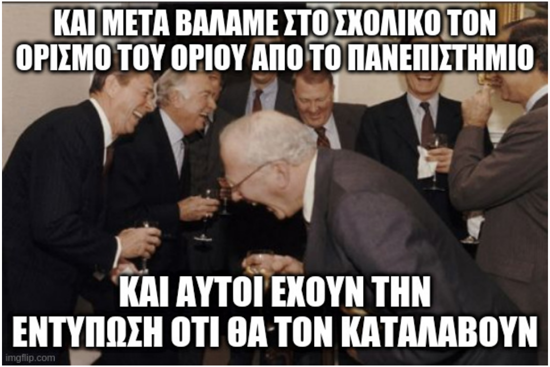
Συναρτήσεις

Οριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Οριο


ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΒΑΛΑΜΕ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΤΟΝ
ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΑΙ ΑΥΤΟΙ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ
ΕΝΤΥΠΩΣΗ ΟΤΙ ΘΑ ΤΟΝ ΚΑΤΑΛΑΒΟΥΝ
imgflip.com

Οριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της f στο x_0
- Οταν το x πάει στο x_0, πού πάει η f...

Οριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της f στο x_0
- Οταν το x πάει στο x_0, πού πάει η f...

Οριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της f στο x_0
- Οταν το x πάει στο x_0, πού πάει η f...

Οριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της f στο x_0
- Οταν το x πάει στο x_0, πού πάει η f...

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η f πλησιάζει στο l
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η f πλησιάζει στο l
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η f πλησιάζει στο l
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η f πλησιάζει στο l
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η f πλησιάζει στο l
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) για κατάλληλο α

Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, α) για κατάλληλο α

Αρα

Υπαρξη ορίου

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \end{cases}$$

Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Ομοια για $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Ομοια για $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Ομοια για $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - k) = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim\limits_{h \to 0} f(h + x_0) = k$

Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \iff \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - k) = 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \iff \lim\limits_{h\to 0} f(h + x_0) = k$

Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - k) = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim\limits_{h \to 0} f(h + x_0) = k$

Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

Επίδειξη

Στο διάλλειμα όποιος θέλει μπορεί να μάθει τον υπέρτατο ορισμό του ορίου. Ιδού:

Ορισμός ορίου

Εστω μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.
Λέμε ότι η συνάρτηση τείνει στο $\lambda \in \mathbb{R}$ καθώς το x τείνει στο x_0 όταν:

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \lambda| < \epsilon$

Εξάσκηση

Μόνο από το βιβλίο, μόνο γραφικά!

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση