

Συναρτήσεις

Κανόνας De L' Hospital

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Ας τελειώσουμε με τα όρια ΕΠΙΤΕΛΟΥΣ

Αφήσαμε κάποια όρια

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $1^{+\infty}$
- $(+\infty)^0$
- 0^0

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$

- $(1+\infty)^0 = e^{0 \ln(1+\infty)} = e^{0 \cdot \infty}$

- $(1+\infty)^{\pm\infty} = e^{\pm\infty \ln(1+\infty)}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$

- $0^{(+\infty)^0} \Rightarrow e^{(+\infty)^0 \ln 0} = e^{(+\infty)^0 \cdot (-\infty)}$

- $0^{(+\infty)^0} \Rightarrow e^{(+\infty)^0 \ln 0} = e^{(+\infty)^0 \cdot (-\infty)}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \Rightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \Rightarrow e^{0 \ln 0} = e^{-\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \Rightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \Rightarrow e^{0 \ln 0} = e^{-\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \Rightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \Rightarrow e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \Rightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \Rightarrow e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \Rightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \Rightarrow e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \text{ ή } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Rightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \Rightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \Rightarrow e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ορισμός

Κανόνας De L' Hospital

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $\frac{0}{0}$, με $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ τότε αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \bar{\mathbb{R}}$$

όπου $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Εχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως Ξ ANA DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Έχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως Ξ ANA DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Έχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως Ξ ANA DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Έχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως Ξ ANA DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Τα γνωστά!

Ας αποδείξουμε τα γνωστά όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}$

Τα γνωστά!

Ας αποδείξουμε τα γνωστά όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}$

Πώς θα το γράφουμε!

Κανονικά θα έπρεπε... αλλά! π.χ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta \mu x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{1} = 1$$

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{1 - \sigma \upsilon \nu x}$$

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - e^x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - 1)$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3^x}{x - \ln x}$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - e^x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - 1)$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3^x}{x - \ln x}$$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - e^x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - 1)$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3^x}{x - \ln x}$$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$

② $\lim_{x \rightarrow -0} (x \ln x)$

③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^{\frac{1}{x}})$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{x^3}}$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$

② $\lim_{x \rightarrow -0} (x \ln x)$

③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^{\frac{1}{x}})$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{x^3}}$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$

② $\lim_{x \rightarrow -0} (x \ln x)$

③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^{\frac{1}{x}})$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{x^3}}$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -0} (x \ln x)$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{x^3}}$$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^x$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x)^{\sigma \varphi x}$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^x$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x)^{\sigma \varphi x}$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^x$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x)^{\sigma \varphi x}$$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \ln x)$

② $\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - 1)\eta\mu \frac{1}{x}]$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \ln x)$

② $\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - 1)\eta\mu \frac{1}{x}]$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 (\sigma\nu\nu x - 1)^3}{\eta\mu^4 x \cdot \ln(1 + x)}$$

Εξάσκηση 9

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = f'(1) = 0$. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x + \ln x)}{x - 1}$$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0)=2$. Εστω $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

- ❶ Να βρείτε την $g'(0)$
- ❷ Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0)=2$. Εστω $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

- ① Να βρείτε την $g'(0)$
- ② Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x)$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση