

Θέματα για ομορφόπαιδα

Δίνεται η σχέση

$$x^2 + y^2 + \lambda(x - y + 2) = 2, x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ ανήκει στην παραπάνω σχέση
2. Αν το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην παραπάνω σχέση
 - (α') Να δείξετε ότι $\lambda = 0$.
 - (β') Να γράψετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
 - (γ') Να βρείτε την εφαπτόμενη του κύκλου στο A .
 - (δ') Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 3$ είναι εξωτερική του κύκλου και να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη απόστασή της από τα σημεία του κύκλου.
3. Να βρείτε τις τιμές των λ ώστε να παριστάνει κύκλο
4. Για $\lambda \neq 2$
 - (α') Να βρείτε τα κέντρα των κύκλων και τις ακτίνες ως συνάρτηση του λ .
 - (β') Να δείξετε ότι τα κέντρα ανήκουν σε ευθεία την οποία και να βρείτε
 - (γ') Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από σταθερά σημεία
 - (δ') Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους
 - (ε') Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους

Λύσεις

1. Για $\lambda = 0$ προκύπτει το ζητούμενο

2. Αντικαθιστώντας το σημείο έχουμε

$$(\alpha') \quad 0 + 1 + \lambda(0 - 1 + 2) = 2 \implies \lambda = 1$$

(β') Έχει κέντρο το $(-1/2, 1/2)$ και ακτίνα 1

$$(\gamma') \quad \lambda_{KA} = 1 \implies \lambda = -1. \text{ Η εφαπτομένη είναι } y - 1 = -(x - 0)$$

(δ') Η απόσταση της ευθείας από το κέντρο είναι $d = \frac{|1/2 - 1/2 + 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > \rho$ άρα εξωτερική. Η μέγιστη απόσταση είναι $\rho + d$ και η ελάχιστη $d - \rho$

3. Θα πρέπει $\rho > 0 \implies \lambda \neq 2$

4. Για $\lambda \neq 2$

$$(\alpha') \quad K(-\lambda/2, \lambda/2) \text{ και } \rho = \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{2}}.$$

(β') $x = -\lambda/2$ και $y = \lambda/2$, άρα η ευθεία είναι η $y = -x$

(γ') Λύνοντας το σύστημα $x^2 + y^2 = 2$ και $x - y + 2 = 0$ βρίσκουμε το σημείο $(-1, 1)$

(δ') Η απόσταση της ευθείας από το κέντρο K είναι ίση με την ακτίνα.

(ε') Όλοι οι κύκλοι εφάπτονται στην ίδια ευθεία, άρα εφάπτονται και μεταξύ τους.