

Συναρτήσεις

Γραφική Παραστάση

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

Ορισμός

Ορισμός

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των σημείων $A(x, f(x))$, $x \in D_f$, και συμβολίζεται με C_f

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- ② Να βρείτε τις τιμές: $f(2)$ και $f(f(0))$
- ③ Να λύσετε γραφικά την $f(x) = 0$
- ④ Να λύσετε γραφικά την $f(x) < 0$
- ⑤ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$

1. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- ② Να βρείτε τις τιμές: $f(2)$ και $f(f(0))$
- ③ Να λύσετε γραφικά την $f(x) = 0$
- ④ Να λύσετε γραφικά την $f(x) < 0$
- ⑤ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$

1. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- ② Να βρείτε τις τιμές: $f(2)$ και $f(f(0))$
- ③ Να λύσετε γραφικά την $f(x) = 0$
- ④ Να λύσετε γραφικά την $f(x) < 0$
- ⑤ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$

1. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- ② Να βρείτε τις τιμές: $f(2)$ και $f(f(0))$
- ③ Να λύσετε γραφικά την $f(x) = 0$
- ④ Να λύσετε γραφικά την $f(x) < 0$
- ⑤ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$

2. ▶ Ασκήση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να λύσετε την $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
 $a) f(x) > g(x)$
 $b) f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο $x_0 = 0$

2. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να λύσετε την $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - α. $f(x) > g(x)$
 - β. $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο $x_0 = 0$

2. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να λύσετε την $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - ① $f(x) > g(x)$
 - ② $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο $x_0 = 0$

2. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να λύσετε την $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - ① $f(x) > g(x)$
 - ② $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο $x_0 = 0$

2. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να λύσετε την $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - ① $f(x) > g(x)$
 - ② $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο $x_0 = 0$

2. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να λύσετε την $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - ① $f(x) > g(x)$
 - ② $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο $x_0 = 0$

2. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ② Να λύσετε την $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - ① $f(x) > g(x)$
 - ② $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο $x_0 = 0$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 5a + 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 5)$. Να βρείτε:

- ① την τιμή του a
- ② τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $y'y$ και $x'x$
- ③ τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 5a + 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 5)$. Να βρείτε:

- ① την τιμή του a
- ② τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $y'y$ και $x'x$
- ③ τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 5a + 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 5)$. Να βρείτε:

- ① την τιμή του a
- ② τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $y'y$ και $x'x$
- ③ τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 1$. Να βρείτε:

- ① τα κοινά τους σημεία
- ② την σχετική τους θέση

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 1$. Να βρείτε:

- ① τα κοινά τους σημεία
- ② την σχετική τους θέση

5. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών σε καθεμία περίπτωση

5. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών σε καθεμία περίπτωση

6. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων e^x , $\eta\mu x$ για $x > 0$, να βρείτε τη σχετική τους θέση και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την ανισότητα:

$$e^x > \eta\mu x, \text{ για κάθε } x > 0$$

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1, x \geq 1 \text{ και } g(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$$

8. ▶ Άσκηση Geogebra

① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$

② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

$$f(x) = 5/2$$

$$f(x) - 1 = 0$$

$$f(x) - 1 = x^2 + 1, x \neq 0$$

8. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
- ② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

- ③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

α. $f(x) = 5/2$

β. $2f(x) - 1 = 0$

γ. $2f(x) = x^2 + 1, x \neq 0$

8. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
- ② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

- ③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

- ① $f(x) = 5/2$
- ② $2f(x) - 1 = 0$
- ③ $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

8. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
- ② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

- ③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

- ① $f(x) = 5/2$
- ② $2f(x) - 1 = 0$
- ③ $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

8. ▶ Ασκήση Geogebra

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
- ② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

- ③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

- ① $f(x) = 5/2$
- ② $2f(x) - 1 = 0$
- ③ $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

8. ▶ Άσκηση Geogebra

- ① Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$
- ② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

- ③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

- ① $f(x) = 5/2$
- ② $2f(x) - 1 = 0$
- ③ $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

9. ▶ Ασκήση Geogebra

- ① Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\eta\mu a - 5$ είναι αδύνατη, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

9. ▶ Ασκήση Geogebra

- ① Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\eta\mu a - 5$ είναι αδύνατη, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

10. Να εξετάσετε

- ① αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
- ② αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

10. Να εξετάσετε

- ① αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
- ② αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

11. Εστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $A = \mathbb{R}$ και $f(A) = (1, +\infty)$.

- ❶ Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει μία τουλάχιστον λύση
- ❷ Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a^2 + 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$
- ❸ Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \leq 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = e^{x_0}$

11. Εστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $A = \mathbb{R}$ και $f(A) = (1, +\infty)$.

- ① Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει μία τουλάχιστον λύση
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a^2 + 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$
- ③ Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \leq 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = e^{x_0}$

11. Εστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $A = \mathbb{R}$ και $f(A) = (1, +\infty)$.

- ① Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει μία τουλάχιστον λύση
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a^2 + 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$
- ③ Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \leq 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = e^{x_0}$