Συναρτήσεις

Παράγωγος

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Αν είσαι τεμπέλης!

Γιατί να ψάχνουμε την κλίση σε κάθε σημείο ξεχωριστά?

Ας τη βρούμε για όλα και ΜΕΤΑ να κάνουμε αντικατάσταση

Αν είσαι τεμπέλης!

Γιατί να ψάχνουμε την κλίση σε κάθε σημείο ξεχωριστά?
Ας τη βρούμε για όλα και ΜΕΤΑ να κάνουμε αντικατάσταση

Συνάρτηση παράγωγος

Παράγωγος

Εστω μια συνάρτηση f. Η συνάρτηση παράγωγος της f θα είναι η συνάρτηση που απεικονίζει το x_0 στο $f'(x_0)$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = c$

$c' = 0$

$f(x) = x$

$x' = 1$

$f(x) = x^2$

$(x^2)' = 2x$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = c$

$c' = 0$

$f(x) = x$

$x' = 1$

$f(x) = x^2$

$(x^2)' = 2x$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = c$

$c' = 0$

$f(x) = x$

$x' = 1$

$f(x) = x^2$

$(x^2)' = 2x$

Αποδεικνύεται ότι:

$f(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x$

$f(x) = \ln x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \eta\mu x$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Αποδεικνύεται ότι:

$f(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x$

$f(x) = \ln x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$f(x) = \eta\mu x$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Αποδεικνύεται ότι:

$f(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x$

$f(x) = \ln x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \eta\mu x$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Αποδεικνύεται ότι:

$f(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x$

$f(x) = \ln x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \eta\mu x$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

Αποδείξεις (άθροισμα - διαφορά)

$f+g$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$f-g$

$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$$

Αποδείξεις (άθροισμα - διαφορά)

$f + g$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$f - g$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Αποδείξεις (γινόμενο - πηλίκο)

$f \cdot g$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

f/g

$$(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Αποδείξεις (γινόμενο - πηλίκο)

$f \cdot g$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

f/g

$$(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = \varepsilon\varphi x$

$(\varepsilon\varphi x)' = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$

$f(x) = \sigma\varphi x$

$(\sigma\varphi x)' = -1 - \sigma\varphi^2 x$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = \varepsilon\varphi x$

$(\varepsilon\varphi x)' = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$

$f(x) = \sigma\varphi x$

$(\sigma\varphi x)' = -1 - \sigma\varphi^2 x$

Αποδείξεις (σύνθεση)

$f(g)$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Παράδειγμα

$$f(x) = \alpha^x$$

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$$

Και μια εξτρά!

Τι γίνεται με την

$$(f^{-1})'$$

1. Γιατί?
2. Πώς? Υπάρχει σαν ασκηση πιο κάτω!

Συγκεντρωτικά

- $c' = 0$
- $(f^a)' = af^{a-1}f'$
- $\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$
- $(a^f)' = a^f f' \ln a$
- $(\eta\mu f)' = f'\sigma\upsilon\nu f$
- $(\sigma\upsilon\nu f)' = -f'\eta\mu f$
- $(\varepsilon\varphi f)' = (1 + \varepsilon\varphi^2 f)f'$
- $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f(x))}$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Ενδιαφέρουσες αποδείξεις εκτός ύλης

- e^x Απόδειξη
- $\ln x$ Απόδειξη
- e^x γνωρίζοντας το $\ln x$ ή ανάποδα! Απόδειξη
- $\eta\mu x$ ή $\sigma\upsilon\nu x$ Απόδειξη

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0, όταν:

1. $f(x) = x^5, x_0 = -1$
2. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x_0 = \dfrac{3\pi}{4}$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0, όταν:

1. $f(x) = x^5, x_0 = -1$
2. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x_0 = \frac{3\pi}{4}$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \alpha^3$
3. $f(x) = x^3 + \eta\mu x + \ln 2$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \alpha^3$
3. $f(x) = x^3 + \eta\mu x + \ln 2$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \alpha^3$
3. $f(x) = x^3 + \eta\mu x + \ln 2$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln\frac{e^x}{x} + \ln\frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \dfrac{e^x}{x} + \ln \dfrac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha\ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln\frac{e^x}{x} + \ln\frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln\frac{e^x}{x} + \ln\frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2+1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}\eta\mu x$

Εξάσκηση 6

Εστω $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f(0) = g(0) = 1$ και $f'(0) = 2$, $g'(0) = 3$.

1. Να βρείτε την $(f \cdot g)'(0)$
2. Αν $h(x) = \eta\mu x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $h'(0)$

Εξάσκηση 6

Εστω $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f(0) = g(0) = 1$ και $f'(0) = 2$, $g'(0) = 3$.

1. Να βρείτε την $(f \cdot g)'(0)$
2. Αν $h(x) = \eta\mu x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $h'(0)$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{\ln x}{x}$
2. $\dfrac{x}{x^2+1}$
3. $\dfrac{x}{e^x}$
4. $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{\ln x}{x}$
2. $\dfrac{x}{x^2+1}$
3. $\dfrac{x}{e^x}$
4. $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{\ln x}{x}$
2. $\dfrac{x}{x^2+1}$
3. $\dfrac{x}{e^x}$
4. $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{\ln x}{x}$
2. $\dfrac{x}{x^2+1}$
3. $\dfrac{x}{e^x}$
4. $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{\ln x}{x}$
2. $\dfrac{x}{x^2+1}$
3. $\dfrac{x}{e^x}$
4. $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{1}{x^2}$
2. $\dfrac{1}{2\ln x}$
3. $\dfrac{x^2+2x-3}{x}$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{1}{x^2}$
2. $\dfrac{1}{2\ln x}$
3. $\dfrac{x^2+2x-3}{x}$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\dfrac{1}{x^2}$
2. $\dfrac{1}{2\ln x}$
3. $\dfrac{x^2+2x-3}{x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 10

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\ln\sqrt{x^2+1}$
2. $\ln(\sqrt{x^2+1})-x$

Εξάσκηση 10

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\ln\sqrt{x^2+1}$
2. $\ln(\sqrt{x^2+1}) - x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2 + 2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2 + 2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2+2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2+2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2+2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2+2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2+2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2+2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 12

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

1. $g(x) = f(x + \eta\mu x)$
2. $g(x) = f^2(-x)$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

1. $g(x) = f(x + \eta\mu x)$
2. $g(x) = f^2(-x)$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Εξάσκηση 15

Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Εξάσκηση 15

Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Εξάσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

Να βρείτε την $f''(x)$

Εξάσκηση 17

Εστω $x, y, \theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις με μεταβλητή το χρόνο t, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f(t) = t^2 + x(t)y(t)$
2. $f(t) = \ln x(t) + x^2(t)$
3. $f(t) = \varepsilon\varphi(\theta(t))$

Εξάσκηση 17

Εστω x, y, $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις με μεταβλητή το χρόνο t, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f(t) = t^2 + x(t)y(t)$
2. $f(t) = \ln x(t) + x^2(t)$
3. $f(t) = e\varphi(\theta(t))$

Εξάσκηση 17

Εστω $x, y, \theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις με μεταβλητή το χρόνο t, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f(t) = t^2 + x(t)y(t)$
2. $f(t) = \ln x(t) + x^2(t)$
3. $f(t) = \varepsilon\varphi(\theta(t))$

Εξάσκηση 18

Αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και ισχύουν $y(t) = x^2(t)$, $y'(t) = 2x'(t)$ και $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$, να δείξετε ότι $x(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$.

Εξάσκηση 19

Εστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις x, $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μεταβλητή το χρόνο t, για τις οποίες ισχύει $y^2(t) = 3 + x^2(t)$, για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$ είναι $x(1) = 1$, $x'(1) = 4$ και $y(1) > 0$, να βρείτε το $y'(1)$.

Εξάσκηση 20

1. Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού, για το οποίο ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(2) = 7$ και $f''(2016) = 6$
2. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύουν: $P(0) = 4$ και $8P(x) = (P'(x) \cdot P''(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 20

1. Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού, για το οποίο ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(2) = 7$ και $f''(2016) = 6$
2. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύουν: $P(0) = 4$ και $8P(x) = (P'(x) \cdot P''(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 21

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+ah) - f(x)}{h} = af'(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2f'(x)$

Εξάσκηση 21

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+ah) - f(x)}{h} = af'(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2f'(x)$

Εξάσκηση 22

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x) + e^{f(x)} = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
2. Να δείξετε ότι $f'(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 22

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x) + e^{f(x)} = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
2. Να δείξετε ότι $f'(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 23

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 1$

$$f(x) \cdot f'(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής
2. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 23

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 1$

$$f(x) \cdot f'(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής
2. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 23

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 1$

$$f(x) \cdot f'(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής
2. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 24

Εστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\Delta) \subseteq \Delta$, για την οποία ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1} : f(\Delta) \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \Delta$.
Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$, να δείξετε ότι:

1. $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
2. $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Εξάσκηση 24

Εστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\Delta) \subseteq \Delta$, για την οποία ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1} : f(\Delta) \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \Delta$.
Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$, να δείξετε ότι:

1. $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
2. $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Εξάσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
3. Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
3. Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
3. Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}
2. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

Εξάσκηση 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}
2. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

Εξάσκηση 27

Εστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x \cdot y) = yf(x) + xf(y), x, y > 0$$

Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} + f'(1), x > 0$

Αποδείξεις - Λύσεις

Περιεχόμενα

Απόδειξη $(e^x)' = e^x$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Τότε

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Θέτω $e^h - 1 = y \implies h = \ln(y+1)$, και όταν $h \to 0^+ \implies y \to 0^+$

$$(e^x)' = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = e^x \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{1}{y} \ln(y+1)}$$

$$= e^x \lim_{y \to 0} \frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = e^x \frac{1}{\ln e} = e^x$$

Τι θα κάνετε για το 0^-?

Πίσω στην θεωρία

Απόδειξη $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

Θέτω $h\cdot y = x \implies h = \dfrac{x}{y}$ και $h \to 0^+ \implies y \to +\infty$

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} = \lim_{y\to\infty}\ln(1+\frac{1}{y})^{\frac{y}{x}}$$
$$= \frac{1}{x}\lim_{y\to\infty}\ln(1+\frac{1}{y})^{y} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

Τί γίνεται με $h \to 0^-$? Πίσω στην θεωρία

Απόδειξη Μέσω αντίστροφης

Από $\ln e^x = x$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\ln e^x\right)' &= 1 \\ \frac{1}{e^x}\left(e^x\right)' &= 1 \\ \left(e^x\right)' &= e^x \end{aligned}$$

Η ανάποδα, από $e^{\ln x} = x$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left(e^{\ln x}\right)' &= 1 \\ e^{\ln x}\left(\ln x\right)' &= 1 \\ \left(\ln x\right)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Πίσω στην θεωρία

Απόδειξη $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ και $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$$(\eta\mu x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu h - \eta\mu x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \sigma\upsilon\nu x\frac{\eta\mu h}{h}\right) = \sigma\upsilon\nu x$$

Ομοια

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x\eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x\frac{\eta\mu h}{h}\right) = -\eta\mu x$$

Πίσω στην θεωρία