

Πανελλήνιες Μαθηματικά Γ Λυκείου 2017

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$,

- B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
- B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.
- Γ2. Αν $(\varepsilon_1) : y = -x$ και $(\varepsilon_2) : y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:
- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) , (ε_2) , και
 - E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

- Γ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$$

- Γ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

- Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.
- Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$.
- Δ4. Να λύσετε την εξίσωση

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$$