Συναρτήσεις

Ακρότατα, Αρτιες - Περιττές

Κωνσταντίνος. Λόλας

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Ακρότατα Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει <u>μέγιστο</u> στο $x_0 \in \mathrm{A}$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει <u>ελάχιστο</u> στο $x_0 \in \mathrm{A}$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Ακρότατα Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει <u>μέγιστο</u> στο $x_0 \in \mathrm{A}$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει <u>ελάχιστο</u> στο $x_0 \in \mathrm{A}$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Ο τσομπάνης και τα πρόβατα

Στάνη, πλαγιά, φράχτης, πρόβατα, τσομπάνης...

Προσοχή

- Ποιό είναι το πρόβατο στο ψηλότερο σημείο?
- Ποιό είναι το ψηλότερο σημείο της στάνης?
- Ποιό σημείο του φράχτη...

Φράγμα(άνω/κάτω), sup/inf, max/min

Ο τσομπάνης και τα πρόβατα

Στάνη, πλαγιά, φράχτης, πρόβατα, τσομπάνης...

Προσοχή

- Ποιό είναι το πρόβατο στο ψηλότερο σημείο?
- Ποιό είναι το ψηλότερο σημείο της στάνης?
- Ποιό σημείο του φράχτη...

<u>Φράγμα(άνω/κάτω)</u>, <u>sup/inf</u>, <u>max/min</u>

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$, $f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$, $f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$, $f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Συμμετρίες...

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι <u>άρτια</u> σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι <u>περιττή</u> σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Συμμετρίες...

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι <u>άρτια</u> σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι <u>περιττή</u> σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση
- Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άρτια ούτε περιττή

Quiz Time

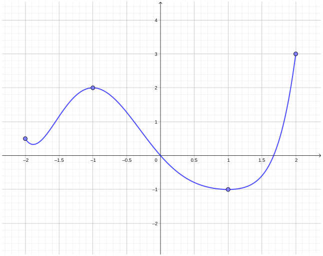
- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση
- Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άρτια ούτε περιττή

Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση
- Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άρτια ούτε περιττή

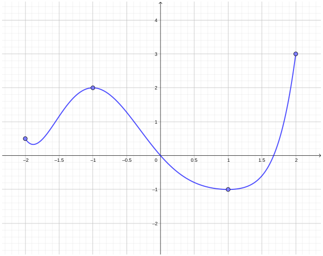
Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. 

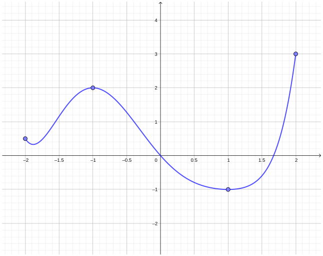
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

1. Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
2. Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
3. Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
4. Να λύσετε
   1. Την εξίσωση $f(x) = 1$
   2. Την ανίσωση $f(x) > -1$

1. 

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

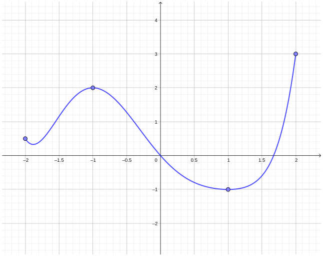
1. Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
2. Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
3. Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, α, $\beta \in [-2, 2]$
4. Να λύσετε
    1. Την εξίσωση $f(x) = 1$
    2. Την ανίσωση $f(x) > -1$

1. 

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

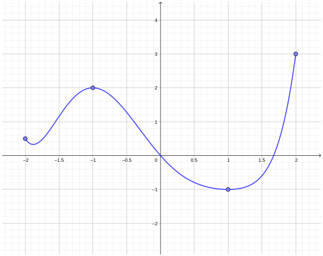
1. Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
2. Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
3. Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, α, $\beta \in [-2, 2]$
4. Να λύσετε
    1. Την εξίσωση $f(x) = 1$
    2. Την ανίσωση $f(x) > -1$

1.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

1. Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
2. Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
3. Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, α, $\beta \in [-2, 2]$
4. Να λύσετε
    1. Την εξίσωση $f(x) = 1$
    2. Την ανίσωση $f(x) > -1$

1. 

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

1. Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
2. Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
3. Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, α, $\beta \in [-2, 2]$
4. Να λύσετε
   1. Την εξίσωση $f(x) = 1$
   2. Την ανίσωση $f(x) > -1$

2. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

1. $|e^x - 1|$
2. $f(x) = (e^x - 1)^2(x - 1)^4$
3. $f(x) = x^2 - 2x - 5$

2. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

1. $|e^x - 1|$
2. $f(x) = (e^x - 1)^2(x-1)^4$
3. $f(x) = x^2 - 2x - 5$

2. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

1. $|e^x - 1|$
2. $f(x) = (e^x - 1)^2 (x - 1)^4$
3. $f(x) = x^2 - 2x - 5$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Από σημείο M της C_f φέρνουμε παράλληλες ως προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$ που τέμνουν τον $x'x$ στο A και τον $y'y$ στο B. Να βρείτε τη θέση του σημείου M για το οποίο η περίμετρος του ορθογωνίου OAMB γίνεται ελάχιστη (όπου O η αρχή των αξόνων).

4. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(x, f(x))$ και $\mathrm{B}(f(x), x)$. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των σημείων A και B.

5. Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το $2.$

1. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x-1)^2 = 2$
3. Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 4$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

5. Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

1. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x-1)^2 = 2$
3. Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 4$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

5. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το $2.$

1. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+(x-1)^2=2$
3. Αν ισχύει $f(\alpha)+f(\ln\beta)=4$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$
2. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$
3. $\ln^5 x + \ln x < 2$
4. $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$
2. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$
3. $\ln^5 x + \ln x < 2$
4. $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$
2. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$
3. $\ln^5 x + \ln x < 2$
4. $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$
2. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$
3. $\ln^5 x + \ln x < 2$
4. $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x+1)$

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2+1) > 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x+1)$

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2+1) > 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1. Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης f και τη θέση που το παρουσιάζει
2. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2+1} = \sigma\upsilon\nu x$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1. Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης f και τη θέση που το παρουσιάζει
2. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2+1} = \sigma\upsilon\nu x$

9. Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

1. $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$
2. $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1)$

9. Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

1. $f(x) = x\eta\mu\dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1)$

10. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

10. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

11. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 2$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και περιττή. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x-1) + f(x-3) < 5(2-x)$$

12. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία περιττή συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

1. το $f(0)$
2. τον τύπο της συνάρτησης f

12. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία περιττή συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$(x^2+1)f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

1. το $f(0)$
2. τον τύπο της συνάρτησης f

13. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση