Ορισμοί Γ' Λυκείου

Κωνσταντίνος Λόλας

2025

Ορισμός 1: Πραγματική Συνάρτηση

Εστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

Απάντηση: Εστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. □

Ορισμός 2: Σύνολο Τιμών

Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Πώς ορίζουμε το σύνολο τιμών της f;

Απάντηση: Το σύνολο των τιμών της f ορίζεται ως το σύνολο

$$f(A) = \{f(x)|x \in A\}$$

□

Ορισμός 3: Γραφική Παράσταση

Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

Απάντηση: Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. □

Ορισμός 4: Ισότητα Συναρτήσεων

Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Απάντηση: Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

□

Ορισμός 5: Πράξεις Συναρτήσεων

Εστω f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στα A και B αντίστοιχα. Πώς ορίζονται οι πράξεις άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο των συναρτήσεων f και g;

Απάντηση: Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\dfrac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- $(fg)(x)=f(x)g(x)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$, fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f και g, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$ εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρανομαστή g. δηλαδή

$$\{x|x\in A\cap B, g(x)\neq 0\}$$

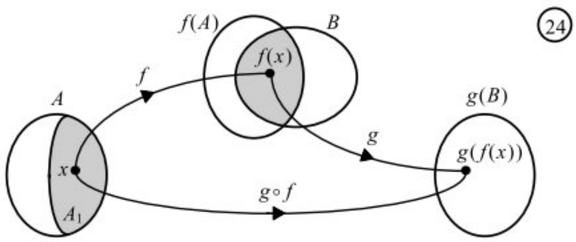
□

Ορισμός 6: Σύνθεση Συναρτήσεων

Εστω f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στα A και B αντίστοιχα. Πώς ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων f και g;

Απάντηση: Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$



Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=\{x\in A|f(x)\in \mathrm{B}\}$

□

Ορισμός 7: Γνησίως Αύξουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

Ορισμός 8: Γνησίως Φθίνουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. $\square$

Ορισμός 9: Αύξουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$. $\square$

Ορισμός 10: Φθίνουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$. $\square$

Ορισμός 11: Γνησίως Μονότονη Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε αυτό. $\square$

Ορισμός 12: Μέγιστο

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι έχει μέγιστο στο x_0;

Απάντηση: Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ μέγιστο το $f(x_0)$ αν ισχύει:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{για κάθε } x \in A$$

$\square$

Ορισμός 13: Ελάχιστο

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι έχει ελάχιστο στο x_0;

Απάντηση: Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ ελάχιστο το $f(x_0)$ αν ισχύει:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{για κάθε } x \in A$$

□

Ορισμός 14: Ακρότατα

Τι ονομάζουμε ακρότατα μιας συνάρτησης f;

Απάντηση: Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά ακρότατα της f. □

Ορισμός 15: 1-1

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται 1-1;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται 1-1 αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

Ορισμός 16: Αντίστροφη Συνάρτηση

Πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση μιας f;

Απάντηση: Εστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. □

Ορισμός 17: Κριτήριο Παρεμβολής

Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

Απάντηση: Εστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda$,

τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$$

□

Ορισμός 18: Ακολουθία

Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απάντηση: Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. □

Ορισμός 19: Συνέχεια σε σημείο

Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο x_0.

Απάντηση: Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Ορισμός 20: Συνεχής Συνάρτηση

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. □

Ορισμός 21: Συνέχεια σε ανοιχτό διάστημα

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);

Απάντηση: Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) □

Ορισμός 22: Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής στο ανοιχτό (α, β) και επιπλέον

- $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

□

Ορισμός 23: Θεώρημα Bolzano

Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Απάντηση: Εστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

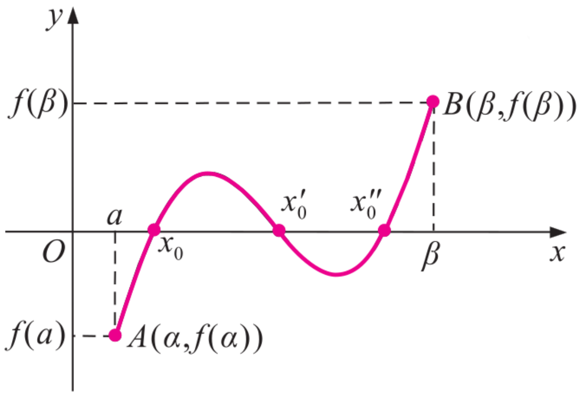
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β). □

Ορισμός 24: Γεωμετρική ερμηνεία θ. Bolzano

Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.

Απάντηση: Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



□

Ορισμός 25: Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Να διατυπώσετε το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Απάντηση: Εστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

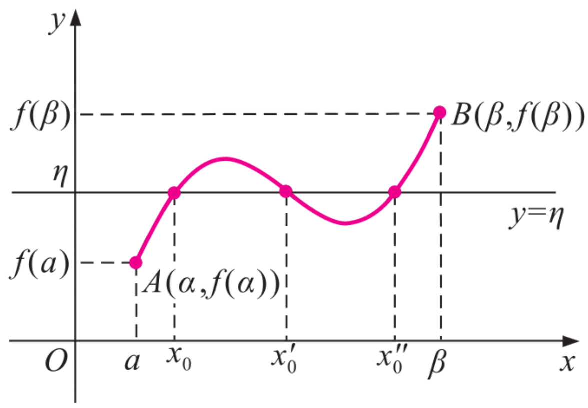
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$ □

Ορισμός 26: Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Ε.Τ.

Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεώρηματος Ενδιάμεσων Τιμών.

Απάντηση: Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχή καμπύλη. Αν η είναι ένας αριθμός μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = \eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.



□

Ορισμός 27: Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Απάντηση: Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. □

Ορισμός 28: Εφαπτομένη

Πώς ορίζεται η εφαπτομένη μιας συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση: Εστω f μια συνάρτηση και $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. □

Ορισμός 29: Παραγωγισιμότητα σε σημείο

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

□

Ορισμός 30: Παραγωγίσιμη συνάρτηση

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A \subseteq \mathbb{R}$;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $A \subseteq \mathbb{R}$, αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x \in A$. □

Ορισμός 31: Παραγωγισιμότητα σε ανοικτό διάστημα

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. □

Ορισμός 32: Παραγωγισιμότητα σε κλειστό διάστημα

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον

$$\lim_{x \to \alpha^+} f'(x) \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} f'(x) \in \mathbb{R}$$

□

Ορισμός 33: Παράγωγος συνάρτηση

Πώς ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση μιας f;

Απάντηση: Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f' : A_1 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f. □

Ορισμός 34: Ρυθμός μεταβολής

Πώς ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0;

Απάντηση: Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$. □

Ορισμός 35: Θεώρημα Rolle

Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Απάντηση: Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

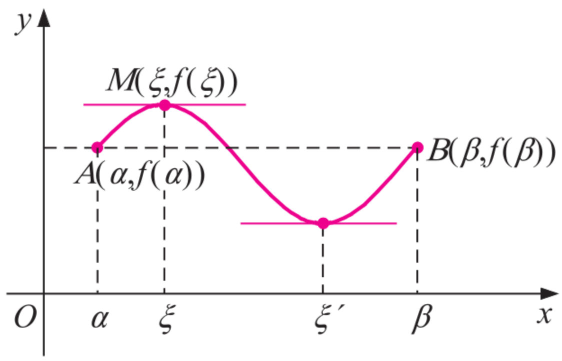
$$f'(\xi) = 0$$

□

Ορισμός 36: Γεωμετρική ερμηνεία Θ. Rolle

Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

Απάντηση: Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχή καμπύλη. Επίσης, επειδή $f(\alpha) = f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Δηλαδή, η $f'(\xi) = 0$.



□

Ορισμός 37: Θεώρημα Μέσης Τιμής

Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής.

Απάντηση: Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

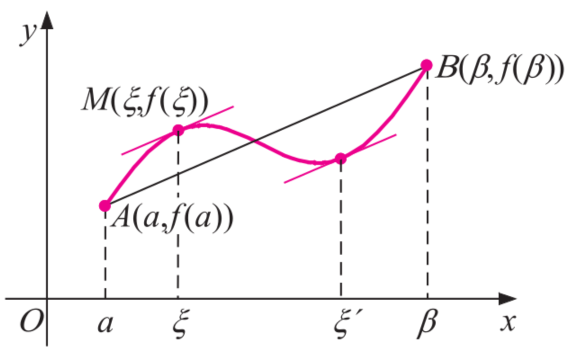
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

□

Ορισμός 38: Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Μ.Τ.

Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής.

Απάντηση: Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχή καμπύλη. Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της ευθείας που ενώνει τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.



□

Ορισμός 39: Τοπικό μέγιστο

Πώς ορίζεται το τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f στο x_0;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0)$$

για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ το τοπικό μέγιστο της f. □

Ορισμός 40: Τοπικό ελάχιστο

Πώς ορίζεται το τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f στο x_0;

Απάντηση: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0)$$

για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ το τοπικό ελάχιστο της f. □

Ορισμός 41: Θεώρημα Fermat

Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Απάντηση: Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

□

Ορισμός 42: Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων

Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο Δ;

Απάντηση: Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

□

Ορισμός 43: Κρίσιμα σημεία

Πώς ορίζονται τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f;

Απάντηση: Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. $\square$

Ορισμός 44: Κυρτή συνάρτηση

Πώς ορίζεται μια κυρτή συνάρτηση f στο Δ;

Απάντηση: Εστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ. $\square$

Ορισμός 45: Κοίλη συνάρτηση

Πώς ορίζεται μια κοίλη συνάρτηση f στο Δ;

Απάντηση: Εστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ. $\square$

Ορισμός 46: Σημείο καμπής

Πώς ορίζεται το σημείο καμπής μιας συνάρτησης f στο x_0;

Απάντηση: Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. $\square$

Ορισμός 47: Πιθανές θέσεις σημείων καμπής

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f;

Απάντηση: Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.

$\square$

Ορισμός 48: Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Πώς ορίζεται η κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f;

Απάντηση: Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. □

Ορισμός 49: Οριζόντια ασύμπτωτη

Πώς ορίζεται η οριζόντια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f;

Απάντηση: Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ (αντιστοίχως $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lambda$), τότε η ευθεία $y = \lambda$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$). □

Ορισμός 50: Ασύμπτωτη

Πώς ορίζεται η ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f;

Απάντηση: Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

(αντιστοίχως $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$). □

Ορισμός 51: Κανόνας de L' Hospital

Να διατυπώσετε το κανόνα de L' Hospital.

Απάντηση: Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(περασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Ορισμός 52: Αρχική συνάρτηση

Πώς ορίζεται η αρχική συνάρτηση μιας f;

Απάντηση: Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγωγος της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

□

Ορισμός 53: Ορισμένο ολοκλήρωμα

Πώς ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας f στο $[\alpha, \beta]$;

Απάντηση: Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha, \beta]$ ορίζεται ως το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

όπου $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ και $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, έτσι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

□

Ορισμός 54: Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Απάντηση: Εστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

□

Ευρετήριο