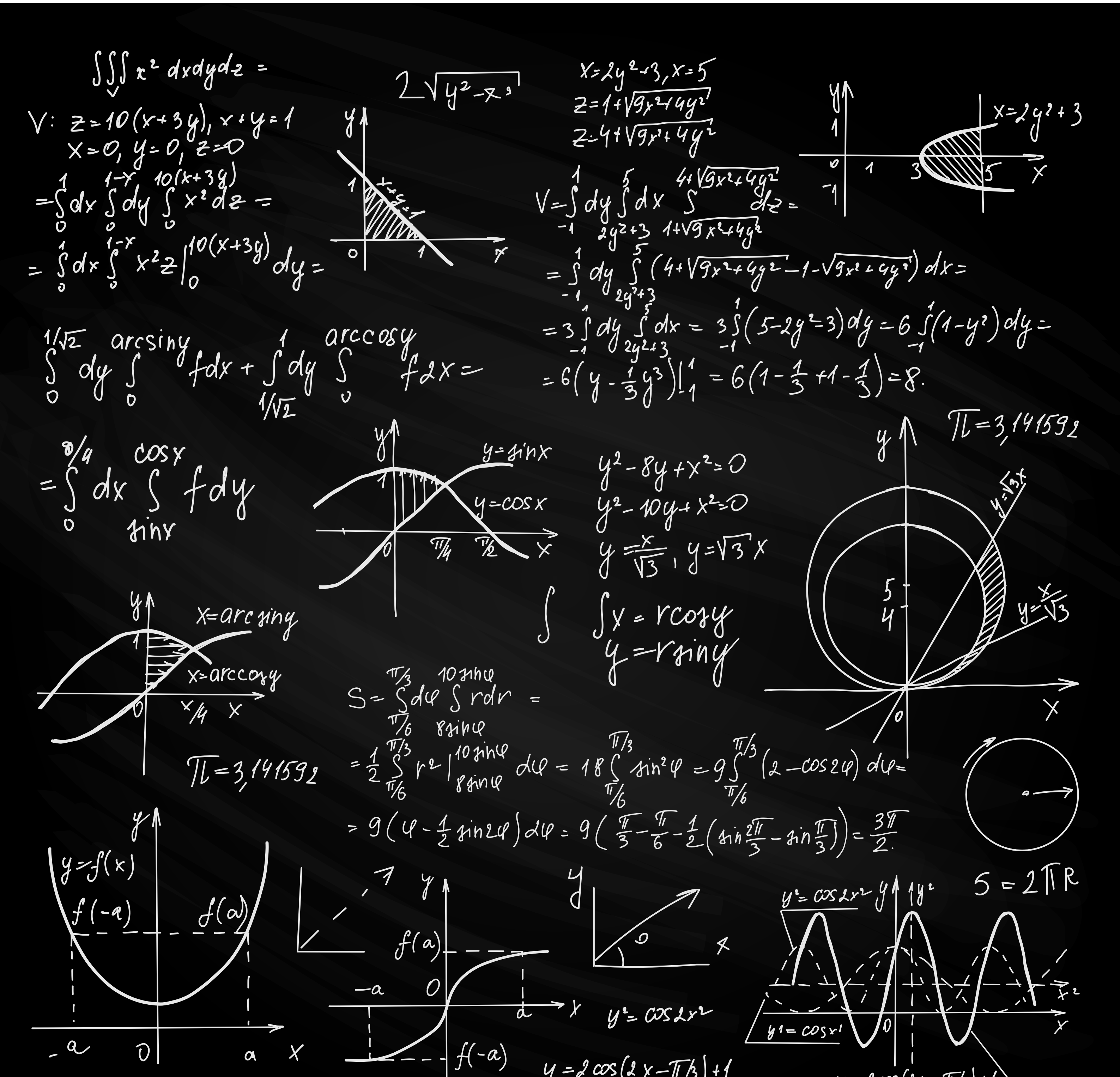
Igo da Costa Andrade

RESOLUÇÃO COMENTADA DOS EXERCÍCIOS DE

NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS

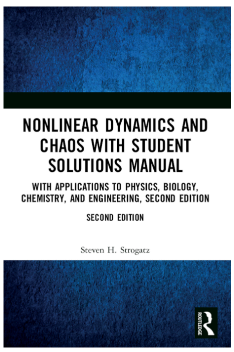
DE

STEVEN H. STROGATZ



Igo da Costa Andrade

Resolução Comentada de Exercícios



STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos**. Nova York: CRC Press, 2018.

SUMÁRIO

2. FLUXO NA RETA

2.1. Um modo geométrico de pensar

Nos três próximos exxercícios, interprete $\dot{x} = \sin(x)$ como um fluxo sobre a reta.

2.1.1. Encontre todos os pontos fixos do fluxo.

Solução

Os **pontos fixos** são tais que $\dot{x} = 0$, então:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi, \text{ para } \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

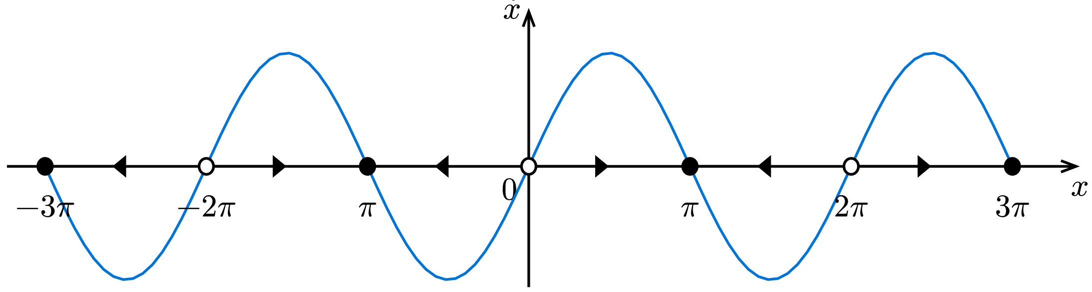
■

2.1.2. Em quais pontos x o fluxo possui maior velocidade para a direita?

Solução

A Figura 1 mostra o retrato de fase da equação $\dot{x} = \sin(x)$. Nela. destacamos os **pontos fixos** determinados no item anterior. Observemos que temos **pontos fixos *atratores***, ou estáveis, ($x^* = (2k+1)\pi$, para $k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$) e **pontos fixos *repulsores***,ou instáveis, ($x^* = 2k\pi$, para $k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$).

Figura 1: Retrato de fase da equação $\dot{x} = \sin(x)$



Observemos que a velocidade $\dot{x}$ é positiva nas regiões $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ para $k = ... - 2, -1, 0, 1, 2, ...$ Em cada uma dessas regiões, a velocidade cresce a partir de um ponto repulsor até o valor $\frac{4k+1}{2}\pi$, quanto atinge seu valor máximo, e, então, decresce em direção a um ponto fixo atrator, com velocidade cada vez menor.

■

2.1.3. a) Encontre a aceleração do fluxo $\ddot{x}$ como função de x.

Solução

$$\ddot{x} = \frac{d(\dot{x})}{dt} = \frac{d}{dt}[\sin(x)] \Rightarrow \ddot{x} = \cos(x)\dot{x}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = \cos(x)\sin(x)$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

■

b) Encontre os pontos em que o fluxo tem aceleração positiva máxima.

Solução

Para encontrar os pontos de máxima aceleração positiva, precisamos maximizar a função $\ddot{x}$ determinada no item anterior. Observemos que $\sin(2x)$ atinje seu valor máximo de 1 quando:

$$2x^* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$
$$x^* = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

■

2.1.4. (Solução exata de $\dot{x} = \sin(x)$) Como mostrado no texto, $\dot{x} = \sin(x)$ tem uma solução $t = \ln\left(\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc(x) + \cot(x)}\right|\right)$, onde $x_0 = x(0)$ é o valor inicial de x.

a) Dado a espcífica condiçõ inicial $x_0 = \frac{\pi}{4}$, mostre que a solução acima pode ser invertida para obter

$$x(t) = 2\tan^{-1}\left(\frac{e^t}{1+\sqrt{2}}\right).$$

Conclua que $x(t) \to \pi$ quando $t \to \infty$, como mostrado na Seção 2.1. (Você necessita ser bom com identidades trigonométricas para resolver esse problema).

Solução

Inicialmente, calculemos:

$$\begin{cases} \csc(x_0) = \csc(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \cot(x_0) = \cot(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \csc(x_0) + \cot(x_0) = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \csc(x_0) + \cot(x_0) = 1 + \sqrt{2}$$

Substituindo a condição inicial na solução exata, obtemos:

$$t = \ln\left(\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc(x) + \cot(x)}\right|\right) \Rightarrow t = \ln\left(\left|\frac{1+\sqrt{2}}{\csc(x) + \cot(x)}\right|\right) \Rightarrow e^t = \frac{1+\sqrt{2}}{\csc(x)+\cot(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\csc(x)+\cot(x)} = \frac{2^t}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\sin(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}} = \frac{e^t}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{e^t}{1+\sqrt{2}}$$

Para resolver a expressão acima, consideremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \ \text{ e } \ \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Substituindo $\alpha = 2\theta$ nas identidades acima, obtemos:

$$\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ \text{ e } \ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Portanto, substituindo as expressões acima na solução, temos:

$$\frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{e^t}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} = \frac{e^t}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} = \frac{e^2}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^t}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x(t) = 2\tan^{-1}\left(\frac{e^t}{1+\sqrt{2}}\right)$$

Para determinarmos o comportamento de $x(t)$ quando $t \to \infty$, seja:

$$u = \frac{e^t}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} u = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{1+\sqrt{2}} = +\infty$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{u\to\infty} 2\tan^{-1}(u) = \pi$$

■

b) Tente encontrar a solução analítica para $x(t)$, dado uma condição inicial *arbitrária*.

Solução

No item anterior, obtemos a seguinte identidade trigonométrica:

$$\frac{1}{\csc(x)+\cot(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Assim, para a solução exata de $\dot{x} = \sin(x)$, temos:

$$t = \ln\left(\left|\frac{\csc(x_0)+\cot(x_0)}{\csc(x)+\cot(x)}\right|\right) \Rightarrow e^t = \frac{\tan(\frac{x}{2})}{\tan(\frac{x_0}{2})} \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{x_0}{2}\right)e^t$$
$$\Rightarrow x(t) = 2\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x_0}{2}\right)e^t\right]$$

■

2.1.5. (Um análogo mecânico)

a) Encontre um sistema mecânico que seja aproximadamente governado por $\dot{x} = \sin(x)$.

b) Usando soua intuição física, explique por que agora se torna óbvio que $x^* = 0$ é um ponto fixo instável e $x^* = \pi$ é estável.

2.2. Pontos fixos e estabilidade

Analise as seguintes equações graficamente. Em cada caso, desenhe o campo verorial sobre a reta real, encontre todos os pontos fixos, classifique quanto à estabilidade, e desenhe o gráfico de $x(t)$ para diferentes condições iniciais. Então tente por alguns minutos obter a solução analítica para $x(t)$; se você tiver dificuldade, não tente por muito tempo pois em vários casos é impossível resolver a equação em uma forma fechada!

2.2.1. $\dot{x} = 4x^2 - 16$

Solução

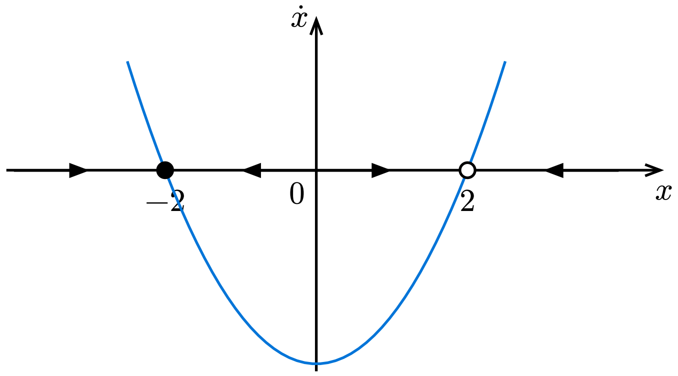
- **Pontos Fixos**

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^* = \pm 2$$

Como indica a Figura 2, o ponto fixo $x^* = -2$ é um ponto atrator enquanto o ponto $x^* = 2$ é repulsor.

- **Campo Vetorial**

Figura 2: Campo vetorial unidimensional para $\dot{x} = 4x^2 - 16$



- **Solução exata**

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = 4x^2 - 16 \Rightarrow \frac{dx}{x^2-4} = 4dt \Rightarrow \frac{dx}{x^2-4} = 4dt \\
&\Rightarrow \frac{dx}{(x-2)(x+2)} = 4dt \Rightarrow \frac{1}{4}\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{dx}{x+2} = 4dt \\
&\Rightarrow \frac{dx}{x+2} - \frac{dx}{x-2} = -16dt \\
&\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x+2} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-2} = -16\int_0^t dt \\
&\Rightarrow \left(\ln|x+2|\;|_{x_0}^{x}\right) - \left(\ln|x-2|\;|_{x_0}^{x}\right) = -16t \\
&\Rightarrow (\ln|x+2| - \ln|x_0+2|) - (\ln|x-2| - \ln|x_0-2|) = -16t \\
&\Rightarrow (\ln|x+2| - \ln|x-2|) - (\ln|x_0+2| - \ln|x_0-2|) = -16t \\
&\Rightarrow \ln\left[\frac{(x+2)}{(x-2)}\frac{(x_0-2)}{(x_0+2)}\right] = -16t \\
&\Rightarrow \frac{(x+2)}{(x-2)}\frac{(x_0-2)}{(x_0+2)} = e^{-16t} \\
&\Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = \left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)e^{-16t} \\
&\Rightarrow x+2 = \left[\left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)e^{-16t}\right](x-2) \\
&\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)e^{-16t}\right]x = -2\left[1 + \left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)e^{-16t}\right] \\
&\Rightarrow x(t) = -\frac{2\left(1 + \left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)e^{-16t}\right)}{1 - \left(\frac{x_0+2}{x_0-2}\right)e^{-16t}}
\end{aligned}
$$

■

REFERÊNCIAS

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos**. Nova York: CRC Press, 2018.