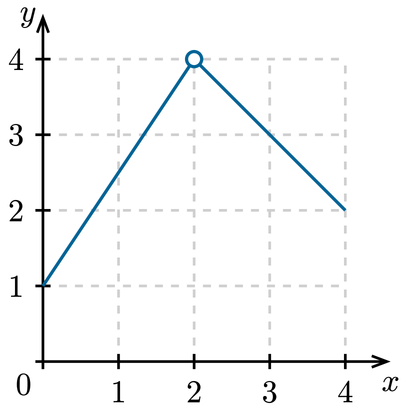
Cálculo Essencial Professor: Adail Cavalheiro Aluno: Igo da Costa Andrade	**MÓDULO 1** **Superando Limites**

Lista de Exercícios - Aula 01

1. **Análise de gráficos.** Observe os gráficos das funções abaixo e determine os valores dos limites indicados.

   (a) Detemine $\lim_{x\to 2} f(x)$

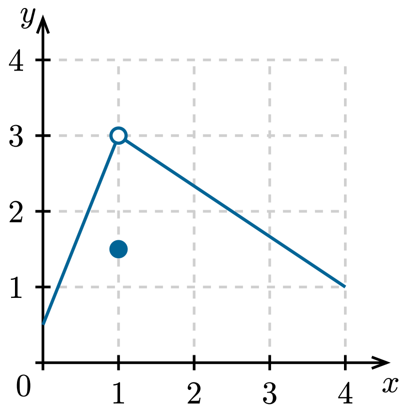
   

   Solução:

   $$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

   ■

   (b) Determine $\lim_{x\to 1} g(x)$

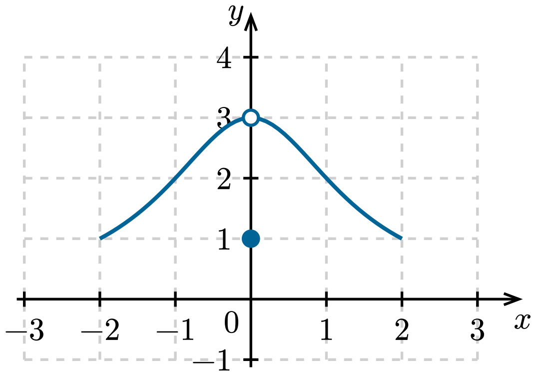
   

   Solução:

   $$\lim_{x\to 1} g(x) = 3$$

   ■

(c) Determine $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

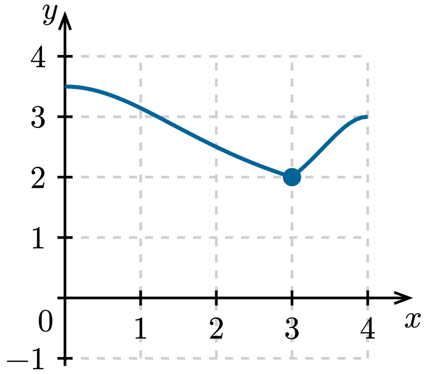


Solução:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 3$$

$\blacksquare$

(d) Determine $\lim\limits_{x \to 3} p(x)$



Solução:

$$\lim_{x = 3} p(x) = 2$$

$\blacksquare$

2. **Velocidade instantânea.** Uma partícula se move segundo a função posição $s(t) = 2t^2 - t + 1$, onde s é medido em metros e t em segundos.

   (a) Calcule a velocidade média da partícula no intervalo $[1, 3]$.

   Solução:

   Sejam $s(1)$ e $s(3)$ as posições da partícula nos instantes $t = 1$ s e $t = 3$ s, respectivamente:

   $$s(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = \ \ 2 \quad \mathrm{m}$$

   $$s(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 + 1 = 16 \quad \mathrm{m}$$

   Então, a velocidade média no intervalo $[1, 3]$ é igual a

   $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{16 - 2}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \mathrm{m/s}$$

   $\blacksquare$

(b) Use o método do incremento h para encontrar a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 2$.

Solução:

Consideremos o intervalo $[2, 2+h]$. A posição da partícula em cada um desses instantes de tempo é:

$$s(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = \ 7 \ \ \mathrm{m}$$

$$s(2+h) = 2 \cdot (2+h)^2 - (2+h) + 1 = 2 \cdot (4 + 4h + h^2) - (2+h) + 1 = (7 + 7h + h^2) \ \ \mathrm{m}$$

A velocidade média no intervalo considerado é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2+h) - s(2)}{(2+h) - 2} = \frac{(7 + 7h + h^2) - 7}{h}$$

$$v_m = \frac{7h + h^2}{h} = \frac{h(7+h)}{h} = 7 + h$$

Finalmente, a velocidade instantânea em $t = 2$ é igual ao limite da velocidade nesse instante de tempo quando o incremento h tende a zero, ou seja,

$$v(2) = \lim_{h \to 0} v_m = \lim_{h \to 0} (7 + h) = 7 \ \ \mathrm{m/s}$$

■

3. **Reta tagente.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 1$ no ponto $(3, f(3))$.

Solução:

Seja $y - y_0 = m(x - x_0)$ a equação da reta tangente ao gráfico da função f, passando pelo ponto (x_0, y_0). O coeficiente de inclinação m da reta tangente é dado pelo limite:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

em que o incremento h é usado para determinar uma reta secante à função f passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Calculemos o valor de $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$:

$$f(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 1$$

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 - 4(x_0 + h) + 1 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 4x_0 - 4h + 1$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = (2x_0 - 4)h + h^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1$$

Substituindo na expressão para o coeficiente angular, temos:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(2x_0-4)h + h^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1] - (x_0^2 - 4x_0 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2x_0-4)h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x_0 - 4 + h \\ &= 2x_0 - 4 \end{aligned}$$

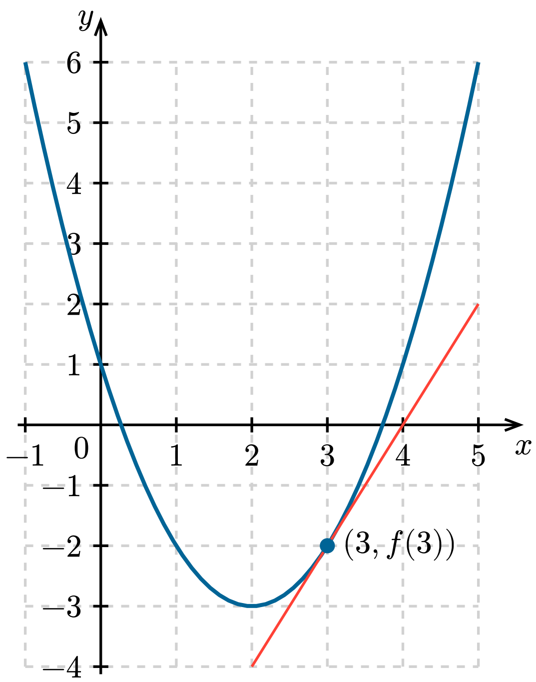
No ponto $(3, f(3))$, temos:

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 1 = -2$$

$$\Rightarrow m = 2x_0 - 4 = 2\cdot 3 - 4 = 2$$

Finalmente, a equação da reta tangente é dada por:

$$\begin{aligned} y - y_0 = m(x - x_0) &\Rightarrow y - (-2) = 2(x-3) \\ &\Rightarrow y + 2 = 2x - 6 \\ &\Rightarrow y = 2x - 8 \end{aligned}$$



■

4. **Desafio da aula.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(4, f(4))$.

Solução:

Seja $y - y_0 = m(x - x_0)$ a equação da reta tangente ao gráfico da função f, passando pelo ponto (x_0, y_0). O coeficiente de inclinação m da reta tangente é dado pelo limite:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

em que o incremento h é usado para determinar uma reta secante à função f passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Calculemos o valor de $f(x_0)$ e $f(x_0 + h)$:

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} \ \text{ e } \ f(x_0 + h) = \sqrt{x_0 + h}$$

Substituindo na expressão para o coeficiente angular, temos:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0 + h}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{h\left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h\left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

No ponto $(4, f(4))$, temos:

$$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Finalmente, a equação da reta tangente é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{4} + 1$$