Física

Taylor, J. R.

Resoluções por

Igo da Costa Andrade

Capítulo 2: Medidas e unidades

Problemas (pág. 43)

1. As massas atômicas, representadas na Tab A.1, são expressas em *unidades de massa atômica*, abreviadas por u. $1\ \mathrm{u}$ é igual a $1,6604 \times 10^{-27}$ kg. Calcule, em quilogramas e em gramas, as massas de

   (a) um átomo de hidrogênio e

   Solução:

   Conforme dados da Tab. A.1, a massa do Hidrogênio em *unidades de massa atômica* é igual a $1{,}00797\ \mathrm{u}$

$$m_{H(kg)} = m_{H(u)} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} = 1{,}00797\ \mathrm{u} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} \approx 1{,}6736 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

$$m_{H(g)} = m_{H(kg)} \cdot \frac{1000\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{kg}} = 1{,}6736 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{1000\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{kg}} = 1{,}6736 \times 10^{-24}\ \ \mathrm{g}$$

$\blacksquare$

   (b) um átomo de oxigênio

   Solução:

   Conforme dados da Tab. A.1, a massa atômica do átomo de Oxigênio é igual a $15{,}9994\ \mathrm{u}$

$$m_{O(kg)} = m_{O(u)} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} = 15{,}9994\ \mathrm{u} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} \approx 2{,}6565 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

$$m_{O(g)} = m_{O(kg)} \cdot \frac{1000\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{kg}} = 2{,}6565 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{1000\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{kg}} = 2{,}6565 \times 10^{-23}\ \mathrm{g}$$

$\blacksquare$

2. Quantas moléculas, cada uma composta por um átomo de oxigênio e dois átomos de hidrogênio, existem num grama de água? Quantas existem em 18 gramas? Quantas existem em um centímetro cúbico?

Solução:

Primeiramente, utilizamos o resultado do Prob. 2.1 (b) para calcular a massa de uma molécula de água (um átomo de oxigênio e dois átomos de hidrogênio) em gramas (g):

$$m_{H_2O(g)} = m_{O(g)} + 2 \cdot m_{H(g)} = (2{,}6565 \times 10^{-23} \ \ \mathrm{g}) + 2 \cdot (1{,}6736 \times 10^{-24} \ \ \mathrm{g})$$

$$m_{H_2O(g)} = 2{,}9913 \times 10^{-23} \ \ \mathrm{g}$$

Portanto, em $1 \ \mathrm{g}$ de água existem:

$$N_{1g} = \frac{1}{0{,}0 \ \ \mathrm{g}} = 3{,}3431 \times 10^{22} \text{ moléculas de água por grama}$$

Em 18 gramas, teremos:

$$N_{18g} = 18 \cdot N_{1g} = 18 \cdot 3{,}3431 \times 10^{22} \text{ moléculas}$$

$$N_{18g} \approx 601.751.688.413.675.200.000.000{,}00 \text{ moléculas de água}$$

Finalmente, para determinar a quantidade de moléculas de água em 1 centímetro cúbico, necessitamos da densidade da água: $\rho_{H_2O} = 1\mathrm{g/cm^3}$. Deforma geral, consideremos que num volume V de água, temos a massa $m = N \cdot m_{H_2O(g)}$ em que N é a quantidade de moléculas presentes no volume V e $m_{H_2O(g)}$ é a massa de uma molécula de água em gramas, calculada acima. Assim,

$$N \cdot m_{H_2O(g)} = \rho_{H_{2_O}} V \Rightarrow N = \frac{\rho_{H_{2_O}} V}{m_{H_2O(g)}} = \frac{1000 \ \mathrm{g/cm^3} \cdot 1\mathrm{cm^3}}{2{,}6565 \times 10^{-23} \ \ \mathrm{g}}$$

$$\Rightarrow N = 3{,}3431 \times 10^{25} \text{ moléculas}$$

Obviamente, é o mesmo resultado encontrado na primeira parte deste problema.

■

3. Na Seç. 2.3 foi mencionado que o quilograma poderia ser definido como sendo igual à mass de $5,0188 \times 10^{25}$ átomos do isótopo $^{12}\mathrm{C}$, cuja massa é definida como sendo exatamentde $12,0000 \ \ \mathrm{u}$. Verifique se essa definição é compatível com o valor de u dado no Prob. 2.1.

Solução:

$$m_{\text{kg}} = N \cdot m_{\text{u}} \Rightarrow m_{\text{u}} = \frac{m_{\text{kg}}}{N} \Rightarrow 12\ \text{u} = \frac{1\ \text{kg}}{5{,}0188 \times 10^{25}}$$

$$\Rightarrow 1\ \text{u} = \frac{1}{12 \cdot 5{,}0188 \times 10^{25}}\ \text{kg}$$

$$\Rightarrow 1\ \text{u} = 1{,}6604 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

4. Considere as moléculas de hidrogênio, de oxigênio e de nitrogênio, cada uma delas composta por dois átomos idênticos. Calcule o número de moléculas de cada um desses gases, nas condições normais de pressão e temperatura (TPN) existentes em $1\ \text{m}^3$. Use os valores das densidades relativas dadas na Tab. 2.2. Faça uma extensão do seu cálculo que seja válida para outros gases. Qual é a conclusão geral que você poderia tirar dos seus resultados?

Solução:

De forma geral, seja $\rho = \gamma \cdot \rho_{H_2O}$ a densidade absoluta de uma substância, cuja densidade relativa em relação à água (H_2O) é igual a γ. Em um dado volume V, a massa dessa substância é:

$$M = \rho \cdot V$$

$$M = \left(\gamma \cdot \rho_{H_2O}\right) \cdot V$$

Por outro lado, sabendo que tal substância é composta por N moléculas, cada uma com massa m, então,

$$M = \left(\gamma \cdot \rho_{H_2O}\right) \cdot V \Rightarrow N \cdot m = \left(\gamma \cdot \rho_{H_2O}\right) \cdot V$$

$$\Rightarrow N = \frac{\left(\gamma \cdot \rho_{H_2O}\right) \cdot V}{m}$$

Podemos aplicar a fórmula acima para determinar a quantidade de moléculas de cada gás presentes em um volume $V = 1\text{m}^3$.

- Hidrogênio

A massa de cada molécula de Hidrogênio é:

$$m_{H_2} = 2m_H = 2 \cdot (1{,}00797 \text{ u}) = 2{,}01594 \text{ u}$$

$$m_{H_2} = 2{,}01594 \text{ u} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27}}{1 \text{ u}}$$

$$m_{H_2} = 3{,}3 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Sabendo que a densidade relativa do Hidrogênio em relação à água ($\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$) é $\gamma_{H_2} = 8{,}988 \times 10^{-5}$, então, quantidade de moléculas no volume $V = 1 \text{ m}^3$ é igual a:

$$N_{H_2} = \frac{\left(\gamma_{H_2} \cdot \rho_{H_2O}\right) \cdot V}{m_{H_2}} = \frac{(8{,}988 \times 10^{-5} \cdot 1000) \cdot 1}{3{,}3 \times 10^{-27}} = 2{,}69 \times 10^{25} \quad \text{moléculas}$$

- Oxigênio

A massa molecular do oxigênio é:

$$m_{O_2} = 2 \cdot m_O = 2 \cdot (15{,}99940 \text{ u}) = 32{,}0 \text{ u}$$

$$m_{O_2} = 32{,}0 \text{ u} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27}}{1 \text{ u}}$$

$$m_{O_2} = 5{,}3 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Sendo $\gamma_{O_2} = 0{,}001429$ a densidade relativa do oxigênio, então a quantidade de moéculas presentes em 1m^3 é:

$$N_{O_2} = \frac{\left(\gamma_{O_2} \cdot \rho_{H_2O}\right) \cdot V}{m_{O_2}} = \frac{(1{,}42904 \times 10^{-3} \cdot 1000) \cdot 1}{5{,}3 \times 10^{-26}} = 2{,}69 \times 10^{25} \text{ moléculas}$$

- Nitrogênio

A massa molecular do nitrogênio é:

$$m_{N_2} = 2 \cdot m_N = 2 \cdot (14{,}00670 \text{ u}) = 28{,}0 \text{ u}$$

$$m_{N_2} = 28{,}0 \text{ u} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27}}{1 \text{ u}}$$

$$m_{N_2} = 4{,}7 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Sendo $\gamma_{N_2} = 1{,}25055 \times 10^{-3}$ a densidade relativa do oxigênio, então a quantidade de moéculas presentes em 1m^3 é:

$$N_{N_2} = \frac{\left(\gamma_{N_2} \cdot \rho_{H_2O}\right) \cdot V}{m_{N_2}} = \frac{(1{,}25055 \times 10^{-3} \cdot 1000) \cdot 1}{4{,}7 \times 10^{-26}} = 2{,}69 \times 10^{25} \text{ moléculas}$$

Podemos concluir que a quantidade de moléculas em determinado volume independe do tipo de gás.

5. Admitindo-se que o ar é composto por 20% de oxigênio e 80% de nitrogênio, e que esses gases formam moléculas diatômicas, calcule a massa molecular "efetiva" do ar. Avalie o número de moléculas em $1\mathrm{cm}^3$ de ar nas condições TPN, Quantas moléculas são de oxigênio e quantas são de nitrogênio?

Solução:

Primeira parte: Seja N_{ar} a quantidade de moléculas de ar presentes em um dado volume V, Supondo que o ar é composto por 20% de oxigênio ($N_{\mathrm{O}_2} = 0,2N_{ar}$) e 80% de nitrogênio ($N_{\mathrm{N}_2} = 0,8N_{ar}$), temos:

$$N_{ar} = N_{\mathrm{O}_2} + N_{\mathrm{N}_2}.$$

Por outro lado, a massa total de ar é:

$$M_{ar} = N_{\mathrm{O}_2} \cdot m_{\mathrm{O}_2} + N_{\mathrm{N}_2} \cdot m_{\mathrm{N}_2},$$

em que m_{O_2} e m_{N_2} são respecitvamente as massas moleculares do oxigênio e do nitrogênio. Portanto, a massa molecular efetiva do ar é:

$$m_{ar} = \frac{M_{ar}}{N_{ar}} = \frac{N_{\mathrm{O}_2} \cdot m_{\mathrm{O}_2} + N_{\mathrm{N}_2} \cdot m_{\mathrm{N}_2}}{N_{\mathrm{O}_2} + N_{\mathrm{N}_2}}$$

$$m_{ar} = \frac{N_{\mathrm{O}_2}}{N_{ar}} \cdot m_{\mathrm{O}_2} + \frac{N_{\mathrm{N}_2}}{N_{ar}} \cdot m_{\mathrm{N}_2}$$

$$m_{ar} = 0,2 \cdot m_{\mathrm{O}_2} + 0,8 \cdot m_{\mathrm{N}_2}$$

$$m_{ar} = 0,2 \cdot (2 \cdot 15{,}99940) + 0,8 \cdot (2 \cdot 14{,}00670) = 28{,}81048\ \frac{\mathrm{u}}{\text{molécula}}$$

$$m_{ar} = \left(28{,}81048\ \frac{\mathrm{u}}{\text{molécula}}\right) \cdot (1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}) = 4{,}784 \times 10^{-26} \frac{\mathrm{kg}}{\text{molécula}}$$

Segunda parte: Seja $M_{ar} = M_{\mathrm{O}_2} + M_{\mathrm{N}_2}$ a massa total de ar em um volume V em função da massa total de oxigênio (M_{O_2}), que ocupa o volume $V_{\mathrm{O}_2} = 0,2V$ e da massa total de nitrogênio, que ocupa o volume $V_{\mathrm{N}_2} = 0,8V$. Então,

$$\begin{aligned} M_{ar} = M_{\mathrm{O_2}} + M_{\mathrm{N_2}} \Rightarrow M_{ar} &= \rho_{\mathrm{O_2}} \cdot V_{\mathrm{O_2}} + \rho_{\mathrm{N_2}} \cdot V_{\mathrm{N_2}} \\ \Rightarrow M_{ar} &= \rho_{\mathrm{O_2}} \cdot (0,2V) + \rho_{\mathrm{N_2}} \cdot (0,8V) \\ \Rightarrow M_{ar} &= \left(0,2\rho_{\mathrm{O_2}} + 0,8\rho_{\mathrm{N_2}}\right) \cdot V \\ \Rightarrow N_{ar} \cdot m_{ar} &= \left(0,2\rho_{\mathrm{O_2}} + 0,8\rho_{\mathrm{N_2}}\right) \cdot V \\ \Rightarrow \frac{N_{ar}}{V} &= \frac{0{,}2\rho_{\mathrm{O_2}} + 0{,}8\rho_{\mathrm{N_2}}}{m_{ar}} \end{aligned}$$

Para determinar a quantidade de moléculas de ar em $1\mathrm{cm}^3$:

$$\frac{N_{ar}}{V} = \frac{0{,}2\rho_{\mathrm{O_2}} + 0{,}8\rho_{\mathrm{N_2}}}{m_{ar}} = \frac{0{,}2 \cdot \left(1{,}4\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right) + 0{,}8 \cdot \left(1{,}3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)}{0{,}0\ \frac{\mathrm{kg}}{\text{molécula}}}$$

$$\frac{N_{ar}}{V} = 2{,}69 \times 10^{25} \frac{\text{moléculas}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\frac{N_{ar}}{V} = 2{,}69 \times 10^{25} \frac{\text{moléculas}}{\mathrm{m}^3} \cdot \left(\frac{1\mathrm{m}^3}{10^6\mathrm{cm}^3}\right)$$

$$\frac{N_{ar}}{V} = 2{,}69 \times 10^{19} \frac{\text{moléculas}}{\mathrm{cm}^3}$$

Terceira parte: Do total de moléculas de ar, temos:

$$\frac{N_{\mathrm{O_2}}}{V} = 0,2 \cdot \frac{N_{ar}}{V} = 0,2 \cdot 2{,}69 \times 10^{19} \frac{\text{moléculas}}{\mathrm{cm}^3} = 5{,}38 \times 10^{18} \quad \frac{\text{moléculas}}{\mathrm{cm}^3}$$

$$\frac{N_{\mathrm{N_2}}}{V} = 0,8 \cdot \frac{N_{ar}}{V} = 0,8 \cdot 2{,}69 \times 10^{19} \frac{\text{moléculas}}{\mathrm{cm}^3} = 2{,}64 \times 10^{20} \quad \frac{\text{moléculas}}{\mathrm{cm}^3}$$

■

6. A densidade do gás interestelar na nossa galáxia é avaliada em cerca de $10^{-21}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Admitindo-se que esse gás é constituído principalmente de hidrogênio, avalie o número de átomos de hidrogênio por cm^3. Compare esse resultado com o correspondente obtido para o ar nas condições TPN (Prob. 2.5).

Solução:

$$\rho_{\mathrm{H}_2} = \frac{M}{V} \Rightarrow \frac{N \cdot m_{\mathrm{H}_2}}{V} \Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{\rho_{\mathrm{H}_2}}{m_{\mathrm{H}_2}} = \frac{10^{-21}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{6{,}7\times10^{-27}\frac{\mathrm{kg}}{\text{molécula}}}$$

$$\frac{\rho_{\mathrm{H}_2}}{m_{\mathrm{H}_2}} = 5{,}98\times10^{5}\ \text{moléculas}/\mathrm{m}^3$$

$$\frac{\rho_{\mathrm{H}_2}}{m_{\mathrm{H}_2}} = 5{,}98\times10^{5}\ \text{moléculas}/\mathrm{m}^3 \cdot \left(\frac{1\mathrm{m}^3}{10^6\mathrm{cm}^3}\right)$$

$$\frac{\rho_{\mathrm{H}_2}}{m_{\mathrm{H}_2}} = 5{,}98\times10^{-1}\ \text{moléculas}/\mathrm{cm}^3$$

■

7. Um copo de 2 cm de raio contém água. Em duas horas, o nível da água baixa 1mm. Avalie, em gramas por hora, a velocidade de evaporação da água. Quantas moléculas de água estão se evaporando por segundo em cada centímetro quadrado da superfície da água?

Solução:

Seja a taxa de evaporação $\frac{dh}{dt} = \frac{1\ \mathrm{mm}}{2\ \mathrm{h}} = 0,5\ \mathrm{mm/h} = 0,5\ \mathrm{cm/h}$. Então,

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho\cdot V \Rightarrow M = \rho\cdot(Sh) \Rightarrow M = \rho\cdot(\pi r^2 h)$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = \rho\left(\pi r^2\cdot\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = (1{,}0\ \mathrm{g/cm^3})\cdot(\pi\cdot(2{,}0\ \mathrm{cm})^2\cdot(0{,}1\ \mathrm{cm/h}))$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = 0{,}6\ \mathrm{g/h}$$

Seja a massa molecular da água: $m = 2m_{\mathrm{H}_2} + m_{\mathrm{O}_2} = 2\cdot(1{,}7\times10^{-27}\ \mathrm{kg}) + (2{,}7\times 10^{-26}\ \mathrm{kg}) = 3\times10^{-26}\ \mathrm{kg}$.

Para determinarmos a quantidade de moléculas se evaporando por segundo em cada centímetro quadrado, façamos:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho \cdot V \Rightarrow \rho \cdot (Sh)$$

$$\Rightarrow N \cdot m = \rho S h$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} \cdot m = \rho S \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S} \cdot \frac{dN}{dt} = \frac{\rho}{m} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S} \cdot \frac{dN}{dt} = \frac{1{,}0 \ \ \mathrm{g/cm^3}}{2{,}99 \times 10^{-26} \ \mathrm{kg} \cdot 1000 \ \mathrm{g/kg}} \cdot \left(0{,}1 \ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{h}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S} \cdot \frac{dN}{dt} = \frac{1{,}0 \ \ \mathrm{g/cm^3}}{2{,}99 \times 10^{-26} \ \mathrm{kg} \cdot 1000 \ \mathrm{g/kg}} \cdot \left(0{,}1 \ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{h}}\right) \cdot \left(\frac{1 \ \ \mathrm{h}}{3600 \ \ \mathrm{s}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S} \cdot \frac{dN}{dt} = 4{,}64 \times 10^{17} \ \mathrm{cm/s}$$

■

8. Um *mol* de uma substância é definido como sendo uma quantidade dessa substância expressa em *gramas*, numericamente igual à massa molecular dessa substância em u. (Quando nos referemos a um elemento químico, e não a um composto, usaremos a massa atômoca em vez da massa molecular.) Verifique que o número de moléculas (ou átomos) em um mol de *qualquer* substância é sempre o mesmo e é igual a $6,0225 \times 10^{23}$. Esse número, chamado *constante de Avogadro*, é uma constante física muito importante.

   Solução:

   Consideremos uma substância, cuja massa molecular (ou atômica) em u seja igual a m_u. Tomemos uma quantidade m (em gramas) dessa referida substância, tal que m é numericamente igual a m_u. A quantidade N de *componentes* (átomos ou moléculas) presentes na massa m é tal que:

$$m \ \mathrm{grama} = N \cdot (m_u \ \mathrm{u}) \Rightarrow N = \frac{m \ \mathrm{grama}}{m_u \ \mathrm{u}} \Rightarrow N = \frac{\cancel{m} \ \mathrm{grama}}{\cancel{m}_u \ \mathrm{u}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1 \ \mathrm{grama}}{\cancel{1 \ \mathrm{u}} \cdot \frac{1{,}6604 \times 10^{-27} \ \mathrm{kg}}{\cancel{1 \ \mathrm{u}}}} = \frac{1 \ \mathrm{grama}}{1{,}6604 \times 10^{-27} \cancel{\mathrm{kg}} \cdot \frac{10^3 \ \mathrm{grama}}{1 \cancel{\mathrm{kg}}}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1 \cancel{\mathrm{grama}}}{1{,}6604 \times 10^{-24} \cancel{\mathrm{grama}}} = \frac{1}{1{,}6604 \times 10^{-24}}$$

$$\Rightarrow N = 6{,}0226 \times 10^{23} \ \mathrm{componentes}$$

9. Usando os dados das Tabs 2.2 e A.1, avalie a separação média entre moléculas nas condições TPN, no hidrogênio (gás), na água (líquido) e no ferro (sólido).

Solução:

De forma geral, consideremos uma substância com densidade ρ e cuja massa molecular é m. Tomemos uma quantidade N de moléculas dessa substância, ocupando um volume total V. Então,

$$\rho = \frac{N \cdot m}{V}$$

O volume médio v ocupado por cada molécula é

$$v = \frac{V}{N} \Rightarrow v = \frac{m}{\rho}$$

A fim de determinar a separação média entre as moléculas, temos dois modelos a considerar:

1. Modelo cúbico: cada molécula "ocupa" um espaço cúbico de volume v e lado l. Nesse caso, a separação média entre as moléculas é igual ao lado do cubo. Ou seja,

$$v = \frac{m}{\rho} \Rightarrow l^3 = \frac{m}{\rho} \Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$$

2. Modelo esférico: cada molécula "ocupa" um espaço esférico de volume v e diâmetro d. Nesse caso, a separação média entre as moléculas é igual ao diâmetro da esfera. Assim,

$$v = \frac{m}{\rho} \Rightarrow \frac{\pi d^3}{6} = \frac{m}{\rho} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi \rho}}$$

A Tabela 1 mostra o resultado da aplicação dos dois modelos de cálculo da separação média entre moléculas para: Hidrogênio, Água, Ferro.

			Separação (m)	
Substância	Massa Molecular (kg)	Densidade $(\mathrm{kg/m^3})$	Modelo Cúbico	Modelo Esférico
Hidrogênio	$3{,}35 \times 10^{-27}$	$8{,}99 \times 10^{-2}$	$3{,}34 \times 10^{-9}$	$4{,}14 \times 10^{-9}$
Água	$2{,}99 \times 10^{-26}$	10^3	$3{,}1 \times 10^{-10}$	$3{,}85 \times 10^{-10}$
Ferro	$9{,}27 \times 10^{-26}$	$7.860{,}00$	$2{,}28 \times 10^{-10}$	$2{,}82 \times 10^{-10}$

Tabela 1: Seperação média entre moléculas de diversas substâncias

10. A massa de um átomo está praticamente concentrada no seu núcleo. O raio do núcleo de urânio é $0{,}0$ m. Usando a massa atômica do urânio, dada na Tab. A.1, calcule o valor da desnidade da "matéria nuclear". Esse núcleo contém $238{,}0$ partículas ou "núcleons". Avalie a separação média entre os núcleos do urânio. Poderá você concluir, a partir do resultado obtido, que se deve tratar a matéria nuclear do mesmo modo que se trata a matéria comum (isto é, os agregados de átomos e moléculas)?

Solução:

Consideremos a massa atômica do Urânio, dada na Tab. A.1. igual a $238{,}0$ unidades de massa atômica (u). Lembrando que $1\ \mathrm{u} = 1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, a densidade da "matéria nuclear" do Urânio é igual a:

$$\rho = \frac{m \cdot u}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{238{,}0\ \mathrm{u} \cdot 1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u}}{\frac{4}{3}\pi (0{,}0\ \mathrm{m})^3} = 1{,}44 \times 10^{17} \mathrm{kg/m^3}$$

Supondo um modelo cúbico e que o núcleo contém $238{,}0$ partículas, a separação média entre os núcleons é:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\frac{m \cdot u}{N}}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{m \cdot u}{N \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{238{,}0 \cdot 1{,}6604 \times 10^{-27}}{238{,}0 \cdot 1{,}44 \times 10^{17}}} = 2{,}26 \times 10^{-15}\quad \mathrm{m}$$

■

11. Usando os dados da Tab. 13.1, calcule a densidade média da Terra e so Sol. Quando você compara esses valores com os dados da Tab. 2.2, qual é a sua conclusão sobre a estrutura desses dois corpos?

Solução:

i) Terra:

- Massa: $M = 6 \times 10^{24}$ kg
- Raio médio: $R = 6{,}4 \times 10^6$ m

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{6 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi \left(6{,}4 \times 10^6\ \ \mathrm{m}\right)^3} = \frac{6 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}}{1{,}08 \times 10^{21}\ \mathrm{m}^3} = 5{,}52 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$$

i) Sol:

- Massa: $M = 1{,}98 \times 10^{30}$ kg

- Raio médio: $R = 6{,}96 \times 10^8$ m

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1{,}98 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi\left(6{,}96 \times 10^{8}\ \ \mathrm{m}\right)^3} = \frac{1{,}98 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{1{,}41 \times 10^{27}\ \mathrm{m}^3} = 1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$$

12. Avalie a densidade média do universo, usando a informação dada na Seç. 1.3. Admitindo--se que todos os átomos estivesses distribuídos uniformemente em todo o universo, quantos átomos existiriam em cada centímetro cúbico? Admita a hipótese de que todos os átomos são de hidrogênio.

Solução:

Na Seç. 1.3., foi informado que "o universo deve conter [...] um total de [$N =$] 10^{80} átomos numa região de raio [$R =$] 10^{26} m". Admitindo-se que todos esses átomos são de hidrogênio, cuja massa é igual a

$$m = 1{,}0\ \mathrm{u} \cdot 1{,}6604 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 1{,}67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg},$$

e seja o volume do universo igual a

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(10^{26}\ \mathrm{m}\right)^3 = 4{,}19 \times 10^{78}\ \mathrm{m}^3.$$

Então, a densidade estimada para o universo é:

$$\rho = \frac{N \cdot m}{V} = \frac{10^{80} \cdot 1{,}67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{4{,}19 \times 10^{78}\ \mathrm{m}^3} = 4 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg/m^3}$$

A quantidade de átomos por unidade de volume é:

$$\frac{N}{V} = \frac{10^{80}\ \text{átomos}}{4{,}19 \times 10^{78}\ \mathrm{m}^3} = \frac{10^{80}\ \text{átomos}}{4{,}19 \times 10^{84}\ \mathrm{cm}^3} = 2{,}39 \times 10^{-5}\text{átomos/cm}^3$$

Portanto, cada centímetro cúbico contém, em média, $0{,}00$ átomos.

13. A velocidade da luz no vácuo é de $2{,}9979 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Transforme esse resultado em km por hora. Quantas voltas em torno da Terra poderia dar, um raio luminoso durante 1 segundo? (Use a Tab. 13.1 para os dados relativos à Terra). Que distância esse raio liminoso percorria em um ano? Essa distância é chamada *ano-luz*.

Solução:

Cálculo da velocidade da luz c em km por hora:

$$c = 2{,}9979 \times 10^8 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}9979 \times 10^8 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot \frac{1 \quad \mathrm{km}}{1.000{,}0 \quad \mathrm{m}} \cdot \frac{3.600{,}0 \quad \mathrm{s}}{1 \ \mathrm{h}} = 1{,}0792 \times 10^9 \quad \mathrm{km/h}.$$

Sabendo que o raio da Terra é $6.370.000{,}0$ metros, a quantidade k de voltas que um raio luminoso poderia dar em volta da Terra durante $\Delta t = 1$ segundo é tal que:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow c = \frac{k \cdot (2\pi R)}{\Delta t} \Rightarrow k = \frac{c \cdot \Delta t}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow k = \frac{(2{,}9979 \times 10^8 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}) \cdot (1 \quad \mathrm{s})}{2\pi(6{,}37 \times 10^6 \quad \mathrm{m})}$$

$$\Rightarrow k \approx 7{,}5 \quad \mathrm{voltas}$$

Em um ano, um raio luminoso percorreria a distância:

$$\Delta s = c \cdot \Delta t = (2{,}9979 \times 10^8 \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}) \cdot \left(1 \quad \mathrm{ano} \cdot \frac{365 \quad \mathrm{dias}}{1 \quad \mathrm{ano}} \cdot \frac{24 \quad \mathrm{h}}{1 \quad \mathrm{dia}} \cdot \frac{3.600{,}0 \quad \mathrm{s}}{1 \quad \mathrm{h}}\right)$$

$$\Delta s = 9{,}45 \times 10^{15} \quad \mathrm{m}$$

■

14. O raio da órbita terrestre é de $149.000.000.000{,}0$ m. Este comprimento é chamado *unidade astronômica*, A.U. Represente um ano-luz em unidades astronômicas (veja Prob. 2.13).

Solução:

$$1 \ \text{ano-luz} = 9{,}45 \times 10^{15} \quad \mathrm{m} \cdot \frac{1 \quad \mathrm{A.U.}}{1{,}49 \times 10^{11} \quad \mathrm{m}} = 6{,}35 \times 10^4 \quad \mathrm{A.U.}$$

■

15. *Paralaxe* é a diferença na direção aparende de um objeto, resultante da mudança de posição do observador. (Segure um lápis na sua frente e feche inicialmente o olho direito e depois o esquerdo. Observer que, em cada caso, o lápis parece situado em posição diferente, em relação ao plano de fundo.) *Paralaxe estelar* é a mudança aparente, da posição de uma estrela, como resultante do movimento orbital da Terra em torno do Sol. Ela é dada, quantitativamente, pela metade do ângulo, subentedido pelo diâmetro da órbita terrestre T_1T_2 perpendicular à linha que uni a estrela ao Sol (Veja Fig. 2.10). Ela é dada por $\theta = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta)$, sendo α e β medidos nas duas posições T_1 e T_2 separadas por seis meses. A distância

r, da estrela ao Sol, pode ser obtida pela relação $a = r\theta$, onde a é o raio da órbita terrestre e θ é expresso em radianos. A estrela que apresenta maior paralaxe, cujo valor é $0,76''$ (isto é, a estrela mais próxima) é α-Centauro. Calcule a sua distância do Sol, expressa em metros, anos-luz e unidades astronômicas (A.U.).

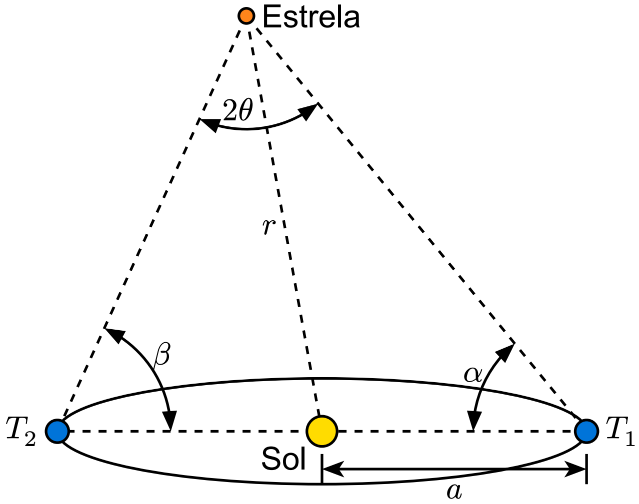

Figura 1: Fig. 2.10 (Problema 2.15)

Solução:

Inicialmente, vamos converter a paralaxe de *segundos de graus* ($''$) para radianos:

$$\theta = 0{,}8'' \times \frac{1'}{60''} \times \frac{1^\circ}{60'} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 3{,}68 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Então, sabendo que o raio orbital terrestre é igual a $1{,}49 \times 10^{11}$ m , a distância r da estrela α -Centauro até o sol é:

$$a = r\theta \Rightarrow r = \frac{a}{\theta}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1{,}49 \times 10^{11} \text{ m}}{0{,}00} = 4{,}04 \times 10^{16} \text{ m}$$

$$\Rightarrow r = (1{,}49 \times 10^{11} \text{ m}) \cdot \frac{1 \text{ ano-luz}}{9{,}45 \times 10^{15} \text{ m}} = 4{,}28 \text{ anos-luz}$$

$$\Rightarrow r = 4{,}04 \times 10^{16} \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ A.U.}}{1{,}49 \times 10^{11} \text{ m}} = 2{,}71 \times 10^{5} \text{ A.U.}$$

16. Um *parsec* é a distância, ao Sol, de uma estrela cuja paralaxe é de $1''$. Represente o *parsec* em metros, anos-luz e unidades astronômicas. Represente a distância, dada em *parsec* em termos da paralaxe, em segundos de arco.

Solução:

Inicialmente, vamos converter a paralaxe de *segundos de graus* ($''$) para radianos:

$$\theta = 1{,}0'' \times \frac{1'}{60''} \times \frac{1^\circ}{60'} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 4{,}85 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Então, sabendo que o raio orbital terrestre é igual a $149.000.000.000{,}0$ m , o *parsec* pode ser calculado como segue:

$$\begin{aligned} a = r\theta \Rightarrow r &= \frac{a}{\theta} \\ \Rightarrow r &= \frac{1{,}49 \times 10^{11} \text{ m}}{4{,}85 \times 10^{-6}} = 3{,}07 \times 10^{16} \text{ m} \\ \Rightarrow r &= (1{,}49 \times 10^{11} \text{ m}) \cdot \frac{1 \text{ ano-luz}}{9{,}45 \times 10^{15} \text{ m}} = 3{,}25 \text{ anos-luz} \\ \Rightarrow r &= 3{,}07 \times 10^{16} \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ A.U.}}{1{,}49 \times 10^{11} \text{ m}} = 2{,}06 \times 10^{5} \text{ A.U.} \end{aligned}$$

■

17. A distância entre São Francisco e Nova York, medida ao longo de um círculo máximo entre as duas cidade é de $4.140{,}0$ km. Calcule o ângulo entre as verticais das duas cidades.

Solução:

$$s = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{R} \Rightarrow \theta = \frac{4140 \text{ km} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}}}{6{,}37 \times 10^{6} \text{ m}} = 0{,}6 \text{ rad} = 37{,}2^\circ$$

■

18. Usando os dados da legenda da Fig. 1.6, determine o ângulo subebtendido pelo diâmetro da Grande Galáxia M-31, quando observada da Terra. Dê o resultado em radianos e graus. Deteminine também o ângulo sólido subentendido pela nebulosa.

Solução:

De acordo com o enunciado da referida figura, a Grande Galáxia M-31 encontra-se a $R = 2{,}5 \times 10^{22}$ m do sistema solar e possui diâmetro de cerca de $d = 10^{21}$ m. Portanto, o ângulo θ subebtendido pelo seu diâmetro é tal que:

$$d = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{d}{R} \Rightarrow \theta = \frac{10^{21} \ \ \mathrm{m}}{2{,}5 \times 10^{22} \ \ \mathrm{m}} = 0{,}04 \ \mathrm{rad}$$

$$\Rightarrow \theta = 0{,}04 \ \mathrm{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \ \ \mathrm{rad}} = 2{,}3^\circ$$

O ângulo sólido Ω subendendido pela nebulosa é tal que

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \Rightarrow \Omega = \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{R^2} = \frac{\pi \left(\frac{10^{21} \ \ \mathrm{m}}{2}\right)^2}{(2{,}5 \times 10^{22} \ \ \mathrm{m})^2} = 1{,}26 \times 10^{-3} \ \ \mathrm{esterorradianos}$$

■

19. Usando a Tab. de funções trigonométricas existente no Apêndice, calcule o ângulo para o qual $\sin\theta$ e $\tan\theta$ diferem por (a) 10%, (b) 1% e (c) 0,1%. Faça o mesmo para $\sin\theta$ e θ, e para $\tan\theta$ e θ, quando θ é expresso em radianos. Qual é a conclusão que você pode tirar dos seis resultados?

Solução:

A Tabela 2 mostra os valores de θ para os quais as funções $\sin\theta$ e $\tan\theta$ diferem por (a) 10%, (b) 1% e (c) 0,1%. Para ranto aplicamos a relação:

$$\frac{|\sin\theta - \tan\theta|}{|\tan\theta|} \leq e,$$

em que $e = 10\%$, 1% e $0,1\%$.

θ (°)	θ (rad)	$\sin\theta$	$\tan\theta$	e (%)
25,84	0,4510	0,4359	0,4843	9,999
8,11	0,1415	0,1410	0,1425	0,999
2,56	0,0447	0,0447	0,0447	0,100

Tabela 2: Comparação entre $\sin\theta$ e $\tan\theta$

A Tabela 3 mostra os valores de θ para os quais as funções $\sin\theta$ e θ (em radianos) diferem por (a) 10%, (b) 1% e (c) 0,1%. Para ranto aplicamos a relação:

$$\frac{|\sin\theta - \theta|}{\theta} \leq e,$$

em que $e = 10\%$, 1% e $0,1\%$.

θ (°)	θ (rad)	$\sin\theta$	e (%)
45,07	0,7866	0,7080	9,998
14,05	0,2453	0,2428	1,000
4,43	0,0774	0,0773	0,100

Tabela 3: Comparação entre $\sin\theta$ e θ

A Tabela 4 mostra os valores de θ para os quais as funções $\tan\theta$ e θ (em radianos) diferem por (a) 10%, (b) 1% e (c) 0,1%. Para ranto aplicamos a relação:

$$\frac{|\tan\theta - \theta|}{\theta} \leq e,$$

em que $e = 10\%$, 1% e $0,1\%$.

θ (°)	θ (rad)	$\tan\theta$	e (%)
29,65	0,5175	0,5692	9,999
9,86	0,1721	0,1738	0,999
3,13	0,0547	0,0548	0,100

Tabela 4: Comparação entre $\tan\theta$ e θ

Os resultados mostram que para ângulos muito pequenos (medidos em radianos), as três funções - seno, tangente e o próprio ângulo - têm valores muito próximos entre si. Ou seja, para $\theta \ll 1$ rad, valem as aproximações:

$$\{\sin\theta \approx \tan\theta \sin\theta \approx \theta \tan\theta \approx \theta$$

Referências

TAYLOR, J. R. **Física**: um curso universitário. vol. 1 - Mecânica. São Paulo: Blucher, 2014.