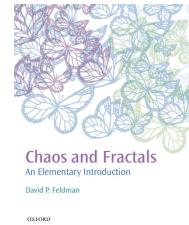


Chaos and Fractals

Feldman, D. P.

Resoluções por
Igo da Costa Andrade



Capítulo 2: Interacting Functions

Exercises

1. Seja g a função de duplicação. Determine os cinco primeiros números da órbita para as seguintes sementes:

- (a) $x_0 = -2$
- (b) $x_0 = -0.5$
- (c) $x_0 = 0$
- (d) $x_0 = 0.5$
- (e) $x_0 = 2$

Solução:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
x_0	-2,0000	-0,5000	0,0000	0,5000	2,0000
x_1	-4,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	4,0000
x_2	-8,0000	-2,0000	0,0000	2,0000	8,0000
x_3	-16,0000	-4,0000	0,0000	4,0000	16,0000
x_4	-32,0000	-8,0000	0,0000	8,0000	32,0000
x_5	-64,0000	-16,0000	0,0000	16,0000	64,0000

2. Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Determine os cinco primeiros números da órbita para as seguintes sementes:

- 1. $x_0 = 0$

2. $x_0 = \frac{1}{2}$
3. $x_0 = 1$
4. $x_0 = 2$
5. $x_0 = 4$

Solução:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
x_0	0,0000	0,5000	1,0000	2,0000	4,0000
x_1	0,0000	0,7071	1,0000	1,4142	2,0000
x_2	0,0000	0,8409	1,0000	1,1892	1,4142
x_3	0,0000	0,9170	1,0000	1,0905	1,1892
x_4	0,0000	0,9576	1,0000	1,0443	1,0905
x_5	0,0000	0,9786	1,0000	1,0219	1,0443



3. Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Complete a seguinte tabela para f .

x_0	9	
x_1		
x_2		
x_3		
x_4		

Solução:

x_0	9,0000
x_1	3,0000
x_2	1,7321
x_3	1,3161
x_4	1,1472

(b) Determine uma fórmula para $f^{(2)}(x)$.

Solução:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f^{(2)}(x) = f(f(x)) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$f^{(2)}(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$f^{(2)}(x) = x^{\frac{1}{4}}$$

(c) Determine uma fórmula para $f^{(3)}(x)$.

Solução:

$$f^{(3)} = f(f^{(2)}(x)) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$$

(d) Determine uma fórmula para $f^{(4)}(x)$.

Solução:

$$f^{(4)} = f(f^{(3)}(x)) = \left(x^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{16}}$$

(e) Determine uma fórmula para $f^{(n)}(x)$, a n -ésima x iteração de x .

Solução:

As fórmulas obtidas para $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$ e $f^{(4)}(x)$ obtidas nos itens anteriores sugerem a seguinte fórmula geral para o n -ésimo termo $f^{(n)}(x)$ da órbita de x :

$$f^{(n)}(x) = x^{\frac{1}{2^n}}$$

De fato,

$$f^{(2)}(x) = x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2^2}}$$

$$f^{(3)}(x) = x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2^3}}$$

$$f^{(4)}(x) = x^{\frac{1}{16}} = x^{\frac{1}{2^4}}$$

Para demonstrar a fórmula geral, utilizamos o Princípio de Indução Matemática¹: Note que para $n = 1$, a fórmula proposta é verdadeira, visto que corresponde à definição da função f :

$$f^{(1)}(x) = x^{\frac{1}{2^1}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = f(x).$$

Isso demonstra o passo base da indução. Suponhamos que para algum $k \geq 1$ seja verdadeira a fórmula proposta, ou seja, é verdade que:

$$f^{(k)}(x) = x^{\frac{1}{2^k}}$$

Então,

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f\left(x^{\frac{1}{2^k}}\right) = \left(x^{\frac{1}{2^k}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^{k+1}}}$$

Portanto, como a proposição é verdadeira para o caso base e foi provada verdadeira no passo indutivo, segue pelo Princípio da Indução Matemática que ela é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.



4. Considere a função $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

(a) Complete a seguinte tabela para f .

x_0	2	
x_1		
x_2		
x_3		
x_4		

¹**Princípio de Indução Matemática:** Seja $P(n)$ uma proposição definida para todo número natural $n \geq n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$. Se:

1. (Passo base) $P(n_0)$ é verdadeira;
2. (Passo indutivo) Para todo $k \geq n_0$, a veracidade de $P(k)$ implica a veracidade de $P(k + 1)$;

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Em particular, quando $n_0 = 1$, a proposição vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução:

x_0	2,0000
x_1	5,0000
x_2	6,5000
x_3	7,2500
x_4	7,6250



5. Seja $f(x) = 3x - 1$

(a) calcule $f^2(1)$ e $(f(1))^2$.

Solução:

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} f^{(2)}(1) = f(f(1)) = f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ (f(1))^2 = 2^2 = 4 \end{cases}$$



(b) As duas quantidades são iguais? Deveriam ser?

Solução:

No item anterior, obtivemos $f^2(1) \neq (f(1))^2$. De fato, a igualdade entre estas quantidades só ocorreria por coincidência. Tratam-se de dois conceitos distintos. Enquanto $f^2(x)$ corresponde à segunda iterada da função f , ou seja, à composta $f(f(x))$, $(f(x))^2$ é a segunda potência de $f(x)$.



6. Considere a função $f(x) = (x + 3)^2$.

(a) Complete a seguinte tabela para f .

x_0	2
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

Solução:

x_0	2,0
x_1	25,0
x_2	784,0
x_3	619.369,0
x_4	383.621.674.384,0



7. Seja $f(x) = x^2$. Determine uma expressão algébrica para:

(a) $f^{(2)}(x)$

Solução:

$$f^{(2)} = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^{2^2} = x^4$$



(b) $f^{(3)}(x)$

Solução:

$$f^{(3)} = f(f^{(2)}(x)) = f(x^4) = (x^4)^2 = x^{4 \cdot 2} = x^{2^3} = x^8$$



(c) $f^{(n)}(x)$

Solução:

Os resultados anteriores sugerem a seguinte fórmula geral para $f^{(n)}(x)$:

$$x^{2^n}$$

Para $n = 1$, a fórmula proposta é imediatamente verdadeira. Suponhamos que para algum $k \geq 1$, a fórmula proposta seja verdadeira. Então, para $n = k + 1$, temos:

$$f^{(k+1)} = f(f^k(x)) = f(x^{2^k}) = (x^{2^k})^2 = x^{2^k \cdot 2} = x^{2^k \cdot 2^1} = x^{2^{k+1}}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula

$$f^{(n)}(x) = x^{2^n}$$

é verdadeira.



8. Seja $h(x) = 3x - 1$. Determine o valor numérico de:

(a) $h^{(2)}(1)$

Solução:

$$h(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow h^{(2)}(1) = h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$



(b) $h^{(2)}(3)$

Solução:

$$h(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow h^{(2)}(1) = h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$



(c) $h^{(4)}\left(\frac{2}{3}\right)$

Solução:

$$h\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 = 1 \Rightarrow h^{(2)}\left(\frac{2}{3}\right) = h\left(h\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow h^{(3)}\left(\frac{2}{3}\right) = h\left(h^{(2)}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$\Rightarrow h^{(4)}\left(\frac{2}{3}\right) = h\left(h^{(3)}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$$

(d) $h^{(3)}(2)$

Solução:

$$\begin{aligned} h(2) &= 3 \cdot 2 - 1 = 5 \Rightarrow h^{(2)}(2) = h(h(2)) = h(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14 \\ &\Rightarrow h^{(3)}(2) = h(h^{(2)}(2)) = h(14) = 3 \cdot 14 - 1 = 41 \end{aligned}$$

9. Seja $g(x)$

Referências

FELDMAN, D. P. **Chaos and Fractals**. : #book.subtitle. Oxford: Oxford University Press, 2012.