

# Διαγώνισμα Κατεύθυνση Γ Λυκείου

## Θέμα Α

1. **[Μονάδες 8]** Έστω μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) ελάχιστο το  $f(x_0)$ ;
2. **[Μονάδες 8]** Πότε μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται 1-1;
3. **[Μονάδες 9]** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα σύνολα  $A, B$  αντιστοίχως, τι ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με την  $g$  και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

1. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι  $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$ .
2. **[Μονάδες 6]** Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.
3. **[Μονάδες 6]** Να λύσετε την ανίσωση  $e^{-x} > x + 1$ .
4. **[Μονάδες 7]** Να λύσετε την εξίσωση  $(x^2 + 1)e^{x^2} = 1$ .

## Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

1. **[Μονάδες 6]** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και να εξετάσετε, αν η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .
2. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1.
3. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και να την βρείτε.
4. **[Μονάδες 7]** Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}\left(\frac{1}{1-e} + 2 - f(\ln x)\right) = -1$$

## Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(x^2 + 1), x \geq 0$ .

1. **[Μονάδες 6]** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[0, +\infty)$  και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$ .
2. **[Μονάδες 6]** Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln(x^4 + 1) > \ln(2e) - x^2$$

3. **[Μονάδες 6]** Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση στο διάστημα  $[-\frac{4}{3}, +\infty)$

$$x^2 - 3x - 4 = \ln \frac{(3x + 4)^2 + 1}{x^4 + 1}$$

4. **[Μονάδες 7]** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ , αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $[0, +\infty)$  και ότι τέμνονται μόνο στη  $y = x$ .

**Καλή επιτυχία**