

# Συναρτήσεις

## Θεώρημα Μέσης Τιμής

Κωνσταντίνος Λόλας

# Ήρθε η ώρα για τα ΠΙΟ δύσκολα

Θυμάστε Bolzano  $\sim$   $\Theta E T$

Τώρα Rolle  $\sim$   $\Theta M T$

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα



# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Θεώρημα Μέσης Τιμής

## Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω μία συνάρτηση  $f$ :

- συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$

τότε υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  με  $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

# Παρατήρηση

- ❶ Ο Rolle είναι το ΘMT για  $f(\alpha) = f(\beta)$
- ❷ Το ΘMT προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

# Παρατήρηση

- 1 Ο Rolle είναι το ΘΜΤ για  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 2 Το ΘΜΤ προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

# Παρατήρηση

- 1 Ο Rolle είναι το ΘΜΤ για  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 2 Το ΘΜΤ προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x-1}$ . Να δείξετε ότι για την  $f$  ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα  $[1, 5]$  και να βρείτε τα  $\xi \in [1, 5]$  για τα οποία ισχύει  $f'(\xi) = \frac{1}{2}$

## Εξάσκηση 2

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(3) - f(1) = 4$$

- 1 Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 3)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 2$
- 2 Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $M$  της  $C_f$  στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon : y = 2x + 3$

## Εξάσκηση 2

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(3) - f(1) = 4$$

- ① Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 3)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 2$
- ② Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $M$  της  $C_f$  στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon : y = 2x + 3$



## Εξάσκηση 3

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει  $f(1) - f(0) > 0$

- 1 Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) > 0$
- 2 Αν επιπλέον ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 3

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει  $f(1) - f(0) > 0$

- ① Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) > 0$
- ② Αν επιπλέον ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 4

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(0) = 0$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, x)$ ,  $x > 0$  τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$$

## Εξάσκηση 5

Για κάθε  $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$  με  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$

## Εξάσκηση 6

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και  $f' \uparrow \mathbb{R}$

- 1 Αν  $f(1) = 0$  να δείξετε ότι  $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$  για  $x > 1$
- 2 Να δείξετε ότι  $f(2x) > f(x) + xf'(x)$  για κάθε  $x > 0$
- 3 Να δείξετε ότι  $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 6

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και  $f' \uparrow \mathbb{R}$

- 1 Αν  $f(1) = 0$  να δείξετε ότι  $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$  για  $x > 1$
- 2 Να δείξετε ότι  $f(2x) > f(x) + xf'(x)$  για κάθε  $x > 0$
- 3 Να δείξετε ότι  $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 6

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και  $f' \uparrow \mathbb{R}$

- ① Αν  $f(1) = 0$  να δείξετε ότι  $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$  για  $x > 1$
- ② Να δείξετε ότι  $f(2x) > f(x) + xf'(x)$  για κάθε  $x > 0$
- ③ Να δείξετε ότι  $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$  για κάθε  $x > 0$

# Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1  $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

2  $\ln x < x, x > 0$

3  $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

4  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

5  $e^x > \ln x, x > 0$

6  $e^x - \ln x > 2, x > 0$



# Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

①  $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

②  $\ln x < x, x > 0$

③  $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤  $e^x > \ln x, x > 0$

⑥  $e^x - \ln x > 2, x > 0$

# Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

①  $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

②  $\ln x < x, x > 0$

③  $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤  $e^x > \ln x, x > 0$

⑥  $e^x - \ln x > 2, x > 0$

# Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

①  $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

②  $\ln x < x, x > 0$

③  $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤  $e^x > \ln x, x > 0$

⑥  $e^x - \ln x > 2, x > 0$

## Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

- ①  $e^x > x, x \in \mathbb{R}$
- ②  $\ln x < x, x > 0$
- ③  $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$
- ④  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$
- ⑤  $e^x > \ln x, x > 0$
- ⑥  $e^x - \ln x > 2, x > 0$

## Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

- ①  $e^x > x, x \in \mathbb{R}$
- ②  $\ln x < x, x > 0$
- ③  $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$
- ④  $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$
- ⑤  $e^x > \ln x, x > 0$
- ⑥  $e^x - \ln x > 2, x > 0$

## Εξάσκηση 8

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(e) = e \ln 2$  και  $f'(x) < \ln 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι  $f(1) > \ln 2$

## Εξάσκηση 9

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη και ισχύουν  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(1) - f(0) > f'(0)$ . Να αποδείξετε ότι  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 10

Έστω  $f$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $|f'(x)| \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

❶ Να αποδείξετε ότι για όλα τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

❷ Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(\sqrt{x^2 + 1}) - f(x)]$



## Εξάσκηση 10

Έστω  $f$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $|f'(x)| \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

① Να αποδείξετε ότι για όλα τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

② Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(\sqrt{x^2 + 1}) - f(x)]$

# Εξάσκηση 11

- ① Έστω  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, \beta]$ . Να δείξετε ότι  $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
- ② Να δείξετε ότι  $2e^5 < e^3 + e^7$

# Εξάσκηση 11

- ① Έστω  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, \beta]$ . Να δείξετε ότι  $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
- ② Να δείξετε ότι  $2e^5 < e^3 + e^7$

## Εξάσκηση 12

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει  $f(\alpha) + f(3\alpha) = 2f(2\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ . Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, 3\alpha)$  ώστε  $f''(\xi) = 0$

## Εξάσκηση 13

Έστω  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(\alpha) = \beta$  και  $f(\beta) = \alpha$  η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ . Να αποδείξετε ότι:

- 1 η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$
- 2 υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(x_1)f(x_2) = 1$

## Εξάσκηση 13

Έστω  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(\alpha) = \beta$  και  $f(\beta) = \alpha$  η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ . Να αποδείξετε ότι:

- ① η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$
- ② υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(x_1)f(x_2) = 1$