

# Θέματα

## Θέμα Α (14)

1. **[Μονάδες 7]** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει:  $f(x) = g(x) + c$ .
2. **[Μονάδες 4]** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:  
"Κάθε συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ."
  - α) **[Μονάδες 1]** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής).
  - β) **[Μονάδες 3]** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
3. **[Μονάδες 4]** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:  
Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $f(\alpha)f(\beta) > 0$  τότε
  - α) Η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .
  - β) Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .
  - γ) Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο  $(\alpha, \beta)$ .
  - δ) Δεν μπορούμε να έχουμε συμπεράσματα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .
4. **[Μονάδες 10]** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
  - α) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι απαραίτητα ελάχιστο της συνάρτησης.
  - β) Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  τέτοια ώστε  $f(x_1) < f(x_2)$ .
  - γ) Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x) > 0$ .
  - δ) Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κοίλη στο  $\Delta$ .
  - ε) Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^x = +\infty$ .

## Θέμα Β (21)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}$ .

- α) **[Μονάδες 7]** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$  καθώς και τις θέσεις και τις τιμές των τοπικών της ακροτάτων.
- β) **[Μονάδες 7]** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
- γ) **[Μονάδες 6]** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$ .
- δ) **[Μονάδες 16]** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

## Θέμα Γ (17)

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g$  στο  $[0, +\infty)$  για τις οποίες ισχύουν

- $f(0) = 1$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$
  - $f'$  συνεχής στο  $[0, +\infty)$ .
  - $2g(x) = f^2(x) + 2f(x)$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .
  - $g'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$
1. **[Μονάδες 8]** Να δείξετε ότι οι  $g$  και  $f'$  έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας στο  $[0, +\infty)$ .
  2. **[Μονάδες 5]** Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( f\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2}$ .
  3. **[Μονάδες 6]** Αν γνωρίζουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f'$  είναι το διάστημα  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$
  4. **[Μονάδες 6]** Να αποδείξετε ότι  $5 < 2g(1) < 2f(1) + 3$ .

## Θέμα Δ (20)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $e^{f(x)} - \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - 1 + x} = e^{f(x)} \cdot f'(x), x \in \mathbb{R}$
  - $f(0) = 0$
1. **[Μονάδες 6]** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
  2. **[Μονάδες 5]** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon_1)$  που διέρχεται από το σημείο  $A(\pi, \pi - 2)$  και είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη  $(\varepsilon)$  της  $C_f$  στο  $x_0 = 0$ , εφάπτεται της  $C_f$  ακριβώς σε δύο σημεία στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .

3. **[Μονάδες 3]** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται στο  $(0, \frac{\pi}{2})$  καθώς και ότι ισχύει  $f^{-1} > x$  για κάθε  $x \in (0, \frac{\pi}{2} - 1)$ .
4. (α') **[Μονάδες 5]** Αν γνωρίζετε πως η  $f^{-1}(x)$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1 + \sigma \nu(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)}$$

- (β') **[Μονάδες 6]** Ένα κινητό  $M$  ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της  $C_f$ . Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της καμπύλης  $C_f$  στο διάστημα  $[0, \pi]$  στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του  $M$  να είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του  $x$ , αν υποτεθεί  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Καλή επιτυχία**