

# Συναρτήσεις

## Συνέχεια Συνάρτησης

Κωνσταντίνος Λόλας

# Όταν εμείς το υπολογίζαμε...

Μέχρι στιγμής πλησιάζαμε. Ήρθε ο καιρός να φτάσουμε!

# Συνέχεια 1

## Συνέχεια σε σημείο

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο  $x_0$  αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

# Συνέχεια 2

## Συνέχεια σε διάστημα

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  όταν:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

## Συνέχεια 3

### Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση είναι συνεχής όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές

# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές

# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές



# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f \circ g$

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f \circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

# Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές



# Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια

# Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν "διακόπτεται" βγάζουμε ωραία θεωρήματα

# Πιο άπειρο είναι μεγαλύτερο κάνει κουμάντο

- Υπάρχει μεγαλύτερο? το βγάζω κοινό παράγοντα
- Είναι ίσα? κάνω πράξεις και τα διώχνω

# Εξάσκηση

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο  $x_0$ :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

# Εξάσκηση

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο  $x_0$ :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

# Εξάσκηση

Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f(x) = e^x + \ln(x + 1)$  ως προς τη συνέχεια και να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

# Εξάσκηση

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x + 1), & x > 0 \end{cases}$$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια.
- ② Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-\pi, 0]$ .

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 4\alpha e^x + \beta \sin x, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x + \alpha x - \beta, & x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες η  $f$  είναι συνεχής.



# Εξάσκηση

Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a-1)x^3 - 2x + 1)$ , για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + \mu x^2 - 2}{(\mu-2)x^2 + 3x + 1}$ , είναι πραγματικός αριθμός

# Εξάσκηση

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\mu$ , να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + \mu x)$$



# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^n + x - 1}{x^2 + 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  για τις διάφορες τιμές του  $n \in \mathbb{N}^*$ .

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x f \left( \frac{x-1}{x} \right) \right) = 2$ , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ , να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ , να υπολογίσετε τα όρια

①  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$

②  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

## Εξάσκηση

Έστω  $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

② Αν επιπλέον ισχύει  $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$ , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$$

Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \sigma \upsilon \nu x$$

# Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

# Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$① \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$② \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

# Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1 \\ \textcircled{2} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 \\ \textcircled{3} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

# Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

- 1  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = 1$
- 2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$
- 3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} = 0$
- 4  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x - 1} = 1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - a^x}{2^x + 3a^x}, a > 0$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$$

$$② \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$③ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2}-1}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

3  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta\mu x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma\nu\nu x)$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma \nu \nu x)$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{\ln x}$$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$  με σύνολο τιμών το  $[0, +\infty)$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$  με σύνολο τιμών το  $[0, +\infty)$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$



# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^x, x > 0$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση