1. (α΄) Έστω η δράση με $z \mapsto z+s$ και $y \mapsto y+t$. Τότε για να είναι σημείο του επιπέδου θα πρέπει να το επαληθεύει άρα $x \mapsto 2 \ldots$. Για τυχαία βάση θεώρησε ότι 3 σημεία θέλεις αρκεί τα διανύσματα διαφορών (ας είναι b_1 και b_2) να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και γράψε και λύσε το σύστημα

$$(2,-2,3) - a_0 = x_1 b_1 + x_2 b_2 \tag{1}$$
$$(2,-2,3) = a_0 + x_1(a_1 - a_0) + x_2(a_2 - a_0) \tag{2}$$
$$(2,-2,3) = (1 - x_1 - x_2)a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 \ldots \tag{3}$$

(β΄) Βάζοντας τα b_i στην αναπαράσταση του a έχουμε

$$a = a_0 + x_1(a_1 - a_0) + x_2(a_2 - a_0) + x_3(a_3 - a_0) \tag{4}$$
$$a = (1 - x_1 - x_2 - x_3)a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Άρα το a_2 γράφεται ως $(0,1,0)$, το a_1 ως $(1,0,0)$, το a_3 ως $(0,0,1)$, το a_0 ως $(0,0,0)$, άρα το $a_3 - a_2 = (0,-1,1)$, το $a_0 - a_2 = (0,-1,0)$, το $a_1 - a_2 = (1,-1,0)$. Έτσι

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } d = a_2 - a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

2. (α΄) π.χ. για το P_1. Για $y = z = 0$ έχεις το σημείο $a_0 = (2,0,0) \ldots$. Άρα και βάσεις $(a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_0) = \ldots$

(β΄) Γράψε τα $a_1' - a_0'$ και $a_2' - a_0'$ ως γραμμικό συνδιασμό των $a_1 - a_0$ και $a_2 - a_0$... Και για αντίστροφη εικόνα πάρε από τον $y = Ax + b$ το $x = A^{-1}y - A^{-1}b$

3. (α΄) Όταν τα διανύσματα διαφορών $A_i - A_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αφινικό ανάπτυγμα είναι το σύνολο των αφινικών συνδιασμών τους. Είναι αφινική βάση του χώρου που παράγουν. Όχι γιατί αφού αποτελούν βάση κάθε σημείο θα γράφεται ως αφινικός συνδιασμός κάποιων A_i άρα γρ. εξαρτημένα.

(β΄) Αν κάνουμε στοιχειώδεις γραμμοπράξεις θα έχουμε

$$\begin{vmatrix} x - a_01 & x - a_02 & x - a_03 & 0 \\ a_01 & a_02 & a_03 & 1 \\ a_11 - a_01 & a_12 - a_02 & a_13 - a_03 & 0 \\ a_21 - a_01 & a_22 - a_02 & a_23 - a_03 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - a_01 & x - a_02 & x - a_03 \\ a_11 - a_01 & a_12 - a_02 & a_13 - a_03 \\ a_21 - a_01 & a_22 - a_02 & a_23 - a_03 \end{vmatrix} = 0$$

άρα αφού τα διανύσματα γραμμές 2 και 3 είναι γρ. ανεξάρτητα και η τάξη του πίνακα είναι < 3 το διάνυσμα γραμμή 1 είναι γραμμικά εξαρτημένο από τα άλλα δύο...

(γ΄) Αντικατέστησε τα σημεία και βρες τα a, b, c και d με σύστημα. Για εμβαδό, υπάρχει τύπος από Λύκειο με απόσταση σημείου από ευθεία ή από Πανεπιστήμιο με το μέτρο του διανύσματος (a, b, c)

4. (α΄) Ορίζουν τετράεδρο γιατί έχουμε 3 γρ. ανεξάρτητα διανύσματα

(β΄) Ψάχνεις $y = Cx + b$. Λύσε το σύστημα $y = Cx$ με διανύσματα x και y τα σημεία των αξόνων. $C = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ και για το b αρκεί να διαλέξουμε διάνυσμα $OB - OA$ με A σημεία από το ένα επίπεδο και B από το άλλο.