Θέμα Α

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$.

1. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή $f(x) = e^x - \frac{2}{x-1} - 1$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.

   Με πράξεις έχουμε

   $$f(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1} = f(x) = e^x - \frac{x-1+2}{x-1} = e^x - \frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{x-1} = e^x - \frac{2}{x-1} - 1$$

   .

   Επίσης έστω $x_1 < x_2$. Έτσι $e^{x_1} < e^{x_2}$, $-\frac{2}{x_1-1} < -\frac{2}{x_1-1}$ μιας και η $\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα και με πρόσθεση κατά μέλη

   $$e^{x_1} - \frac{2}{x_1 - 1} - 1 < e^{x_2} - \frac{2}{x_2 - 1} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

   Ως γνησίως αύξουσα είναι και 1-1, με πεδίο ορισμού της αντίστροφης να είναι το σύνολο τιμών της f. Η f ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ θα έχει σύνολο τιμών το $(\lim_{x\to 1} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty, \infty)$

3. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μία ακριβώς ρίζα x_0 στο διάστημα $(1, 2)$.

   Δείξαμε ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ άρα υπάρχει a κοντά στο 0 με $f(a) < 0$. Επειδή $f(2) = e^2 - 3 > 0$, με Bolzano στο $[a, 2]$ έχουμε ότι υπάρχει ρίζα και στο $(1, 2)$.

4. **[Μονάδες 7]** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{x+1}{x-1}$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

   Μόλις δείξαμε ότι υπάρχει ρίζα στο $(1, 2)$ για την $f(x)$ έστω την x_0. Δηλαδή ισχύει $\frac{1}{e^{x_0}} = \frac{x_0-1}{x_0+1}$. Θα δείξουμε ότι και η $-x_0$ είναι ρίζα της. Έχουμε

   $$f(-x_0) = e^{-x_0} - \frac{-x_0 + 1}{-x_0 - 1} = \frac{1}{e^{x_0}} - \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} = 0$$

Θέμα Β

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση.

1. **[Μονάδες 6]** Αν $1 < f(x) < e$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

   Με Bolzano στην $g(x) = f(x) - e^x$ στο $[0, 1]$. Έχουμε g συνεχής στο κλειστό ως πράξεις συνεχών. $g(0) = f(0) - 1 > 0$ και $g(1) = f(1) - e < 0$.

2. **[Μονάδες 6]** Αν $f(0) > 1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x + x\eta\mu\frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

   Με Bolzano στην $h(x) = f(x) - e^x - x\eta\mu\frac{1}{x}$ στο $[a, b]$ όπου a κοντά στο 0 και b αρκετά μεγάλο. Μένει να υπολογίσουμε τα όρια στο 0 και στο $+\infty$ της g. Έχουμε

   $$\lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$$

   αφού

   $$-1 \leq \eta\mu\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x\eta\mu\frac{1}{x} \leq x$$

για $x > 0$. Και τα δύο πλευρικά όρια τείνουν στο 0. Τώρα για το όριο $\lim_{x\to 0} g(x) = f(0) - 1 - 0 > 0$. Έτσι υπάρχει a κοντά στο 0 με $f(a) > 0$. Ομοίως για το όριο στο $+\infty$ και γνωρίζοντας ότι με αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y} = 1$$

Έτσι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty - \infty - 1 = -\infty$. Άρα υπάρχει b αρκετά μεγάλο ώστε $f(b) < 0$ Έτσι στο (a, b) υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα.

3. **[Μονάδες 6]** Αν $f(a) + f(3a) = 4a$, $a > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)-a}{x-3a} = \frac{f(x)-3a}{x-a}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(a, 3a)$.

4. **[Μονάδες 7]** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g : [1, 3] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$, ώστε
$$g(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$$

Θέμα Γ

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0) = 1$, $f(x) \neq x$ και $\frac{f(x)-x}{e^x} + \frac{e^x}{x-f(x)} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \leq 0 \\ k - 2x - ln(x+1) & , x > 0 \end{cases}$

1. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή του k.

2. **[Μονάδες 6]** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g και να δείξετε ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες.

3. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{g(a)-1}{x-1} + \frac{g(\beta)-1}{x-2} = 2019$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, για κάθε $a, \beta \neq 0$.

4. **[Μονάδες 7]** Αν x_1, x_2 οι ρίζες του ερωτήματος Γ2 με $x_1 < x_2$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$$x + g(x) = \eta\mu x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).