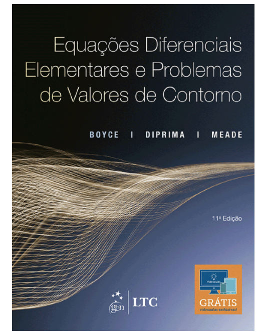
Resolução de Problemas do Livro

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno (Boyce, W.; DiPrima, R. C.)



por

Igo da Costa Andrade

Referência
BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro, LTC, 2020.

Capítulo 1: Introdução

PROBLEMAS

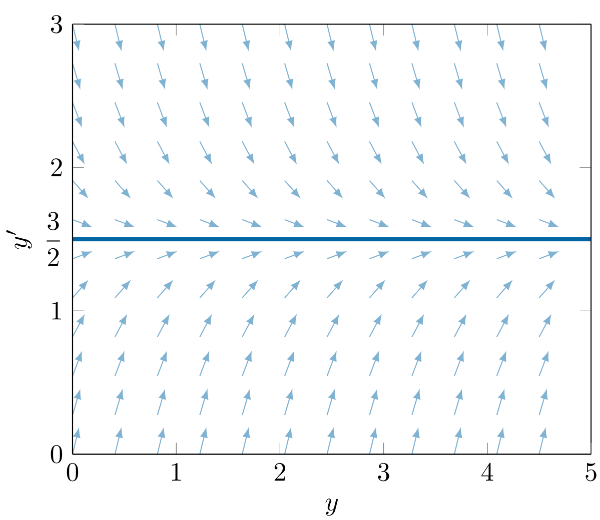
Em cada um dos Problemas 1 a 4, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se este comportamento depende o valor inicial de y e $t = 0$, descreva essa dependência.

1. $y' = 3 - 2y$

Solução:
Solução de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 3 - 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = \frac{3}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, $y \to y^* = \dfrac{3}{2}$ quando $t \to +\infty$, independente do valor inicial quando $t = 0$.



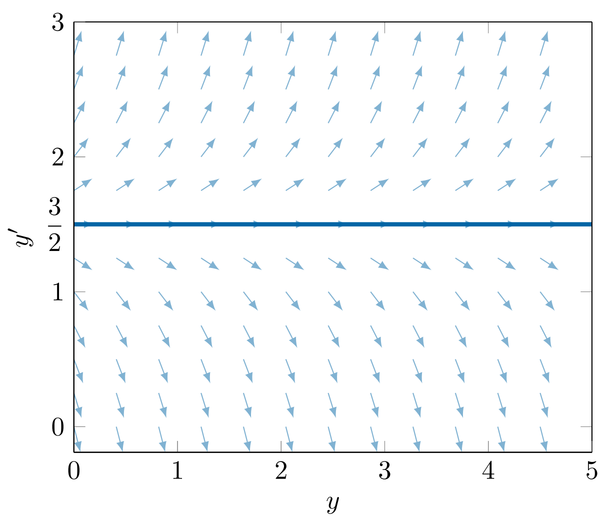
■

2. $y' = 2y - 3$

Solução:
Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 2y^* - 3 = 0 \Rightarrow y^* = \frac{3}{2}$$

Nesse caso, y afasta-se da solução de equilíbrio, independentemente do valor inicial de y quando $t = 0$. Como indica o campo de direções abaixo, $y \to -\infty$ para $y(t = 0) < \frac{3}{2}$ e $y \to +\infty$ para $y(t = 0) > \frac{3}{2}$.

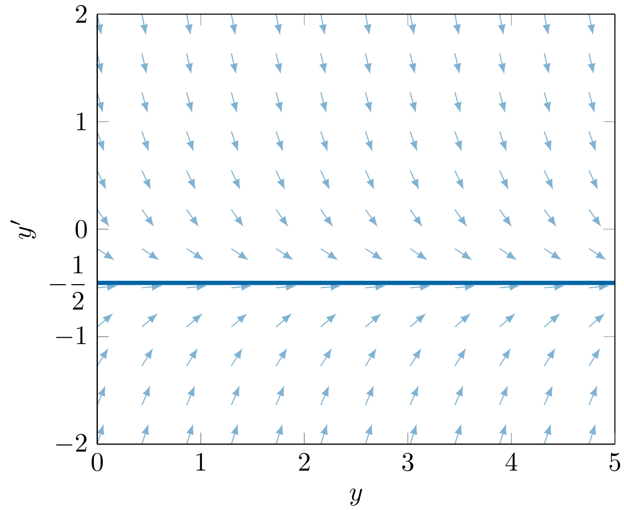


3. $y' = -1 - 2y$

Solução:
Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow -1 - 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, todas as soluções tendem ao valor de equilíbrio $y^* = -\frac{1}{2}$ quando $t \to \infty$, independentemente do valor inicial quando $t = 0$.



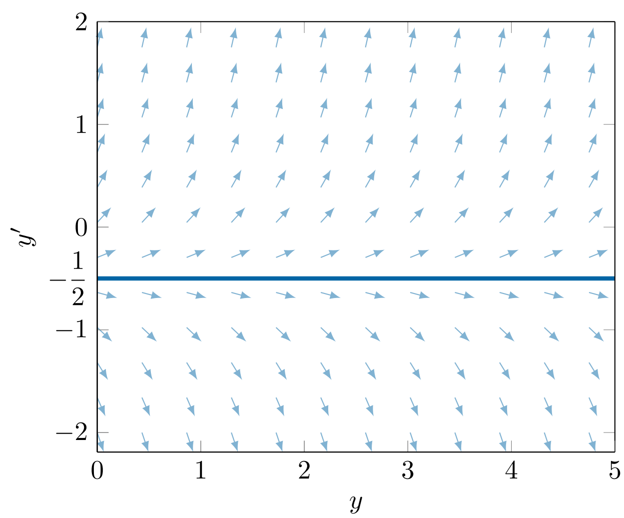
■

4. $y' = 1 + 2y$

Solução:
Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 1 + 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}$$

Nesse caso, y afasta-se da solução de equilíbrio, independentemente do valor inicial de y quando $t = 0$. Como indica o campo de direções abaixo, $y \to -\infty$ para $y(t=0) < -\frac{1}{2}$ e $y \to +\infty$ para $y(t=0) > -\frac{1}{2}$.



■

Em cada um dos Problemas 5 e 6, escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento pedido quando $t \to \infty$.

5. Todas as soluções se aproximam de $y = 2/3$.

Solução:
Consideremos eqações diferenciais na forma $y' = ay + b$. A solução de equilíbrio (y^*) é dada por:

$$\frac{dy}{dt}(y^*) \equiv 0 \Rightarrow ay^* + b = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{b}{a}$$

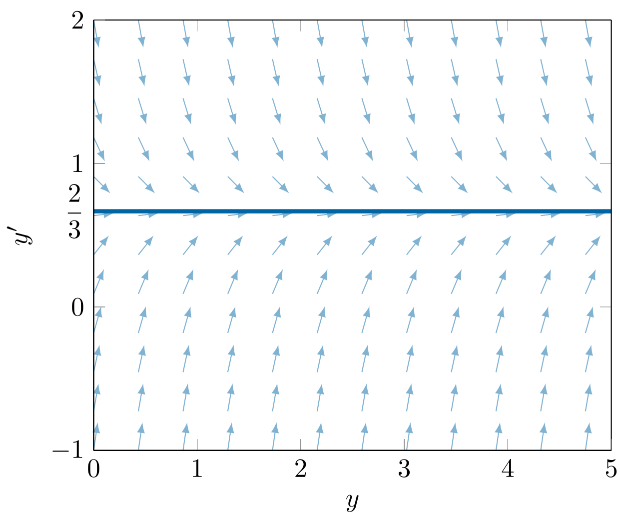
Por outro lado, para determinarmos se as soluções aproximan-se ou afastam-se de y^* quando $t \to \infty$, devemos observar o sinal de $\frac{dy'}{dy}$ em y^*. Se $\frac{dy'}{dy}(y^*) < 0$, as soluções tendem à solução de equilíbrio depois de um longo tempo. Caso, $\frac{dy'}{dy}(y^*) > 0$, as soluções afastam-se. Portanto, para resolver o problema em questão, temos as seguintes condições:

$$\begin{cases} y^* = -\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{dy'}{dy}(y^*) = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{3} \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{2}{3}a \\ a < 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = -3$ e $b = 2$, obtemos uma equação possível satisfazendo às condições acima:

$$y' = 2 - 3y$$

O campo de direções pe mostrado abaixo:



6. Todas as soluções se afastam de $y = 2$.

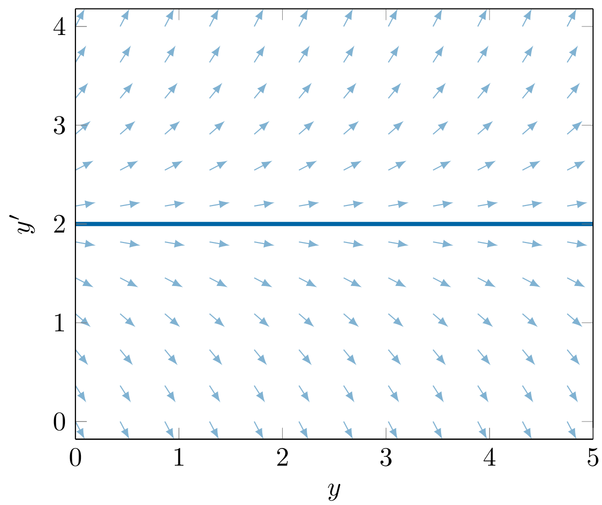
Solução:
Nesse caso, devemos ter:

$$\begin{cases} y^* = -\dfrac{b}{a} = 2 \\ \dfrac{dy'}{dy}(y^*) = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = -2 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a > 0 \end{cases}$$

Uma equação possível satisfazendo às condições acima é

$$y' = -2 + y$$

O campo de direções pe mostrado abaixo:

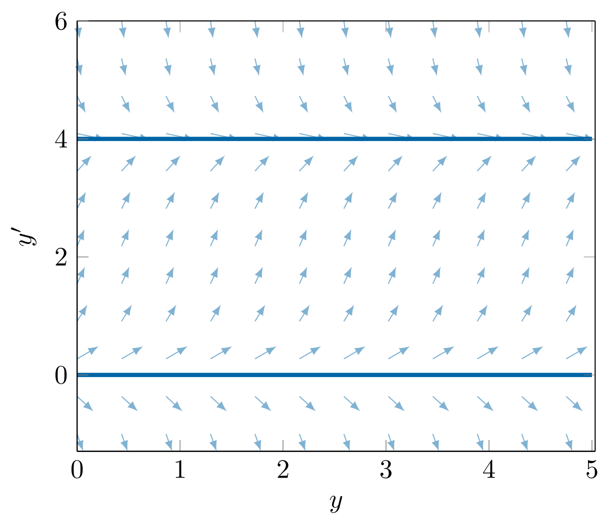


Em cada um dos Problemas 7 a 19, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quanto $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que, nesses problemas, as equações diferenciais não são da forma $y' = ay+b$, e o comportamento das soluções é um pouco mais complicado que o das soluções das equações do texto.

7. $y' = y(4 - y)$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow y(4-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^* = 0 \\ y^* = 4 \end{cases}$$



A solução $y^* = 0$ é instável, no sentido que para condições iniciais próximas, as soluções para afastam-se dela com o passar do tempo. Por outro lado, a solução $y^* = 4$ é estável, ou seja, soluções pŕoximas de y^* tendem para ela após algum tempo. Observando o campo de direções acima, concluímos que:

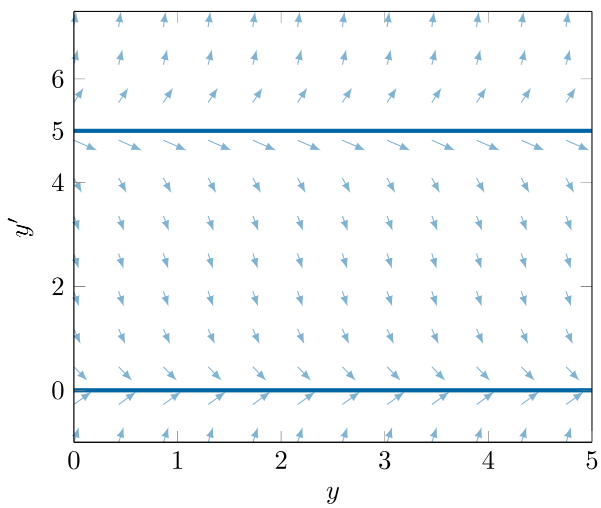
- Para $y(t=0) < 0$, as as soluções tendem a $-\infty$;
- Para $0 < y(t=0) < 4$, as soluções afastam-se de $y = 0$ e crescem, aproximando-se de $y = 4$;
- Para $y(t=0)40$, as soluções decrescem, aprosimando-se de $y = 4$.

■

8. $y' = -y(5-y)$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow -y(5-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^* = 0 \\ y^* = 5 \end{cases}$$



A solução de equilíbrio $y^* = 0$ é estável enquanto $y^* = 5$ é instável. Observando o campo de direções acima, concluímos que:

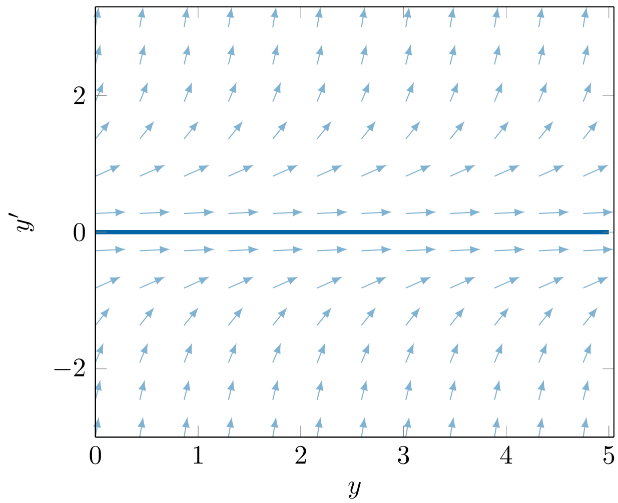
- Para $y(t=0) < 0$, as as soluções crescem, aproximando-se de $y^* = 0$;
- Para $0 < y(t=0) < 5$, as soluções afastam-se de $y = 5$ e diminuem, aproximando-se de $y^* = 0$;
- Para $y(t=0) > 5$, as soluções crescem indefinidamente.

■

9. $y' = y^2$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y^* = 0$$

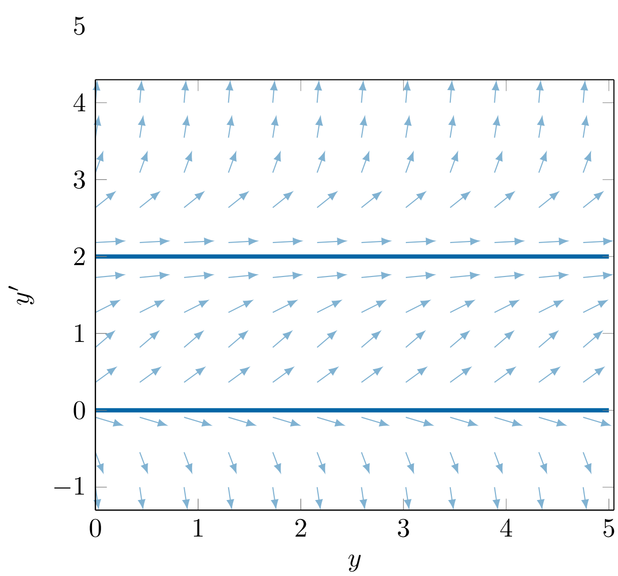


Para $y(t = 0) < y^* = 0$, as soluções crescem aprosimando-se desta solução de equilíbrio. Por outro lado, para $y(t = 0) > y^* = 0$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio, crescendo indefinidamente. ■

10. $y' = y(y - 2)^2$

Solução:
Soluções de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow y(y-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^* = 0 \\ y^* = 2 \end{cases}$$



Observando o campo de direções acima, concluímos que:

- Para $y(t=0) < 0$, as as soluções decrescem indefinidamente, afastando-se de $y^* = 0$;
- Para $0 < y(t=0) < 2$, as soluções afastam-se de $y = 0$ e crescem, aproximando-se de $y^* = 2$;
- Para $y(t=0) > 2$, as soluções crescem indefinidamente.

■