Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 09

1. Defina matematicamente o que significa $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, onde L é um número real.

   Solução:

   Significa dizer que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número real M tal que, para todo $x > M$, vale:

   $$|f(x) - L| < \varepsilon$$

   Em palavras, podemos tomar valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto quisermos, desde que escolhamos x suficientemente grande.

   ■

2. Calcule os limites abaixo:

   (a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

   Solução:

   $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1$$

   ■

   (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x-5}$

   Solução:

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(3 + \frac{1}{x})}{\cancel{x}(2 - \frac{5}{x})} = \frac{3}{2}$$

   ■

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{2x^2+x}$

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-1}{2x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x-1}{x^2+1}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=+\infty$$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Lembremos que

$$|x|=\begin{cases}x, \text{se } x\geq 0\\ -x, \text{se } x<0\end{cases}$$

Como estamos tomando o limite $x\to+\infty$, então vale $|x|=x$. Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

3. Determine todas as assíntotas horizontais das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Solução:

$$L_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(2+\frac{3}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} = \frac{2}{1} = 2$$

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(2+\frac{3}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} = \frac{2}{1} = 2$$

Logo, a reta $y = 2$ é um assíntota horizontal.

(b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

Solução:

$$L_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{1}{1} = 1$$

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, a reta $y = 1$ é um assíntota horizontal.

(c) $h(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

Solução:

$$L_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot\frac{3}{x}}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{0}{1} = 0$$

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot\frac{3}{x}}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{0}{1} = 0$$

Logo, a reta $y = 0$ (eixo-x) é um assíntota horizontal.