Αντιπαράδειγμα, Αντιθετοαντιστροφή και γράφημα στη διδασκαλία της ανάλυσης Γ΄ λυκείου

Μ. Ελευθεριάδης[1] Κ. Λόλας[2] Α. Ευαγγελόπουλος[3]

[1] 32ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

[2] 10ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

[3] Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2018

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις
- Ξαναλύνουν ασκήσεις

Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις
- Ξαναλύνουν ασκήσεις
- Ξαναξαναλύνουν ασκήσεις ...

Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα

Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα
- Αντιθετο-αντιστροφή

Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα
- Αντιθετο-αντιστροφή
- Γραφική Αναπαράσταση

Αντιπαραδείγματα

Χρησιμότητα

Ένα παράδειγμα είναι ικανό να αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής

- παράδειγμα μεταστροφής
- παράδειγμα γεφύρωσης

Αντιθετο-αντιστροφή

Χρησιμότητα

Ίσως η απόδειξη είναι ευκολότερη από την αρχική

Πρόταση

Πρόταση

Αν η f συνεχής τότε η f^{-1} δεν είναι πάντα συνεχής.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x-1, & x \in (2,3) \end{cases}$ είναι συνεχής ενώ η $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x+1, & x \in (1,2) \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1. $\square$

Πρόταση

Πρόταση

Αν η f παραγωγίσιμη, τότε η f^{-1} δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^3$ είναι «1-1» και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Όμως η $f^{-1}\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. □

Πρόταση

Πρόταση

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$, τότε δεν υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x)$.

Απόδειξη.

Για $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ τότε $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)] = 0$ και $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. □

Πρόταση

Πρόταση

Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, τότε η f δεν είναι πάντα γνησίως αύξουσα στο $+\infty$.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + x$ έχει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $+\infty$. $\square$

Πρόταση

Πρόταση

Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x+1, & x>1\\ -x^2+2, & x\leq 1\end{cases}$ είναι συνεχής στο 1, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. □

Πρόταση

Πρόταση

Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη ε στο x_0, τότε η ε δεν έχει πάντα μόνο ένα κοινό σημείο με την C_f (άσκηση Γ10, σελ. 174-175).

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και έχει εφαπτόμενη την $\varepsilon : y = 0$ (άξονας $x'x$) που τέμνει την C_f σε άπειρα σημεία ($x_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$) παρόλο που εφάπτεται της C_f. $\square$

Πρόταση

Πρόταση

Αν η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στοx_0, τότε οι f, g δεν είναι πάντα παραγωγίσιμες στο x_0.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $(f+g)(x)=x+1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, ενώ οι συναρτήσεις $f(x)=x+|x|$ και $g(x)=1-|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0. $\square$

Σας Ευχαριστούμε...