Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 16

1. Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

Solução:

Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um polinômio de grau ímpar $2n + 1$:

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_1 x + a_0$$

Calculemos os seguinte limites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} p(x) &= \lim_{x \to -\infty} \left(a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_1 x + a_0\right) \\
&= \lim_{x \to -\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} \left(1 + \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \cdot \frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_{2n+1}} \cdot \frac{1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{a_{2n+1}} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}}\right) \\
&= \lim_{x \to -\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } a_{2n+1} > 0 \\ +\infty, & \text{se } a_{2n+1} < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} p(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + ... + a_1 x + a_0\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} \left(1 + \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \cdot \frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_{2n+1}} \cdot \frac{1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{a_{2n+1}} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}}\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_{2n+1} > 0 \\ -\infty, & \text{se } a_{2n+1} < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

em que aplicamos o seguinte limite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

para todo $k > 0$.

Note que em qualquer caso, $p(x)$ assume todos os valores arbitrariamente grandes tanto positivos quanto positivos. Então, seja $A \gg 0$ um número real suficientemente grante. Como $p(x)$ é uma função polinomial, é contínua para todo $\mathbb{R}$, em especial, é contínua no intervalo fechado $[-A, +A]$. Temos que $0 \in [-A, +A]$. Pelo Teorema do Valor Intermediáriom deve existir um um número $c \in (-A, +A)$ tal que $p(c) = 0$. Esse valor c será uma raiz de p.

■

2. Determine um intervalo de comprimento 1 que contenha uma raiz da função $f(x) = x^4 - 3x + x + 2$.

Solução:

A tabela abaixo mostra a aplicação de f para diversos valores de x. Note que para $x = -2$, $f(x) < 0$, enquanto que para $x = -1$, $f(x) > 0$.

x	$f(x)$	Sinal
-5	547	$+$
-4	206	$+$
-3	53	$+$
-2	4	$+$
-1	-1	-

Consideremoos o intervalo fechado $[-2, -1]$. Como f é uma função polinomial, é contínua nesse intervalo, pois é contínua em toda a reta real. Portanto, visto que f muda de sinal nesse intervalo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um valor $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$. Esse número c é uma raiz de f.

■

3. Mostre que a equação $e^x = 3 - x$ possui pelo menos uma solução no intervalo $[0, 2]$.

Solução:

Consideremos a função

$$f(x) = e^x + x - 3.$$

Note que as raízes de f são soluções da equação $e^x = 3 - x$, pois dado x^* raiz de f, temos:

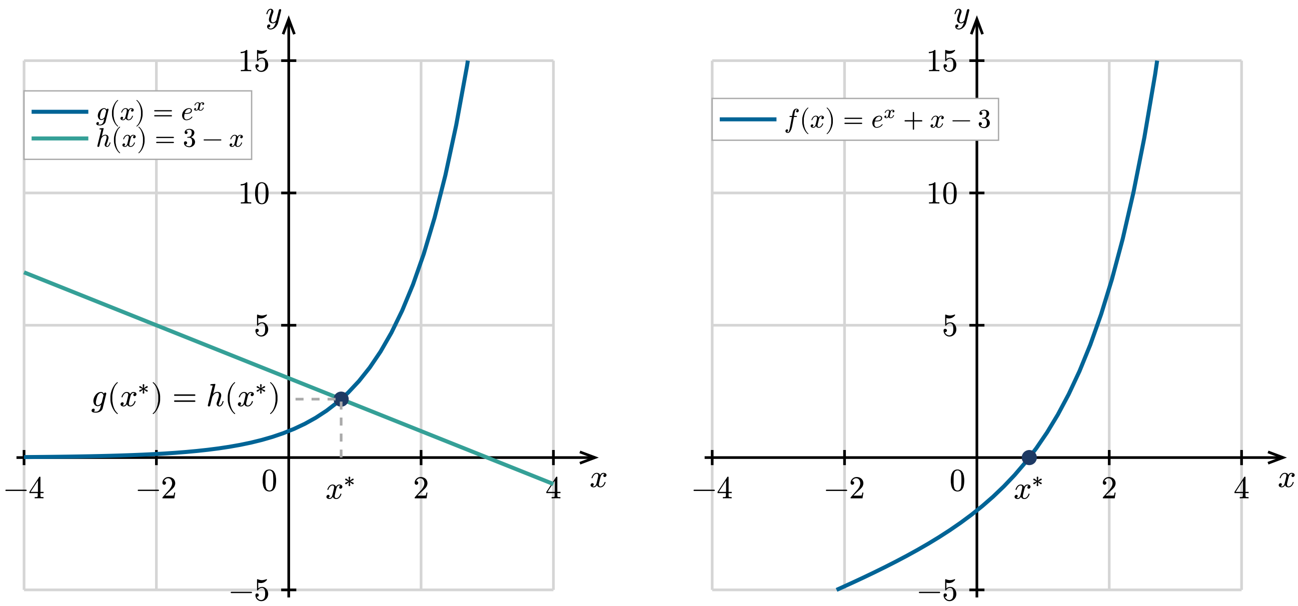
$$f(x^*) = 0 \Rightarrow e^{x^*} + x^* - 3 = 0 \Rightarrow e^{x^*} = 3 - x^*.$$

Então, dado o intervalo fechado $[0, 2]$, temos:

$$f(0) = e^0 + 0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$f(2) = e^2 + 2 - 3 = e^2 - 1 \approx 6{,}39$$

Note que f é contínua em toda a reta real, visto que é dada pela soma de uma função exponencial e uma função polinomial, ambas contínuas para todo $\mathbb{R}$, Então, pelo Teorema do Valor Intermediário sabemos que f assume todos os valores no intervalo aberto $(0, 2)$. Em especial, dados que $f(0) < 0$ enquanto $f(2) > 0$, ou seja, f muda de sinal nesse intervalo, existe $x^* \in (0, 2)$ tal que $f(x^*) = 0$. Portanto, f possui uma raiz em $[0, 2]$, o que significa dizer que a equação $e^x = 3 - x$ tem solução no referido intervalo.



4. Em qualquer momento do dia, prove que existem dois pontos antípodas na Terra (pontos diametralmente opotos) que possuem a mesma temperatura. Use o TVI considerando a função $f(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi)$, onde $T(\theta)$ é a temperatura no ponto de longitude θ.

Solução:

Consideremos a Terra como uma esfera e parametrizemos pontos sobre um círculo máximo (por exemplo, o equador) pela longitude $\theta \in [0, 2\pi)$. Para cada ponto de longitude θ, o ponto antípoda corresponde à longitude $\theta + \pi$.

Seja $T(\theta)$ a temperatura no ponto de longitude θ. Então, a diferença de temperatura entre os pontos antípodas é dada pela função:

$$f(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi).$$

É razoável supor que a temperatura na Terra varia de forma contínua ao lonto de qualquer círculo máximo, Assim, a podemos supor (θ) é contínua. Além disso, f também é contúnua pois é dada pela diferença de funções contínuas.

Pela geometria do problema, a função T é periódica de período 2π, ou seja, $T(\theta) = T(\theta + 2\pi)$. Então,

$$f(\theta + \pi) = T(\theta + \pi) - T(\theta + \pi + \pi) = T(\theta + \pi) - T(\theta + 2\pi)$$

$$f(\theta + \pi) = T(\theta + \pi) - T(\theta)$$

$$f(\theta + \pi) = -f(\theta)$$

Consideremos o intervalo fechado $[0, \pi]$. Temos duas possibilidades:

- **Caso 1**: $f(0) = 0$. Então,

  $$f(0) = 0 \Rightarrow T(0) - T(0 + \pi) = 0 \Rightarrow T(0) = T(\pi)$$

  Portanto, nesse caso, os pontos antípodas de longitude 0 e π possuem a mesma temperatura.

- **Caso 2**: $f(0) \neq 0$. Então, pela propriedade $f(\theta + \pi) = -f(\theta)$, temos:

  $$f(0 + \pi) = -f(0) \Rightarrow f(\pi) = -f(0)$$

  Logo, $f(0)$ e $f(\pi)$ possuem sinais opostos. Como f é contínua no intervalo $[0, \pi]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

  Isso significa que $T(c) - T(c + \pi) = 0$, ou seja, $T(c) = T(c + \pi)$.

Finalmente, em qualquer momento do dia, existem dois pontos antípodas na Terra que possuem exatamente a mesma temeratura.