Συναρτήσεις

Ολοκληρώματα και Ανισότητες

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+e^x}$. Να δείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
2. $\sqrt{2} < f(x) < \sqrt{1+e}$, για κάθε $x \in [0,1]$
3. $\sqrt{2} < \int_0^1 f(x)\,dx < \sqrt{1+e}$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+e^x}$. Να δείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
2. $\sqrt{2} < f(x) < \sqrt{1+e}$, για κάθε $x \in [0,1]$
3. $\sqrt{2} < \int_0^1 f(x)\,dx < \sqrt{1+e}$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+e^x}$. Να δείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
2. $\sqrt{2} < f(x) < \sqrt{1+e}$, για κάθε $x \in [0,1]$
3. $\sqrt{2} < \int_0^1 f(x)\,dx < \sqrt{1+e}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x > 0$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα
2. Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx > \dfrac{3e}{2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x > 0$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα
2. Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx > \dfrac{3e}{2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
2. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_0^1 f(x)\,dx > \frac{1}{4} + \ln 2$
   2. $\int_1^2 x f(x)\,dx > \frac{7 + 9\ln 2}{6}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
2. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_0^1 f(x)\,dx > \frac{1}{4} + \ln 2$
   2. $\int_1^2 x f(x)\,dx > \frac{7 + 9\ln 2}{6}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
2. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_0^1 f(x)\,dx > \frac{1}{4} + \ln 2$
   2. $\int_1^2 xf(x)\,dx > \frac{7 + 9\ln 2}{6}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
2. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
3. Να δείξετε ότι:
    1. $\int_0^1 f(x)\,dx > \frac{1}{4} + \ln 2$
    2. $\int_1^2 xf(x)\,dx > \frac{7 + 9\ln 2}{6}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
2. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
3. Να δείξετε ότι:
    1. $\int_0^1 f(x)\,dx > \dfrac{1}{4} + \ln 2$
    2. $\int_1^2 xf(x)\,dx > \dfrac{7 + 9\ln 2}{6}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Να δείξετε ότι:

1. Η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f για $x \to +\infty$ και είναι κάτω από την C_f στο $[0, +\infty)$
2. $\int_0^1 f(x)\, dx > \frac{3}{2}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Να δείξετε ότι:

1. Η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f για $x \to +\infty$ και είναι κάτω από την C_f στο $[0, +\infty)$
2. $\int_0^1 f(x)\, dx > \dfrac{3}{2}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x^2)$. Να δείξετε ότι:

1. $f(x) \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_0^1 f(x)\,dx < \dfrac{1}{3}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Να δείξετε ότι:

1. $f(x) \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_0^1 f(x)\,dx < \dfrac{1}{3}$

6. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

1. $0<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\cdot f(\eta\mu x)\,dx<1$, όταν $f(0)=0$ και $f(1)=1$
2. $\int_0^1 f(e^x)\,dx<2$, όταν $f(e)=2$
3. Αν $f(1)=2$, τότε

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

1. $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot f(\eta\mu x)\, dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$
2. $\int_0^1 f(e^x)\, dx < 2$, όταν $f(e) = 2$
3. Αν $f(1) = 2$, τότε
    1. $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\, dx > 2 \ln 2$
    2. $\int_1^2 f^2(x)\, dx > 4$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

1. $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot f(\eta\mu x)\, dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$
2. $\int_0^1 f(e^x)\, dx < 2$, όταν $f(e) = 2$
3. Αν $f(1) = 2$, τότε
   1. $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\, dx > 2\ln 2$
   2. $\int_1^2 f^2(x)\, dx > 4$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

1. $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot f(\eta\mu x)\, dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$
2. $\int_0^1 f(e^x)\, dx < 2$, όταν $f(e) = 2$
3. Αν $f(1) = 2$, τότε
    1. $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\, dx > 2\ln 2$
    2. $\int_1^2 f^2(x)\, dx > 4$

6. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

1. $0<\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\cdot f(\eta\mu x)\,dx<1$, όταν $f(0)=0$ και $f(1)=1$
2. $\int_0^1 f(e^x)\,dx<2$, όταν $f(e)=2$
3. Αν $f(1)=2$, τότε
    1. $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx>2\ln 2$
    2. $\int_1^2 f^2(x)\,dx>4$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
3. Να δείξετε ότι:

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx > e$
   2. $\int_1^2 x f(x)\, dx > \frac{23}{6}$
   3. $\int_0^1 x f(e^x)\, dx > \frac{3}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx > e$
   2. $\int_1^2 x f(x)\, dx > \dfrac{23}{6}$
   3. $\int_0^1 x f(e^x)\, dx > \dfrac{3}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e$
   2. $\int_1^2 xf(x)\,dx > \dfrac{23}{6}$
   3. $\int_0^1 xf(e^x)\,dx > \dfrac{3}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e$
   2. $\int_1^2 xf(x)\,dx > \dfrac{23}{6}$
   3. $\int_0^1 xf(e^x)\,dx > \dfrac{3}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
3. Να δείξετε ότι:
   1. $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx > e$
   2. $\int_1^2 x f(x)\, dx > \dfrac{23}{6}$
   3. $\int_0^1 x f(e^x)\, dx > \dfrac{3}{2}$

8. Εστω $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύουν:

$$f(x)\geq \frac{1}{x}+1, \text{ για κάθε } x\in[1,e] \text{ και } \int_1^e f(x)\,dx=e$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f.

9. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < e$$

10. Εστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 3. Να δείξετε ότι:

$$\frac{4}{3} < \int_0^2 f(x)\,dx \cdot \int_0^2 \frac{1}{f(x)}\,dx < 12$$

11. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι θετική και συνεχής. Να δείξετε ότι

$$\int_2^4 f(\frac{x}{2})\,dx > \int_1^2 xf(x)\,dx$$

12. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής. Αν $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 1$ να δείξετε ότι

$$2 + 3\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$$

13. Εστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. $f(2x) - f(x) \geq x f'(x)$, για κάθε $x \geq 0$
2. $\int_0^1 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$
3. $\int_0^2 f(x)\,dx \geq 2f(1)$.

13. Εστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. $f(2x) - f(x) \geq x f'(x)$, για κάθε $x \geq 0$
2. $\int_0^1 f(2x)\, dx = \dfrac{1}{2} \int_0^2 f(x)\, dx$
3. $\int_0^2 f(x)\, dx \geq 2f(1)$.

13. Εστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. $f(2x) - f(x) \geq x f'(x)$, για κάθε $x \geq 0$
2. $\int_0^1 f(2x)\,dx = \dfrac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$
3. $\int_0^2 f(x)\,dx \geq 2f(1)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Εστω α ένας σταθερός αριθμός με $\alpha \in (0,1)$. Να δείξετε ότι:

$$\int_1^{\alpha} f(x)\,dx < \frac{1}{\alpha^2}\int_{\alpha}^{\alpha^2} x f(x)\,dx$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Εστω α ένας σταθερός αριθμός με $\alpha \in (0,1)$. Να δείξετε ότι:

$$\int_1^{\alpha} f(x)\,dx < \frac{1}{\alpha^2}\int_{\alpha}^{\alpha^2} xf(x)\,dx$$

15. Εστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 0$ και $xf'(x) > 1$, για κάθε $x > 1$.

1. Να δείξετε ότι $f(x) \geq \ln x$, για κάθε $x \geq 1$
2. Να δείξετε ότι η εξίωση $(x-1)\int_1^e \dfrac{f(x)}{e-1}\,dx = 1$ έχει μία τουλάχιστη λύση στο $(1, e)$

15. Εστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 0$ και $xf'(x) > 1$, για κάθε $x > 1$.

1. Να δείξετε ότι $f(x) \geq \ln x$, για κάθε $x \geq 1$
2. Να δείξετε ότι η εξίωση $(x-1)\int_1^e \frac{f(x)}{e-1}\,dx = 1$ έχει μία τουλάχιστη λύση στο $(1, e)$

16. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 2\left(xf(x)+e^{x^2}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

1. $f(x) \geq 2xe^{x^2}$, για κάθε $x\in[0,1]$
2. $\int_0^1 f(x)\,dx > e-1$
3. Η εξίσωση $x\int_0^x f(x)\,dx = e-x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$

16. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)>2\left(xf(x)+e^{x^2}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

1. $f(x)\geq 2xe^{x^2}$, για κάθε $x\in[0,1]$
2. $\int_0^1 f(x)\,dx>e-1$
3. Η εξίσωση $x\int_0^x f(x)\,dx=e-x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$

16. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)>2\left(xf(x)+e^{x^2}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

1. $f(x)\geq 2xe^{x^2}$, για κάθε $x\in[0,1]$
2. $\int_0^1 f(x)\,dx > e-1$
3. Η εξίσωση $x\int_0^x f(x)\,dx = e-x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$

17. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι κυρτή με $f'(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

1. $f(x) \leq 3x$, για κάθε $x \in [0, 1]$
2. Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\alpha \int_0^1 f(x^2)\, dx = 2\alpha - 1$

17. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι κυρτή με $f'(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

1. $f(x) \leq 3x$, για κάθε $x \in [0, 1]$
2. Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\alpha \int_0^1 f(x^2)\, dx = 2\alpha - 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να δείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή
2. $\dfrac{1}{4} + \ln 2 < \int_0^1 f(x)\,dx < \ln(1 + e)$
3. Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4\int_0^\theta f(x)\,dx = 4f(\theta) - \theta + 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να δείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή
2. $\dfrac{1}{4} + \ln 2 < \int_0^1 f(x)\,dx < \ln(1 + e)$
3. Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4\int_0^\theta f(x)\,dx = 4f(\theta) - \theta + 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να δείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή
2. $\dfrac{1}{4} + \ln 2 < \int_0^1 f(x)\,dx < \ln(1 + e)$
3. Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4\int_0^\theta f(x)\,dx = 4f(\theta) - \theta + 1$