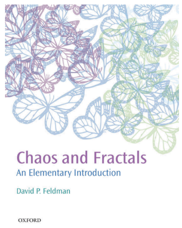
Chaos and Fractals

Feldman, D. P.

Resoluções por

Igo da Costa Andrade



Capítulo 3: Qualitative Dynamics: The Fate of the Orbit

Exercises

1. Consirese a gunção raiz quadrada. $f(x) = \sqrt{x}$.
   (a) Determine a linha de fase para $f(x)$ para x não negativo. Explique seu raciocínio cuidadosamente.
   (b) Determine todos os pontos fixos, se existirem, de $f(x)$.
   (c) Qual é a estabilidade desses pontos fixos?

Solução:

Inicialmente, determinemos os pontos fixos de f:

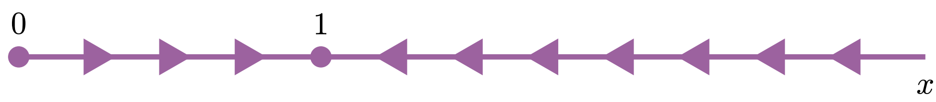
$$
\begin{aligned}
f(x^*) = x^* \Rightarrow \sqrt{x^*} &= x^* \\
&\Rightarrow x^* - \sqrt{x^*} = 0 \\
&\Rightarrow \sqrt{x^*}\left(\sqrt{x^*} - 1\right) = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^*} = 0 & \Rightarrow x_1^* = 0 \\ \sqrt{x^*} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^*} = 1 & \Rightarrow x_2^* = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Para a classificação dos pontos fixos em **estável** ou **instável**, consideremos alguns exemplos de sementes nos intervalos: $(0, 1)$ e $(1, \infty)$, conforme tabela abaixo:

n	Órbitas					
0	0,2000	0,6000	0,8000	1,5000	10,0000	120,0000
1	0,4472	0,7746	0,8944	1,2247	3,1623	10,9545
2	0,6687	0,8801	0,9457	1,1067	1,7783	3,3098
3	0,8178	0,9381	0,9725	1,0520	1,3335	1,8193
4	0,9043	0,9686	0,9862	1,0257	1,1548	1,3488
5	0,9509	0,9842	0,9931	1,0128	1,0746	1,1614
6	0,9752	0,9921	0,9965	1,0064	1,0366	1,0777
7	0,9875	0,9960	0,9983	1,0032	1,0182	1,0381
8	0,9937	0,9980	0,9991	1,0016	1,0090	1,0189
8	0,9969	0,9990	0,9996	1,0008	1,0045	1,0094
10	0,9984	0,9995	0,9998	1,0004	1,0023	1,0047

Note que todas as órbitas de sementes no intervalo $(0, 1)$ *afastam-se* fo ponto fixo $x_1^* = 0$ e *aproximam-se* do ponto fixo $x_2^* = 1$. Por sua vez, as órbitas de sementes no intervalo $1, \infty$ também tende a 1. Logo, o ponto fixo $x_1^* = 0$ é um ponto **repulsor** enquanto o ponto fixo $x_2^* = 1$ é **atrator**.

A linha de fase de f é mostrada na figura abaixo:



■

2. Considere a função elevar ao cubo, $h(x) = x^3$.
   (a) Determine a linha de fase para $h(x)$. Considere ambos positivos e nevativos x. Explique seu raciocínio cuidadosamente.
   (b) Determine todos os pontos fixos, se existirem, de $h(x)$.
   (c) Qual é a estabilidade desses pontos fixos?

Solução:

Determinemos os pontos fixos de h:

$$\begin{aligned}
h(x^*) = x^* \Rightarrow (x^*)^3 = x^* \Rightarrow (x^*)^3 - x^* = 0 \\
&\Rightarrow x^*\left((x^*)^2 - 1\right) = 0 \\
&\Rightarrow x^*(x^* - 1)(x^* + 1) = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x^* + 1 = 0 \Rightarrow x_1^* = -1 \\ x_2^* = 0 \\ x^* - 1 = 0 \Rightarrow x_3^* = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Para a classificação dos pontos fixos acima, utilizemos o seguinte teorema:

Teorema: Seja f uma função *suave*[1] e assuma p um ponto fixo de f. Então:

1. Se $|f'(p)| < 1$, então p é um ponto fixo atrator;
2. Se $|f'(p)| > 1$, então p é um ponto fixo repulsor.

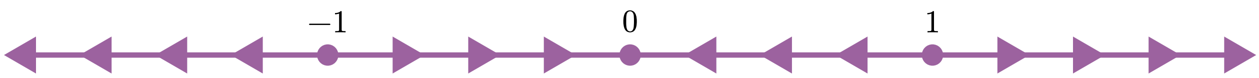
Calculemos a derivada de h:

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Aplicando o teorema aos pontos fixos encontrados, temos:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= -1 \Rightarrow |h'(x_1^*)| = |3 \cdot (-1)^2| = 3 > 1 \\
x_2^* &= 0 \Rightarrow |h'(x_2^*)| = |3 \cdot 0^2| = 0 < 1 \\
x_3^* &= +1 \Rightarrow |h'(x_3^*)| = |3 \cdot 1^2| = 3 > 1
\end{aligned}$$

Portanto, os pontos fixos $x_1^* = -1$ e $x_3^* = 1$ são repulsores e o ponto fixo $x_2^* = 0$ é atrator. A figura seguinte ilustra a linha de fase de $h(x)$.



$\blacksquare$

3. Encontre os pontos fixos, se existirem, de $f(x) = 2x - 5$.

Solução:

$$f(x^*) = x^* \Rightarrow 2x^* - 5 = x^* \Rightarrow x^* = 5$$

$\blacksquare$

[1] Contínua e com derivadas contínuas em $\mathbb{R}$.

4. Encontre os pontos fixos, se existirem, de $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

Solução:

$$g(x^*) = x^* \Rightarrow \frac{1}{2}x^* + 4 = x^* \Rightarrow \frac{1}{2}x^* = -4 \Rightarrow x^* = -8$$

■

5. Encontre os pontos fixos, se existirem, de $h(x) = x^2 - 1$.

Solução:

$$\begin{aligned} h(x^*) = x^* \Rightarrow (x^*)^2 - 1 = x^* \Rightarrow (x^*)^2 - x^* - 1 = 0 \\ \Rightarrow x^* = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ \Rightarrow x^* = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

■

6. Encontre os pontos fixos, se existirem, de $f(x) = x^2 + 1$.

Solução:

$$\begin{aligned} f(x^*) = x^* \Rightarrow (x^*)^2 + 1 = x^* \Rightarrow (x^*)^2 - x^* + 1 = 0 \\ \Rightarrow x^* = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ \Rightarrow x^* = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

Como encontramos uma raiz quadrada negativa, não existem soluções reais para a equação $f(x^*) = x^*$. Logo, a função f não possui pontos fixos.

■

7. Encontre os pontos fixos, se existirem, de $g(x) = x - 3$.

Solução:

$$g(x^*) = x^* \Rightarrow x^* - 3 = x^*$$

A igualdade acima é impossível para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Logo, a função g não possui pontos fixos.

■

8. Encontre os pontos fixos, se existirem, de $h(x) = x^3$.

Solução:

$$\begin{aligned}
h(x^*) = x^* \Rightarrow (x^*)^3 = x^* \Rightarrow (x^*)^3 - x^* = 0 \\
\Rightarrow x^*\left((x^*)^2 - 1\right) = 0 \\
\Rightarrow x^*(x^* - 1)(x^* + 1) = 0 \\
\Rightarrow \begin{cases} x^* + 1 = 0 \Rightarrow x_1^* = -1 \\ x_2^* = 0 \\ x^* - 1 = 0 \Rightarrow x_3^* = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Referências

FELDMAN, D. P. **Chaos and Fractals**. An Elementary Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2012.