

Συναρτήσεις

Μονοτονία

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

Μονοτονία Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Μονοτονία Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Ποιός δεν αναρωτιέται?

Ισχύει η συνεπαγωγή για έστω μια γνησίως αύξουσα

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

? Φυσικά (?)

Ποιός δεν αναρωτιέται?

Ισχύει η συνεπαγωγή για έστω μια γνησίως αύξουσα

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

Φυσικά (?)

αύξουσα, σκέτο αύξουσα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

αύξουσα, σκέτο αύξουσα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

Συγκρατήσαμε τίποτα?

Παραδείγματα

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = 1/x$

Συγκρατήσαμε τίποτα?

Παραδείγματα

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = 1/x$

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a > 0$

- $\ln x$

- $x^2, x \geq 0$

- x^3

- $e^x, 2^x$

- $\eta\mu x, 0 < x < \pi/2$

- $\varepsilon\varphi x$

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a < 0$

- $x^2, x \leq 0$

- $-x^3$

- $\left(\frac{1}{2}\right)^x, e^{-x}$

- $\sigma\upsilon\nu x, 0 < x < \pi/2$

- $\frac{1}{x}, x < 0$

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a > 0$

- $\ln x$

- $x^2, x \geq 0$

- x^3

- $e^x, 2^x$

- $\eta\mu x, 0 < x < \pi/2$

- $\varepsilon\varphi x$

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a < 0$

- $x^2, x \leq 0$

- $-x^3$

- $\left(\frac{1}{2}\right)^x, e^{-x}$

- $\sigma\upsilon\nu x, 0 < x < \pi/2$

- $\frac{1}{x}, x < 0$

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a > 0$

- $\ln x$

- $x^2, x \geq 0$

- x^3

- $e^x, 2^x$

- $\eta\mu x, 0 < x < \pi/2$

- $\varepsilon\varphi x$

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a < 0$

- $x^2, x \leq 0$

- $-x^3$

- $\left(\frac{1}{2}\right)^x, e^{-x}$

- $\sigma\upsilon\nu x, 0 < x < \pi/2$

- $\frac{1}{x}, x < 0$

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a > 0$

- $\ln x$

- $x^2, x \geq 0$

- x^3

- $e^x, 2^x$

- $\eta\mu x, 0 < x < \pi/2$

- $\varepsilon\varphi x$

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b, a < 0$

- $x^2, x \leq 0$

- $-x^3$

- $\left(\frac{1}{2}\right)^x, e^{-x}$

- $\sigma\upsilon\nu x, 0 < x < \pi/2$

- $\frac{1}{x}, x < 0$

Μπρίκια κολάμε?

Θα ασχολούμαστε

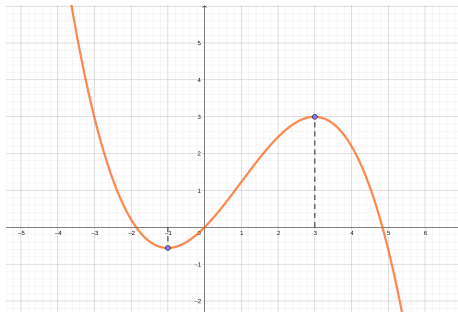
- με κατασκευές
- ανισώσεις

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Η συνάρτηση f του σχήματος είναι ορισμένη στους πραγματικούς αριθμούς.

- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της
- Να συγκρίνετε τις τιμές
 - $f(2)$ και $f(e)$
 - $f(3)$ και $f(\pi)$



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 5$

- ① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
- ② Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2022)$ και $f(2023)$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 5$

- ① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
- ② Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2022)$ και $f(2023)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να αποδείξετε ότι:

① Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$

② Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$

③ Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$

④ Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$

⑤ Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να αποδείξετε ότι:

① Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$

② Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$

③ Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$

④ Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$

⑤ Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να αποδείξετε ότι:

① Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$

② Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$

③ Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$

④ Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$

⑤ Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να αποδείξετε ότι:

① Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$

② Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$

③ Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$

④ Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$

⑤ Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να αποδείξετε ότι:

① Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$

② Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$

③ Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$

④ Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$

⑤ Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

- ① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
- ② Να αποδείξετε ότι:
 - ① Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$
 - ② Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$
 - ③ Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$
 - ④ Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$
 - ⑤ Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

4.

① Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$

② Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

① $g(x) = \ln f(x)$

② $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

4.

- ① Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$
- ② Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
 - ① $g(x) = \ln f(x)$
 - ② $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

4.

- ① Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$
- ② Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
 - ① $g(x) = \ln f(x)$
 - ② $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

5. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(x) > f(3)$
- $f(2x + 1) < 5$, αν $f(3) = 5$
- $f(x^2 - 3x) \geq f(2 - 4x)$
- $f(f(3x - 1)) < f(f(2x + 3))$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $f(x) > 0$

② $e^x + x < e + 1$

③ $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$

④ $e^{f(x)} + f(x) - x > e^x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $f(x) > 0$

② $e^x + x < e + 1$

③ $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$

④ $e^{f(x)} + f(x) - x > e^x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $f(x) > 0$

② $e^x + x < e + 1$

③ $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$

④ $e^{f(x)} + f(x) - x > e^x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $f(x) > 0$

② $e^x + x < e + 1$

③ $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$

④ $e^{f(x)} + f(x) - x > e^x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

① Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

② Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $f(x) > 0$

② $e^x + x < e + 1$

③ $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$

④ $e^{f(x)} + f(x) - x > e^x$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x - 1) + 2 > x^5 + x$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \ln \frac{x^2+1}{x^4+1}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \ln \frac{x^2+1}{x^4+1}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \ln \frac{x^2+1}{x^4+1}$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $e^x + x^3 < 1$

② $e^x - e^{x^2} > \ln x$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $e^x + x^3 < 1$

② $e^x - e^{x^2} > \ln x$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$ και $f \uparrow$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $f(x) + e^x > 2$

② $(x + 1)f(x) < 1$, στο $(-1, +\infty)$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$ και $f \uparrow$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $f(x) + e^x > 2$

② $(x + 1)f(x) < 1$, στο $(-1, +\infty)$

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x, x > 0$ και $g(x) = \frac{e}{x}, x > 0$.

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x, x > 0$ και $g(x) = \frac{e}{x}, x > 0$.

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g

12. Εστω $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, -3)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.

- ① Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα
- ② Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$

12. Εστω $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, -3)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.

- ① Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα
- ② Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$

12. Εστω $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, -3)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.

- ① Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα
- ② Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$

13. Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $g \uparrow$ και

$$g(x) = f(x + 1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

① Να λύσετε τις ανισώσεις

① $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$, αν $f(1) = f(2)$

② $f(\sqrt{x} + 1)f(x + 1) < f(\sqrt{x}) - f(x)$

② Να αποδείξετε ότι

$$f(e^x + 1) - f(\eta\mu x + 1) > f(e^x) - f(\eta\mu x), \text{ για κάθε } x > 0$$

13. Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $g \uparrow$ και

$$g(x) = f(x + 1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

① Να λύσετε τις ανισώσεις

① $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$, αν $f(1) = f(2)$

② $f(\sqrt{x} + 1)f(x + 1) < f(\sqrt{x}) - f(x)$

② Να αποδείξετε ότι

$$f(e^x + 1) - f(\eta\mu x + 1) > f(e^x) - f(\eta\mu x), \text{ για κάθε } x > 0$$

13. Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $g \uparrow$ και

$$g(x) = f(x + 1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

① Να λύσετε τις ανισώσεις

① $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$, αν $f(1) = f(2)$

② $f(\sqrt{x} + 1)f(x + 1) < f(\sqrt{x}) - f(x)$

② Να αποδείξετε ότι

$$f(e^x + 1) - f(\eta\mu x + 1) > f(e^x) - f(\eta\mu x), \text{ για κάθε } x > 0$$

13. Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $g \uparrow$ και

$$g(x) = f(x + 1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

① Να λύσετε τις ανισώσεις

① $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$, αν $f(1) = f(2)$

② $f(\sqrt{x} + 1)f(x + 1) < f(\sqrt{x}) - f(x)$

② Να αποδείξετε ότι

$$f(e^x + 1) - f(\eta\mu x + 1) > f(e^x) - f(\eta\mu x), \text{ για κάθε } x > 0$$

14. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα

- ① Να δείξετε ότι $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$, για κάθε $x > 0$
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8)$, στο $(0, +\infty)$

14. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα

- ① Να δείξετε ότι $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$, για κάθε $x > 0$
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8)$, στο $(0, +\infty)$

15.

- ① Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις όπου $g \circ f \downarrow$ και $g \uparrow$. Να δείξετε ότι $f \downarrow$
- ② Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + e^{f(x)} - e^{-x} - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία

15.

- ① Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις όπου $g \circ f \downarrow$ και $g \uparrow$. Να δείξετε ότι $f \downarrow$
- ② Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + e^{f(x)} - e^{-x} - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία