Εισηγητής: Λόλας Κωνσταντίνος
Επαναληπτικό: Όρια - Συνέχεια

Θεσσαλονίκη, 13 / 12 / 2017

Λύσεις

Θέμα Α

1. **[Μονάδες 10]** Απόδειξη από βιβλίο.
2. **[Μονάδες 3/10]** Ορισμός βιβλίου.
3. **[Μονάδες 10]** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος
   α) Σ Κάθε οριζόντια ευθεία τέμενει τη γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.
   β) Λ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο ίδιο σημείο.
   γ) Σ Το σύνολο τιμών ενός κλειστού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντοτε κλειστό διάστημα.
   δ) Σ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
   ε) Λ Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$, τότε υποχρεωτικά υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Θέμα Β

1. **[Μονάδες 11]** Θα δείξουμε ότι $\frac{4x}{x^2+4} \leq f(2)$.
$$4x \leq x^2 + 4 \iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x-2)^2 \geq 0$$
2. **[Μονάδες 11]** Από τα δεδομένα έχουμε $\lim_{y\to -infty} f(y) = 4$ και θέτοντας
$$h(x) = \frac{xf(x)}{3x-1} \iff f(x) = h(x)(3 - \frac{1}{x}) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 6$$
   Το σύνολο τιμών είναι το
$$\left[f(2), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) \cup \left[f(2), \lim_{x\to\infty} f(x)\right) = [1,4) \cup [1,6)$$
3. **[Μονάδες 11]** Από το σύνολο τιμών για $1 < a \leq 4$ έχουμε δύο ρίζες, για $4 < a < 6$ έχουμε μία ρίζα όπως και για $a = 1$ και παντού αλλού καμία.
4. **[Μονάδες 11]** Εφόσον $f(x) \geq 1$ και $g(x) \leq 1$ όπως και $f(2) = g(2) = 1$ τότε το $x = 2$ είναι μοναδική λύση

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f((-1, +\infty)) = \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και τέτοια ώστε
$$f(x) \leq x \text{ για κάθε } x > -1$$
και
$$f^{-1}(x) \leq e^x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
Να αποδείξετε ότι

1. **[Μονάδες 8]** Η αντίστροφη μίας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την $y = x$ και αφού $f(x) \leq x$ θα ισχύει $f^{-1}(x) \geq x$.
2. **[Μονάδες 8]** Αφού $f^{-1}(x) \leq e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για $x = f(y)$, $y > -1$ θα ισχύει

$$y \leq e^(f(y)) - 1 \iff \ln(y+1) \leq f(x)$$

3. **[Μονάδες 9]** Από την προηούμενη σχέση με όρια $\lim_{x\to 0} \ln(x+1) \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} x$. Αφού $0 \leq f^{-1}(x) \leq e^x - 1$ και πάλι με κριτήριο παρεμβολής.
4. **[Μονάδες 9]** Έστω $h(x) = (x-1)f^{-1}(x) + (2-x)f(x) - x^2 + 2x - 2$. Η h συνεχής με $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$, και $h(2) = f^{-1}(2) - 2 \geq 0$. Έτσι αν $h(1)h(2) = 0$ τότε $x_0 = 1$ ή $x_0 = 2$, διαφορετικά Bolzano.

Θέμα Δ

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$g(x) = f\left(f(x)\right) + e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

1. **[Μονάδες 8]** Κατασκευή ή λόγια.
2. **[Μονάδες 8]** Για $x < x_0$ έχουμε $f(x) < f(x_0)$ και άρα με όρια $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$. Όμοια από δεξιά. Άρα $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. **[Μονάδες 9]**

   α) Η f διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0) = 1$ θα είναι πάντα θετική. Συνεπώς $g(x) > e^x \geq 1$ για κάθε $x > 0$. Για $x < 0$ έχουμε $g(x) < g(0) = f(f(0)) + 1$. Αλλά $f(0) = 1 \Rightarrow f(f(0)) > f(1) > f(0) = 1$ άρα και πάλι $g(x) > 1$.

   β)
   $$h(x) = x^3 g\left(2x^4\right) + x^4 g\left(x^2\right) + x^2 f\left(x^2 - 1\right) - 1$$
   Η h είναι συνεχής με $h(1) = g(2) + g(1) + f(0) - 1 > 2g(1) - 1 > 0$ και $h(-1) = -g(2) + g(1) + f(0) - 1$. Αλλά $g(2) < g(1) \iff -g(2) + g(1) < 0$... Bolzano