Ήρθε το τέλος!

Θεωρήστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

1. **[Μονάδες 2]** Να δείξετε ότι το 0 δεν είναι ρίζα του.
2. **[Μονάδες 2]** Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 1$ είναι -2.
3. **[Μονάδες 3]** Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^3 + 1$
4. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι αν ένας αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα.
5. **[Μονάδες 2]** Να γράψετε όλες τις πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου.
6. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
7. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 > \frac{2}{x}$.

Θεωρήστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

1. **[Μονάδες 2]** Να δείξετε ότι το 0 δεν είναι ρίζα του.
2. **[Μονάδες 2]** Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 1$ είναι -2.
3. **[Μονάδες 3]** Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^3 + 1$
4. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι αν ένας αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα.
5. **[Μονάδες 2]** Να γράψετε όλες τις πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου.
6. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
7. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 > \frac{2}{x}$.

Λύσεις

1. Έχουμε $P(0) = 2 \neq 0$ άρα δεν είναι ρίζα.
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι το $P(1) = -2$.
3. Με κάθετη διαίρεση προκύπτει $\pi(x) = 2x - 5$ και $\upsilon(x) = 4x^2 - 7x + 7$, άρα
$$P(x) = (2x - 5)(x^3 + 1) + 4x^2 - 7x + 7$$
3. Έχουμε ότι $P(\rho) = 0$ άρα
$$2\rho^4 - 5\rho^3 + 4\rho^2 - 5\rho + 2 = 0 \implies \rho^4(2 - 5\frac{1}{\rho} + 4(\frac{1}{\rho})^2 - 5(\frac{1}{\rho})^3 + 2(\frac{1}{\rho})^4) = 0 \implies \frac{1}{\rho} \text{ ρίζα}$$
5. Είναι όλοι οι διαιρέτες του 2, δηλαδή $\{-2, -1, 1, 2\}$.
6. Η μία προφανής ρίζα είναι το 2. Από το ερώτημα 3 έχουμε ότι είναι και το $\frac{1}{2}$. Με Horner παίρνουμε
$$P(x) = (x - 2)(x - 1/2)(2x^2 + 2)$$
Ο τρίτος όρος δεν μηδενίζει οπότε οι δύο ρίζες είναι και μοναδικές
7. Έχουμε
$$P(x) - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 > \frac{2}{x} \implies x + 1 > \frac{2}{x} \implies \frac{(x-1)(x-2)}{x} > 0$$
Που με πινακάκι έχουμε $x > 2$ ή $0 < x < 1$