

# Συναρτήσεις

## Ένα προς ένα (1-1)

Κωνσταντίνος. Λόλας

## 1-1

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση συνάστηση 1-1 (ένα προς ένα), όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$$

# Αντέχετε?

## Ενδιαφέροντα

- $x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$
- $x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$
- $f(x_1) \neq f(x_2) \iff x_1 \neq x_2$
- $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$

# Φαντασία θέλει

Μια συνάρτηση:

- Κάθε  $y$  το πολύ μία φορά

# Φαντασία θέλει

Μια συνάρτηση:

- Κάθε  $y$  το πολύ μία φορά
- Κάθε  $y$  του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά

# Φαντασία θέλει

Μια συνάρτηση:

- Κάθε  $y$  το πολύ μία φορά
- Κάθε  $y$  του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά
- Κάθε οριζόντια γραμμή...

Άρα... φαίνονται οι διαφορετικοί!

# ΤΟΟΟ μέρδεμα

## Προσοχή

- Γνησίως μονότονη  $\Rightarrow$

# ΤΟΟΟ μπέρδεμα

## Προσοχή

- Γνησίως μονότονη  $\Rightarrow$  είναι 1-1



ΤΟΟΟ μπέρδεμα

## Προσοχή

- Γνησίως μονότονη  $\Rightarrow$  είναι 1-1
- 1-1  $\Rightarrow$

ΤΟΟΟ μπέρδεμα

## Προσοχή

- Γνησίως μονότονη  $\Rightarrow$  είναι 1-1
- 1-1  $\Rightarrow$  ΜΠΟΡΕΙ!

Βρείτε την!

# Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς?

# Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς?  
Κυρίως

- Κατασκευή

# Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς?  
Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

# Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς?  
Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

**Γιατί να το κάνουμε?**

Λύνουμε σύνθετες εξισώσεις διώχνοντας  $f$

# Εξάσκηση

Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

①  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

❶  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

❷  $f(x) = 2x + e^x - 1$



# Εξάσκηση

Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

❶  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

❷  $f(x) = 2x + e^x - 1$

❸  $f(x) = x^2 - 1$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- ❷ Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - ❶  $f(x) = 0$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- ❷ Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - ❶  $f(x) = 0$
  - ❷  $f(\ln x) = 0$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- ❷ Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - ❶  $f(x) = 0$
  - ❷  $f(\ln x) = 0$
  - ❸  $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- ❷ Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - ❶  $f(x) = 0$
  - ❷  $f(\ln x) = 0$
  - ❸  $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$
  - ❹  $f(f(x) + 1) = 0$

## Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1

- 2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

①  $f(x) = 0$

②  $f(\ln x) = 0$

③  $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

④  $f(f(x) + 1) = 0$

- 3 Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1



# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- ❷ Να λύσετε την εξίσωση  $(1 - e^{-x})f(x^2 + 2x) = 1$

# Εξάσκηση

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  που είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Να λύσετε τις εξισώσεις:

①  $f(x^4 + 1) = f(x^2 + 1)$

# Εξάσκηση

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  που είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Να λύσετε τις εξισώσεις:

①  $f(x^4 + 1) = f(x^2 + 1)$

②  $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$

# Εξάσκηση

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  που είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Να λύσετε τις εξισώσεις:

①  $f(x^4 + 1) = f(x^2 + 1)$

②  $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$

③  $f(f(x)) = 1$

# Εξάσκηση

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε:

- 1 Την ανίσωση  $f(x) - x > f(2x)$

# Εξάσκηση

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε:

- 1 Την ανίσωση  $f(x) - x > f(2x)$
- 2 Την εξίσωση  $f(x) - \ln x = f(x^2)$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$ . Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο συναρτήσεις, όπου η συνάρτηση  $g \circ f$  είναι 1-1. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.



# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) + f^3(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) + f^3(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- 2 Να λύσετε την εξίσωση

$$f(f(x) + x^2 - x) = f(f(x) + 2x - 2)$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) + f^3(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- ❷ Να λύσετε την εξίσωση  $f(f(x) + x^2 - x) = f(f(x) + 2x - 2)$
- ❸ Να λύσετε την εξίσωση  $f(f(2x + 1)) - f(f(x)) = x + 1$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση