



# Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

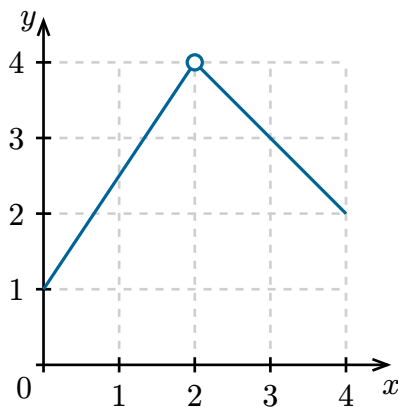
Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1  
Superando Limites

## Lista de Exercícios - Aula 01

1. **Análise de gráficos.** Observe os gráficos das funções abaixo e determine os valores dos limites indicados.

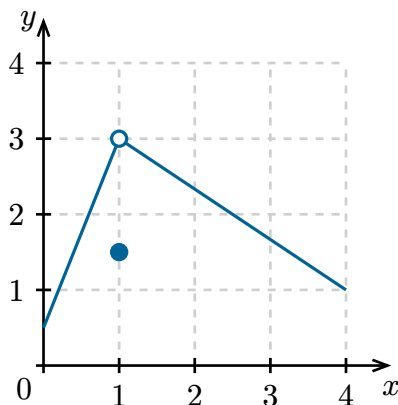
(a) Determine  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

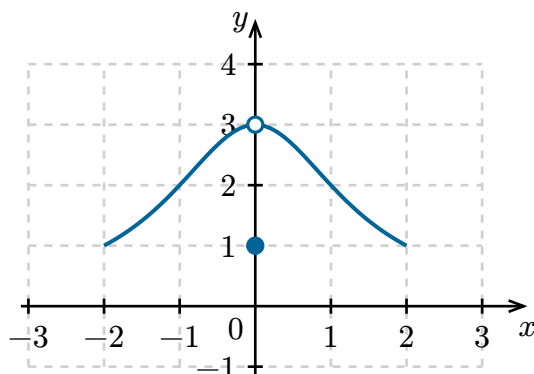
(b) Determine  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$



Solução:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$$

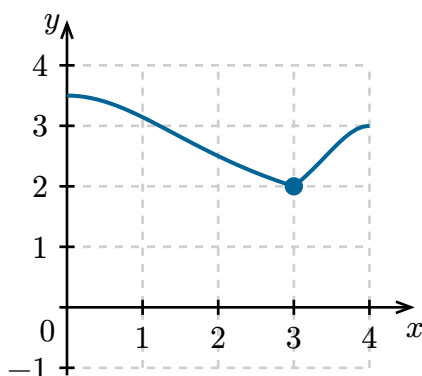
(c) Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$



**Solução:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 3$$

(d) Determine  $\lim_{x \rightarrow 3} p(x)$



**Solução:**

$$\lim_{x \rightarrow 3} p(x) = 2$$

2. **Velocidade instantânea.** Uma partícula se move segundo a função posição  $s(t) = 2t^2 - t + 1$ , onde  $s$  é medido em metros e  $t$  em segundos.

(a) Calcule a velocidade média da partícula no intervalo  $[1, 3]$ .

**Solução:**

Sejam  $s(1)$  e  $s(3)$  as posições da partícula nos instantes  $t = 1$  s e  $t = 3$  s, respectivamente:

$$s(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 2 \text{ m}$$

$$s(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 + 1 = 16 \text{ m}$$

Então, a velocidade média no intervalo  $[1, 3]$  é igual a

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{16 - 2}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ m/s}$$

- (b) Use o método do incremento  $h$  para encontrar a velocidade instantânea da partícula no instante  $t = 2$ .

**Solução:**

Consideremos o intervalo  $[2, 2 + h]$ . A posição da partícula em cada um desses instantes de tempo é:

$$s(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7 \text{ m}$$

$$s(2 + h) = 2 \cdot (2 + h)^2 - (2 + h) + 1 = 2 \cdot (4 + 4h + h^2) - (2 + h) + 1 = (7 + 7h + h^2) \text{ m}$$

A velocidade média no intervalo considerado é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2 + h) - s(2)}{(2 + h) - 2} = \frac{(7 + 7h + h^2) - 7}{h}$$

$$v_m = \frac{7h + h^2}{h} = \frac{h(7 + h)}{h} = 7 + h$$

Finalmente, a velocidade instantânea em  $t = 2$  é igual ao limite da velocidade nesse instante de tempo quando o incremento  $h$  tende a zero, ou seja,

$$v(2) = \lim_{h \rightarrow 0} v_m = \lim_{h \rightarrow 0} (7 + h) = 7 \text{ m/s}$$



3. **Reta tangente.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  no ponto  $(3, f(3))$ .

**Solução:**

Seja  $y - y_0 = m(x - x_0)$  a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$ , passando pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . O coeficiente de inclinação  $m$  da reta tangente é dado pelo limite:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

em que o incremento  $h$  é usado para determinar uma reta secante à função  $f$  passando pelos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ .

Calculemos o valor de  $f(x_0)$  e  $f(x_0 + h)$ :

$$f(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 1$$

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 - 4(x_0 + h) + 1 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 - 4x_0 - 4h + 1$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = (2x_0 - 4)h + h^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1$$

Substituindo na expressão para o coeficiente angular, temos:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2x_0 - 4)h + h^2 + x_0^2 - 4x_0 + 1] - (x_0^2 - 4x_0 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x_0 - 4)h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 - 4 + h \\ &= 2x_0 - 4 \end{aligned}$$

No ponto  $(3, f(3))$ , temos:

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$$

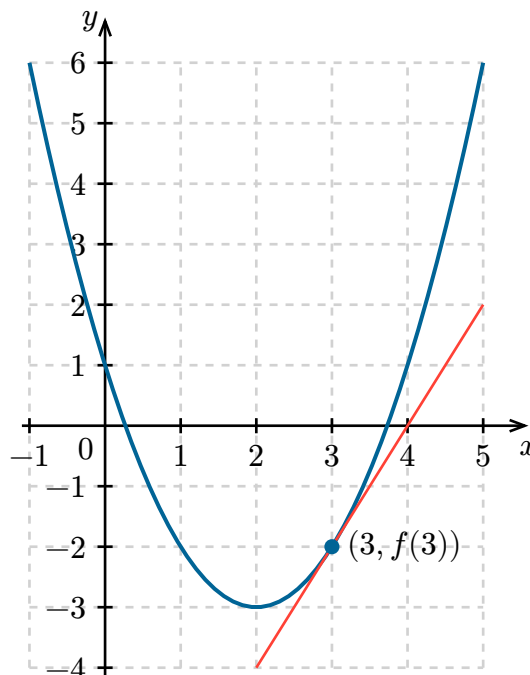
$$\Rightarrow m = 2x_0 - 4 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

Finalmente, a equação da reta tangente é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-2) = 2(x - 3)$$

$$\Rightarrow y + 2 = 2x - 6$$

$$\Rightarrow y = 2x - 8$$





4. **Desafio da aula.** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f(x) = \sqrt{x}$  no ponto  $(4, f(4))$ .

**Solução:**

Seja  $y - y_0 = m(x - x_0)$  a equação da reta tangente ao gráfico da função  $f$ , passando pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . O coeficiente de inclinação  $m$  da reta tangente é dado pelo limite:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

em que o incremento  $h$  é usado para determinar uma reta secante à função  $f$  passando pelos pontos  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ .

Calculemos o valor de  $f(x_0)$  e  $f(x_0 + h)$ :

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} \text{ e } f(x_0 + h) = \sqrt{x_0 + h}$$

Substituindo na expressão para o coeficiente angular, temos:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

No ponto  $(4, f(4))$ , temos:

$$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Finalmente, a equação da reta tangente é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{4} + 1$$

