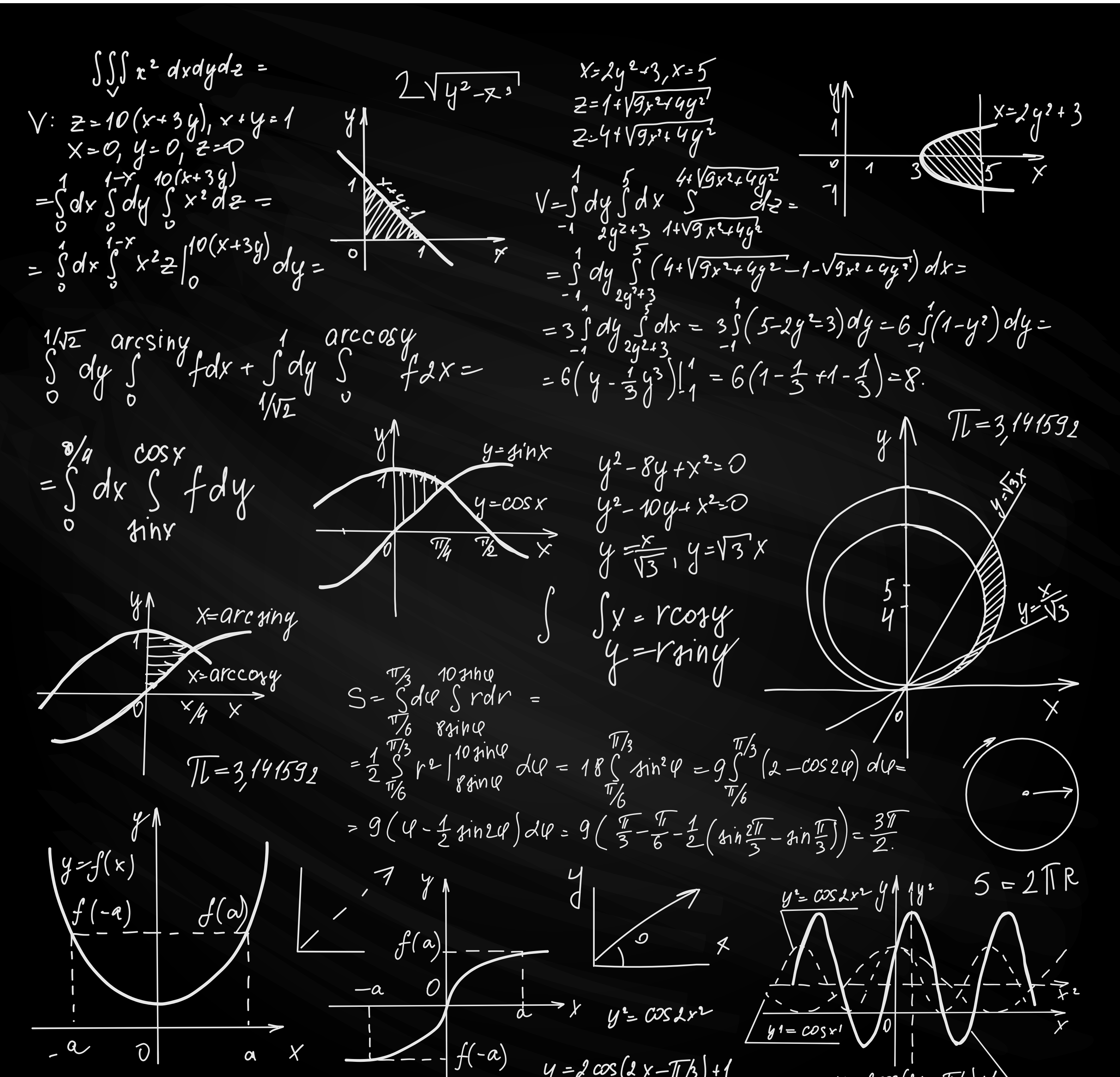
Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELEMENTARES E PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

DE

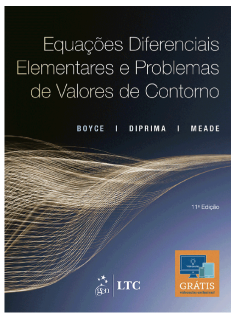
W. E. BOYCE, R. C. DIPRIMA & D. B. MEADE



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios

BOYCE, R. C.; Meade, D. B., W. E.; Diprima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC: Rio de Janeiro, 2020.



SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Problemas (pág. 24)

Em cada um dos Problemas 1 a 4, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y quando $t = 0$, descreva essa dependência.

1. $y' = 3 - 2y$

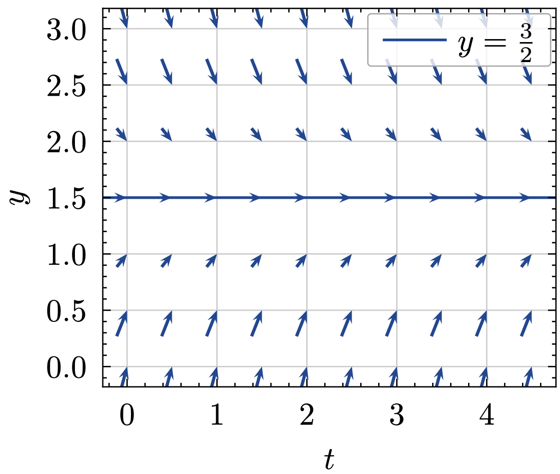
Solução

Primeiramente, determinemos a solução de equilíbrio: $y' = 0$:

$$y' = 0 \Rightarrow 3 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Note que na região em que $y < \frac{3}{2}$, temos $y' > 0$ e na região em que $y > \frac{3}{2}$, temos $y' < 0$. Assim, as soluções que inciam abaixo da solução de equilíbrio são crescentes enquanto as soluçãos que iniciam acma da solução de equilíbrio são decrescentes. Entretanto, quanto mais próximas da solução de equilíbrio, menos acentuada será a inclinação, dada por y'. Nesse sentido, as soluções tendem para a **solução de equilíbrio**, conforme indicado no campo de direções abaixo :

Figura 1: Campo de direções de $y' = 3 - 2y$



2. $y' = 2y - 3$

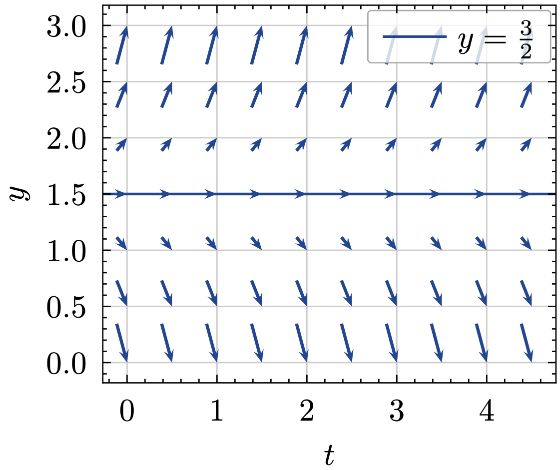
Solução

Primeiramente, determinemos a solução de equilíbrio: $y' = 0$:

$$y' = 0 \Rightarrow 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Neste caso, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio como mostrado no campo de direções a seguir:

Figura 2: Campo de direções de $y' = 2y - 3$



3. $y' = -1 - 2y$

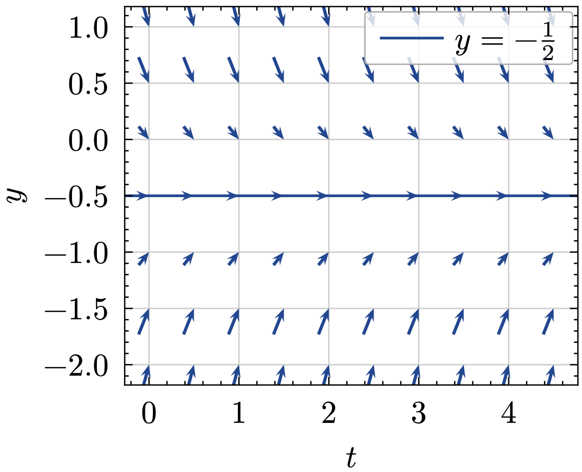
Solução

Determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow -1 - 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, as soluções tendem para a **solução de equilíbrio**.

Figura 3: Campo de direções da equação $y' = -1 - 2y$



■

4. $y' = 1 + 2y$

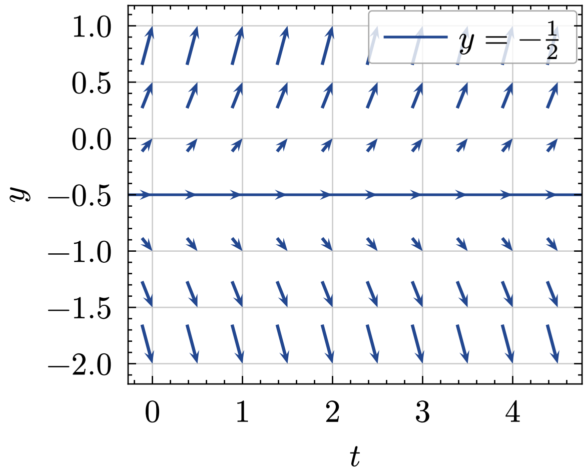
Solução

Determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 1 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Como indica o campo de direções abaixo, as soluções afastam-se da **solução de equilíbrio**.

Figura 4: Campo de direções da equação $y' = 1 + 2y$



■

Em cada um dos Problemas 5 e 6, escreva uma equação diferencial na forma $\frac{dy}{dt} = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento pedido quando $t \to \infty$.

5. Todas as soluções se aproximam de $y = \frac{2}{3}$.

Solução

Seja y^* a solução de equilíbrio. Da resolução dos Problemas 1 a 4, podemos observar que:

- Para os casos em que as soluções aproximam-se da solução de equilíbrio, $y' > 0$ para $y < y^*$ e $y' < 0$ para $y > y^*$;
- Para os casos em que as soluções afastam-se da solução de equilíbrio, $y' < 0$ para $y < y^*$ e $y' > 0$ para $y > y^*$.

No problema em questão, temos duas equações candidatas na forma $\frac{dy}{dt} = ay + b$ e cuja solução de equilíbrio é $y^* = \frac{2}{3}$:

$$y' = 3y - 2 \quad (1)$$
$$y' = 2 - 3y \quad (2)$$

Sem perda de generalidade, consideremos o valor $y = 0 < \frac{2}{3}$. A equação candidata (1) fornece $y' = -2 < 0$ enquanto a equação candidata (2) resulta em $y' = 2 > 0$.

Podemos concluir que para a equação cadndidata (1), as soluções afastam-se da solução de equilíbrio e para a equação candidata (2), as soluções aproximan-se da solução de equilíbrio. Assim, nossa resposta é:

$$y' = 2 - 3y.$$

■

6. Todas as soluções se afastam de $y = 2$.

Solução

Seguindo o raciocínio desenvolvido no problema anterior, uma equação diferencial com solução de equilíbrio igual a 2 e da qual as demais soluções afastam-se é:

$$y' = 2y - 1$$

■

2. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1. Seção de segundo nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

2.1.1. Seção de terceiro nível

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

3. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

4. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

5. TÍTULO DO CAPÍTULO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat.

REFERÊNCIAS

BOYCE, R. C.; Meade, D. B., W. E.; Diprima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC: Rio de Janeiro, 2020.