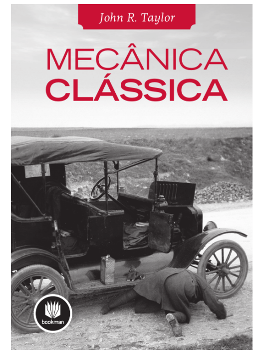
Resolução de Problemas do Livro

Mecânica Clássica (Taylor, J. R.)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
TAYLOR, J. R.. **Mecânica Clássica**. Porto Alegre, Bookman, 2013.

Capítulo 1: Leis de Newton do Movimento

PROBLEMAS

Seção 1.2 Espaço e Tempo

1.1 Dados dois vetores $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$, determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \\
5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= 5(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + 2(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = 5\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{z}} = 7\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\
\mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

■

1.2 Dois vetores são dados como $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$. (Lembre-se de que essas declarações são uma forma compacta de fornacer as componentes dos vetores.) Determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

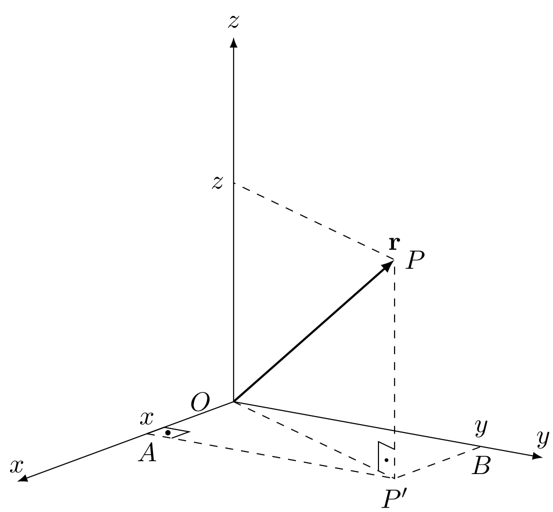
Solução:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (1 + 3, 2 + 2, 3 + 1) = (4, 4, 4) = 2\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}} \\
5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= (5 \cdot 1 + 2 \cdot 3, 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2, 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = (5 + 6, 10 + 4, 15 + 2) = (11, 14, 17) = 11\hat{\mathbf{x}} + 14\hat{\mathbf{y}} + 17\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 4 + 3 = 10 \\
\mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}(2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -4\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

■

1.3 Aplicando o teorema de Pitágorás (a versão comum bidimensional) duas vezes, mostre que o comprimento r de um vetor tridimensional $\mathbf{r} = (x, y, z)$ satisaz $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Solução:



Conforme figura acima, consideremos o vetor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ localizado no ponto P, tal que sua projeção ortogonal no plano xy é ponto $P' = (x, y, 0)$. No plano xy, tomamos o triângulo OAP', retângulo no ponto $A = (x, 0, 0)$ e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

EM seguida, consideremos o triânguloa $OP'P$, reto em P' e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{P'P}^2 \Rightarrow \overline{OP}^2 &= \overline{OP'}^2 + z^2 \\ \Rightarrow r^2 &= \overline{OP'}^2 + z^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo $\overline{OP'}^2$ de (1) em (2), obtemos:

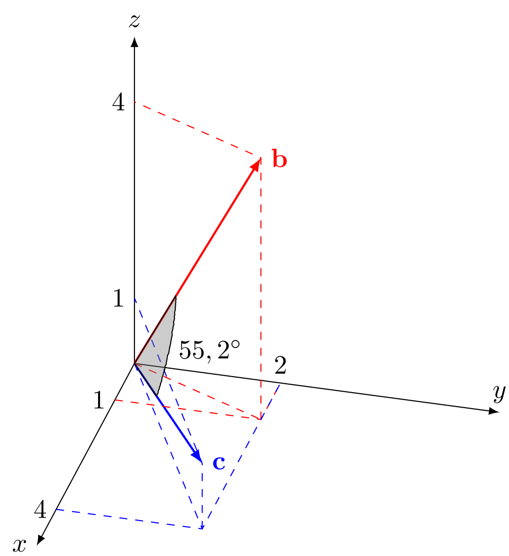
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

■

1.4 Um dos muitos usos do produto escalar é na determinação do ângulo entre dois vetores dados. Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{b} = (1, 2, 4)$ e $\mathbf{c} = (4, 2, 1)$ através do cálculo do produto escalar entre eles.

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = bc \cos\theta \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{bc} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{12}{\sqrt{21}\sqrt{21}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{4}{7}\right) = 55,2^\circ \end{aligned}$$



1.5 Determine o ângulo entre a diagonal do corpo de um cubo e qualquer das diagonais de suas faces. [*Sugestão*: escolha um cubo de lado 1 e com um dos vértices em O e o vértice oposto $(1, 1, 1)$. Escreva o vetor que representa uma diagonal do corpo e o outro que represente a diagonal de uma face, e então determine o ângulo entre elas conforme o Problema 1.4.]

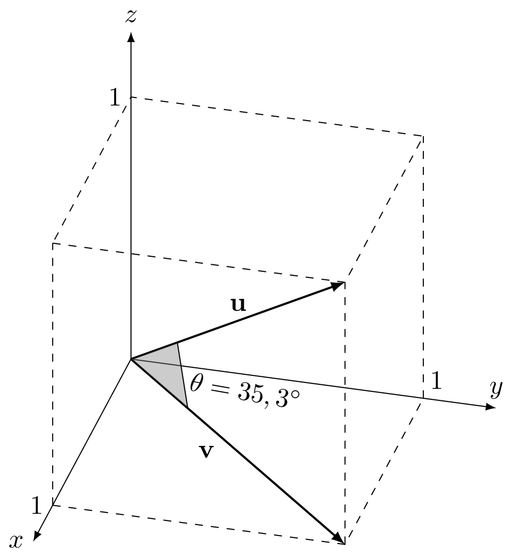
Solução:

Sem perda de generalizade, consideremos os vetores $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$, tais que:

$$\begin{cases} u = |\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ v = |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos\theta \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{uv} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right) = 35,3^\circ \end{aligned}$$

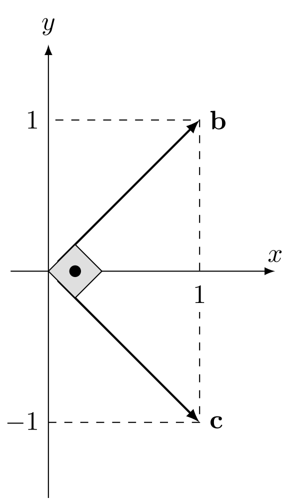


1.6 Utilizando o produto escalar, determine os valores do escalar s para os quais os vetores $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} + s\hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} - s\hat{\mathbf{y}}$ são ortogonais. (Lembre-se de que dois vetores são ortogonais se e somente se o produto escalar entre eles é zero.) Explique sua resposta esboçando um gráfico.

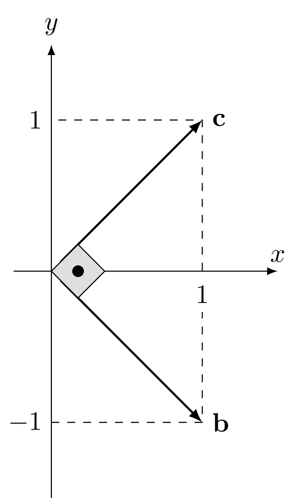
Solução:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0 \Rightarrow (\hat{\mathbf{x}} + s\hat{\mathbf{y}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} - s\hat{\mathbf{y}}) = 0 \Rightarrow 1 - s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 1 \Rightarrow s = \pm 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} \pm \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} \mp \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Caso I

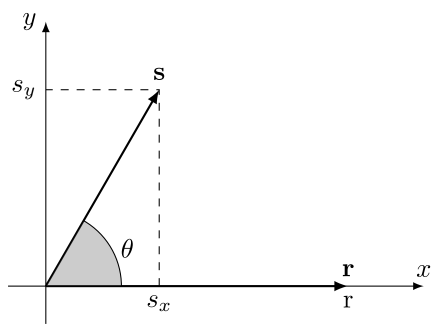


Caso II



1.7 Mostre que as duas defnições do produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ como $rs\cos\theta$ (1.6) e $\sum r_i s_i$ (1.7) são iguais. Uma maneira de mostrar é escolher o eixo x ao longo da direção $\mathbf{r}$. [Estritamente falando, voccê deve primeiro se assegurar de que a definição (1.7) é independente da escolha dos eixos. Se você gosta de dar atenção a essas sutilezas, veja o Problema 1.16.]

Solução:
Sem perda de generalidade, consideremos o plano xy definido como o plano formado pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, e tal que o eixo x aponta na mesma direção do vetor $\mathbf{r}$, como mostrado na figura abaixo:



Então, aplicando a definição (1.7) para o produto escalar, temos:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = (r\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}}) \cdot (s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}}) = rs_x = rs\cos\theta$$

que corresponde à definição (1.6) do produto escalar. Portanto, as definições (1.6) e (1.7) para o produto escalar são equivalentes. ■

1.8 (a) Use a definição (1.7) para mostrar que o produto escalar é distributivo, isto é, $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}$.

Solução:
Sejam os vetores:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{u} &= u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} + u_z\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{v} &= v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot [(u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} + u_z\hat{\mathbf{z}}) + (v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}})] \\
&= (r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot [(u_x + v_x)\hat{\mathbf{x}} + (u_y + v_y)\hat{\mathbf{y}} + (u_z + v_z)\hat{\mathbf{z}}] \\
&= r_x(u_x + v_x) + r_x(u_x + v_y) + r_z(u_z + v_z) \\
&= r_xu_x + r_xv_x + r_yu_y + r_yv_y + r_zu_z + r_zv_z \\
&= (r_xu_x + r_yu_y + r_zu_z) + (r_xv_x + r_yv_y + r_zv_z) \\
&= \mathbf{r}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}
\end{aligned}$$

■

(b) Se $\mathbf{r}$ e *vets* são vetores que dependem do tempo, mostre que a regra do produto para derivação de produtos se aplica a $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$, ou seja, que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s}.$$

Solução:
Sejam os vetores $\mathbf{r} = r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{s} = s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}} + s_z\hat{\mathbf{z}}$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) &= \frac{d}{dt}(r_xs_x + r_ys_y + r_zs_z) = \frac{d}{dt}(r_xs_x) + \frac{d}{dt}(r_ys_y) + \frac{d}{dt}(r_zs_z) \\
&= r_x\frac{ds_x}{dt} + \frac{dr_x}{dt}s_x + r_y\frac{ds_y}{dt} + \frac{dr_y}{dt}s_y + r_z\frac{ds_z}{dt} + \frac{dr_z}{dt}s_z \\
&= \left(r_x\frac{ds_x}{dt} + r_y\frac{ds_y}{dt} + r_z\frac{ds_z}{dt}\right) + \left(\frac{dr_x}{dt}s_x + \frac{dr_y}{dt}s_y + \frac{dr_z}{dt}s_z\right) \\
&= \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s}
\end{aligned}$$

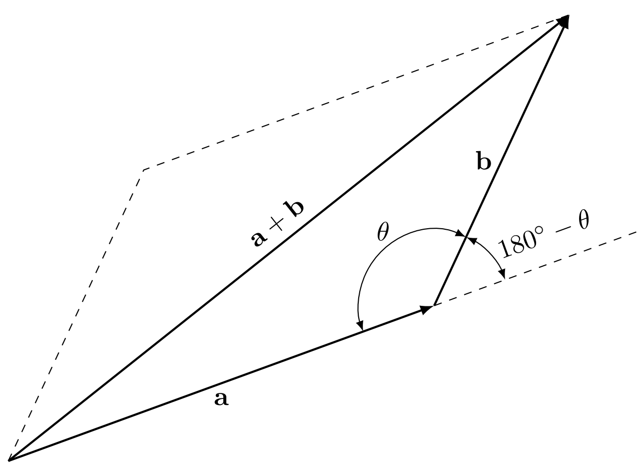
■

1.9 Em trigonometria elementar, você provavelmente aprendeu a lei dos cossenos para um triângulo de lados a, b e c, tal que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os lados a e b. Mostre que a lei dos cossenos é uma consequência imediata da identidade $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Solução:
Sejam os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, cujos comprimentos valem, respectivamente, $a = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ e $b = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$. Temos:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&= a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&= a^2 + b^2 + 2ab\cos(180 - \theta) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}$$

onde $180° - \theta$ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, conforme mostrado na figura abaixo:



■

1.10 Uma partícula se move em um círculo (centro O e raio R) com velocidade angular constante ω, no sentido contrário aos ponteiros de um relógio. O círculo está sobre o plano xy e a partícula está sobre o eixo x

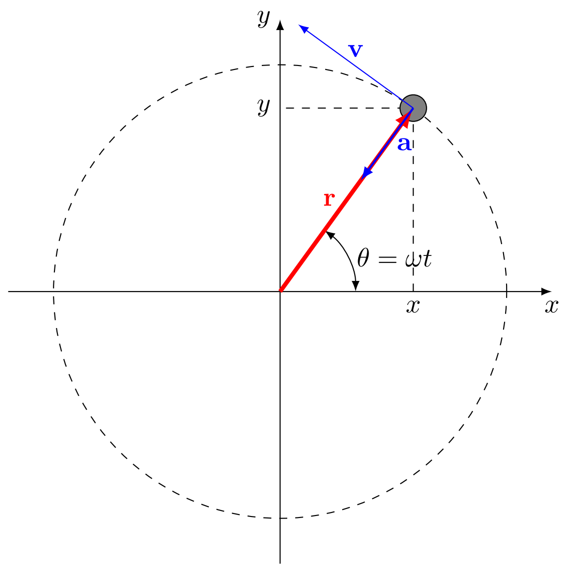
no instante $t = 0$. Mostre que a posição da partícula é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}} R \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} R \sin(\omega t).$$

Determine a velocidade e a aceleração da particulo. Quais são as magnitudes e a direção da aceleração? Relacione seu resultado com as propriedades bem conhecidas do movimento circular uniforme.

Solução:

Num dado instante t arbitrário, a posição da partícula na trajetória circular é a mostrada na figura abaixo:



em que $x = R\cos(\theta)$ e $y = R\sin(\theta)$. Sabendo que um movimento com velocidade angular ω possui período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, vale a seguinte relação:

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2\pi} = \frac{t}{\theta} \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{t}{\theta} \Rightarrow \theta = \omega t$$

Logo, a posição da partícula pode ser escrita como:

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}} R \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} R \sin(\omega t).$$

A velocidade $\mathbf{v}(t)$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\hat{\mathbf{x}} R \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} R \sin(\omega t)\right] \\ \mathbf{v}(t) &= -\hat{\mathbf{x}} \omega R \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} \omega R \cos(\omega t) \end{aligned}$$

e a aceleação $\mathbf{a}(t)$ é:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[-\hat{\mathbf{x}} \omega R \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} \omega R \cos(\omega t)\right] \\ \mathbf{a}(t) &= -\hat{\mathbf{x}} \omega^2 R \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}} \omega^2 R \sin(\omega t) \\ \mathbf{a}(t) &= -\omega^2 \mathbf{r}(t) \end{aligned}$$

Como mostrado acima, a aceleração no movimento circular uniforme sempre aponta para o centro da trajetória. Por sua vez, podemos mostrar que o vetor velocidade $\mathbf{v}$ é sempre perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r}$, em qualquer instante t. De fato, calculando o produto escalar entre esses vetores, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{v}(t) &= \left[\hat{\mathbf{x}}R\cos(\omega t)+\hat{\mathbf{y}}R\sin(\omega t)\right]\cdot\left[-\hat{\mathbf{x}}\omega R\sin(\omega t)+\hat{\mathbf{y}}\omega R\cos(\omega t)\right]\\
&= -\omega R^2\cos(\omega t)\sin(\omega t)+\omega R^2\cos(\omega t)\sin(\omega t)=0
\end{aligned}$$

■

1.11 A posição de uma partícula em mocimento é dada como função do tempo por

$$\mathbf{r}(t)=\hat{\mathbf{x}}b\cos(\omega t)+\hat{\mathbf{y}}c\sin(\omega t),$$

onde b, c e ω são constante. Descreva a órbita da partícula.

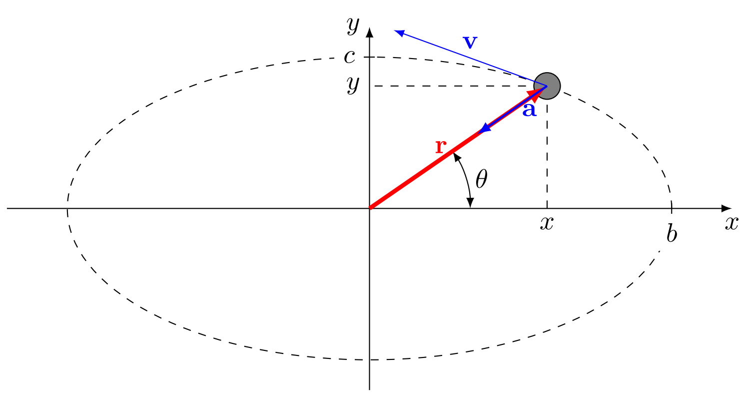
Solução:
Sejam $x(t)=b\cos(\omega t)$ e $y(t)=c\sin(\omega t)$ as coordenadas da partícula no instante t. Observemos que, para todo ângulo ϕ vale a identidade trigonométrica:

$$\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)=1.$$

Então, fazendo $\phi=\omega t$, temos:

$$\begin{aligned}
\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)=1 &\Rightarrow \left(\frac{x}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{c}\right)^2=1\\
&\Rightarrow \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1
\end{aligned}$$

A equação acima descreve uma elipse no plano xy. O centro da elipse é a origem O e os semi-eixos são respectivamente b e c. A figura abaixo mostra a trajetória da partícula:



Observemos que:

$$\begin{aligned}
r^2=x^2+y^2 &\Rightarrow r^2=\left[b\cos(\omega t)\right]^2+\left[c\sin(\omega t)\right]^2\\
&\Rightarrow r^2=b^2\cos^2(\omega t)+c^2\sin^2(\omega t)\\
&\Rightarrow r^2=b^2\left[1-\sin^2(\omega t)\right]+c^2\sin^2(\omega t)\\
&\Rightarrow r^2=b^2-(b^2-c^2)\sin^2(\omega t)\\
&\Rightarrow r^2=\frac{b^2}{c^2}\left[1-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\sin^2(\omega t)\right]\\
&\Rightarrow r^2=\frac{b^2}{c^2}\left[1-e^2\sin(\omega t)\right]
\end{aligned}$$

em que $e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}$ é a excentricidade da elipse. e

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left[\frac{c\sin(\omega t)}{b\cos(\omega t)}\right]$$
$$\theta = \arctan\left[\frac{c}{b}\tan(\omega t)\right]$$

1.12 A posição de uma partícula em movimento é dada como função do tempo por

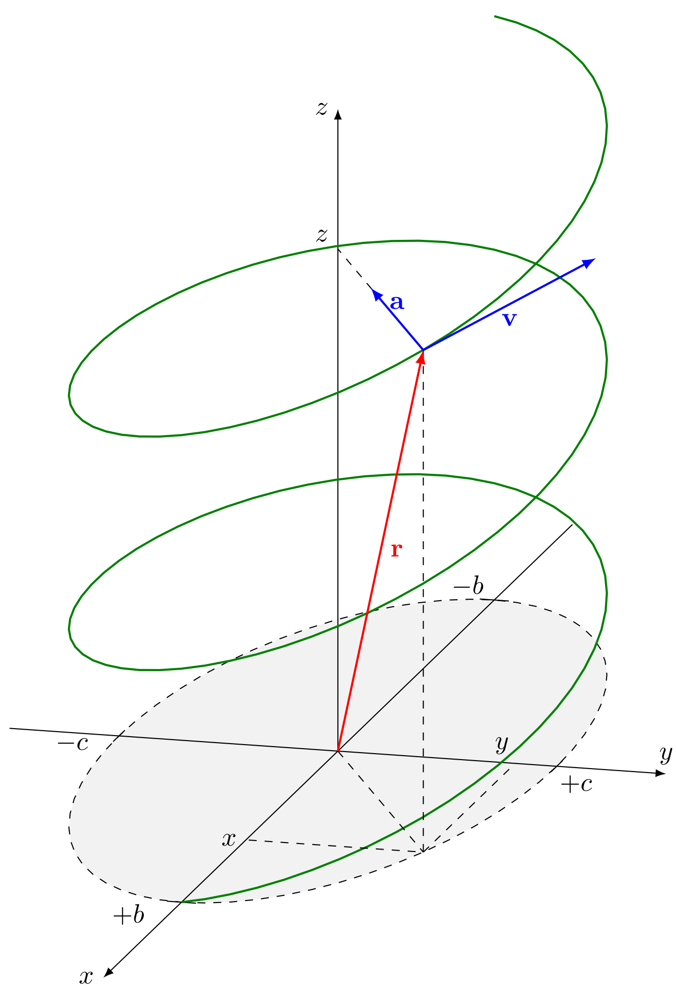
$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{x}} b\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} c\sin(\omega t) + \hat{\mathbf{z}} v_0 t,$$

onde b, c, v_0 e ω são constantes. Descreva a órbita da partícula.

Solução:
A partícula descreve uma *hélice elíptica* que pode ser expressa de forma paramétrica como:

$$\begin{cases} x(t) = b\cos(\omega t) \\ y(t) = c\sin(\omega t) \\ z(t) = v_0 t \end{cases}$$

A trajetória é mostrada na figura seguinte:



Observemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\hat{\mathbf{x}}\omega b\sin(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\omega c\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{z}}v_0 \\
\mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\hat{\mathbf{x}}\omega^2 b\cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}}\omega^2 c\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

■

1.13 Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário fixo arbitrário e mostre que qualquer vetor $\mathbf{b}$ satisfaz

$$b^2 = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})^2 + (\mathbf{u}\times\mathbf{b})^2.$$

Explique esse resultado em palavras, com o auxílio de uma figura.

Solução:
Sejam θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{b}$, então:

$$
\begin{cases}
|\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}| &= ub\cos\theta = b\cos\theta \\
|\mathbf{u}\times\mathbf{b}| &= ub\sin\theta = b\sin\theta
\end{cases}
\Rightarrow (\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})^2 + (\mathbf{u}\times\mathbf{b})^2 \Rightarrow (|\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}|)^2 + (|\mathbf{u}\times\mathbf{b}|)^2 = (b\cos\theta)^2 + (b\cos\theta)^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \\
&= b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= b^2
\end{aligned}
$$

■

1.14 Mostre que para quaisquer dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq (a+b).$$

[*Sugestão*: expanda $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ e compare o resultado com $(a+b)^2$]. Explique por que isso é chamado de desigualdade triangular.

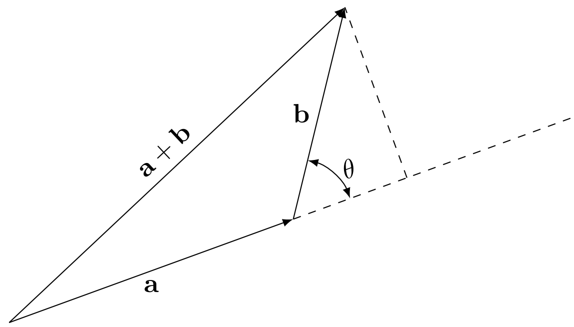
Solução:
Seja θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Façamos:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&= a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta
\end{aligned}
$$

Dado que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ para qualquer ângulo θ, então

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 - 2ab \leq |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab &\Rightarrow (a-b)^2 \leq |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \leq (a+b)^2 \\
&\Rightarrow |a-b| \leq |\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |a+b|
\end{aligned}
$$

Em particular, demonstramos que $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq (a+b)$.
A fim de verificar o motivo pelo qual essa desigualdade é chamada *desigualdade triangular*, consideremos o triângulo formado pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}+\mathbf{b}$:



De acordo com a figura acima, temos:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\cos\theta = a + b\cos\theta \leq a + b$$

■

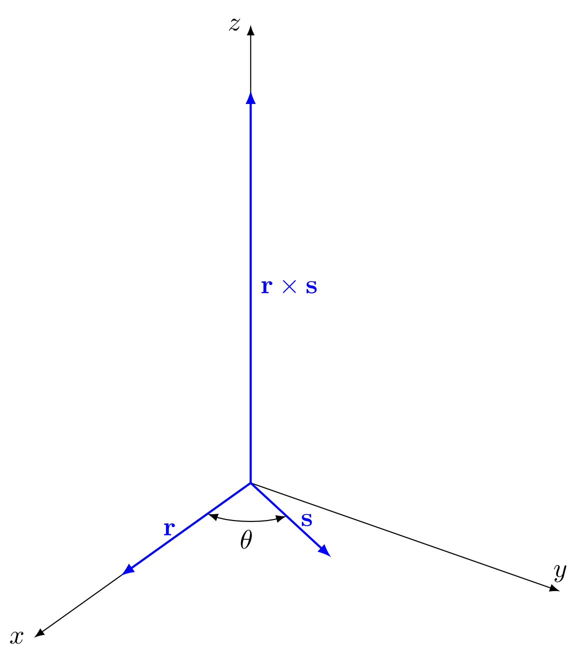
1.15 Mostre que a definição (1.9) do produto vetorial é equivalente à definição elementar em que $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$ é perpendicular a ambos, com magnitude $rs\sin\theta$ e a direção dada pela regra da mão direita. [*Sugestão*: é fato que (embora bastante difícil de provar) a definição (1.9) é independente da nossa escolha de eixos. Portanto, você pode escolher eixos de forma que $\mathbf{r}$ aponte ao longo do eixo x e $\mathbf{s}$ esteja sobre o plano xy.]

Solução:

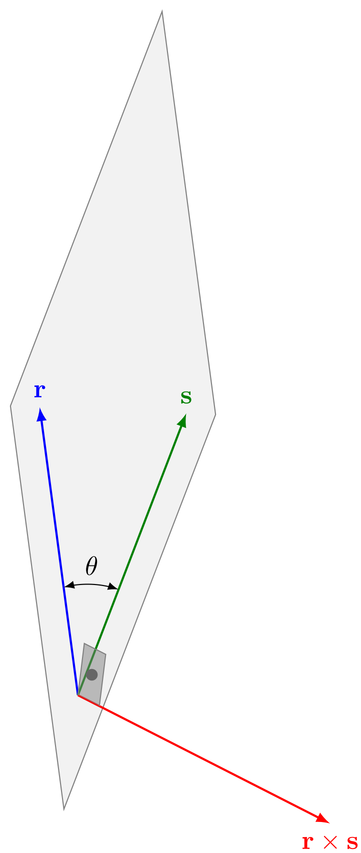
Sem perda de generalidade, tomemos os vetores $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{x}}s\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}r\sin\theta$, em que θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. Então, aplicando a definição (1.9), temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\times\mathbf{s} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r & 0 & 0 \\ s\cos\theta & s\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ s\sin\theta & 0 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix} r & 0 \\ s\cos\theta & 0 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix} r & 0 \\ s\cos\theta & s\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}(0\cdot 0 - 0\cdot s\sin\theta) - \hat{\mathbf{y}}(r\cdot 0 - 0\cdot s\cos\theta) + \hat{\mathbf{z}}(r\cdot s\sin\theta - 0\cdot s\cos\theta) \\
&= \hat{\mathbf{z}}rs\sin\theta
\end{aligned}$$

A figura a seguir ilustra o resultado acima:



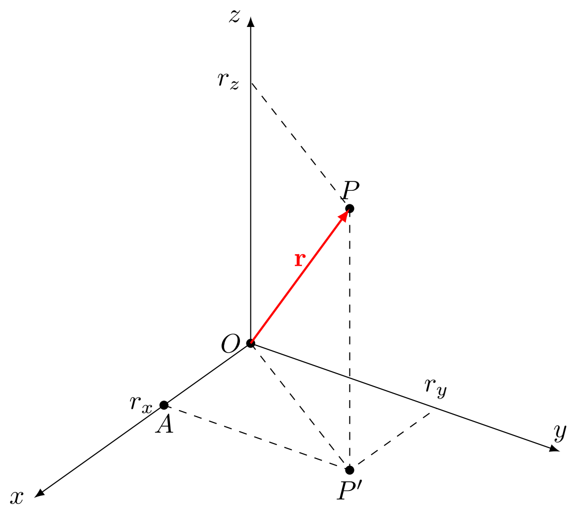
A próxima figura ilustra o caso geral com dois vetores arbitrários $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$:



■

1.16 (a) Definindo o produto escalar $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ pela Equação (1.7), $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = \sum r_i s_i$, mostre que o teorema de Pitágoras implica que a magnitude de qualquer vetor $\mathbf{r}$ é $r = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}$.

Solução:
Consideremos o vetor $\mathbf{r}$ da figura seguinte:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos OAP' e $OP'P$, retos em A e P', respectivamente, temos:

$$\begin{cases}\overline{OP'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2 \\ \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{P'P}^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{OP'}^2 = r_x^2 + r_y^2 \\ \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + r_z^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow r^2 = \overline{OP}^2 r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$$
$$\Rightarrow r^2 = (\hat{\mathbf{x}}r_x + \hat{\mathbf{y}}r_y + \hat{\mathbf{z}}r_z) \cdot (\hat{\mathbf{x}}r_x + \hat{\mathbf{y}}r_y + \hat{\mathbf{z}}r_z)$$
$$\Rightarrow r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$
$$\Rightarrow r^2 = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$$

■

(b) Está claro que o comprimento de um vetor não depende da escolha dos eixos coordenados. Logo, o resultado do item (a) garante que o produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, como definido em (1.7), é o mesmo para quaçquer escolha de eixos ortogonais. Use isso para mostrar que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$, como definido em (1.7), é o mesmo para qualquer escolha de eixos ortogonais. [*Sugestão*: considere o comprimento do vetor $\mathbf{r} + \mathbf{s}$.]

1.17 (a) Mostre que o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$, como definido em (1.9), é distributivo, isto é, que $\mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{r} + \mathbf{v})$.

Solução:
Consideremos os vetores, em coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r} = r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{u} = u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} + u_z\hat{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ u_x+v_x & u_y+v_y & u_z+v_z \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix} r_y & r_z \\ u_y+v_y & u_z+v_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix} r_x & r_z \\ u_x+v_x & u_z+v_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix} r_x & r_y \\ u_x+v_x & u_y+v_y \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}\left[r_y\left(u_z+v_z\right)-r_z\left(u_y+v_y\right)\right] - \hat{\mathbf{y}}\left[r_x\left(u_z+v_z\right)-r_z\left(u_x+v_x\right)\right] + \hat{\mathbf{z}}\left[r_x\left(u_y+v_y\right)-r_y\left(u_x+v_x\right)\right] \\
&= \left[\hat{\mathbf{x}}\left(r_yu_z-r_zu_y\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(r_xu_z-r_zu_x\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(r_xu_y-r_yu_x\right)\right]+ \\
&\quad +\left[\hat{\mathbf{x}}\left(r_yv_z-r_zv_y\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(r_xv_z-r_zv_x\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(r_xv_y-r_yv_x\right)\right] \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix} r_y & r_z \\ u_y & u_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix} r_x & r_z \\ u_x & u_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix} r_x & r_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix}\right) + \left(\hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix} r_y & r_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix} r_x & r_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix} r_x & r_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{r}\times\mathbf{u}+\mathbf{r}\times\mathbf{v}
\end{aligned}$$

■

(b) Mostre a regra do produto

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{s}\right) = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{s}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{s}$$

Tenha cuidado com a ordem dos fatores.

Solução:

Sejam os vetores $\mathbf{r} = r_x\hat{\mathbf{x}}+r_y\hat{\mathbf{y}}+r_z\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{s} = s_x\hat{\mathbf{x}}+s_y\hat{\mathbf{y}}+s_z\hat{\mathbf{z}}$, em coordenadas cartesianas. O produto vetorial $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$ é

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\times\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} &= \hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix} r_y & r_z \\ s_y & s_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix} r_x & r_z \\ s_x & s_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix} r_x & r_y \\ s_x & s_y \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}\left(r_ys_z-r_zs_y\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(r_xs_z-r_zs_x\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(r_xs_y-r_ys_x\right)
\end{aligned}$$

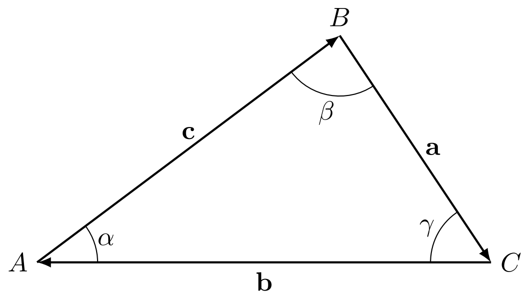
Derivando o resultado acima com respeito ao tempo t, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{s}\right) &= \frac{d}{dt}\left[\hat{\mathbf{x}}\left(r_ys_z-r_zs_y\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(r_xs_z-r_zs_x\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(r_xs_y-r_ys_x\right)\right] \\
&= \hat{\mathbf{x}}\frac{d}{dt}\left(r_ys_z-r_zs_y\right)-\hat{\mathbf{y}}\frac{d}{dt}\left(r_xs_z-r_zs_x\right)+\hat{\mathbf{z}}\frac{d}{dt}\left(r_xs_y-r_ys_x\right) \\
&= \hat{\mathbf{x}}\left[\frac{d}{dt}(r_ys_z)-\frac{d}{dt}(r_zs_y)\right]-\hat{\mathbf{y}}\left[\frac{d}{dt}(r_xs_z)-\frac{d}{dt}(r_zs_x)\right]+\hat{\mathbf{z}}\left[\frac{d}{dt}(r_xs_y)-\frac{d}{dt}(r_ys_x)\right] \\
&= \hat{\mathbf{x}}\left[\left(\frac{dr_y}{dt}s_z+r_y\frac{ds_z}{dt}\right)-\left(\frac{dr_z}{dt}s_y+r_z\frac{ds_y}{dt}\right)\right]- \\
&\qquad -\hat{\mathbf{y}}\left[\left(\frac{dr_x}{dt}s_z+r_x\frac{ds_z}{dt}\right)-\left(\frac{dr_z}{dt}s_x+r_z\frac{ds_x}{dt}\right)\right]+ \\
&\qquad\quad +\hat{\mathbf{z}}\left[\left(\frac{dr_x}{dt}s_y+r_x\frac{ds_y}{dt}\right)-\left(\frac{dr_y}{dt}s_x+r_y\frac{ds_x}{dt}\right)\right] \\
&= \left[\hat{\mathbf{x}}\left(r_y\frac{ds_z}{dt}-r_z\frac{ds_y}{dt}\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(r_x\frac{ds_z}{dt}-r_z\frac{ds_x}{dt}\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(r_x\frac{ds_y}{dt}-r_y\frac{ds_x}{dt}\right)\right]+ \\
&\quad +\left[\hat{\mathbf{x}}\left(\frac{dr_y}{dt}s_z-\frac{dr_z}{dt}s_y\right)-\hat{\mathbf{y}}\left(\frac{dr_x}{dt}s_z-\frac{dr_z}{dt}s_x\right)+\hat{\mathbf{z}}\left(\frac{dr_x}{dt}s_y-\frac{dr_y}{dt}s_x\right)\right] \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ r_x & r_y & r_z \\ \frac{ds_x}{dt} & \frac{ds_y}{dt} & \frac{ds_z}{dt} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{dr_x}{dt} & \frac{dr_y}{dt} & \frac{dr_z}{dt} \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} \qquad = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{s}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{s}
\end{aligned}$$

■

1.18 Os três vetores **a**, **b** e **c** são os três lados de um triângulo ABC com ângulos α, β e γ como apresentado na Figura 1.15.

Figura 1.15: Triângulo para o Problema 1.18



(**a**) Mostre que a área do triângulo é dada por qualquer uma das expressões:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$$

Solução:
Sem perda de generalidade, tomemos o lado **b**, medindo $|\mathbf{b}|$ como base do triângulo ABC. Nesse caso, a altura relativa à base considerada é igual a $|\mathbf{a}|\sin\gamma$ ou ainda $|\mathbf{c}|\sin\alpha$. No primeiro caso, podemos calcular a área de ABC como sendo:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{a}|\sin\gamma = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{a}|\sin(\pi-\gamma) = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{a}|\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

em que $\alpha+\beta$ é o ângulo entre os vetores **a** e **b**.
Para o segundo caso, temos:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\alpha = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin(\pi-\alpha) = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin(\beta+\gamma) = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$$

em que $\beta+\gamma$ é o ângulo entre **b** e **c**. Analogamente, tomando o lado **a** como base do triângulo ABC e a altura relativa $|\mathbf{c}|\sin\beta$, encontramos:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\sin\beta = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\sin(\pi-\beta) = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\sin(\alpha+\gamma) = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$$

em que $\alpha+\gamma$ é o ângulo entre os vetores **a** e **c**.
Portanto,

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$$

■

(**b**) Use a igual dade dessas expressões para mostrar a chamada lei dos senos

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Solução:
No decorrer da demonstração do item anterior, mostramos que:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\alpha = \frac{1}{2}|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\sin\beta$$

Dessas relações, obtemos:

$$\frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\alpha = \frac{1}{2}|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\sin\beta \Rightarrow |\mathbf{a}|\sin\beta = |\mathbf{b}|\sin\alpha \Rightarrow \frac{|\mathbf{a}|}{\sin\alpha} = \frac{|\mathbf{b}|}{\sin\beta}$$
$$\frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma = \frac{1}{2}|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\sin\beta \Rightarrow |\mathbf{b}|\sin\gamma = |\mathbf{c}|\sin\beta \Rightarrow \frac{|\mathbf{b}|}{\sin\beta} = \frac{|\mathbf{c}|}{\sin\gamma}$$

Logo,

$$\frac{\mathbf{a}}{\sin\alpha} = \frac{\mathbf{b}}{\sin\beta} = \frac{\mathbf{c}}{\sin\gamma}.$$

■

1.19 Se $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ denotam posição, velocidade e aceleração de uma partícula, mostre que

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\right] = \dot{\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$$

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\right] &= \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) + \mathbf{a}\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) \\
&= \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) + \mathbf{a}\cdot\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \\
&= \dot{\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}\times\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Na última expressão acima, de imediato podemos observar que $\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Resta analisar o significado de $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$. Pela definição do produto vetorial, temos que o vetor $\mathbf{a}\times\mathbf{r}$ é perpendicular tanto ao vetor $\mathbf{r}$ quanto ao vetor $\mathbf{a}$. Assim, ao efetuar o produto escalar entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}\times\mathbf{r}$ é identicamente nulo. Portanto, podemos concluir que

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r})\right] = \dot{\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$$

■

1.20 Os três vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ apontam da origem O para os três vértices de um triângulo. Use o resultado do Problema 1.18 para mostrar que a área do triângulo é dada por

$$\text{área do triângulo} = \frac{1}{2}|(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + (\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\times\mathbf{B})|$$

Solução:
Na situação dada, os lados do triângulo são representados pelos vetores: $\mathbf{a} = \mathbf{C} - \mathbf{B}$, $\mathbf{b} = \mathbf{A} - \mathbf{C}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Assim, consideremos a expressão para a área do triângulo, encontrada no Problema 1.18:

$$\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

Substituindo pelas expressões de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, temos:

$$\begin{aligned}
\text{área} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| &= \frac{1}{2}|(\mathbf{C}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{C})| \\
&= \frac{1}{2}|\mathbf{C}\times(\mathbf{A}-\mathbf{C}) - \mathbf{B}\times(\mathbf{A}-\mathbf{C})| \\
&= \frac{1}{2}|\mathbf{C}\times\mathbf{A} - \mathbf{C}\times\mathbf{C} - \mathbf{B}\times\mathbf{A} + \mathbf{B}\times\mathbf{C}| \quad = \frac{1}{2}|(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + (\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\times\mathbf{B})|
\end{aligned}$$

Na última passagem, fizemos $\mathbf{C}\times\mathbf{C} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. ■

1.21 Um paralelepípedo (um sólido de seis faces com as faces opostas paralelas) tem um vértice na origem O e as três arestas que partem de O definidas pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Mostre que o volume do paralelepípedo é $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$.

Solução:
Podemos decompor o vetor $\mathbf{c}$ em uma componente paralela ao vetor $\mathbf{b}$, dada por $c_\parallel = |\mathbf{c}|\cos\theta$ e outra perpendicular ao vetor $\mathbf{b}$, dada por $c_\perp = |\mathbf{c}|\sin\theta$, θ é o ângulo entre $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Assim, podemos determinar a área da face determinada pelos vetores $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ (partindo da origem) é

$$\text{área da face} = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\theta = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$$

Para finalizar com o volume do paralelepípedo, necessitamos calcular a altura relativa do sólido em relação à face determinada pelos vetores $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Para tanto observemos que o vetor $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ é perpendicular à referida face. Assim, a altura será dada pela componente de $\mathbf{a}$ paralela a $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, ou seja, $a_\parallel = |\mathbf{a}|\cos\alpha$, em que α é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

Logo, o volume do paralelepídedo pode ser calculado pelo produto:

$$\text{volume} = (\text{altura})\cdot(\text{área da face}) = (|\mathbf{a}|\cos\alpha)(|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cos\alpha = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

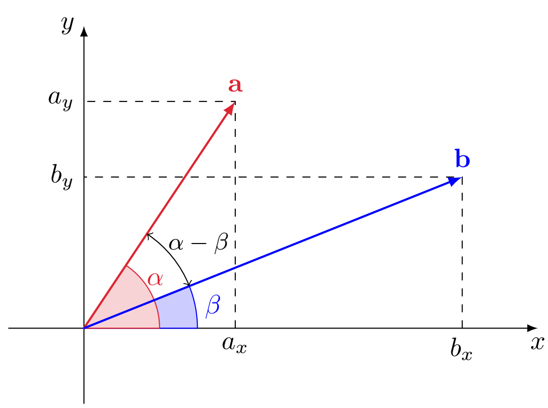
■

1.22 Os dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ estão sobre o plano xy e fazem ângulos α e β com o eixo x.

(a) Calculando $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ de duas formas [a saber, usando (1.6) e (1.7)], mostre a identidade trigonométrica bem conhecida

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Solução:



Sem perda de generalidade, consideremos $\alpha > \beta$, e os vetores como mostrados na figura acima. Conforme definição (1.6), o produto escalar entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é dado por

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\alpha-\beta)$$

em que $\alpha-\beta$ é o ângulo entre os vetores. Por outro lado, de acordo com a definição (1.7), temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= a_x b_x + a_y b_y \\ &= (|\mathbf{a}|\cos\alpha)(\mathbf{b}\cos\beta) + (|\mathbf{a}|\sin\alpha)(\mathbf{b}\sin\beta) \\ &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\alpha-\beta) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

■

(b) Calculando similarmente $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, mostre que

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Solução:
Para o produto vetorial de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, façamos:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha-\beta) = a_x b_y - a_y b_x &\Rightarrow -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha-\beta) = (|\mathbf{a}|\cos\alpha)(|\mathbf{b}|\sin\beta) - (|\mathbf{a}|\sin\alpha)(|\mathbf{b}|\cos\beta)\\ &\Rightarrow -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\alpha-\beta) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)\\ &\Rightarrow \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Observemos que o sinal negativo a frente de $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha-\beta$ advém da aplicação da "regra da mão direita" para determinação do sentido em que apontará o vetor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. ■

1.23 O vetor desconhecido $\mathbf{v}$ satisfaz $\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \lambda$ e $\mathbf{b}\times\mathbf{v} = \mathbf{c}$, onde λ, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são fixos e conhecidos. Determine $\mathbf{v}$ em termos de λ, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Solução:
Vamos decompor o vetor $\mathbf{v}$ em componentes paralela e perpendicular ao vetor $\mathbf{b}$, ou seja, façamos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$$

O produto interno entre $\mathbf{b}$ e $\mathbf{v}$ é:

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) \Rightarrow \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_\perp$$

Observermos que $\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_\perp = 0$ pois são perpendiculares entre si. Por outro lado, definimos uma constante k tal que $\mathbf{v}_\parallel = k\mathbf{b}$, Assim,

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}\cdot(k\mathbf{b}) \Rightarrow \lambda = kb^2 \Rightarrow k = \frac{\lambda}{b^2}$$

Portanto, $\mathbf{v}_\parallel = \dfrac{\lambda}{b^2}\mathbf{b}$.
Para detterminarmos $\mathbf{v}_\perp$, façamos:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\times\mathbf{v} = \mathbf{b}\times(\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) &\Rightarrow \mathbf{b}\times\mathbf{v} = \mathbf{b}\times\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{b}\times\mathbf{v}_\perp\\ &\Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{b}\times\mathbf{v}_\perp\end{aligned}$$

em que usamos o fato de que $\mathbf{b}\times\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{v}_\perp) &\Rightarrow \mathbf{b}\times\mathbf{c} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}_\perp)\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\mathbf{v}_\perp\\ &\Rightarrow \mathbf{b}\times\mathbf{c} = -b^2\mathbf{v}_\perp\\ &\Rightarrow \mathbf{v}_\perp = -\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{b^2}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp = \frac{\lambda}{b^2}\mathbf{b} - \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{b^2}\\ \mathbf{v} &= \frac{1}{b^2}(\lambda\mathbf{b} - \mathbf{b}\times\mathbf{c})\end{aligned}$$

■