

Εκθετική Λογαριθμική Συνάρτηση

Τα ωραία των λογαρίθμων

Κωνσταντίνος Λόλας

Παρατήρηση 1

Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως 9.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 1

Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως 9.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 1

Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως 9.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 2

Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως 0.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 2

Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως 0.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 2

Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Άρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως 0.999999... θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν $f(x) = \ln x$ τότε τα σημεία της είναι τα $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν $g(x) = e^x$ τότε τα σημεία της είναι τα (x, e^x)

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Αυτό σημαίνει ότι...

Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν $f(x) = \ln x$ τότε τα σημεία της είναι τα $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν $g(x) = e^x$ τότε τα σημεία της είναι τα (x, e^x)

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Η γραφική παράσταση της $\ln x$ είναι συμμετρική της e^x ως προς την ευθεία $y = x$

Ιδιότητες της C_{ln}

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Ένα προς ένα?

Ιδιότητες της C_{ln}

- Μονοτονία → Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα
- Ένα προς ένα?

Ιδιότητες της C_{ln}

- Μονοτονία → Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα → Δεν έχει
- Ένα προς ένα?

Ιδιότητες της C_{ln}

- Μονοτονία \rightarrow Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα \rightarrow Δεν έχει
- Ένα προς ένα? \rightarrow Ως γνησίως αύξουσα είναι!

Και τελειώνοντας...

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

① $f(x) = \ln(e^x - 1)$

② $f(x) = \ln\left(x - \frac{4}{x}\right)$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

① $f(x) = \ln(e^x - 1)$

② $f(x) = \ln\left(x - \frac{4}{x}\right)$

Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

① $f(x) = \ln x + 1$

② $f(x) = \ln(x - 1)$

Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

① $f(x) = \ln x + 1$

② $f(x) = \ln(x - 1)$

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- ① $y = x$
- ② $y = x + 1$
- ③ $y = x - 1$
- ④ $y = e^x$
- ⑤ $y = \ln x$

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

① $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

② $h(x) = |\ln x|$

③ $\varphi(x) = \ln |x|$

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

① $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

② $h(x) = |\ln x|$

③ $\varphi(x) = \ln |x|$

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

① $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

② $h(x) = |\ln x|$

③ $\varphi(x) = \ln |x|$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$.

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιπτή

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$.

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιπτέρη

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιπτή

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιπτέρι

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
- ③ Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
- ③ Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
- ③ Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x - 1 = 0$

② $\ln(x - 1) = 0$

③ $\ln x^2 - 1 = 0$

④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x - 1 = 0$

② $\ln(x - 1) = 0$

③ $\ln x^2 - 1 = 0$

④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

- ① $\ln x - 1 = 0$
- ② $\ln(x - 1) = 0$
- ③ $\ln x^2 - 1 = 0$
- ④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

- ① $\ln x - 1 = 0$
- ② $\ln(x - 1) = 0$
- ③ $\ln x^2 - 1 = 0$
- ④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x + 1) = \ln(x + 3) + \ln 2$

Να λύσετε την εξίσωση $\log(x^2 + 7x) = 1 + \log(x + 1)$

Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln^2 x - 3 \ln x - 4 = 0$$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $e^x = 2$

② $3^x = 10$

③ $2e^x - 1 = 0$

④ $e^{-x} = 2^x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $e^x = 2$

② $3^x = 10$

③ $2e^x - 1 = 0$

④ $e^{-x} = 2^x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

- ① $e^x = 2$
- ② $3^x = 10$
- ③ $2e^x - 1 = 0$
- ④ $e^{-x} = 2^x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

- ① $e^x = 2$
- ② $3^x = 10$
- ③ $2e^x - 1 = 0$
- ④ $e^{-x} = 2^x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x + 1 \leq 0$

② $3 \ln x - 1 < 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x + 1 \leq 0$

② $3 \ln x - 1 < 0$

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln(1 - x) > 1 + \ln x$$

Να λύσετε τις ανισώσεις

① $3e^x - 1 < 0$

② $e^{-x} - 2 > 0$

③ $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Να λύσετε τις ανισώσεις

① $3e^x - 1 < 0$

② $e^{-x} - 2 > 0$

③ $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Να λύσετε τις ανισώσεις

① $3e^x - 1 < 0$

② $e^{-x} - 2 > 0$

③ $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln^2 x - \ln x^2 - 3 > 0$$

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{e^x - 1}{2e^x - 1} < \frac{1}{3}$$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2e^x - 1$$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2 \ln x - 1$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- ③ Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- ③ Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- ③ Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

① $f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$

② $f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$

③ $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$

④ $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

① $f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$

② $f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$

③ $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$

④ $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

① $f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$

② $f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$

③ $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$

④ $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

① $f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$

② $f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$

③ $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$

④ $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Να λύσετε την εξίσωση

$$2 \ln(2x - 1) - \frac{1}{2} \ln 9 = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$$

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^4 = 11 \\ \ln(xy) = 3 \end{cases}$$

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = xe^x \\ \ln y - \ln^2 x = x \end{cases}$$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $3^{x-1} = e^{2-x}$

② $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $3^{x-1} = e^{2-x}$

② $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

① Να δείξετε ότι $5^{\ln x} = x^{\ln 5}$

② Να λύσετε την εξίσωση $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$

- ① Να δείξετε ότι $5^{\ln x} = x^{\ln 5}$
- ② Να λύσετε την εξίσωση $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^{\ln x^2} = e^2 x$$

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{t}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{t}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64 \left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ



Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση