

# Συναρτήσεις

## Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Κωνσταντίνος Λόλας

# Σιγά τα ολοκληρώματα!

Τι μπορούμε να ολοκληρώσουμε

- 1 Πολυώνυμα
- 2 Εκθετικές
- 3 Τριγωνομετρικές
- 4 Ρητές με πρωτοβάθμιο διαιρέτη
- 5 Πρωτοβάθμιες άρρητες
- 6 Έτοιμες από σύνθεση και φυσικά
- 7 κάθε πρόσθεση ή αφαίρεση αυτών ΜΟΝΟ

Τι γίνεται με τον πολλαπλασιασμό? Διάρθρωση? Ακόμα και την απλή  $\ln x$ ?

# Ιστορία

Ξέρουμε να παραγωγίζουμε γινόμενο

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (f \cdot g)' - fg'\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int f'g \, dx &= \int (f \cdot g)' \, dx - \int fg' \, dx \\ \int f'g \, dx &= f \cdot g - \int fg' \, dx\end{aligned}$$

# Ιστορία

Ξέρουμε να παραγωγίζουμε γινόμενο

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (f \cdot g)' - fg'\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int f'g \, dx &= \int (f \cdot g)' \, dx - \int fg' \, dx \\ \int f'g \, dx &= f \cdot g - \int fg' \, dx\end{aligned}$$

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!



# Παραδείγματα

1  $\int x e^x dx$

2  $\int x^3 e^x dx$

3  $\int x \ln x dx$

4  $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

# Παραδείγματα

1  $\int x e^x dx$

2  $\int x^3 e^x dx$

3  $\int x \ln x dx$

4  $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

# Παραδείγματα

1  $\int x e^x dx$

2  $\int x^3 e^x dx$

3  $\int x \ln x dx$

4  $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

# Παραδείγματα

$$\textcircled{1} \int x e^x dx$$

$$\textcircled{2} \int x^3 e^x dx$$

$$\textcircled{3} \int x \ln x dx$$

$$\textcircled{4} \int e^{2x} \eta\mu(3x + 1) dx$$

Και στα εντός ύλης!

Κατά παράγοντες

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!  
Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!  
Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????



# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

# Δοκιμές σύνθεσης

1  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

2  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

3  $\int 4x \varepsilon \varphi(x^2) \ln(\eta \mu(x^2)) dx$

# Δοκιμές σύνθεσης

1  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

2  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

3  $\int 4x \varepsilon \varphi(x^2) \ln(\eta \mu(x^2)) dx$

# Δοκιμές σύνθεσης

$$\textcircled{1} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\textcircled{3} \int 4x \varepsilon \varphi(x^2) \ln(\eta \mu(x^2)) dx$$

# Ναι, αλλά... τύπο έχουμε?

## Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\int_a^b f(x) dx$$

Θέτω  $x = g(u)$ , άρα

- για  $x = a \implies u = k$
- για  $x = b \implies u = l$
- $dx = g'(u)du$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_k^l f(g(u))g'(u) du$$

# Εξάσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1  $\int_0^1 x \, dx$

2  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x \, dx$

3  $\int_0^{\pi} x^2 \sigma \upsilon \nu x \, dx$

# Εξάσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1  $\int_0^1 x \, dx$

2  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x \, dx$

3  $\int_0^{\pi} x^2 \sigma \upsilon \nu x \, dx$



# Εξάσκηση 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_0^1 x \, dx$

②  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x \, dx$

③  $\int_0^{\pi} x^2 \sigma \upsilon \nu x \, dx$

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1  $\int_1^2 2x \ln x \, dx$

2  $\int_1^2 \ln x \, dx$

3  $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$

4  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

5  $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1  $\int_1^2 2x \ln x \, dx$

2  $\int_1^2 \ln x \, dx$

3  $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$

4  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

5  $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_1^2 2x \ln x \, dx$

②  $\int_1^2 \ln x \, dx$

③  $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$

④  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

⑤  $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_1^2 2x \ln x \, dx$

②  $\int_1^2 \ln x \, dx$

③  $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$

④  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

⑤  $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_1^2 2x \ln x \, dx$

②  $\int_1^2 \ln x \, dx$

③  $\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$

④  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

⑤  $\int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

## Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1  $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

2  $\int_0^{\pi} \frac{\eta \mu 2x}{e^x} \, dx$

## Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

②  $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2x}{e^x} \, dx$



## Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\frac{0}{4}} \frac{x}{\sigma\nu\nu^2x} dx$

## Εξάσκηση 5

Έστω  $F$  μία παράγουσα στο  $\mathbb{R}$  της συνάρτησης  $f(x) = e^{x^2}$ , με  $F(1) = 0$ . Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 F(x) dx$

## Εξάσκηση 6

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(0) = 0$  και συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει  $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx = \pi$ . Να δείξετε ότι  $f(\pi) = \pi$

## Εξάσκηση 7

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 2$ , έχει συνεχή  $f''$  και ισχύει

$$\int_0^2 (x f''(x) + 2f'(x)) dx = 0$$

- ① Να δείξετε ότι  $f(0) = f(2)$
- ② Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$ , τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$

## Εξάσκηση 7

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 2$ , έχει συνεχή  $f''$  και ισχύει

$$\int_0^2 (x f''(x) + 2f'(x)) \, dx = 0$$

- ① Να δείξετε ότι  $f(0) = f(2)$
- ② Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$ , τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$

## Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4x - 2x + 1$ . Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

①  $\int_{-1}^0 f(x+1) dx$

②  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$

## Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4x - 2x + 1$ . Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

①  $\int_{-1}^0 f(x+1) dx$

②  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$

## Εξάσκηση 9

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι

$$\int_2^4 f\left(\frac{2}{x}\right) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x^2} dx$$



## Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3}) dx$

②  $\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$

③  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

④  $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

## Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3}) dx$

②  $\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$

③  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

④  $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

## Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

①  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3}) dx$

②  $\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$

③  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

④  $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

## Εξάσκηση 10

ΔΝα υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\textcircled{1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu \nu \left( x - \frac{\pi}{3} \right) dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\textcircled{4} \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

## Εξάσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$

- 1 Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- 2 Να υπολογίσετε το  $\int_0^e f^{-1}(x) dx$

## Εξάσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$

- 1 Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- 2 Να υπολογίσετε το  $\int_0^e f^{-1}(x) dx$

## Εξάσκηση 12

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$
- ② Να υπολογίσετε το  $\int_0^2 f(x) dx$

## Εξάσκηση 12

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$
- ② Να υπολογίσετε το  $\int_0^2 f(x) dx$



## Εξάσκηση 13

Έστω  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

- ① ① Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- ② ② Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$
- ② ② Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

## Εξάσκηση 13

Έστω  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

- ① ① Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- ② ② Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$
- ② ② Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

## Εξάσκηση 13

Έστω  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

- ① ① Αν η  $f$  είναι περιττή, τότε  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- ② ② Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$
- ② ② Αν η  $f$  είναι άρτια, τότε  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

## Εξάσκηση 14

Έστω μία συνεχής συνάρτηση  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(1-x) + f(1+x) = 2 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1]$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^2 f(x) dx$

## Εξάσκηση 15

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_1^{e^2} |\ln x - 1| dx$

## Εξάσκηση 16

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_1^e \eta\mu(\ln x) dx$

## Εξάσκηση 17

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει:

$$f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x) dx, x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την  $f$

## Εξάσκηση 18

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$