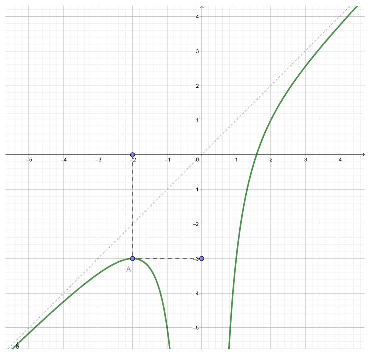

Πανελλήνιες Μαθηματικά Γ Λυκείου 2018 Λύσεις

Θέμα Β

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R} - 0$. Η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$$

Για $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$. Έτσι η συνάρτηση είναι για $x < -2$ γνήσια αύξουσα, για $-2 < x < 0$ γνήσια φθίνουσα και για $x > 0$ γνήσια φθίνουσα. Το μοναδικό τοπικό ακρότατο λοιπόν είναι στο $x = -2$ με $f(-2) = -3$

B2. Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι $f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι κοίλη για $x < 0$ και επίσης κοίλη για $x > 0$. Συνεπώς δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

B3. Για κατακόρυφη ασύμπτωτη έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ άρα παρουσιάζεται κατακόρυφη η $x = 0$. Για την πλάγια στο $+\infty$, έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{fx}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{4}{x^3} = 1$$

και

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = -\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

άρα η πλάγια στο $+\infty$ είναι η $y = x$. Όμοια για το $-\infty$, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{fx}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{4}{x^3} = 1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = -\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

άρα η πλάγια στο $-\infty$ είναι η $y = x$.

B4. Ο πίνακας μελέτης της συνάρτησης λοιπόν είναι ο:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$\varphi''(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

Η γραφική της παράσταση είναι η

Θέμα Γ

Γ1. Έστω x το τμήμα για το τετράγωνο. Τότε η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\frac{x}{4}$ συνεπώς το εμβαδό του θα είναι $\frac{x^2}{16}$. Το υπόλοιπο τμήμα $8-x$ θα είναι η περίμετρος του κύκλου. Άρα $8-x = 2\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$. Συνεπώς το εμβαδό του κύκλου θα είναι $\pi\rho^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$. Συνολικά το εμβαδό του σχήματος θα είναι

$$\mathrm{E} = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \cdots = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$$

Γ2. Η συνέρτηση $\mathrm{E}(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $\mathrm{E}'(x) = \frac{2(\pi+4)x-64x}{16\pi}$. Έτσι είναι φθίνουσα για $x < \frac{32}{\pi+4}$ είναι αύξουσα για $x > \frac{32}{\pi+4}$. Στο $x = \frac{32}{\pi+4}$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ3. Για να λυθεί η εξίσωση $E(x) = 5$ αρκεί να μελετήσουμε το σύνολο τιμών της $E(x)$. Παρατηρούμε ότι $E(0) = \frac{16}{\pi} > 5$ και $E(8) = 4 < 5$. Άρα στο πρώτο διάστημα $0 < x < \frac{16}{\pi}$ υπάρχει μοναδικό x_0 ώστε $f(x_0) = 5$ ενώ για $\frac{16}{\pi} < 8 < 8$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γ3. Β Λύση Θα λυθεί η εξίσωση

$$\begin{aligned} E(x) = 5 \Rightarrow (\pi+4)x^2 - 64x + 256 - 80\pi = 0 \\ \Delta = 4096 - 4(\pi+4)(256-80\pi) = 256\pi + 320\pi^2 \\ x_{1,2} = \frac{64 \pm \sqrt{256\pi + 320\pi^2}}{2(\pi+4)} = \frac{4(8 \pm \sqrt{5\pi^2+4\pi})}{\pi+4} \end{aligned}$$

Θα πρέπει να βρούμε τις λύσεις που $0 < x < 8$. έχουμε

$$\begin{aligned} 3.1 < \pi < 3.2 \\ 60,45 < 5\pi^2 + 4\pi < 64 \\ 7.1 < \pi + 4 < 7.2 \end{aligned}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2(e^{x-\alpha} - x)$. Επίσης $f''(x) = 2(e^{x-\alpha} - 1)$. Για $x = \alpha$ η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται και για $x < \alpha$ είναι $f''(x) < 0$ άρα f κοίλη και για $x > \alpha$ έχουμε $f''(x) > 0$ άρα f κυρτή. Το μοναδικό σημείο καμπής είναι στο $x = \alpha$ το $(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, 2-\alpha^2)$.

Δ2. Μπορούμε να μελετήσουμε την $f'(x)$. Χάρις την δεύτερη παράγωγο έχουμε ότι $f'(x)$ είναι φθίνουσα για $x < \alpha$ και αύξουσα για $x > \alpha$. Το σύνολο τιμών της είναι το

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f'(x), f'(\alpha)\right] \cup \left[f'(\alpha), \lim_{x\to-\infty} f'(x)\right)$$

Έχουμε $f'(\alpha) = 1 - \alpha < 0$. Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{2(e^{x-\alpha})}{x^2} - 1\right) = \cdots = +\infty$$

Με βάση τα προηγούμενα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, \alpha)$ ώστε $f'(x_1) = 0$ που για $x < x_1$ εχουμε $f'(x) > 0$ και για $x_1 < x < \alpha$ έχουμε $f'(x) < 0$. Συνεπώς στο x_1 έχουμε μέγιστο. Όμοια, υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \infty)$ ώστε $f'(x_2) = 0$ που για $x > x_2$ εχουμε $f'(x) > 0$ και για $\alpha < x < x_2$ έχουμε $f'(x) < 0$. Συνεπώς στο x_2 έχουμε ελάχιστο.

Δ3. Έστω ότι $f(x) = f(1)$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[1, x]$, $x < x_2$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ με $f(x) = f(1)$ θα υπάρχει $\xi \in (1, x) < (\alpha, x_2)$ ώστε $f'(\xi)$, με $\xi \neq x_1$, και $\xi \neq x_2$. Στο Δ2 δείξαμε ότι τα x_1 και x_2 είναι τα μοναδικά σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος, άρα δεν θα υπάρχει και τρίτο. Οδηγούμαστε λοιπόν σε Άτοπο, συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτόμενης της f στο $x = \alpha = 2$ είναι η

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y + 2 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Επειδή για $x > \alpha = 2$ η συνάρτηση είναι κυρτή, θα ισχύει $f(x) > y$ για $x > 2$, συνεπώς

$$f(x) > (-2x+2) \Rightarrow f(x)\sqrt{x-2} > (-2x+2)\sqrt{x-2}$$

και άρα

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = \cdots = -\frac{32}{15}$$