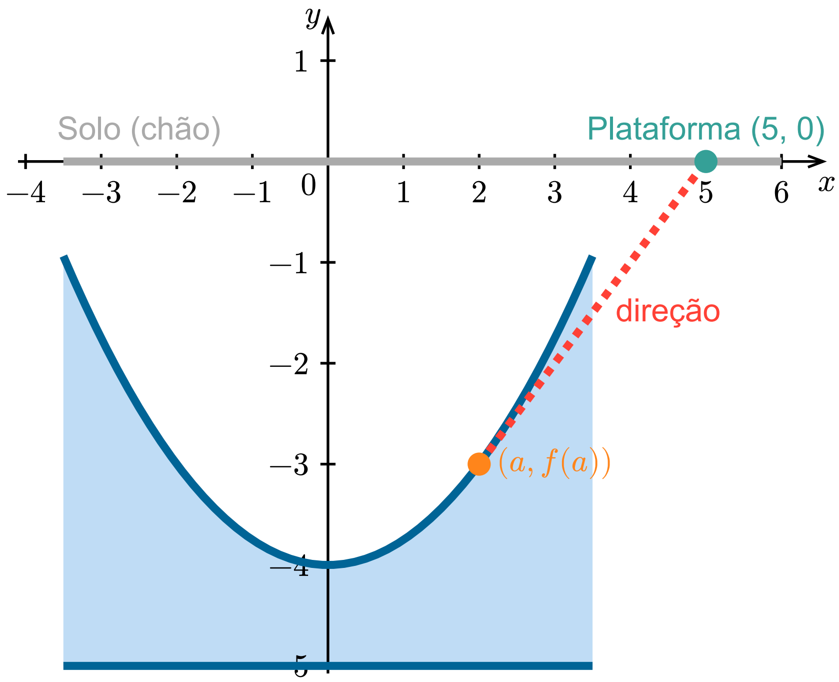
Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro
Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 2
Derivando Soluções

Lista de Exercícios - Aula 02

1. Um skatista profissional quer construir uma rampa de acesso para um half-pipe em formato parabólico. O half-pipe tem o perfil $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$ metros, onde x é a distância horizontal em metros. Para garantir a segurança, a rampa deve ser tangente ao half-pipe e chegar ao solo no ponto $(5, 0)$ onde está a plataforma de lançamento.



Determine o ponto $(a, f(a))$ onde a rampa dever ser tangente ao half-pipe para que chehe exatamente na plataforma de lançamento.

(a) Encontre uma expressão para o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$ do falf-pipe.

Solução:

$$
\begin{aligned}
m_{\text{sec}} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} \\
m_{\text{sec}} &= \frac{\left[\frac{1}{4}(a+h)^2-4\right]-\left(\frac{1}{4}a^2-4\right)}{h} \\
m_{\text{sec}} &= \frac{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}(2ah)+\frac{1}{4}h^2-4-\frac{1}{4}a^2+4}{h} \\
m_{\text{sec}} &= \frac{a}{2}+\frac{h}{4}
\end{aligned}
$$

(b) Calcule o limite do coeficiente angular da reta secante quando $h \to 0$ para obter o coeficiente anfular da reta no ponto $(a, f(a))$.

Solução:

$$
m = \lim_{h\to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{a}{2}+\frac{h}{4}\right) = \frac{a}{2}
$$

(c) Escreva a equação da reta tangente ao half-pipe no ponto $(a, f(a))$ em função de a.

Solução:

$$
\begin{aligned}
y - y_0 = m(x-x_0) &\Rightarrow y - f(a) = \frac{a}{2}(x-a) \\
&\Rightarrow y - \left(\frac{1}{4}a^2-4\right) = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{2} \\
&\Rightarrow y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - 4 \\
&\Rightarrow y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} - 4
\end{aligned}
$$

(d) Determine o valor de a para que esta reta tangente passe pelo ponto $(5, 0)$ da plataforma de lançamento,

Solução:

$$y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} - 4 \Rightarrow 0 = \frac{a}{2} \cdot 5 - \frac{a^2}{4} - 4 \Rightarrow -\frac{a^2}{4} + \frac{5a}{2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 16 = 0 \Rightarrow a = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{10-6}{2} = 2 \\ a_2 = \dfrac{10+6}{2} = 8 \end{cases}$$

Dado que o ponto a abscissa a deve estar à esquerda de 5, devemos escolher $a = 2$.

(e) Encontre a inclinação da rampa (coeficiente angular) e calcule o ângulo em radianos que ela faz com a horizontal. Comente sobre a adequação desta inclinação para a prática do skate.

Solução:

A inclinação da rampa deve ser $m = \frac{a}{2} = 1$, o que representa um ângulo

$$\alpha = \arctan(m) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$