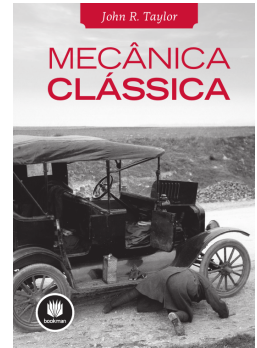


Resolução de Problemas do Livro
Mecânica Clássica (Taylor, J. R.)

por
Igo da Costa Andrade

Referência

TAYLOR, J. R.. **Mecânica Clássica**. Porto Alegre, Bookman, 2013.



Capítulo 1: Leis de Newton do Movimento

PROBLEMAS

Seção 1.2 Espaço e Tempo

1.1 Dados dois vetores $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$, determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \\ 5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= 5(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + 2(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = 5\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{z}} = 7\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$



1.2 Dois vetores são dados como $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$. (Lembre-se de que essas declarações são uma forma compacta de fornecer as componentes dos vetores.) Determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

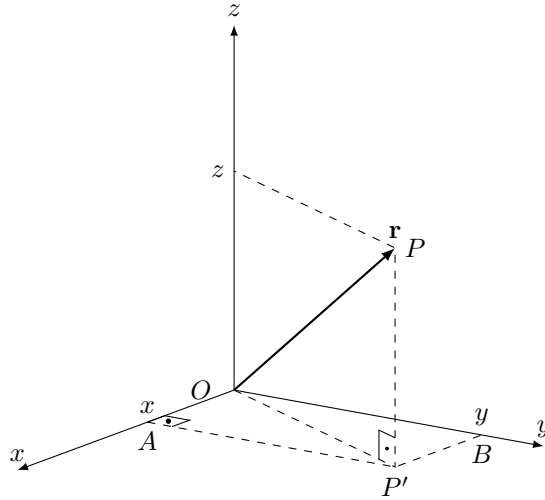
Solução:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (1 + 3, 2 + 2, 3 + 1) = (4, 4, 4) = 2\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}} \\ 5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= (5 \cdot 1 + 2 \cdot 3, 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2, 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = (5 + 6, 10 + 4, 15 + 2) = (11, 14, 17) = 11\hat{\mathbf{x}} + 14\hat{\mathbf{y}} + 17\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 4 + 3 = 10 \\ \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}(2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -4\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$



- 1.3** Aplicando o teorema de Pitágorás (a versão comum bidimensional) duas vezes, mostre que o comprimento r de um vetor tridimensional $\mathbf{r} = (x, y, z)$ satisfaz $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Solução:



Conforme figura acima, consideremos o vetor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ localizado no ponto P , tal que sua projeção ortogonal no plano xy é ponto $P' = (x, y, 0)$. No plano xy , tomamos o triângulo OAP' , retângulo no ponto $A = (x, 0, 0)$ e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2 = x^2 + y^2. \quad (1)$$

EM seguida, consideremos o triângulo $OP'P$, reto em P' e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OP'}^2 + \overline{P'P}^2 \Rightarrow \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + z^2 \\ &\Rightarrow r^2 = \overline{OP'}^2 + z^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Substituindo $\overline{OP'}^2$ de (1) em (2), obtemos:

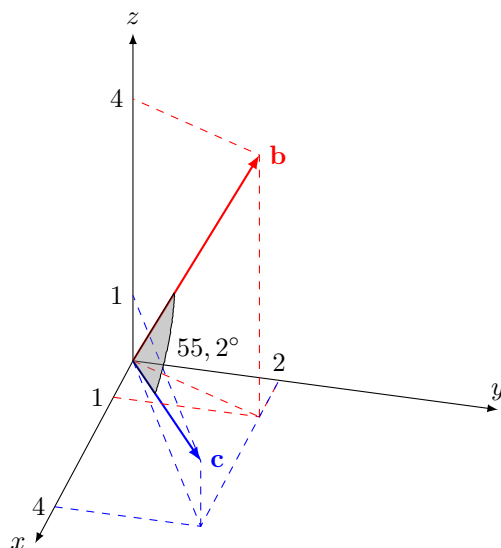
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

■

- 1.4** Um dos muitos usos do produto escalar é na determinação do ângulo entre dois vetores dados. Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{b} = (1, 2, 4)$ e $\mathbf{c} = (4, 2, 1)$ através do cálculo do produto escalar entre eles.

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= bc \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{bc} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &\Rightarrow \cos \theta = \frac{12}{\sqrt{21} \sqrt{21}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ &\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{4}{7}\right) = 55,2^\circ \end{aligned}$$



- 1.5** Determine o ângulo entre a diagonal do corpo de um cubo e qualquer das diagonais de suas faces. [Sugestão: escolha um cubo de lado 1 e com um dos vértices em O e o vértice oposto $(1, 1, 1)$. Escreva o vetor que representa uma diagonal do corpo e o outro que represente a diagonal de uma face, e então determine o ângulo entre elas conforme o Problema 1.4.]

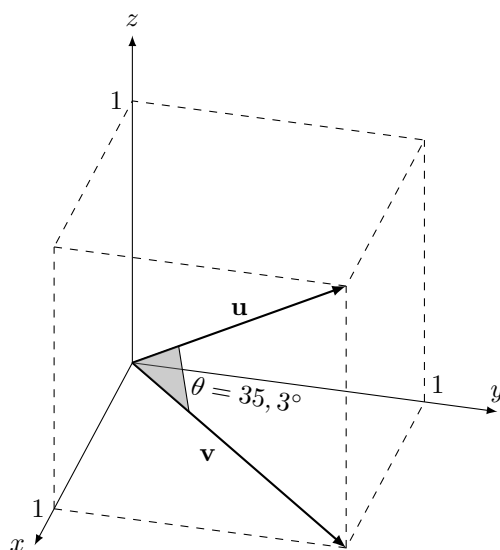
Solução:

Sem perda de generalidade, consideremos os vetores $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$, tais que:

$$\begin{cases} u = |\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ v = |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= uv \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{uv} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ &\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right) = 35,3^\circ \end{aligned}$$

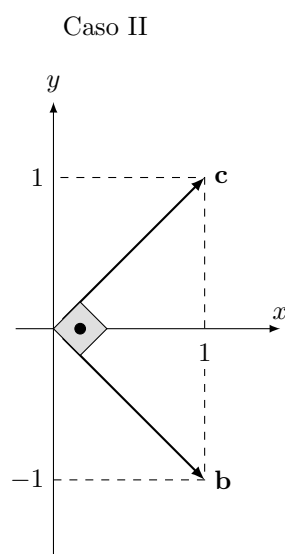
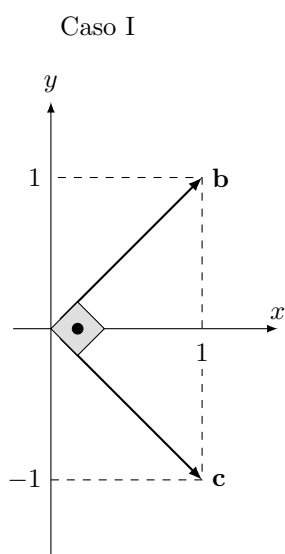


■

- 1.6 Utilizando o produto escalar, determine os valores do escalar s para os quais os vetores $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} + s\hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} - s\hat{\mathbf{y}}$ são ortogonais. (Lembre-se de que dois vetores são ortogonais se e somente se o produto escalar entre eles é zero.) Explique sua resposta esboçando um gráfico.

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0 &\Rightarrow (\hat{\mathbf{x}} + s\hat{\mathbf{y}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} - s\hat{\mathbf{y}}) = 0 \Rightarrow 1 - s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 1 \Rightarrow s = \pm 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} \pm \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} \mp \hat{\mathbf{y}} \end{cases} \end{aligned}$$

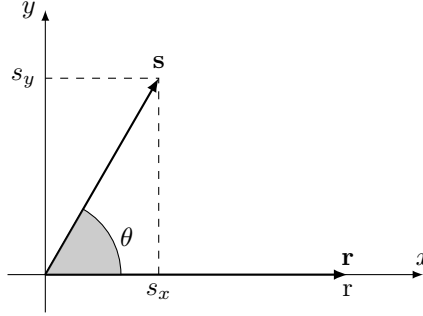


■

- 1.7** Mostre que as duas definições do produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ como $rs \cos \theta$ (1.6) e $\sum r_i s_i$ (1.7) são iguais. Uma maneira de mostrar é escolher o eixo x ao longo da direção \mathbf{r} . [Estritamente falando, você deve primeiro se assegurar de que a definição (1.7) é independente da escolha dos eixos. Se você gosta de dar atenção a essas sutilezas, veja o Problema 1.16.]

Solução:

Sem perda de generalidade, consideremos o plano xy definido como o plano formado pelos vetores \mathbf{r} e \mathbf{s} , e tal que o eixo x aponta na mesma direção do vetor \mathbf{r} , como mostrado na figura abaixo:



Então, aplicando a definição (1.7) para o produto escalar, temos:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = (r\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}}) \cdot (s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}}) = rs_x = rs \cos \theta$$

que corresponde à definição (1.6) do produto escalar. Portanto, as definições (1.6) e (1.7) para o produto escalar são equivalentes. ■

- 1.8** (a) Use a definição (1.7) para mostrar que o produto escalar é distributivo, isto é, $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$.

Solução:

Sejam os vetores:

$$\mathbf{r} = r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{u} = u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} + u_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot [(u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} + u_z\hat{\mathbf{z}}) + (v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}})] \\ &= (r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot [(u_x + v_x)\hat{\mathbf{x}} + (u_y + v_y)\hat{\mathbf{y}} + (u_z + v_z)\hat{\mathbf{z}}] \\ &= r_x(u_x + v_x) + r_y(u_y + v_y) + r_z(u_z + v_z) \\ &= r_xu_x + r_xv_x + r_yu_y + r_yv_y + r_zu_z + r_zv_z \\ &= (r_xu_x + r_yu_y + r_zu_z) + (r_xv_x + r_yv_y + r_zv_z) \\ &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

- (b) Se \mathbf{r} e \mathbf{vets} são vetores que dependem do tempo, mostre que a regra do produto para derivação de produtos se aplica a $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$, ou seja, que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{s}.$$

Solução:

Sejam os vetores $\mathbf{r} = r_x \hat{\mathbf{x}} + r_y \hat{\mathbf{y}} + r_z \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{s} = s_x \hat{\mathbf{x}} + s_y \hat{\mathbf{y}} + s_z \hat{\mathbf{z}}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) &= \frac{d}{dt}(r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z) = \frac{d}{dt}(r_x s_x) + \frac{d}{dt}(r_y s_y) + \frac{d}{dt}(r_z s_z) \\ &= r_x \frac{ds_x}{dt} + \frac{dr_x}{dt} s_x + r_y \frac{ds_y}{dt} + \frac{dr_y}{dt} s_y + r_z \frac{ds_z}{dt} + \frac{dr_z}{dt} s_z \\ &= \left(r_x \frac{ds_x}{dt} + r_y \frac{ds_y}{dt} + r_z \frac{ds_z}{dt} \right) + \left(\frac{dr_x}{dt} s_x + \frac{dr_y}{dt} s_y + \frac{dr_z}{dt} s_z \right) \\ &= \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{s} \end{aligned}$$

■

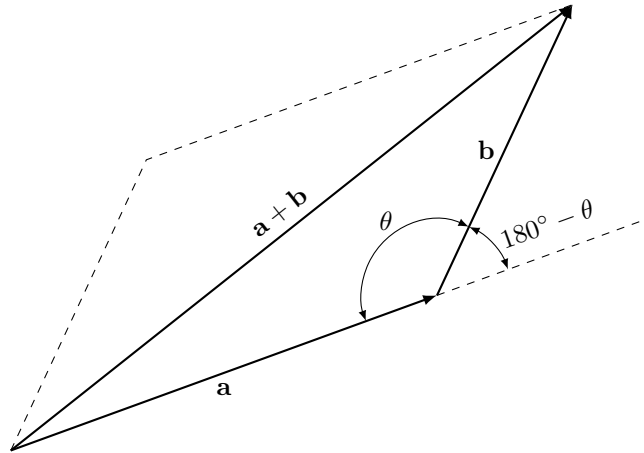
- 1.9** Em trigonometria elementar, você provavelmente aprendeu a lei dos cossenos para um triângulo de lados a , b e c , tal que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os lados a e b . Mostre que a lei dos cossenos é uma consequência imediata da identidade $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solução:

Sejam os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , cujos comprimentos valem, respectivamente, $a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ e $b = \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}$. Temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \theta) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$

onde $180^\circ - \theta$ é o ângulo entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , conforme mostrado na figura abaixo:



■

- 1.10** Uma partícula se move em um círculo (centro O e raio R) com velocidade angular constante ω , no sentido contrário aos ponteiros de um relógio. O círculo está sobre o plano xy e a partícula está sobre o eixo x

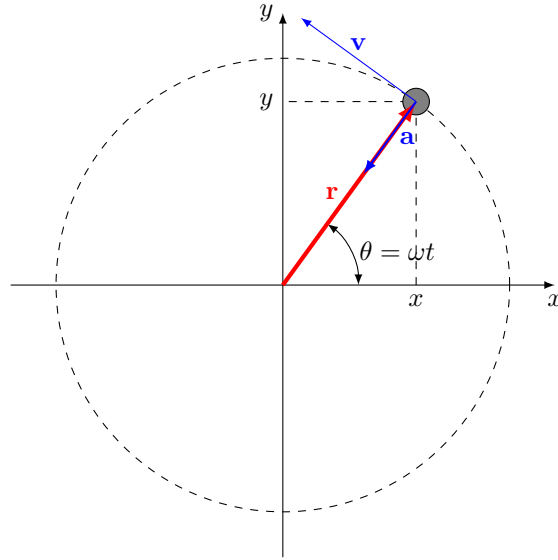
no instante $t = 0$. Mostre que a posição da partícula é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}}R \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}R \sin(\omega t).$$

Determine a velocidade e a aceleração da partícula. Quais são as magnitudes e a direção da aceleração? Relacione seu resultado com as propriedades bem conhecidas do movimento circular uniforme.

Solução:

Num dado instante t arbitrário, a posição da partícula na trajetória circular é a mostrada na figura abaixo:



em que $x = R \cos(\theta)$ e $y = R \sin(\theta)$. Sabendo que um movimento com velocidade angular ω possui período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, vale a seguinte relação:

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2\pi} = \frac{t}{\theta} \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{t}{\theta} \Rightarrow \theta = \omega t$$

Logo, a posição da partícula pode ser escrita como:

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}}R \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}R \sin(\omega t).$$

A velocidade $\mathbf{v}(t)$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [\hat{\mathbf{x}}R \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}R \sin(\omega t)] \\ \mathbf{v}(t) &= -\hat{\mathbf{x}}\omega R \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\omega R \cos(\omega t) \end{aligned}$$

e a aceleração $\mathbf{a}(t)$ é:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = [-\hat{\mathbf{x}}\omega R \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}}\omega R \sin(\omega t)] \\ \mathbf{a}(t) &= -\hat{\mathbf{x}}\omega^2 R \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}}\omega^2 R \sin(\omega t) \\ \mathbf{a}(t) &= -\omega^2 \mathbf{r}(t) \end{aligned}$$

Como mostrado acima, a aceleração no movimento circular uniforme sempre aponta para o centro da trajetória. Por sua vez, podemos mostrar que o vetor velocidade \mathbf{v} é sempre perpendicular ao vetor posição \mathbf{r} , em qualquer instante t . De fato, calculando o produto escalar entre esses vetores, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) &= [\hat{\mathbf{x}}R \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}R \sin(\omega t)] \cdot [-\hat{\mathbf{x}}\omega R \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\omega R \cos(\omega t)] \\ &= -\omega R^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \omega R^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = 0\end{aligned}$$

■

1.11 A posição de uma partícula em movimento é dada como função do tempo por

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}}b \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}c \sin(\omega t),$$

onde b , c e ω são constantes. Descreva a órbita da partícula.

Solução:

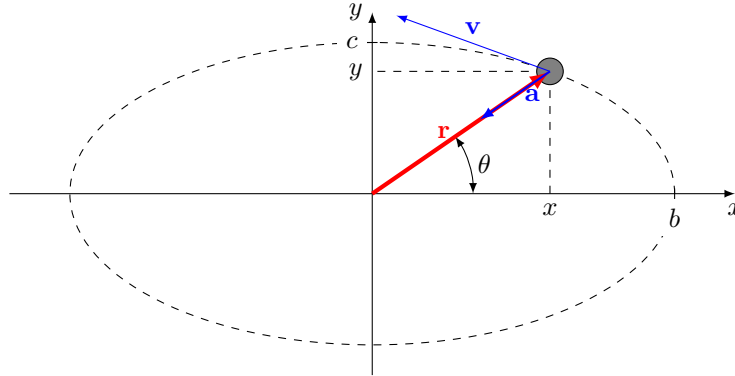
Sejam $x(t) = b \cos(\omega t)$ e $y(t) = c \sin(\omega t)$ as coordenadas da partícula no instante t . Observemos que, para todo ângulo ϕ vale a identidade trigonométrica:

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1.$$

Então, fazendo $\phi = \omega t$, temos:

$$\begin{aligned}\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) &= 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{c}\right)^2 = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1\end{aligned}$$

A equação acima descreve uma elipse no plano xy . O centro da elipse é a origem O e os semi-eixos são respectivamente b e c . A figura abaixo mostra a trajetória da partícula:



Observemos que:

$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = [b \cos(\omega t)]^2 + [c \sin(\omega t)]^2 \\ &\Rightarrow r^2 = b^2 \cos^2(\omega t) + c^2 \sin^2(\omega t) \\ &\Rightarrow r^2 = b^2 [1 - \sin^2(\omega t)] + c^2 \sin^2(\omega t) \\ &\Rightarrow r^2 = b^2 - (b^2 - c^2) \sin^2(\omega t) \\ &\Rightarrow r^2 = \frac{b^2}{c^2} \left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \sin^2(\omega t) \right] \\ &\Rightarrow r^2 = \frac{b^2}{c^2} [1 - e^2 \sin^2(\omega t)]\end{aligned}$$

em que $e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}$ é a excentricidade da elipse. e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left[\frac{c \sin(\omega t)}{b \cos(\omega t)}\right]$$

$$\theta = \arctan\left[\frac{c}{b} \tan(\omega t)\right]$$

■

1.12 A posição de uma partícula em movimento é dada como função do tempo por

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}}b \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}c \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{z}}v_0 t,$$

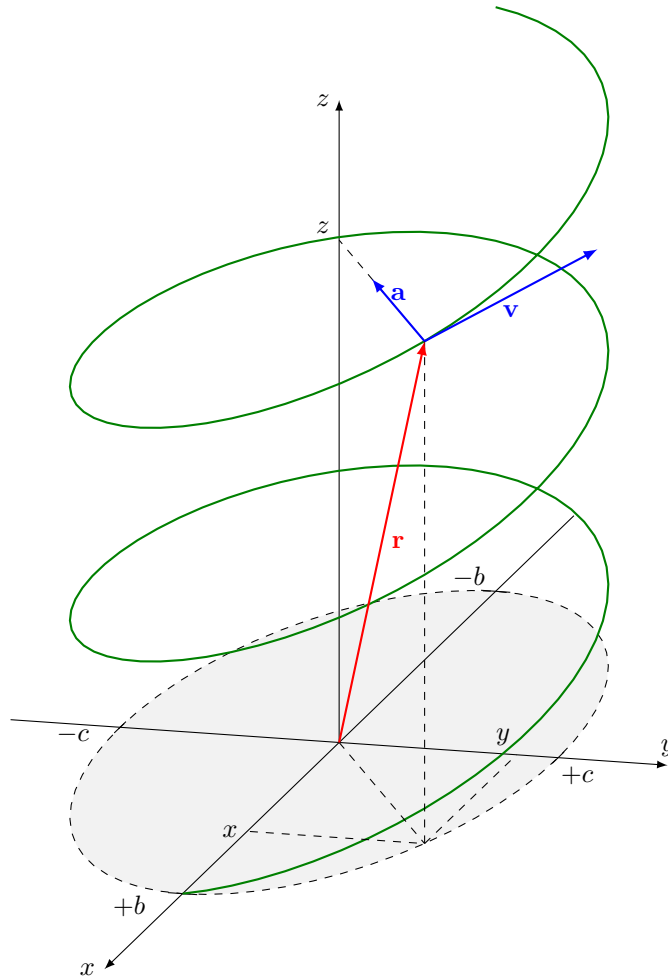
onde b , c , v_0 e ω são constantes. Descreva a órbita da partícula.

Solução:

A partícula descreve uma *hélice elíptica* que pode ser expressa de forma paramétrica como:

$$\begin{cases} x(t) = b \cos(\omega t) \\ y(t) = c \sin(\omega t) \\ z(t) = v_0 t \end{cases}$$

A trajetória é mostrada na figura seguinte:



Observemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\hat{\mathbf{x}}\omega b \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\omega c \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{z}}v_0 \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\hat{\mathbf{x}}\omega^2 b \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}}\omega^2 c \sin(\omega t)\end{aligned}$$

■

1.13 Seja \mathbf{u} um vetor unitário fixo arbitrário e mostre que qualquer vetor \mathbf{b} satisfaz

$$b^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{u} \times \mathbf{b})^2.$$

Explique esse resultado em palavras, com o auxílio de uma figura.

Solução:

Sejam θ o ângulo entre os vetores \mathbf{u} e \mathbf{b} , então:

$$\begin{aligned}\begin{cases} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}| &= ub \cos \theta = b \cos \theta \\ |\mathbf{u} \times \mathbf{b}| &= ub \sin \theta = b \sin \theta \end{cases} \Rightarrow (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{u} \times \mathbf{b})^2 \Rightarrow (|\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}|)^2 + (|\mathbf{u} \times \mathbf{b}|)^2 = (b \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta \\ &= b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= b^2\end{aligned}$$

■

1.14 Mostre que para quaisquer dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b}

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq (a + b).$$

[*Sugestão:* expanda $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$ e compare o resultado com $(a + b)^2$]. Explique por que isso é chamado de desigualdade triangular.

Solução:

Seja θ o ângulo entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Façamos:

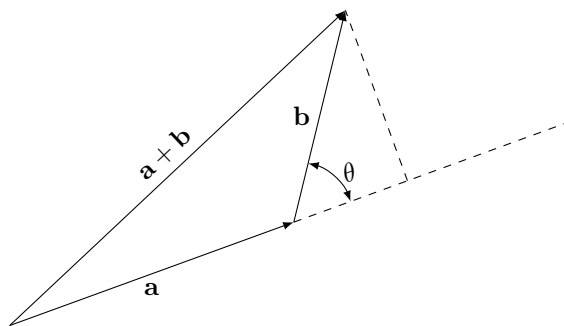
$$\begin{aligned}|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta\end{aligned}$$

Dado que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ para qualquer ângulo θ , então

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 - 2ab &\leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow (a - b)^2 \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 \leq (a + b)^2 \\ &\Rightarrow |a - b| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |a + b|\end{aligned}$$

Em particular, demonstramos que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq (a + b)$.

A fim de verificar o motivo pelo qual essa desigualdade é chamada *desigualdade triangular*, consideremos o triângulo formado pelos vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e $\mathbf{a} + \mathbf{b}$:



De acordo com a figura acima, temos:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \cos \theta = a + b \cos \theta \leq a + b$$



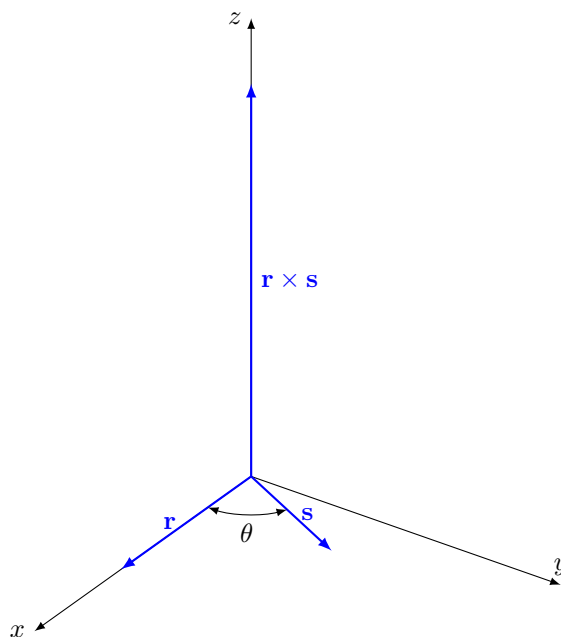
- 1.15** Mostre que a definição (1.9) do produto vetorial é equivalente à definição elementar em que $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$ é perpendicular a ambos, com magnitude $rs \sin \theta$ e a direção dada pela regra da mão direita. [Sugestão: é fato que (embora bastante difícil de provar) a definição (1.9) é independente da nossa escolha de eixos. Portanto, você pode escolher eixos de forma que \mathbf{r} aponte ao longo do eixo x e \mathbf{s} esteja sobre o plano xy .]

Solução:

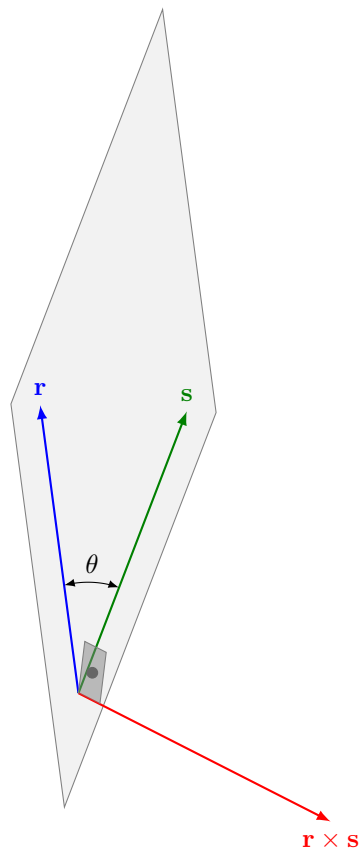
Sem perda de generalidade, tomemos os vetores $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{x}}s \cos \theta + \hat{\mathbf{y}}r \sin \theta$, em que θ é o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{s} . Então, aplicando a definição (1.9), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{s} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r & 0 & 0 \\ s \cos \theta & s \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ s \sin \theta & 0 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} r & 0 \\ s \cos \theta & 0 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} r & 0 \\ s \cos \theta & s \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}(0 \cdot 0 - 0 \cdot s \sin \theta) - \hat{\mathbf{y}}(r \cdot 0 - 0 \cdot s \cos \theta) + \hat{\mathbf{z}}(r \cdot s \sin \theta - 0 \cdot s \cos \theta) \\ &= \hat{\mathbf{z}}rs \sin \theta \end{aligned}$$

A figura a seguir ilustra o resultado acima:



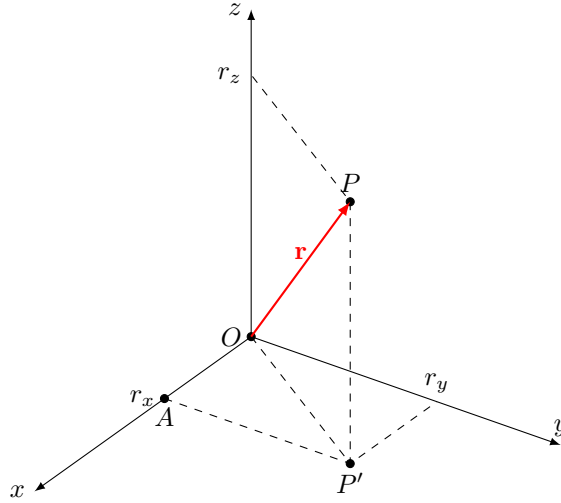
A próxima figura ilustra o caso geral com dois vetores arbitrários \mathbf{r} e \mathbf{s} :



- 1.16** (a) Definindo o produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ pela Equação (1.7), $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \sum r_i s_i$, mostre que o teorema de Pitágoras implica que a magnitude de qualquer vetor \mathbf{r} é $r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$.

Solução:

Consideremos o vetor \mathbf{r} da figura seguinte:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos OAP' e $OP'P$, retos em A e P' , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \overline{OP'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2 \\ \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{P'P}^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \overline{OP'}^2 = r_x^2 + r_y^2 \\ \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + r_z^2 \end{cases} \\
 &\Rightarrow r^2 = \overline{OP}^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \\
 &\Rightarrow r^2 = (\hat{\mathbf{x}}r_x + \hat{\mathbf{y}}r_y + \hat{\mathbf{z}}r_z) \cdot (\hat{\mathbf{x}}r_x + \hat{\mathbf{y}}r_y + \hat{\mathbf{z}}r_z) \\
 &\Rightarrow r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\
 &\Rightarrow r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}
 \end{aligned}$$

■

- (b) Está claro que o comprimento de um vetor não depende da escolha dos eixos coordenados. Logo, o resultado do item (a) garante que o produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, como definido em (1.7), é o mesmo para qualquer escolha de eixos ortogonais. Use isso para mostrar que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$, como definido em (1.7), é o mesmo para qualquer escolha de eixos ortogonais. [*Sugestão*: considere o comprimento do vetor $\mathbf{r} + \mathbf{s}$.]

- 1.17** (a) Mostre que o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$, como definido em (1.9), é distributivo, isto é, que $\mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$.

Solução:

Consideremos os vetores, em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= r_x \hat{\mathbf{x}} + r_y \hat{\mathbf{y}} + r_z \hat{\mathbf{z}} \\
 \mathbf{u} &= u_x \hat{\mathbf{x}} + u_y \hat{\mathbf{y}} + u_z \hat{\mathbf{z}} \\
 \mathbf{v} &= v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ u_x + v_x & u_y + v_y & u_z + v_z \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ u_y + v_y & u_z + v_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ u_x + v_x & u_z + v_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ u_x + v_x & u_y + v_y \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} [r_y (u_z + v_z) - r_z (u_y + v_y)] - \hat{\mathbf{y}} [r_x (u_z + v_z) - r_z (u_x + v_x)] + \hat{\mathbf{z}} [r_x (u_y + v_y) - r_y (u_x + v_x)] \\
 &= [\hat{\mathbf{x}} (r_y u_z - r_z u_y) - \hat{\mathbf{y}} (r_x u_z - r_z u_x) + \hat{\mathbf{z}} (r_x u_y - r_y u_x)] + \\
 &\quad + [\hat{\mathbf{x}} (r_y v_z - r_z v_y) - \hat{\mathbf{y}} (r_x v_z - r_z v_x) + \hat{\mathbf{z}} (r_x v_y - r_y v_x)] \\
 &= \left(\hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ u_y & u_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ u_x & u_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \right) + \left(\hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right) \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

■

(b) Mostre a regra do produto

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{s}$$

Tenha cuidado com a ordem dos fatores.

Solução:

Sejam os vetores $\mathbf{r} = r_x \hat{\mathbf{x}} + r_y \hat{\mathbf{y}} + r_z \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{s} = s_x \hat{\mathbf{x}} + s_y \hat{\mathbf{y}} + s_z \hat{\mathbf{z}}$, em coordenadas cartesianas. O produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$ é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \times \mathbf{s} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ s_y & s_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ s_x & s_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ s_x & s_y \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} (r_y s_z - r_z s_y) - \hat{\mathbf{y}} (r_x s_z - r_z s_x) + \hat{\mathbf{z}} (r_x s_y - r_y s_x)
 \end{aligned}$$

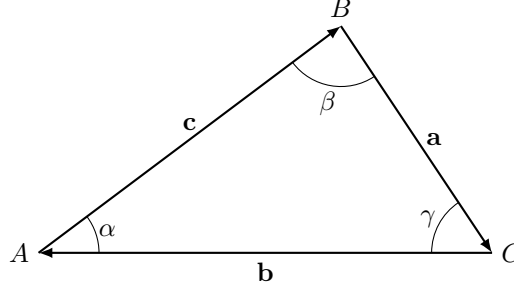
Derivando o resultado acima com respeito ao tempo t , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) &= \frac{d}{dt} [\hat{\mathbf{x}} (r_y s_z - r_z s_y) - \hat{\mathbf{y}} (r_x s_z - r_z s_x) + \hat{\mathbf{z}} (r_x s_y - r_y s_x)] \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \frac{d}{dt} (r_y s_z - r_z s_y) - \hat{\mathbf{y}} \frac{d}{dt} (r_x s_z - r_z s_x) + \hat{\mathbf{z}} \frac{d}{dt} (r_x s_y - r_y s_x) \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \left[\frac{d}{dt} (r_y s_z) - \frac{d}{dt} (r_z s_y) \right] - \hat{\mathbf{y}} \left[\frac{d}{dt} (r_x s_z) - \frac{d}{dt} (r_z s_x) \right] + \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{d}{dt} (r_x s_y) - \frac{d}{dt} (r_y s_x) \right] \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \left[\left(\frac{dr_y}{dt} s_z + r_y \frac{ds_z}{dt} \right) - \left(\frac{dr_z}{dt} s_y + r_z \frac{ds_y}{dt} \right) \right] - \\
 &\quad - \hat{\mathbf{y}} \left[\left(\frac{dr_x}{dt} s_z + r_x \frac{ds_z}{dt} \right) - \left(\frac{dr_z}{dt} s_x + r_z \frac{ds_x}{dt} \right) \right] + \\
 &\quad + \hat{\mathbf{z}} \left[\left(\frac{dr_x}{dt} s_y + r_x \frac{ds_y}{dt} \right) - \left(\frac{dr_y}{dt} s_x + r_y \frac{ds_x}{dt} \right) \right] \\
 &= \left[\hat{\mathbf{x}} \left(r_y \frac{ds_z}{dt} - r_z \frac{ds_y}{dt} \right) - \hat{\mathbf{y}} \left(r_x \frac{ds_z}{dt} - r_z \frac{ds_x}{dt} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(r_x \frac{ds_y}{dt} - r_y \frac{ds_x}{dt} \right) \right] + \\
 &\quad + \left[\hat{\mathbf{x}} \left(\frac{dr_y}{dt} s_z - \frac{dr_z}{dt} s_y \right) - \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{dr_x}{dt} s_z - \frac{dr_z}{dt} s_x \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{dr_x}{dt} s_y - \frac{dr_y}{dt} s_x \right) \right] \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{dr_x}{dt} & \frac{dr_y}{dt} & \frac{dr_z}{dt} \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ \frac{ds_x}{dt} & \frac{ds_y}{dt} & \frac{ds_z}{dt} \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{s}
 \end{aligned}$$



- 1.18 Os três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são os três lados de um triângulo ABC com ângulos α , β e γ como apresentado na Figura 1.15.

Figura 1.15: Triângulo para o Problema 1.18



- (a) Mostre que a área do triângulo é dada por qualquer uma das expressões:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$$

Solução:

Sem perda de generalidade, tomemos o lado \mathbf{b} , medindo $|\mathbf{b}|$ como base do triângulo ABC . Nesse caso, a altura relativa à base considerada é igual a $|\mathbf{a}| \sin \gamma$ ou ainda $|\mathbf{c}| \sin \alpha$. No primeiro caso, podemos calcular a área de ABC como sendo:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{a}| \sin \gamma = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{a}| \sin(\pi - \gamma) = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{a}| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

em que $\alpha + \beta$ é o ângulo entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Para o segundo caso, temos:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin \alpha = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$$

em que $\beta + \gamma$ é o ângulo entre \mathbf{b} e \mathbf{c} . Analogamente, tomando o lado \mathbf{a} como base do triângulo ABC e a altura relativa $|\mathbf{c}| \sin \beta$, encontramos:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{c}| \sin \beta = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{c}| \sin(\pi - \beta) = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{c}| \sin(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$$

em que $\alpha + \gamma$ é o ângulo entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{c} .

Portanto,

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$$



- (b) Use a igualdade dessas expressões para mostrar a chamada lei dos senos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Solução:

No decorrer da demonstração do item anterior, mostramos que:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \gamma = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin \alpha = \frac{1}{2}|\mathbf{c}||\mathbf{a}| \sin \beta$$

Dessas relações, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\alpha &= \frac{1}{2}|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\sin\beta \Rightarrow |\mathbf{a}|\sin\beta = |\mathbf{b}|\sin\alpha \Rightarrow \frac{|\mathbf{a}|}{\sin\alpha} = \frac{|\mathbf{b}|}{\sin\beta} \\ \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma &= \frac{1}{2}|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\sin\beta \Rightarrow |\mathbf{b}|\sin\gamma = |\mathbf{c}|\sin\beta \Rightarrow \frac{|\mathbf{b}|}{\sin\beta} = \frac{|\mathbf{c}|}{\sin\gamma}\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\mathbf{a}}{\sin\alpha} = \frac{\mathbf{b}}{\sin\beta} = \frac{\mathbf{c}}{\sin\gamma}.$$

■

1.19 Se \mathbf{r} , \mathbf{v} e \mathbf{a} denotam posição, velocidade e aceleração de uma partícula, mostre que

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = \dot{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})$$

Solução:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \\ &= \dot{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{v} \times \mathbf{v})\end{aligned}$$

Na última expressão acima, de imediato podemos observar que $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Resta analisar o significado de $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$. Pela definição do produto vetorial, temos que o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$ é perpendicular tanto ao vetor \mathbf{r} quanto ao vetor \mathbf{a} . Assim, ao efetuar o produto escalar entre \mathbf{a} e $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$ é identicamente nulo. Portanto, podemos concluir que

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = \dot{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r})$$

■

1.20 Os três vetores \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} apontam da origem O para os três vértices de um triângulo. Use o resultado do Problema 1.18 para mostrar que a área do triângulo é dada por

$$\text{área do triângulo} = \frac{1}{2}|(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})|$$

Solução:

Na situação dada, os lados do triângulo são representados pelos vetores: $\mathbf{a} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$, $\mathbf{b} = \mathbf{A} - \mathbf{C}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Assim, consideremos a expressão para a área do triângulo, encontrada no Problema 1.18:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Substituindo pelas expressões de \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} , temos:

$$\begin{aligned}\text{área} &= \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}|(\mathbf{C} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{C})| \\ &= \frac{1}{2}|\mathbf{C} \times (\mathbf{A} - \mathbf{C}) - \mathbf{B} \times (\mathbf{A} - \mathbf{C})| \\ &= \frac{1}{2}|\mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{C} \times \mathbf{C} - \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}| = \frac{1}{2}|(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})|\end{aligned}$$

Na última passagem, fizemos $\mathbf{C} \times \mathbf{C} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

■