Συναρτήσεις

Εφαρμογές Κυρτότητας

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
6.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
6.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
   1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$ για κάθε $x > 0$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3 + f(x)}{x} = 2$
6.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
   1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3 + f(x)}{x} = 2$
6.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
   1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3+f(x)}{x} = 2$
6.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
   1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3+f(x)}{x} = 2$
6.
   1. Να δείξετε ότι $f(x^2+1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
    1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
    2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3 + f(x)}{x} = 2$
6.
    1. Να δείξετε ότι $f(x^2+1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
    2. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
   1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3+f(x)}{x} = 2$
6.
   1. Να δείξετε ότι $f(x^2+1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
   1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3 + f(x)}{x} = 2$
6.
   1. Να δείξετε ότι $f(x^2+1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+1) < 2$
3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 > 0$, η C_f και η εφαπτομένη της στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο
4. Να βρείτε την εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$
5.
   1. Να δείξετε ότι $f(x) - 2x \leq -3$, για κάθε $x > 0$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3+f(x)}{x} = 2$
6.
   1. Να δείξετε ότι $f(x^2+1) + 1 \leq 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   2. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - 2e^x = -3$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
    1. $f'(f(x) - x) = 2 + e$
    2. $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   1. $f'(f(x) - x) = 2 + e$
   2. $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
    1. $f'(f(x) - x) = 2 + e$
    2. $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   1. $f'(f(x) - x) = 2 + e$
   2. $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   1. $e^x(x^2 + x - 1) > -1$
   2. $\dfrac{e^{x-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   1. $f'(f(x) - x) = 2 + e$
   2. $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   1. $e^x(x^2 + x - 1) > -1$
   2. $\dfrac{e^{x-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
    1. $f'(f(x) - x) = 2 + e$
    2. $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:
    1. $e^x(x^2 + x - 1) > -1$
    2. $\dfrac{e^{x-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

1. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.
2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   1. $f'(f(x) - x) = 2 + e$
   2. $e^{\eta\mu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$
3. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   1. $e^x(x^2 + x - 1) > -1$
   2. $\dfrac{e^{x-1} - 3x}{x^2 + 1} + 1 > 0$

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x) - (x+2)}$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x-2) - x\right) = 2$
4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x) - (x+2)}$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x-2) - x\right) = 2$
4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x) - (x+2)}$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x-2) - x\right) = 2$
4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωίσιμη, γνησίως αύξουσα και κυρτή. Επιπλέον είναι $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$.

1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 + x - x^2$
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{f(x) - (x+2)}$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x-2) - x\right) = 2$
4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) \leq x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
    1. την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
    2. την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
   1. την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
   2. την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $x f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
    1. την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
    2. την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
    1. την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
    2. την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
   1. την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
   2. την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
   1. την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
   2. την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f'(x^2+2) > f'(2x^2+1)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + 5x \leq 3$ για κάθε $x \leq 1$
4. Να λύσετε:
    1. την εξίσωση $f(x) = 3 - 5x$
    2. την ανίσωση $3 - f(x) < 5x$
5. Να δείξετε ότι η $f(e^x - x) + 5e^x \geq 5x + 3$
6. Για κάθε $x \geq 1$, να δείξετε ότι $xf\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 3x - 5$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\varepsilon\varphi x - x}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
3. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\varepsilon\varphi x - x}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in A = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να δείξετε ότι $\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$, για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\varepsilon\varphi x - x}$

6. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1)=1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
   Αν $f(1)=1$ και $f'(1)=1$, τότε:
2. Να υπολογίσετε τα όρια
   1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{f'(x)-f'(x^2)}$
   2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f'(x-1)=f'(\ln x)+x$

6. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1)=1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
   Αν $f(1)=1$ και $f'(1)=1$, τότε:
2. Να υπολογίσετε τα όρια
   1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{f'(x)-f'(x^2)}$
   2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f'(x-1)=f'(\ln x)+x$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1) = 1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
   Αν $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$, τότε:
2. Να υπολογίσετε τα όρια
   1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{f'(x) - f'(x^2)}$
   2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x-1) = f'(\ln x) + x$

6. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1)=1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
   Αν $f(1)=1$ και $f'(1)=1$, τότε:
2. Να υπολογίσετε τα όρια
   1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{f'(x)-f'(x^2)}$
   2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f'(x-1)=f'(\ln x)+x$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(1) = 1$, συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής και είναι κυρτή
   Αν $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$, τότε:
2. Να υπολογίσετε τα όρια
   1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{f'(x) - f'(x^2)}$
   2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x-1) = f'(\ln x) + x$

7. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
   Αν επιπλέον $f(1) = f'(1) = 2$, τότε:
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 2x + 3$
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f\left(f(x)\right) - f(2x)}$

7. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
   Αν επιπλέον $f(1) = f'(1) = 2$, τότε:
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 2x + 3$
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f\left(f(x)\right) - f(2x)}$

7. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
   Αν επιπλέον $f(1) = f'(1) = 2$, τότε:
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 2x + 3$
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f\left(f(x)\right) - f(2x)}$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι

$$f(e^x) - f(x) > (e^x - x)f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

9. Εστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$
2. $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,1)$

9. Εστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$
2. $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,1)$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$ και κυρτή. Αν $\alpha > 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f'(\alpha) - 1}{x} + \frac{f(2\alpha) - \alpha}{x - 1} + \frac{f(\alpha^2) - \alpha}{x - 2} = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, 2)$.

11. Εστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κοίλη

1. Αν $g(x)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x}$, $x>0$, να δείξετε ότι $g\downarrow(0,+\infty)$
2. Αν $f(2)=1$ και $f'(1)=2$, να δείξετε ότι

$$-1<f(1)<1+\sigma\upsilon\nu 1-\sigma\upsilon\nu 2$$

11. Εστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και κοίλη

1. Αν $g(x)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x}$, $x>0$, να δείξετε ότι $g\downarrow(0,+\infty)$
2. Αν $f(2)=1$ και $f'(1)=2$, να δείξετε ότι

$$-1<f(1)<1+\sigma\upsilon\nu 1-\sigma\upsilon\nu 2$$

12. Εστω $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$
2. Η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
3. $f(x) < \frac{2}{3} f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$
4. Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$$

12. Εστω $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$
2. Η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
3. $f(x) < \frac{2}{3} f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$
4. Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$$

12. Εστω $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$
2. Η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x \geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
3. $f(x) < \frac{2}{3} f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$
4. Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 + \alpha}$$

12. Εστω $f:[0,+\infty]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=0$ η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

1. $f(x+1)-f(x)>f'(x)$, για κάθε $x>0$
2. Η συνάρτηση $g(x)=(x+1)f(x)-xf(x+1)-x+2$, $x\geq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα
3. $f(x)<\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{3x}{2}\right)$, για κάθε $x>0$
4. Υπάρχει μοναδικό $\alpha\in(0,2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}-\frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1}=\frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$$