

# Αντιπαράδειγμα, Αντιθετοαντιστροφή και γράφημα στη διδασκαλία της ανάλυσης Γ' λυκείου

Μ. Ελευθεριάδης<sup>1</sup>   Κ. Λόλας<sup>2</sup>   Α. Ευαγγελόπουλος<sup>3</sup>

<sup>1</sup>32ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

<sup>2</sup>10ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

<sup>3</sup>Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2018

# Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση

# Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις

# Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις
- Ξαναλύνουν ασκήσεις

# Μαθητές

- Συμμετέχουν στη παράδοση
- Λύνουν ασκήσεις
- Ξαναλύνουν ασκήσεις
- Ξαναξαναλύνουν ασκήσεις ...

# Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα

# Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα
- Αντιθετο-αντιστροφή

# Εργαλεία για τη Θεωρία

- Αντιπαράδειγμα
- Αντιθετο-αντιστροφή
- Γραφική Αναπαράσταση



# Αντιπαράδειγματα

## Χρησιμότητα

Ένα παράδειγμα είναι ικανό να αποδείξουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής

- παράδειγμα μεταστροφής
- παράδειγμα γεφύρωσης

# Αντιθετο-αντιστροφή

## Χρησιμότητα

Ίσως η απόδειξη είναι ευκολότερη από την αρχική

# Αντιθετο-αντιστροφή

## Χρησιμότητα

Ίσως η απόδειξη είναι ευκολότερη από την αρχική

## Χρησιμότητα

Ίσως η απόδειξη είναι ευκολότερη από την αρχική

# Πρόταση 1

## Πρόταση

Αν η  $f$  συνεχής τότε η  $f^{-1}$  δεν είναι πάντα συνεχής.

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x - 1, & x \in (2, 3) \end{cases}$  είναι συνεχής ενώ η  $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x + 1, & x \in (1, 2) \end{cases}$  δεν είναι συνεχής στο 1. □

## Πρόταση 2

### Πρόταση

Αν η  $f$  παραγωγίσιμη, τότε η  $f^{-1}$  δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη.

### Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = x^3$  είναι «1-1» και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Όμως η  $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.  $\square$

## Πρόταση 3

### Πρόταση

Αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ , τότε δεν υπάρχουν πάντα τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

### Απόδειξη.

Για  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  και  $g(x) = -\frac{1}{x^2}$  τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ . □

# Πρόταση 4

## Πρόταση

Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα γνησίως αύξουσα στο  $+\infty$ .

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x + x$  έχει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο  $+\infty$ . □

## Πρόταση 5

### Πρόταση

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

### Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & x > 1 \\ -x^2 + 2, & x \leq 1 \end{cases}$  είναι συνεχής στο 1, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. □



## Πρόταση 6

### Πρόταση

Αν η  $f$  είναι συνεχής και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$ , τότε δεν έχει πάντα σταθερό πρόσημο στο  $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$

### Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 1 \\ -2, & x < 1 \end{cases}$  είναι συνεχής όμως δεν έχει σταθερό πρόσημο στο  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .



# Πρόταση 7

## Πρόταση

Αν η  $C_f$  δέχεται εφαπτομένη  $\varepsilon$  στο  $x_0$ , τότε η  $\varepsilon$  δεν έχει πάντα μόνο ένα κοινό σημείο με την  $C_f$  (άσκηση Γ10, σελ. 174-175).

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμη στο 0 και έχει εφαπτόμενη την  $\varepsilon : y = 0$  (άξονας  $x'x$ ) που τέμνει την  $C_f$  σε άπειρα σημεία ( $x_k = \frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ ) παρόλο που εφάπτεται της  $C_f$ .  $\square$

# Πρόταση 8

## Πρόταση

Αν η  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε οι  $f, g$  δεν είναι πάντα παραγωγίσιμες στο  $x_0$ .

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $(f + g)(x) = x + 1$  είναι παραγωγίσιμη στο 0, ενώ οι συναρτήσεις  $f(x) = x + |x|$  και  $g(x) = 1 - |x|$  δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0. □

## Πρόταση 9

### Πρόταση

Αν συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και συνεχής στο  $[\alpha, \beta)$  δεν παρουσιάζει πάντα ακρότατο στο  $\alpha$ .

### Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και σύνθετη συνεχών και στο 0 είναι συνεχής,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \eta \mu \frac{1}{x}) = 0 = f(0)$ . Το  $f(0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο, γιατί όσο κοντά στο 0, σε διάστημα της μορφής  $[0, x]$  η  $f(x)$  «αλλάζει» πρόσημο. □

# Πρόταση 10

## Πρόταση

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[\alpha, \beta]$ , δεν είναι συνεχής στο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  και αλλάζει το πρόσημο της  $f'$  εκατέρωθεν του  $x_0$ , τότε δεν παρουσιάζει πάντα ακρότατο στο  $x_0$ .

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$  δεν είναι συνεχής στο 0.

Είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$  και γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , όμως δε παρουσιάζει τ. ακρότατο στο 0. □

# Πρόταση 11

## Πρόταση

Αν η  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$ , αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του  $x_0$ , τότε δεν παρουσιάζει πάντα στο  $x_0$  σημείο καμψής.

## Απόδειξη.

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ . Στο  $x_0 = 0$  η

κυρτότητα αλλάζει είδος, αφού  $f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$  (δεν

υπάρχει η  $f''(0)$ , αφού δεν υπάρχει και η  $f'(0)$ ) και  $f''(0) < 0$  για  $x < 0$  και  $f''(0) > 0$  για  $x > 0$ . Στο  $x_0 = 0$  δεν υπάρχει εφαπτομένη και επομένως το  $x_0 = 0$  δεν είναι σημείο καμψής. □

## Πρόταση 12

### Πρόταση

Αν η  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$ , έχει ασύμπτωτη την ευθεία  $\varepsilon$ , τότε η  $C_f$  μπορεί να τέμνει την  $\varepsilon$ .

### Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  είναι συνεχής και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$  άρα η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $f$  (δηλαδή ο άξονας  $x'x$ ). Όμως η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει άπειρες λύσεις στο  $\mathbb{R}$ , άρα ο άξονας  $x'x$  και η  $C_f$  έχουν άπειρα κοινά σημεία ( $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). □

# Πρόταση 13

## Πρόταση

Αντίστροφο Θ. Rolle. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ ,  $f(\alpha) = f(\beta)$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ .

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = |x^2 - 4x|$  έχει  $f(-1) = f(5) = 5$  και  $f'(2) = 0$ , αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. □



## Πρόταση 14

### Πρόταση

Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ ,  $f(\alpha) = f(\beta)$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .

# Πρόταση 15

## Πρόταση

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) = 0$ , τότε δεν είναι πάντα  $f(\alpha) = f(\beta)$ .

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [-1, 2]$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 2)$ ,  $f'(0) = 0$ , αλλά  $f(-1) \neq f(2)$ . □

## Πρόταση 16

### Πρόταση

Αντίστροφο ΘΜΤ. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ .

# Πρόταση 17

## Πρόταση

Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .

## Πρόταση 18

### Πρόταση

Αντίστροφο Μονοτονίας. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε δεν είναι πάντα  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ .

## Πρόταση 19

### Πρόταση

Αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$  και  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε δεν είναι πάντα η  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .

## Πρόταση 20

### Πρόταση

Αντίστροφο Θ. Fermat. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα θέση τ. ακρότατου το  $x_0$ .

## Πρόταση 21

### Πρόταση

Αν η  $f$  έχει θέση τοπ. ακρότατου το  $x_0$  και  $f'(x_0) = 0$ , τότε το  $x_0$  δεν είναι πάντα εσωτερικό σημείο διαστήματος.



## Πρόταση 22

## Πρόταση

Αν το  $x \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$  ή  $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$  και υπάρχει τότε δεν υπάρχει πάντα το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

## Απόδειξη.

Για  $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$  και  $g(x) = \varepsilon\varphi x$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}} = 0$$

αλλά

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right)'}{(\varepsilon\varphi x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon \frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon \nu^2 x \left(2x \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon \frac{1}{x}\right)$$

## Πρόταση 23

### Πρόταση

Αντίστροφο Σ.Κ. Αν η  $f$  είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  δεν είναι πάντα θέση σημείου καμπής.

### Απόδειξη.

Η  $f(x) = x^4$ , έχει  $f'(x_0) = 0$ , αλλά το 0 δεν είναι σημείο καμπής. □

# Πρόταση 24

## Πρόταση

Αντίστροφο Κυρτότητας. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , 2 φορές παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και κυρτή στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε δεν είναι  $f''(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ .

## Απόδειξη.

Η  $f(x) = (x - 2)^4 + x$  είναι κυρτή αλλά έχει  $f''(2) = 0$ . □

# Πρόταση 25

## Πρόταση

Πρόταση 25. Αν  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$ , τότε δεν είναι πάντα γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{x}$  είναι  $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$  για  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  όμως  $f(-1) = 1 > f(1) = -1$



# Πρόταση 26

## Πρόταση

Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, τότε η  $f'$  δεν είναι πάντα συνεχής.

## Απόδειξη.

Η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , με παράγωγο  $f'(x) = \begin{cases} 2x \eta \mu \frac{1}{x} - \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  η οποία δεν είναι συνεχής στο 0. □

## Πρόταση 27

### Πρόταση

Αν η  $f$  δεν είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι «1-1».

### Απόδειξη.

Αν ήταν «1-1» τότε θα ήταν αντιστρέψιμη.



# Πρόταση 28

## Πρόταση

Αν δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ , τότε δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ή το  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

## Απόδειξη.

Αν υπήρχαν και τα δύο, τότε τα υπήρχε και το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ , ΑΤΟΠΟ. □

## Πρόταση 29

### Πρόταση

Αν η  $g \circ f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$  ή η  $g$  δεν είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ .

### Απόδειξη.

Αν η  $f$  ήταν συνεχής στο  $x_0$  και η  $g$  ήταν συνεχής στο  $f(x_0)$  τότε θα ήταν συνεχής και η  $g \circ f$ , ΑΤΟΠΟ. □



## Πρόταση 30

### Πρόταση

Αν η  $f$  δεν έχει ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$   
ή  $f(\alpha) \cdot f(\beta) \geq 0$

### Απόδειξη.

Αν η  $f$  ήταν συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$  τότε η  $f$  έχει ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ , ΑΤΟΠΟ. □

## Πρόταση 31

### Πρόταση

Αν η  $g \circ f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  ή η  $g$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$ .

### Απόδειξη.

Αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $g$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$  τότε θα ήταν παραγωγίσιμη και η  $g \circ f$  στο  $x_0$ , ΑΤΟΠΟ.  $\square$

## Πρόταση 32

### Πρόταση

Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

### Απόδειξη.

Αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $x_0$  τότε θα ήταν και συνεχής στο  $x_0$ ,  
ΑΤΟΠΟ. □

Σας Ευχαριστούμε...