

Διανύσματα

Συντεταγμένες στο επίπεδο

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Μα γιατί?

Καλή η φαντασία (βασικά είναι τέλεια), αλλά πάμε σε κάτι πιο χειροπιαστό!

Πώς θα γίνει η δουλειά?

- κάθε διάνυσμα θα γίνει σημείο!!!!!!!!!!!!!!!
- κάθε πράξη στα διανύσματα θα γίνει πράξη σημείων!!
- κάθε προηγούμενος ορισμός θα οριστεί στα σημεία και τελικά...
- θα λάμψει η γεωμετρία ...

Πώς θα γίνει η δουλειά?

- κάθε διάνυσμα θα γίνει σημείο!!!!!!!!!!!!!!
- κάθε πράξη στα διανύσματα θα γίνει πράξη σημείων!!!
- κάθε προηγούμενος ορισμός θα οριστεί στα σημεία και τελικά...
- θα λάμψει η γεωμετρία ...

Πώς θα γίνει η δουλειά?

- κάθε διάνυσμα θα γίνει σημείο!!!!!!!!!!!!!!!
- κάθε πράξη στα διανύσματα θα γίνει πράξη σημείων!!!
- κάθε προηγούμενος ορισμός θα οριστεί στα σημεία και τελικά...
- θα λάμψει η γεωμετρία ...

Πώς θα γίνει η δουλειά?

- κάθε διάνυσμα θα γίνει σημείο!!!!!!!!!!!!!!!
- κάθε πράξη στα διανύσματα θα γίνει πράξη σημείων!!!
- κάθε προηγούμενος ορισμός θα οριστεί στα σημεία και τελικά...
- θα λάμψει η γεωμετρία ...

Πώς θα γίνει η δουλειά?

- κάθε διάνυσμα θα γίνει σημείο!!!!!!!!!!!!!!!
- κάθε πράξη στα διανύσματα θα γίνει πράξη σημείων!!!
- κάθε προηγούμενος ορισμός θα οριστεί στα σημεία και τελικά...
- θα λάμψει η γεωμετρία ... μέσα από άλγεβρα

Από κάμπια σε πεταλούδα

- γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να μεταφερθεί παράλληλα
- γιατί όχι λοιπόν στην αρχή των αξόνων
- άρα κάθε διάνυσμα πλέον είναι σημείο και κάθε σημείο διάνυσμα

$$A(x, y) \iff \overrightarrow{OA} = (x, y)$$

Από κάμπια σε πεταλούδα

- γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να μεταφερθεί παράλληλα
- γιατί όχι λοιπόν στην αρχή των αξόνων
- άρα κάθε διάνυσμα πλέον είναι σημείο και κάθε σημείο διάνυσμα

$$A(x, y) \iff \overrightarrow{OA} = (x, y)$$

Από κάμπια σε πεταλούδα

- γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να μεταφερθεί παράλληλα
- γιατί όχι λοιπόν στην αρχή των αξόνων το έχετε ξανακάνει...?
- άρα κάθε διάνυσμα πλέον είναι σημείο και κάθε σημείο διάνυσμα

$$A(x, y) \iff \overrightarrow{OA} = (x, y)$$

Από κάμπια σε πεταλούδα

- γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να μεταφερθεί παράλληλα
- γιατί όχι λοιπόν στην αρχή των αξόνων
- άρα κάθε διάνυσμα πλέον είναι σημείο και κάθε σημείο διάνυσμα

$$A(x, y) \iff \overrightarrow{OA} = (x, y)$$

Από κάμπια σε πεταλούδα

- γνωρίζουμε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να μεταφερθεί παράλληλα
- γιατί όχι λοιπόν στην αρχή των αξόνων
- άρα κάθε διάνυσμα πλέον είναι σημείο και κάθε σημείο διάνυσμα

$$A(x, y) \iff \overrightarrow{OA} = (x, y)$$

Μετά τα γεννητούρια

- ① Το μηδενικό διάνυσμα...
- ② Ισα διανύσματα...
- ③ Ενα παράλληλο στον $x'x...$
- ④ Ενα παράλληλο στον $y'y$

Μετά τα γεννητούρια

- ① Το μηδενικό διάνυσμα...
- ② Ισα διανύσματα...
- ③ Ενα παράλληλο στον $x'x...$
- ④ Ενα παράλληλο στον $y'y$

Μετά τα γεννητούρια

- ① Το μηδενικό διάνυσμα...
- ② Ισα διανύσματα...
- ③ Ενα παράλληλο στον $x'x...$
- ④ Ενα παράλληλο στον $y'y$

Μετά τα γεννητούρια

- ① Το μηδενικό διάνυσμα...
- ② Ισα διανύσματα...
- ③ Ενα παράλληλο στον $x'x...$
- ④ Ενα παράλληλο στον $y'y$

Πράξεις από διανύσματα ...

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ όπως θα θέλατε...

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
- $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Πράξεις από διανύσματα ...

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ όπως θα θέλατε...

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
- $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Πράξεις από διανύσματα ...

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ όπως θα θέλατε...

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
- $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Πράξεις από διανύσματα ...

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ όπως θα θέλατε...

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
- $\lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Ορισμοί...

- Μέσου: Αφού $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- Μέτρου: Από απόσταση αρχής αξόνων από σημείο

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

- Τυχαίο διάνυσμα \overrightarrow{AB} : Από διανύσματα θέσης

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

- Απόσταση των σημείων A και B: από πριν

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ορισμοί...

- Μέσου: Αφού $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- Μέτρου: Από απόσταση αρχής αξόνων από σημείο

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

- Τυχαίο διάνυσμα \overrightarrow{AB} : Από διανύσματα θέσης

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

- Απόσταση των σημείων A και B: από πριν

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ορισμοί...

- Μέσου: Αφού $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- Μέτρου: Από απόσταση αρχής αξόνων από σημείο

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

- Τυχαιο διάνυσμα \overrightarrow{AB} : Από διανύσματα θέσης

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

- Απόσταση των σημείων A και B: από πριν

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ορισμοί...

- Μέσου: Αφού $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- Μέτρου: Από απόσταση αρχής αξόνων από σημείο

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

- Τυχαιο διάνυσμα \overrightarrow{AB} : Από διανύσματα θέσης

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

- Απόσταση των σημείων A και B: από πριν

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Και κάτι νέο...

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Η απόδειξη είναι απλή...

Και κάτι νέο...

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Η απόδειξη είναι απλή...

Behind the scenes

Εστω \mathbf{i} και \mathbf{j} τα μοναδιαία διανύσματα που είναι ομόρροπα με τους θετικούς ημιάξονες x' και y' αντίστοιχα:

Σύνδεση διανυσμάτων με συντεταγμένες

Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των \mathbf{i} και \mathbf{j}

$$(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Εξάσκηση

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

① \overrightarrow{OA} , όταν $A(-5, 3)$, (Ο η αρχή των αξόνων)

② $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + \vec{j}$

③ $\vec{\beta} = -2\vec{i}$

④ $\vec{\gamma} = \vec{j}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

① \overrightarrow{OA} , όταν $A(-5, 3)$, (O η αρχή των αξόνων)

② $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + \vec{j}$

③ $\vec{\beta} = -2\vec{i}$

④ $\vec{\gamma} = \vec{j}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

① \overrightarrow{OA} , όταν $A(-5, 3)$, (O η αρχή των αξόνων)

② $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + \vec{j}$

③ $\vec{\beta} = -2\vec{i}$

④ $\vec{\gamma} = \vec{j}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

① \overrightarrow{OA} , όταν $A(-5, 3)$, (O η αρχή των αξόνων)

② $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + \vec{j}$

③ $\vec{\beta} = -2\vec{i}$

④ $\vec{\gamma} = \vec{j}$

Εξάσκηση 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 2, 3\mu)$ και $\vec{\beta} = (\mu - 1, 2\lambda - 7)$. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ ώστε:

- 1 τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσα
- 2 το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα

Εξάσκηση 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 2, 3\mu)$ και $\vec{\beta} = (\mu - 1, 2\lambda - 7)$. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ ώστε:

- ① τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσα
- ② το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα

Εξάσκηση 3

Δίνονται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 9, \lambda^2 + 3\lambda)$. Για ποια τιμή του λ είναι:

$$\vec{\alpha} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{\alpha} \parallel x'x$$

Εξάσκηση 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

- 1 Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- 2 να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (5, -4)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ του ερωτήματος 1.

Εξάσκηση 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

- 1 Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- 2 να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (5, -4)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ του ερωτήματος 1.

Εξάσκηση 5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 1, 3)$, $\vec{\beta} = (2, \lambda - \mu)$ και $\vec{\gamma} = (\lambda, \mu)$. Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα, να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{u} = (-4, 5)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$

Εξάσκηση 6

Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$ και $B(-5, 1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- ① του διανύσματος \overrightarrow{AB}
- ② του σημείου Γ , αν $\overrightarrow{A\Gamma} = (5, -4)$
- ③ του σημείου M , αν ισχύει $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BM}$

Εξάσκηση 6

Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$ και $B(-5, 1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- ① του διανύσματος \overrightarrow{AB}
- ② του σημείου Γ , αν $\overrightarrow{A\Gamma} = (5, -4)$
- ③ του σημείου M , αν ισχύει $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BM}$

Εξάσκηση 6

Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$ και $B(-5, 1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- ① του διανύσματος \overrightarrow{AB}
- ② του σημείου Γ , αν $\overrightarrow{A\Gamma} = (5, -4)$
- ③ του σημείου M , αν ισχύει $2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BM}$

Εξάσκηση 7

Εστω τα σημεία $A(-5, 2)$ και $B(1, -3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- 1 του μέσου M του τμήματος AB
- 2 του συμμετρικού σημείου Γ του A ως προς το B

Εξάσκηση 7

Εστω τα σημεία $A(-5, 2)$ και $B(1, -3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- ① του μέσου M του τμήματος AB
- ② του συμμετρικού σημείου Γ του A ως προς το B

Εξάσκηση 8

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(-1, 2)$, $B(3, -4)$. Αν $K(5, -2)$ το κέντρο του παραλληλογράμμου, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .

Εξάσκηση 9

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(4, 1)$. Αν AM διάμεσος και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να βρείτε τα σημεία M και Θ .

Εξάσκηση 10

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος:

① $\vec{\alpha}$

② $\vec{v} = -3\vec{\alpha}$

③ $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Εξάσκηση 10

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος:

① $\vec{\alpha}$

② $\vec{v} = -3\vec{\alpha}$

③ $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Εξάσκηση 10

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος:

- ① $\vec{\alpha}$
- ② $\vec{v} = -3\vec{\alpha}$
- ③ $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Εξάσκηση 11

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(3, 1)$, $B(-2, 0)$ και $\Gamma(1, -3)$. Να βρείτε:

- 1 τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Delta}$
- 2 το μέτρο $|\overrightarrow{B\Delta}|$

Εξάσκηση 11

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(3, 1)$, $B(-2, 0)$ και $\Gamma(1, -3)$. Να βρείτε:

- 1 τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Delta}$
- 2 το μέτρο $|\overrightarrow{B\Delta}|$

Εξάσκηση 12

Να βρείτε ένα διάνυσμα \vec{u} που να είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{v} = (7, -2)$ και έχει μέτρο τριπλάσιο του \vec{v}

Εξάσκηση 13

Αν $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -3)$, να υπολογίσετε το μέτρο του \vec{v} για το οποίο ισχύει $\vec{v} = \vec{\alpha} + |\vec{v}|\vec{\beta}$

Εξάσκηση 14

Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$ και $B(1, -2)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $y'y$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB

Εξάσκηση 15

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(1, 2)$ και $\Delta(-2, -5)$. Να δείξετε ότι:

- 1 τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι συγγραμμικά
- 2 τα σημεία A , B και Γ είναι κορυφές τριγώνου

Εξάσκηση 15

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(1, 2)$ και $\Delta(-2, -5)$. Να δείξετε ότι:

- ① τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι συγγραμμικά
- ② τα σημεία A , B και Γ είναι κορυφές τριγώνου

Εξάσκηση 16

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, 4 - 2\lambda)$. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$

Εξάσκηση 17

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (\kappa, \kappa - 1)$. Να βρείτε:

- 1 Το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$
- 2 Το κ ώστε το $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$

Εξάσκηση 17

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (\kappa, \kappa - 1)$. Να βρείτε:

- ① Το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$
- ② Το κ ώστε το $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$

Εξάσκηση 18

Εστω Oxy ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (-3, 1)$ και $\overrightarrow{OG} = (-2, 1)$. Να βρείτε το σημείο M στον άξονα $x'x$, ώστε η παράσταση $d = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MG}|^2$ να παίρνει την ελάχιστη τιμή.