Εισηγητής: Λόλας Κωνσταντίνος
Επαναληπτικό: Όρια - Συνέχεια

Θεσσαλονίκη, 13 / 12 / 2017

Διαγώνισμα Κατεύθυνση Γ Λυκείου

Θέμα Α

1. **[Μονάδες 10]** Αν $P(x)$ είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι
$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

2. **[Μονάδες 3/10]** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

3. **[Μονάδες 10]** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος
   α) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμενει τη γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.
   β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ g$ είναι συνεχής στο ίδιο σημείο.
   γ) Το σύνολο τιμών ενός κλειστού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντοτε κλειστό διάστημα.
   δ) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
   ε) Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, τότε υποχρεωτικά υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Θέμα Β

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε
$$f(2) = 1, \lim_{x \to 0^-} f(\frac{1}{x}) = 4 \text{ και } \lim_{x \to +\infty} \frac{xf(x)}{3x - 1} = 2.$$
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [2, +\infty)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. **[Μονάδες 11]** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 2$.

2. **[Μονάδες 11]** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

3. **[Μονάδες 11]** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

4. **[Μονάδες 11]** Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = f(x)$.

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f((-1, +\infty)) = \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και τέτοια ώστε
$$f(x) \leq x \text{ για κάθε } x > -1$$
και
$$f^{-1}(x) \leq e^x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
Να αποδείξετε ότι

1. **[Μονάδες 8]** η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} βρίσκεται "πάνω" από την ευθεία με $y = x$.

2. **[Μονάδες 8]** $f(x) \geq \ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$.

3. **[Μονάδες 9]** $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f^{-1}(x) = 0$.

4. **[Μονάδες 9]** Αν οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς, τότε υπάρχει αριθμός $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιος ώστε

$$(x_0 - 1)f^{-1}(x_0) + (2 - x_0)f(x_0) = x_0^2 - 2x_0 + 2$$

.

Θέμα Δ

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$g(x) = f\left(f(x)\right) + e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

1. **[Μονάδες 8]** η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα

2. **[Μονάδες 8]** η συνάρτηση f είναι συνεχής

3. **[Μονάδες 9]** αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

τότε

α) **[Μονάδες 8]** $g(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) **[Μονάδες 8]** Η εξίσωση

$$x^3 g\left(2x^4\right) + x^4 g\left(x^2\right) + x^2 f\left(x^2 - 1\right) = 1$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Καλή επιτυχία