Συναρτήσεις

Μονοτονία

Κωνσταντίνος Λόλας

Κάτι που αφήσαμε πιο πριν...

Δεν μπορούσαμε να υπολογίσουμε όλων των συναρτήσεων την μονοτονία π.χ.

1. $e^x - x$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $\ln x - x^2$

Spoiler

Γιατί υπολογίζαμε κλίση (εκτός διαφορικών εξισώσεων??) θετική κλίση? Αρνητική?

Spoiler

Γιατί υπολογίζαμε κλίση (εκτός διαφορικών εξισώσεων??) θετική κλίση? Αρνητική?

Μονοτονία

Μονοτονία

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

Όμοια για $f'(x) < 0$

Μονοτονία

Μονοτονία

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

Όμοια για $f'(x) < 0$

Από εδώ και εμπρός...

1. Ξαναλύνουμε όλες τις ασκήσεις με μονοτονία, τώρα όμως ΟΛΕΣ
2. Όσοι δεν τα μάθανε καλά, είναι ευκαιρία τώρα να επιστρέψουν
3. Όσοι τα είχατε καταλάβει ευκαιρία για επανάληψη
4. Θα ασχολούμαστε με πρόσημα!!!!

Από εδώ και εμπρός...

1. Ξαναλύνουμε όλες τις ασκήσεις με μονοτονία, τώρα όμως ΟΛΕΣ
2. Όσοι δεν τα μάθανε καλά, είναι ευκαιρία τώρα να επιστρέψουν
3. Όσοι τα είχατε καταλάβει ευκαιρία για επανάληψη
4. Θα ασχολούμαστε με πρόσημα!!!!

Από εδώ και εμπρός...

1. Ξαναλύνουμε όλες τις ασκήσεις με μονοτονία, τώρα όμως ΟΛΕΣ
2. Όσοι δεν τα μάθανε καλά, είναι ευκαιρία τώρα να επιστρέψουν
3. Όσοι τα είχατε καταλάβει ευκαιρία για επανάληψη
4. Θα ασχολούμαστε με πρόσημα!!!!

Από εδώ και εμπρός...

1. Ξαναλύνουμε όλες τις ασκήσεις με μονοτονία, τώρα όμως ΟΛΕΣ
2. Όσοι δεν τα μάθανε καλά, είναι ευκαιρία τώρα να επιστρέψουν
3. Όσοι τα είχατε καταλάβει ευκαιρία για επανάληψη
4. Θα ασχολούμαστε με πρόσημα!!!!

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$ ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$ ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$ ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη

Και λίγο κατανόηση δεν βλάπτει

1. Αν $f' > 0$ τότε $f \uparrow$
2. Αν $f \uparrow$ τότε $f' > 0$
3. Αν $f \uparrow$ τότε $f' \geq 0$
4. Αν $f' \neq 0$ τότε f γνησίως μονότονη <u>ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!</u>

Εξάσκηση 1

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x)-2f(x)=0$ για κάθε $x>0$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$. $x>0$ είναι σταθερή
2. Αν επιπλέον $f(1)=2$ να βρείτε τον τύπο υης f

Εξάσκηση 1

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x) - 2f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. $x > 0$ είναι σταθερή
2. Αν επιπλέον $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο υης f

Εξάσκηση 2

Έστω $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$
Να δείξετε ότι $f(x) = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$

Εξάσκηση 3

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1 - xf(x)}{x^2}$ για κάθε $x > 0$
Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Εξάσκηση 4

Έστω $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\frac{\pi}{2})=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)-\sigma\varphi x\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$
Να δείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$, $x\in(0,\pi)$

Εξάσκηση 5

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = f(x) - e^x \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 7

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και ισχύουν

- $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) + 1$

Να δείξετε ότι $f(0) = g(0) + 1$

Εξάσκηση 8

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) = x(f(x) - f'(x))$ για κάθε $x > 0$

1. Αν $g(x) = xf(x)$, $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) = c \cdot e^x$, $x > 0$
2. Αν επιπλέον $f(1) = e$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 8

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) = x(f(x) - f'(x))$ για κάθε $x > 0$

1. Αν $g(x) = xf(x)$, $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) = c \cdot e^x$, $x > 0$
2. Αν επιπλέον $f(1) = e$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $2f(x) + 4xf'(x) + (x^2+9)f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$ και $f'(0) = \frac{1}{9}$

Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$

Εξάσκηση 10

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή

Εξάσκηση 11

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

1. $f^2(x) + g^2(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 11

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

1. $f^2(x) + g^2(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1 < x_2 \in \Delta \implies f(x_1) < f(x_2)$.
Στο (x_1, x_2) είναι παραγωγίσιμη, άρα θα ισχύει το ΘΜΤ
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$
$f(x_2) > f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1 < x_2 \in \Delta \implies f(x_1) < f(x_2)$.
Στο (x_1, x_2) είναι παραγωγίσιμη, άρα θα ισχύει το ΘΜΤ
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$
$f(x_2) > f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1 < x_2 \in \Delta \implies f(x_1) < f(x_2)$.
Στο (x_1, x_2) είναι παραγωγίσιμη, άρα θα ισχύει το ΘΜΤ
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$
$f(x_2) > f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1 < x_2 \in \Delta \implies f(x_1) < f(x_2)$.
Στο (x_1, x_2) είναι παραγωγίσιμη, άρα θα ισχύει το ΘΜΤ
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$
$f(x_2) > f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1 < x_2 \in \Delta \implies f(x_1) < f(x_2)$.
Στο (x_1, x_2) είναι παραγωγίσιμη, άρα θα ισχύει το ΘΜΤ
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$
$f(x_2) > f(x_1)$