

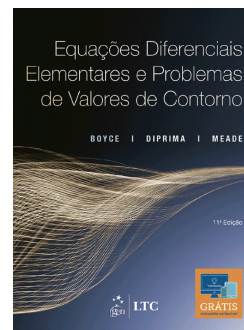
Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno (Boyce, W.; DiPrima, R. C.)

por

Igo da Costa Andrade

Referência

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro, LTC, 2020.



Capítulo 1: Introdução

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas 1 a 4, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \rightarrow \infty$. Se este comportamento depende o valor inicial de y e $t = 0$, descreva essa dependência.

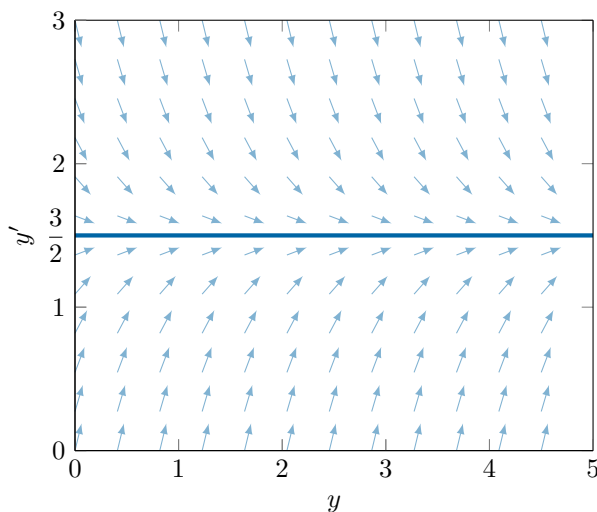
1. $y' = 3 - 2y$

Solução:

Solução de equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 3 - 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = \frac{3}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, $y \rightarrow y^* = \frac{3}{2}$ quando $t \rightarrow +\infty$, independente do valor inicial quando $t = 0$.



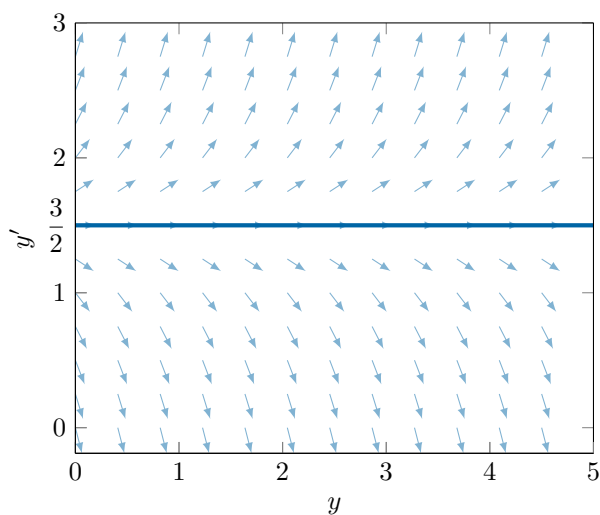
2. $y' = 2y - 3$

Solução:

Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 2y^* - 3 = 0 \Rightarrow y^* = \frac{3}{2}$$

Nesse caso, y afasta-se da solução de equilíbrio, independentemente do valor inicial de y quando $t = 0$. Como indica o campo de direções abaixo, $y \rightarrow -\infty$ para $y(t=0) < \frac{3}{2}$ e $y \rightarrow +\infty$ para $y(t=0) > \frac{3}{2}$.



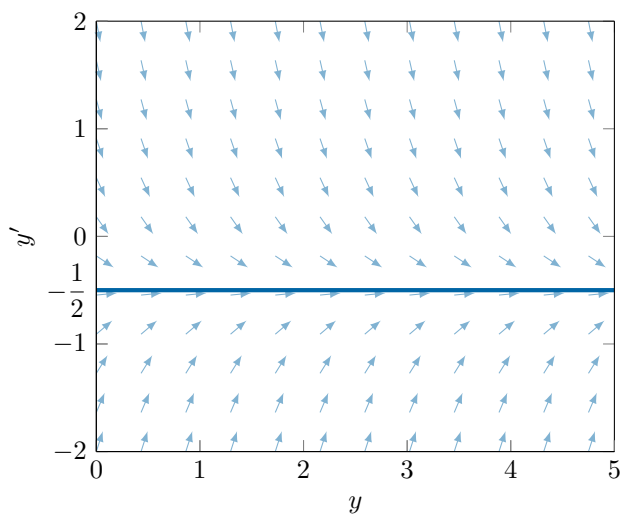
3. $y' = -1 - 2y$

Solução:

Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow -1 - 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, todas as soluções tendem ao valor de equilíbrio $y^* = -\frac{1}{2}$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente do valor inicial quando $t = 0$.



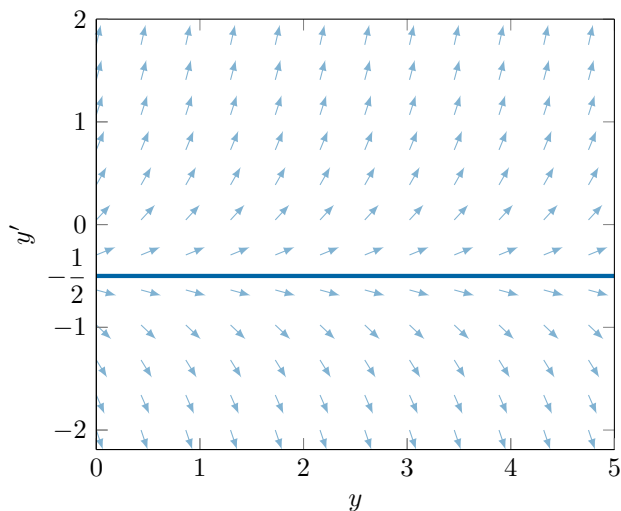
4. $y' = 1 + 2y$

Solução:

Solução de Equilíbrio:

$$y'(y^*) = 0 \Rightarrow 1 + 2y^* = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{1}{2}$$

Nesse caso, y afasta-se da solução de equilíbrio, independentemente do valor inicial de y quando $t = 0$. Como indica o campo de direções abaixo, $y \rightarrow -\infty$ para $y(t = 0) < -\frac{1}{2}$ e $y \rightarrow +\infty$ para $y(t = 0) > -\frac{1}{2}$.



Em cada um dos Problemas 5 e 6, escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento pedido quando $t \rightarrow \infty$.

5. Todas as soluções se aproximam de $y = 2/3$.

Solução:

Consideremos equações diferenciais na forma $y' = ay + b$. A solução de equilíbrio (y^*) é dada por:

$$\frac{dy}{dt}(y^*) \equiv 0 \Rightarrow ay^* + b = 0 \Rightarrow y^* = -\frac{b}{a}$$

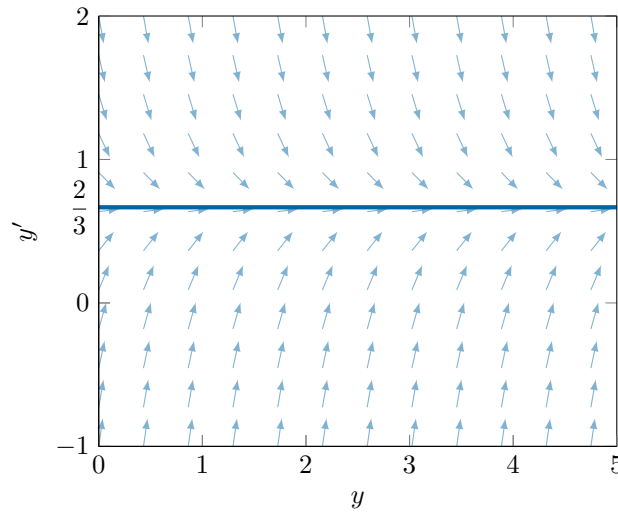
Por outro lado, para determinarmos se as soluções aproximam-se ou afastam-se de y^* quando $t \rightarrow \infty$, devemos observar o sinal de $\frac{dy'}{dy}$ em y^* . Se $\frac{dy'}{dy}(y^*) < 0$, as soluções tendem à solução de equilíbrio depois de um longo tempo. Caso, $\frac{dy'}{dy}(y^*) > 0$, as soluções afastam-se. Portanto, para resolver o problema em questão, temos as seguintes condições:

$$\begin{cases} y^* = -\frac{b}{a} \\ \frac{dy'}{dy}(y^*) = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = -\frac{2}{3} \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3}a \\ a < 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = -3$ e $b = 2$, obtemos uma equação possível satisfazendo às condições acima:

$$y' = 2 - 3y$$

O campo de direções pe mostrado abaixo:



■

6. Todas as soluções se afastam de $y = 2$.

Solução:

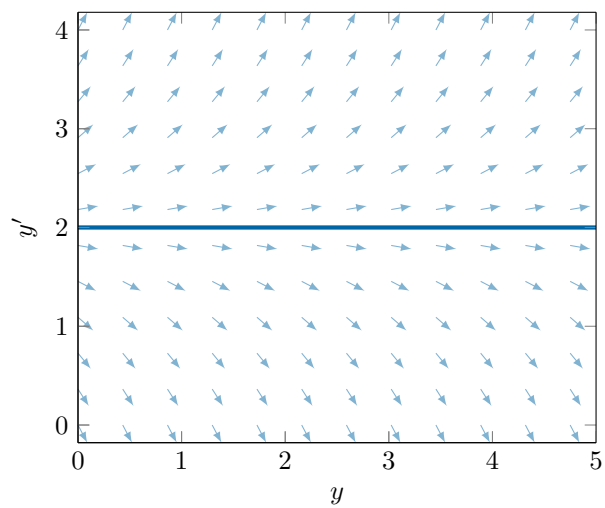
Nesse caso, devemos ter:

$$\begin{cases} y^* = -\frac{b}{a} = 2 \\ \frac{dy'}{dy}(y^*) = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = -2 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a > 0 \end{cases}$$

Uma equação possível satisfazendo às condições acima é

$$y' = -2 + y$$

O campo de direções pe mostrado abaixo:



■