

Συναρτήσεις

Αντίστροφη

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

Αντίστροφη

Ορισμός

Εστω συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ που είναι 1-1. Η αντίστροφή της $f^{-1} : B \rightarrow A$ ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε $x \in f(A)$ αντιστοιχεί ένα $y \in A$ ώστε:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Και επειδή συνήθως το x αφορά το D_f

Αντίστροφη

Ορισμός

Εστω συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ που είναι 1-1. Η αντίστροφή της $f^{-1} : B \rightarrow A$ ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε $x \in f(A)$ αντιστοιχεί ένα $y \in A$ ώστε:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

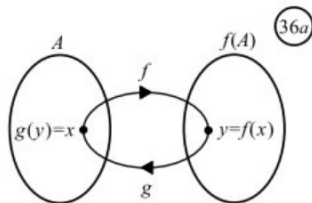
Και επειδή συνήθως το x αφορά το D_f

Αντίστροφη

Ορισμός

Εστω συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ που είναι 1-1. Η αντίστροφή της $f^{-1} : B \rightarrow A$ ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί ένα $x \in A$ ώστε:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$



Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2$!!!
- Πιο σύνθετες?

Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το x !
- Σύνολο τιμών

Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το x !
- Σύνολο τιμών

Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το x !
- Σύνολο τιμών

Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε y και ζητάτε x

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε y και ζητάτε x

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε y και ζητάτε x

- $y = x + 3$

- $y = 2x$

- $y = \sqrt{x}$

- $y = e^x$

- $y = x^2!!!$

- Πιο σύνθετες?

Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε y και ζητάτε x

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε y και ζητάτε x

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε y και ζητάτε x

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε y και ζητάτε x

- $y = x + 3$
- $y = 2x$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = e^x$
- $y = x^2!!!$
- Πιο σύνθετες?

Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα x γίνονται y σχηματίστε την f^{-1}

Αρα:

- Η f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία $y = x$
- Αν η f περνά από την ευθεία $y = x$ τότε και η f^{-1} περνά, και αντίστροφα.

Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην $y = x$ κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα x γίνονται y σχηματίστε την f^{-1}

Αρα:

- Η f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία $y = x$
- Αν η f περνά από την ευθεία $y = x$ τότε και η f^{-1} περνά, και αντίστροφα.

Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην $y = x$ κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα x γίνονται y σχηματίστε την f^{-1}

Αρα:

- Η f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία $y = x$
- Αν η f περνά από την ευθεία $y = x$ τότε και η f^{-1} περνά, και αντίστροφα.

Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην $y = x$ κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα x γίνονται y σχηματίστε την f^{-1}

Αρα:

- Η f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία $y = x$
- Αν η f περνά από την ευθεία $y = x$ τότε και η f^{-1} περνά, και αντίστροφα.

Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην $y = x$ κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα x γίνονται y σχηματίστε την f^{-1}

Αρα:

- Η f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία $y = x$
- Αν η f περνά από την ευθεία $y = x$ τότε και η f^{-1} περνά, και αντίστροφα.

Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην $y = x$ κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

Βασική Ιδιότητα

Κρατηθείτε!

- $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in f(D_f)$
- $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in D_f$

Βασική Ιδιότητα

Κρατηθείτε!

- $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in f(D_f)$
- $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in D_f$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$

① Να δείξετε ότι είναι 1-1.

② Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$

- ① Να δείξετε ότι είναι 1-1.
- ② Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να βρείτε την f^{-1}
- ③ Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα συμμετρίας τους.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να βρείτε την f^{-1}
- ③ Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα συμμετρίας τους.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

② Να βρείτε την f^{-1}

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την f^{-1}

4. Εστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) = (x - 1)^2 + 2$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την αντίστροφη της f
- ③ Να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ④ Για κάθε $x \geq 1$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$ των C_f και $C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση d των σημείων A και B .

4. Εστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) = (x - 1)^2 + 2$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την αντίστροφη της f
- ③ Να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ④ Για κάθε $x \geq 1$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$ των C_f και $C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση d των σημείων A και B .

4. Εστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) = (x - 1)^2 + 2$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την αντίστροφη της f
- ③ Να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ④ Για κάθε $x \geq 1$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$ των C_f και $C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση d των σημείων A και B .

4. Εστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(x) = (x - 1)^2 + 2$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε την αντίστροφη της f
- ③ Να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων
- ④ Για κάθε $x \geq 1$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$ των C_f και $C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση d των σημείων A και B .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

7. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$f^3(x) + f(x) - x - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y = x$

7. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$f^3(x) + f(x) - x - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y = x$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1, f(1) = -2$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1}
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ④ Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1$, $f(1) = -2$.

- ❶ Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ❷ Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1}
- ❸ Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ❹ Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1$, $f(1) = -2$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1}
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ④ Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1$, $f(1) = -2$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1}
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- ④ Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1} \uparrow$
- ② Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η f^{-1} είναι περιττή
- ③ Αν ισχύει $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) < x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1} \uparrow$
- ② Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η f^{-1} είναι περιττή
- ③ Αν ισχύει $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) < x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1} \uparrow$
- ② Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η f^{-1} είναι περιττή
- ③ Αν ισχύει $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) < x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

11. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1$.

- ❶ Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ❷ Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f^{-1}(1 - x) < x + 1$

11. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f^{-1}(1 - x) < x + 1$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση