

Συναρτήσεις

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Κάτι πολύ θεωρητικό

Αλλά πρώτα ας παίξουμε με Geogebra

Σε ακόμα πιο θεωρητικό

Συμβολίζουμε με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

- ① $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$
- ② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$
- ③ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- ④ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$
- ⑤ $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- ⑥ Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$
- ⑦ Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει ξ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

- ① $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$
- ② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$
- ③ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- ④ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$
- ⑤ $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- ⑥ Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$
- ⑦ Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει ξ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

- ① $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$
- ② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$
- ③ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- ④ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$
- ⑤ $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- ⑥ Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$
- ⑦ Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει ξ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Αν $\int_1^3 f(x) dx = 1$, $\int_2^5 f(x) dx = 2$, $\int_2^3 f(x) dx = 3$ και $\int_1^3 g(x) dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_3^2 f(x) dx$

② $\int_1^5 f(x) dx$

③ $\int_1^3 2f(x) - 3g(x) dx$

1. Αν $\int_1^3 f(x) dx = 1$, $\int_2^5 f(x) dx = 2$, $\int_2^3 f(x) dx = 3$ και $\int_1^3 g(x) dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_3^2 f(x) dx$

② $\int_1^5 f(x) dx$

③ $\int_1^3 2f(x) - 3g(x) dx$

1. Αν $\int_1^3 f(x) dx = 1$, $\int_2^5 f(x) dx = 2$, $\int_2^3 f(x) dx = 3$ και $\int_1^3 g(x) dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_3^2 f(x) dx$

② $\int_1^5 f(x) dx$

③ $\int_1^3 2f(x) - 3g(x) dx$

2. Να εξετάσετε αν είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$

3. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x) dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής

4. Να υπολογίσετε το κ ώστε

$$\int_2^{\kappa} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx - 2 \int_{\kappa}^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 1$$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

② $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

③ $\int_0^1 x^2 \, dx$

④ $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

⑤ $\int_0^4 x\sqrt{x} \, dx$

⑥ $\int_1^2 1 \, dx$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

2 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

3 $\int_0^1 x^2 \, dx$

4 $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

5 $\int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

6 $\int_1^2 1 \, dx$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$$

$$② \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$$

$$③ \int_0^1 x^2 \, dx$$

$$④ \int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$$

$$⑤ \int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$$

$$⑥ \int_1^2 1 \, dx$$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$$

$$② \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$$

$$③ \int_0^1 x^2 \, dx$$

$$④ \int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$$

$$⑤ \int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$$

$$⑥ \int_1^2 1 \, dx$$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

2 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

3 $\int_0^1 x^2 \, dx$

4 $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

5 $\int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

6 $\int_1^2 1 \, dx$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 x^2 \, dx$$

$$\textcircled{4} \int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$$

$$\textcircled{5} \int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$$

$$\textcircled{6} \int_1^2 1 \, dx$$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x} \right) dx$

② $\int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

③ $\int_0^1 x(3x - 1) dx$

④ $\int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$

⑤ $\int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x} \right) dx$

② $\int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

③ $\int_0^1 x(3x - 1) dx$

④ $\int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$

⑤ $\int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$② \int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$③ \int_0^1 x(3x - 1) dx$$

$$④ \int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$$

$$⑤ \int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$② \int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$③ \int_0^1 x(3x - 1) dx$$

$$④ \int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$$

$$⑤ \int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$\textcircled{2} \int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 x(3x - 1) dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sin(2x) dx$

② $\int_0^1 e^{2x} dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 e^{-x} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 e^{2x-1} \, dx$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$\textcircled{7} \int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$$

$$\textcircled{8} \int_0^1 (x-2)^4 \, dx$$

$$\textcircled{9} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^{\pi} \sin(2x) dx$

2 $\int_0^1 e^{2x} dx$

3 $\int_0^1 e^{-x} dx$

4 $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

5 $\int_0^1 e^{2x-1} dx$

6 $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

7 $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} dx$

8 $\int_0^1 (x-2)^4 dx$

9 $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$$

$$② \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

$$③ \int_0^1 e^{-x} \, dx$$

$$④ \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$⑤ \int_0^1 e^{2x-1} \, dx$$

$$⑥ \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$⑦ \int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$$

$$⑧ \int_0^1 (x-2)^4 \, dx$$

$$⑨ \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^{\pi} \sin(2x) dx$$

$$② \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$③ \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$④ \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$⑤ \int_0^1 e^{2x-1} dx$$

$$⑥ \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$⑦ \int_0^1 \frac{1}{3x+2} dx$$

$$⑧ \int_0^1 (x-2)^4 dx$$

$$⑨ \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 e^{-x} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 e^{2x-1} \, dx$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$\textcircled{7} \int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$$

$$\textcircled{8} \int_0^1 (x-2)^4 \, dx$$

$$\textcircled{9} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 e^{-x} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 e^{2x-1} \, dx$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$\textcircled{7} \int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$$

$$\textcircled{8} \int_0^1 (x-2)^4 \, dx$$

$$\textcircled{9} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^{\pi} \sin(2x) dx$$

$$② \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$③ \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$④ \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$⑤ \int_0^1 e^{2x-1} dx$$

$$⑥ \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$⑦ \int_0^1 \frac{1}{3x+2} dx$$

$$⑧ \int_0^1 (x-2)^4 dx$$

$$⑨ \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^{\pi} \sin(2x) dx$$

$$② \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$③ \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$④ \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$⑤ \int_0^1 e^{2x-1} dx$$

$$⑥ \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$⑦ \int_0^1 \frac{1}{3x+2} dx$$

$$⑧ \int_0^1 (x-2)^4 dx$$

$$⑨ \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

2 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

3 $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$

5 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon\varphi x dx$

6 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

7 $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$

2 $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

3 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$③ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$③ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

10.

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

10.

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

10.

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

10.

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

11.

- ① Αν $f(0) = 1, f(1) = 3$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)f'(x) dx$
- ② Αν $f(1) = 2f(0)$ και ισχύουν $f^2(x) - f'(x) = f(x), x \in [0, 1], f(x) > 0, x \in [0, 1]$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$

11.

- ① Αν $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)f'(x) dx$
- ② Αν $f(1) = 2f(0)$ και ισχύουν $f^2(x) - f'(x) = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $f(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$

12. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ όταν ισχύει:

① $f(x) = x \int_0^1 e^{xt} dt, x \in \mathbb{R}$

② $f(x) = x \int_0^1 \frac{1}{|x-t|+1} dt, x \geq 1$

12. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ όταν ισχύει:

① $f(x) = x \int_0^1 e^{xt} dt, x \in \mathbb{R}$

② $f(x) = x \int_0^1 \frac{1}{|x-t|+1} dt, x \geq 1$

13. Να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(t) dt \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

14. Εστω μια συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει

$$f(x) = 2x + \int_0^2 f(x) dx, x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 4, x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Εστω f συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο μ και μέγιστο M στο $[a, b]$.

$$\mu \leq f(x) \leq M$$

$$\mu(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$\mu \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Αρα από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi)$.

Απόδειξη Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Εστω f συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο μ και μέγιστο M στο $[a, b]$.

$$\mu \leq f(x) \leq M$$

$$\mu(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$\mu \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Αρα από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi)$.

Απόδειξη Αρχική = Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$\text{Av } F(x) = \int_c^x f(t) dt \implies \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi)h}{h}, \xi \in [x, x+h] \\ &= f(\xi), \xi \in [x, x+h] \\ &= f(x), \text{ αφού } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Απόδειξη Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν G είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Αφού G αρχική της f ισχύει $G(x) = F(x) + c$

Εχουμε $G(a) = F(a) + c \implies G(a) = c \implies G(x) = F(x) + G(a)$

Αρα $G(b) = F(b) + G(a) \implies F(b) = G(b) - G(a)$