Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 06

1. **Teorema do confronto.** Enuncie o teoream do confronto (ou teorema do sanduíche).

Solução:

Teorema do Confronto

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções definidas em um intervalo que contém um ponto a (exceto, possivelmente, em a). Suponha que, em para todo x nesse intervalo,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

e que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

■

2. **Aplicação do teorema do confronto.** Use teorema do confronto para calcular o limite abaixo.

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solução:

Inicialmente, observemos que para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \operatorname{sen}\, \theta \leq 1$. Assim, dado $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$, vale a desiqualdade

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2,$$

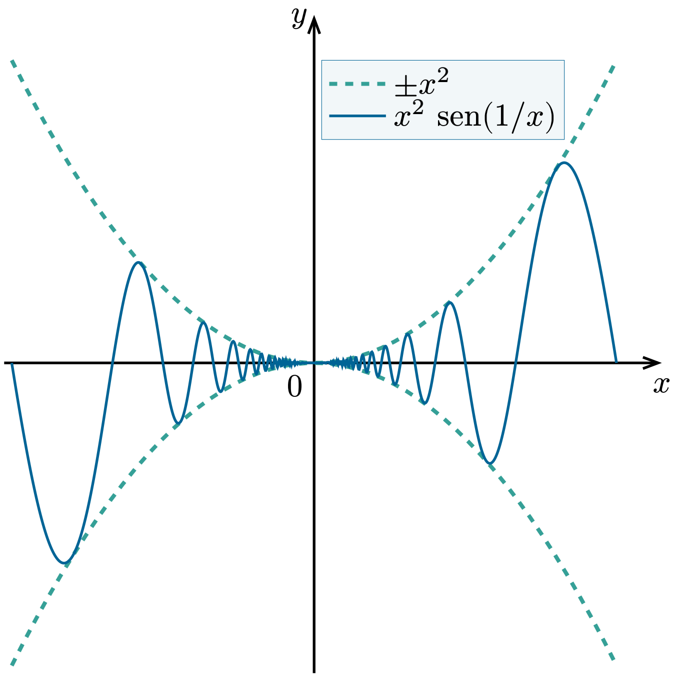
em que multiplicamos a expressão original por x^2. Definindo as funções:

$$\begin{cases} g(x) = -x^2 \\ f(x) = x^2 \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ h(x) = x^2 \end{cases}$$

observemos que $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Portanto, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

O gráfico seguinte ilustra o caso:



3. **Sobre o limite trigonométrico fundamental.**

   (a) Explique por que não podemos calcular diretamente $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$ usando as propriedades de limites.

   Solução:

   Inicialmente, observemos que não podemos meramente substituir o valor $x = 0$ na expressão $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ por issoresulta em uma indeterminação de tipo $0/0$. A mesma indeterminação aparece caso seja aplicada a propriedade do **quociente** de limites.

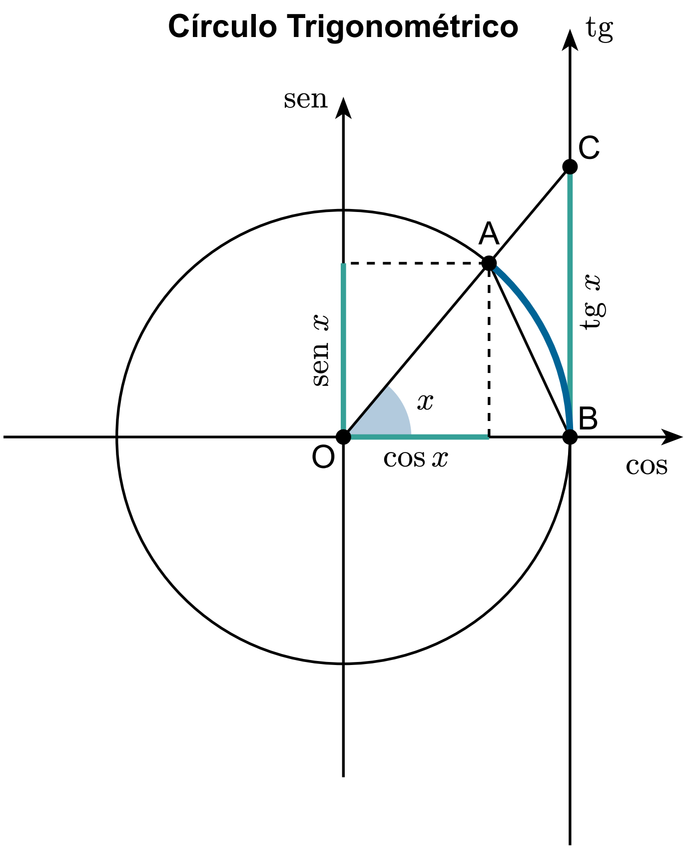
Além disso, dado que $\text{sen}\ x$ é uma função *transcendente* – isto é, não satisfaz nenhuma equação polinomial – não é possível fatorar a expressão $\dfrac{\text{sen}\ x}{x}$ de modo a de eliminar a causa da indeterminação por simplificação algébrica.

Portanto, o cálculo desse limite exige métodos adicionais, como argumentos geométricos ou resultados específicos sobre a função seno, não sendo acessível apenas pelas propriedades algébricas dos limites.

(b) Usando a interpretação geométrica, explique como o teorema do confronto pode ser usado para provar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\ x}{x} = 1$. (Dica: Para $0 < x < \pi/2$, compare as áreas do triângulo, setor circular e triângulo maior no círculo uniário.)

Solução:

Dado o círculo trigonométrico abaixo:



Consideremos as seguintes áreas:

$$\begin{cases} \text{Área do triângulo OAB: } \triangle\,(\text{OAB}) = \dfrac{1 \cdot \text{sen } x}{x} = \dfrac{\text{sen } x}{x} \\ \text{Área setor OAB: } \triangle\,(\text{OAB}) = \dfrac{x}{2\pi} \cdot (\pi \cdot 1^2) = \dfrac{x}{2} \\ \text{Área do triângulo OBC: } \triangle\,(\text{OBC}) = \dfrac{1 \cdot \text{tg } x}{2} = \dfrac{\text{tg } x}{2} \end{cases}$$

$$\triangle\,(\text{OAB}) < \triangle\,(\text{OAB}) < \triangle\,(\text{OBC}) \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2} \quad \left(\times \frac{2}{\text{sen } x}\right)$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

Observemos que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Portanto, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

O gráfico abaixo ilustra esse fato: