Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro
Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 08

1. Defina matematicamente o que significa $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Solução:

Significa dizer que os valores de $f(x)$ crescem indefinidamente quando x se aproxima de a. A definição formal é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } f(x) > M,$$

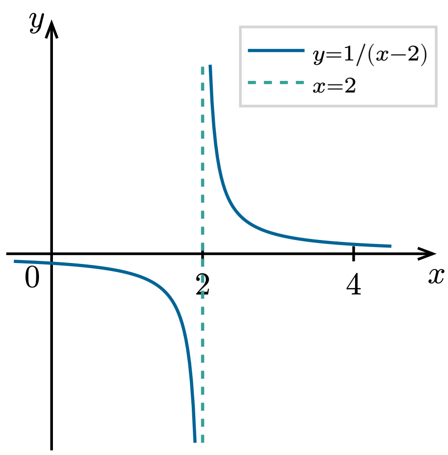
ou seja, para qualquer escolha de $M > 0$ (arbitrariamente grande), existe algum $\delta > 0$ suficientemente próximo de a tal que $f(x) > M$.

2. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$

Solução:

Observemos que, quando x tende a 2 por valores superiores, o denominador da expressão tende a zero, **por valores maiores que zero**. Dividir o numerador constante por valores arbitrariamente pequenos positivos, resulta em números arbitrariamente grandes, também positivos. Logo,



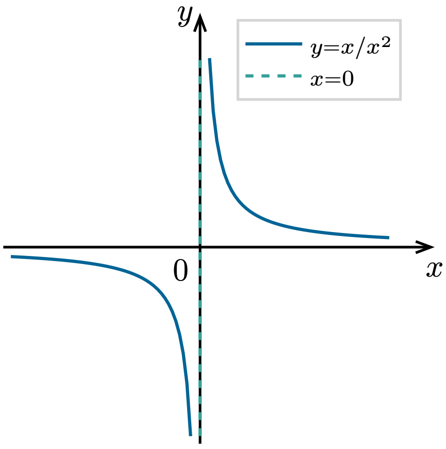
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x^2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

visto que o denominador assumindo valores arbitrariamente pequenos, mas negativos, enquanto o numerador é constante e positivo.



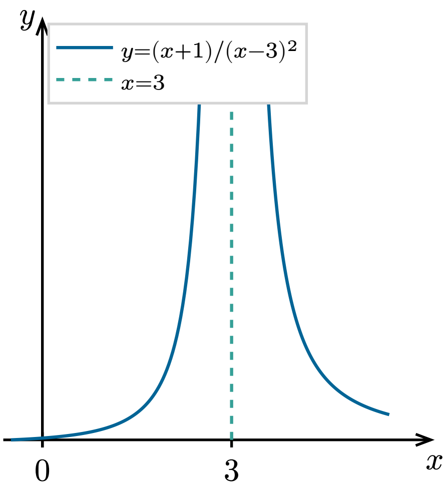
(c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+1}{(x-3)^2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3^-} x+1}{\lim\limits_{x\to 3^-} (x-3)^2} = \frac{4}{\lim\limits_{x\to 3^-} (x-3)^2}$$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} (x-3)^2 = 0^+$,

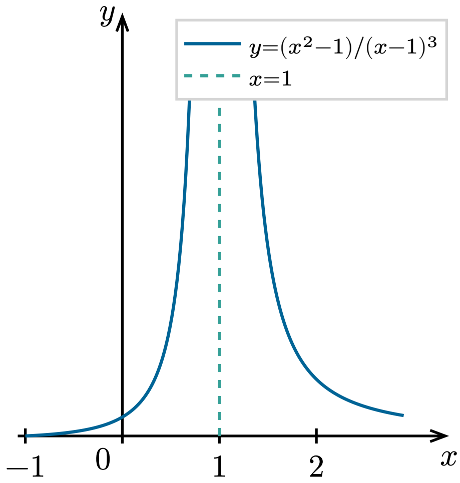
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+1}{(x-3)^2} = +\infty.$$



(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^3}$

Solução:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x+1}{\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2} = +\infty$$

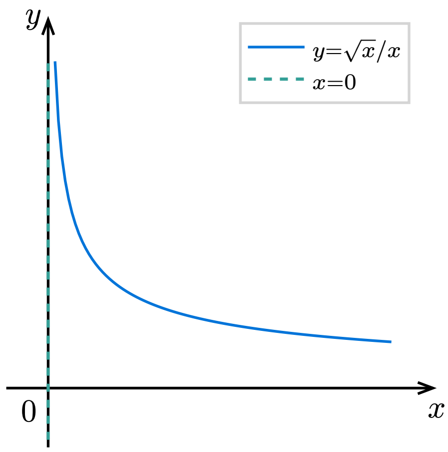


(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

Solução:

Consideremos a seguinte mudança de variáveis: $y = \sqrt{x}$, tal que $y^2 = x$. Observe que quando x tende a zero por valores superiores, y também tende a zero por valores positivos. Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

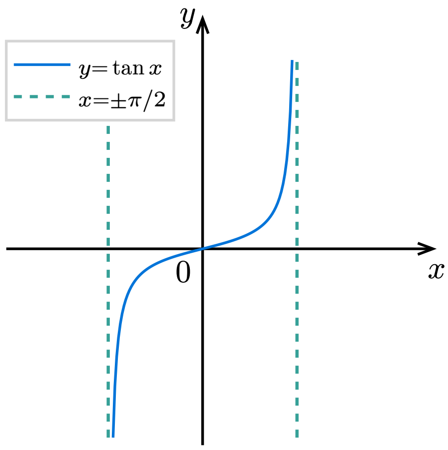


(f) $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$

Solução:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = \frac{\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \text{sen } x}{\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \cos x}$$

Observemos que $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \text{sen } x = 1$, enquanto $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \cos x = 0^+$. Assim, dividir um valor constante positivo por valores arbitrariamente pequenos também positivos resulta em números positivos arbitrariamente grandes. Logo,



$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$$

3. Determine todas as assíntotas verticais das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

Solução:

- Pontos de indeterminação: os candidatos são os valores de x para os quais o denominador igual a zero:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

- Para cada candidato, verificar os limites laterais com atenção à análise de sinais:
  - $x \to -2^-$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{\overbrace{\lim_{x \to -2^-} x+1}^{-1}}{\underbrace{\lim_{x \to -2^-} (x^2-4)}_{0^+}} = -\infty$$

  - $x \to -2^+$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{\overbrace{\lim_{x \to -2^+} x+1}^{-1}}{\underbrace{\lim_{x \to -2^+} (x^2-4)}_{0^-}} = +\infty$$

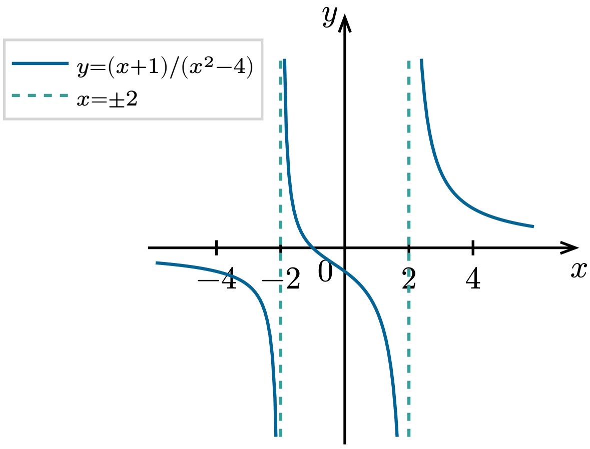
- $x \to +2^-$

$$\lim_{x\to+2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to+2^-} x+1}^{+3}}{\underbrace{\lim_{x\to+2^-} (x^2-4)}_{0^-}} = -\infty$$

- $x \to +2^+$

$$\lim_{x\to+2^+} \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to+2^+} x+1}^{+3}}{\underbrace{\lim_{x\to+2^+} (x^2-4)}_{0^+}} = +\infty$$

Portanto, as retas $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais da função.



(b) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-6}$

Solução:

- Pontos de indeterminação: os candidatos são os valores de x para os quais o denominador igual a zero:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-1+5}{2} = +2 \end{cases}$$

- Para cada candidato, verificar os limites laterais com atenção à análise de sinais:
  - $x \to -3^-$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2-1}{x^2+x-6} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to -3^-}(x^2-1)}^{+8}}{\underbrace{\lim_{x\to -3^-}(x^2+x-6)}_{0^+}} = +\infty$$

  - $x \to -3^+$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-6} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to -3^+}(x^2-1)}^{+8}}{\underbrace{\lim_{x\to -3^+}(x^2+x-6)}_{0^-}} = -\infty$$

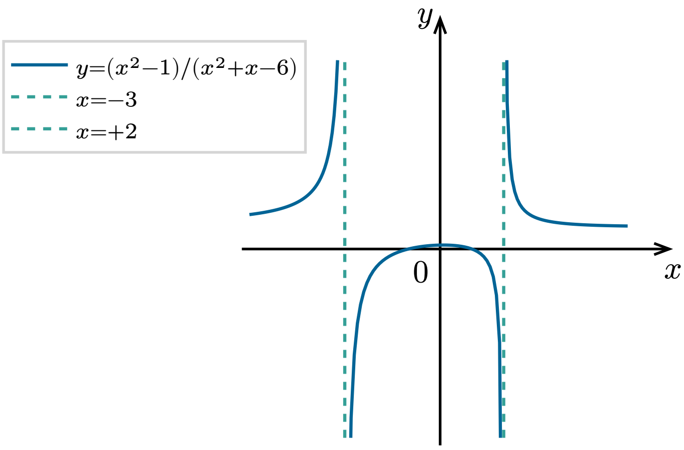
  - $x \to +2^-$

$$\lim_{x\to +2^-} \frac{x^2-1}{x^2+x-6} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to +2^-}(x^2-1)}^{+3}}{\underbrace{\lim_{x\to +2^-}(x^2+x-6)}_{0^-}} = -\infty$$

  - $x \to +2^+$

$$\lim_{x\to +2^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-6} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to +2^+}(x^2-1)}^{+3}}{\underbrace{\lim_{x\to +2^+}(x^2+x-6)}_{0^+}} = +\infty$$

Portanto, as retas $x = -3$ e $x = 2$ são assíntotas verticais da função.



(c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

Solução:

- Pontos de indeterminação: os candidatos são os valores de x para os quais o denominador igual a zero:

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

- Condições de definição da função:

$$4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < +2$$

- Para cada candidato, verificar os limites laterais com atenção à análise de sinais, considerando a condição de existência acima.
  - $x \to -2^+$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2}}_{0^+}} = +\infty$$

  - $x \to +2^-$

$$\lim_{x \to +2^-} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \to +2^-} \sqrt{4 - x^2}}_{0^+}} = +\infty$$

Portanto, as retas $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais da função.