Συναρτήσεις

Συνέχεια Συνάρτησης

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Οταν εμείς το υπολογίζαμε...

Μέχρι στιγμής πλησιάζαμε. Ηρθε ο καιρός να φτάσουμε!

Συνέχεια 1

Συνέχεια σε σημείο

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Συνέχεια 2

Συνέχεια σε διάστημα

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ όταν:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Συνέχεια 3

Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση είναι συνεχής όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- **Πολυωνυμικές**
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές
- Αρρητες

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- **Εκθετικές**
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές
- Αρρητες

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- **Λογαριθμικές**
- Τριγωνομετρικές
- Αρρητες

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- **Τριγωνομετρικές**
- Αρρητες

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές
- **Άρρητες**

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$
- $f \circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f+g$
- $f-g$
- $f\cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f\circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f+g$
- $f-g$
- $f\cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f\circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$
- $f \circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f+g$
- $f-g$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$
- $f \circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f+g$
- $f-g$
- $f\cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$
- $f\circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν ”διακόπτεται” βγάζουμε ωραία θεωρήματα

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν ”διακόπτεται” βγάζουμε ωραία θεωρήματα

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν ”διακόπτεται” βγάζουμε ωραία θεωρήματα

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο x_0:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$

1. Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο x_0:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ ως προς τη συνέχεια και να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4\alpha e^x + \beta\sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x + \alpha x - \beta, & x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η f είναι συνεχής.

5. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$xf(x) = x^2 + \eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

6. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Αν $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$, να δείξετε ότι $f(1) = 2$

7. Εστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = \ln x, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x) = x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x) = x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

9. Εστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x = 1$, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$