

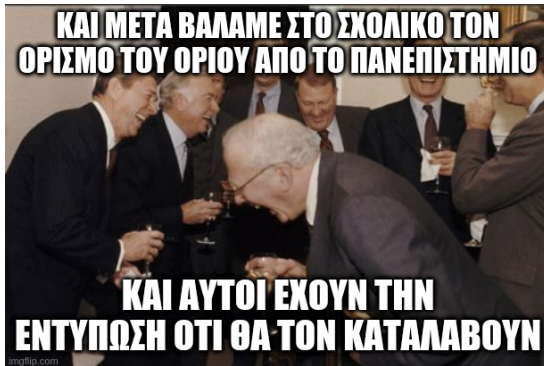
# Συναρτήσεις

## Οριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

## Οριο



# Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της  $f$  όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$
- Το όριο της  $f$  στο  $x_0$
- Όταν το  $x$  πάει στο  $x_0$ , πού πάει η  $f$ ...

# Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της  $f$  στο  $x_0$
- Όταν το  $x$  πάει στο  $x_0$ , πού πάει η  $f...$

# Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της  $f$  όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$
- Το όριο της  $f$  στο  $x_0$
- Όταν το  $x$  πάει στο  $x_0$ , πού πάει η  $f$ ...

# Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της  $f$  όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$
- Το όριο της  $f$  στο  $x_0$
- Όταν το  $x$  πάει στο  $x_0$ , πού πάει η  $f$ ...

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο  $x_0$ 
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο  $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η  $f$  πλησιάζει στο  $l$
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο  $x_0$ 
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο  $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η  $f$  πλησιάζει στο  $l$
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά



# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο  $x_0$ 
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο  $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η  $f$  πλησιάζει στο  $l$
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο  $x_0$ 
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο  $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η  $f$  πλησιάζει στο  $l$
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο  $x_0$ 
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο  $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η  $f$  πλησιάζει στο  $l$
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

## Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$  για κατάλληλο  $\alpha$

## Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής  $(x_0, \alpha)$  για κατάλληλο  $\alpha$

## Αρα

Υπαρξη ορίου

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \end{cases}$$

# Περίπτωση

Αν  $f(x) = \sqrt{x}$ ?, ή  $f(x) = \ln(-x)$ ?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ομοια για  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

# Περίπτωση

Αν  $f(x) = \sqrt{x}$ ?, ή  $f(x) = \ln(-x)$ ?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ομοια για  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$



# Περίπτωση

Αν  $f(x) = \sqrt{x}$ ?, ή  $f(x) = \ln(-x)$ ?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0)$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ομοια για  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

# Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - k) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(h + x_0) = k$

# Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - k) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(h + x_0) = k$

# Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - k) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(h + x_0) = k$

# Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράψουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

# Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράψουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

## Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράψουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

## Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράψουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά



## Αρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράψουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

# Επίδειξη

Στο διάλλειμα όποιος θέλει μπορεί να μάθει τον υπέρτατο ορισμό του ορίου. Ιδού:

Ορισμός ορίου

Εστω μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ .  
 Λέμε ότι η συνάρτηση τείνει στο  $\lambda \in \mathbb{R}$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$  όταν:

Για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε, για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  με  $0 < |x - x_0| < \delta$  να ισχύει  $|f(x) - \lambda| < \epsilon$



Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις

# Εξάσκηση 1

Μόνο από το βιβλίο, μόνο γραφικά!