Θέματα

Θέμα Α (14)

1. **[Μονάδες 7]** Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

2. **[Μονάδες 4]** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

   ”Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.”

   α) **[Μονάδες 1]** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής).

   β) **[Μονάδες 3]** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. **[Μονάδες 4]** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

   Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)f(\beta) > 0$ τότε

   α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β).

   β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (α, β).

   γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχισοτν δύο λύσεις στο (α, β).

   δ) Δεν μπορούμε να έχουμε συμπεράσματα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β).

4. **[Μονάδες 10]** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

   α) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι απαραίτητα ελάχιστο της συνάρτησης.

   β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) < f(x_2)$

   γ) Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x) > 0$.

   δ) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

   ε) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x\to\infty} \alpha^x = +\infty$.

Θέμα Β (21)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}$.

α) **[Μονάδες 7]** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και τις θέσεις και τις τιμές των τοπικών της ακροτάτων.

β) **[Μονάδες 7]** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) **[Μονάδες 6]** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

δ) **[Μονάδες 16]** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Θέμα Γ (17)

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $[0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύουν

- $f(0) = 1$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$
- f' συνεχής στο $[0,+\infty)$.
- $2g(x) = f^2(x) + 2f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
- $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

1. **[Μονάδες 8]** Να δείξετε ότι οι g και f' έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας στο $[0,+\infty)$.
2. **[Μονάδες 5]** Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} x\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) = \frac{1}{2}$.
3. **[Μονάδες 6]** Αν γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f' είναι το διάστημα $[\frac{1}{2}, 1)$
4. **[Μονάδες 6]** Να αποδείξετε ότι $5 < 2g(1) < 2f(1) + 3$.

Θέμα Δ (20)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $e^{f(x)} - \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - 1 + x} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$

1. **[Μονάδες 6]** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. **[Μονάδες 5]** Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε_1) που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\pi, \pi-2)$ και είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη (ε) της C_f στο $x_0 = 0$, εφάπτεται της C_f ακριβώς σε δύο σημεία στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
3. **[Μονάδες 3]** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $(0, \frac{\pi}{2})$ καθώς και ότι ισχύει $f^{-1} > x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2} - 1)$.

4. (α΄) **[Μονάδες 5]** Αν γνωρίζετε πως η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - 1 + \sigma\upsilon\nu(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)}$$

(β΄) **[Μονάδες 6]** Ένα κινητό M ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της C_f. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της καμπύλης C_f στο διάστημα $[0, \pi]$ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του x, αν υποτεθεί $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Καλή επιτυχία