Κωνικές Τομές

Έλλειψη

Κωνσταντίνος Λόλας

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες
5. ίση απόσταση από σημείο και ευθεία

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες
5. ίση απόσταση από σημείο και ευθεία

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες
5. ίση απόσταση από σημείο και ευθεία

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες
5. ίση απόσταση από σημείο και ευθεία

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες
5. ίση απόσταση από σημείο και ευθεία

άρα ψάχοντνας για επόμενο...

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες
5. ίση απόσταση από σημείο και ευθεία

<u>σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σημεία?</u>

Φύγαμε για Geogebra

▸ Geogebra

Λίγο πιο απλά?

Φυσικά. Θα ασχοληθούμε μόνο με τις ελλείψεις που έχουν εστίες πάνω στους άξονες συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων

Ακόμα πιο απλά?

Και πάλι φυσικά.

- Εστίες $\mathrm{E}(\gamma, 0)$ και $\mathrm{E}'(-\gamma, 0)$ ή
- Εστίες $\mathrm{E}(0, \gamma)$ και $\mathrm{E}'(0, -\gamma)$

Πιο επίσημα?

Εξίσωση Έλλειψης 1

Η έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}'(-\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι η

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$$

ή πιο ωραία

Εξίσωση Έλλειψης

Η έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}'(-\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι η

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

Πάμε για απόδειξη?

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE}' = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A}'(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B}'(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα AA' μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα BB' μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE}' = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A}'(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B}'(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα AA' μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα BB' μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE}' = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A}'(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B}'(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα AA' μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα BB' μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE}' = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A}'(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B}'(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα AA' μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα BB' μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE}' = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A}'(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B}'(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα AA' μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα BB' μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE}' = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A}'(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B}'(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα AA' μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα BB' μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE}' = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A}'(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B}'(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα AA' μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα BB' μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Ορισμοί

- Εστιακή απόσταση: Το μήκος $\mathrm{EE'} = 2\gamma$
- Κορυφές έλλειψης: Τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{A'}(-\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta)$ και $\mathrm{B'}(0, -\beta)$
- Μεγάλος άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{AA'}$ μήκους 2α
- Μικρός άξονας: Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{BB'}$ μήκους 2β
- Κέντρο: Το σημείο $(0, 0)$
- Διάμετρος: Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο συμμετρικά ως προς το κέντρο της έλλειψης
- Εκκεντρότητα: Ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
- Όμοιες Ελλείψεις: Δύο ελλείψεις με ίσες εκκεντρότητες

Τα ίδια, αλλά ανάποδα!

Αλλάξτε τα x με τα y!

Εξίσωση Έλλειψης 2

Η έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(0, \gamma)$, $\mathrm{E}'(0, -\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι η

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

ή πιο ωραία

Εξίσωση Έλλειψης

Η έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(0, \gamma)$, $\mathrm{E}'(0, -\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι η

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

Πρώτες παρατηρήσεις

- Οι κορυφές βρίσκονται εύκολα για $x = 0$ ή $y = 0$
- Η έλλειψη κλείνεται στο ορθογώνιο που έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες που διέρχονται από τις κορυφές
- Ο μεγάλος άξονας είναι πάντα ο άξονας των εστιών
- Το κέντρο της έλλειψης είναι κέντρο συμμετρίας
- Οι άξονες είναι άξονες συμμετρίας
- Για την εκκεντρότητα ισχύει $0 < \varepsilon < 1$
- Αν $\gamma = 0$ τότε η έλλειψη μετετρέπεται σε κύκλο

Πρώτες παρατηρήσεις

- Οι κορυφές βρίσκονται εύκολα για $x = 0$ ή $y = 0$
- Η έλλειψη κλείνεται στο ορθογώνιο που έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες που διέρχονται από τις κορυφές
- Ο μεγάλος άξονας είναι πάντα ο άξονας των εστιών
- Το κέντρο της έλλειψης είναι κέντρο συμμετρίας
- Οι άξονες είναι άξονες συμμετρίας
- Για την εκκεντρότητα ισχύει $0 < \varepsilon < 1$
- Αν $\gamma = 0$ τότε η έλλειψη μετετρέπεται σε κύκλο

Πρώτες παρατηρήσεις

- Οι κορυφές βρίσκονται εύκολα για $x = 0$ ή $y = 0$
- Η έλλειψη κλείνεται στο ορθογώνιο που έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες που διέρχονται από τις κορυφές
- Ο μεγάλος άξονας είναι πάντα ο άξονας των εστιών
- Το κέντρο της έλλειψης είναι κέντρο συμμετρίας
- Οι άξονες είναι άξονες συμμετρίας
- Για την εκκεντρότητα ισχύει $0 < \varepsilon < 1$
- Αν $\gamma = 0$ τότε η έλλειψη μετατρέπεται σε κύκλο

Πρώτες παρατηρήσεις

- Οι κορυφές βρίσκονται εύκολα για $x = 0$ ή $y = 0$
- Η έλλειψη κλείνεται στο ορθογώνιο που έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες που διέρχονται από τις κορυφές
- Ο μεγάλος άξονας είναι πάντα ο άξονας των εστιών
- Το κέντρο της έλλειψης είναι κέντρο συμμετρίας
- Οι άξονες είναι άξονες συμμετρίας
- Για την εκκεντρότητα ισχύει $0 < \varepsilon < 1$
- Αν $\gamma = 0$ τότε η έλλειψη μετετρέπεται σε κύκλο

Πρώτες παρατηρήσεις

- Οι κορυφές βρίσκονται εύκολα για $x = 0$ ή $y = 0$
- Η έλλειψη κλείνεται στο ορθογώνιο που έχει πλευρές παράλληλες στους άξονες που διέρχονται από τις κορυφές
- Ο μεγάλος άξονας είναι πάντα ο άξονας των εστιών
- Το κέντρο της έλλειψης είναι κέντρο συμμετρίας
- Οι άξονες είναι άξονες συμμετρίας
- Για την εκκεντρότητα ισχύει $0 < \varepsilon < 1$
- Αν $\gamma = 0$ τότε η έλλειψη μετετρέπεται σε κύκλο

Πρώτες παρατηρήσεις

- Οι κορυφές βρίσκονται εύκολα για $x = 0$ ή $y = 0$ $\quad y \; y \; y \; y = 0$

Ιδιότητα Έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτόμενη σε ένα σημείο της έλλειψης M, διχοτομεί την γωνία $\widehat{EME'}$

Πάμε για απόδειξη?

Εξάσκηση 1

Έστω η έλλειψη με εστίες $\mathrm{E}'(-3,0)$, $\mathrm{E}(3,0)$ και το μήκος του κικρού άξονα είναι 8

1. Να βρείτε το μήκος του μεγάλου άξονα
2. Να βρείτε την εξίσωσή της
3. Να βρείτε την εκκεντρότητά της

Εξάσκηση 1

Έστω η έλλειψη με εστίες $\mathrm{E}'(-3,0)$, $\mathrm{E}(3,0)$ και το μήκος του κικρού άξονα είναι 8

1. Να βρείτε το μήκος του μεγάλου άξονα
2. Να βρείτε την εξίσωσή της
3. Να βρείτε την εκκεντρότητά της

Εξάσκηση 1

Έστω η έλλειψη με εστίες $E'(-3,0)$, $E(3,0)$ και το μήκος του κικρού άξονα είναι 8

1. Να βρείτε το μήκος του μεγάλου άξονα
2. Να βρείτε την εξίσωσή της
3. Να βρείτε την εκκεντρότητά της

Εξάσκηση 2

Έστω η έλλειψη που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εστίες στον άξονα $y'y$. Αν η έλλειψη διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(1, \dfrac{10\sqrt{2}}{3}\right)$ και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$, να βρείτε

1. την εξίσωσή της
2. τις εστίς και τα μήκη των αξόνων της

Εξάσκηση 2

Έστω η έλλειψη που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εστίες στον άξονα $y'y$. Αν η έλλειψη διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(1, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$ και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{4}{5}$, να βρείτε

1. την εξίσωσή της
2. τις εστίς και τα μήκη των αξόνων της

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : x^2 + 3y^2 = 4$, που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{P}(2, 1)$

Εξάσκηση 4

Δίνεται η έλλειψη $C : 2x^2 + y^2 = 6$ και το σημείο της $\mathrm{M}(\mu, 2)$, $\mu < 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί την γωνία $\widehat{\mathrm{E'ME}}$ όπου $\mathrm{E'}$ και E οι εστίες της C

Εξάσκηση 5

Έστω ότι η ευθεία $\varepsilon : y = -8x + 2$ εφάπτεται στην έλλειψη C στο σημείο της $\mathrm{M}(2, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων

Εξάσκηση 6

Δίνεται η έλλειψη $C: 3x^2 + 4y^2 = 16$. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: 3x + 2y - 8 = 0$ εφάπτεται στην έλλειψη C και να βρείτε το σημείο επαφής.

Εξάσκηση 7

Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. Από το σημείο $\mathrm{P}(2, -3)$ φέρουμε τις εφαπτόμενες PA, PB προς την C. Να βρείτε την απόσταση του σημείου P από την ευθεία AB

Εξάσκηση 8

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου $C_1 : x^2 + y^2 = 2$ και της έλλειψης $C_2 : x^2 + 3y^2 = 3$

Εξάσκηση 9

Έστω τα σημεία $\mathrm{E}'(-4,0)$ και $\mathrm{E}(4,0)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, για τα οποία ισχύει

$$|\mathrm{ME}| + |\mathrm{ME}'| = 10$$

και στη συνέχεια την εξίσωσή του

Εξάσκηση 10

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, για τα οποία ισχύει

$$3\overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 5$$

όπου M' το συμμετρικό σημείο του M ως προς τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 11

Αν M σημείο της έλλειψης $C : \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, με εστίες τα σημεία E' και E, να δείξετε ότι

$$|\overrightarrow{\mathrm{ME'}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{ME}}| + \overrightarrow{\mathrm{OM}}^2 = 9$$

όπου O η αρχή των αξόνων

Εξάσκηση 12

Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB της έλλειψης $C : 4x^2 + 9y^2 = 36$, που έχει μέσο το σημείο $\mathrm{M}(2, 1)$

Εξάσκηση 13

Δίνεται η έλλειψη $C_1 : x^2 + 4y^2 = 4$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση ενός σημείου της C_1 από ένα σημείο της C_2

Εξάσκηση 14

Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της έλλειψης $C : x^2 + 2y^2 = 6$ από την ευθεία $x + y - 8 = 0$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\gamma)^2 + (y-0)^2} = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2} = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2}$$

$$4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 4\alpha^2 + 4\gamma x$$

$$\cancel{4}\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \cancel{4}\alpha^2 + \cancel{4}\gamma x$$

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\gamma)^2 + (y-0)^2} = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2} = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2}$$

$$4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 4\alpha^2 + 4\gamma x \cancel{4}\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \cancel{4}\alpha^2 + \cancel{4}\gamma x$$

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\gamma)^2 + (y-0)^2} = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2} = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2}$$

$$4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 4\alpha^2 + 4\gamma x \qquad \cancel{4}\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \cancel{4}\alpha^2 + \cancel{4}\gamma x$$

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\gamma)^2 + (y-0)^2} = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + y^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + x^2 + 2\gamma x + \gamma^2 + y^2$$

$$4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 4\alpha^2 + 4\gamma x \quad \cancel{4}\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \cancel{4}\alpha^2 + \cancel{4}\gamma x$$

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\gamma)^2 + (y-0)^2} = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2} = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2}$$

$$4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 4\alpha^2 + 4\gamma x \quad \cancel{4}\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \cancel{4}\alpha^2 + \cancel{4}\gamma x$$

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+\gamma)^2 + (y-0)^2} = 2\alpha$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2\alpha - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2} = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2\gamma x + \cancel{\gamma^2} + \cancel{y^2}$$

$$4\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 4\alpha^2 + 4\gamma x \cancel{4}\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \cancel{4}\alpha^2 + \cancel{4}\gamma x$$

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 + \gamma x$$

$$\alpha^2\left((x+\gamma)^2 + y^2\right) = (\alpha^2 + \gamma x)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \gamma^2 x^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2\gamma^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 + \gamma x$$

$$\alpha^2\left((x+\gamma)^2 + y^2\right) = (\alpha^2 + \gamma x)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \gamma^2 x^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2\gamma^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma,0)$, $\mathrm{E}(-\gamma,0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x,y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} = \alpha^2+\gamma x$$

$$\alpha^2\left((x+\gamma)^2+y^2\right) = (\alpha^2+\gamma x)^2$$

$$\alpha^2x^2+2\alpha^2\gamma x+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2y^2 = \alpha^4+2\alpha^2\gamma x+\gamma^2x^2$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2 = \alpha^4-\alpha^2\gamma^2$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2 = \alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\gamma^2} = 1$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 + \gamma x$$

$$\alpha^2\left((x+\gamma)^2 + y^2\right) = (\alpha^2 + \gamma x)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \gamma^2 x^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2\gamma^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma,0)$, $\mathrm{E}(-\gamma,0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x,y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} = \alpha^2+\gamma x$$
$$\alpha^2\left((x+\gamma)^2+y^2\right) = (\alpha^2+\gamma x)^2$$
$$\alpha^2x^2+\cancel{2\alpha^2\gamma x}+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2y^2 = \alpha^4+\cancel{2\alpha^2\gamma x}+\gamma^2x^2$$
$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2 = \alpha^4-\alpha^2\gamma^2$$
$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2 = \alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)$$
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\gamma^2} = 1$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 + \gamma x$$

$$\alpha^2\left((x+\gamma)^2 + y^2\right) = (\alpha^2 + \gamma x)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \gamma^2 x^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2\gamma^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εξίσωσης έλλειψης

Οι εστίες είναι οι $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}(-\gamma, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι 2α. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα ισχύει:

$$|ME| + |\mathrm{ME}'| = 2\alpha$$

$$\alpha\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 + \gamma x$$

$$\alpha^2\left((x+\gamma)^2 + y^2\right) = (\alpha^2 + \gamma x)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 + \cancel{2\alpha^2\gamma x} + \gamma^2 x^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2\gamma^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτόμενης

Άντε ρε που θέλετε και την απόδειξη!

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη ανακλαστικής ιδιότητας

Είπαμε!

Πίσω στη θεωρία