Συναρτήσεις, Πράξεις

Κωνσταντίνος. Λόλας

Ισότητα Συναρτήσεων

Ορισμός

Δύο συναρτήσεις f και g θα είναι ίσες αν:

- έχουν ίδιο πεδίο ορισμού A
- $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$

Πράξεις Συναρτήσεων

Πρόσθεση

Έστω f, $x \in \mathrm{A}$ και g, $x \in \mathrm{B}$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f+g)(x)$ έχει

- Πεδίο ορισμού το $A \cap \mathrm{B}$
- Κανόνα $f(x) + g(x)$

Πράξεις Συναρτήσεων

Πράξεις

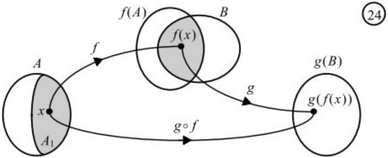
Έστω f, $x \in \mathrm{A}$ και g, $x \in \mathrm{B}$ δύο συναρτήσεις.

- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap \mathrm{B}$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A \cap \mathrm{B}$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $x \in A \cap \mathrm{B}$ και $g(x) \neq 0$

Σύνθεση της g με την f

Έστω f, $x \in \mathrm{A}$ και g, $x \in \mathrm{B}$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Πεδίο ορισμού το $\mathrm{B} \cap f(\mathrm{A})$



Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Έστω f, $x \in \mathrm{A}$ και g, $x \in \mathrm{B}$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Πεδίο ορισμού το $\mathrm{B} \cap f(\mathrm{A})$

Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Έστω f, $x \in \mathrm{A}$ και g, $x \in \mathrm{B}$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Πεδίο ορισμού το $\mathrm{B} \cap f(\mathrm{A})$
  - $x \in \mathrm{B}$

Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Έστω f, $x \in \mathrm{A}$ και g, $x \in \mathrm{B}$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Πεδίο ορισμού το $\mathrm{B} \cap f(\mathrm{A})$
  - $x \in \mathrm{B}$
  - $g(x) \in \mathrm{A}$

Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Έστω f, $x \in \mathrm{A}$ και g, $x \in \mathrm{B}$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Πεδίο ορισμού το $\mathrm{B} \cap f(\mathrm{A})$
    - $x \in \mathrm{B}$
    - $g(x) \in \mathrm{A}$
    - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

Εξάσκηση

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1) \text{ και } g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$$

είναι ίσες

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
2. Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f = g$

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
2. Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f = g$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$
Να βρείτε τις συναρτήσεις:

1. $f + g$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$
Να βρείτε τις συναρτήσεις:

1. $f + g$
2. $\frac{1}{g}$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$
Να βρείτε τις συναρτήσεις:

1. $f + g$
2. $\frac{1}{g}$
3. $\frac{f}{g}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = 4e^x \left(f(x) - e^x\right)$$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

1. $f \circ g$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

1. $f \circ g$
2. $g \circ f$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

1. $f \circ g$
2. $g \circ f$
3. $f \circ f$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

1. $f \circ g$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

1. $f \circ g$
2. $g \circ \frac{1}{f}$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = 3x + 2\ln x - 1, \text{ για κάθε } x\ 0$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f

Εξάσκηση

Έστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τη συνάρτηση g, αν $f(x) = e^x - 1$

Εξάσκηση

Έστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε τη συνάρτηση g, αν $f(x) = e^x - 1$
2. Να βρείτε τη συνάρτηση f, αν $g(x) = 3x - 2$

Εξάσκηση

Να εκφράσετε την συνάρτηση f ώς σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν ισχύει:

- $f(x) = \eta\mu 3x$
- $f(x) = e^{-x}$
- $f(x) = \ln(1 + e^{x})$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $f(0)$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $f(0)$
2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $f(0)$
2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f
3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x - 2$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $f(0)$
2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f
3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x - 2$
4. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της f είναι το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2023 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + 2) + f(3x) = 0, \gamma\iota\alpha\kappa\theta\varepsilon x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f\left(f(x)\right) = 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι $f(2x-1) = 2f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f\left(f(x)\right) = 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι $f(2x-1) = 2f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση