Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

Εκθετική Συνάρτηση

Κωνσταντίνος Λόλας

Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\cdot\lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\cdot\lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και κ, $\lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και κ, $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Αρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Αρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Αρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Αρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

Επιστροφή στο σήμερα

Ιδιότητες δυνάμεων με α, β θετικοί πραγματικοί και x, x_1, $x_2 \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{x_1+x_2} = \alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2}$
- $\alpha^{x_1-x_2} = \dfrac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}$
- $(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$
- $\alpha^{x} \cdot \beta^{x} = (\alpha \cdot \beta)^{x}$
- $\dfrac{\alpha^{x}}{\beta^{x}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{x}$

Με τι θα ασχοληθούμε

Συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και εξισώσεις με άγνωστους εκθέτες!!!!

Πάμε!

Ορισμός

Εκθετική συνάρτηση ονομάζεται κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$, $\alpha > 0$, $a \neq 1$

Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε a Geogebra

- Για ποιά a ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε a Geogebra

- Για ποιά a ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε a ▸ Geogebra

- Για ποιά a ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε a Geogebra

- Για ποιά a ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε a ▸ Geogebra

- Για ποιά a ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε a Geogebra

- Για ποιά a ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

Αρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς x. Ισως
    - Θέτουμε
    - Μετασχηματίζουμε
    - ...

Αρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς x. Ισως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

Αρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς x. Ισως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

Αρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς x. Ισως
    - Θέτουμε
    - Μετασχηματίζουμε
    - ...

Εξάσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

1. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$
2. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}}, x > 0$

Εξάσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

1. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$
2. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}}, x > 0$

Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = e^{x-1}$
3. $f(x) = e^{|x|}$

Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = e^{x-1}$
3. $f(x) = e^{|x|}$

Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = e^{x-1}$
3. $f(x) = e^{|x|}$

Εξάσκηση 3

Εστω η συνάρτηση $f(x) = (a-1)^x$. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f:

1. ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$
2. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
3. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Εξάσκηση 3

Εστω η συνάρτηση $f(x) = (a-1)^x$. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f:

1. ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$
2. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
3. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Εξάσκηση 3

Εστω η συνάρτηση $f(x) = (a-1)^x$. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f:

1. ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$
2. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
3. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Εξάσκηση 4

Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

Εξάσκηση 4

Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

Εξάσκηση 4

Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

Εξάσκηση 4

Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

Εξάσκηση 5

Να κάνετε το πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = e^x - 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$

Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης
4. Εστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}, x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης
4. Εστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης
4. Εστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης
4. Εστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \dfrac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-1} = \dfrac{8}{27}$

Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \frac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} = \frac{8}{27}$

Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \dfrac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-1} = \dfrac{8}{27}$

Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \frac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} = \frac{8}{27}$

Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^{x+1} + 4 \cdot 2^{x-1} = 4$
2. $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^{x+1} + 4 \cdot 2^{x-1} = 4$
2. $9^{x} + 3^{x+1} - 4 = 0$

Εξάσκηση 10

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - 2 \cdot e^{-x} + 1 = 0$
2. $3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0$

Εξάσκηση 10

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - 2 \cdot e^{-x} + 1 = 0$
2. $3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0$

Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3^x < 9$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{8}{27}$
3. $e^x - 1 < 0$

Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3^x < 9$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{8}{27}$
3. $e^x - 1 < 0$

Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3^x < 9$
2. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \dfrac{8}{27}$
3. $e^x - 1 < 0$

Εξάσκηση 12

Να λύσετε την ανίσωση $5^x + 5^{1-x} < 6$

Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 14

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = e - e^x$
2. $f(x) = \dfrac{e^x - e^2}{x - 1}$

Εξάσκηση 14

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = e - e^x$
2. $f(x) = \dfrac{e^x - e^2}{x - 1}$

Εξάσκηση 15

Να λύσετε τα συστήματα

1. $\begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-1} \cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3^{x} - 5^{y} = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^{y} = 6 \end{cases}$

Εξάσκηση 15

Να λύσετε τα συστήματα

1. $\begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-1} \cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3^{x} - 5^{y} = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^{y} = 6 \end{cases}$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^x + \sqrt{2^{x+4}} - 5 = 0$
2. $2 \cdot 5^{x-2} + 2^x - 12 \cdot 5^{x-3} - 3 \cdot 2^{x-3} = 0$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^x + \sqrt{2^{x+4}} - 5 = 0$
2. $2 \cdot 5^{x-2} + 2^x - 12 \cdot 5^{x-3} - 3 \cdot 2^{x-3} = 0$

Εξάσκηση 17

Να λύσετε την ανίσωση $8^x + 4^x - 2 < 0$

Εξάσκηση 18

1. Να αποδείξετε ότι $e^x > \eta\mu x$ για κάθε $x > 0$
2. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$

Εξάσκηση 18

1. Να αποδείξετε ότι $e^x > \eta\mu x$ για κάθε $x > 0$
2. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$

Εξάσκηση 19

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι t_0 χρόνια, να δείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_0}}$

Εξάσκηση 20

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι 20 γραμμάρια, τότε:

1. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
2. Να υπολογίσετε την ποσότητ που θα έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια
3. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{5}{256}$ γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού

Εξάσκηση 20

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι 20 γραμμάρια, τότε:

1. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
2. Να υπολογίσετε την ποσότητ που θα έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια
3. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{5}{256}$ γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού

Εξάσκηση 20

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι 20 γραμμάρια, τότε:

1. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
2. Να υπολογίσετε την ποσότητ που θα έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια
3. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει $\dfrac{5}{256}$ γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού