

Συναρτήσεις

Κυρτότητα, Σημεία Καμψής

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να "χαράξουμε"

- 1 Το πεδίο ορισμού
- 2 Τα σημεία τομής με άξονες
- 3 Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
- 4 Τη συνέχεια
- 5 Την παραγωγισιμότητα
- 6 Τη μονοτονία
- 7 Τα ακρότατα

Εμειναν

- 8 Το πώς "ανέρχεται" ή "κατέρχεται" (κυρτότητα)
- 9 Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να "χαράξουμε"

- 1 Το πεδίο ορισμού
- 2 Τα σημεία τομής με άξονες
- 3 Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
- 4 Τη συνέχεια
- 5 Την παραγωγισιμότητα
- 6 Τη μονοτονία
- 7 Τα ακρότατα

Εμειναν

- 1 Το πώς "ανέρχεται" ή "κατέρχεται" (κυρτότητα)
- 2 Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να "χαράξουμε"

- ① Το πεδίο ορισμού
- ② Τα σημεία τομής με άξονες
- ③ Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
- ④ Τη συνέχεια
- ⑤ Την παραγωγισιμότητα
- ⑥ Τη μονοτονία
- ⑦ Τα ακρότατα

Εμειναν

- ① Το πώς "ανέρχεται" ή "κατέρχεται" (κυρτότητα)
- ② Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να "χαράξουμε"

- 1 Το πεδίο ορισμού
- 2 Τα σημεία τομής με άξονες
- 3 Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
- 4 Τη συνέχεια
- 5 Την παραγωγισιμότητα
- 6 Τη μονοτονία
- 7 Τα ακρότατα

Εμειναν

- 1 Το πώς "ανέρχεται" ή "κατέρχεται" (κυρτότητα)
- 2 Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Κυρτότητα

Ορισμός

Ενα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

• Κυρτή γωνία

• Κυρτή παραβολή

• Κυρτή συνάρτηση

Κυρτότητα

Ορισμός

Ενα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ενα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $y = x^2 + 1$ (βλ. σχήμα στον πίνακα)
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ενα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $ax^2 + bx + c$ με $a > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ενα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ενα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ενα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Συναρτήσεις

Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ
- η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

Και άρα στο εύκολο

Κυρτότητα από $f''(x)$

Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι κυρτή στο Δ
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι κοίλη στο Δ

Προσοχή, δεν είναι αυτός ο ορισμός. Ούτε ισχύει το αντίστροφο

Και άρα στο εύκολο

Κυρτότητα από $f''(x)$

Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι κυρτή στο Δ
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι κοίλη στο Δ

Προσοχή, δεν είναι αυτός ο ορισμός. Ούτε ισχύει το αντίστροφο

Και ένα σχόλιο

Φτιάξτε μία κυρτή συνάρτηση και μελετήστε ΚΑΘΕ εφαπτομένη της!

Ανίσωση SOS

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση. Αντίστοιχα από "πάνω" όταν είναι κοίλη.

Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και γίνεται με ΘΜΤ ή με ακρότατα.

Και ένα σχόλιο

Φτιάξτε μία κυρτή συνάρτηση και μελετήστε ΚΑΘΕ εφαπτομένη της!

Ανίσωση SOS

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση. Αντίστοιχα από "πάνω" όταν είναι κοίλη.

Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και γίνεται με ΘΜΤ ή με ακρότατα.

Και ένα σχόλιο

Φτιάξτε μία κυρτή συνάρτηση και μελετήστε ΚΑΘΕ εφαπτομένη της!

Ανίσωση SOS

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση. Αντίστοιχα από "πάνω" όταν είναι κοίλη.

Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και γίνεται με ΘΜΤ ή με ακρότατα.

Σημείο Καμπής

Ορισμός

Εστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτόμενη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

Θεώρημα Σημείου Καμπής

Ιδιότητα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Απόδειξη

Πού κρύβονται?

① $f''(x_0) = 0$

② $f''(x_0)$ δεν ορίζεται

Πού κρύβονται?

- ① $f''(x_0) = 0$
- ② $f''(x_0)$ δεν ορίζεται

Πού κρύβονται?

① $f''(x_0) = 0$

② $f''(x_0)$ δεν ορίζεται

Πείτε το, αφού δεν κρατιέστε! Τα σημεία καμπής είναι τα ακρότατα της f' , χωρίς τα άκρα!

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

① $f(x) = x^2 - \ln x$

② $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③ $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④ $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

① $f(x) = x^2 - \ln x$

② $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③ $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④ $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

① $f(x) = x^2 - \ln x$

② $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③ $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④ $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

① $f(x) = x^2 - \ln x$

② $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③ $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④ $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
- ② Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
- ② Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
- ② Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

① $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

② $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

① $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

② $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

① $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

② $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής των συναρτήσεων:

① $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$

② $f(x) = 2x(\ln x - 1) - \ln^2 x$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = 2x(\ln x - 1) - \ln^2 x$$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

① $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \pi)$

② $f(x) = \varepsilon\varphi x - x + 2 \ln(\sigma\upsilon\nu x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

① $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \pi)$

② $f(x) = \varepsilon\varphi x - x + 2 \ln(\sigma\upsilon\nu x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$

- 1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- 2 Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$. Να δείξετε ότι:

- ① Η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$
- ② $x_0 < \frac{4}{5}$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$. Να δείξετε ότι:

- ① Η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$
- ② $x_0 < \frac{4}{5}$

Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6e^x - x^3 - 4x^2$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

- ① Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$
- ② Η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

- ① Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$
- ② Η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Εξάσκηση 11

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 - 1$ είναι κυρτή σε όλο το \mathbb{R}

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f''(x) + f(x) \neq 2f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής.

Εξάσκηση 13

Εστω $f : (1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in (1, 3)$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f , δεν παρουσιάζει καμπή

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) > f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$

Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) > f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$

Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ [Πίσω στη θεωρία](#)

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) > f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$

Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ [Πίσω στη θεωρία](#)

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) > f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$

Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία