

Θέματα

Θέμα Α (7)

- A1. [Μονάδες 6] Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει

$$f'(x) = 1$$

- A2. [Μονάδες 5] Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θεωρήστε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

Π1: "Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, Τότε $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ "

Π2: "Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ "

Π3: "Αν $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ "

Π4: "Αν $f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$."

Π5: "Αν $f^2(x) + g^2(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$."

Να χαρακτηρίσετε καθένα από τους παραπάνω ισχυρισμούς με Α, αν είναι αληθής ή Ψ αν είναι ψευδής.

- A3. [Μονάδες 8] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α') Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n$$

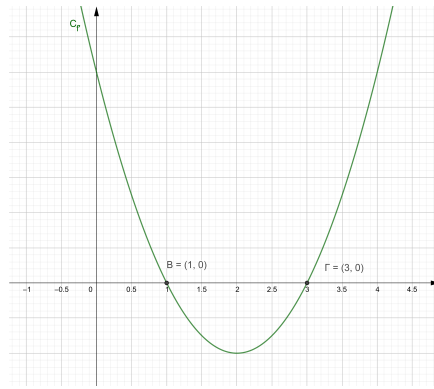
για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(β') Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f , δύο φορές παραγωγίσιμης, τότε $f''(x) = 0$.

(γ') Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(δ') Ο κύκλος αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

- A4. [Μονάδες 6] Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι άρτια, τότε να αποδείξετε ότι η f' είναι περιττή (Μονάδες 4). Να δώσετε ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης (Μονάδες 2).



Θέμα Β (36)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f' .

- B1. [Μονάδες 5] Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και κυρτότητας για τη συνάρτηση f καθώς επίσης τις θέσεις, το είδος των τοπικών ακροτάτων της και τη θέση που η f έχει καμπή.

Αν η f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού και τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη -2 , να δείξετε ότι:

B2. [Μονάδες 7] $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

- B3. i. [Μονάδες 3] η f παρουσιάζει δύο ακρότατα και ένα σημείο καμπής από τα οποία τα δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.
ii. [Μονάδες 5] Η ευθεία $y = -3x + 6$ "διαπερνά" την C_f

B4. [Μονάδες 5] $2f(2021) < f(2020) + f(2022)$.

Θέμα Γ (24)

Δίνεται η μοναδιαίος κύκλος κέντρου O όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$ και η γωνία $\widehat{AOM} = \theta \text{ rad}$ με $\theta \in (-\pi, \pi)$ όπου M σημείο του κύκλου. Έστω $B(-1, 0)$ και BM τέμνει την (ε) στο σημείο $N(1, y)$.

Γ1. [Μονάδες 9] Να δείξετε ότι $y = \frac{2\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = y(\theta)$.

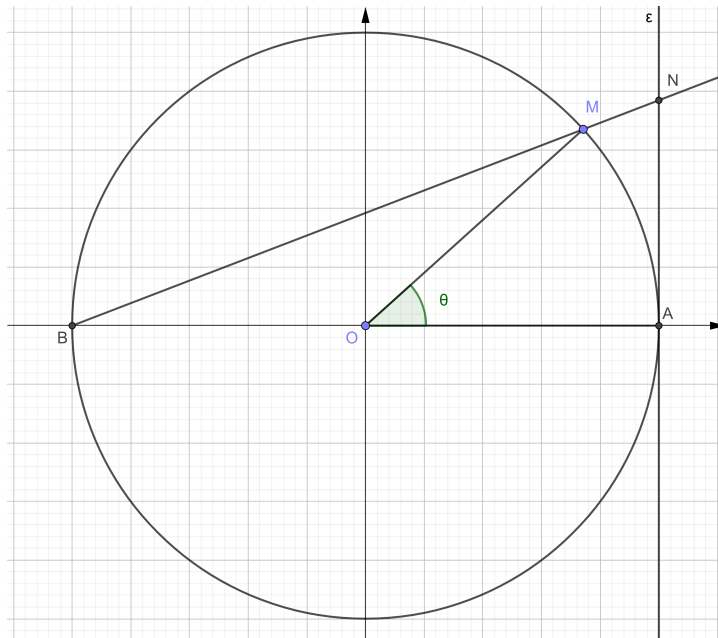
Γ2. [Μονάδες 8] Να βρείτε το

i. [Μονάδες 2] $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{y(\theta)}{\theta}$

ii. [Μονάδες 6] Να βρείτε το $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} y(\theta)$ και $\lim_{\theta \rightarrow \pi^+} y(\theta)$ χρησιμοποιώντας αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $\theta = \pi + u$ και $\theta = u - \pi$ αντίστοιχα.

Γ3. [Μονάδες 6] Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση y είναι περιττή και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία της.

Γ4. [Μονάδες 2] Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(0, y(0))$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.



Θέμα Δ (24)

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty)$ που είναι γνήσια μονότονη, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 1$$

και

$$\frac{f(x) + e^x}{x} \leq e^x \text{ για κάθε } x > 0$$

- Δ1. [Μονάδες 6] Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$ και ότι είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
- Δ2. [Μονάδες 6] Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = ex - e$.
Ισχύει επιπλέον ότι $x^2 f''(x) + e^x = x^2 f'(x) + xe^x$ για κάθε $x > 0$.
- Δ3. [Μονάδες 8] Να δειχθεί ότι η $f(x) = e^x \ln x$, $x > 0$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- Δ4. [Μονάδες 5] Αν η εφαπτόμενη της f στο $A(1, f(1))$ και η C_f έχουν και άλλο κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ α δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, 1)$ ώστε να ισχύει $f(\xi) + \frac{e^\xi}{\xi} = e$.