

# Συναρτήσεις

## Εφαπτομένη

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

# Τι μάθαμε?

Ξέρουμε την κλίση ΚΑΘΕ συνάρτησης σε ΚΑΘΕ σημείο. Σημείο - Κλίση...

Εφαπτομένη

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $x_0$  είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

# Τι μάθαμε?

Ξέρουμε την κλίση ΚΑΘΕ συνάρτησης σε ΚΑΘΕ σημείο. Σημείο - Κλίση...

Εφαπτομένη

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $x_0$  είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

# Μελέτη τύπου

① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK

② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$

ⓐ είτε θα δίνεται

ⓑ είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί

ⓐ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί

ⓑ είτε η συνάρτηση είναι κομμάτι της σε καμία

ⓐ είτε η συνάρτηση είναι κομμάτι της σε καμία

ⓑ είτε δίνεται κάποια τιμή

ⓐ είτε δίνεται κάποια τιμή

ⓑ είτε κομμάτι συνάρτησης σε κάποιο σημείο

ⓐ είτε κομμάτι συνάρτησης...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...



# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

# Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το  $x_0$ 
  - ① είτε θα δίνεται
  - ② είτε δίνεται το  $f(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ③ είτε δίνεται το  $f'(x_0)$  και θα βρεθεί
  - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
  - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
  - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
  - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
  - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
  - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις



**1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - x + 2$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$ .

**2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x$ . Να βρείτε την εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C_f$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 2x$ .

- ① Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που διέρχονται από το σημείο  $M(1, 2)$
- ② Να σχεδιάσετε τη  $C_f$  και να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του τριγώνου που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του ερωτήματος 1, με τον άξονα  $x'x$

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + 2x$ .

- ① Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που διέρχονται από το σημείο  $M(1, 2)$
- ② Να σχεδιάσετε τη  $C_f$  και να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του τριγώνου που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του ερωτήματος 1, με τον άξονα  $x'x$

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ . Να βρείτε τις τετμημένες  $x$  των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

① Έχουν κλίση 2

② Σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega$  ώστε:

①  $\omega = \frac{3\pi}{4}$

②  $\varepsilon\varphi\omega > 1$

③  $\omega$  ακέραια

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ . Να βρείτε τις τετμημένες  $x$  των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

- ① Έχουν κλίση 2
- ② Σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega$  ώστε:

- ①  $\omega = \frac{3\pi}{4}$
- ②  $\varepsilon\varphi\omega > 1$
- ③  $\omega$ : αμβλεία

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ . Να βρείτε τις τετμημένες  $x$  των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

- ① Έχουν κλίση 2
- ② Σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega$  ώστε:
  - ①  $\omega = \frac{3\pi}{4}$
  - ②  $\varepsilon\varphi\omega > 1$
  - ③  $\omega$ : αμβλεία

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ . Να βρείτε τις τετμημένες  $x$  των σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

- ① Έχουν κλίση 2
- ② Σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega$  ώστε:
  - ①  $\omega = \frac{3\pi}{4}$
  - ②  $\varepsilon\varphi\omega > 1$
  - ③  $\omega$ : αμβλεία



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$ . Να βρείτε τα σημεία της  $C_f$ , που οι εφαπτόμενες σ' αυτά είναι:

① Κάθετες στην ευθεία  $\varepsilon : x + 2y - 1 = 0$

② Παράλληλες στον άξονα  $x'x$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$ . Να βρείτε τα σημεία της  $C_f$ , που οι εφαπτόμενες σ' αυτά είναι:

- ① Κάθετες στην ευθεία  $\varepsilon : x + 2y - 1 = 0$
- ② Παράλληλες στον άξονα  $x'x$

**6.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta \ln x - \ln \beta$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, 1)$  έχει κλίση 4.

**7.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + x - 1$ . Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon : y = 3x - 2$  εφάπτεται της  $C_f$  και να βρείτε το σημείο επαφής.

**8.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \lambda x + 2$  και η ευθεία  $\varepsilon : y = -x + \lambda$ .  
Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται της  $C_f$

**9.** Εστω οι συναρτήσεις  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$  και  $g(x) = x^2 - \alpha x - \beta$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες οι  $C_f$  και  $C_g$  να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο τους με τετμημένη  $x_0 = -2$

**10.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 3x + 3$  και  $g(x) = -\frac{1}{x}$ . Να αποδείξετε ότι οι  $C_f$  και  $C_g$  έχουν κοινές εφαπτόμενες στα κοινά τους σημεία

**11.** Εστω οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 1$  και  $g(x) = 2x^2 + 2x$ . Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των  $C_f$  και  $C_g$



**12.** Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (0, 1)$ , ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = -2x^2 + \ln x$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0$ , να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - 1$ .

- ① Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f'$
- ② Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας  $\omega$  που σχηματίζει η εφαπτόμενη της  $C_f$  στο σημείο  $M(x, f(x))$  με τον άξονα  $x'x$

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - 1$ .

- ① Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f'$
- ② Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας  $\omega$  που σχηματίζει η εφαπτόμενη της  $C_f$  στο σημείο  $M(x, f(x))$  με τον άξονα  $x'x$

**14.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x + 1$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το  $D_{f^{-1}}$
- ② Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτόμενη της  $C_{f^{-1}}$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 3$

**14.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x + 1$ .

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το  $D_{f^{-1}}$
- ② Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτόμενη της  $C_{f^{-1}}$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 3$