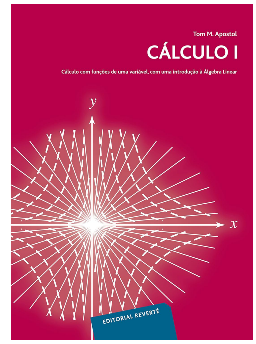
Resolução de Problemas do Livro

Cálculo: Volume I (Apostol, T. M.)

por

Igo da Costa Andrade



Referência

APOSTOL, T. M.. **Cálculo**: Volume I. México, Editorial Reverté, 2001.

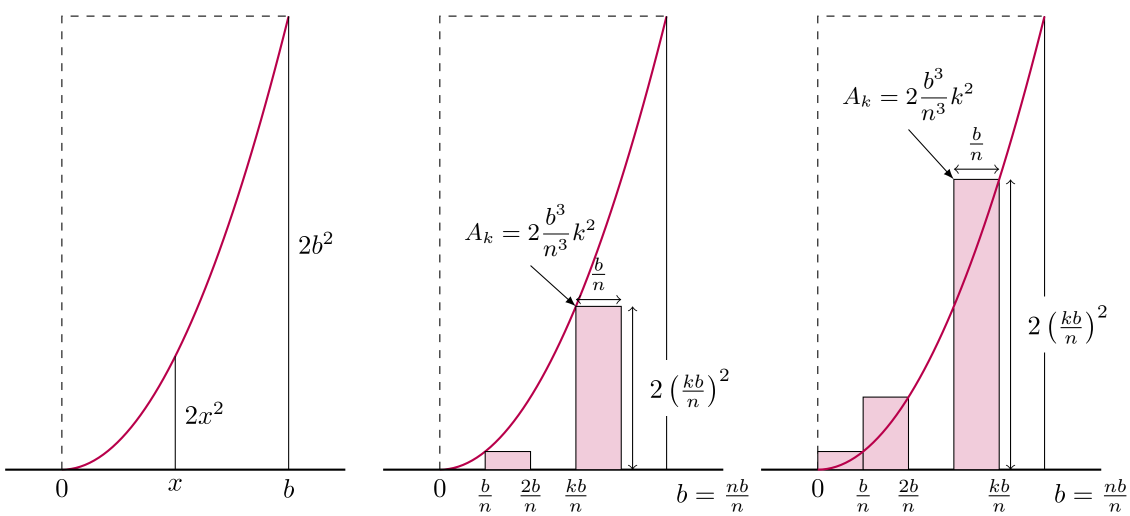
Capítulo I: Introdução

I 1.4 Exercícios - p. 9

1 (a) Modificar a região na figura I.3 tomando como ordenada para cada x o valor $2x^2$ em vez de x^2. Desenhar a nova figura. Seguindo neste caso os passos principais de desenvolvimento anterior e comparando ambos, estudando a repercussão da mudança no cálculo de A.

Solução:

Figure 1: Cálculo da área do segmento parabólico mediante aproximação por falta e por excesso



(a) $y = 2x^2$ (b) Por falta (c) Por excesso

(a) Consideremos um segmento parabólico da função $y = 2x^2$ no intervalo $[0, b]$. Dividimos esse intervalo em n segmentos de comprimento $\dfrac{b}{n}$. Sobre tais segmentos, construímos retângulos inferiores à parábola. Assim, o $k-$ésimo segmento terá altura igual a $2\left(\frac{kb}{n}\right)^2$ e área :

$$A_k = 2\frac{b^3}{n^3}k^2$$

em que $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Dessa forma, somando todos os retângulos inferiores, obtemos a aproximação por falta s_n para a área do segmento parabólico:

$$\begin{aligned} s_n &= 2\frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + (n-1)^2\right] \\ &= 2\frac{b^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \\ &= \frac{2b^3}{3} - \frac{b^3}{n} + \frac{b^3}{3n^2} \end{aligned}$$

Analogamente, ao aproximar a área do segmento parabólico por retângulos exteriores, obtemos o seguinte somatório:

$$\begin{aligned} S_n &= 2\frac{b^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + (n-1)^2\right] \\ &= 2\frac{b^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \\ &= \frac{2b^3}{3} + \frac{b^3}{n} + \frac{b^3}{3n^2} \end{aligned}$$

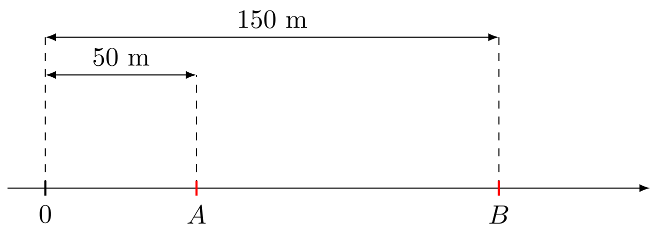
Note-se que a desigualdade

$$s_n < \frac{2b^3}{3} < S_n$$

deve ser válida para cada valor de n, donde concluímos que a área do segmento parabólico $[0, b]$ da função $y = 2x^2$ deve ser $A = \frac{2b^3}{3}$.

■

2 (FEI-SP) Dois móveis A e B, ambos com movimento uniforme, percorrem uma trajetória retilínea conforme mostra a figura. Em $t = 0$, estes se encontram, respectivamente, nos pontos A e B na trajetória. As velocidades dos móveis são $v_A = 50$ m/s e $v_B = 30$ m/s no mesmo sentido.



Em que instante a distância entre os dois móveis será 50 m?

(a) 200 m
(b) 225 m
(c) 250 m
(d) 300 m
(e) 350 m

Solução:

Escrevamos as equações horárias das trajétórias dos móveis A e B, sabendo que ambos descrevem movimento uniforme:

$$\begin{cases} s_A = s_{0A} + v_A t \\ s_B = s_{0B} + v_B t \end{cases}$$

Os móveis encontram-se no instante t^* tal que $s_A = s_B = s^*$, ou seja:

$$\begin{aligned} s_A = s_B &\Rightarrow s_{0A} + v_A t^* = s_{0B} + v_B t^* \\ &\Rightarrow v_A t^* - v_B t^* = s_{0B} - s_{0A} \\ &\Rightarrow (v_A - v_B) t^* = s_{0B} - s_{0A} \\ &\Rightarrow t^* = \frac{s_{0B} - s_{0A}}{v_A - v_B} \end{aligned}$$

Nesse instante, a posição s^* dos móveis será:

$$s^* = s_{0A} + v_A t^* \Rightarrow s^* = s_{0A} + v_A \left(\frac{s_{0B} - s_{0A}}{v_A - v_B} \right)$$

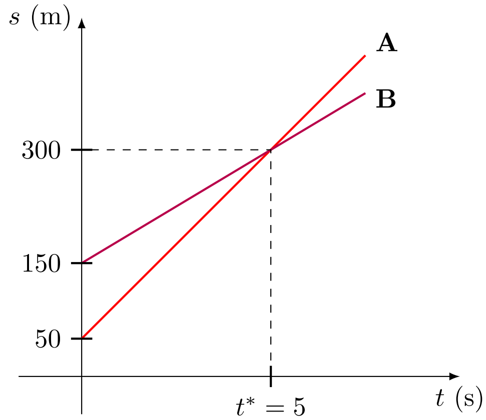
O script `Python` abaixo mostra o resultano numérico correspondente ao desenvolvimento algébrico acima:

```python
# Dados do problema
s_0A = 50
v_A = 50
s_0B = 150
v_B = 30
```

```
# Instante do encontro
t_star = (s_0B - s_0A) / (v_A - v_B)

# Posição do encontro
s_star = s_0A + v_A * t_star
```

Os móveis encontram-se no instante $t^* = 5$ s e na posição $s^* = 300$ m.
O gráfico abaixo mostra a posição de cada móvel em função do tempo, bem como o ponto de encontro.



Portanto, a resposta correta é letra **D**.

■