Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 11

1. Defina matematicamente o que significa uma função $f(x)$ ser contínua em um ponto $x = a$.

Solução:

Uma função f é **contínua** no ponto $x = a$ se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

i. $f(a)$ existe;

ii. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

iii. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se pelo menos uma dessas condições não forem verificadas em $x = a$, a função f é dita **descontínua** em a.

■

2. Em um país fictício, o imposto de renda é calculado pela função:

$$I(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r < 30.000 \\ 0,15 \cdot r, & \text{se } \quad\;\; r \geq 30.000 \end{cases}$$

onde r é a renda bruta mensal em reais e $I(r)$ é o imposto devido.

(a) Analise a continuidade desta função em $r = 30.000$.

Solução:

Vamos testar as condições de continuidade na resposta do item 1:

i. **A função existe no ponto?** Na definição por partes da função I, para $r = 30.000$, temos $I(r) = 0,15 \cdot 30.000 = 4.500$. Portanto, a função existe no ponto considerado.

ii. **O limite existe no ponto?** Calculemos os limites laterais:

$$\lim_{r \to 30.000^-} I(r) = 0$$

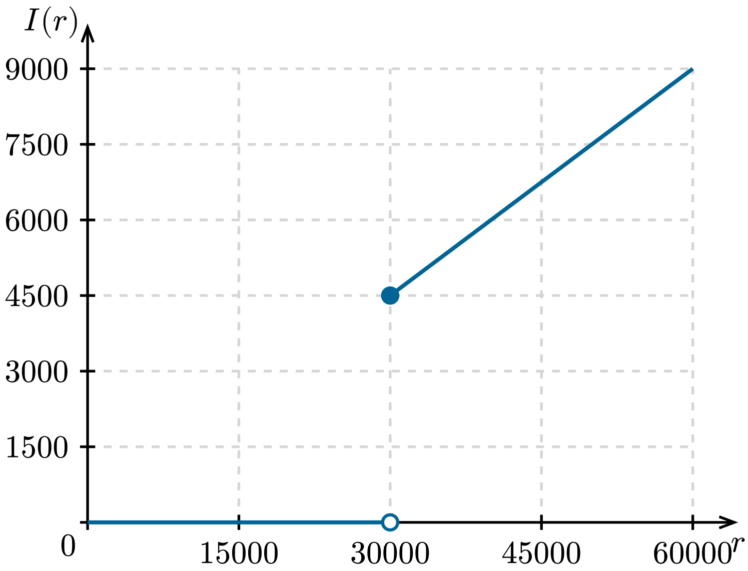
$$\lim_{r \to 30.000^+} I(r) = 0,15 \cdot 30.000 = 4.500$$

Portanto,

$$\lim_{r \to 30.000^-} I(r) \neq \lim_{r \to 30.000^+} I(r),$$

o limite não existe em $r = 30.000$.

Como a segunda condição não foi verificada, podemos concluir que a função $I(r)$ não é **contínua** em $r = 30.000$, como observamos no gráfico abaixo:



(b) Calcule a renda líquida (renda bruta menos imposto) para uma pessoa com renda bruta de R$ 28.000 e para outra com renda bruta de R$ 31.000. Explique a anomalia.

Solução:

- Pessoa 1:

$$r_1 = 28.000 < 30.000 \Rightarrow I_1 = I(r_1) = 0$$

$$l_1 = r_1 - I_1 = 28.000 - 0 = 28.000$$

- Pessoa 2:

$$r_2 = 31.000 > 30.000 \Rightarrow I_2 = I(r_2) = 0,15 \cdot 31.000 = 4.650$$

$$l_2 = r_2 - I_2 = 31.000 - 4.650 = 26.350$$

A renda bruta da pessoa 2 é 3.000 superior à renda bruta da pessoa 1. Entretanto, pelo fato de que estes valores encontram-se em regiões distindas do domínio de definição da função I, surge uma discrepância no valor do imposto devido. Como consequência, a renda líquida da pessoa 2 acaba sendo inferior à renda líquida da pessoa 1.

■

(c) Proponha uma nova função de imposto que seja contínua e elimine a anomalia.

Solução:

Propomos a nova função de imposto:

$$I(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r < 30.000 \\ 0,15 \cdot r + c, & \text{se } \quad r \geq 30.000 \end{cases}$$

em que c é uma constante a determinar a fim de satisfazer às condições de continuidade. Como nosso problema inicialmente residia no fato de que os limites laterais eram distintos, então, façamos:

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 30.000^-} I(r) = \lim_{r \to 30.000^+} I(r) &\Rightarrow 0 = 0,15 \cdot 30.000 + c \\ &\Rightarrow 0 = 4.500 + c \\ &\Rightarrow c = -4.500 \end{aligned}$$

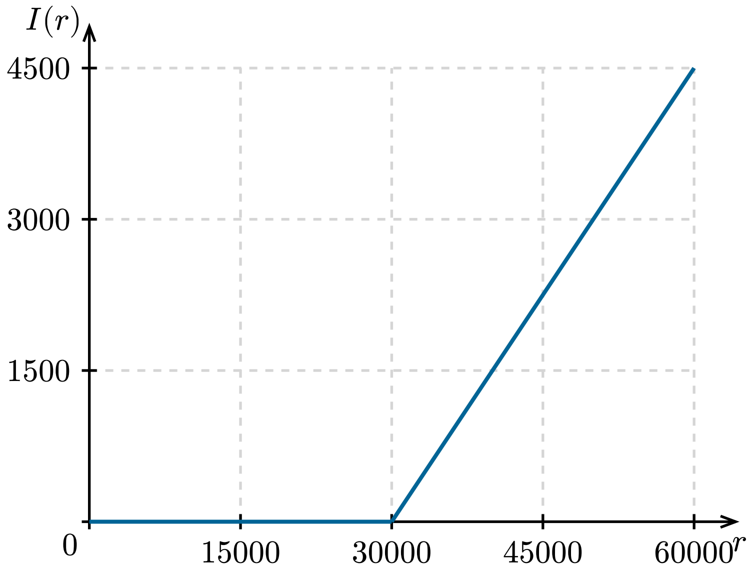
Com a nova função:

$$I(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r < 30.000 \\ 0,15 \cdot r - 4.500, & \text{se } \quad r \geq 30.000 \end{cases}$$

vemos que o limite $\lim\limits_{r \to 30.000}$ passa a existir e é igual 0.
Resta confirmar a terceira condição: **O limite no ponto é igual ao valor da função avaliada no ponto?** Façamos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{r \to 30.000} = 0 \\ \\ I(30.000) = 0.15 \cdot 30.000 - 4.500 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{r \to 30.000} = I(30.000)$$

Como ilustra o gráfico seguinte, a nova função de imposto é **contínua**:



Com essa correção, a situação tributária das pessoas 1 e 2 será a seguinte:

		Pessoa 1	**Pessoa 2**
	Renda Bruta	28000	31000
$(-)$	Imposto	(0)	(150)
$(=)$	**Renda Líquida**	**28000**	**30850**