

# Θέματα με χιόνια

Θεωρήστε το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

1. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι το 0 δεν είναι ρίζα του.
2. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης με το  $x - 1$  είναι  $-2$ .
3. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι αν ένας αριθμός  $\rho$  είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε και ο αριθμός  $\frac{1}{\rho}$  είναι ρίζα.
4. **[Μονάδες 3]** Να γράψετε όλες τις πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου.
5. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .
6. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 > \frac{2}{x}$ .

Θεωρήστε το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

1. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι το 0 δεν είναι ρίζα του.
2. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης με το  $x - 1$  είναι  $-2$ .
3. **[Μονάδες 3]** Να δείξετε ότι αν ένας αριθμός  $\rho$  είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε και ο αριθμός  $\frac{1}{\rho}$  είναι ρίζα.
4. **[Μονάδες 3]** Να γράψετε όλες τις πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου.
5. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .
6. **[Μονάδες 4]** Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 > \frac{2}{x}$ .

## Λύσεις

1. Έχουμε  $P(0) = 2 \neq 0$  άρα δεν είναι ρίζα.
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι το  $P(1) = -2$ .
3. Έχουμε ότι  $P(\rho) = 0$  άρα

$$2\rho^4 - 5\rho^3 + 4\rho^2 - 5\rho + 2 = 0 \implies \rho^4(2 - 5\frac{1}{\rho} + 4(\frac{1}{\rho})^2 - 5(\frac{1}{\rho})^3 + 2(\frac{1}{\rho})^4) = 0 \implies \frac{1}{\rho} \text{ ρίζα}$$

4. Είναι όλοι οι διαιρέτες του 2, δηλαδή  $\{-2, -1, 1, 2\}$ .
5. Η μία προφανής ρίζα είναι το 2. Από το ερώτημα 3 έχουμε ότι είναι και το  $\frac{1}{2}$ . Με Horner παίρνουμε

$$P(x) = (x - 2)(x - 1/2)(2x^2 + 2)$$

Ο τρίτος όρος δεν μηδενίζει οπότε οι δύο ρίζες είναι και μοναδικές

6. Έχουμε

$$P(x) - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 > \frac{2}{x} \implies x + 1 > \frac{2}{x} \implies \frac{(x-1)(x-2)}{x} > 0$$

Που με πινακάκι έχουμε  $x > 1$  ή  $-2 < x < 0$