Συναρτήσεις

Συνέπειες Bolzano 1 (Διατήρηση Προσήμου)

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Ενα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

Ενα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

Ενα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

Ενα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

Ενα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

Ενα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

Θεώρημα 1

Θεώρημα σταθερού προσήμου

Εστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f διατηρεί το πρόσημο της σε όλο το Δ

Θεώρημα 2

Θεώρημα σταθερού προσήμου (γενίκευση)

Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί το πρόσημό της μεταξύ δύο διαδοχικών της ριζών.

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$

2. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^2+1}{f(0)x+2}$$

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής. Αν $f(3) = -2$ και $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$ είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να βρείτε το

$$\lim_{x \to +\infty} f(2)x^3 - x + 1$$

4. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων

- $f(x) = 2x^3 - x - 1$
- $f(x) = x - \eta\mu x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

4. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων

- $f(x) = 2x^3 - x - 1$
- $f(x) = x - \eta\mu x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

4. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων

- $f(x) = 2x^3 - x - 1$
- $f(x) = x - \eta\mu x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

5. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, \pi]$.

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$|f(x)| = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν $f(0) = -1$ να βρείτε τον τύπο της f

6. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$|f(x)| = e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Αν $f(0)=-1$ να βρείτε τον τύπο της f

7. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

8. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(2) = 2$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x) + 2 = x + 2f(x)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

10. Εστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=-1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $x^2+f^2(x)=1$, $x\in[-1,1]$. Να βρείτε τον τύπο της f.

11. Εστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $4x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Να δείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο $(-1, 1)$
- Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f;
- Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την f

11. Εστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $4x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Να δείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο $(-1, 1)$
- Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f;
- Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την f

11. Εστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $4x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Να δείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο $(-1, 1)$
- Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f;
- Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την f

11. Εστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $4x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Να δείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο $(-1, 1)$
- Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f;
- Αν $f(0) = 2$, να βρείτε την f

12. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$f^2(x) + 2x = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$$