Αντιπαράδειγμα, Αντιθετοαντιστροφή και γράφημα στη διδασκαλία της ανάλυσης Γ΄ λυκείου

Μ. Ελευθεριάδης[1] Κ. Λόλας[2] Α. Ευαγγελόπουλος[3]

[1] 32ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

[2] 10ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

[3] Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2018

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις
- Ξαναλύνουν ασκήσεις

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις
- Ξαναλύνουν ασκήσεις
- Ξαναξαναλύνουν ασκήσεις ...

Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα

Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα
- Αντιθετο-αντιστροφή

Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα
- Αντιθετο-αντιστροφή
- Γραφική Αναπαράσταση

Αντιπαραδείγματα

Χρησιμότητα

Ένα παράδειγμα είναι ικανό να αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής

- παράδειγμα μεταστροφής
- παράδειγμα γεφύρωσης

Αντιθετο-αντιστροφή

Χρησιμότητα

Ίσως η απόδειξη είναι ευκολότερη από την αρχική

Αντιθετο-αντιστροφή

Χρησιμότητα

Ίσως η απόδειξη είναι ευκολότερη από την αρχική

Χρησιμότητα

Μας δίνει την ευκαιρία να το παίξουμε έξυπνοι, ΘΕΟΙ

Πρόταση 1

Πρόταση

Αν η f συνεχής τότε η f^{-1} δεν είναι πάντα συνεχής.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x-1, & x \in (2,3) \end{cases}$ είναι συνεχής ενώ η $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x+1, & x \in (1,2) \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1. □

Πρόταση 2

Πρόταση

Αν η f παραγωγίσιμη, τότε η f^{-1} δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f\left(x\right) = x^3$ είναι «1-1» και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Όμως η $f^{-1}\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. $\square$

Πρόταση 3

Πρόταση

Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$, τότε δεν υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Απόδειξη.

Για $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$ τότε $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + g(x)] = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. □

Πρόταση 4

Πρόταση

Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, τότε η f δεν είναι πάντα γνησίως αύξουσα στο $+\infty$.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \frac{x}{2}$ έχει $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $+\infty$. $\square$

Πρόταση 5

Πρόταση

Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & x > 1 \\ -x^2 + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 1, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. $\square$

Πρόταση 6

Πρόταση

Αν η fείναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$, τότε δεν έχει πάντα σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f\left(x\right) = \begin{cases} x^2+1, & x > 1 \\ -2, & x < 1 \end{cases}$ είναι συνεχής όμως δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$\square$

Πρόταση 7

Πρόταση

Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη ε στο x_0, τότε η ε δεν έχει πάντα μόνο ένα κοινό σημείο με την C_f (άσκηση Γ10, σελ. 174-175).

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και έχει εφαπτόμενη την $\varepsilon : y = 0$ (άξονας $x'x$) που τέμνει την C_f σε άπειρα σημεία ($x_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$) παρόλο που εφάπτεται της C_f. $\square$

Πρόταση 8

Πρόταση

Αν η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στοx_0, τότε οι f, g δεν είναι πάντα παραγωγίσιμες στο x_0.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $(f+g)(x) = x+1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, ενώ οι συναρτήσεις $f(x) = x+|x|$ και $g(x) = 1-|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0. $\square$

Πρόταση 9

Πρόταση

Αν συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta)$ δεν παρουσιάζει πάντα ακρότατο στο α.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και σύνθετη συνεχών και στο 0 είναι συνεχής, $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0 = f(0)$. Το $f(0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο, γιατί όσο κοντά στο 0, σε διάστημα της μορφής $[0, x]$ η $f(x)$ «αλλάζει» πρόσημο. $\square$

Πρόταση 10

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και αλλάζει το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0, τότε δεν παρουσιάζει πάντα ακρότατο στο x_0.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0.
Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, όμως δε παρουσιάζει τ. ακρότατο στο 0. $\square$

Πρόταση 11

Πρόταση

Αν η C_f μιας συνάρτησης f, αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0, τότε δεν παρουσιάζει πάντα στο x_0 σημείο καμπής.

Απόδειξη.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$. Στο $x_0 = 0$ η κυρτότητα αλλάζει είδος, αφού $f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$ (δεν υπάρχει η $f''(0)$, αφού δεν υπάρχει και η $f'(0)$) και $f''(0) < 0$ για $x < 0$ και $f''(0) > 0$ για $x > 0$. Στο $x_0 = 0$ δεν υπάρχει εφαπτομένη και επομένως το $x_0 = 0$ δεν είναι σημείο καμπής. □

Πρόταση 12

Πρόταση

Αν η C_f μιας συνάρτησης f, έχει ασύμπτωτη την ευθεία ε, τότε η C_f μπορεί να τέμνει την ε.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f (δηλαδή ο άξονας $x'x$). Όμως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει άπειρες λύσεις στο $\mathbb{R}$, άρα ο άξονας $x'x$ και η C_f έχουν άπειρα κοινά σημεία ($x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). $\square$

Πρόταση 13

Πρόταση

Αντίστροφο Θ. Rolle. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = f(\beta)$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε η f δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο (α, β).

