# **Συναρτήσεις** Ενα προς ένα (1-1)

Κωνσταντίνος Λόλας

10° ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

#### 1-1

#### Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f: \mathbf{A} \to \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση συνάστηση 1-1 (ένα προς ένα), όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$  ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$$

#### Αντέχετε?

#### Ενδιαφέροντα

$$x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

$$\bullet \ f(x_1) \neq f(x_2) \iff x_1 \neq x_2$$

$$\quad \circ \ f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$$

#### Φαντασία θέλει

#### Μια συνάρτηση:

- Κάθε y το πολύ μία φορά
- Κάθε y του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορό
- Κάθε οριζόντια γραμμή...

Αρα... φαίνονται οι διαφορετικοί!

Λόλας ( $10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 4/15

#### Φαντασία θέλει

#### Μια συνάρτηση:

- Κάθε y το πολύ μία φορά
- ullet Κάθε y του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά
- Κάθε οριζόντια γραμμή...

Αρα... φαίνονται οι διαφορετικοί!

Λόλας ( $10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 4/15

#### Φαντασία θέλει

#### Μια συνάρτηση:

- Κάθε y το πολύ μία φορά
- ullet Κάθε y του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά
- Κάθε οριζόντια γραμμή...

Αρα... φαίνονται οι διαφορετικοί!

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 4/15

#### Προσοχή

Γνησίως μονότονη ⇒ είναι 1-1

1-1 ⇒ MΠΟΡΕΙ

Βρείτε την!

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5/15

#### Προσοχή

ullet Γνησίως μονότονη  $\Longrightarrow$  είναι 1-1

1-1 ⇒ MΠΟΡΕΙ

Βρείτε την!

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5/15

#### Προσοχή

- Γνησίως μονότονη  $\implies$  είναι 1-1
- 1-1 ⇒ M∏OPEI!

Βρείτε την!

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5/15

#### Προσοχή

- Γνησίως μονότονη  $\implies$  είναι 1-1
- 1-1 ⇒ MΠΟΡΕΙ!

Βρείτε την!

5/15 Συναρτήσεις

#### Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

#### Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

- Κατασκευή

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

#### Γιατί να το κάνουμε?

Λύνουμε σύνθετες εξισώσεις διώχνοντας f

Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

**1** 
$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

$$f(x) = 2x + e^x - 1$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

2 
$$f(x) = 2x + e^x - 1$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

- ①  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
- 2  $f(x) = 2x + e^x 1$
- $f(x) = x^2 1$

- ② Να λύσετε τις εξισώσεις:

**1** 
$$f(x) = 0$$

$$(\ln x) = 0$$

$$f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$$

$$f(f(x) + 1) = 0$$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - **1** f(x) = 0
  - $(\ln x) = 0$
  - $f(x^2 2x) = f(x 2)$
  - f(f(x) + 1) = 0
- $\bigcirc$  Να λύσετε το σύστημα  $egin{cases} lpha^3-eta=2\ e^{lpha-1}+eta=0 \end{cases}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - **1** f(x) = 0
  - ②  $f(\ln x) = 0$
  - $f(x^2 2x) = f(x 2)$
  - f(f(x) + 1) = 0
- angle Να λύσετε το σύστημα  $egin{cases} lpha^3-eta=2\ e^{lpha-1}+eta=0 \end{cases}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - **1** f(x) = 0
  - ②  $f(\ln x) = 0$
  - $f(x^2 2x) = f(x 2)$
  - f(f(x) + 1) = 0
- $ule{1}$  Να λύσετε το σύστημα  $egin{cases} lpha^3-eta=2\ e^{lpha-1}+eta=0 \end{cases}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - **1** f(x) = 0
  - $f(\ln x) = 0$
  - $f(x^2 2x) = f(x 2)$
  - **4** f(f(x) + 1) = 0
- $\bigcirc$  Να λύσετε το σύστημα  $egin{cases} lpha^3-eta=2\ e^{lpha-1}+eta=0 \end{cases}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - **1** f(x) = 0
  - **2**  $f(\ln x) = 0$
  - $f(x^2 2x) = f(x 2)$
  - **4** f(f(x) + 1) = 0

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να λύσετε την εξίσωση  $(1 e^{-x})f(x^2 + 2x) = 1$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

- **1** Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- $oldsymbol{2}$  Να λύσετε την εξίσωση  $(1-e^{-x})f(x^2+2x)=1$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο  $\mathbb R$ . Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(x^4+1) = f(x^2+1)$$

$$f(f(x)) = 1$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(x^4 + 1) = f(x^2 + 1)$$

$$f(f(x)) = 1$$

Συναρτήσεις 10/15

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x^4+1) = f(x^2+1)$$

$$(\eta \mu x) = f(\sigma v \nu x)$$

$$f(f(x)) = 1$$

Εστω συνάρτηση  $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε:

- 1 Την ανίσωση f(x) x > f(2x)
- 2 Την εξίσωση  $f(x) \ln x = f(x^2)$

Εστω συνάρτηση  $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε:

- **1** Την ανίσωση f(x) x > f(2x)
- ② Την εξίσωση  $f(x) \ln x = f(x^2)$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=e^x+x-1$ . Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$$

Εστω  $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  δύο συναρτήσεις, όπου η συνάρτηση  $g\circ f$  είναι 1-1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 13/15

Εστω  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f\left(f(x)
ight)+f^{3}(x)-x=0$$
, για κάθε  $x\in\mathbb{R}$ 

- Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

Συναρτήσεις 14/15

Εστω  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f\left(f(x)
ight)+f^{3}(x)-x=0$$
, για κάθε  $x\in\mathbb{R}$ 

- Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- Να λύσετε την εξίσωση  $f(f(x) + x^2 x) = f(f(x) + 2x 2)$

Συναρτήσεις 14/15

Εστω  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f\left(f(x)
ight)+f^{3}(x)-x=0$$
, για κάθε  $x\in\mathbb{R}$ 

- Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- Nα λύσετε την εξίσωση  $f(f(x) + x^2 x) = f(f(x) + 2x 2)$
- Nα λύσετε την εξίσωση f(f(2x+1)) f(f(x)) = x+1

Συναρτήσεις 14/15 Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση