

Συναρτήσεις

Ρυθμός Μεταβολής

Κωνσταντίνος Λόλας

Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

x_1^2 Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

x_1^2 Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

x_1^2 Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

x_1^2 Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

x_1^2 Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

x_1^2 Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

Ρυθμός μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής του μεγέθους A

Είναι το πηλίκο

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

① μέση ταχύτητα $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

③ δύναμη $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

① μέση ταχύτητα $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

③ δύναμη $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

① μέση ταχύτητα $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

③ δύναμη $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

① μέση ταχύτητα $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

③ δύναμη $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

Στιγμιαία λοιπόν

① ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = \frac{dP}{dt}$

ή ποιό elegant

① ταχύτητα $v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

② επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = P'(t)$

Στιγμιαία λοιπόν

① ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = \frac{dP}{dt}$

ή ποιό elegant

① ταχύτητα $v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

② επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = P'(t)$

Στιγμιαία λοιπόν

① ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = \frac{dP}{dt}$

ή ποιό elegant

① ταχύτητα $v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

② επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = P'(t)$

Στιγμιαία λοιπόν

① ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = \frac{dP}{dt}$

ή ποιό elegant

① ταχύτητα $v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

② επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = P'(t)$

Στιγμιαία λοιπόν

① ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = \frac{dP}{dt}$

ή ποιό elegant

① ταχύτητα $v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

② επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = P'(t)$

Στιγμιαία λοιπόν

① ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = \frac{dP}{dt}$

ή ποιο elegant

① ταχύτητα $v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

② επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = P'(t)$

Στιγμιαία λοιπόν

① ταχύτητα $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

② επιτάχυνση $\alpha = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = \frac{dP}{dt}$

ή ποιό elegant

① ταχύτητα $v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$

② επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$

③ δύναμη $F = P'(t)$

Επιστροφή στα μαθηματικά!

Αν και δεν μου αρέσει, στα μαθηματικά ορίζεται

Ρυθμός μεταβολής του μεγέθους A ως προς την μεταβλητή B
Είναι το πηλίκο

$$A'(B) = \frac{dA}{dB}$$

ή αλλιώς η παράγωγος του A ως προς το B

One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος!
ΤΕΛΟΣ

- Άρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Άρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
 - $x' = x'$
 - $(x^2)' = 2xx'$
 - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x} x'$

One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος!
ΤΕΛΟΣ

- Άρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Άρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
 - $x' = x'$
 - $(x^2)' = 2xx'$
 - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x} x'$

One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος!
ΤΕΛΟΣ

- Άρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Άρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
 - $x' = x'$
 - $(x^2)' = 2xx'$
 - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x} x'$

One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος!
ΤΕΛΟΣ

- Άρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Άρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
 - $x' = x'$
 - $(x^2)' = 2xx'$
 - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x}x'$

One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος!
ΤΕΛΟΣ

- Άρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Άρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
 - $x' = x'$
 - $(x^2)' = 2xx'$
 - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x} x'$

One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος!
ΤΕΛΟΣ

- Άρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Άρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
 - $x' = x'$
 - $(x^2)' = 2xx'$
 - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x}x'$

One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος!
ΤΕΛΟΣ

- Άρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Άρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
 - $x' = x'$
 - $(x^2)' = 2xx'$
 - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x}x'$

Κύριε μας μπερδεύει ο συμβολισμός

Πολλοί, για να είναι σίγουροι κρατάνε το $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ και γράφουνε πάντα τις συναρτήσεις. π.χ.

$$(x^2(t))' = \frac{dx^2(t)}{dt} = \frac{dx^2(t)}{dx(t)} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t)x'(t)$$

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

- 1 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς το x στο σημείο με $x = 1$
- 2 Να βρείτε τις τιμές του x , που ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς το x είναι αρνητικός

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

- 1 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς το x στο σημείο με $x = 1$
- 2 Να βρείτε τις τιμές του x , που ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς το x είναι αρνητικός

Εξάσκηση 2

Το εμβαδό E ενός τετραγώνου αυξάνει. Η πλευρά του α σε cm, που αυξάνει, δίνεται από τον τύπο $\alpha = 3t + 2$, όπου t ο χρόνος σε sec.

- 1 Να αποδείξετε ότι $E = E(t) = (3t + 2)^2$
- 2 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τετραγώνου, όταν $t = 2$ sec.

Εξάσκηση 2

Το εμβαδό E ενός τετραγώνου αυξάνει. Η πλευρά του α σε cm, που αυξάνει, δίνεται από τον τύπο $\alpha = 3t + 2$, όπου t ο χρόνος σε sec.

- 1 Να αποδείξετε ότι $E = E(t) = (3t + 2)^2$
- 2 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τετραγώνου, όταν $t = 2$ sec.

Εξάσκηση 3

Δύο κινητά A και B ξεκινούν συγχρόνως από την αρχή των αξόνων O. Το A κινείται στον ημιάξονα Ox με ταχύτητα $6cm/sec$ και το B στον ημιάξονα Oy με ταχύτητα $8cm/sec$.

- 1 Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των A και B
- 2 Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η απόσταση των A και B είναι $50cm$
- 3 Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (AB)$ των δύο κινητών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Εξάσκηση 3

Δύο κινητά A και B ξεκινούν συγχρόνως από την αρχή των αξόνων O. Το A κινείται στον ημιάξονα Ox με ταχύτητα $6cm/sec$ και το B στον ημιάξονα Oy με ταχύτητα $8cm/sec$.

- 1 Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των A και B
- 2 Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η απόσταση των A και B είναι $50cm$
- 3 Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (AB)$ των δύο κινητών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Εξάσκηση 3

Δύο κινητά A και B ξεκινούν συγχρόνως από την αρχή των αξόνων O. Το A κινείται στον ημιάξονα Ox με ταχύτητα $6cm/sec$ και το B στον ημιάξονα Oy με ταχύτητα $8cm/sec$.

- 1 Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των A και B
- 2 Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η απόσταση των A και B είναι $50cm$
- 3 Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (AB)$ των δύο κινητών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Εξάσκηση 4

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ ξεκινώντας από το O και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 4cm/sec

- 1 Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή $t, t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = 4t$.
- 2 Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να φθάσει στο σημείο $(4, 2)$
- 3 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M καθώς περνάει από το σημείο $B(16, 4)$

Εξάσκηση 4

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ ξεκινώντας από το O και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 4cm/sec

- ① Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή $t, t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = 4t$.
- ② Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να φθάσει στο σημείο $(4, 2)$
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M καθώς περνάει από το σημείο $B(16, 4)$

Εξάσκηση 4

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ ξεκινώντας από το O και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 4cm/sec

- 1 Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή $t, t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = 4t$.
- 2 Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να φθάσει στο σημείο $(4, 2)$
- 3 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M καθώς περνάει από το σημείο $B(16, 4)$

Εξάσκηση 5

Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το x αυξάνει με ρυθμό $2cm/sec$ και το y ελαττώνεται με ρυθμό $3cm/sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- 1 Της περιμέτρου
- 2 Του εμβαδού E του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που είναι $x = 10cm$ και $y = 12cm$

Εξάσκηση 5

Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το x αυξάνει με ρυθμό $2cm/sec$ και το y ελαττώνεται με ρυθμό $3cm/sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- 1 Της περιμέτρου
- 2 Του εμβαδού E του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που είναι $x = 10cm$ και $y = 12cm$

Εξάσκηση 6

Έστω E το εμβαδό του τριγώνου OAM που περικλείεται από την ευθεία $\varepsilon : y = x$, το άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$.

- 1 Να αποδείξετε ότι $E = \frac{1}{2}\lambda^2$
- 2 Αν το λ αυξάνεται με ρυθμό $3cm/s$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , όταν $\lambda = 2cm$

Εξάσκηση 6

Έστω E το εμβαδό του τριγώνου OAM που περικλείεται από την ευθεία $\varepsilon : y = x$, το άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 0$.

- ① Να αποδείξετε ότι $E = \frac{1}{2}\lambda^2$
- ② Αν το λ αυξάνεται με ρυθμό $3cm/s$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , όταν $\lambda = 2cm$

Εξάσκηση 7

Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$, $x \geq 0$ ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων O .

- 1 Αν ο ρυθμός μεταβολής $x'(t)$ της τετμημένης του σημείου M είναι $2cm/s$, να βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο $B(4, 16)$
- 2 Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του x αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$
- 3 Καθώς το M περνάει από το $A(2, 4)$, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό $3cm/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M τη χρονική στιγμή που περνάει από το A

Εξάσκηση 7

Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$, $x \geq 0$ ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων O .

- 1 Αν ο ρυθμός μεταβολής $x'(t)$ της τετμημένης του σημείου M είναι 2cm/s , να βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο $B(4, 16)$
- 2 Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του x αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$
- 3 Καθώς το M περνάει από το $A(2, 4)$, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 3cm/s . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M τη χρονική στιγμή που περνάει από το A

Εξάσκηση 7

Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$, $x \geq 0$ ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων O .

- ① Αν ο ρυθμός μεταβολής $x'(t)$ της τετμημένης του σημείου M είναι 2cm/s , να βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο $B(4, 16)$
- ② Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του x αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$
- ③ Καθώς το M περνάει από το $A(2, 4)$, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 3cm/s . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M τη χρονική στιγμή που περνάει από το A

Εξάσκηση 8

Ένα κινητό κινείται σε ελλειπτική τροχιά με εξίσωση $4x^2 + y^2 = 4$. Καθώς περνάει από το σημείο $A(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ η τετμημένη του x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Εξάσκηση 9

Ένα κινητό κινείται στη καμπύλη $C : y = e^x$. Καθώς το M περνάει από το σημείο $A(0, 1)$, η τετμημένη του x αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l = (OM)$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Εξάσκηση 10

Ένα κινητό M κινείται στην καμπύλη $C : y = x^3$. Καθώς το M περνάει από το σημείο $A(1, 1)$, η τετμημένη του x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \widehat{M\hat{O}x}$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Εξάσκηση 11

Μία σκάλα μήκους $5m$ είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας Β γλιστράει στο δάπεδο με σταθερό ρυθμό $0,3m/s$. Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο $3m$, να βρείτε τη ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.

Εξάσκηση 12

Μία γυναίκα ύψους $2m$ απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους $10cm$ με ταχύτητα $0,5m/s$. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της?

Εξάσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \leq 0$.

- 1 Να βρείτε την τετμημένη του σημείο τομής M της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(a, f(a))$, $a \neq 0$ με τον άξονα $x'x$.
- 2 Έστω ότι το σημείο A κινείται κατά μήκος της C_f και ο ρυθμός μεταβολής του $a(t)$ δίνεται από τον τύπο $a'(t) = 2a(t)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη -2 .
- 3 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή με το 2. ερώτημα

Εξάσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \leq 0$.

- ① Να βρείτε την τετμημένη του σημείο τομής M της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(a, f(a))$, $a \neq 0$ με τον άξονα $x'x$.
- ② Έστω ότι το σημείο A κινείται κατά μήκος της C_f και ο ρυθμός μεταβολής του $a(t)$ δίνεται από τον τύπο $a'(t) = 2a(t)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη -2
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή με το 2. ερώτημα

Εξάσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \leq 0$.

- ① Να βρείτε την τετμημένη του σημείο τομής M της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(a, f(a))$, $a \neq 0$ με τον άξονα $x'x$.
- ② Έστω ότι το σημείο A κινείται κατά μήκος της C_f και ο ρυθμός μεταβολής του $a(t)$ δίνεται από τον τύπο $a'(t) = 2a(t)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη -2
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή με το 2. ερώτημα