

# Συναρτήσεις

## Εμβαδό Επίπεδου Χωρίου

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

# Ασκήσεις

**1.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα  $x'x$ , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = 3x^2$  και τις ευθείες  $x = 1, x = 2$ .

- $f(x) = \eta\mu x$  και τις ευθείες  $x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{4}$ .

**1.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα  $x'x$ , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = 3x^2$  και τις ευθείες  $x = 1, x = 2$ .
- $f(x) = \eta\mu x$  και τις ευθείες  $x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{4}$ .

**2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες:

●  $x = 1, x = 2$

●  $x = 2, x = 3$

●  $x = 1, x = 3$

**2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες:

●  $x = 1, x = 2$

●  $x = 2, x = 3$

●  $x = 1, x = 3$

**2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες:

- $x = 1, x = 2$
- $x = 2, x = 3$
- $x = 1, x = 3$



**3.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$

- και τον άξονα  $x'x$ .
- τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0, x = 3$ .

**3.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$

- και τον άξονα  $x'x$ .
- τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0, x = 3$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1$ . Να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$ .

**5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $E$  που περικλείεται από τον άξονα  $x'x$ , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$  και τις ευθείες  $x = 1, x = 2$ .
- $f(x) = \eta\mu x - 2x$  και την ευθεία  $x = \pi$ .

**5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $E$  που περικλείεται από τον άξονα  $x'x$ , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$  και τις ευθείες  $x = 1, x = 2$ .
- $f(x) = \eta\mu x - 2x$  και την ευθεία  $x = \pi$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0 \end{cases}$

- Να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 1$ .
- Να βρείτε την ευθεία  $x = a$  που χωρίζει το χωρίο  $\Omega$  σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0 \end{cases}$

- Να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 1$ .
- Να βρείτε την ευθεία  $x = a$  που χωρίζει το χωρίο  $\Omega$  σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

**7.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = e^x$  και τις ευθείες  $x = 1, x = e$ .



**8.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x + 2$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $E$  του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .
- Τις  $C_f$ ,  $C_g$ ,  $y = 6$ , και τις ευθείες:

- $x = 2, x = 3$

- $x = -1, x = 3$

**8.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x + 2$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $E$  του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .
- Τις  $C_f$ ,  $C_g$ ,  $y = 6$ , και τις ευθείες:
  - $x = 2, x = 3$
  - $x = -1, x = 3$

**8.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x + 2$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $E$  του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .
- Τις  $C_f, C_g, y = 6$ , και τις ευθείες:
  - $x = 2, x = 3$
  - $x = -1, x = 3$

**8.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x + 2$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $E$  του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .
- Τις  $C_f, C_g, y = 6$ , και τις ευθείες:
  - $x = 2, x = 3$
  - $x = -1, x = 3$

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4 - x^2$ . Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε το χωρίο που περικλείεται από τη  $C_f$  και την ευθεία  $y = 2$ , να χωρίζεται από την ευθεία  $y = 4 - a^2$ ,  $0 < a < \sqrt{2}$  σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

**10.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $E$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$ , την εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C_f$  στο  $x_0 = 0$  και την ευθεία  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**11.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ . Να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται την πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και την ευθεία  $x = 2$ .

**12.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x$ . Να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C_f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία  $x = -1$ .



**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 2x$ .

- ① Να βρείτε τις εφαπτόμενες της  $C_f$  που διέρχονται από το σημείο  $A(1, 2)$ .
- ② Αν  $O, B$  είναι τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι η  $C_f$  χωρίζει το τρίγωνο  $AOB$  σε δύο χωρία, ώστε που λόγος των εμβαδών τους να είναι  $2 : 1$ .

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 2x$ .

- ① Να βρείτε τις εφαπτόμενες της  $C_f$  που διέρχονται από το σημείο  $A(1, 2)$ .
- ② Αν  $O, B$  είναι τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι η  $C_f$  χωρίζει το τρίγωνο  $AOB$  σε δύο χωρία, ώστε που λόγος των εμβαδών τους να είναι  $2 : 1$ .

**14.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πρόσημο της  $f^{-1}$ .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0, x = e$ .

**14.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πρόσημο της  $f^{-1}$ .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0, x = e$ .

**15.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x^2 + x$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .

**15.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x^2 + x$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .

**16.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$ .

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon : y = x + 2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν  $E(a)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη  $C_f$ , την  $\varepsilon$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = a$ ,  $a < 0$ .
- ③ Να βρείτε το όριο  $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$ .
- ④ Αν το  $a$  ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E(a)$  τη χρονική στιγμή που είναι  $a = -\ln 2$ .

**16.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$ .

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon : y = x + 2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν  $E(a)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη  $C_f$ , την  $\varepsilon$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = a$ ,  $a < 0$ .
- ③ Να βρείτε το όριο  $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$ .
- ④ Αν το  $a$  ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E(a)$  τη χρονική στιγμή που είναι  $a = -\ln 2$ .



**16.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$ .

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon : y = x + 2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν  $E(a)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη  $C_f$ , την  $\varepsilon$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = a$ ,  $a < 0$ .
- ③ Να βρείτε το όριο  $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$ .
- ④ Αν το  $a$  ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E(a)$  τη χρονική στιγμή που είναι  $a = -\ln 2$ .

**16.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$ .

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon : y = x + 2$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν  $E(a)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη  $C_f$ , την  $\varepsilon$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = a$ ,  $a < 0$ .
- ③ Να βρείτε το όριο  $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$ .
- ④ Αν το  $a$  ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E(a)$  τη χρονική στιγμή που είναι  $a = -\ln 2$ .

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη.
- ② Να βρείτε το σημείο καμπής της  $C_f$ .
- ③ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα συμμετρίας των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ , και την ευθεία  $x = 1$ .

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη.
- ② Να βρείτε το σημείο καμπής της  $C_f$ .
- ③ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα συμμετρίας των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ , και την ευθεία  $x = 1$ .

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη.
- ② Να βρείτε το σημείο καμπής της  $C_f$ .
- ③ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα συμμετρίας των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ , και την ευθεία  $x = 1$ .

**18.** Εστω  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της  $f'$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν  $f(-1) = 0$  και  $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$ .

- ❶ Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$ ,  $f(1)$  και  $f(2)$ .
- ❷ Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ❸ Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .
- ❹ Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$ .

**18.** Εστω  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της  $f'$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν  $f(-1) = 0$  και  $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$ .

- ① Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$ ,  $f(1)$  και  $f(2)$ .
- ② Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ③ Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .
- ④ Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$ .

**18.** Εστω  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της  $f'$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν  $f(-1) = 0$  και  $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$ .

- ① Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$ ,  $f(1)$  και  $f(2)$ .
- ② Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ③ Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .
- ④ Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$ .



**18.** Εστω  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της  $f'$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν  $f(-1) = 0$  και  $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$ .

- ① Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$ ,  $f(1)$  και  $f(2)$ .
- ② Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ③ Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .
- ④ Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$ .