Εισηγητής: Λόλας Κωνσταντίνος

Επαναληπτικό: Bolzano

Θεσσαλονίκη, 12 / 12 / 2019

Διαγώνισμα Κατεύθυνση Γ Λυκείου

Θέμα Α

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή $f(x) = e^x - \dfrac{2}{x-1} - 1$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.

2. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

3. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μία ακριβώς ρίζα x_0 στο διάστημα $(1, 2)$.

4. **[Μονάδες 7]** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \dfrac{x+1}{x-1}$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

Θέμα Β

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση.

1. **[Μονάδες 6]** Αν $1 < f(x) < e$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2. **[Μονάδες 6]** Αν $f(0) > 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x + x\eta\mu\dfrac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. **[Μονάδες 6]** Αν $f(a) + f(3a) = 4a$, $a > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x) - a}{x - 3a} = \dfrac{f(x) - 3a}{x - a}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(a, 3a)$.

4. **[Μονάδες 7]** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g : [1, 3] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$, ώστε
$$g(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$$

Θέμα Γ

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0) = 1$, $f(x) \neq x$ και $\dfrac{f(x) - x}{e^x} + \dfrac{e^x}{x - f(x)} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \leq 0 \\ k - 2x - ln(x+1) & , x > 0 \end{cases}$

1. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή του k.

2. **[Μονάδες 6]** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g και να δείξετε ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες.

3. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{g(a)-1}{x-1} + \dfrac{g(\beta)-1}{x-2} = 2019$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$, για κάθε a, $\beta \neq 0$.

4. **Μονάδες 7]** Αν x_1, x_2 οι ρίζες του ερωτήματος Γ2 με $x_1 < x_2$ να δείξετε ότι η εξίσωση

$$x + g(x) = \eta\mu x$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

Καλή επιτυχία