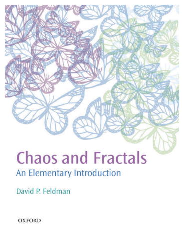
Chaos and Fractals

Feldman, D. P.

Resoluções por

Igo da Costa Andrade



Capítulo 2: Interacting Functions

Exercises

1. Seja g a função de duplicação. Determine os cinco primeiros números da órbita para as seguintes sementes:
   (a) $x_0 = -2$
   (b) $x_0 = -0.5$
   (c) $x_0 = 0$
   (d) $x_0 = 0.5$
   (e) $x_0 = 2$

   Solução:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
x_0	-2,0000	-0,5000	0,0000	0,5000	2,0000
x_1	-4,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	4,0000
x_2	-8,0000	-2,0000	0,0000	2,0000	8,0000
x_3	-16,0000	-4,0000	0,0000	4,0000	16,0000
x_4	-32,0000	-8,0000	0,0000	8,0000	32,0000
x_5	-64,0000	-16,0000	0,0000	16,0000	64,0000

■

2. Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Determine os cinco primeiros números da órbita para as seguintes sementes:
   1. $x_0 = 0$

2. $x_0 = \frac{1}{2}$
3. $x_0 = 1$
4. $x_0 = 2$
5. $x_0 = 4$

Solução:

	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**
x_0	0,0000	0,5000	1,0000	2,0000	4,0000
x_1	0,0000	0,7071	1,0000	1,4142	2,0000
x_2	0,0000	0,8409	1,0000	1,1892	1,4142
x_3	0,0000	0,9170	1,0000	1,0905	1,1892
x_4	0,0000	0,9576	1,0000	1,0443	1,0905
x_5	0,0000	0,9786	1,0000	1,0219	1,0443

3. Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Complete a seguinte tabela para f.

x_0	9
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

Solução:

x_0	9,0000
x_1	3,0000
x_2	1,7321
x_3	1,3161
x_4	1,1472

(b) Determine uma fórmula para $f^{(2)}(x)$.

Solução:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f^{(2)}(x) = f(f(x)) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$f^{(2)}(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$f^{(2)}(x) = x^{\frac{1}{4}}$$

(c) Determine uma fórmula para $f^{(3)}(x)$.

Solução:

$$f^{(3)} = f\left(f^{(2)}(x)\right) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$$

(d) Determine uma fórmula para $f^{(4)}(x)$.

Solução:

$$f^{(4)} = f\left(f^{(3)}(x)\right) = \left(x^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{16}}$$

(e) Determine uma fórmula para $f^{(n)}(x)$, a n-ésima x iteração de x.

Solução:

As fórmulas obtidas para $f^{(2)}(x), f^{(3)}(x)$ e $f^{(4)}(x)$ obtidas nos itens anteriores sugerem a seguinte fórmula geral para o n-ésimo termo $f^{(n)}(x)$ da órbita de x:

$$f^{(n)}(x) = x^{\frac{1}{2^n}}$$

De fato,

$$f^{(2)}(x) = x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2^2}}$$

$$f^{(3)}(x) = x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2^3}}$$

$$f^{(4)}(x) = x^{\frac{1}{16}} = x^{\frac{1}{2^4}}$$

Para demonstrar a fórmula geral, utilizamos o Princípio de Indução Matemática[1]: Note que para $n = 1$, a fórmula proposta é verdadeira, visto que corresponde à definição da função f:

$$f^{(1)}(x) = x^{\frac{1}{2^1}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = f(x).$$

Isso demonstra o passo base da indução. Suponhamos que para algum $k \geq 1$ seja verdadeira a fórmula proposta, ou seja, é verdade que:

$$f^{(k)} = x^{\frac{1}{2^k}}$$

Então,

$$f^{k+1}(x) = f\big(f^k(x)\big) = f\left(x^{\frac{1}{2^k}}\right) = \left(x^{\frac{1}{2^k}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^{k+1}}}$$

Portanto, como a proposição é verdadeira para o caso base e foi provada verdadeira no passo indutivo, segue pelo Princípio da Indução Matemática que ela é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

4. Considere a função $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$.
   (a) Complete a seguinte tabela para f.

x_0	2
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

[1]**Princípio de Indução Matemática**: Seja $P(n)$ uma proposição definida para todo número natual $n \geq n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$. Se:
1. (Passo base) $P(n_0)$ é verdadeira;
2. (Passo indutivo) Para todo $k \geq n_0$, a veracidade de $P(k)$ implica a veracidade de $P(k+1)$;

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Em particular, quando $n_0 = 1$, a proposição vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução:

x_0	2,0000
x_1	5,0000
x_2	6,5000
x_3	7,2500
x_4	7,6250

■

5. Seja $f(x) = 3x - 1$
   (a) calcule $f^2(1)$ e $(f(1))^2$.

   Solução:

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} f^{(2)}(1) = f(f(1)) = f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ (f(1))^2 = 2^2 = 4 \end{cases}$$

■

   (b) As duas quantidade são iguais? Deveriam ser?

   Solução:

   No item anterior, obtivemos $f^2(1) \neq (f(1))^2$. De fato, a igualdade entre estas quantidade só ocorreria por coincidência. Tratam-se de dois conceitos distintos. Enquanto $f^2(x)$ corresponde à segunda iterada da função f, ou seja, à composta $f(f(x))$, $(f(x))^2$ é a segunda potência de $f(x)$.

■

6. Considere a função $f(x) = (x+3)^2$.
   (a) Complete a seguinte tabela para f.

x_0	2
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

Solução:

x_0	2,0
x_1	25,0
x_2	784,0
x_3	619.369,0
x_4	383.621.674.384,0

7. Seja $f(x) = x^2$. Determine uma expressão algébrica para:

   (a) $f^{(2)}(x)$

   Solução:

$$f^{(2)} = f(f(x)) = f(x^2) = \left(x^2\right)^2 = x^{2\cdot 2} = x^{2^2} = x^4$$

   (b) $f^{(3)}(x)$

   Solução:

$$f^{(3)} = f\left(f^{(2)}(x)\right) = f(x^4) = \left(x^4\right)^2 = x^{4\cdot 2} = x^{2^3} = x^8$$

   (c) $f^{(n)}(x)$

   Solução:

Os resultados anteriores sugerem a seguinte fórmula geral para $f^{(n)}(x)$:

$$x^{2^n}$$

Para $n = 1$, a fórmula proposta é imediatamente verdadeira. Suponhamos que para algum $k \geq 1$, a fórmula proposta seja verdadeira. Então, para $n = k + 1$, temos:

$$f^{(k+1)} = f\left(f^k(x)\right) = f\left(x^{2^k}\right) = \left(x^{2^k}\right)^2 = x^{2^k \cdot 2} = x^{2^k \cdot 2^1} = x^{2^{k+1}}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula

$$f^{(n)}(x) = x^{2^n}$$

é verdadeira.

■

8. Seja $h(x) = 3x - 1$. Determine o valor numérico de:

(a) $h^{(2)}(1)$

Solução:

$$h(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow h^{(2)}(1) = h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

■

(b) $h^{(2)}(3)$

Solução:

$$h(1) = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \Rightarrow h^{(2)}(3) = h(8) = 3 \cdot 8 - 1 = 23$$

■

(c) $h^{(4)}\left(\frac{2}{3}\right)$

Solução:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 = 1 \Rightarrow h^{(2)}\left(\frac{2}{3}\right) &= h\left(h\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \\ \Rightarrow h^{(3)}\left(\frac{2}{3}\right) &= h\left(h^{(2)}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ \Rightarrow h^{(4)}\left(\frac{2}{3}\right) &= h\left(h^{(3)}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14 \end{aligned}$$

■

(d) $h^{(3)}(2)$

Solução:

$$\begin{aligned} h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \Rightarrow h^{(2)}(2) = h(h(2)) = h(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14 \\ \Rightarrow h^{(3)}(2) = h\big(h^{(2)}(2)\big) = h(14) = 3 \cdot 14 - 1 = 41 \end{aligned}$$

■

9. Seja $g(x) = x^2 + 1$. Determine o valor numérico de:

(a) $g^{(2)}(1)$

Solução:

$$g(1) = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow g^{(2)}(1) = g(g(1)) = g(2) = 2^2 + 1 = 5$$

■

(b) $g^{(2)}(3)$

Solução:

$$g(3) = 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow g^{(2)}(3) = g(g(3)) = g(10) = 10^2 + 1 = 101$$

■

(c) $g^{(4)}(0)$

Solução:

$$\begin{aligned} g(0) = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow g^{(2)}(0) = g(g(0)) \quad &= g(1) = 1^2 + 1 = \ \ 2 \\ \Rightarrow g^{(3)}(0) = g\big(g^{(2)}(0)\big) &= g(2) = 2^2 + 1 = \ \ 5 \\ \Rightarrow g^{(4)}(0) = g\big(g^{(3)}(0)\big) &= g(5) = 5^2 + 1 = 26 \end{aligned}$$

■

(d) $g^{(3)}(2)$

Solução:

$$
\begin{aligned}
g(2) = 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow g^{(2)}(2) = g(g(2)) &= g(5) &= 5^2 + 1 &= 26 \\
\Rightarrow g^{(3)}(2) = g\big(g^{(2)}(2)\big) = g(26) = 26^2 + 1 = 676
\end{aligned}
$$

10. Seja $f(x) = x^2 - 1$. Determine uma expressão algébrica para $f^{(2)}(x)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f^{(2)}(x) &= f(f(x)) = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1 \\
\Rightarrow f^{(2)}(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 - 1 \\
\Rightarrow f^{(2)}(x) &= x^4 - 2x^2
\end{aligned}
$$

11. Seja $f(x) = 3x - 1$. Determine uma expressão algébrica para $f^{(2)}(x)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f^{(2)}(x) &= f(f(x)) = 3(3x - 1) - 1 \\
\Rightarrow f^{(2)}(x) &= 9x - 4
\end{aligned}
$$

12. Consideremos novamente a função para população de coelhos do capítulo anterior. A função é mostrada na Fig. 2.2. Determine:

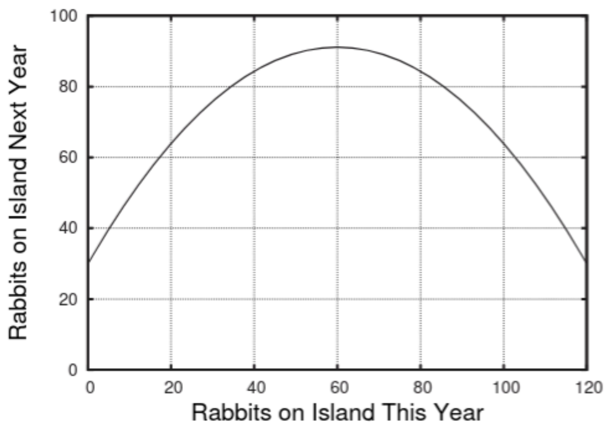


Fig. 2.2 The rabbit population on an island next year as a function of the number of rabbits on the island this year. See Exercise 2.12.

(a) $P(50)$

(b) $P^{(2)}(75)$

(c) $P^{(3)}(10)$

Solução:

$$P(50) \approx 90$$

$$P(75) \approx 90 \Rightarrow P^{(2)}(75) = P(P(75)) = P(90) \approx 70$$

$$P(10) \approx 50 \Rightarrow P^{(2)}(10) = P(50) \approx 90 \Rightarrow P^{(3)}(10) = P\big(P^{(2)}(10)\big) = p(90) \approx 70$$

13. Considere a função f definida na Fig. 2.3. Determine:

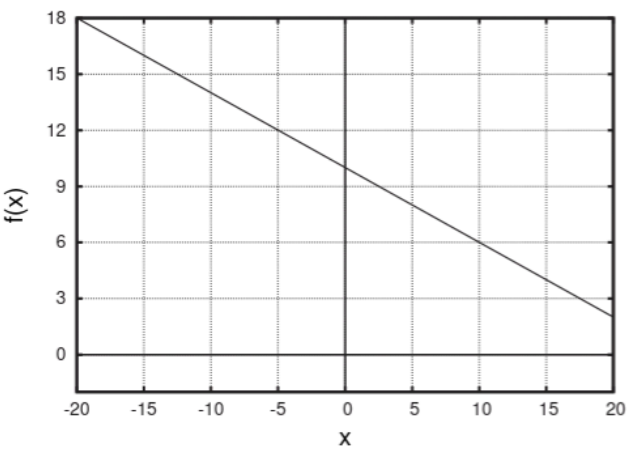


Fig. 2.3 The function for Exercise 2.13.

(a) $f(-5)$

Solução:

$$f(-5) = 12$$

(b) $f^{(2)}(-5)$

Solução:

$$f^{(2)}(-5) = f(f(-5)) = f(12) \approx 5$$

(c) As primeiras quatro iterações de 0.

Solução:

$$f(0) \approx 10$$
$$f^{(2)}(0) = f(10) = 6$$
$$f^{(3)}(0) = f\big(f^{(2)}(0)\big) = f(6) \approx 7$$
$$f^{(4)}(0) = f\big(f^{(3)}(0)\big) = f(7) \approx 7,5$$

(d) As primeiras quatro iterações de -15.

Solução:

$$f(-15) \approx 16$$
$$f^{(2)}(-15) = f(16) = 3$$
$$f^{(3)}(-15) = f\big(f^{(2)}(-15)\big) = f(3) \approx 9$$
$$f^{(4)}(-15) = f\big(f^{(3)}(-15)\big) = f(9) \approx 7$$

14. Considere a função $f(x)$ mostrada na Fig. 2.4. Determine:

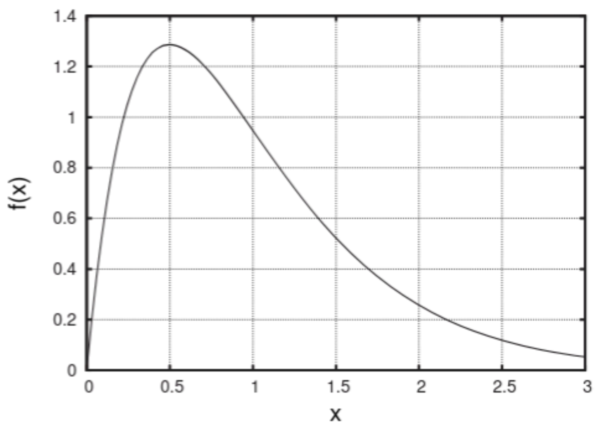


Fig. 2.4 The function for Exercise 2.14.

(a) As primeiras três iterações de 0.5.

Solução:

$$f(0,5) \approx 1,3$$
$$f^{(2)}(0,5) = f(f(0,5)) = f(1,3) \approx 0,7$$
$$f^{(3)}(0,5) = f\big(f^{(2)}(0,5)\big) = f(0,7) \approx 1,1$$

■

(b) As primeiras três iterações de 2.0.

Solução:

$$f(2,0) \approx 0,25$$
$$f^{(2)}(2,0) = f(f(2,0)) = f(0,25) \approx 1,1$$
$$f^{(3)}(2,0) = f\big(f^{(2)}(2,0)\big) = f(1,1) \approx 0,8$$

■

15. Seja g a função elevar ao quadrado: $g(x) = x^2$.

(a) Calcule as cinco primeiras iterações de 2.

Solução:

$$g(2) = 2^2 = 4$$
$$g^{(2)}(2) = g(g(2)) = g(4) = 4^2 = 16$$
$$g^{(3)}(2) = g\big(g^{(2)}(2)\big) = g(16) = 16^2 = 256$$
$$g^{(4)}(2) = g\big(g^{(3)}(2)\big) = g(256) = 256^2 = 65536$$
$$g^{(5)}(2) = g\big(g^{(4)}(2)\big) = g(65536) = 65536^2 = 4294967296$$

■

(b) O que você acha que acontece com $g^{(n)}(2)$ quando n torna-se grande?

Solução:

Para n grande, $g^{(n)}(2)$ tende ao infinito.

(c) Calcule as primeiras cinco iterações de 1.

Solução:

$$g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(2)}(1) = g(g(1)) = g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(3)}(1) = g\big(g^{(2)}(1)\big) = g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(4)}(1) = g\big(g^{(3)}(1)\big) = g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(5)}(1) = g\big(g^{(4)}(1)\big) = g(1) = 1^2 = 1$$

(d) O que você acha que acontece com $g^{(n)}(1)$ quando n torna-se grande?

Solução:

Para n grande, $g^{(n)}(1)$ permanece constante e igual a 1.

(e) Calcule as cinco primeiras iterações de $\frac{3}{4}$.

Solução:

Seja a semente $x_0 = \frac{3}{4} = 0,75$, então as cinco primeiras iterações da órbita de x_0 são:

$$x_0 = 0{,}7500$$

$$x_1 = g(x_0) = g(0{,}7500) = 0{,}5625$$

$$x_2 = g^{(2)}(x_0) = g\big(g^{(1)}(x_0)\big) = g\big(g^{(1)}(0{,}7500)\big) = g(0{,}5625) = 0{,}3164$$

$$x_3 = g^{(3)}(x_0) = g\big(g^{(2)}(x_0)\big) = g\big(g^{(2)}(0{,}7500)\big) = g(0{,}3164) = 0{,}1001$$

$$x_4 = g^{(4)}(x_0) = g\big(g^{(3)}(x_0)\big) = g\big(g^{(3)}(0{,}7500)\big) = g(0{,}1001) = 0{,}0100$$

$$x_5 = g^{(5)}(x_0) = g\big(g^{(4)}(x_0)\big) = g\big(g^{(4)}(0{,}7500)\big) = g(0{,}0100) = 0{,}0001$$

(f) O que você acha que aconcete com $g^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right)$ quando n torna-se grande?

Solução:

Para n grande, $g^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right)$ tende a zero.

16. Seja h a função raiz quadrada: $h(x) = \sqrt{x}$.

(a) Calcule as cinco primeiras iterações de 2.

Solução:

Seja a semente $x_0 = 2$, então as cinco primeiras iterações da órbita de x_0 são:

$$x_0 = 2{,}0000$$

$$x_1 = h(x_0) = h(2{,}0000) = 1{,}4142$$

$$x_2 = h^{(2)}(x_0) = h\big(h^{(1)}(x_0)\big) = h\big(h^{(1)}(2{,}0000)\big) = h(1{,}4142) = 1{,}1892$$

$$x_3 = h^{(3)}(x_0) = h\big(h^{(2)}(x_0)\big) = h\big(h^{(2)}(2{,}0000)\big) = h(1{,}1892) = 1{,}0905$$

$$x_4 = h^{(4)}(x_0) = h\big(h^{(3)}(x_0)\big) = h\big(h^{(3)}(2{,}0000)\big) = h(1{,}0905) = 1{,}0443$$

$$x_5 = h^{(5)}(x_0) = h\big(h^{(4)}(x_0)\big) = h\big(h^{(4)}(2{,}0000)\big) = h(1{,}0443) = 1{,}0219$$

(b) O que você acha que acontece com $h^{(n)}(2)$ quanto n torna-se grande?

Solução:

Para n grande, $h^{(n)}(1)$ decresce e tende a 1.

(c) Calcule as cinco primeiras iterações de 1.

Solução:

Seja a semente $x_0 = 1$, então as cinco primeiras iterações da órbita de x_0 são:

$$x_0 = 1{,}0000$$

$$x_1 = h(x_0) = h(1{,}0000) = 1{,}0000$$

$$x_2 = h^{(2)}(x_0) = h\big(h^{(1)}(x_0)\big) = h\big(h^{(1)}(1{,}0000)\big) = h(1{,}0000) = 1{,}0000$$

$$x_3 = h^{(3)}(x_0) = h\big(h^{(2)}(x_0)\big) = h\big(h^{(2)}(1{,}0000)\big) = h(1{,}0000) = 1{,}0000$$

$$x_4 = h^{(4)}(x_0) = h\big(h^{(3)}(x_0)\big) = h\big(h^{(3)}(1{,}0000)\big) = h(1{,}0000) = 1{,}0000$$

$$x_5 = h^{(5)}(x_0) = h\big(h^{(4)}(x_0)\big) = h\big(h^{(4)}(1{,}0000)\big) = h(1{,}0000) = 1{,}0000$$

■

(d) O que você acha que acontece com $h^{(n)}(1)$ quanto n torna-se grande?

Solução:

Para n grande, $h^{(n)}(1)$ permanece constante e igual a 1.

■

(e) Calcule as cinco primeiras iterações de $\frac{3}{4}$.

Solução:

Seja a semente $x_0 = \frac{3}{4} = 0,75$, então as cinco primeiras iterações da órbita de x_0 são:

$$x_0 = 0{,}7500$$

$$x_1 = h(x_0) = h(0{,}7500) = 0{,}8660$$

$$x_2 = h^{(2)}(x_0) = h\big(h^{(1)}(x_0)\big) = h\big(h^{(1)}(0{,}7500)\big) = h(0{,}8660) = 0{,}9306$$

$$x_3 = h^{(3)}(x_0) = h\big(h^{(2)}(x_0)\big) = h\big(h^{(2)}(0{,}7500)\big) = h(0{,}9306) = 0{,}9647$$

$$x_4 = h^{(4)}(x_0) = h\big(h^{(3)}(x_0)\big) = h\big(h^{(3)}(0{,}7500)\big) = h(0{,}9647) = 0{,}9822$$

$$x_5 = h^{(5)}(x_0) = h\big(h^{(4)}(x_0)\big) = h\big(h^{(4)}(0{,}7500)\big) = h(0{,}9822) = 0{,}9911$$

■

(f) O que você acha que acontece com $h^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right)$ quanto n torna-se grande?

Solução:

Para n grande, $h^{(n)}(1)$ cresce e tende a 1.

■

Referências

FELDMAN, D. P. **Chaos and Fractals**. An Elementary Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2012.