

# Εκθετική Λογαριθμική Συνάρτηση

Τα ωραία των λογαρίθμων

Κωνσταντίνος Λόλας

# Παρατήρηση 1

## Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως 9.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

# Παρατήρηση 1

## Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως 9.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

# Παρατήρηση 1

## Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως 9.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

## Παρατήρηση 2

### Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως 0.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

## Παρατήρηση 2

### Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως 0.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

## Παρατήρηση 2

Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως 0.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

## Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν  $f(x) = \ln x$  τότε τα σημεία της είναι τα  $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν  $g(x) = e^x$  τότε τα σημεία της είναι τα  $(x, e^x)$

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Αυτό σημαίνει ότι...



## Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν  $f(x) = \ln x$  τότε τα σημεία της είναι τα  $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν  $g(x) = e^x$  τότε τα σημεία της είναι τα  $(x, e^x)$

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Η γραφική παράσταση της  $\ln x$  είναι συμμετρική της  $e^x$  ως προς την ευθεία  $y = x$

# Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Ένα προς ένα?

# Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία  $\rightarrow$  Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα
- Ένα προς ένα?

# Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία  $\rightarrow$  Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα  $\rightarrow$  Δεν έχει
- Ένα προς ένα?

# Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία  $\rightarrow$  Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα  $\rightarrow$  Δεν έχει
- Ένα προς ένα?  $\rightarrow$  Ως γνησίως αύξουσα είναι!

Και τελειώνοντας...

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

①  $f(x) = \ln(e^x - 1)$

②  $f(x) = \ln\left(x - \frac{4}{x}\right)$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

①  $f(x) = \ln(e^x - 1)$

②  $f(x) = \ln\left(x - \frac{4}{x}\right)$



Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

①  $f(x) = \ln x + 1$

②  $f(x) = \ln(x - 1)$

Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

①  $f(x) = \ln x + 1$

②  $f(x) = \ln(x - 1)$

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

①  $y = x$

②  $y = x + 1$

③  $y = x - 1$

④  $y = e^x$

⑤  $y = \ln x$

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

①  $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

②  $h(x) = |\ln x|$

③  $\varphi(x) = \ln |x|$

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

①  $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

②  $h(x) = |\ln x|$

③  $\varphi(x) = \ln |x|$

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

①  $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

②  $h(x) = |\ln x|$

③  $\varphi(x) = \ln |x|$

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$ .

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$ .

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή



Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης  $f$
- ③ Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης  $f$
- ③ Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης  $f$
- ③ Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης  $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $\ln x - 1 = 0$

②  $\ln(x - 1) = 0$

③  $\ln x^2 - 1 = 0$

④  $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $\ln x - 1 = 0$

②  $\ln(x - 1) = 0$

③  $\ln x^2 - 1 = 0$

④  $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$



Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $\ln x - 1 = 0$

②  $\ln(x - 1) = 0$

③  $\ln x^2 - 1 = 0$

④  $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $\ln x - 1 = 0$

②  $\ln(x - 1) = 0$

③  $\ln x^2 - 1 = 0$

④  $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Να λύσετε την εξίσωση  $\ln x + \ln(x + 1) = \ln(x + 3) + \ln 2$

Να λύσετε την εξίσωση  $\log(x^2 + 7x) = 1 + \log(x + 1)$

Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln^2 x - 3 \ln x - 4 = 0$$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x = 2$

②  $3^x = 10$

③  $2e^x - 1 = 0$

④  $e^{-x} = 2^x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x = 2$

②  $3^x = 10$

③  $2e^x - 1 = 0$

④  $e^{-x} = 2^x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x = 2$

②  $3^x = 10$

③  $2e^x - 1 = 0$

④  $e^{-x} = 2^x$



Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x = 2$

②  $3^x = 10$

③  $2e^x - 1 = 0$

④  $e^{-x} = 2^x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $\ln x + 1 \leq 0$

②  $3 \ln x - 1 < 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $\ln x + 1 \leq 0$

②  $3 \ln x - 1 < 0$

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln(1 - x) > 1 + \ln x$$

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $3e^x - 1 < 0$

②  $e^{-x} - 2 > 0$

③  $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $3e^x - 1 < 0$

②  $e^{-x} - 2 > 0$

③  $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $3e^x - 1 < 0$

②  $e^{-x} - 2 > 0$

③  $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln^2 x - \ln x^2 - 3 > 0$$



Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{e^x - 1}{2e^x - 1} < \frac{1}{3}$$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2e^x - 1$$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2 \ln x - 1$$

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- ② Να βρείτε τις ρίζες της  $f$  και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- ③ Να βρείτε τα διαστήματα του  $x$  που η  $C_f$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- 2 Να βρείτε τις ρίζες της  $f$  και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- 3 Να βρείτε τα διαστήματα του  $x$  που η  $C_f$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- ② Να βρείτε τις ρίζες της  $f$  και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- ③ Να βρείτε τα διαστήματα του  $x$  που η  $C_f$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$



Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

Να λύσετε την εξίσωση

$$2 \ln(2x - 1) - \frac{1}{2} \ln 9 = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$$

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^4 = 11 \\ \ln(xy) = 3 \end{cases}$$

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = xe^x \\ \ln y - \ln^2 x = x \end{cases}$$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $3^{x-1} = e^{2-x}$

②  $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $3^{x-1} = e^{2-x}$

②  $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

- ① Να δείξετε ότι  $5^{\ln x} = x^{\ln 5}$
- ② Να λύσετε την εξίσωση  $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$



- ① Να δείξετε ότι  $5^{\ln x} = x^{\ln 5}$
- ② Να λύσετε την εξίσωση  $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^{\ln x^2} = e^2 x$$

Το ενοίκιο  $Q(t)$  ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από  $t$  χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$
- ② Να δείξετε ότι  $Q(t) = 200 + 64(1 - 2^{-\frac{1}{2}})$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο  $Q(t)$  ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από  $t$  χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$
- ② Να δείξετε ότι  $Q(t) = 200 + 64(1 - 2^{-\frac{1}{2}})$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο  $Q(t)$  ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από  $t$  χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$
- ② Να δείξετε ότι  $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο  $Q(t)$  ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από  $t$  χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$
- ② Να δείξετε ότι  $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο  $Q(t)$  ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από  $t$  χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$
- ② Να δείξετε ότι  $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ





Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση