Πανελλήνιες Μαθηματικά Γ Λυκείου 2017 Λύσεις

Θέμα Β

B1. Θα πρέπει $x \in A_g$ και $g(x) \in A_f$, δηλαδή $x \neq 1$ και $\frac{x}{1-x} > 0$, για το οποίο έχουμε $x \in (0,1)$. Άρα $(f \circ g)(x) = \ln(\frac{x}{1-x})$, $x \in (0,1)$.

B2. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{x(1-x)} > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς $1-1$. Άρα αντιστρέφεται με αντίστροφη:

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \implies e^y = \frac{x}{1-x} \implies x(1+e^y) = e^y \implies h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

Για το πεδίο ορισμού έχουμε από το σύνολο τιμών της h,

$$h(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = \mathbb{R}$$

συνεπώς

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, x \in \mathbb{R}$$

B3. Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = \dfrac{1}{(1+e^x)^2} > 0$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς δεν έχει ακρότατα. Επίσης $\varphi''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$, με $\varphi(x) < 0$ όταν $x > 0$ και $\varphi(x) > 0$ όταν $x < 0$. Έτσι η φ είναι κυρτή για $x < 0$, κοίλη για $x > 0$ και έχει σημείο καμπής το $(0, \varphi(0)) = (0, \frac{1}{2})$

B4. Για να βρούμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, έχουμε για το $-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0 \implies y = 0$$

ενώ για το $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \implies y = 1$$

Η γραφική της παράσταση λοιπόν είναι η

Θέμα Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της γραφικής της C_f στο σημείο $x = x_0$ είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Έχουμε $f(x_0) = -\eta\mu x_0$ και $f'(x_0) = -\sigma\upsilon\nu x_0$. Έτσι

$$y + \eta\mu x_0 = -(x - x_0)\sigma\upsilon\nu x_0$$

Η εφαπτομένη περνάει από το σημείο Α άρα επαληθεύει την εξίσωση, έτσι

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -(\frac{\pi}{2} - x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 \implies -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + (\frac{\pi}{2} - x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

Προφανείς ρίζες είναι οι $x = 0$ και $x = \pi$. Θεωρούμε ότι υπάρχει και τρίτη ρίζα στο $(0, \pi)$. Τότε η συνάρτηση

$$h(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + (\frac{\pi}{2} - x)\sigma\upsilon\nu x$$

θα έχει σύμφωνα με το θεώρημα Rolle 2 ρίζες στην παράγωγό της στο διάστημα $(0, \pi)$. Αλλά

$$h'(x) = (x - \frac{\pi}{2})\eta\mu x$$

η οποία έχει μοναδική ρίζα στο εν λόγω διάστημα, κάτι το οποίο είναι άτοπο. Έτσι οι δύο προηγούμενες ρίζες είναι και μοναδικές. Για $x = 0$ η εφαπτόμενη είναι η $y = -x$ και για $x = \pi$ η εφαπτόμενη είναι η $y = x - \pi$.

Γ2. Το εμβαδό E_2 είναι ίσο με

$$\int_0^\pi -f(x)dx = \int_0 \pi\eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = 2$$

Το εμβαδό E_2 μπορεί να βρεθεί με την αφαίρεση του εμβαδού του τριγώνου με κορυφές τα $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ και $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ με το εμβαδό E_1, το οποίο ισούται με $E_2 = \frac{\pi\frac{\pi}{2}}{2} - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$. Έτσι

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. Από την γραφική παράσταση έχουμε ότι $f(x) \geq y_{\varepsilon_2} \implies f(x) - x + \pi \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ άρα

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

Γ4. Και πάλι από την γραφική παράσταση, αφού $f(x) > x - \pi$ για κάθε $x \in [1, \pi]$, συνεπώς $\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$. Έτσι

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e 1 - \frac{\pi}{x}dx = [x - \pi \ln x]_1^\pi = e - 1 - \pi$$

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση σε κάθε της κλάδο είναι συνεχής. Για το σημείο που αλλάζει τύπο έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής.

- σημείο που μηδενίζει η παράγωγος:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\left(-x\right)^{\frac{1}{3}}, & x \in [-1, 0) \\ e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Έτσι και μόνο για τον δεύτερο κλάδο, αφού ο πρώτος μηδενίζει μόνο στο $x = 0$, έχουμε

$$e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \implies x = \frac{3\pi}{4}$$

- σημεία που δεν ορίζεται η παράγωγος:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}} - 0}{x - 0} = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x\eta\mu x - 0}{x - 0} = 1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0$ και $x = \frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Με πίνακα προσήμων για την $f'(x)$ έχουμε

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα για $x \in (0, \frac{3\pi}{4})$ και γνησίως φθίνουσα για $x \in (-1, 0) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$. Για κάθε ένα από τα διαστήματα βρίσκουμε το σύνολο τιμών και έχουμε

$$\begin{aligned}(f(0), f(-1)) \cup \left(f(0), f(\frac{3\pi}{4})\right) \cup \left(f(\pi), f(\frac{3\pi}{4})\right) = \\ (0,1) \cup \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

Αλλά

$$e^{\frac{3\pi}{4}} > 2 \implies \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} > 1$$

άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Δ3. Έχουμε ότι $e^x \eta\mu x < e^x < e^{5x}$ άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$E = \int_0^\pi e^{5x} - e^x \eta\mu x dx = \left[\frac{e^{5x}}{5} - \frac{1}{2}e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\right]_0^\pi = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Δ4. Με πολλαπλασιασμό έχουμε

$$f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 = e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \implies f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2$$

Αφού το μέγιστο της συνάρτησης f είναι το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, η προηγούμενη εξίσωση ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$