Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

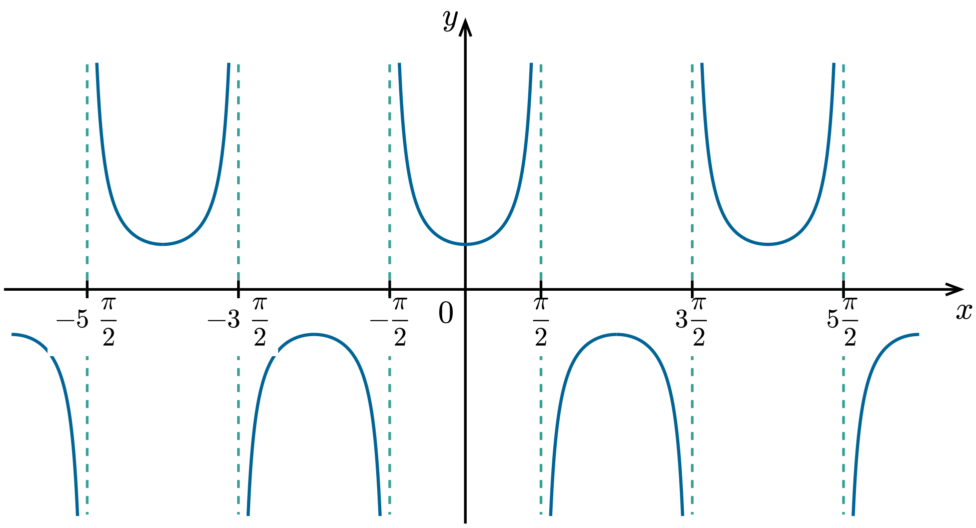
Lista de Exercícios - Aula 10

1. Determinie as assíntotas verticais da função $f(t) = \sec(t)$.

Solução:

Lembrando que $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$, a função $f(t)$ possui pontos de indeterminação nos valores de t para os quais $\cos(t) = 0$, ou seja, $f(t)$ não está definida para t tal que:

$$\cos(t) = 0 \Rightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ para } \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$



2. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{sen } x}{x}$

Solução:

Partimos do fato de que a função $\text{sen } x$ é limitada:

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$$

Como estamos tomando o limite x tendendo a $+\infty$, podemos multipliicar a desigualdade acima por $1/x$ sem alterar o sentido das desigualdades:

$$-1 \cdot \frac{1}{x} \leq \text{sen } x \cdot \frac{1}{x} \leq 1 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Finalmente, tomamos o limite $x \to +\infty$ dos três termos na desigualdade:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen } x}{x} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen } x}{x} \leq 0$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen } x}{x} = 0$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{x^2-1}$

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{\cos x}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}}{1-\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}$$

$$= 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}$$

O último limite pode ser demonstrado lembrando que a função $\cos x$ é limitada.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq \cos x\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 1\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x^2} \geq \frac{\cos x}{x^2} \geq \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \geq \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2} \geq \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2} \geq 0$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{x^2-1} = 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2} = 1$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+\text{sen } x}}{x}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+\text{sen } x}}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{\text{sen } x}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{\text{sen } x}{x^2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\,\sqrt{1+\dfrac{\text{sen } x}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{\text{sen } x}{x^2}}}{\cancel{x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{\text{sen } x}{x^2}}\\
&= \sqrt{1+0}\\
&= 1
\end{aligned}$$

A desmonstração de que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\text{sen } x}{x^2} = 0$ é idêntica ao caso $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}$ mostrado no item anterior.

3. Resolva os problemas abaixo:

(a) A velocidade de um paraquedista é dada por $v(t) = 60(1-e^{-0,2t})$ m/s. Qual é a velocidade terminal?

Solução:

$$v_t = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} 60(1-e^{-0,2t}) = 60 \text{ m/s}$$

(b) A carga de um capacitor é dada por $Q(t) = 500\left(1-e^{-\frac{t}{5}}\right)\,\mu\text{C}$. Qual é a carga final do capacitor?

Solução:

$$Q_{\text{final}} = \lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty} 500\left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right) = 500\ \mu\text{C}$$

(c) Em um movimento mass-mola amortecido, a posição é dada por $x(t) = 3e^{-0.1t}\cos(2t)$ cm. Qual é a posição limite quanto $t \to +\infty$?

Solução:

$$x_{\text{limite}} = \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} 3e^{-0.1t}\cos(2t)$$

Para resolver o limite acima, lembremos que a função cosseno é limitada. Então,

$$\begin{aligned}
-1 \leq \cos(2t) \leq 1 &\Rightarrow -1\cdot\left(3e^{-0,1t}\right) \leq \cos(2t)\cdot\left(3e^{-0,1t}\right) \leq 1\cdot\left(3e^{-0,1t}\right)\\
&\Rightarrow -3e^{-0,1t} \leq 3e^{-0,1t}\cos(2t) \leq 3e^{-0,1t}\\
&\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\left(-3e^{-0,1t}\right) \leq \lim_{t\to+\infty} 3e^{-0,1t}\cos(2t) \leq \lim_{t\to+\infty} 3e^{-0,1t}\\
&= 0 \leq \lim_{t\to+\infty} 3e^{-0,1t}\cos(2t) \leq 0
\end{aligned}$$

Pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{t\to+\infty} 3e^{-0,1t}\cos(2t) = 0$. Portanto, $x_{\text{limite}} = 0\ \ \text{cm}$.

4. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}} = 0$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$

Solução:

Seja $f(x) = e^x$ e a inversa $f^{-1}(x) = \ln x$. Sabemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan\, x$

Solução:

Seja $f(x) = \tan x$ e a inversa $f^{-1}(x) = \arctan\, x$. Sabemos que:

$$\lim_{x \to +\pi/2} \tan x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \arctan\, x = +\frac{\pi}{2}$$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{arccotg}\, x$

Solução:

Seja $f(x) = \text{cotg}\, x$ e a inversa $f^{-1}(x) = \text{arccotg}\, x$. Sabemos que:

$$\lim_{x \to 0^+} \text{cotg}\, x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \text{arccotg}\, x = 0$$

5. Determine todas as assíntotas (verticais e horizontais) das funções abaixo:

(a) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$

Solução:

(b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x}$

Solução: