



# Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1  
Superando Limites

## Lista de Exercícios - Aula 13

1. Defina o que significa uma função ser contínua em um intervalo aberto  $(a, b)$  e em um intervalo fechado  $[a, b]$ .

### Solução:

- **Continuidade em um intervalo aberto  $(a, b)$**

A função  $f$  é contínua no intervalo aberto  $(a, b)$  se ela for contínua em todo ponto  $x_0 \in (a, b)$ .

- **Continuidade em um intervalo fechado  $[a, b]$**

A função  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  se:

- $f$  é contínua em todo ponto do intervalo aberto  $(a, b)$ ;
- $f$  é contínua à direita em  $a$ ; e
- $f$  é contínua à esquerda em  $b$ .

Isto é, além da continuidade em  $(a, b)$ , deve-se verificar:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$



2. Justifique por que as funções abaixo são contínuas nos seus respectivos domínios:

(a)  $f(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1$

### Solução:

O domínio de  $f$  são todos os reais, ou seja,  $D(f) = \mathbb{R}$ . Assim, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ , existe:

$$f(x_0) = 3x_0^4 - 3x_0^2 + 5x_0 - 1$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (3x^4 - 3x^2 + 5x - 1) = 3x_0^4 - 2x_0^2 + 5x_0 - 1 = f(x_0)$$

Portanto,  $f$  é contínua para todo  $x$  real, ou seja, para todo  $x \in D(f)$ <sup>1</sup>.

(b)  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

**Solução:**

A função racional  $g$  é definida para todo  $x$  real tal que o denominador não seja nulo, ou seja,

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Logo, o domínio de  $g$  é  $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$ . Assim, tomemos um número arbitrário  $x_0 \in D(g)$ . Temos que existe:

$$g(x_0) = \frac{x_0^2 + 1}{x_0^2 - 4}$$

Além disso, o limite de  $g$  no ponto  $x_0 \in D(g)$  é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - 4)} = \frac{x_0^2 + 1}{x_0^2 - 4} = g(x_0)$$

Portanto,  $g$  é contínua para todo  $x \in D(g)$ .

(c)  $h(x) = \sin x + \cos x$

**Solução:**

Tanto a função seno quanto a função cosseno são contínuas em toda a reta real. Assim, o domínio de  $h$  é  $D(h) = \mathbb{R}$ . Seja  $x_0 \in D(h)$ , então existe

$$h(x_0) = \sin x_0 + \cos x_0$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x + \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \sin x_0 + \cos x_0 = h(x_0)$$

<sup>1</sup>O raciocínio vale para verificar a continuidade de qualquer função polinomial  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ .

Portanto,  $h$  é contínua para todo  $x \in D(h)$ .

(d)  $p(x) = \tan x$

**Solução:**

Consideremos a definição da função tangente:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Já sabemos que tanto o seno quanto o cosseno são funções contínuas para todos os reais. Entretanto, pela definição da tangente, o denominador acima não pode ser zero, ou seja,

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Então, o domínio de  $p$  é  $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ . Tomando  $x_0 \in D(p)$ , temos que existe:

$$p(x_0) = \tan x_0$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x_0}{\cos x_0} = \tan x_0$$

Portanto,  $p$  é contínua para todo  $x \in D(p)$ .

3. Analise a continuidade das funções nos intervalos dados:

(a)  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  em  $[-2, 3]$

**Solução:**

Sabemos que toda função polinomial é contínua em todo real<sup>2</sup>. Como o intervalo  $[-2, 3]$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , segue que a função  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[-2, 3]$ .

<sup>2</sup>Não há pontos de descontinuidade, pois a função não apresenta denominadores, radicais com restrições ou logaritmos.

(b)  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  em  $(0, 2)$

**Solução:**

O domínio de  $g$  é  $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ , pois o valor de  $x$  para o qual o denominador é nulo, é o único ponto no qual a função não está definida. Note que o ponto  $x = 1$  pertence ao intervalo aberto  $(0, 2)$ . Assim,  $g$  **não é contínua** no intervalo.

(c)  $h(x) = \sin x$  em  $[0, 2\pi]$

**Solução:**

A função seno é contínua em toda a reta real. Logo, no intervalo  $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ ,  $g$  é contínua.

(d)  $p(x) = \tan x$  em  $[0, \pi]$

**Solução:**

A função tangente não está definida em  $x = \pi/2 \in [0, \pi]$ . Logo,  $h$  não é contínua no intervalo fechado.

(e)  $q(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$  em  $[-3, 1]$

**Solução:**

O domínio de  $q$  é  $D(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$ . Note que  $-2 \in [-3, 1]$ . Logo,  $q$  não é contínua em  $[-3, 1]$ .

(f)  $r(x) = \sec x$  em  $[-\pi, \pi]$

**Solução:**

A função secante ( $\sec(x)$ ) é uma função trigonométrica definida como o inverso do cosseno, ou seja,  $\sec x = 1/\cos x$ . Por um lado, a função cosseno é contínua em toda a reta real. Entretanto, da definição da secante, essa função não é definida para os valores de  $x$  tais que  $\cos x = 0$ . Assim, o domínio de  $r$  é:

$$D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$$

$$D(r) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Note que  $\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$  é um ponto em que a função secante não está definida. Portanto,  $r$  não é contínua em  $[-\pi, \pi]$ .



4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Esta função é contínua em  $\mathbb{R}$ ? Justifique sua resposta.

**Solução:**

Consideremos cada região de refinição de  $f$ :

- Para  $x \leq 1$ , ou seja, no intervalo  $(-\infty, 1]$ ,  $f$  é dada por  $x^2$ . Como toda função polinomial,  $f$  é contínua nesse intervalo. Em particular,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ f(1) = 1^2 = 1 \end{cases}$$

- Para  $x > 1$ , ou seja, no intervalo  $(1, +\infty)$ , a função  $f$  é definida por  $2x - 1$  que é contínua em todo  $\mathbb{R}$ . Assim,  $f$  é contínua no intervalo  $(1, +\infty)$ . Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

- Então,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

Logo,  $f$  é contínua em toda a reta real  $\mathbb{R}$ .

