



# Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1  
Superando Limites

## Lista de Exercícios - Aula 06

1. **Teorema do confronto.** Enuncie o teorema do confronto (ou teorema do sanduíche).

**Solução:**

### Teorema do Confronto

Sejam  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  funções definidas em um intervalo que contém um ponto  $a$  (exceto, possivelmente, em  $a$ ). Suponha que, em para todo  $x$  nesse intervalo,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

e que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$



2. **Aplicação do teorema do confronto.** Use teorema do confronto para calcular o limite abaixo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

**Solução:**

Inicialmente, observemos que para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \operatorname{sen} \theta \leq 1$ . Assim, dado  $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ , vale a desigualdade

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2,$$

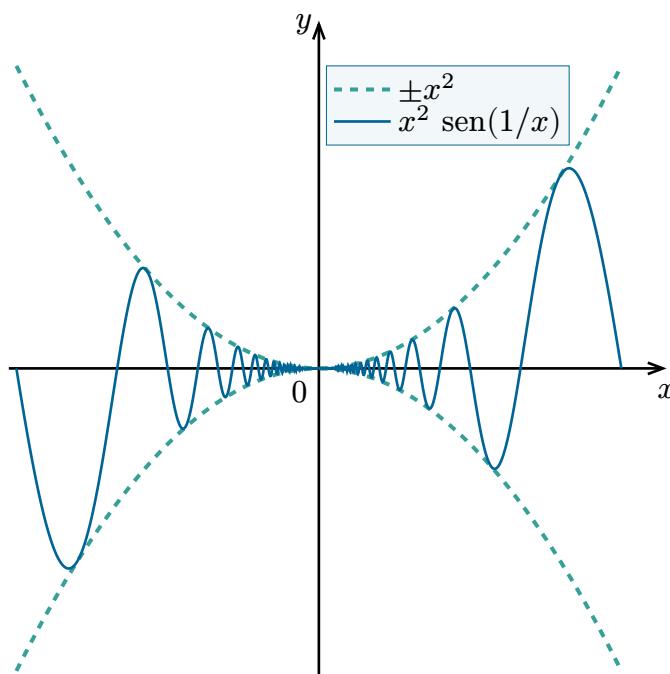
em que multiplicamos a expressão original por  $x^2$ . Definindo as funções:

$$\begin{cases} g(x) = -x^2 \\ f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \\ h(x) = x^2 \end{cases}$$

observemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ . Portanto, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

O gráfico seguinte ilustra o caso:



### 3. Sobre o limite trigonométrico fundamental.

- (a) Explique por que não podemos calcular diretamente  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$  usando as propriedades de limites.

**Solução:**

Inicialmente, observemos que não podemos meramente substituir o valor  $x = 0$  na expressão  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$  por isso resulta em uma indeterminação de tipo  $0/0$ . A mesma indeterminação aparece caso seja aplicada a propriedade do **quociente** de limites.

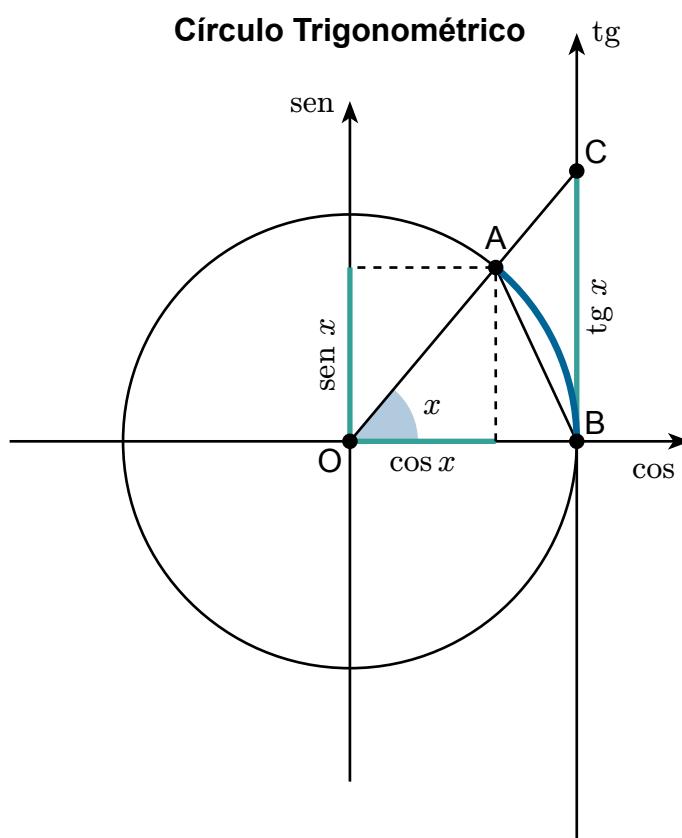
Além disso, dado que  $\sin x$  é uma função *transcendente* – isto é, não satisfaz nenhuma equação polinomial – não é possível fatorar a expressão  $\frac{\sin x}{x}$  de modo a eliminar a causa da indeterminação por simplificação algébrica.

Portanto, o cálculo desse limite exige métodos adicionais, como argumentos geométricos ou resultados específicos sobre a função seno, não sendo acessível apenas pelas propriedades algébricas dos limites.

- (b) Usando a interpretação geométrica, explique como o teorema do confronto pode ser usado para provar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . (Dica: Para  $0 < x < \pi/2$ , compare as áreas do triângulo, setor circular e triângulo maior no círculo unitário.)

**Solução:**

Dado o círculo trigonométrico abaixo:



Consideremos as seguintes áreas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Área do triângulo OAB: } \Delta(\text{OAB}) = \frac{1 \cdot \sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} \\ \text{Área setor OAB: } \Delta(\text{OAB}) = \frac{x}{2\pi} \cdot (\pi \cdot 1^2) = \frac{x}{2} \\ \text{Área do triângulo OBC: } \Delta(\text{OBC}) = \frac{1 \cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Delta(\text{OAB}) < \Delta(\text{OAB}) < \Delta(\text{OBC}) &\Rightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \quad \left( \times \frac{2}{\sin x} \right) \\ &\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ &\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \end{aligned}$$

Observemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ . Portanto, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

O gráfico abaixo ilustra esse fato:

