Συναρτήσεις Πράξεις ορίων

Κωνσταντίνος Λόλας

10° ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Υπολογισμοί ορίων



Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- ullet Αν $\lim_{x o x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0
- ullet Αν $\lim_{x o x_0}f(x)<0$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0

Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0
- ullet Αν $\lim_{x o x_0}f(x)<0$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0

Λόλας $(10^{o}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 3/36

Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0

Λόλας $(10^{o}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 3/36

Διάταξη

Θεώρημα 2ο

Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Από κάπου να πιαστούμε?

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

$$\bullet \lim_{x \to x_0} c = c$$

Και υπολονίζουμε...

MONO αν υπάρχουν τα όρια των f και g τότε

$$\bullet \ \lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \text{ ennotities otherwise} \ g(x) \neq 0$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)|$$

$$\bullet \lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$
, εννοείται ότι $f(x)>0$ κοντά στο x_0

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- lim $P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- lim $P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- ullet $P(x)=P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$
- ullet $\lim_{x o x_0} rac{P(x)}{Q(x)} = rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- ullet $P(x)=P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$
- ullet $\lim_{x o x_0} rac{P(x)}{Q(x)} = rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- ullet $P(x)=P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$
- ullet $\lim_{x o x_0} rac{P(x)}{Q(x)} = rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$

Από τα προηγούμενα...

- $\circ \lim_{x o x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- ullet $\lim_{x o x_0}P(x)=P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\circ \, \lim_{x \to x_0} \eta \overline{\mu}(x) = \eta \overline{\mu}(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma \upsilon \nu(x) = \sigma \upsilon \nu(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

Από τα προηγούμενα...

- $\circ \lim_{x o x_0} x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$
- ullet $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma \upsilon \nu(x) = \sigma \upsilon \nu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 7/36

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Έστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$
, κοντά στο x_0

$$\bullet \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R},$$

τότε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Έστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0
- $\bullet \ \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R},$

τότε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Έστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$
, κοντά στο x_0

$$\quad \quad 0 \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R} \text{,}$$

τότε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu x}{x} = 0$$

Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

$$\circ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu x}{x} = 0$$

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Θέτουμε u = q(x)

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε προφανώς $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = k$

Συναρτήσεις 10/36

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Θέτουμε u = g(x)
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε προφανώς $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = k$

Συναρτήσεις 10/36

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Θέτουμε u = g(x)
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $k = \lim_{u \to u_0} f(u)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε προφανώς $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = k$

Συναρτήσεις 10/36

Ti gínetai me th súndesh $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Φέτουμε <math> u = g(x)
- ② Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 10/36

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \ \mathrm{kal} \ \lim_{x\to 2} g(x) = 2$$

να υπολογίσετε το
$$\lim_{x \to 2} \left(3f(x) + f(x) \cdot g(x) \right)$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 12/36

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2 - x} \right)$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$\bigoplus_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2 - x} \right)$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

Συναρτήσεις 14/36

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

Συναρτήσεις 14/36

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = egin{cases} x-2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \text{. Nα βρείτε (αν υπάρχουν)} \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$$

τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x \to 1} f(x)$
- $\lim_{x \to 2} f(x)$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 15/36

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = egin{cases} x-2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \text{. Nα βρείτε (αν υπάρχουν)} \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$$

τα όρια:

- $\mathbf{1} \lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$

Λόλας $(10^{\circ}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 15/36

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = egin{cases} x-2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \text{. Nα βρείτε (αν υπάρχουν)} \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$$

τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x \to 2} f(x)$

Λόλας $(10^{\circ}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 15/36

Έστω η συνάρτηση
$$f(x)= \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ a, & x=2 \end{cases}$$

- Να βρείτε το $\lim_{x \to 2} f(x)$

Συναρτήσεις 16/36

Έστω η συνάρτηση
$$f(x)= \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{2x-4}, & x\neq 2\\ a, & x=2 \end{cases}$$

- Να βρείτε το $\lim_{x \to 2} f(x)$
- ② Να βρείτε το a ώστε $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Συναρτήσεις 16/36

Έστω η συνάρτηση
$$f(x)=egin{cases} \alpha\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\beta,&x<0\\ \alpha\sqrt{x+1}+2\beta,&x\geq0 \end{cases}$$
. Να βρείτε τα α και $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to 0}f(x)=1$

Συναρτήσεις 17/36

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\mathbf{1} \lim_{x \to 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει $3x-2-x^2 \leq f(x) \leq x^2-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει $|f(x)-2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x o 0} f(x)$
- f 3 Αν ισχύει $f(\Bbb R)=(0,1)$, να βρείτε το $\lim_{x o 0}\left(x^2f(x)
 ight)$

Λόλας $(10^{o}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 19/36

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει $3x-2-x^2 \leq f(x) \leq x^2-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει $|f(x)-2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$
- $oxed{3}$ Αν ισχύει $f(\mathbb{R})=(0,1)$, να βρείτε το $\lim_{x o 0}\left(x^2f(x)
 ight)$

Λόλας $(10^{o}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 19/36

Έστω $f:\mathbb{R} o \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

- ② Αν ισχύει $|f(x)-2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$
- ${
 m 3}$ Αν ισχύει $f(\mathbb{R})=(0,1)$, να βρείτε το $\lim_{x o 0}\left(x^2f(x)
 ight)$

Λόλας $(10^{o}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 19/36

Nα βρείτε το
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$
, όταν ισχύει:

$$2x - 3x^2 \le f(x) \le x^4 + 2x$$

Na breite to
$$\lim_{x \to 0} x \sigma v \nu \frac{1}{x}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x - 1}{x} - \varepsilon \varphi x$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu^2 x}{x}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x - 1}{x} - \varepsilon \varphi x$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v v^2 x}{x}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma \upsilon\nu x-1}{x}-\varepsilon\varphi x$

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x 1}{x} \varepsilon \varphi x$

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim \frac{x}{}$ $x \to 0$ $\eta \mu x$

Να υπολογίσετε τα όρια

- lim $x\rightarrow 0 \eta \mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$ $x \rightarrow 0$ x

Να υπολογίσετε τα όρια

- lim $x\rightarrow 0 \eta \mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$ $x \to 0$ x
- $3 \lim \frac{\sigma v \nu x 1}{}$ $x\rightarrow 0$ $\eta \mu x$

Να υπολογίσετε τα όρια

- lim $x \to 0$ $\eta \mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$ $x \to 0$ x
- $\Im \lim \frac{\sigma v \nu x 1}{}$ $x \to 0$ $\eta \mu x$
- $4 \lim_{x \to 0} \left(\eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu(\pi x)}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x \eta \mu x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} 1}$

Λόλας $(10^{\circ}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 24/36

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x - \eta \mu x}$$

$$4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\begin{array}{ccc}
 & \lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}
 \end{array}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\eta \mu(\pi-x)}{x^2+x}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+3x}{2x-\eta\mu x}$
- $4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} 1}$

Λόλας $(10^{\circ}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 24/36

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x\to 0} \frac{\eta \mu(\pi-x)}{x^2+x}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+3x}{2x-\eta\mu x}$
- $4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} 1}$

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu 3x 1}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 25/36

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 25/36

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 25/36

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2}$$

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

An
$$\lim_{x\to 1}f(x)=0$$
 , na breite to $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2\eta\mu f(x)}{f(x)+1-\sigma v\nu f(x)}$

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}=2$. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \to 0} \frac{f(5x) 1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{f(3x) f(2x)}{x}$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 28/36

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}=2$. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \to 0} \frac{f(5x) 1}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{f(3x) f(2x)}{x}$

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-1}{h}=2.$ Να βρείτε τα όρια:

- $\text{ } \lim_{h \to 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) f(1-h)}{h}$

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-1}{h}=2.$ Να βρείτε τα όρια:

- $\text{ 1} \lim_{h \to 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$

Aν
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 2$$
, να βρείτε το $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2-x+1)-3}{x-1}$

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ όταν:

- $egin{aligned} & \lim_{x o x_0} \left(f(x) x^2 + 3x
 ight) = 3 \ \mathrm{Kal} \ x_0 = 2 \end{aligned}$
- $2\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) 1}{x 2} = 3$ каз $x_0 = 2$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x} = 2 \text{ kal } x_0 = 0$

Λόλας $(10^{o}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 31/36

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim_{x \to \infty} f(x)$ όταν:

- \bigcirc $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) x^2 + 3x \right) = 3$ каз $x_0 = 2$
- $2 \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3 \ \mathrm{kal} \ x_0 = 2$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 31/36

Έστω $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim_{}f(x)$ όταν:

- $\ \, \lim_{x\to x_0} \left(f(x)-x^2+3x\right)=3 \ \mathrm{kal} \ x_0=2$
- $2 \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) 1}{x 2} = 3 \text{ kal } x_0 = 2$
- $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x} = 2 \text{ kal } x_0 = 0$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 31/36

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$

- lacktriangle Να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$
- ② Να βρείτε το $\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x) + xf(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta\mu^2 x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 32/36

Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$

- $f \Delta$ Να βρείτε το $\lim_{x o 0} f(x)$
- Na breite to $\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)+xf(x)+x\eta\mu x}{f^2(x)+x^2+\eta\mu^2 x}$

Λόλας (10^{o} [ΕΛ) Συναρτήσεις 32/36

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

①
$$f(x) = \sqrt{|x| - |\eta \mu x|}$$

② $f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x - x^2}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 33/36

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

①
$$f(x)=\sqrt{|x|-|\eta\mu x|}$$

② $f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2x-x^2}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 33/36

Να λύσετε την εξίσωση $|\eta \mu x| = |\pi - x|$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 34/36

- f 1 Να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu(x^2+x)-x^2=x$
- ② Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3 \frac{\eta \mu x}{x}$. Να αποδείξετε ότι

$$2x-3 < f(x) < 2x+3$$
 για κάθε $x \neq 0$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 35/36

- f 1 Να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu(x^2+x)-x^2=x$
- ② Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+3rac{\eta\mu x}{x}$. Να αποδείξετε ότι

$$2x-3 < f(x) < 2x+3$$
 για κάθε $x \neq 0$

Λόλας $(10^{\circ}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 35/36

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \\
 \mathbf{2} & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}
 \end{array}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 36/36

Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 36/36