Θέμα Β

Αν $\alpha * \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Αν $\alpha \cdot \beta \neq 0$ τότε $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

A1.

A2.

A3. f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ 1

f παραγωγίσιμη στο (α, β) 1

$f(\alpha) = f(\beta)$ 1

Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = 0$ 1

Σχήμα

A4. Λ Λ Λ Σ Σ

Θέμα Β

B1. Θα πρέπει

$x \in D_h \implies x > 0$ και $h(x) \in D_g \implies x \in \mathbb{R}$

Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι το $x > 0$. 2

Για τον τύπο έχουμε $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \dfrac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \dfrac{4 - x^2}{x}$ monades3

B2. i. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$f'(x) = \underbrace{\dfrac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2}}_{2} = \dfrac{-x^2 - 4}{x^2} \underbrace{< 0}_{1}$ άρα η f είναι φθίνουσα 1

ii. Η f είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα και άρα
$e < \pi \underset{2}{\overset{f\downarrow}{\implies}} f(e) > f(\pi) \implies \dfrac{4 - e^2}{e} > \dfrac{4 - \pi^2}{\pi} \implies \dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e}$ 2

ή

$\dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e} \iff 4e - e\pi^2 - 4\pi + \pi e^2 < 0 \iff 4(e - \pi) + e\pi(e - \pi) < 0 \iff (e - \pi)(4 + e\pi) < 0$

B3. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ 1

Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ 1, άρα κατακόρυφη η $x = 0$ 1

Για πλάγια στο $+\infty$, έχουμε

$\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4 - x^2}{x^2} = -1$ 1 και

$\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ (1)

Άρα η πλάγια στο $+\infty$ είναι η $y = -x$ (1)

ή

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ άρα η y=-x

B4. Ισχύει $-1 \leq \sigma\upsilon\nu(1 + x^2) \leq 1 \implies$ (1)

$-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1 + x^2)}{f(x)} \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$ (1)

Έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4 - x^2} = 0$ (2)

Άρα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1 + x^2)}{f(x)} = 0$ (2)

Θέμα Γ

Γ1. Στο $[2,3]$ έχουμε $f(x)=\frac{1}{x}+1$ (1)

Άρα $\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\,dx=\int_2^3 1+\alpha x\,dx=\left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3=1+\frac{5\alpha}{2}$ (2)

$1+\alpha\frac{5}{2}=1 \implies \alpha=0$ (1)

Γ2. i. $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=-1$ (1)

$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1$ (1)

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο -1 με $f'(1)=-1$ (1)

Συνεπώς ορίζεται η εφαπτόμενη (1)

ii. Η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ (1)

άρα $y-1=-1(x-1) \implies y=-x+2$ (1)

αφού $\lambda=\varepsilon\varphi\omega=-1$ (1) η γωνία θα είναι $\omega=\frac{3\pi}{4}$ (1)

Γ3. για $x<1$, $f'(x)=2x-3$ (1)

για $x>1$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ (1)

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ είναι και συνεχής στο $x=1$ και με $f'(x)<0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και άρα "1-1" (1)

Αφού $D_f=\mathbb{R}$, $f(D_f)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$ (1)

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2-3x+3=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ (1)

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ (1)

Γ4. Η f είναι κυρτή άρα $f(x)>y_\varepsilon$ (1)

η $y=-x+2$ τέμνει την f στο $(1,f(1))=(1,1)$ (1)

η $y=-x+2$ τέμνει τον $x'x$ στο $(2,0)$ (1)

σχήμα (1)

$E=\int_1^2\left(f(x)-y\right)\,dx+\int_2^e f(x)\,dx$

$\int_1^2\left(f(x)-y\right)\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)\,dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\ln 2+2-4-\frac{1}{2}+2=\ln 2-\frac{1}{2}$

$\int_2^e f(x)\,dx=\int_2^e\frac{1}{x}\,dx=[\ln x]_2^e=\ln e-\ln 2$

Άρα $\mathrm{E}=\frac{1}{2}$ (3)

ή

$E=\int_1^e\frac{1}{x}\,dx-\mathrm{E}_\tau=[\ln x]_1^e=\ln e-\ln 1-\frac{1\times 1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (3)

Θέμα Δ

Δ1. Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x) - 2x}{x - 1} \implies f(x) = g(x)(x-1) + 2x$ 2

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = l \cdot 0 + 2 = 2$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + k\right) = -1 + k$ 1

$-1 + k = 2 \implies k = 3$ 1

Δ2. $f'(x) = -\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-x^2 + 2 - x}{x^2(2-x)} = \dfrac{(x+2)(1-x)}{x^2(2-x)}$ 1

Για $0 < x \leq 1$, $f'(x) > 0$ άρα $f((0,1]) = (\lim\limits_{x\to 0} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$

Για $1 \leq x < 2$, $f'(x) < 0$ άρα $f([1,2)) = (\lim\limits_{x\to 2} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$ 1

Το $0 \in (-\infty, 2]$ και σύμφωνα με το θετ, υπάρχουν ρίζες $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,2)$ 1

Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε διάστημα, άρα θα είναι και "1-1" άρα οι ρίζες θα είναι μοναδικές 1

$f(\dfrac{1}{3}) = \ln\dfrac{5}{3} > 0$ 1

Αφού $f(x_1) = 0$ και η $f \uparrow$ θα ισχύει $x_1 < \dfrac{1}{3}$ 1

Δ3. $f''(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2} - \dfrac{2}{x^3}$ 2

άρα $f''(x) < 0$ για $x \in (0,2)$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$ 2

Σύμφωνα με το ΘΜΤ στην f στο $[x_1, \dfrac{1}{3}]$ έχουμε

Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \dfrac{3f(\frac{1}{3})}{1 - 3x_1}$ 2

ή

$f'((0,1]) = [f'(1), \lim\limits_{x\to 0} f'(x)] = [0, +\infty)$ 1

$\dfrac{3f(\frac{1}{3})}{1 - 3x_1} > 0$ 1

άρα με θετ

Δ4. i. F και G αρχικές της f άρα $F(x) = G(x) + c$ 1

για $x = x_1$, $F(x_1) = G(x_1) + c \implies G(x_1) = -c$ 1

για $x = x_2$, $F(x_2) = c$ 1

άρα $F(x_2) + G(x_1) = 0$ 1

ii. Έστω $h(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) + 2x - x_1 - x_2$, $x \in [x_1, x_2]$ 1

Στο (x_1, x_2) η f ως συνεχής διατηρεί πρόσημο, άρα $f(x) > 0$

$F'(x) = G'(x) = f(x) > 0$ άρα G και $F \uparrow$ 1

$h(x_1) = x_2 G(x_1) + (x_1 - x_2)$

$x_1 < x_2 \implies G(x_1) < G(x_2) = 0$

$h(x_1) < 0$ 1

$h(x_2) = x_1 F(x_2) + (x_2 - x_1)$

$x_1 < x_2 \implies 0 = F(x_1) < F(x_2)$

$h(x_2) > 0$ 1

$h(x_1)h(x_2) < 0$, Bolzano

$h'(x) = (x_1 + x_2)f(x) + 2 > 0$

Άρα $h \uparrow$ και άρα και ”1-1”

Άρα μοναδική ρίζα 1