

# Συναρτήσεις

## Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Κωνσταντίνος Λόλας

# Σιγά τα ολοκληρώματα!

Τι μπορούμε να ολοκληρώσουμε

- 1 Πολυώνυμα
- 2 Εκθετικές
- 3 Τριγωνομετρικές
- 4 Ρητές με πρωτοβάθμιο διαιρέτη
- 5 Πρωτοβάθμιες άρρητες
- 6 Έτοιμες από σύνθεση και φυσικά
- 7 κάθε πρόσθεση ή αφαίρεση αυτών ΜΟΝΟ

Τι γίνεται με τον πολλαπλασιασμό? Διαιρέση? Ακόμα και την απλή  $\ln x$ ?

# Ιστορία

Ξέρουμε να παραγωγίζουμε γινόμενο

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (f \cdot g)' - fg'\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int f'g \, dx &= \int (f \cdot g)' \, dx - \int fg' \, dx \\ \int f'g \, dx &= f \cdot g - \int fg' \, dx\end{aligned}$$

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

# Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

# Παραδείγματα

1  $\int x e^x dx$

2  $\int x^3 e^x dx$

3  $\int x \ln x dx$

4  $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$



# Παραδείγματα

1  $\int x e^x dx$

2  $\int x^3 e^x dx$

3  $\int x \ln x dx$

4  $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

# Παραδείγματα

1  $\int x e^x dx$

2  $\int x^3 e^x dx$

3  $\int x \ln x dx$

4  $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

# Παραδείγματα

①  $\int x e^x dx$

②  $\int x^3 e^x dx$

③  $\int x \ln x dx$

④  $\int e^{2x} \eta\mu(3x + 1) dx$

Και στα εντός ύλης!

Κατά παράγοντες

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!  
Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!  
Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????



# Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!  
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

# Δοκιμές σύνθεσης

1  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

2  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

3  $\int 4x \varepsilon \varphi(x^2) \ln(\eta \mu(x^2)) dx$

# Δοκιμές σύνθεσης

1  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

2  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

3  $\int 4x \varepsilon \varphi(x^2) \ln(\eta \mu(x^2)) dx$

# Δοκιμές σύνθεσης

$$\textcircled{1} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\textcircled{3} \int 4x \varepsilon \varphi(x^2) \ln(\eta \mu(x^2)) dx$$

# Ναι, αλλά... τύπο έχουμε?

## Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\int_a^b f(x) dx$$

Θέτω  $x = g(u)$ , άρα

- για  $x = a \implies u = k$
- για  $x = b \implies u = l$
- $dx = g'(u)du$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_k^l f(g(u))g'(u) du$$

# Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

①  $f(x) = x^2 - \ln x$

②  $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③  $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④  $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

# Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

①  $f(x) = x^2 - \ln x$

②  $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③  $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④  $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

# Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

①  $f(x) = x^2 - \ln x$

②  $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③  $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④  $f(x) = x \ln x - e^{-x}$



# Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

①  $f(x) = x^2 - \ln x$

②  $f(x) = \sqrt{x} - e^x$

③  $f(x) = x^4 - 2x + 1$

④  $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

## Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - x$ .

- 1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
- 2 Να βρείτε τις οριακές τιμές της  $f$  στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και να σχεδιάσετε τη  $C_f$
- 3 Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \sin x$

## Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - x$ .

- 1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
- 2 Να βρείτε τις οριακές τιμές της  $f$  στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και να σχεδιάσετε τη  $C_f$
- 3 Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

## Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - x$ .

- 1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
- 2 Να βρείτε τις οριακές τιμές της  $f$  στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και να σχεδιάσετε τη  $C_f$
- 3 Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \sigma \nu \nu x$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

①  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

②  $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

①  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

②  $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

①  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

②  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$



## Εξάσκηση 5

Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής των συναρτήσεων:

①  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$

②  $f(x) = 2x(\ln x - 1) - \ln^2 x$

## Εξάσκηση 5

Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = 2x(\ln x - 1) - \ln^2 x$$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

①  $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \pi)$

②  $f(x) = \varepsilon\varphi x - x + 2 \ln(\sigma\upsilon\nu x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

①  $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \pi)$

②  $f(x) = \varepsilon\varphi x - x + 2 \ln(\sigma\nu x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

## Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x$

- 1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- 2 Να βρείτε τις οριακές τιμές της  $f$  στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$

## Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x$

- 1 Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- 2 Να βρείτε τις οριακές τιμές της  $f$  στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$

## Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \ln x$ . Να δείξετε ότι:

- 1 Η  $C_f$  έχει μοναδικό σημείο καμπής το  $A(x_0, f(x_0))$
- 2  $x_0 < \frac{4}{5}$

## Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \ln x$ . Να δείξετε ότι:

- ① Η  $C_f$  έχει μοναδικό σημείο καμπής το  $A(x_0, f(x_0))$
- ②  $x_0 < \frac{4}{5}$



## Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 6e^x - x^3 - 4x^2$ . Να δείξετε ότι η  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

## Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$$

Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες:

- 1 Η  $f$  παρουσιάζει καμπή στο  $x_0 = 1$
- 2 Η  $C_f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

## Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$$

Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες:

- ① Η  $f$  παρουσιάζει καμπή στο  $x_0 = 1$
- ② Η  $C_f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

## Εξάσκηση 11

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in (-2, 2)$  η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 - 1$  είναι κυρτή σε όλο το  $\mathbb{R}$

## Εξάσκηση 12

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f''(x) + f(x) \neq 2f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = e^{-x}f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  δεν έχει σημεία καμπής.

## Εξάσκηση 13

Έστω  $f : (1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in (1, 3)$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$ , δεν παρουσιάζει καμπή

# Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία



# Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία

## Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία