

Διαγώνισμα Κατεύθυνση Γ Λυκείου

Θέμα Α

1. **[Μονάδες 12]** Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο το $f(x_0)$;
2. **[Μονάδες 13]** Πότε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1;
3. **[Μονάδες 12]** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα σύνολα A, B αντιστοίχως, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

1. **[Μονάδες 6]** Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$.
2. **[Μονάδες 6]** Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
3. **[Μονάδες 6]** Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x} > x + 1$.
4. **[Μονάδες 7]** Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)e^{x^2} = 1$.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

1. **[Μονάδες 7]** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να εξετάσετε, αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
2. **[Μονάδες 9]** Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.
3. **[Μονάδες 9]** Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να την βρείτε.
4. **[Μονάδες 6]** Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}\left(\frac{1}{1-e} + 2 - f(\ln x)\right) = -1$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1), x \geq 0$.

1. **[Μονάδες 5]** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .
2. **[Μονάδες 6]** Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln(x^4 + 1) > \ln(2e) - x^2$$

3. **[Μονάδες 6]** Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση στο διάστημα $[-\frac{4}{3}, +\infty)$

$$x^2 - 3x - 4 = \ln \frac{(3x + 4)^2 + 1}{x^4 + 1}$$

4. **[Μονάδες 8]** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και ότι τέμνονται μόνο στη $y = x$.

Καλή επιτυχία