

# Συναρτήσεις

## Αντίστροφη

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Αντίστροφη

## Ορισμός

Εστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$  που είναι 1-1. Η αντίστροφή της  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε  $x \in f(A)$  αντιστοιχεί ένα  $y \in A$  ώστε:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Και επειδή συνήθως το  $x$  αφορά το  $D_f$

# Αντίστροφη

## Ορισμός

Εστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$  που είναι 1-1. Η αντίστροφή της  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε  $x \in f(A)$  αντιστοιχεί ένα  $y \in A$  ώστε:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

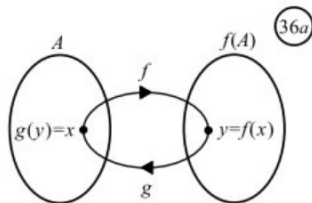
Και επειδή συνήθως το  $x$  αφορά το  $D_f$

# Αντίστροφη

## Ορισμός

Εστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$  που είναι 1-1. Η αντίστροφή της  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε  $y \in f(A)$  αντιστοιχεί ένα  $x \in A$  ώστε:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$



# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2$ !!!
- Πιο σύνθετες?

# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?



# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το  $x$ !
- Σύνολο τιμών

# Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το  $x$ !
- Σύνολο τιμών

# Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το  $x$ !
- Σύνολο τιμών

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2 !!!$
- Πιο σύνθετες?

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

- $y = x + 3$

- $y = 2x$

- $y = \sqrt{x}$

- $y = e^x$

- $y = x^2!!!$

- Πιο σύνθετες?



# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Αρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$
- Αν η  $f$  περνά από την ευθεία  $y = x$  τότε και η  $f^{-1}$  περνά, και αντίστροφα.

Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην  $y = x$  κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Αρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$
- Αν η  $f$  περνά από την ευθεία  $y = x$  τότε και η  $f^{-1}$  περνά, και αντίστροφα.

## Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην  $y = x$  κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Αρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$
- Αν η  $f$  περνά από την ευθεία  $y = x$  τότε και η  $f^{-1}$  περνά, και αντίστροφα.

## Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην  $y = x$  κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Αρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$
- Αν η  $f$  περνά από την ευθεία  $y = x$  τότε και η  $f^{-1}$  περνά, και αντίστροφα.

## Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην  $y = x$  κοινά σημεία με την αντίστροφή της.



# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Αρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$
- Αν η  $f$  περνά από την ευθεία  $y = x$  τότε και η  $f^{-1}$  περνά, και αντίστροφα.

## Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην  $y = x$  κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

# Βασική Ιδιότητα

Κρατηθείτε!

- $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in f(D_f)$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \in D_f$

# Βασική Ιδιότητα

Κρατηθείτε!

- $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in f(D_f)$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \in D_f$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1$

- ① Να δείξετε ότι είναι 1-1.
- ② Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$

## Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1$

- ① Να δείξετε ότι είναι 1-1.
- ② Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$

## Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- 2 Να βρείτε την  $f^{-1}$
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  με τον άξονα συμμετρίας τους.



## Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να βρείτε την  $f^{-1}$
- ③ Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  με τον άξονα συμμετρίας τους.

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε την  $f^{-1}$

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε την  $f^{-1}$

## Εξάσκηση 4

Εστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$
- ③ Να σχεδιάσετε τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ④ Για κάθε  $x \geq 1$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(f(x), x)$  των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση  $d$  των σημείων  $A$  και  $B$ .

## Εξάσκηση 4

Εστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ❷ Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$
- ❸ Να σχεδιάσετε τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ❹ Για κάθε  $x \geq 1$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(f(x), x)$  των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση  $d$  των σημείων  $A$  και  $B$ .

## Εξάσκηση 4

Εστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$
- ③ Να σχεδιάσετε τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ④ Για κάθε  $x \geq 1$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(f(x), x)$  των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση  $d$  των σημείων  $A$  και  $B$ .

## Εξάσκηση 4

Εστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$
- ③ Να σχεδιάσετε τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ④ Για κάθε  $x \geq 1$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(f(x), x)$  των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση  $d$  των σημείων  $A$  και  $B$ .

## Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ . Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.



## Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ .

Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$

## Εξάσκηση 7

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$f^3(x) + f(x) - x - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  και της ευθείας  $y = x$

## Εξάσκηση 7

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$f^3(x) + f(x) - x - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  και της ευθείας  $y = x$

## Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x$ , με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$

## Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x$ , με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$

## Εξάσκηση 9

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ❷ Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f^{-1}$
- ❸ Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(3x+4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ❹ Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

## Εξάσκηση 9

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ❷ Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f^{-1}$
- ❸ Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ❹ Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

## Εξάσκηση 9

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f^{-1}$
- ③ Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ④ Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$



## Εξάσκηση 9

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f^{-1}$
- ③ Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ④ Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

## Εξάσκηση 10

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και  $f^{-1} \uparrow$
- ② Αν η  $f$  είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η  $f^{-1}$  είναι περιττή
- ③ Αν ισχύει  $f(x) > x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) < x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

## Εξάσκηση 10

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και  $f^{-1} \uparrow$
- ② Αν η  $f$  είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η  $f^{-1}$  είναι περιττή
- ③ Αν ισχύει  $f(x) > x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) < x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

## Εξάσκηση 10

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και  $f^{-1} \uparrow$
- ② Αν η  $f$  είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η  $f^{-1}$  είναι περιττή
- ③ Αν ισχύει  $f(x) > x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) < x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

## Εξάσκηση 11

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) - f^{-1}(1 - x) < x + 1$

## Εξάσκηση 11

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) - f^{-1}(1 - x) < x + 1$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση