solução:

A afirmação é **falsa**. Basta tomar como contra-exemplo a situação do item anterior: a função f não é contínua em $x = 0$, todavia tanto a função quanto o limite no ponto existem.

De forma geral, tomemos a definição com as três condições de continuidade:

"Se

1. $f(a)$ existe; **e**
2. $\lim_{x\to a}$ existe; **e**
3. $\lim_{x\to a} = f(a)$;

então, a função f é contínua em a".

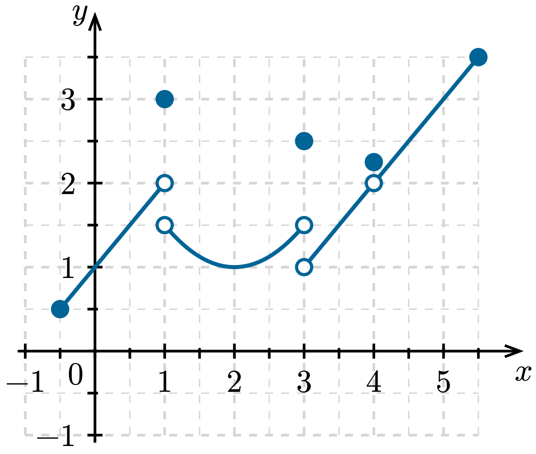
A negação seria: "Se a função f **não** é contínua em a, então

1. $f(a)$ **não** existe; **ou**
2. $\lim_{x\to a}$ **não** existe; **ou**
3. $\lim_{x\to a} \neq f(a)$."

Portanto, se f não é contínua em $x = a$, pelo menos uma das condições de continuidade não é verificada.

■

7. Observe o gráfico da função $f(x)$ abaixo e analise a continuidade nos pontos indicados:



(a) A função é contínua em $x = 1$? Justifique verificando as três condições.

Solução:

As três condições de continuidade são:

1. $f(a)$ existe;
2. $\lim\limits_{x \to a}$ existe;
3. $\lim\limits_{x \to a} = f(a)$.

Em $x = 1$, a primeira condição é verificada pois $f(1) = 3$. Entretanto, a segunda condição não é satisfeita. Apesar de existirem os limites laterais em $x = 1$, eles são distintos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq 1,5 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

1. A função é contínua à esquerda em $x = 3$? E à direita?

Solução:

No ponto $x = 3$, temos que os limites laterais existem:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1,5 \\ \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1 \end{cases}$$

Entretanto, nenhum desses limites é igual ao valor $f(3) = 2,5$. Portanto,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3) \Rightarrow f \text{ não é contínua à esquerda em } x = 3$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq f(3) \Rightarrow f \text{ não é contínua à direita em } x = 3.$$

2. Analise a continuidade em $x = 4$.

Solução:

Em $x = 4$, observamos que o limite existe:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 2$$

Além disso, $f(4)$ existe. Entretanto, vemos no gráfico que $f(4) > 2$. Assim,

$$\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$$

Logo, f não é contínua em $x = 4$.