

# Πανελλήνιες Μαθηματικά Γ Λυκείου 2017 Λύσεις

## Θέμα Β

B1. Θα πρέπει  $x \in A_g$  και  $g(x) \in A_f$ , δηλαδή  $x \neq 1$  και  $\frac{x}{1-x} > 0$ , για το οποίο έχουμε  $x \in (0, 1)$ . Άρα  $(f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ,  $x \in (0, 1)$ .

B2. Η συνάρτηση  $h$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = \frac{1}{x(1-x)} > 0$ , άρα η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς  $1-1$ . Άρα αντιστρέφεται με αντίστροφη:

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Rightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x(1+e^y) = e^y \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

Για το πεδίο ορισμού έχουμε από το σύνολο τιμών της  $h$ ,

$$h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)\right) = \mathbb{R}$$

συνεπώς

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, x \in \mathbb{R}$$

B3. Η συνάρτηση  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη με  $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} > 0$  άρα η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς δεν έχει ακρότατα. Επίσης  $\varphi''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ , με  $\varphi(x) < 0$  όταν  $x > 0$  και  $\varphi(x) > 0$  όταν  $x < 0$ . Έτσι η  $\varphi$  είναι κυρτή για  $x < 0$ , κοίλη για  $x > 0$  και έχει σημείο καμπής το  $(0, \varphi(0)) = (0, \frac{1}{2})$

B4. Για να βρούμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, έχουμε για το  $-\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0 \Rightarrow y = 0$$

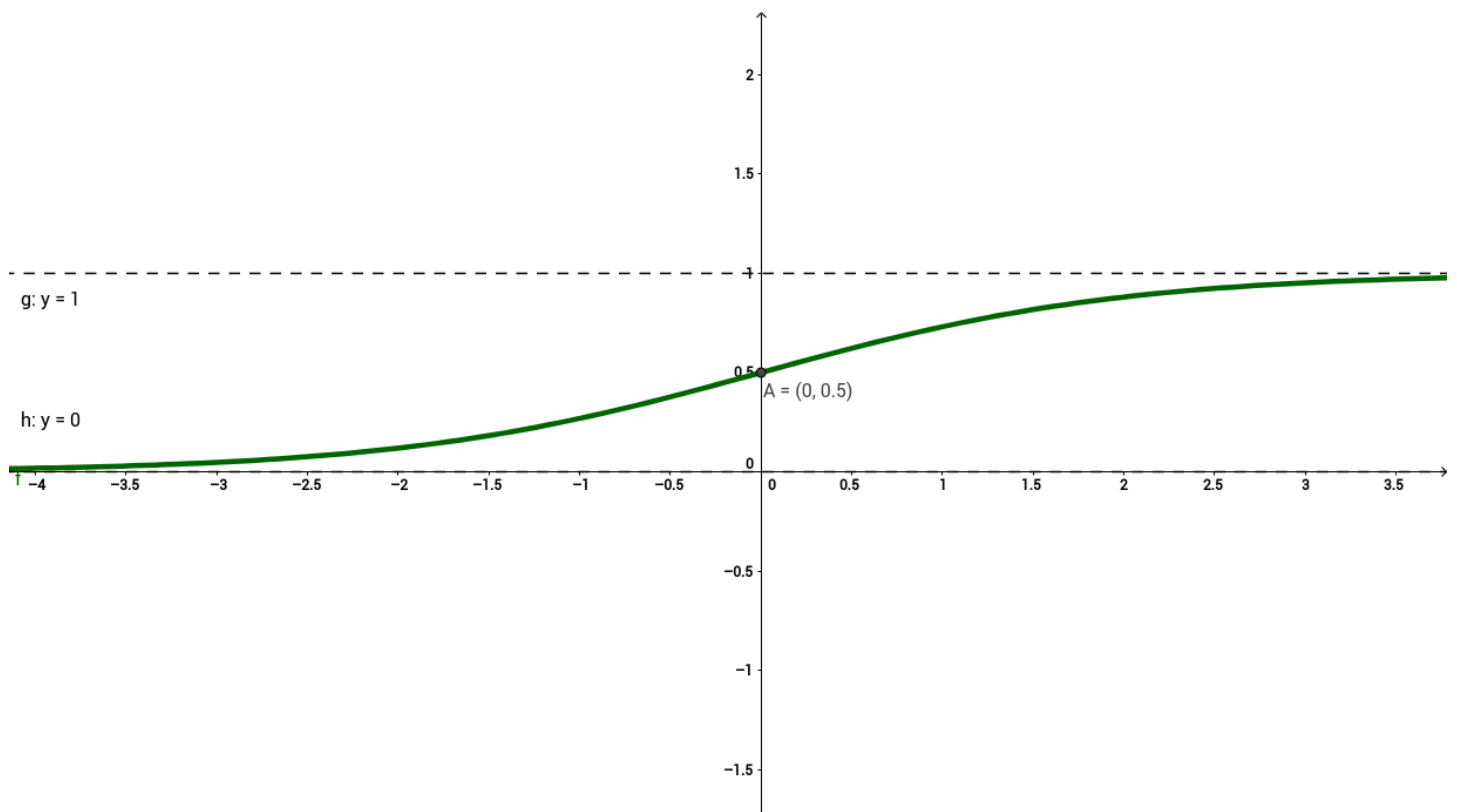
ενώ για το  $+\infty$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \Rightarrow y = 1$$

Ο πίνακας μελέτης της συνάρτησης λοιπόν είναι ο:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+		+
$\varphi''(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Η γραφική της παράσταση είναι η



## Θέμα Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της γραφικής της  $C_f$  στο σημείο  $x = x_0$  είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Έχουμε  $f(x_0) = -\eta\mu x_0$  και  $f'(x_0) = -\sigma\upsilon\nu x_0$ . Έτσι

$$y + \eta\mu x_0 = -(x - x_0)\sigma\upsilon\nu x_0$$

Η εφαπτομένη περνάει από το σημείο A άρα επαληθεύει την εξίσωση, έτσι

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -(\frac{\pi}{2} - x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 \implies -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + (\frac{\pi}{2} - x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

Προφανείς ρίζες είναι οι  $x = 0$  και  $x = \pi$ . Θεωρούμε ότι υπάρχει και τρίτη ρίζα στο  $(0, \pi)$ . Τότε η συνάρτηση

$$h(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + (\frac{\pi}{2} - x)\sigma\upsilon\nu x$$

θα έχει σύμφωνα με το θεώρημα Rolle 2 ρίζες στην παράγωγό της στο διάστημα  $(0, \pi)$ . Αλλά

$$h'(x) = (x - \frac{\pi}{2})\eta\mu x$$

η οποία έχει μοναδική ρίζα στο εν λόγω διάστημα, κάτι το οποίο είναι άτοπο. Έτσι οι δύο προηγούμενες ρίζες είναι και μοναδικές. Για  $x = 0$  η εφαπτόμενη είναι η  $y = -x$  και για  $x = \pi$  η εφαπτόμενη είναι η  $y = x - \pi$ .

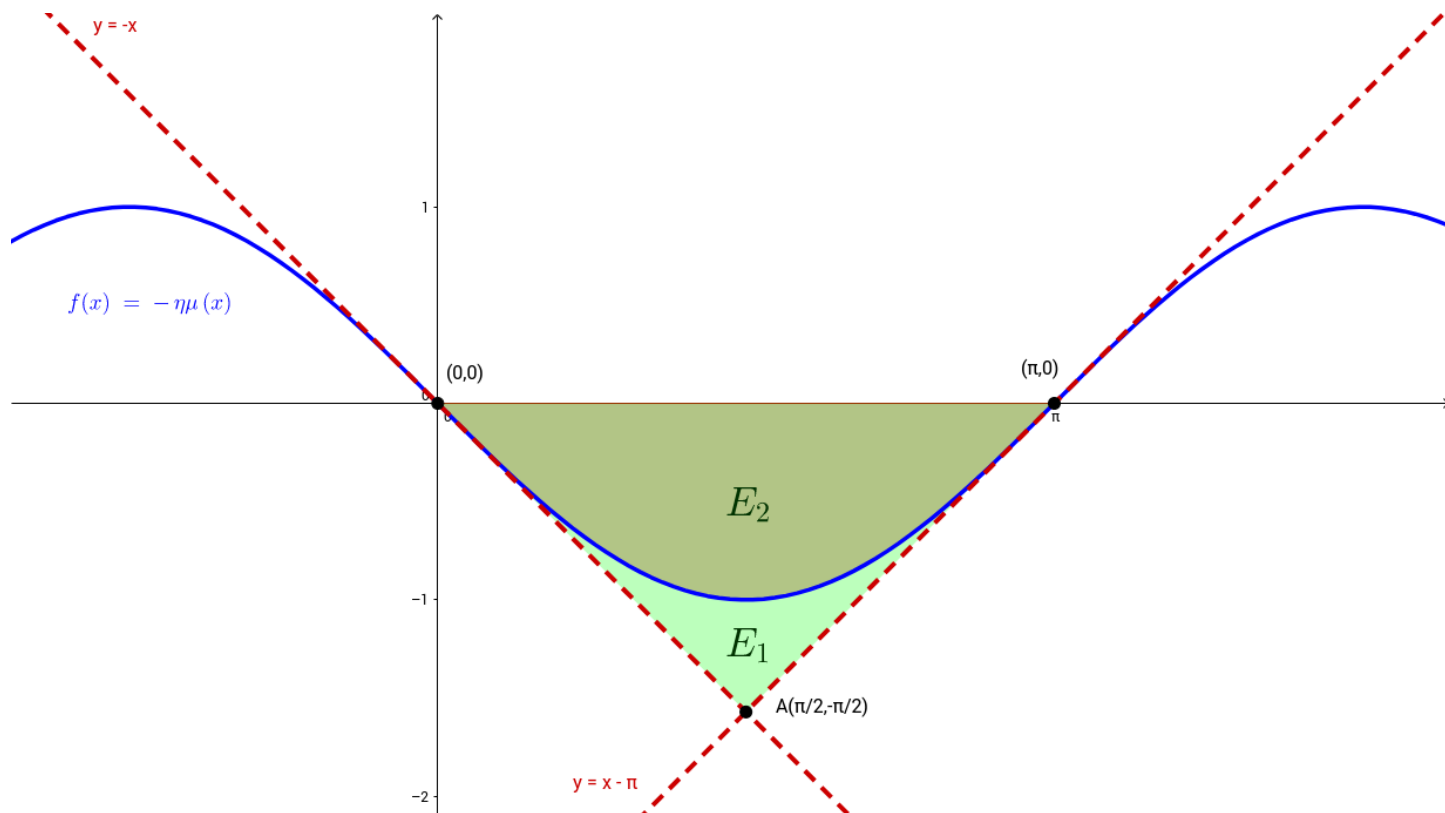
Γ2. Το εμβαδό  $E_2$  είναι ίσο με

$$\int_0^\pi -f(x)dx = \int_0^\pi \pi\eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = 2$$

Το εμβαδό  $E_2$  μπορεί να βρεθεί με την αφαίρεση του εμβαδού του τριγώνου με κορυφές τα  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  και  $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  με το εμβαδό  $E_1$ , το οποίο ισούται με  $E_2 = \frac{\pi^2}{2} - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$ . Έτσι

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Η γραφική παράστασή τους είναι



Γ3. Από την γραφική παράσταση έχουμε ότι  $f(x) \geq y_{\varepsilon_2} \implies f(x) - x + \pi \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, \pi]$  άρα

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

Γ4. Και πάλι από την γραφική παράσταση, αφού  $f(x) > x - \pi$  για κάθε  $x \in [1, \pi]$ , συνεπώς  $\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$ . Έτσι

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e 1 - \frac{\pi}{x} dx = [x - \pi \ln x]_1^e = e - 1 - \pi$$

## Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση σε κάθε της κλάδο είναι συνεχής. Για το σημείο που αλλάζει τύπο έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής.

- σημείο που μηδενίζει η παράγωγος:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & x \in [-1, 0) \\ e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Έτσι και μόνο για τον δεύτερο κλάδο, αφού ο πρώτος μηδενίζει μόνο στο  $x = 0$ , έχουμε

$$e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \implies x = \frac{3\pi}{4}$$

- σημεία που δεν ορίζεται η παράγωγος:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}} - 0}{x - 0} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x - 0}{x - 0} = 1$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα  $x = 0$  και  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

Δ2. Με πίνακα προσήμων για την  $f'(x)$  έχουμε

$x$	$-1$	$0$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$		-		
$e^x(\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$			+	-
$f'(x)$			0	

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα για  $x \in (0, \frac{3\pi}{4})$  και γνησίως φθίνουσα για  $x \in (-1, 0) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ .  
Για κάθε ένα από τα διαστήματα βρίσκουμε το σύνολο τιμών και έχουμε

$$\begin{aligned} (f(0), f(-1)) \cup \left(f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \cup \left(f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \\ (0, 1) \cup \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Αλλά

$$e^{\frac{3\pi}{4}} > 2 \implies \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} > 1$$

άρα το σύνολο τιμών είναι το  $f(A) = \left(0, e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Δ3. Έχουμε ότι  $e^x \eta \mu x < e^x < e^{5x}$  άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$E = \int_0^\pi e^{5x} - e^x \eta \mu x dx = \left[ \frac{e^{5x}}{5} - \frac{1}{2} e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) \right]_0^\pi = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Δ4. Με πολλαπλασιασμό έχουμε

$$f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 = e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \implies f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2$$

Αφού το μέγιστο της συνάρτησης  $f$  είναι το  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ , η προηγούμενη εξίσωση ισχύει μόνο για  $x = \frac{3\pi}{4}$