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$ έχει $f(-1) = f(5) = 5$ και $f'(2) = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. $\square$

Πρόταση 14

Πρόταση

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), $f(\alpha) = f(\beta)$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε η f δεν είναι πάντα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Πρόταση 15

Πρόταση

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε δεν είναι πάντα $f(\alpha) = f(\beta)$.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, $f'(0) = 0$, αλλά $f(-1) \neq f(2)$. $\square$

Πρόταση 16

Πρόταση

Αντίστροφο ΘΜΤ. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, τότε η f δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο (α, β).

Πρόταση 17

Πρόταση

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, τότε η f δεν είναι πάντα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Πρόταση 18

Πρόταση

Αντίστροφο Μονοτονίας. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε δεν είναι πάντα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Πρόταση 19

Πρόταση

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε δεν είναι πάντα η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Πρόταση 20

Πρόταση

Αντίστροφο Θ. Fermat. Αν η f είναι παραγωγίσιμη $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x_0) = 0$, τότε η f δεν είναι πάντα θέση τ. ακρότατου το x_0.

Πρόταση 21

Πρόταση

Αν η f έχει θέση τοπ. ακρότατου το x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 δεν είναι πάντα εσωτερικό σημείο διαστήματος.

Πρόταση 22

Πρόταση

Αν το $x \lim\limits_{x \to xo} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ ή $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ και υπάρχει τότε δεν υπάρχει πάντα το $\lim\limits_{x \to xo} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Απόδειξη.

Για $f\left(x\right) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$ και $g\left(x\right) = \varepsilon\varphi x$ έχουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x \eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}} = 0$$

αλλά

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right)'}{\left(\varepsilon\varphi x\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2x\eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \lim_{x \to 0} \sigma\upsilon\nu^2 x \left(2x\eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}\right)$$

Πρόταση 23

Πρόταση

Αντίστροφο Σ.Κ. Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και $f'(x_0) = 0$, τότε η f δεν είναι πάντα θέση σημείου καμπής.

Απόδειξη.

Η $f(x) = x^4$, έχει $f'(x_0) = 0$, αλλά το 0 δεν είναι σημείο καμπής. □

Πρόταση 24

Πρόταση

Αντίστροφο Κυρτότητας. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, 2 φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και κυρτή στο $[\alpha, \beta]$, τότε δεν είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Απόδειξη.

Η $f(x) = (x-2)^4 + x$ είναι κυρτή αλλά έχει $f''(2) = 0$. $\square$

Πρόταση 25

Πρόταση

Πρόταση 25. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$, τότε δεν είναι πάντα γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f\left(x\right) = -\frac{1}{x}$είναι$f'\left(x\right) = \frac{1}{x^2} > 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ όμως $f\left(-1\right) = 1 > f(1) = -1$ □

Πρόταση 26

Πρόταση

Αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' δεν είναι πάντα συνεχής.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ η οποία δεν είναι συνεχής στο 0. $\square$

Πρόταση 27

Πρόταση

Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι «1-1».

Απόδειξη.

Αν ήταν «1-1» τότε θα ήταν αντιστρέψιμη. □

Πρόταση 28

Πρόταση

Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ή το $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Απόδειξη.

Αν υπήρχαν και τα δύο, τότε τα υπήρχε και το $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$, ΑΤΟΠΟ. $\square$

Πρόταση 29

Πρόταση

Αν η $g \circ f$ δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 ή η g δεν είναι συνεχής στο $f(x_0)$.

Απόδειξη.

Αν η f ήταν συνεχής στο x_0 και η g ήταν συνεχής στο $f(x_0)$ τότε θα ήταν συνεχής και η $g \circ f$, ΑΤΟΠΟ. $\square$

Πρόταση 30

Πρόταση

Αν η f δεν έχει ρίζα στο (α, β), τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ή $f(\alpha) \cdot f(\beta) \geq 0$

Απόδειξη.

Αν η f ήταν συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε η f έχει ρίζα στο (α, β), ΑΤΟΠΟ. $\square$

Πρόταση 31

Πρόταση

Αν η $g \circ f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f δεν είναι πραγωγίσιμη στο x_0 ή η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.

Απόδειξη.

Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο x_0 και η g ήταν παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ τότε θα ήταν παραγωγίσιμη και η $g \circ f$ στο x_0, ΑΤΟΠΟ. $\square$

Πρόταση 32

Πρόταση

Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι πραγωγίσιμη στο x_0.

Απόδειξη.

Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο x_0 τότε θα ήταν και συνεχής στο x_0, ΑΤΟΠΟ. $\square$

Σας Ευχαριστούμε...