Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

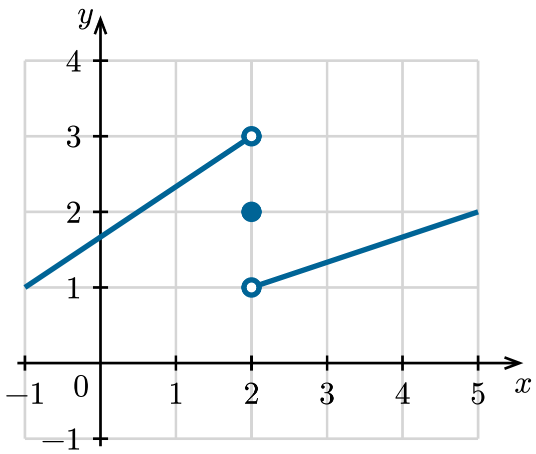
Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 05

1. **Análise de gráficos.** Para cada gráfico abaixo, determine os limites laterais e o limite (caso exista) no ponto indicado.

   (a) Deternine $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$



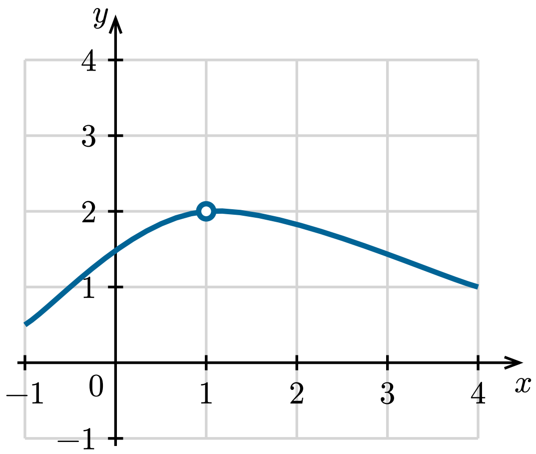
Solução:

Conforme se pode verificar no gráfico, os limites laterais são:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, então o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

   (b) Determine $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ e $\lim_{x\to 1} g(x)$.



Solução:

Os limites laterais são os seguintes:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2 \end{cases}$$

Como $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2$, então o limite no ponto existe e é igual a

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2.$$

2. **Funções definidas por partes.** Para cada função abaixo, determine se o limite existe no ponto indicado.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, \text{ se } & x<2 \\ 3x-1, \text{ se } & x \geq 2 \end{cases}$

   Determine $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

   Solução:

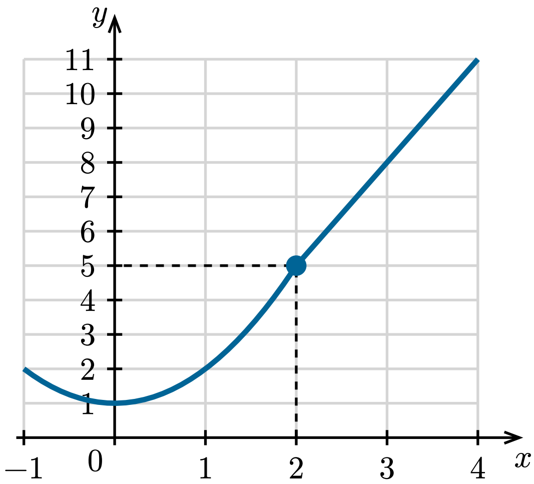
   Limites laterais:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+1) = 2^2+1 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-1) = 3\cdot 2 - 1 = 5 \end{cases}$$

   Como os limites laterais existem e são iguais, concluimos que o limite de f quando x tende a 2 existe e é igual a

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5,$$

   como se observa no gráfico abaixo:



   (b) $g(x) = \begin{cases} x^2-1, \text{ se } & x<0 \\ 2x+3, \text{ se } & x \geq 0 \end{cases}$

   Determine $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

   Solução:

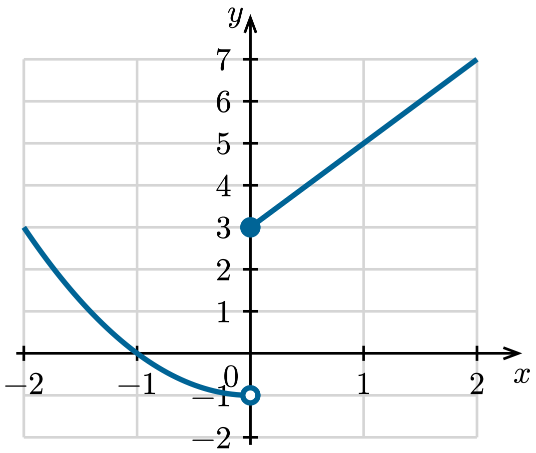
   Limites lateriais:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+3) = 3 \end{cases}$$

Os limites laterais existem. Entretanto, são diferentes. Portanto, o limite no ponto $x = 0$ não existe:

$$\lim_{x0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} g(x)$$

O gráfico abaixo ilustra o caso:



(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ se } \ x \neq 2 \\ 5, \text{ se } \ x = 2 \end{cases}$

Determine $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$.

Solução:

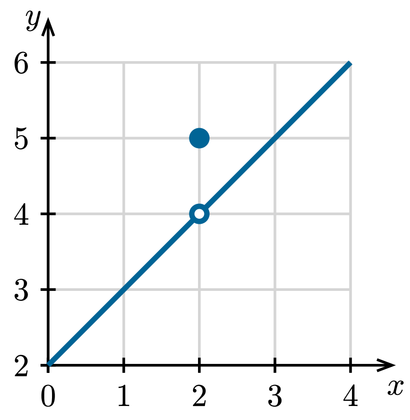
Limites laterais:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+2) = 4 \end{cases}$$

Portanto, omo $\lim\limits_{x\to 2+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2+} h(x) = 4$, então o limite no ponto $x = 2$ existe e é igual a

$$\lim_{x\to 2} h(x) = 4,$$

como se observa no gráfico abaixo.



3. **Determinação de constantes.** Para cada função abaixo, determine o valor da constante para que o limite exista.

   (a) $f(x) = \begin{cases} kx+1, \text{ se } & x<2 \\ x^2-1, \text{ se } & x \geq 2 \end{cases}$

   Determine k para que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista.

   Solução:

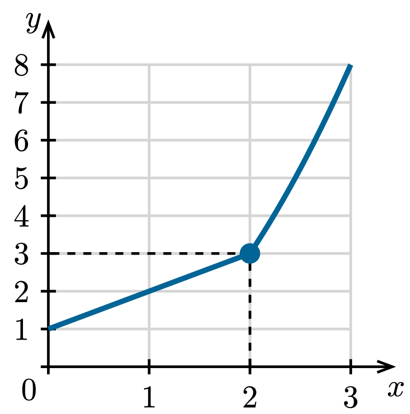
   Para que o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista, os limites laterais devem existir e ser iguais. Assim,

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (kx+1) = 2k+1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2-1) = 2^2-1=3 \end{cases}$$

   Devemos ter:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2k+1=3 \Rightarrow k=1.$$

   Redefinindo a função f com o valor de k encontrado acima, o limite em $x=2$ existe, conforme verificamos no gráfico seguinte:



$$f(x) = \begin{cases} x+1\ , \text{ se } & x < 2 \\ x^2 - 1, \text{ se } & x \geq 2 \end{cases}$$

■

(b) $g(x) = \begin{cases} x+3, \text{ se } & x < 1 \\ ax^2\quad , \text{ se } & x \geq 1 \end{cases}$

Determine a para que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ exista.

Solução:

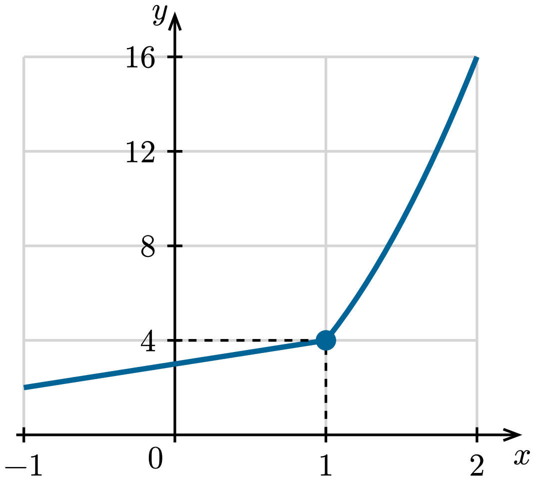
Para que o limite $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ exista, os limites laterais devem existir e ser iguais, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} (x+3) = \lim_{x \to 1^+} ax^2 \\ \Rightarrow 1 + 3 = a \cdot 1^2 \\ \Rightarrow 4 = a \\ \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

Redefinindo a função g como:

$$g(x) = \begin{cases} x+3, \text{ se } & x < 1 \\ 4x^2\quad , \text{ se } & x \geq 1 \end{cases}$$

o limite no ponto $x = 1$ existe e é igual a $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$, como se observa no gráfico abaixo:



■