Λογάριθμοι

Ορισμοί

Κωνσταντίνος Λόλας

Σταμάτααααααα

Τελειώνουμε!

Γιατί καινούρια έννοια?

- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στον χειρισμό
- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στην εύρεση
- Οι τεράστιοι αριθμοί είναι δυσβάστακτοι

Γιατί καινούρια έννοια?

- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στον χειρισμό
- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στην εύρεση
- Οι τεράστιοι αριθμοί είναι δυσβάστακτοι

Γιατί καινούρια έννοια?

- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στον χειρισμό
- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στην εύρεση
- Οι τεράστιοι αριθμοί είναι δυσβάστακτοι

Ας κατανοήσουμε την ανάγκη!

- Δεν γνωρίζουμε τις ρίζες των πραγματικών, αλλά γράφουμε $\sqrt{2}$
- Δεν γνωρίζουμε τα ημίτονα των τόξων, αλλά γράφουμε $\eta\mu(\frac{\pi}{7})$

Γιατί να μην υπάρχει λοιπόν το $2^x = 5$? Περιγράψτε το!

Ας κατανοήσουμε την ανάγκη!

- Δεν γνωρίζουμε τις ρίζες των πραγματικών, αλλά γράφουμε $\sqrt{2}$
- Δεν γνωρίζουμε τα ημίτονα των τόξων, αλλά γράφουμε $\eta\mu(\frac{\pi}{7})$

Γιατί να μην υπάρχει λοιπόν το $2^x = 5$? Περιγράψτε το!

Ας κατανοήσουμε την ανάγκη!

- Δεν γνωρίζουμε τις ρίζες των πραγματικών, αλλά γράφουμε $\sqrt{2}$
- Δεν γνωρίζουμε τα ημίτονα των τόξων, αλλά γράφουμε $\eta\mu(\frac{\pi}{7})$

Γιατί να μην υπάρχει λοιπόν το $2^x = 5$? Περιγράψτε το!

Λογάριθμοι λοιπόν

Ορισμός

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Για κάθε $a > 0$, $a \neq 1$ και $x > 0$

Παραλλαγές

- $\log_{10} = \log$
- $\log_e = \ln$

Ασκήσεις

Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \Longleftarrow (\log_a x = y \iff a^y = x)$

Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \Longleftarrow (\log_a x = y \iff a^y = x)$

Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \iff (\log_a x = y \iff a^y = x)$

Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \impliedby (\log_a x = y \iff a^y = x)$

Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \Longleftarrow \left(\log_a x = y \iff a^y = x\right)$

Και λίγες ακόμα

Ιδιότητες

- $\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Απόδειξη

Και λίγες ακόμα

Ιδιότητες

- $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Απόδειξη

Και λίγες ακόμα

Ιδιότητες

- $\log_{\alpha}\left(\theta_1 \cdot \theta_2\right) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$
- $\log_{\alpha}\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha}\theta_1 - \log_{\alpha}\theta_2$
- $\log_{\alpha}\theta^{\kappa} = \kappa\log_{\alpha}\theta$

Απόδειξη

Σχεδόν Τελειώσαμε!

Εμεινε μόνο ο ορισμός της συνάρτησης $\ln x$ και η γραφική της παράσταση!

Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

1. $\log_2 x = 3$
2. $\log_3 x = -2$
3. $\log_4 x = \frac{1}{2}$
4. $\ln x = 2$
5. $\log x + 1 = 0$
6. $\log_x 9 = 2$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

1. $\log_2 x = 3$
2. $\log_3 x = -2$
3. $\log_4 x = \frac{1}{2}$
4. $\ln x = 2$
5. $\log x + 1 = 0$
6. $\log_x 9 = 2$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

1. $\log_2 x = 3$
2. $\log_3 x = -2$
3. $\log_4 x = \frac{1}{2}$
4. $\ln x = 2$
5. $\log x + 1 = 0$
6. $\log_x 9 = 2$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

1. $\log_2 x = 3$
2. $\log_3 x = -2$
3. $\log_4 x = \frac{1}{2}$
4. $\ln x = 2$
5. $\log x + 1 = 0$
6. $\log_x 9 = 2$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

1. $\log_2 x = 3$
2. $\log_3 x = -2$
3. $\log_4 x = \frac{1}{2}$
4. $\ln x = 2$
5. $\log x + 1 = 0$
6. $\log_x 9 = 2$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

1. $\log_2 x = 3$
2. $\log_3 x = -2$
3. $\log_4 x = \frac{1}{2}$
4. $\ln x = 2$
5. $\log x + 1 = 0$
6. $\log_x 9 = 2$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1. $\ln e^3$
2. $\log \frac{1}{100}$
3. $e^{\ln 3}$
4. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
6. $\log_8 \sqrt{2}$
7. $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1. $\ln e^3$
2. $\log \frac{1}{100}$
3. $e^{\ln 3}$
4. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
6. $\log_8 \sqrt{2}$
7. $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1. $\ln e^3$
2. $\log \frac{1}{100}$
3. $e^{\ln 3}$
4. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
6. $\log_8 \sqrt{2}$
7. $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1. $\ln e^3$
2. $\log \dfrac{1}{100}$
3. $e^{\ln 3}$
4. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
6. $\log_8 \sqrt{2}$
7. $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1. $\ln e^3$
2. $\log \dfrac{1}{100}$
3. $e^{\ln 3}$
4. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
6. $\log_8 \sqrt{2}$
7. $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1. $\ln e^3$
2. $\log \frac{1}{100}$
3. $e^{\ln 3}$
4. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
6. $\log_8 \sqrt{2}$
7. $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1. $\ln e^3$
2. $\log \dfrac{1}{100}$
3. $e^{\ln 3}$
4. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
6. $\log_8 \sqrt{2}$
7. $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

Εξάσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

1. $\log 4 + \log 20 - 3\log 2 = 1$
2. $\ln 2e - \frac{1}{2}\ln 4 = 1$
3. $\log \sqrt{8} + \frac{3}{2}\log 5$

Εξάσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

1. $\log 4 + \log 20 - 3\log 2 = 1$
2. $\ln 2e - \dfrac{1}{2}\ln 4 = 1$
3. $\log\sqrt{8} + \dfrac{3}{2}\log 5$

Εξάσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

1. $\log 4 + \log 20 - 3\log 2 = 1$
2. $\ln 2e - \dfrac{1}{2}\ln 4 = 1$
3. $\log \sqrt{8} + \dfrac{3}{2}\log 5$

Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

1. $5^{1+3\log_5 2}$
2. $100^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 2}$
3. $\left(\frac{1}{e}\right)^{3-\ln\sqrt{2}}$

Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

1. $5^{1+3\log_5 2}$
2. $100^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 2}$
3. $\left(\frac{1}{e}\right)^{3-\ln\sqrt{2}}$

Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

1. $5^{1+3\log_5 2}$
2. $100^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 2}$
3. $\left(\frac{1}{e}\right)^{3-\ln\sqrt{2}}$

Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Θέτουμε $\log_\alpha \theta_1 = x_1 \implies \alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\log_\alpha \theta_2 = x_2 \implies \alpha^{x_2} = \theta_2$ και έχουμε

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Θέτουμε $\log_\alpha \theta_1 = x_1 \implies \alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\log_\alpha \theta_2 = x_2 \implies \alpha^{x_2} = \theta_2$ και έχουμε

$$\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha (\alpha^{x_1}\alpha^{x_2}) = \log_\alpha \alpha^{x_1+x_2} = x_1+x_2 = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Θέτουμε $\log_\alpha \theta_1 = x_1 \implies \alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\log_\alpha \theta_2 = x_2 \implies \alpha^{x_2} = \theta_2$ και έχουμε

$$\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \log_\alpha \alpha^{x_1 - x_2} = x_1 - x_2 = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Θέτουμε $\log_\alpha \theta = x \implies \alpha^x = \theta$ και έχουμε

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Θέτουμε $\log_\alpha \theta = x \implies \alpha^x = \theta$ και έχουμε

$$\log_\alpha \theta^\kappa = \log_\alpha (\alpha^x)^\kappa = \log_\alpha \alpha^{\kappa x} = \kappa x = \kappa \log_\alpha \theta$$

Πίσω στη θεωρία