

# Συναρτήσεις

## Πράξεις Συναρτήσεων

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Ισότητα Συναρτήσεων

## Ορισμός

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  θα είναι ίσες αν:

- έχουν ίδιο πεδίο ορισμού  $A$
- $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in A$

# Πράξεις Συναρτήσεων

## Πρόσθεση

Έστω  $f(x)$ ,  $x \in A$  και  $g(x)$ ,  $x \in B$  δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση  $(f + g)(x)$  έχει

- Πεδίο ορισμού το  $A \cap B$
- Κανόνα  $f(x) + g(x)$

# Πράξεις Συναρτήσεων

## Πράξεις

Έστω  $f(x), x \in A$  και  $g(x), x \in B$  δύο συναρτήσεις.

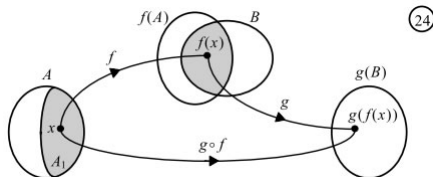
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in A \cap B$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A \cap B$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x), x \in A \cap B$  και  $g(x) \neq 0$

## Και κάτι καινούριο

### Σύνθεση της $g$ με την $f$

Έστω  $f(x)$ ,  $x \in A$  και  $g(x)$ ,  $x \in B$  δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση  $(f \circ g)(x)$  έχει

- Κανόνα  $f(g(x))$
- Πεδίο ορισμού το  $\{x \in B | g(x) \in A\}$



# Δύσκολο; Μπα

## Σύνθεση

Έστω  $f(x)$ ,  $x \in A$  και  $g(x)$ ,  $x \in B$  δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση  $(f \circ g)(x)$  έχει

- Κανόνα  $f(g(x))$
- Ορίζεται αν  $A \cap g(B) \neq \emptyset$ 
  - $x \in B$
  - $g(x) \in A$
  - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

# Δύσκολο; Μπα

## Σύνθεση

Έστω  $f(x)$ ,  $x \in A$  και  $g(x)$ ,  $x \in B$  δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση  $(f \circ g)(x)$  έχει

- Κανόνα  $f(g(x))$
- Ορίζεται αν  $A \cap g(B) \neq \emptyset$ 
  - $x \in B$
  - $g(x) \in A$
  - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

# Δύσκολο; Μπα

## Σύνθεση

Έστω  $f(x)$ ,  $x \in A$  και  $g(x)$ ,  $x \in B$  δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση  $(f \circ g)(x)$  έχει

- Κανόνα  $f(g(x))$
- Ορίζεται αν  $A \cap g(B) \neq \emptyset$ 
  - $x \in B$
  - $g(x) \in A$
  - τύπος είναι απλά αντικατάσταση



## Δύσκολο; Μπα

### Σύνθεση

Έστω  $f(x)$ ,  $x \in A$  και  $g(x)$ ,  $x \in B$  δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση  $(f \circ g)(x)$  έχει

- Κανόνα  $f(g(x))$
- Ορίζεται αν  $A \cap g(B) \neq \emptyset$ 
  - $x \in B$
  - $g(x) \in A$
  - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

## Εξάσκηση 1

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1) \text{ και } g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$$

είναι ίσες

## Εξάσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  και  $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- ① Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
- ② Αν  $f \neq g$  να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο να ισχύει  $f = g$
- ③ Να γράψετε τη συνάρτηση  $g$  σε μορφή δύναμης

## Εξάσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  και  $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- ① Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
- ② Αν  $f \neq g$  να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο να ισχύει  $f = g$
- ③ Να γράψετε τη συνάρτηση  $g$  σε μορφή δύναμης

## Εξάσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  και  $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- ① Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
- ② Αν  $f \neq g$  να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο να ισχύει  $f = g$
- ③ Να γράψετε τη συνάρτηση  $g$  σε μορφή δύναμης

## Εξάσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$  και  $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$  Να βρείτε τις συναρτήσεις:

1  $f + g$

2  $\frac{1}{g}$

3  $\frac{f}{g}$

## Εξάσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$  και  $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$  Να βρείτε τις συναρτήσεις:

1  $f + g$

2  $\frac{1}{g}$

3  $\frac{f}{g}$

## Εξάσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$  και  $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$  Να βρείτε τις συναρτήσεις:

①  $f + g$

②  $\frac{1}{g}$

③  $\frac{f}{g}$



## Εξάσκηση 4

Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = 4e^x (f(x) - e^x)$$

## Εξάσκηση 5

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x-1}$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις

①  $f \circ g$

②  $g \circ f$

③  $f \circ f$

## Εξάσκηση 5

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x-1}$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις

①  $f \circ g$

②  $g \circ f$

③  $f \circ f$

## Εξάσκηση 5

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x-1}$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις

①  $f \circ g$

②  $g \circ f$

③  $f \circ f$

## Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις

①  $f \circ g$

②  $g \circ \frac{1}{f}$

## Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις

①  $f \circ g$

②  $g \circ \frac{1}{f}$

## Εξάσκηση 7

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = 3x + 2 \ln x - 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$

## Εξάσκηση 8

Έστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε τη συνάρτηση  $g$ , αν  $f(x) = e^x - 1$
- ② Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ , αν  $g(x) = 3x - 2$



## Εξάσκηση 8

Έστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε τη συνάρτηση  $g$ , αν  $f(x) = e^x - 1$
- ② Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$ , αν  $g(x) = 3x - 2$

## Εξάσκηση 9

Να εκφράσετε την συνάρτηση  $f$  ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν ισχύει:

- $f(x) = \eta\mu 3x$
- $f(x) = e^{-x}$
- $f(x) = \ln(1 + e^x)$

## Εξάσκηση 10

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ❶ Να βρείτε το  $f(0)$
- ❷ Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f$
- ❸ Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < x - 2$
- ❹ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^{f(x)} - 2023 = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση

## Εξάσκηση 10

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ❶ Να βρείτε το  $f(0)$
- ❷ Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f$
- ❸ Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < x - 2$
- ❹ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^{f(x)} - 2023 = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση

## Εξάσκηση 10

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε το  $f(0)$
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < x - 2$
- ④ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^{f(x)} - 2023 = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση

## Εξάσκηση 10

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε το  $f(0)$
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < x - 2$
- ④ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^{f(x)} - 2023 = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση

## Εξάσκηση 11

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + 2) + f(3x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

## Εξάσκηση 12

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ❶ Να δείξετε ότι  $f(2x - 1) = 2f(x) - 1, x \in \mathbb{R}$
- ❷ Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα



## Εξάσκηση 12

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι  $f(2x - 1) = 2f(x) - 1, x \in \mathbb{R}$
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα