

Διαγώνισμα Κατεύθυνση Γ Λυκείου

Θέμα Α

1. **[Μονάδες 12]** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
2. **[Μονάδες 13]** Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$;
3. **[Μονάδες 12]** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa - e^{2-x} + x$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

1. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
2. **[Μονάδες 6]** Αν $f^{-1}(2) = 0$, να βρείτε την τιμή του κ .
Για $\kappa = 2 + e^2$,
3. **[Μονάδες 6]** Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφική παράστασης της συνάρτησης f^{-1} με την ευθεία $y = x$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και ότι η f και η f^{-1} έχουν κοινά σημεία μόνο στην $y = x$.
4. **[Μονάδες 7]** Να λύσετε την ανίσωση $e^{2-x} < x + e^2$.

Θέμα Γ

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1.

1. **[Μονάδες 7]** Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
2. **[Μονάδες 9]** Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x) + x^3 + x) = g(f(x) - \ln x + 2)$.
3. **[Μονάδες 9]** Αν $g(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, να δείξετε ότι η εξίσωση $ae^{g(x)} = 1$, έχει μοναδική λύση για κάθε $a \in (0, 1)$.

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

1. **[Μονάδες 5]** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
2. **[Μονάδες 6]** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $(1, +\infty)$
3. **[Μονάδες 6]** Για κάθε $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^\alpha < \beta^\beta$$

4. **[Μονάδες 8]** Να λύσετε την εξίσωση $\frac{(x^4+2)^{x^4+2}}{(x^2+4)^{x^2+4}} = 1$.

Καλή επιτυχία