Множество Мандельброта

Остриков Константин, 2 курс факультета математики НИУ ВШЭ
научный руководитель Тиморин Владлен Анатольевич

Введение

Определение 1. Мультибротным множеством степени n называется

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \exists s \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, |f_c^{\circ k}(0)| \leq s \right\},$$

где $f_c : z \mapsto z^n + c$.

В частности, при $n = 2$ множество называется множеством Мандельброта.

Определение 2. Множеством E будет называться множество таких точек c, для которых f_c имеет притягивающую фиксированную точку.

Определение 3. Эпициклоидой называется плоская кривая, образуемая фиксированной точкой окружности, катящейся по внешней стороне другой окружности без скольжения. Её параметрическим уравнением является

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos(\frac{R+r}{r}\theta) \\ y = (R+r)\sin\theta - r\sin(\frac{R+r}{r}\theta) \end{cases}$$

Теорема 1. *Множество E является внутренностью эпициклоиды.*

Теорема 2. *Множество E является подмножеством мультибротного множества.*

Замечание 1. *Эти утверждения являются обобщением аналогичных утверждений про главную кардиоиду множества Мандельброта.*

Доказательство теоремы 1

Поскольку локальный параметр z может быть выбран так, чтоб неподвижная точка соответствовала значению $z = 0$, то f можно разложить в сходящийся при малых $|z|$ ряд Тэйлора

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{1}$$

Коэффициент $\lambda = f'(z_0)$ именуется *мультипликатором* точки z_0

Лемма 1. *Неподвижная точка голоморфного отображения является топологически притягивающей тогда и только тогда, когда её мультипликатор удовлетворяет неравенству* $|\lambda| < 1$

Доказательство. Из (**??**) следует, что существуют такие действительные положительные r_0 и C, что

$$|f(z) - \lambda z| \leqslant C|z|^2 \quad \text{при } |z| < r_0$$

Выберем такое $c : |\lambda| < c < 1$ и такое $r : 0 < r \leqslant r_0$, чтобы $|\lambda| + Cr < c$. Тогда

$$\forall |z| < r \ |f(z)| \leqslant |\lambda z| + C|z^2| \leqslant c|z|$$

Следовательно,

$$|f^{\circ k}(z)| \leqslant c^k |z| < c^k r$$

При $k \to \infty$ последовательность равномерно сходится к нулю.

Обратно, если точка является топологически притягивающей, то для любого достаточно малого диска $\mathbb{D}_\varepsilon$ с центром в нуле существует итерация $f^{\circ n}$, отображающая $\mathbb{D}_\varepsilon$ в его подмножество. Тогда по лемме Шварца производная отображения $f^{\circ n}$ по модулю не превышает единицу, $(f^{\circ n})'(0) = (f'(0))^n = \lambda^n$, то есть $|\lambda^n| < 1$, откуда $|\lambda| < 1$. □

Доказательство теоремы 1 . У отображения $f_c(z) = z^n + c$ мультипликатор равен

$$\lambda = nz^{n-1}$$

Откуда параметр z выражается через мультипликатор как

$$z = \sqrt[n-1]{\lambda/n}, \tag{2}$$

где корень является многозначной комплексной функцией.

Фиксированная точка удовлетворяет уравнению $f_c(z) = z$, то есть

$$z^n + c = z$$

$$c = z - z^n = (1 - z^{n-1})z$$

Подставляя выражение (**??**), получаем:

$$c(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \cdot \sqrt[n-1]{\frac{\lambda}{n}} = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{3}$$

По *лемме 1* $|\lambda| < 1$, а потому λ можно параметризовать как

$$\lambda = le^{i\varphi}, \text{где } 0 < l < 1;\ l, \varphi \in \mathbb{R}$$

подставляя это в предыдущее выражение, имеем

$$c(l, \varphi) = \left(\frac{le^{i\varphi}}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{le^{i\varphi}}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}},$$

откуда

$$c(l, \varphi) = \left(\frac{l}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt[n-1]{e^{i\varphi}} - \left(\frac{l}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot \left(\sqrt[n-1]{e^{i\varphi}}\right)^n$$

и, наконец (поменяв для дальнейшего удобства слагаемые)

$$c(l, \varphi) = -\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot l^{\frac{n}{n-1}} \cdot \left(\sqrt[n-1]{e^{i\varphi}}\right)^n + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot l^{\frac{1}{n-1}} \cdot \sqrt[n-1]{e^{i\varphi}}$$

Замечание 2. *Следует отметить, что при разложении многозначного возведения в дробную степень на произведение комплексных чисел в той же дробной степени, достаточно оставить только одну из степеней многозначной. В частности, здесь и далее возведение $1/n$ и l в дробную степень будет пониматься в смысле однозначного возведения в рациональную степень вещественного числа, а вот корни из экспоненты полагаются многозначными.*

Обозначим $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ за r, а $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ за $R + r$, откуда $\frac{R+r}{r} = \frac{1}{n}$. Поскольку n является константой, то R и r константы.
$l^{\frac{1}{n-1}}$ обозначим за L, откуда $l^{\frac{n}{n-1}} = L^n$.

Замечание 3. *Параметризация по l легко заменяется параметризацией по L: поскольку $0 < l < 1$, то $0 < L < 1$, и существует очевидная биекция между этими параметрами по определению L.*

Извлечём многозначный корень $\sqrt[n-1]{e^{i\varphi}} = e^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n-1})}$ для $k = 0, 1, ..., n-2$

Положим $\theta_k(\varphi) = \frac{\varphi+2\pi k}{n-1}$

Замечание 4. *Замечу, что при фиксированном L непрерывность аргумента θ обеспечивается тем, что $\theta_k(2\pi) = \frac{2\pi+2\pi k}{n-1} = \frac{2\pi(k+1)}{n-1} = \theta_{k+1}(0)$, таким образом по обходе круга аргументом φ следует увеличить k на единицу. То есть, можно растянуть координату в $n-1$ раз, определив $\theta = 2\pi k + \varphi$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, задавая таким образом непрерывную биекцию между парой (φ, k) и θ. Таким образом можно перейти от многозначной $\sqrt[n-1]{e^{i\varphi}}$ к однозначной $e^{i\theta}$, где θ изменяется от 0 до $2n\pi$. В точке $2n\pi$ функция равна $\theta_{n-2}(2\pi) = \frac{2\pi+2\pi(n-2)}{n-1} = \frac{2\pi(n-1)}{n-1} = 2\pi$, то есть все тригонометрические функции в этой точке совпадают со своими значениями в нуле, а потому рассматриваемые функции $c_L(\theta)$ имеют период $2n\pi$, а потому в силу непрерывности описывают замкнутую кривую.*

В таких обозначениях выражение переписывается следующим образом:

$$c(L, \theta) = -(R+r) \cdot L^n \cdot e^{i\theta} \ + r \cdot L \cdot e^{\frac{R+r}{r}\theta}$$

Делая координатную замену $c = x + iy$, имеем

$$\begin{cases} x = -(R+r) \cdot L^n \cdot \cos\theta + r \cdot L \cdot \cos(\frac{R+r}{r}\theta) \\ y = -(R+r) \cdot L^n \cdot \sin\theta + r \cdot L \cdot \sin(\frac{R+r}{r}\theta) \end{cases}$$

Очевидно, при $l = 1 \Rightarrow L = 1$ получаются уравнения из *Определения 3* (эпициклоиды), с заменой знаков x и y (таким образом, эпициклоида будет получаться повёрнутой на $180°$ относительно начала координат) Осталось показать, что при $0 < L < 1$ получаются все внутренние точки эпициклоиды.

Поскольку по *Замечанию 4* рассматриваемые функции $c_L(\theta)$ задают замкнутые кривые, в том числе и при $L = 1$, то внутренность и внешность этой кривой описываются неравенствами $L > 1$ и $L < 1$. $c_0(\theta) \equiv 0$, начало координат, очевидно, находится внутри кривой, а значит $L < 1$ (а значит, и $\lambda < 1$) соответствует внутренности эпициклоиды, что и требовалось для сведения теоремы к *Лемме 1*. □

Доказательство теоремы 2

Переход к λ-параметризации Найдём такую функцию f_λ, чтоб выполнялось (**??**) и такую голоморфную γ чтоб выполнялась коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "f_c"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Возьмём такую функцию γ:

$$\gamma(z) = z + \sqrt[n-1]{\lambda/n}$$

в таком случае

$$f_c \circ \gamma(z) = \left(z + \sqrt[n-1]{\frac{\lambda}{n}}\right)^n + c =$$

$$= \left[z^n + n\sqrt[n-1]{\frac{\lambda}{n}}\ z^{n-1} + \binom{n}{2}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}\ z^{n-2} + \binom{n}{3}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{3}{n-1}}\ z^{n-3} + ... + \lambda z\right] + \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + c$$

Выражение в квадратных скобках – это и есть функция f_λ, поскольку в таком случае

$$\gamma \circ f_\lambda(z) = \left[z^n + n\sqrt[n-1]{\frac{\lambda}{n}}\ z^{n-1} + \binom{n}{2}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{2}{n-1}}\ z^{n-2} + ... + \lambda z\right] + \sqrt[n-1]{\lambda/n},$$

что в точности равняется предыдущему выражению при условии (**??**).

Замечу, что, как и планировалось, f_λ не имеет свободного члена, а значит ноль является его неподвижной точкой. Также отмечу, что линейный член имеет коэффициент λ, а потому мультипликатор f_λ в точности равен λ.

Замечание 5. *Поскольку задан гомоморфизм между f_c и f_λ, утверждение теоремы 2 для множеств E и M, заданных через c и f_c, равносильно аналогичному утверждению для множеств, определённых аналогично через λ и f_λ. Для удобства рассуждений доказан этот факт будет именно в λ-параметризации.*

Доказательство теоремы 2 .

Существует достаточно малая окрестность нуля U_0, отображающаяся в своё подмножество (ибо $|\lambda| < 1$). Организуем последовательность "расширяющихся"множеств таким способом: рассмотрим полный прообраз U_n, т.е. $f^{-1}(U_n)$. В нём выберем ту компоненту связности, в которой находится центр координат (такая существует, поскольку 0 является неподвижной точкой отображения f_λ). Это множество будет следующим в последовательности, т.е. U_{n+1}. $U_{n+1} \Supset U_n$, ибо $|\lambda| < 1$

Обозначим за A объединение всех U_n

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

По построению A – непосредственная область притяжения точки 0, (т.е. компонента связности области притяжения, содержащая саму точку 0). Очевидно, $f(A) = A$.

Предположим, что критические точки $z = \sqrt[n-1]{\lambda/n} \notin A$. Тогда, $U_{n+1} \to U_n$ – гомеоморфизм, откуда A односвязно.

Поскольку A открыто и односвязно, и её граница содержит более одной точки (поскольку иначе $f \equiv 0$), то по теореме Римана A можно отобразить биективно в единичный диск $\mathbb{D}$ некоторой функцией h так, чтобы $h(0) = 0$.

По теореме о линеаризации Кёнигса (подробнее см. Милнор, "Голоморфная динамика с.99) существует такая локальная голоморфная замена координат h, что $h \circ f \circ h^{-1}$ является линейным отображением $g : \omega \mapsto \lambda\omega$ Тогда верна коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ h\big\downarrow & & \big\downarrow h \\ \mathbb{D} & \xrightarrow[g]{} & \mathbb{D} \end{array}$$

С одной стороны, f имеет в 0 притягивающую точку, а с другой – g является поворотом вокруг нуля и в нуле притягивающей точки не имеет, а значит, достигнуто противоречие, исходное предположение неверно, критические точки входят в область притяжения нуля, а значит множество E является подмножеством мультибротного множества. $\square$

Список литературы

[1] Дж. Милнор

Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2000

[2] *"Definition of multibrots".* Retrieved 2008-09-28. http://www.mrob.com/pub/muency/multibrotset.html

[3] *Epicycloid.* MathWorld http://demonstrations.wolfram.com/Epicycloid/

[4] А. В. Домрин, А. Г. Сергеев *Лекции по комплексному анализу. Второе полугодие* М.: МИАН, 2004