

Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Κωνσταντίνος Λόλας

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ AYTA

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ AYTA

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ AYTA

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ ΑΥΤΑ

Γιατί?????

Γιατί ειδικά οι τριγωνομετρικές?

- ① δεν απομονώνεται το x
- ② έχουν σχεδόν πάντα άπειρες??? λύσεις
- ③ και άλλα πολλά που δεν θυμάμαι...

Γιατί?????

Γιατί ειδικά οι τριγωνομετρικές?

- ① δεν απομονώνεται το x
- ② έχουν σχεδόν πάντα άπειρες??? λύσεις
- ③ και άλλα πολλά που δεν θυμάμαι...

Γιατί?????

Γιατί ειδικά οι τριγωνομετρικές?

- ① δεν απομονώνεται το x
- ② έχουν σχεδόν πάντα άπειρες??? λύσεις
- ③ και άλλα πολλά που δεν θυμάμαι...

Λίιπιγο μαθηματικά

① Φτιάξτε άξονες

- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Εξίσωση 1

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta$$

Η εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu\theta$ έχει λύσεις

$$x = 2\kappa\pi + \theta$$

και

$$x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Λίιπιγο ακόμα μαθηματικά

① Φτιάξτε άξονες

- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο ακόμα μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο ακόμα μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Συμπέρασμα

Λίιπιγο ακόμα μαθηματικά

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Συμπέρασμα

Εξίσωση 2

$$\sigma v \nu x = \sigma v \nu \theta$$

Η εξίσωση $\sigma v \nu x = \sigma v \nu \theta$ έχει λύσεις

$$x = 2\kappa\pi + \theta$$

και

$$x = 2\kappa\pi - \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

① Φτιάξτε άξονες

- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Λίιιιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- ① Φτιάξτε άξονες
- ② Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- ③ Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ④ Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- ⑤ Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Εξίσωση 3

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

και όμοια γιατί το υποσχέθηκα

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Εξίσωση 3

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

και όμοια γιατί το υποσχέθηκα

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Εξίσωση 3

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

και όμοια γιατί το υποσχέθηκα

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu \text{ ή } \sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
- ② αν δεν είναι

→ ανάγουμε στο 1ο γενετικόριο ή
μετατρέπουμε τριγωνομετρία (στην ίδια) παραπάνω σε
παραπάνω σχήματα

παραπάνω σχήματα

παραπάνω σχήματα

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
- ② αν δεν είναι

- ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
- χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
- θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
- γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο Βήμα 1

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

③ ΜΟΝΟ τότε διώγνουμε τους "προστάτες"

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
 - ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε
- και πάμε ξανά στο βήμα 1
- ③ ΜΟΝΟ τότε διώχνουμε τους "προστάτες"

Άρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\nu\nu = \sigma\nu\nu\dots$
 - ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε
- και πάμε ξανά στο βήμα 1
- ③ ΜΟΝΟ τότε διώχνουμε τους "προστάτες"

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $2\sigma\nu\nu x - 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

④ $\sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $2\sigma\nu\nu x - 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

④ $\sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $2\sigma\nu\nu x - 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

④ $\sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $2\sigma\nu\nu x - 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

④ $\sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

② $\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x + 1 = 0$

④ $(\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1)(\varepsilon\varphi x + 1) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

② $\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x + 1 = 0$

④ $(\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1)(\varepsilon\varphi x + 1) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

② $\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x + 1 = 0$

④ $(\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1)(\varepsilon\varphi x + 1) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

② $\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x + 1 = 0$

④ $(\sqrt{2}\sigma\nu\nu x + 1)(\varepsilon\varphi x + 1) = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $(\eta\mu x - 1)(\sigma\nu\nu x + 1) = 0$

② $\eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x = \eta\mu x$

③ $1 + \eta\mu x - \sigma\nu\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $(\eta\mu x - 1)(\sigma\nu\nu x + 1) = 0$

② $\eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x = \eta\mu x$

③ $1 + \eta\mu x - \sigma\nu\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x = 0$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $(\eta\mu x - 1)(\sigma\nu\nu x + 1) = 0$

② $\eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x = \eta\mu x$

③ $1 + \eta\mu x - \sigma\nu\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x = 0$

- ① Να λύσετε την ανίσωση: $\eta \mu x < \sqrt{12}$, στο διάστημα $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$
- ② Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma v \nu x - 1$, $x \in [0, \pi]$

- ① Να λύσετε την ανίσωση: $\eta \mu x < \sqrt{12}$, στο διάστημα $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$
- ② Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma \nu \nu x - 1$, $x \in [0, \pi]$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\varepsilon\varphi 2x = 1$

② $\sigma v \nu(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

③ $\eta \mu 3x = \eta \mu 2x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\varepsilon\varphi 2x = 1$

② $\sigma v \nu(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

③ $\eta \mu 3x = \eta \mu 2x$

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\varepsilon\varphi 2x = 1$

② $\sigma v \nu(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

③ $\eta \mu 3x = \eta \mu 2x$

Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2x - 1 = 0$

Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2x + 3\sigma\nu\nu x = 0$

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x - \sigma\nu\nu x = 0$

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\nu\nu x = 0$

Να λύσετε την ανίσωση $\eta \mu x - \sigma v v x > 0$ sto di; asthma $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x + \sigma\nu\nu x$,
 $x \in (0, \pi)$

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x - \eta\mu x = 1 - \eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x$

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2\eta\mu}x + 1 = 0$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(\sigma\nu\nu(x)) = 0$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x$
- ③ Να δείξετε ότι $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x$
- ③ Να δείξετε ότι $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x$
- ③ Να δείξετε ότι $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 + 1} = \sigma v \nu x$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση