

Συναρτήσεις

Ορια συνάρτησης στο άπειρο

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

Όταν πάμε εμείς στο άπειρο λοιπόν!



Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Συμπέρασμα

Όπως και με τα κανονικά όρια:

- ① $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$ ή
- ② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ή
- ③ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ δεν θα υπάρξει

Μόνο 2 περιπτώσεις

Ασχολούμαστε μόνο με

$$\textcircled{1} \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\textcircled{2} +\infty - \infty$$

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική


Πιο άπειρο είναι μεγαλύτερο κάνει κουμάντο

- Υπάρχει μεγαλύτερο? το βγάζω κοινό παράγοντα
- Είναι ίσα? κάνω πράξεις και τα διώχνω


Δύο έτοιμα όρια

Εστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και
 $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$

1. Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$


1. Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$


1. Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

1. Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

2. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

2. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

2. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

2. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

3. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right)$

3. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right)$

3. Να βρείτε τα όρια:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right)$$

4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$

5. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

5. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

6. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

6. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

7. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a-1)x^3 - 2x + 1)$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

8. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + \mu x^2 - 2}{(\mu - 2)x^2 + 3x + 1}, \text{ είναι πραγματικός αριθμός}$$

9. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} + \mu x \right)$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^n + x - 1}{x^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f \left(\frac{x-1}{x} \right) \right) = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

12. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$

12. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$$

13. Εστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

② Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

13. Εστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

② Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

14. Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$$

15. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \sigma\upsilon\nu x$$

15. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \sigma\upsilon\nu x$$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

17. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$

17. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$

18. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$$

18. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$$

19. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - a^x}{2^x + 3a^x}, a > 0$

20. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

② $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$

20. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

② $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$

20. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$$

21. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$

21. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x - 1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$

21. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$

21. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$

22. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

22. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

22. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

23. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma\upsilon\nu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\ln x}$

23. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma\upsilon\nu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\ln x}$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$

① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

② Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x, x > 0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση