Συναρτήσεις

Παράγωγος

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Μαγεία

Ξέρετε τι είναι η κλίση...

- ευθείας
- καμπύλης?

Μαγεία

Ξέρετε τι είναι η κλίση...

- ευθείας
- καμπύλης?

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $\left(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}\right)$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Κλίση σε σημείο = Παράγωγος

Ας παίξουμε Geogebra

Ορισμός

Παράγωγος

Εστω μια συνάρτηση f. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ και γράφουμε $f'(x_0)$ αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Με αντικατάσταση $x = x_0 + h$

Αλλος τύπος

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ορισμός

Παράγωγος

Εστω μια συνάρτηση f. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ και γράφουμε $f'(x_0)$ αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Με αντικατάσταση $x = x_0 + h$

Αλλος τύπος

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Εχω $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Θέτω $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f(x) = g(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} g(x)(x - x_0) + f(x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + f(x_0) \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Εχω $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f(x) = g(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} g(x)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + f(x_0) \\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Αρα Συνέχεια $\nrightarrow$ Παράγωγος

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Αρα Συνέχεια $\not\rightarrow$ Παράγωγος

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
Αρα Συνέχεια $\nrightarrow$ Παράγωγος

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\dfrac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\frac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\dfrac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 εφόσον υπάρχει

1. $f(x) = 1 + \eta\mu x$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 1$

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 εφόσον υπάρχει

1. $f(x) = 1 + \eta\mu x$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 1$

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x + 1 - x\eta\mu|x|$, στο σημείο $x_0 = 0$.

3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, όταν

1. $\begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, όταν

1. $\begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4. Αν $x+1 \leq f(x) \leq x^2+x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την

$$\frac{df(0)}{dx}$$

5. Αν για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(3+h) = 2 + h^2 + \eta\mu h, \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$ και να βρείτε την $f'(3)$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\eta\mu^2 x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

7. Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεις στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

1. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, αν $x_0 = 0$
2. $f(x) = |x-1| + 3x - 2$, αν $x_0 = 1$

7. Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεις στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

1. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, αν $x_0 = 0$
2. $f(x) = |x-1| + 3x - 2$, αν $x_0 = 1$

8. Να βρείτε τις τιμές των α και β, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + 1, & x \leq 1 \\ \beta x + 3, & x > 1 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

9. Εστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{xf(x) - 2}{x - 1}$

9. Εστω η συνάρτηση f με $f(1)=2$ και $f'(1)=-1$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x^2-x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-2f(x)}{x^2-1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-2}{x-1}$

9. Εστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{xf(x) - 2}{x - 1}$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(3) = 0$ και $f'(3) = 5$. Να βρείτε το $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(2x-1)}{x-2}$

11. Εστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} xf\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = f'(1)$, αν $f(1) = 0$

11. Εστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} xf\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = f'(1)$, αν $f(1) = 0$

11. Εστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} xf\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = f'(1)$, αν $f(1) = 0$

12. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 4$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+2h)-2}{h} = 8$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x f\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - 2x \right] = 4$

12. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 4$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+2h)-2}{h} = 8$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[xf\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - 2x \right] = 4$

12. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 4$
2. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-2}{h} = 8$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left[xf\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2x\right] = 4$

13. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
2. $f'(1) = 3$
3. $\lim_{x \to 1} \frac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

13. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
2. $f'(1) = 3$
3. $\lim_{x \to 1} \frac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

13. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
2. $f'(1) = 3$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

14. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ και ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$