Συναρτήσεις

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Κωνσταντίνος Λόλας

Σιγά τα ολοκληρώματα!

Τι μπορούμε να ολοκληρώσουμε

1. Πολυώνυμα
2. Εκθετικές
3. Τριγωνομετρικές
4. Ρητές με πρωτοβάθμιο διαιρέτη
5. Πρωτοβάθμιες άρρητες
6. Ετοιμες από σύνθεση και φυσικά
7. κάθε πρόσθεση ή αφαίρεση αυτών ΜΟΝΟ

Τι γίνεται με τον πολλαπλασιασμό? Διαίρεση? Ακόμα και την απλή $\ln x$?

Ιστορία

Ξέρουμε να παραγωγίζουμε γινόμενο

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$f'g = (f \cdot g)' - fg'$$

Αρα

$$\int f'g\,dx = \int (f \cdot g)'\,dx - \int fg'\,dx$$
$$\int f'g\,dx = f \cdot g - \int fg'\,dx$$

Ιστορία

Ξέρουμε να παραγωγίζουμε γινόμενο

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (f \cdot g)' - fg'\end{aligned}$$

Αρα

$$\int f'g\,dx = \int (f \cdot g)'\,dx - \int fg'\,dx$$

$$\int f'g\,dx = f \cdot g - \int fg'\,dx$$

Ε και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Ε και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Ε και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Ε και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Παραδείγματα

1. $\int xe^x \, dx$
2. $\int x^3 e^x \, dx$
3. $\int x \ln x \, dx$
4. $\int e^{2x} \eta\mu(3x+1) \, dx$

Παραδείγματα

1. $\int xe^x \, dx$
2. $\int x^3 e^x \, dx$
3. $\int x \ln x \, dx$
4. $\int e^{2x} \eta\mu(3x+1) \, dx$

Παραδείγματα

1. $\int xe^x \, dx$
2. $\int x^3 e^x \, dx$
3. $\int x \ln x \, dx$
4. $\int e^{2x} \eta\mu(3x+1) \, dx$

Παραδείγματα

1. $\int xe^x \, dx$
2. $\int x^3 e^x \, dx$
3. $\int x \ln x \, dx$
4. $\int e^{2x} \eta\mu(3x+1) \, dx$

Και στα εντός ύλης!

Κατά παράγοντες

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!
Μεθόδους για ”όμορφες”

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!
Μεθόδους για ”όμορφες”

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!
Μεθόδους για ”όμορφες”

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε <u>ΠΟΤΕ</u> να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!
Μεθόδους για ”όμορφες”

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!
Μεθόδους για ”όμορφες”

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

Δοκιμές σύνθεσης

1. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
3. $\int 4x\varepsilon\varphi(x^2)\ln(\eta\mu(x^2))\,dx$

Δοκιμές σύνθεσης

1. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
3. $\int 4x\varepsilon\varphi(x^2)\ln(\eta\mu(x^2))\,dx$

Δοκιμές σύνθεσης

1. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
3. $\int 4x\varepsilon\varphi(x^2)\ln(\eta\mu(x^2))\,dx$

Ναι, αλλά... τύπο έχουμε?

Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Θέτω $x = g(u)$, άρα

- για $x = a \implies u = k$
- για $x = b \implies u = l$
- $dx = g'(u)du$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_k^l f(g(u))g'(u)\,du$$

Εξάσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^1 x\,dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x\,dx$
3. $\int_0^{\pi} x^2\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Εξάσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^1 x\,dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x\,dx$
3. $\int_0^{\pi} x^2\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Εξάσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^1 x\,dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x\,dx$
3. $\int_0^{\pi} x^2\sigma\upsilon\nu x\,dx$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_1^2 2x \ln x \, dx$
2. $\int_1^2 \ln x \, dx$
3. $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$
4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
5. $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_1^2 2x \ln x \, dx$
2. $\int_1^2 \ln x \, dx$
3. $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$
4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
5. $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_1^2 2x \ln x \, dx$
2. $\int_1^2 \ln x \, dx$
3. $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$
4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
5. $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_1^2 2x \ln x \, dx$
2. $\int_1^2 \ln x \, dx$
3. $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$
4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
5. $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_1^2 2x \ln x \, dx$
2. $\int_1^2 \ln x \, dx$
3. $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$
4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
5. $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x \, dx$
2. $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2x}{e^x} \, dx$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x \, dx$
2. $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2x}{e^x} \, dx$

Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{0}{4}} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\, dx$

Εξάσκηση 5

Εστω F μία παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x)\,dx$

Εξάσκηση 6

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$ και συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει $\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\, \eta\mu x\, dx = \pi$. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$

Εξάσκηση 7

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, έχει συνεχή f'' και ισχύει

$$\int_0^2 \left(xf''(x) + 2f'(x)\right)\, dx = 0$$

1. Να δείξετε ότι $f(0) = f(2)$
2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 7

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, έχει συνεχή f'' και ισχύει

$$\int_0^2 \left(xf''(x) + 2f'(x)\right)\, dx = 0$$

1. Να δείξετε ότι $f(0) = f(2)$
2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 2x + 1$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-1}^{0} f(x+1)\,dx$
2. $\int_{1}^{e} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 2x + 1$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{-1}^{0} f(x+1)\,dx$
2. $\int_{1}^{e} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx$

Εξάσκηση 9

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι

$$\int_2^4 f\left(\frac{2}{x}\right) dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x^2}\, dx$$

Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(x-\frac{\pi}{3})\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx$
3. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
4. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3})\, dx$
2. $\int_0^1 \dfrac{1}{2x+1}\, dx$
3. $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
4. $\int_1^e \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3})\, dx$
2. $\int_0^1 \dfrac{1}{2x+1}\, dx$
3. $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
4. $\int_1^e \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3})\, dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\, dx$
3. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$
4. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

Εξάσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

1. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$

Εξάσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

1. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)\,dx$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)\, dx$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

1. 1. Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
   2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$
2. Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

1.
   1. Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
   2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}\,dx$
2. Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

1.
   1. Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
   2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}\,dx$
2. Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Εξάσκηση 14

Εστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1-x) + f(1+x) = 2 \text{ για κάθε } x \in [-1,1]$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)\,dx$

Εξάσκηση 15

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} |\ln x - 1|\, dx$

Εξάσκηση 16

Να υπολογίσετ το ολοκλήρωμα $\int_1^e \eta\mu(\ln x)\,dx$

Εξάσκηση 17

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει:

$$f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)\,dx \,, x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την f

Εξάσκηση 18

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\, dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$