Θέμα Α

1. **[Μονάδες 12]** Να αποδείξετε τις εξής ταυτότητες:

   (i). $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ (ii). $\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

   Από βιβλίο

2. **[Μονάδες 3]** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική;

   Θεωρία

3. **[Μονάδες 10]** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος

   α) *Λάθος* / Οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετο συνημίτονο
   β) *Σωστό* / $\varepsilon\varphi(2k\pi+\omega) = \varepsilon\varphi\omega$, $k \in \mathbb{Z}$
   γ) *Σωστό* / Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π
   δ) *Λάθος* / Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\omega$ έχει μία λύση
   ε) *Σωστό* / Η συνάρτηση $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho > 0, \omega > 0$ έχει μέγιστη τιμή το ρ, ελάχιστη τιμή το $-\rho$ και περίοδο $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$

Θέμα Β

Έστω γωνία $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\eta\mu(\pi-\omega) + \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\omega) = \frac{6}{5}$$

1. **[Μονάδες 7]** Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$

   Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο:

   $\eta\mu(\omega) + \eta\mu(\omega) = \frac{6}{5} \implies 2\eta\mu(\omega) = \frac{6}{5} \implies \eta\mu(\omega) = \frac{3}{5}$

2. **[Μονάδες 6]** Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

   Ταυτότητες:

   $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \implies \frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \implies \sigma\upsilon\nu\omega = \pm\frac{4}{5}$. Η γωνία είναι στο 2ο τεταρτημόριο άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$

   $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = -\frac{3}{4}$

   $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = -\frac{4}{3}$

3. **[Μονάδες 6]** Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{15\pi}{2} + \omega$

   Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο:

   $\frac{15\pi}{2} + \omega = \frac{16\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \omega = 8\pi - \frac{\pi}{2} + \omega$

   $\eta\mu(\frac{15\pi}{2}+\omega) = \eta\mu(8\pi - \frac{\pi}{2} + \omega) = \eta\mu(-\frac{\pi}{2}+\omega) = -\eta\mu(\frac{\pi}{2}-\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

   $\sigma\upsilon\nu(\frac{15\pi}{2}+\omega) = \sigma\upsilon\nu(8\pi - \frac{\pi}{2} + \omega) = \sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{2}+\omega) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\omega) = \eta\mu\omega$

   $\varepsilon\varphi(\frac{15\pi}{2}+\omega) = -\sigma\varphi\omega$

   $\sigma\varphi(\frac{15\pi}{2}+\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

4. **[Μονάδες 6]** Να αποδείξετε ότι $\frac{3\pi}{4} < \omega < \frac{5\pi}{6}$

   Μονοτονία $\eta\mu x$:

   $\eta\mu\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   $\eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{6}) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

   Και στο 2ο τεταρτημόριο η $\eta\mu x$ είναι φθίνουσα. Αρκεί να δείξω ότι $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\frac{1}{4} < \frac{9}{25} < \frac{1}{2}$ ή $\frac{25}{100} < \frac{36}{100} < \frac{50}{100}$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 2$, $x \in (0, 2\pi)$.

1. **[Μονάδες 8]** Να λύσετε τις εξισώσεις

   (i). $f(x) = 2$
   Τριγωνομετρικές Εξισώσεις:
   $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2 \implies 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x = 0 \implies 4\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \implies \sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x = 1$. Στο 1ο κύκλο σημαίνει ότι $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$ ή $x = 0$. Από αυτά μόνο τα $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$ δεχόμαστε αφού $x \in (0, 2\pi)$

   (ii). $f(x) = 1$
   $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 2 = 1 \implies 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \implies (2\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 = 0 \implies \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$. Στο 1ο κύκλο σημαίνει ότι $x = \frac{\pi}{3}$ ή $x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$.

2. **[Μονάδες 9]** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f

   i. είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T} = 2\pi$
   Περίοδος:
   $f(x + 2\pi) = 4\sigma\upsilon\nu^2(x + 2\pi) - 4\sigma\upsilon\nu(x + 2\pi) + 2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 2 = f(x)$

   ii. είναι άρτια
   Άρτιες περιττές:
   $f(-x) = 4\sigma\upsilon\nu^2(-x) - 4\sigma\upsilon\nu(-x) + 2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 2 = f(x)$

   iii. δεν είναι γνησίως μονότονη
   Μονοτονία:
   Παρατηρώ ότι $f(\pi/2) = 2 = f(3\pi/2)$ άρα δεν μπορεί να είναι μονότονη

3. **[Μονάδες 8]** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ και στη συνέχεια να βρείτε τα x για τα οποία η f παρουσιάζει ελάχιστο

   Μέγιστα - Ελάχιστα:

   Θα δείξω ότι $f(x) \geq 1$. Έχουμε $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 + 1 = (2\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 + 1 \geq 1$. Η ισότητα ισχύει για $x = \frac{1}{2}$ που έχει λυθεί πιο πριν

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + \kappa$, όπου $\rho > 0$, $\omega > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

- έχει περίοδο $\mathrm{T} = \pi$

  Περίοδος τριγωνομετρικής:

  $\omega = 2\pi/\mathrm{T} \implies \omega = 2\pi/\pi = 2$

- έχει ελάχιστη τιμή το 1

  Μέγιστο ελάχιστο τριγωνομετρικής:

  $-1 \leq \eta\mu(\omega x) \leq 1 \implies \kappa - \rho \leq \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + \kappa \leq \kappa + \rho$. Άρα $\kappa - \rho = 1$. Από το επόμενο βρήκα $\kappa = 2$ άρα $\rho = 1$

- και η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2

  Σημείο συνάρτησης:

  $f(0) = 2 \implies \eta\mu 0 + \kappa = 2 \implies \kappa = 2$

1. **[Μονάδες 6]** να υπολογίσετε τα ρ, ω και κ

   Αν $\rho = 1$, $\omega = \kappa = 2$, τότε

2. **[Μονάδες 4]** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, \pi]$

   Γραφική παράσταση:

   Από $\eta\mu\omega$, η περίοδος είναι π άρα προσαρμογή στον $x'x$ και μεταφορά 2 επάνω.

3. **[Μονάδες 8]** Αν η ευθεία $y = \frac{5}{2}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, \pi]$ στα σημεία Κ και Λ, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο η αρχή των αξόνων

   Άξονες, τρίγωνα, αποστάσεις:

   $f(x) = \frac{5}{2} \implies \eta\mu(2x) = \frac{1}{2} \implies 2x = \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{5\pi}{6}$. Το εμβαδό του τριγώνου είναι $\frac{\beta\upsilon}{2} = \frac{(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{20\pi}{24}$. Για το εμβαδό εργαζόμαστε ανάλογα, υπολογίζοντας με Πυθ. Θεώρ. τις 2 πλευρές.

4. **[Μονάδες 7]** Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) = f(3x)$ στο διάστημα $[0, \pi]$

   Τριγωνομετρικές εξισώσεις:

   $\eta\mu(4x) + 2 = \eta\mu(6x) + 2 \implies 6x = 2k\pi + 4x$ ή $6x = 2k\pi + \pi - 4x$.

   $2x = 2k\pi \implies x = \kappa\pi$ που στο $[0, \pi]$ έχει λύση μόνο τις $x = 0$ και $x = \pi$

   ή

   $10x = 2k\pi + \pi \implies x = \frac{2k+1}{10}\pi$. Αλλά στο $[0, \pi]$ έχουμε μόνο τις $\frac{\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{5\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{9\pi}{10}$