



Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

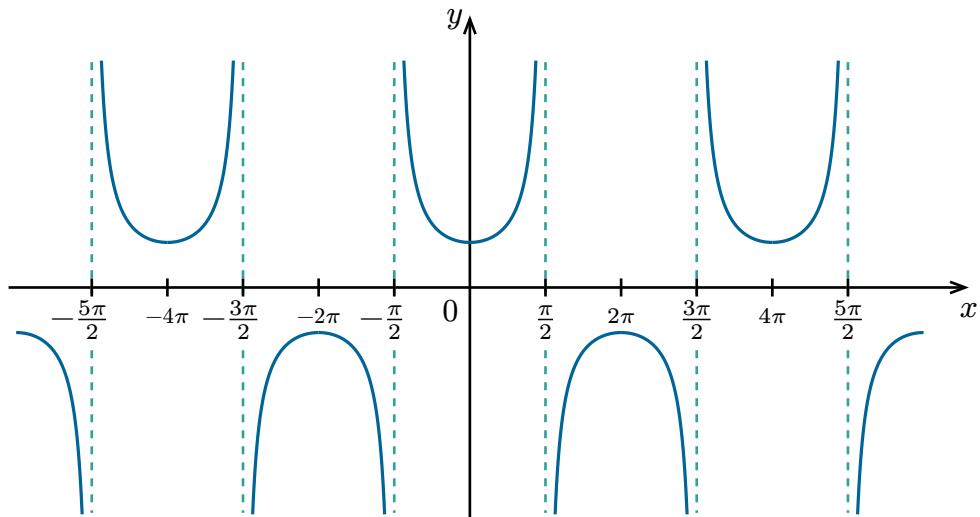
Lista de Exercícios - Aula 10

1. Determinie as assíntotas verticais da função $f(t) = \sec(t)$.

Solução:

Lembrando que $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$, a função $f(t)$ possui pontos de indeterminação nos valores de t para os quais $\cos(t) = 0$, ou seja, $f(t)$ não está definida para t tal que:

$$\cos(t) = 0 \Rightarrow t = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



2. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

Solução:

Partimos do fato de que a função $\sin x$ é limitada:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Como estamos tomando o limite x tendendo a $+\infty$, podemos multiplicar a desigualdade acima por $1/x$ sem alterar o sentido das desigualdades:

$$-1 \cdot \frac{1}{x} \leq \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x} \leq 1 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Finalmente, tomamos o limite $x \rightarrow +\infty$ dos três termos na desigualdade:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 0$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$



(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \cos x}{x^2 - 1}$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \cos x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{\cos x}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2}}{1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2} \end{aligned}$$

O último limite pode ser demonstrado lembrando que a função $\cos x$ é limitada.

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow -1 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \geq \cos x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 1 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{x^2} \geq \frac{\cos x}{x^2} \geq \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2} \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow 0 \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \cos x}{x^2 - 1} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 1$$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x}}{x}$

Solução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}} \\ &= \sqrt{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

A demonstração de que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = 0$ é idêntica ao caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ mostrado no item anterior.

3. Resolva os problemas abaixo:

- (a) A velocidade de um paraquedista é dada por $v(t) = 60(1 - e^{-0,2t})$ m/s. Qual é a velocidade terminal?

Solução:

$$v_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 60(1 - e^{-0,2t}) = 60 \text{ m/s}$$

- (b) A carga de um capacitor é dada por $Q(t) = 500\left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right) \mu\text{C}$. Qual é a carga final do capacitor?

Solução:

$$Q_{\text{final}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 500 \left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right) = 500 \mu\text{C}$$



- (c) Em um movimento mass-mola amortecido, a posição é dada por $x(t) = 3e^{-0.1t} \cos(2t)$ cm. Qual é a posição limite quanto $t \rightarrow +\infty$?

Solução:

$$x_{\text{limite}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3e^{-0.1t} \cos(2t)$$

Para resolver o limite acima, lembremos que a função cosseno é limitada. Então,

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(2t) \leq 1 &\Rightarrow -1 \cdot (3e^{-0.1t}) \leq \cos(2t) \cdot (3e^{-0.1t}) \leq 1 \cdot (3e^{-0.1t}) \\ &\Rightarrow -3e^{-0.1t} \leq 3e^{-0.1t} \cos(2t) \leq 3e^{-0.1t} \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (-3e^{-0.1t}) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} 3e^{-0.1t} \cos(2t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} 3e^{-0.1t} \\ &= 0 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} 3e^{-0.1t} \cos(2t) \leq 0 \end{aligned}$$

Pelo teorema do confronto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} 3e^{-0.1t} \cos(2t) = 0$. Portanto, $x_{\text{limite}} = 0$ cm.



4. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x}$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$$



(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$

Solução:

Seja $f(x) = e^x$ e a inversa $f^{-1}(x) = \ln x$. Sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$$

Solução:

Seja $f(x) = \tan x$ e a inversa $f^{-1}(x) = \arctan x$. Sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\pi/2^-} \tan x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$$

The diagram consists of two arrows pointing upwards. The left arrow originates from the expression $\lim_{x \rightarrow +\pi/2^-} \tan x = +\infty$ and points to the expression $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$. The right arrow originates from the expression $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}$ and points back to the expression $\lim_{x \rightarrow +\pi/2^-} \tan x = +\infty$.

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x$$

Solução:

Seja $f(x) = \cotg x$ ($\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$ e $\mathbb{I} = \mathbb{R}$) e a inversa $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$). Sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$

The diagram consists of two arrows pointing upwards. The left arrow originates from the expression $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty$ and points to the expression $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$. The right arrow originates from the expression $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$ and points back to the expression $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty$.

5. Determine todas as assíntotas (verticais e horizontais) das funções abaixo:

Critérios para Determinação de Assíntotas Verticais e Horizontais

i. Assíntotas Verticais

- Identificar candidatos, isto é, valores de x para os quais a função não está definida. Por exemplo:
 - o denominador se anula;
 - o argumento de logaritmos é nulo ou negativo;
 - o radicando de raízes de índice par é negativo.
- Para cada candidato $x = a$, determinar os limites laterais:
 - $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- Verificar **divergência**: se pelo menos um dos limites laterais for $+\infty$ ou $-\infty$, então a reta $x = a$ é uma assíntota vertical.

ii. Assíntotas Horizontais

- Determinar os limites no infinito:
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Verificar **convergência**: se algum dos limites existir for um número real finito L , então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal.

(a) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$

Solução:

- i. Assíntotas Verticais: Não existem, pois a função f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$
- ii. Assíntotas Horizontais:

- Limites no infinito:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} \\ &= \frac{2}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1 + 0} = 2\end{aligned}$$

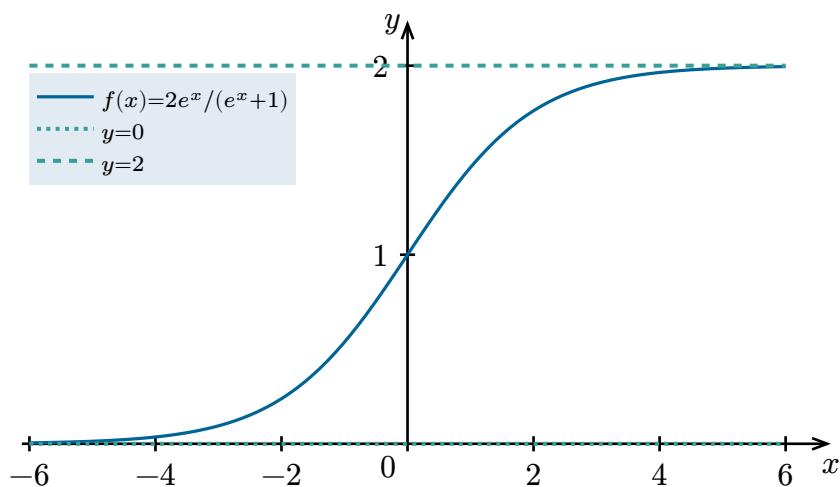
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} \\ &= \frac{2}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}} = 0\end{aligned}$$

pois $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Portanto, a função f não possui assíntotas verticais, mas possui os seguintes assíntotas horizontais:

- $y = 2$ quando $x \rightarrow +\infty$, e
- $y = 0$ quando $x \rightarrow -\infty$,

como ilustra o gráfico abaixo:



(b) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$

Solução:

i. Assíntotas Verticais:

- Pontos em que o denominador se anula:

$$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

- Determinar os limites laterais para o candidato $x = 0$

- ▶ Caso $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$$

Observemos que, quando $x \rightarrow 0^-$, o numerador tende a um valor negativo -1 . Por sua vez, como estamos tomando $x < 0$, o denominador $x^3 - x$ tende a zero, mas por valores também negativos. Assim, ao dividir o numerador negativo constante por valores negativos cada vez menores, o resultado é positivo e cresce indefinidamente. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = +\infty$$

- Caso $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$$

Observemos que, quando $x \rightarrow 0^+$, o numerador tende a um valor negativo -1 . Por sua vez, como estamos tomando $x > 0$, o denominador $x^3 - x$ tende a zero, mas por valores positivos. Assim, ao dividir o numerador negativo constante por valores positivos cada vez menores, o resultado é negativo e cresce indefinidamente. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = -\infty$$

Logo, como os dois limites laterais divergem, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical.

ii. Assíntotas Horizontais:

- Limites no infinito:

- Caso $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0^+ \end{aligned}$$

Note que, quando $x \rightarrow +\infty$, os termos $1 - \frac{1}{x}$ e $1 + \frac{1}{x^2}$ tendem ao valor constante positivo igual a 1. Por sua vez, $\frac{1}{x}$ tende a zero por valores positivos. Logo, o limite tende a 0^+ .

- Caso $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0^-\end{aligned}$$

Note que, quando $x \rightarrow -\infty$, os termos $1 - \frac{1}{x}$ e $1 + \frac{1}{x^2}$ tendem ao valor constante positivo igual a 1. Por sua vez, $\frac{1}{x}$ tende a zero por valores negativos. Logo, o limite tende a 0^- .

Portanto, a função g possui um assíntota vertical na reta $x = 0$ e assíntotas horizontais na reta $y = 0$, como ilustra o gráfico abaixo:

