

# Συναρτήσεις

## Θεώρημα Bolzano

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Challenge 1

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

# Challenge 1

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

# Challenge 1

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

# Challenge 1

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

## Challenge 2

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $(\alpha, \beta)$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

## Challenge 2

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $(\alpha, \beta)$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

## Challenge 2

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο  $A$  με θετική τεταγμένη και ένα σημείο  $B$  με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $(\alpha, \beta)$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...



## Challenge 2

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο  $A$  με θετική τεταγμένη και ένα σημείο  $B$  με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $(\alpha, \beta)$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

## Challenge 3

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

## Challenge 3

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

## Challenge 3

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο  $A$  με θετική τεταγμένη και ένα σημείο  $B$  με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

## Challenge 3

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνεχή συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  χωρίς να περάσετε από τον άξονα  $x'x$

Συμπέρασμα...

# Χωρίς πολλά πολλά...

## Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ ,

τότε υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$

# Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

# Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ



# Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

# Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

# Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

# Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς  $x$
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

# Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς  $x$
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

# Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς  $x$
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

# Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς  $x$
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση



## Ασκήσεις

# Εξάσκηση 1

Να αποδείξετε ότι:

- 1 Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x - 1$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[0, 1]$ .
- 2 Η εξίσωση  $x^3 + x - 1 = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

# Εξάσκηση 1

Να αποδείξετε ότι:

- ① Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x - 1$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[0, 1]$ .
- ② Η εξίσωση  $x^3 + x - 1 = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

## Εξάσκηση 2

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $x_0^2 + 3x_0 = e^{x_0} + 1$ .

## Εξάσκηση 3

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με  $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x - 1$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$ .

## Εξάσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$ .

## Εξάσκηση 5

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $e^{x_0} + x_0 = 2$

## Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Να αποδείξετε ότι οι  $C_f$  και  $C_g$  στο διάστημα  $(1, e)$  έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

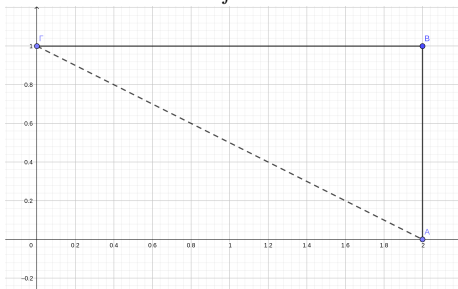


## Εξάσκηση 7

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

# Εξάσκηση 8

Δίνεται το ορθογώνιο  $OAB\Gamma$  του σχήματος και μία συνεχής συνάρτηση  $f$  στο  $[0, 2]$  της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται στο χωρίο που ορίζει το ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  τέμνει τη διαγώνιο  $ΑΓ$ .



## Εξάσκηση 9

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\ln x = \frac{1}{x-1}$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

## Εξάσκηση 10

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $-1 < f(x) < 0$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$ . Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$