

Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Κωνσταντίνος Λόλας

Γεύση από το μέλλον (part 2)

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- 1 νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- 2 γραφική παράσταση $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$
- 3 γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Γεύση από το μέλλον (part 2)

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- 1 νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- 2 γραφική παράσταση $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$
- 3 γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Γεύση από το μέλλον (part 2)

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- 1 νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- 2 γραφική παράσταση $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$
- 3 γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- 1 περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της $T \approx 24$ ώρες
- 2 λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- 3 σελήνης γύρω από τη γη ≈ 27 ημέρες...

Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- 1 περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της $T \approx 24$ ώρες
- 2 λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- 3 σελήνης γύρω από τη γη ≈ 27 ημέρες...

Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- ① περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της $T \approx 24$ ώρες
- ② λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- ③ σελήνης γύρω από τη γη ≈ 27 ημέρες...

Λίλιιγο μαθηματικά

Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει αριθμός T τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

- $x + T \in A, x - T \in A$

και

- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f

Ορισμός (εξτρά)

Θεμελιώδης περίοδος είναι το μικρότερο θετικό T

Λίλιιγο μαθηματικά

Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει αριθμός T τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

- $x + T \in A, x - T \in A$

και

- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f

Ορισμός (εξτρά)

Θεμελιώδης περίοδος είναι το μικρότερο θετικό T

Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$ ή $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\epsilon\varphi x$ με περίοδο π

Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$ ή $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο το ίδιο με $\pi\upsilon\nu$
- $\epsilon\varphi x$ με περίοδο π

Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$ ή $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\epsilon\varphi x$ με περίοδο π

Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$ ή $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\epsilon\varphi x$ με περίοδο π

Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$ ή $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\varepsilon\varphi x$ με περίοδο π

Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$ ή $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\varepsilon\varphi x$ με περίοδο π

Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$ ή $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\varepsilon\varphi x$ με περίοδο π

Γραφικές yeah!

- Ας δούμε την γραφική παράσταση της $\eta\mu x$ στο Geogebra
- Για το $\sigma\upsilon\nu x$ σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- Ας δούμε την γραφική παράσταση της $\varepsilon\varphi x$ στο Geogebra

Γραφικές yeah!

- Ας δούμε την γραφική παράσταση της $\eta\mu x$ στο Geogebra
- Για το $\sigma\upsilon\nu x$ σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- Ας δούμε την γραφική παράσταση της $\varepsilon\varphi x$ στο Geogebra

Γραφικές yeah!

- Ας δούμε την γραφική παράσταση της $\eta\mu x$ στο Geogebra
- Για το $\sigma\upsilon\nu x$ σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- Ας δούμε την γραφική παράσταση της $\varepsilon\varphi x$ στο Geogebra

Εξάσκηση 1

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει περίοδο $T = \pi$

Εξάσκηση 2

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

1 $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x} - 3\sigma\nu\nu x$

2 $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$

Εξάσκηση 2

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

$$\textcircled{1} \quad f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x} - 3\sigma\nu x$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$$

Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

1 $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

2 $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

3 $\epsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \epsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

4 $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

1 $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

2 $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

3 $\epsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \epsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

4 $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

1 $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

2 $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

3 $\epsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \epsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

4 $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

① $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

② $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

③ $\epsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \epsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

④ $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

Εξάσκηση 4

- 1 Να δείξετε ότι αν, $0 < x < \frac{\pi}{6}$, τότε $2\eta\mu x - 1 < 0$
- 2 Να δείξετε ότι αν, $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, τότε $\varepsilon\varphi x + 1 > 0$

Εξάσκηση 4

- ① Να δείξετε ότι αν, $0 < x < \frac{\pi}{6}$, τότε $2\eta\mu x - 1 < 0$
- ② Να δείξετε ότι αν, $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, τότε $\varepsilon\varphi x + 1 > 0$

Εξάσκηση 5

Σε ένα σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ και στη συνέχεια, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 1 + \eta\mu x$

Εξάσκηση 6

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |\eta\mu x|$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Εξάσκηση 7

Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους
 - 1 $f(x) = 3\eta\mu 2x$
 - 2 $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$
 - 3 $f(x) = \varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$

Εξάσκηση 7

Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους
 - 1 $f(x) = 3\eta\mu 2x$
 - 2 $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$
 - 3 $f(x) = \varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$

Εξάσκηση 7

Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους
 - ① $f(x) = 3\eta\mu 2x$
 - ② $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$
 - ③ $f(x) = \varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$

Εξάσκηση 8

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\frac{x}{2}$

Εξάσκηση 9

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

Εξάσκηση 10

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Εξάσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$ έχει περίοδο $T = 4\pi$

Εξάσκηση 12

Αν η συνάρτηση $f(x) = (2 - \alpha)\eta\mu\beta x$, $\alpha > 2$ και $\beta > 0$ έχει περίοδο το $\frac{\pi}{2}$ και μέγιστη τιμή το 3, να βρείτε τα α και β

Εξάσκηση 13

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 - 3\eta\mu 2x$

- 1 Ποιά είναι η περίοδός της
- 2 Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- 3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

Εξάσκηση 13

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 - 3\eta\mu 2x$

- ❶ Ποιά είναι η περίοδός της
- ❷ Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- ❸ Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

Εξάσκηση 13

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 - 3\eta\mu 2x$

- ① Ποιά είναι η περίοδός της
- ② Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- ③ Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- ① Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
 - ① 0°C
 - ② κάτω από 0°C

Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- ① Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
 - ① 0°C
 - ② κάτω από 0°C

Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- ① Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
 - ① 0°C
 - ② κάτω από 0°C

Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- ① Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
 - ① 0°C
 - ② κάτω από 0°C

Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Αν $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Αν $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Αν $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Αν $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση