

# Συναρτήσεις

## Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Όταν πάμε εμείς στο άπειρο λοιπόν!



## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$



## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

## Στο προηγούμενο επεισόδιο...

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\textcircled{6} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{7} \quad \text{με } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{8} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\textcircled{9} \quad \text{με } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\textcircled{10} \quad \text{με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

# Συμπέρασμα

Όπως και με τα κανονικά όρια:

- ①  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$  ή
- ②  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  ή
- ③  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  δεν θα υπάρξει

# Μόνο 2 περιπτώσεις

Ασχολούμαστε μόνο με

①  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

②  $+\infty - \infty$

# Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- $x$  vs  $x^2$
- $x^2$  vs  $x^5$
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική



# Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- $x$  vs  $x^2$
- $x^2$  vs  $x^5$
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

# Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- $x$  vs  $x^2$
- $x^2$  vs  $x^5$
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

# Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- $x$  vs  $x^2$
- $x^2$  vs  $x^5$
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

# Πιο άπειρο είναι μεγαλύτερο κάνει κουμάντο

- Υπάρχει μεγαλύτερο? το βγάζω κοινό παράγοντα
- Είναι ίσα? κάνω πράξεις και τα διώχνω

## Δύο έτοιμα όρια

Έστω  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  και  
 $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$

# Εξάσκηση

Στο σχήμα [▶ Geogebra](#) φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ .  
Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Στο σχήμα [Geogebra](#) φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ .  
Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Στο σχήμα [▶ Geogebra](#) φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ .  
Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$



# Εξάσκηση

Στο σχήμα [► Geogebra](#) φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ .  
Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right)$



# Εξάσκηση

Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a - 1)x^3 - 2x + 1)$ , για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + \mu x^2 - 2}{(\mu - 2)x^2 + 3x + 1}$ , είναι πραγματικός αριθμός

# Εξάσκηση

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του  $\mu$ , να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{4x^2 + 1} + \mu x \right)$$



# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^n + x - 1}{x^2 + 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  για τις διάφορες τιμές του  $n \in \mathbb{N}^*$ .

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x f \left( \frac{x-1}{x} \right) \right) = 2, \text{ να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}.$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ , να υπολογίσετε τα όρια

- 1  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$
- 2  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ , να υπολογίσετε τα όρια

- ①  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$
- ②  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$

## Εξάσκηση

Έστω  $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

② Αν επιπλέον ισχύει  $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$ , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

## Εξάσκηση

Έστω  $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

② Αν επιπλέον ισχύει  $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$ , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$$

Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$

②  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \sigma\upsilon\nu x$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \sigma\upsilon\nu x$$

## Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

## Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

# Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

# Εξάσκηση

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - a^x}{2^x + 3a^x}, a > 0$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

②  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

③  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma \nu \nu x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{\ln x}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma \nu \nu x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{\ln x}$$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$  με σύνολο τιμών το  $[0, +\infty)$

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$  με σύνολο τιμών το  $[0, +\infty)$

- ① Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$



# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^x, x > 0$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση