Cálculo Essencial

Professor: Adail Cavalheiro

Aluno: Igo da Costa Andrade

MÓDULO 1
Superando Limites

Lista de Exercícios - Aula 13

1. Defina o que significa uma função ser contínua em um intervalo aberto (a, b) e em um intervalo fechado $[a, b]$.

   Solução:

   - **Continuidade em um intervalo aberto (a, b)**

     A função f é contínua no intervalo aberto (a, b) se ela for contínua em todo ponto $x_0 \in (a, b)$.

   - **Continuidade em um intervalo fechado $[a, b]$**

     A função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ se:
     - f é contínua em todo ponto do intervalo aberto (a, b);
     - f é contínua à direita em a; e
     - f é contínua à esquerda em b.

     Isto é, além da continuidade em (a, b), deve-se verificar:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = f(b).$$

2. Justifique por que as funções abaixo são contínuas nos seus respectivos domínios:

   (a) $f(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5x - 1$

   Solução:

   O domínio de f são todos os reais, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$. Assim, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, existe:

$$f(x_0) = 3x_0^4 - 2x_0^2 + 5x_0 - 1$$

Além disso,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (3x^4 - 3x^2 + 5x - 1) = 3x_0^4 - 2x_0^2 + 5x_0 - 1 = f(x_0)$$

Portanto, f é contínua para todo x real, ou seja, para todo $x \in D(f)$[1].

(b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

Solução:

A função racional g é definida para todo x real tal que o denominador não seja nulo, ou seja,

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Logo, o domínio de g é $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$. Assim, tomemos um número arbitrário $x_0 \in D(g)$. Temos que existe:

$$g(x_0) = \frac{x_0^2+1}{x_0^2-4}$$

Além disso, o limite de g no ponto $x_0 \in D(g)$ é:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} (x^2+1)}{\lim\limits_{x \to x_0} (x^2-4)} = \frac{x_0^2+1}{x_0^2-4} = g(x_0)$$

Portanto, g é contínua para todo $x \in D(g)$.

(c) $h(x) = \text{sen } x + \cos x$

Solução:

Tanto a função seno quanto a função cosseno são contínuas em toda a reta real. Assim, o domínio de h é $D(h) = \mathbb{R}$. Seja $x_0 \in D(h)$, então existe

$$h(x_0) = \text{sen } x_0 + \cos x_0$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} (\text{sen } x + \cos x) = \lim_{x \to x_0} \text{sen} x + \lim_{x \to x_0} \cos x = \text{sen } x_0 + \cos x_0 = h(x_0)$$

[1] O raciocínio vale para verificar a continuidade de qualquer função polinomial $f(x) = a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.

Portanto, h é contínua para todo $x \in D(h)$.

■

(d) $p(x) = \tan x$

Solução:

Consideremos a definição da função tangente:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Já sabemos que tanto o seno quanto o cosseno são funções contínuas para todos o reais. Entretanto, pela definição da tangente, o denominador acima não pode ser zero, ou seja,

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Então, o domínio de p é $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Tomando $x_0 \in D(p)$, temos que existe:

$$p(x_0) = \tan x_0$$

Além disso,

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = \lim_{x \to x_0} \tan x = \lim_{x \to x_0} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \text{sen } x}{\lim\limits_{x \to x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \tan x_0$$

Portanto, p é contínua para todo $x \in D(p)$.

■

3. Analise a continuidade das funções nos intervalos dados:

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ em $[-2, 3]$

Solução:

Sabemos que toda função polinomial é contínua em todo real[2]. Como o intervalo $[-2, 3]$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, segue que a função f é contínua no intervalo fechado $[-2, 3]$.

[2]Não há pontos de descontinuidade, pois a função não apresenta denominadores, radicais com restrições ou logaritmos.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ em $(0,2)$

Solução:

O domínio de g é $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$, pois o valor de x para o qual o denominador é nulo, é o único ponto no qual a função não está definida. Note que o ponto $x = 1$ percente ao intervalo aberto $(0,2)$. Assim, g **não é contínua** no intervalo.

(c) $h(x) = \operatorname{sen} x$ em $[0, 2\pi]$

Solução:

A função seno é contínua em toda a reta real. Logo, no intervalo $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, g é contínua.

(d) $p(x) = \tan x$ em $[0, \pi]$

Solução:

A função tangente não está definida em $x = \pi/2 \in [0, \pi]$. Logo, h não é contínua no intervalo fechado.

(e) $q(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ em $[-3, 1]$

Solução:

O domínio de q é $D(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$. Note que $-2 \in [-3, 1]$. Logo, q não é contínua em $[-3, 1]$.

(f) $r(x) = \sec x$ em $[-\pi, \pi]$

Solução:

A função secante ($\sec(x)$) é uma função trigonométrica definida como o inverso do cosseno, ou seja, $\sec x = 1/\cos x$. Por um lado, a função cosseno é contínua em toda a reta real. Entretanto, da defninição da secante, essa função não é definida para os valores de x tais que $\cos x = 0$. Assim, o domínio de r é:

$$D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$$

$$D(r) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Note que $\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$ é um ponto em que a função secante não está definida. Portanto, r não é contínua em $[-\pi, \pi]$.

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Esta função é contínua em $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

Solução:

Consideremos cada região de refinição de f:

- Para $x \leq 1$, ou seja, no intervalo $(-\infty, 1]$, f é dada por x^2. Como toda função polinomial, f é contínua *nesse* intervalo. Em particular,

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \\ f(1) = 1^2 = 1 \end{cases}$$

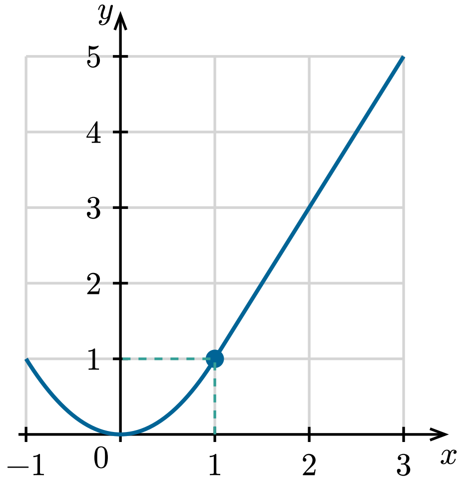
- Para $x > 1$, ou seja, no intervalo $(1, +\infty)$, a função f é definida por $2x - 1$ que é contínua em todo $\mathbb{R}$, Assim, f é contínua no intervalo $(1, +\infty)$. Em particular,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

- Então,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

Logo, f é contínua em toda a reta real $\mathbb{R}$, como se observa no gráfico seguinte:



y
5
4
3
2
1
−1
0
1
2
3
x