

Συναρτήσεις

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Κάτι πολύ θεωρητικό

Αλλά πρώτα ας παίξουμε με Geogebra

Σε ακόμα πιο θεωρητικό

Συμβολίζουμε με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Άμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

$$\textcircled{1} \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\textcircled{6} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Αν } f(x) \geq 0 \text{ και υπάρχει } \xi \text{ με } f(\xi) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

- ① $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$
- ② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$
- ③ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- ④ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$
- ⑤ $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- ⑥ Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$
- ⑦ Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει ξ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

- ① $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$
- ② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$
- ③ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- ④ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x) dx$
- ⑤ $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- ⑥ Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$
- ⑦ Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει ξ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Αν $\int_1^3 f(x) dx = 1$, $\int_2^5 f(x) dx = 2$, $\int_2^3 f(x) dx = 3$ και $\int_1^3 g(x) dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_3^2 f(x) dx$

② $\int_1^5 f(x) dx$

③ $\int_1^3 2f(x) - 3g(x) dx$

Εξάσκηση 1

Αν $\int_1^3 f(x) dx = 1$, $\int_2^5 f(x) dx = 2$, $\int_2^3 f(x) dx = 3$ και $\int_1^3 g(x) dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_3^2 f(x) dx$

② $\int_1^5 f(x) dx$

③ $\int_1^3 2f(x) - 3g(x) dx$

Εξάσκηση 1

Αν $\int_1^3 f(x) dx = 1$, $\int_2^5 f(x) dx = 2$, $\int_2^3 f(x) dx = 3$ και $\int_1^3 g(x) dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_3^2 f(x) dx$

② $\int_1^5 f(x) dx$

③ $\int_1^3 2f(x) - 3g(x) dx$

osdfi sidjijooij sdoifjosidj oifdjsfid Οιδσξφο isdjfoij oij

Εξάσκηση 2

Να εξετάσετε αν είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$

osidfji odosifjsdoi sdofijsoi σδοφιξσοδ ιsodifjsodij

Εξάσκηση 3

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x) dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής

Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε το κ ώστε

$$\int_2^{\kappa} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx - 2 \int_{\kappa}^2 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 1$$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

② $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

③ $\int_0^1 x^2 \, dx$

④ $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

⑤ $\int_0^4 x\sqrt{x} \, dx$

⑥ $\int_1^2 1 \, dx$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

2 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

3 $\int_0^1 x^2 \, dx$

4 $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

5 $\int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

6 $\int_1^2 1 \, dx$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

2 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

3 $\int_0^1 x^2 \, dx$

4 $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

5 $\int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

6 $\int_1^2 1 \, dx$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

2 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

3 $\int_0^1 x^2 \, dx$

4 $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

5 $\int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

6 $\int_1^2 1 \, dx$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

2 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

3 $\int_0^1 x^2 \, dx$

4 $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

5 $\int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

6 $\int_1^2 1 \, dx$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \, dx$

② $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$

③ $\int_0^1 x^2 \, dx$

④ $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$

⑤ $\int_0^4 x \sqrt{x} \, dx$

⑥ $\int_1^2 1 \, dx$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\sigma\nu x + \frac{3}{x}) dx$

② $\int_1^2 (2^x + \frac{1}{x^2}) dx$

③ $\int_0^1 x(3x - 1) dx$

④ $\int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$

⑤ $\int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x}) dx$

② $\int_1^2 (2^x + \frac{1}{x^2}) dx$

③ $\int_0^1 x(3x - 1) dx$

④ $\int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$

⑤ $\int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\sigma\nu x + \frac{3}{x}) dx$

② $\int_1^2 (2^x + \frac{1}{x^2}) dx$

③ $\int_0^1 x(3x - 1) dx$

④ $\int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$

⑤ $\int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\sigma\nu\nu x + \frac{3}{x}) dx$

② $\int_1^2 (2^x + \frac{1}{x^2}) dx$

③ $\int_0^1 x(3x - 1) dx$

④ $\int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$

⑤ $\int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$\textcircled{2} \int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 x(3x - 1) dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$

② $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} \, dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 \, dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$

② $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} \, dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 \, dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$

② $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} \, dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 \, dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$

② $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} \, dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 \, dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$

② $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} \, dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 \, dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$

② $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} \, dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 \, dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$

② $\int_0^1 e^{2x} \, dx$

③ $\int_0^1 e^{-x} \, dx$

④ $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

⑤ $\int_0^1 e^{2x-1} \, dx$

⑥ $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$

⑦ $\int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$

⑧ $\int_0^1 (x-2)^4 \, dx$

⑨ $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 e^{-x} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 e^{2x-1} \, dx$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$\textcircled{7} \int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$$

$$\textcircled{8} \int_0^1 (x-2)^4 \, dx$$

$$\textcircled{9} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

Εξάσκηση 7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$$

$$\textcircled{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 e^{-x} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$\textcircled{5} \int_0^1 e^{2x-1} \, dx$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \frac{du}{u+3}$$

$$\textcircled{7} \int_0^1 \frac{1}{3x+2} \, dx$$

$$\textcircled{8} \int_0^1 (x-2)^4 \, dx$$

$$\textcircled{9} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

② $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

③ $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

④ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$

⑤ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon\varphi x dx$

⑥ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

⑦ $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1 $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

2 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

3 $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$

5 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx$

6 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

7 $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

② $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

③ $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

④ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$

⑤ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx$

⑥ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

⑦ $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon \varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

Εξάσκηση 8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$③ \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$④ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$$

$$⑤ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx$$

$$⑥ \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$⑦ \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$$

Εξάσκηση 9

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$

② $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

③ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

Εξάσκηση 9

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

① $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$

② $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

③ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

Εξάσκηση 9

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$① \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$$

$$② \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$③ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

Εξάσκηση 10

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

Εξάσκηση 10

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

Εξάσκηση 10

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

Εξάσκηση 10

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής
- ② Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$
- ② Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$

Εξάσκηση 11

- ① Αν $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)f'(x) dx$
- ② Αν $f(1) = 2f(0)$ και ισχύουν $f^2(x) - f'(x) = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $f(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$

Εξάσκηση 11

- ① Αν $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)f'(x) dx$
- ② Αν $f(1) = 2f(0)$ και ισχύουν $f^2(x) - f'(x) = f(x)$, $x \in [0, 1]$, $f(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$

Εξάσκηση 12

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ όταν ισχύει:

① $f(x) = x \int_0^1 e^{xt} dt, x \in \mathbb{R}$

② $f(x) = x \int_0^1 \frac{1}{|x-t|+1} dt, x \geq 1$

Εξάσκηση 12

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ όταν ισχύει:

① $f(x) = x \int_0^1 e^{xt} dt, x \in \mathbb{R}$

② $f(x) = x \int_0^1 \frac{1}{|x-t|+1} dt, x \geq 1$

Εξάσκηση 13

Να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(t) dt \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Εξάσκηση 14

Εστω μια συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει

$$f(x) = 2x + \int_0^2 f(x) dx, x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 4, x \in \mathbb{R}$