

Συναρτήσεις

Ακρότατα, Αρτιες - Περιττές

Κωνσταντίνος. Λόλας

Ακρότατα Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

Ακρότατα Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

Ο τσομπάνης και τα πρόβατα

Στάνη, πλαγιά, φράχτης, πρόβατα, τσομπάνης...

Προσοχή

- Ποιό είναι το πρόβατο στο ψηλότερο σημείο?
- Ποιό είναι το ψηλότερο σημείο της στάνης?
- Ποιό σημείο του φράχτη...

Φράγμα(άνω/κάτω), \sup/\inf , \max/\min

Ο τσομπάνης και τα πρόβατα

Στάνη, πλαγιά, φράχτης, πρόβατα, τσομπάνης...

Προσοχή

- Ποιό είναι το πρόβατο στο ψηλότερο σημείο?
- Ποιό είναι το ψηλότερο σημείο της στάνης?
- Ποιό σημείο του φράχτη...

Φράγμα(άνω/κάτω), \sup/\inf , \max/\min

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

Συμμετρίες...

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι άρτια σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι περιττή σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Συμμετρίες...

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι άρτια σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι περιττή σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση
- Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άρτια ούτε περιττή

Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση
- Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άρτια ούτε περιττή

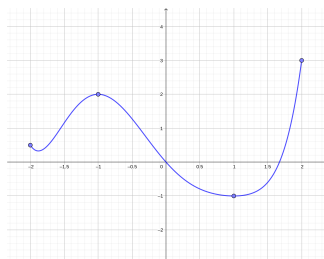
Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση
- Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άρτια ούτε περιττή

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

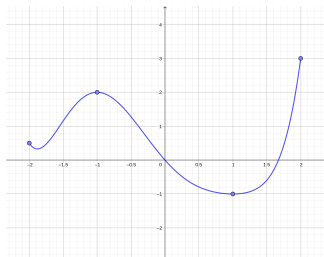
Εξάσκηση 1



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

- ① Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
- ② Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
- ③ Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
- ④ Να λύσετε
 - ① Την εξίσωση $f(x) = 1$
 - ② Την ανίσωση $f(x) > -1$

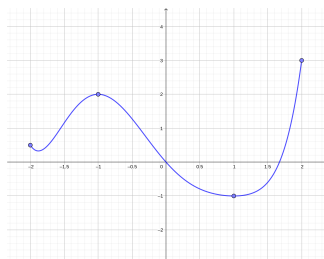
Εξάσκηση 1



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

- ① Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
- ② Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
- ③ Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
- ④ Να λύσετε
 - ① Την εξίσωση $f(x) = 1$
 - ② Την ανίσωση $f(x) > -1$

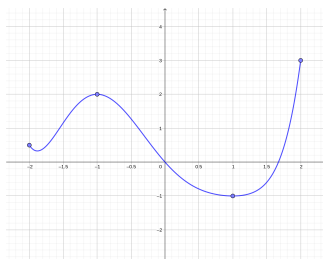
Εξάσκηση 1



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

- ① Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
- ② Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
- ③ Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
- ④ Να λύσετε
 - ① Την εξίσωση $f(x) = 1$
 - ② Την ανίσωση $f(x) > -1$

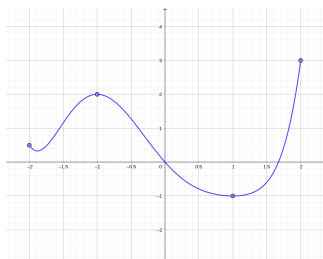
Εξάσκηση 1



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

- ① Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
- ② Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
- ③ Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
- ④ Να λύσετε
 - ① Την εξίσωση $f(x) = 1$
 - ② Την ανίσωση $f(x) > -1$

Εξάσκηση 1



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

- ① Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της f
- ② Να δείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [-2, 2]$
- ③ Να δείξετε ότι $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$, $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
- ④ Να λύσετε
 - ① Την εξίσωση $f(x) = 1$
 - ② Την ανίσωση $f(x) > -1$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

① $|e^x - 1|$

② $f(x) = (e^x - 1)^2(x - 1)^4$

③ $f(x) = x^2 - 2x - 5$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

① $|e^x - 1|$

② $f(x) = (e^x - 1)^2(x - 1)^4$

③ $f(x) = x^2 - 2x - 5$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

① $|e^x - 1|$

② $f(x) = (e^x - 1)^2(x - 1)^4$

③ $f(x) = x^2 - 2x - 5$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Από σημείο M της C_f φέρνουμε παράλληλες ως προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$ που τέμνουν τον $x'x$ στο A και τον $y'y$ στο B . Να βρείτε τη θέση του σημείου M για το οποίο η περίμετρος του ορθογωνίου $OAMB$ γίνεται ελάχιστη (όπου O η αρχή των αξόνων).

Εξάσκηση 4

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των σημείων A και B .

Εξάσκηση 5

Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

- ① Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x - 1)^2 = 2$
- ③ Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 4$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Εξάσκηση 5

Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

- ① Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x - 1)^2 = 2$
- ③ Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 4$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Εξάσκηση 5

Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

- ① Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x - 1)^2 = 2$
- ③ Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 4$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

① $x < \frac{2}{x^4+1}$

② $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

③ $\ln^5 x + \ln x < 2$

④ $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- 1 Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης f και τη θέση που το παρουσιάζει
- 2 Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 + 1} = \sin x$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- ① Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης f και τη θέση που το παρουσιάζει
- ② Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 + 1} = \sin x$

Εξάσκηση 9

Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

① $f(x) = x \eta \mu \frac{1}{x}$

② $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1)$

Εξάσκηση 9

Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = x \eta \mu \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1)$$

Εξάσκηση 10

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

Εξάσκηση 10

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 2$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και περιττή. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x-1) + f(x-3) < 5(2-x)$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία περιττή συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- 1 το $f(0)$
- 2 τον τύπο της συνάρτησης f

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία περιττή συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- ① το $f(0)$
- ② τον τύπο της συνάρτησης f

Εξάσκηση 13

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση