

Συναρτήσεις

Εφαρμογές Κυρτότητας

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
- ⑥

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
- ⑥

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
- ⑥

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$

⑤ Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$

⑥ Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 + f(x)}{x} = 2$

⑦

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
 - ① Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 + f(x)}{x} = 2$

⑥

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
 - ① Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 + f(x)}{x} = 2$

⑥

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
 - ① Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 + f(x)}{x} = 2$
- ⑥
 - α) Να δείξετε ότι $f(x^2 + 1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) - 2x^2 = -3$

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
 - ① Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 + f(x)}{x} = 2$
- ⑥
 - ① Να δείξετε ότι $f(x^2 + 1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
 - ① Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 + f(x)}{x} = 2$
- ⑥
 - ① Να δείξετε ότι $f(x^2 + 1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 1) < 2$
- ③ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $M(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
- ④ Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
- ⑤
 - ① Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3 + f(x)}{x} = 2$
- ⑥
 - ① Να δείξετε ότι $f(x^2 + 1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - ② Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

ⓐ $f'(f(x) - x) = 2 + e$

ⓑ $e^{f(x)} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

③ Να λύσετε τις ανισώσεις:

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f'(f(x) - x) = 2 + e$

② $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

③ Να λύσετε τις ανισώσεις:

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f'(f(x) - x) = 2 + e$

② $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

③ Να λύσετε τις ανισώσεις:

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f'(f(x) - x) = 2 + e$

② $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

③ Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $e^x(x^2 + x - 1) > -1$

② $\frac{e^{x^2-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

③ $\frac{e^{x^2-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f'(f(x) - x) = 2 + e$

② $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

③ Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $e^x(x^2 + x - 1) > -1$

② $\frac{e^{x-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f'(f(x) - x) = 2 + e$

② $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

③ Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $e^x(x^2 + x - 1) > -1$

② $\frac{e^{x-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f'(f(x) - x) = 2 + e$

② $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

③ Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $e^x(x^2 + x - 1) > -1$

② $\frac{e^{x-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

Εξάσκηση 3

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
- ② Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - (x + 2)}$
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x - 2) - x) = 2$
- ④ Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 3

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
- ② Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - (x + 2)}$
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x - 2) - x) = 2$
- ④ Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 3

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
- ② Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - (x + 2)}$
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x - 2) - x) = 2$
- ④ Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 3

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
- ② Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - (x + 2)}$
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x - 2) - x) = 2$
- ④ Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:
- ⑤ Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
- ⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:

α) την ανίσωση $f(x) = 3 - 5x$

β) την ανίσωση $f(x) \leq 5x$

- ⑤ Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$

- ⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:

α) την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$

β) την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$

⑤ Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$

⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:
 - ① την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
 - ② την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
- ⑤ Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
- ⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:
 - ① την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
 - ② την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
- ⑤ Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
- ⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:
 - ① την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
 - ② την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
- ⑤ Να δείξετε ότι $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
- ⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:
 - ① την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
 - ② την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
- ⑤ Να δείξετε ότι $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
- ⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

- ① Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2 + 2) > f'(2x^2 + 1)$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
- ④ Να λύσετε:
 - ① την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
 - ② την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
- ⑤ Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
- ⑥ Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\varepsilon\varphi x - x}$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\varepsilon\varphi x - x}$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\varepsilon\varphi x - x}$

Εξάσκηση 6

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1) = 1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

① Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
Αν $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$, τότε:

② Να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f'(x) - f'(x^2)}$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x-1) = f'(\ln x) + x$

Εξάσκηση 6

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1) = 1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

① Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
Αν $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$, τότε:

② Να υπολογίσετε τα όρια

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f'(x) - f'(x^2)}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x-1) = f'(\ln x) + x$

Εξάσκηση 6

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1) = 1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

① Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
Αν $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$, τότε:

② Να υπολογίσετε τα όρια

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f'(x) - f'(x^2)}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x-1) = f'(\ln x) + x$

Εξάσκηση 6

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1) = 1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

① Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
Αν $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$, τότε:

② Να υπολογίσετε τα όρια

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f'(x) - f'(x^2)}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x-1) = f'(\ln x) + x$

Εξάσκηση 6

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1) = 1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

① Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
Αν $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$, τότε:

② Να υπολογίσετε τα όρια

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{f'(x) - f'(x^2)}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x-1) = f'(\ln x) + x$

Εξάσκηση 7

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
Αν επιπλέον $f(1) = f'(1) = 2$, τότε:
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 2x + 3$
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(f(x)) - f(2x)}$

Εξάσκηση 7

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
Αν επιπλέον $f(1) = f'(1) = 2$, τότε:
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 2x + 3$
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(f(x)) - f(2x)}$

Εξάσκηση 7

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
Αν επιπλέον $f(1) = f'(1) = 2$, τότε:
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 2x + 3$
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(f(x)) - f(2x)}$

Εξάσκηση 8

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι

$$f(e^x) - f(x) > (e^x - x)f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Εξάσκηση 9

Εστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

- ① Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$
- ② $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$

Εξάσκηση 9

Εστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

- ① Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$
- ② $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$ και κυρτή. Αν $\alpha > 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f'(\alpha) - 1}{x} + \frac{f(2\alpha) - \alpha}{x - 1} + \frac{f(\alpha^2) - \alpha}{x - 2} = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, 2)$.

Εξάσκηση 11

Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κοίλη

- ① Αν $g(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$, $x > 0$, να δείξετε ότι $g \downarrow (0, +\infty)$
- ② Αν $f(2) = 1$ και $f'(1) = 2$, να δείξετε ότι

$$-1 < f(1) < 1 + \sigma\upsilon\nu 1 - \sigma\upsilon\nu 2$$

Εξάσκηση 11

Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κοίλη

- ① Αν $g(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$, $x > 0$, να δείξετε ότι $g \downarrow (0, +\infty)$
- ② Αν $f(2) = 1$ και $f'(1) = 2$, να δείξετε ότι

$$-1 < f(1) < 1 + \sigma\upsilon\nu 1 - \sigma\upsilon\nu 2$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

- ① $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$
- ② Η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
- ③ $f(x) < \frac{2}{3}f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$
- ④ Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

- ① $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$
- ② Η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
- ③ $f(x) < \frac{2}{3}f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$
- ④ Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

- ① $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$
- ② Η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
- ③ $f(x) < \frac{2}{3}f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$
- ④ Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

- ① $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$
- ② Η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
- ③ $f(x) < \frac{2}{3}f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$
- ④ Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$$