Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 14

1. Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$, determiine:

   (a) $(f \circ f)(x)$

   Solução:

   $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1}$$

   ∎

   (b) $(f \circ g)(x)$

   Solução:

   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}+1} = \sqrt{\frac{(x-2)+(x+3)}{x+3}} = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$$

   ∎

   (c) $(g \circ f)(x)$

   Solução:

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+3}$$

   ∎

   (d) $(g \circ g)(x)$

   Solução:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{\dfrac{x-2}{x+3} - 2}{\dfrac{x-2}{x+3} + 3} = \frac{\dfrac{(x-2)-2(x+3)}{\cancel{x+3}}}{\dfrac{(x-2)+3(x+3)}{\cancel{x+3}}} = \frac{(x-2)-2(x+3)}{(x-2)+3(x+3)} = \frac{-x-8}{4x+7}$$

$$(g \circ g)(x) = -\frac{x+8}{4x+7}$$

Note que, apesar de termos "cancelado" os denominadores $x + 3$ acima, devemos ter em mente que o ponto $x = -3$ continua **fora** do domínio da composta $(g \circ g)(x)$.

2. Enuncie o teorema sobre continuidade de funções compostas e explique sua aplicação no cálculo de limites.

Solução:

Teorema da Continuidade de Funções Compostas: Sejam f e g funções tais que:

- g é contínua em a;
- f é contínua em $g(a)$,

então, a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Explicação e aplicação no cálculo de limites: A continuidade está diretamente ligada ao cálculo de limites. Uma função h é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$$

Aplicando o teorema às funções compostas, temos:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a))$$

Portanto, o teorema garante que, ao calcular limites envolvendo compostas:

i. Primeiro calcula-se o limite da função interna $g(x)$ quando $x \to a$;
ii. Em seguida, substitui-se esse valor na função externa f.

Ou seja, é permitido "passar o limite para dentro da função", desde que as condições de continuidade sejam satisfeitas.

3. Calcule os limites abaixo usando o teorema da continuidade de funções compostas:

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{sen}(x^2 - 3x + 2)$

Solução:

Consideremos as funções

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 2$$

Lembremos que as funções polinomiais são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, para g é contínua em $x = 2$ e vale

$$g(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0.$$

Por sua vez, a função seno também é contínua em toda a reta real. Em particular f é contínua em

$$f(g(2)) = f(0) = \text{sen } 0 = 0.$$

Portanto, pelo teorema da continuidade das funções compostas,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \text{sen}(x^2 - 3x + 2)$$

é contínua em $x = 2$ e

$$\lim_{x \to 2} \text{sen}(x^2 - 3x + 2) = \text{sen}\left(\lim_{x \to 2}(x^2 - 3x + 2)\right) = \text{sen}(0) = 0.$$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)$

Solução:

Sejam as funções

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$$

tal que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \cos\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right).$$

Observemos que g é contínua em $x = 0$, pois esse ponto não imploca em nenhuma indefinição da função racional. Assim,

$$g(0) = \frac{0^2+1}{0^2+2} = \frac{1}{2}.$$

Por sua vez, como a função cosseno é contínua em toda a reta real, f é contínua no ponto $g(0) = \frac{1}{2}$, tal que:

$$f(g(0)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

Finalmente, pelo teorema da continuidade das funções compostas, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em $f(g(0))$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^2+2}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^3 - 2x + 1\right)^5$

Solução:

Sejam as funções

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x^3 - 2x + 1$$

Como as funções polinomiais são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos conluir, pelo teorema da continuidade das funções compostas, que a função

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(x^3 - 2x + 1\right)^5$$

é contínua para todo x real. Assim,

$$\lim_{x\to 1} \left(x^3 - 2x + 1\right)^5 = \left(\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x + 1)\right)^5 = \left(1^3 - 2\cdot 1 + 1\right)^5 = 0^5 = 0$$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 2x + 6}$

Solução:

Sejam as funções

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 6$$

tal que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 2x + 6}.$$

Observemos que g é contínua em $x = 3$, pois as funções polinoniais são contínuas e toda a reta real.

Seja $g(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 6 = 9$. Note que f é contínua no ponto $g(3) = 9$, pois a função "raiz quadrada" é contínua para todo $x \geq 0$. Portanto, pelo teorema da continuidade das funções compostas, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em $f(g(3))$ e

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 - 2x + 6} = \sqrt{\lim_{x \to 3}(x^2 - 2x + 6)} = \sqrt{9} = 3$$

■

(e) $\lim\limits_{x \to \pi} \tan(\text{sen } x + \cos x)$

Solução:

A função $g(x) = \text{sen } x + \cos x$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular g é contínua em $x = \pi$. Seja

$$g(\pi) = \text{sen } \pi + \cos \pi = 0 + (-1) = -1$$

.Por sua vez, a função $f(x) = \tan x$ é contínua em $g(\pi) = -1$. Portanto, pelo teorema da continuidade das funções compostas,

$$\lim_{x \to \pi} \tan(\text{sen } x + \cos x) = \tan\Big(\lim_{x \to \pi}(\text{sen } x + \cos x)\Big) = \tan(-1)$$

■

(f) $\lim\limits_{x \to 2} e^{x^2 - 4x + 4}$

Solução:

$$\lim_{x \to 2} e^{x^2 - 4x + 4} = e^{\left(\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4x + 4)\right)} = e^{2^2 - 4 \cdot 2 + 4} = e^0 = 1$$

■