

# Θέματα

## Θέμα Α (3)

- A1. [Μονάδες 3] Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ .
- A2. [Μονάδες 8] Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- A3. [Μονάδες 4] Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:  
"Για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο  $\mathbb{R}$  ισχύει  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ."
- (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής) (Μονάδα 1)
- (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α (Μονάδες 3)
- A4. [Μονάδες 10] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- (α') Κάθε "1-1" συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη
- (β') Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|\eta\mu x| > |x|$ .
- (γ') Αν η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
- (δ') Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση.
- (ε') Αν  $C$  είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ , τότε το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της  $C$ .

## Θέμα Β (39)

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ ,  $x \geq 0$  και  $g(x) = \ln x$ .

- B1. [Μονάδες 3] Να βρείτε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .  
Δίνεται ότι  $\varphi(x) = x^2 - 2x$ ,  $x \geq 1$ .
- B2. [Μονάδες 8] Να αποδείξετε ότι η  $\varphi$  είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη  $\varphi^{-1}$  της  $\varphi$ .
- B3. [Μονάδες 5] Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $\varphi^{-1}$  με την ευθεία  $y = x$ .
- B4. [Μονάδες 7] Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τις γραφικές παραστάσεις των  $\varphi$  και  $\varphi^{-1}$ .

## Θέμα Γ (10)

Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = ax + e^{-x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Αν ισχύει  $ax + e^{-x} \geq 1$  με  $a \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τότε:

- Γ1. [Μονάδες 6] Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x + e^{-x}$ .
- Γ2. [Μονάδες 6] Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν οριζόντια ευθεία  $y = k$  με  $k \neq 1$  η οποία να τέμνει την γραφική παράσταση της  $f$  σε ακριβώς ένα σημείο.
- Γ3. [Μονάδες 5] Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0$  στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων, την οποία και να την υπολογίσετε.
- Γ4. [Μονάδες 8] Ένα σημείο κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$  και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό  $1 \text{ cm/s}$ . Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η εφαπτόμενη της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα  $x'$ .

## Θέμα Δ (10)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)(x^4 + 1) = (4e^{x^2-1} - \sqrt{2}xf(x))(4e^{x^2-1} + \sqrt{2}xf(x))$
- $e^x + x \geq f(1)x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

- Δ1. [Μονάδες 4] Να αποδείξετε ότι  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) = \frac{4e^{x^2-1}}{x^2+1}$ .
- Δ2. [Μονάδες 6] Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- Δ3. [Μονάδες 4] Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$  που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- Δ4. [Μονάδες 5] Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + \ln(x+1) > x + \ln(x^2+1)$ ,  $x > 0$ .
- Δ5. [Μονάδες 6] Να δείξετε ότι η  $f$  δεν είναι "1-1" καθώς και να δείξετε:

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} \left[ \frac{f(0)}{x_0 + x} \cdot \left( \frac{4e^{x^2-1}}{x^2+1} - \frac{4e^{x_0^2-1}}{x_0^2+1} \right) \right] = -\frac{4}{e} f'(x_0)$$