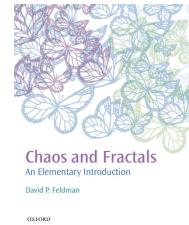


# Chaos and Fractals

Feldman, D. P.

Resoluções por  
Igo da Costa Andrade



## Capítulo 2: Interacting Functions

### Exercises

1. Seja  $g$  a função de duplicação. Determine os cinco primeiros números da órbita para as seguintes sementes:

- (a)  $x_0 = -2$
- (b)  $x_0 = -0.5$
- (c)  $x_0 = 0$
- (d)  $x_0 = 0.5$
- (e)  $x_0 = 2$

Solução:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$x_0$	-2,0000	-0,5000	0,0000	0,5000	2,0000
$x_1$	-4,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	4,0000
$x_2$	-8,0000	-2,0000	0,0000	2,0000	8,0000
$x_3$	-16,0000	-4,0000	0,0000	4,0000	16,0000
$x_4$	-32,0000	-8,0000	0,0000	8,0000	32,0000
$x_5$	-64,0000	-16,0000	0,0000	16,0000	64,0000

2. Seja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Determine os cinco primeiros números da órbita para as seguintes sementes:
  1.  $x_0 = 0$

2.  $x_0 = \frac{1}{2}$
3.  $x_0 = 1$
4.  $x_0 = 2$
5.  $x_0 = 4$

**Solução:**

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$x_0$	0,0000	0,5000	1,0000	2,0000	4,0000
$x_1$	0,0000	0,7071	1,0000	1,4142	2,0000
$x_2$	0,0000	0,8409	1,0000	1,1892	1,4142
$x_3$	0,0000	0,9170	1,0000	1,0905	1,1892
$x_4$	0,0000	0,9576	1,0000	1,0443	1,0905
$x_5$	0,0000	0,9786	1,0000	1,0219	1,0443



3. Considere a função  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- (a) Complete a seguinte tabela para  $f$ .

$x_0$	9	
$x_1$		
$x_2$		
$x_3$		
$x_4$		

**Solução:**

$x_0$	9,0000
$x_1$	3,0000
$x_2$	1,7321
$x_3$	1,3161
$x_4$	1,1472

(b) Determine uma fórmula para  $f^{(2)}(x)$ .

**Solução:**

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f^{(2)}(x) = f(f(x)) = f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$f^{(2)}(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$f^{(2)}(x) = x^{\frac{1}{4}}$$

(c) Determine uma fórmula para  $f^{(3)}(x)$ .

**Solução:**

$$f^{(3)} = f(f^{(2)}(x)) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$$

(d) Determine uma fórmula para  $f^{(4)}(x)$ .

**Solução:**

$$f^{(4)} = f(f^{(3)}(x)) = \left(x^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{16}}$$

(e) Determine uma fórmula para  $f^{(n)}(x)$ , a  $n$ -ésima  $x$  iteração de  $x$ .

**Solução:**

As fórmulas obtidas para  $f^{(2)}(x)$ ,  $f^{(3)}(x)$  e  $f^{(4)}(x)$  obtidas nos itens anteriores sugerem a seguinte fórmula geral para o  $n$ -ésimo termo  $f^{(n)}(x)$  da órbita de  $x$ :

$$f^{(n)}(x) = x^{\frac{1}{2^n}}$$

De fato,

$$f^{(2)}(x) = x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2^2}}$$

$$f^{(3)}(x) = x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{2^3}}$$

$$f^{(4)}(x) = x^{\frac{1}{16}} = x^{\frac{1}{2^4}}$$

Para demonstrar a fórmula geral, utilizamos o Princípio de Indução Matemática<sup>1</sup>:

Note que para  $n = 1$ , a fórmula proposta é verdadeira, visto que corresponde à definição da função  $f$ :

$$f^{(1)}(x) = x^{\frac{1}{2^1}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = f(x).$$

Isso demonstra o passo base da indução. Suponhamos que para algum  $k \geq 1$  seja verdadeira a fórmula proposta, ou seja, é verdade que:

$$f^{(k)} = x^{\frac{1}{2^k}}$$

Então,

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f\left(x^{\frac{1}{2^k}}\right) = \left(x^{\frac{1}{2^k}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^{k+1}}}$$

Portanto, como a proposição é verdadeira para o caso base e foi provada verdadeira no passo indutivo, segue pelo Princípio da Indução Matemática que ela é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



4. Considere a função  $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ .

(a) Complete a seguinte tabela para  $f$ .

$x_0$	2	
$x_1$		
$x_2$		
$x_3$		
$x_4$		

<sup>1</sup>**Princípio de Indução Matemática:** Seja  $P(n)$  uma proposição definida para todo número natural  $n \geq n_0$ , onde  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Se:

1. (Passo base)  $P(n_0)$  é verdadeira;
2. (Passo indutivo) Para todo  $k \geq n_0$ , a veracidade de  $P(k)$  implica a veracidade de  $P(k + 1)$ ;

então  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq n_0$ .

Em particular, quando  $n_0 = 1$ , a proposição vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solução:**

$x_0$	2,0000
$x_1$	5,0000
$x_2$	6,5000
$x_3$	7,2500
$x_4$	7,6250



5. Seja  $f(x) = 3x - 1$

- (a) calcule  $f^2(1)$  e  $(f(1))^2$ .

**Solução:**

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} f^{(2)}(1) = f(f(1)) = f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ (f(1))^2 = 2^2 = 4 \end{cases}$$



- (b) As duas quantidades são iguais? Deveriam ser?

**Solução:**

No item anterior, obtivemos  $f^2(1) \neq (f(1))^2$ . De fato, a igualdade entre estas quantidades só ocorreria por coincidência. Tratam-se de dois conceitos distintos. Enquanto  $f^2(x)$  corresponde à segunda iterada da função  $f$ , ou seja, à composta  $f(f(x))$ ,  $(f(x))^2$  é a segunda potência de  $f(x)$ .



6. Considere a função  $f(x) = (x + 3)^2$ .

- (a) Complete a seguinte tabela para  $f$ .

$x_0$	2
$x_1$	
$x_2$	
$x_3$	
$x_4$	

**Solução:**

$x_0$	2,0
$x_1$	25,0
$x_2$	784,0
$x_3$	619.369,0
$x_4$	383.621.674.384,0



7. Seja  $f(x) = x^2$ . Determine uma expressão algébrica para:

(a)  $f^{(2)}(x)$ **Solução:**

$$f^{(2)} = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^{2^2} = x^4$$

(b)  $f^{(3)}(x)$ **Solução:**

$$f^{(3)} = f(f^{(2)}(x)) = f(x^4) = (x^4)^2 = x^{4 \cdot 2} = x^{2^3} = x^8$$

(c)  $f^{(n)}(x)$ **Solução:**

Os resultados anteriores sugerem a seguinte fórmula geral para  $f^{(n)}(x)$ :

$$x^{2^n}$$

Para  $n = 1$ , a fórmula proposta é imediatamente verdadeira. Suponhamos que para algum  $k \geq 1$ , a fórmula proposta seja verdadeira. Então, para  $n = k + 1$ , temos:

$$f^{(k+1)} = f(f^k(x)) = f(x^{2^k}) = (x^{2^k})^2 = x^{2^k \cdot 2} = x^{2^k \cdot 2^1} = x^{2^{k+1}}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula

$$f^{(n)}(x) = x^{2^n}$$

é verdadeira.



8. Seja  $h(x) = 3x - 1$ . Determine o valor numérico de:

(a)  $h^{(2)}(1)$

**Solução:**

$$h(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow h^{(2)}(1) = h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$



(b)  $h^{(2)}(3)$

**Solução:**

$$h(1) = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \Rightarrow h^{(2)}(3) = h(8) = 3 \cdot 8 - 1 = 23$$



(c)  $h^{(4)}\left(\frac{2}{3}\right)$

**Solução:**

$$\begin{aligned} h\left(\frac{2}{3}\right) &= 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 = 1 \Rightarrow h^{(2)}\left(\frac{2}{3}\right) = h\left(h\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \\ &\Rightarrow h^{(3)}\left(\frac{2}{3}\right) = h\left(h^{(2)}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ &\Rightarrow h^{(4)}\left(\frac{2}{3}\right) = h\left(h^{(3)}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = h(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14 \end{aligned}$$

(d)  $h^{(3)}(2)$

**Solução:**

$$\begin{aligned} h(2) &= 3 \cdot 2 - 1 = 5 \Rightarrow h^{(2)}(2) = h(h(2)) = h(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14 \\ &\Rightarrow h^{(3)}(2) = h(h^{(2)}(2)) = h(14) = 3 \cdot 14 - 1 = 41 \end{aligned}$$

9. Seja  $g(x) = x^2 + 1$ . Determine o valor numérico de:

(a)  $g^{(2)}(1)$

**Solução:**

$$g(1) = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow g^{(2)}(1) = g(g(1)) = g(2) = 2^2 + 1 = 5$$

(b)  $g^{(2)}(3)$

**Solução:**

$$g(3) = 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow g^{(2)}(3) = g(g(3)) = g(10) = 10^2 + 1 = 101$$

(c)  $g^{(4)}(0)$

**Solução:**

$$\begin{aligned} g(0) &= 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow g^{(2)}(0) = g(g(0)) = g(1) = 1^2 + 1 = 2 \\ &\Rightarrow g^{(3)}(0) = g(g^{(2)}(0)) = g(2) = 2^2 + 1 = 5 \\ &\Rightarrow g^{(4)}(0) = g(g^{(3)}(0)) = g(5) = 5^2 + 1 = 26 \end{aligned}$$

(d)  $g^{(3)}(2)$

**Solução:**

$$\begin{aligned} g(2) &= 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow g^{(2)}(2) = g(g(2)) = g(5) = 5^2 + 1 = 26 \\ &\Rightarrow g^{(3)}(2) = g(g^{(2)}(2)) = g(26) = 26^2 + 1 = 676 \end{aligned}$$



10. Seja  $f(x) = x^2 - 1$ . Determine uma expressão algébrica para  $f^{(2)}(x)$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 1 &\Rightarrow f^{(2)}(x) = f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 \\ &\Rightarrow f^{(2)}(x) = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 \\ &\Rightarrow f^{(2)}(x) = x^4 - 2x^2 \end{aligned}$$



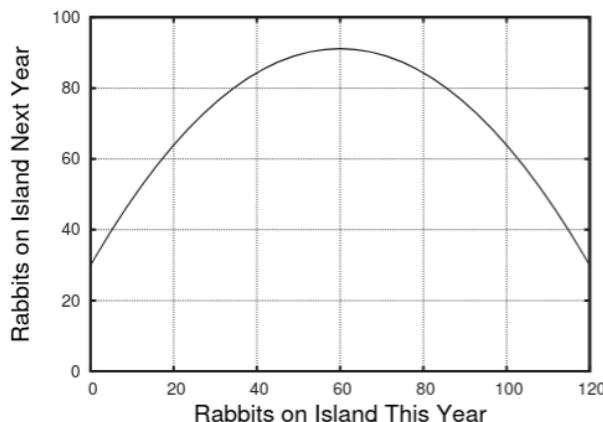
11. Seja  $f(x) = 3x - 1$ . Determine uma expressão algébrica para  $f^{(2)}(x)$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned} f(x) = 3x - 1 &\Rightarrow f^{(2)}(x) = f(f(x)) = 3(3x - 1) - 1 \\ &\Rightarrow f^{(2)}(x) = 9x - 4 \end{aligned}$$



12. Consideremos novamente a função para população de coelhos do capítulo anterior. A função é mostrada na Fig. 2.2. Determine:



**Fig. 2.2** The rabbit population on an island next year as a function of the number of rabbits on the island this year. See Exercise 2.12.

- (a)  $P(50)$
- (b)  $P^{(2)}(75)$
- (c)  $P^{(3)}(10)$

**Solução:**

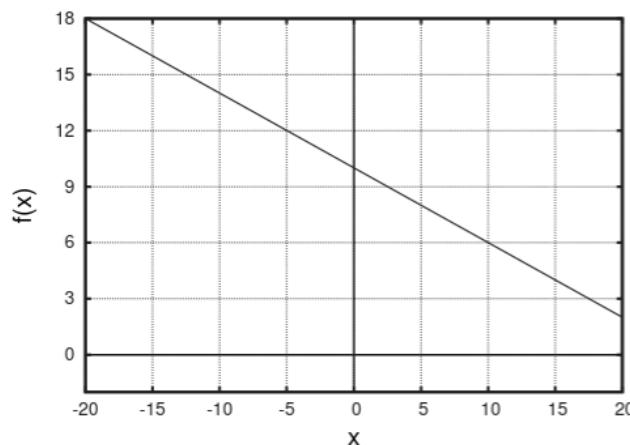
$$P(50) \approx 90$$

$$P(75) \approx 90 \Rightarrow P^{(2)}(75) = P(P(75)) = P(90) \approx 70$$

$$P(10) \approx 50 \Rightarrow P^{(2)}(10) = P(50) \approx 90 \Rightarrow P^{(3)}(10) = P(P^{(2)}(10)) = p(90) \approx 70$$



13. Considere a função  $f$  definida na Fig. 2.3. Determine:



**Fig. 2.3** The function for Exercise 2.13.

- (a)  $f(-5)$

**Solução:**

$$f(-5) = 12$$



- (b)  $f^{(2)}(-5)$

**Solução:**

$$f^{(2)}(-5) = f(f(-5)) = f(12) \approx 5$$

(c) As primeiras quatro iterações de 0.

**Solução:**

$$f(0) \approx 10$$

$$f^{(2)}(0) = f(10) = 6$$

$$f^{(3)}(0) = f(f^{(2)}(0)) = f(6) \approx 7$$

$$f^{(4)}(0) = f(f^{(3)}(0)) = f(7) \approx 7,5$$

(d) As primeiras quatro iterações de -15.

**Solução:**

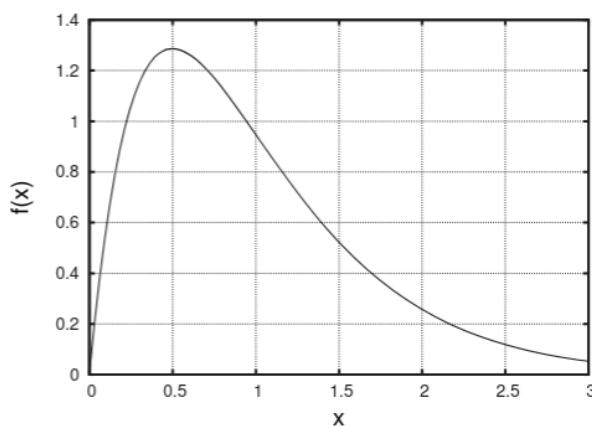
$$f(-15) \approx 16$$

$$f^{(2)}(-15) = f(16) = 3$$

$$f^{(3)}(-15) = f(f^{(2)}(-15)) = f(3) \approx 9$$

$$f^{(4)}(-15) = f(f^{(3)}(-15)) = f(9) \approx 7$$

14. Considere a função  $f(x)$  mostrada na Fig. 2.4. Determine:



**Fig. 2.4** The function for Exercise 2.14.

(a) As primeiras três iterações de 0.5.

**Solução:**

$$f(0, 5) \approx 1, 3$$

$$f^{(2)}(0, 5) = f(f(0, 5)) = f(1, 3) \approx 0, 7$$

$$f^{(3)}(0, 5) = f(f^{(2)}(0, 5)) = f(0, 7) \approx 1, 1$$



- (b) As primeiras três iterações de 2.0.

**Solução:**

$$f(2, 0) \approx 0, 25$$

$$f^{(2)}(2, 0) = f(f(2, 0)) = f(0, 25) \approx 1, 1$$

$$f^{(3)}(2, 0) = f(f^{(2)}(2, 0)) = f(1, 1) \approx 0, 8$$



15. Seja  $g$  a função elevar ao quadrado:  $g(x) = x^2$ .

- (a) Calcule as cinco primeiras iterações de 2.

**Solução:**

$$g(2) = 2^2 = 4$$

$$g^{(2)}(2) = g(g(2)) = g(4) = 4^2 = 16$$

$$g^{(3)}(2) = g(g^{(2)}(2)) = g(16) = 16^2 = 256$$

$$g^{(4)}(2) = g(g^{(3)}(2)) = g(256) = 256^2 = 65536$$

$$g^{(5)}(2) = g(g^{(4)}(2)) = g(65536) = 65536^2 = 4294967296$$



- (b) O que você acha que acontece com  $g^{(n)}(2)$  quando  $n$  torna-se grande?

**Solução:**

Para  $n$  grande,  $g^{(n)}(2)$  tende ao infinito.

(c) Calcule as primeiras cinco iterações de 1.

**Solução:**

$$g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(2)}(1) = g(g(1)) = g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(3)}(1) = g(g^{(2)}(1)) = g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(4)}(1) = g(g^{(3)}(1)) = g(1) = 1^2 = 1$$

$$g^{(5)}(1) = g(g^{(4)}(1)) = g(1) = 1^2 = 1$$

(d) O que você acha que acontece com  $g^{(n)}(1)$  quando  $n$  torna-se grande?

**Solução:**

Para  $n$  grande,  $g^{(n)}(1)$  permanece constante e igual a 1.

(e) Calcule as cinco primeiras iterações de  $\frac{3}{4}$ .

**Solução:**

Seja a semente  $x_0 = \frac{3}{4} = 0,75$ , então as cinco primeiras iterações da órbita de  $x_0$  são:

$$x_0 = 0,7500$$

$$x_1 = g(x_0) = g(0,7500) = 0,5625$$

$$x_2 = g^{(2)}(x_0) = g(g^{(1)}(x_0)) = g(g^{(1)}(0,7500)) = g(0,5625) = 0,3164$$

$$x_3 = g^{(3)}(x_0) = g(g^{(2)}(x_0)) = g(g^{(2)}(0,7500)) = g(0,3164) = 0,1001$$

$$x_4 = g^{(4)}(x_0) = g(g^{(3)}(x_0)) = g(g^{(3)}(0,7500)) = g(0,1001) = 0,0100$$

$$x_5 = g^{(5)}(x_0) = g(g^{(4)}(x_0)) = g(g^{(4)}(0,7500)) = g(0,0100) = 0,0001$$

(f) O que você acha que acontece com  $g^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right)$  quando  $n$  torna-se grande?

**Solução:**

Para  $n$  grande,  $g^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right)$  tende a zero.



16. Seja  $h$  a função raiz quadrada:  $h(x) = \sqrt{x}$ .

(a) Calcule as cinco primeiras iterações de 2.

**Solução:**

Seja a semente  $x_0 = 2$ , então as cinco primeiras iterações da órbita de  $x_0$  são:

$$x_0 = 2,0000$$

$$x_1 = h(x_0) = h(2,0000) = 1,4142$$

$$x_2 = h^{(2)}(x_0) = h(h^{(1)}(x_0)) = h(h^{(1)}(2,0000)) = h(1,4142) = 1,1892$$

$$x_3 = h^{(3)}(x_0) = h(h^{(2)}(x_0)) = h(h^{(2)}(2,0000)) = h(1,1892) = 1,0905$$

$$x_4 = h^{(4)}(x_0) = h(h^{(3)}(x_0)) = h(h^{(3)}(2,0000)) = h(1,0905) = 1,0443$$

$$x_5 = h^{(5)}(x_0) = h(h^{(4)}(x_0)) = h(h^{(4)}(2,0000)) = h(1,0443) = 1,0219$$



(b) O que você acha que acontece com  $h^{(n)}(2)$  quanto  $n$  torna-se grande?

**Solução:**

Para  $n$  grande,  $h^{(n)}(1)$  decresce e tende a 1.



(c) Calcule as cinco primeiras iterações de 1.

**Solução:**

Seja a semente  $x_0 = 1$ , então as cinco primeiras iterações da órbita de  $x_0$  são:

$$x_0 = 1,0000$$

$$x_1 = h(x_0) = h(1,0000) = 1,0000$$

$$x_2 = h^{(2)}(x_0) = h(h^{(1)}(x_0)) = h(h^{(1)}(1,0000)) = h(1,0000) = 1,0000$$

$$x_3 = h^{(3)}(x_0) = h(h^{(2)}(x_0)) = h(h^{(2)}(1,0000)) = h(1,0000) = 1,0000$$

$$x_4 = h^{(4)}(x_0) = h(h^{(3)}(x_0)) = h(h^{(3)}(1,0000)) = h(1,0000) = 1,0000$$

$$x_5 = h^{(5)}(x_0) = h(h^{(4)}(x_0)) = h(h^{(4)}(1,0000)) = h(1,0000) = 1,0000$$

(d) O que você acha que acontece com  $h^{(n)}(1)$  quanto  $n$  torna-se grande?

**Solução:**

Para  $n$  grande,  $h^{(n)}(1)$  permanece constante e igual a 1.

(e) Calcule as cinco primeiras iterações de  $\frac{3}{4}$ .

**Solução:**

Seja a semente  $x_0 = \frac{3}{4} = 0,75$ , então as cinco primeiras iterações da órbita de  $x_0$  são:

$$x_0 = 0,7500$$

$$x_1 = h(x_0) = h(0,7500) = 0,8660$$

$$x_2 = h^{(2)}(x_0) = h(h^{(1)}(x_0)) = h(h^{(1)}(0,7500)) = h(0,8660) = 0,9306$$

$$x_3 = h^{(3)}(x_0) = h(h^{(2)}(x_0)) = h(h^{(2)}(0,7500)) = h(0,9306) = 0,9647$$

$$x_4 = h^{(4)}(x_0) = h(h^{(3)}(x_0)) = h(h^{(3)}(0,7500)) = h(0,9647) = 0,9822$$

$$x_5 = h^{(5)}(x_0) = h(h^{(4)}(x_0)) = h(h^{(4)}(0,7500)) = h(0,9822) = 0,9911$$

(f) O que você acha que acontece com  $h^{(n)}(\frac{3}{4})$  quanto  $n$  torna-se grande?

**Solução:**

Para  $n$  grande,  $h^{(n)}(1)$  cresce e tende a 1.



## Referências

FELDMAN, D. P. **Chaos and Fractals**. An Elementary Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2012.