

Συναρτήσεις

Συνέχεια Συνάρτησης

Κωνσταντίνος Λόλας

Όταν εμείς το υπολογίζαμε...

Μέχρι στιγμής πλησιάζαμε. Ήρθε ο καιρός να φτάσουμε!

Συνέχεια 1

Συνέχεια σε σημείο

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Συνέχεια 2

Συνέχεια σε διάστημα

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ όταν:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Συνέχεια 3

Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση είναι συνεχής όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f \circ g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f \circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν "διακόπτεται" βγάζουμε ωραία θεωρήματα

Πιο άπειρο είναι μεγαλύτερο κάνει κουμάντο

- Υπάρχει μεγαλύτερο? το βγάζω κοινό παράγοντα
- Είναι ίσα? κάνω πράξεις και τα διώχνω

Εξάσκηση

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο x_0 :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

Εξάσκηση

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο x_0 :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

Εξάσκηση

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x + 1)$ ως προς τη συνέχεια και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Εξάσκηση

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x + 1), & x > 0 \end{cases}$$

- 1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
- 2 Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$.

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4\alpha e^x + \beta \sin x, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x + \alpha x - \beta, & x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η f είναι συνεχής.

Εξάσκηση

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

Εξάσκηση

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a-1)x^3 - 2x + 1)$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + \mu x^2 - 2}{(\mu-2)x^2 + 3x + 1}$, είναι πραγματικός αριθμός

Εξάσκηση

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + \mu x)$$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^n + x - 1}{x^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$.

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f \left(\frac{x-1}{x} \right) \right) = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$

Εξάσκηση

Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Εξάσκηση

Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

② Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

Εξάσκηση

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \sigma\upsilon\nu x$$

Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$① \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$② \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

- 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} = 1$
- 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} = 0$
- 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x - 1} = 1$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - a^x}{2^x + 3a^x}, a > 0$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2}-1}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta\mu x}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma\nu\nu x)$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma \nu \nu x)$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{\ln x}$$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$

- 1 Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$

- 1 Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x, x > 0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση