# Συναρτήσεις

## Συνάρτηση Ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

Κωνσταντίνος Λόλας

$10^{o}$ ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

# Στο σημερινό επεισόδιο

Θα μάθουμε:

1. Πώς υπολογίζουμε τα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ και
2. Τι σχέση έχουμε με τις αρχικές

# Ηρθε η ώρα της σύνδεσης!

## Θεώρημα Παράγουσας - Ορισμένου

Αν $f$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $\Delta$ και $\alpha$ είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

είναι μια παράγουσα της $f$ στο $\Delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

# Ηρθε η ώρα της σύνδεσης!

## Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν $f$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $G$ είναι μία παράγουσα της $f$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = G(\beta) - G(\alpha) = [G(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

# Ρεζουμέ!

Για να υπολογίσουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

1. Δεν το κάνουμε με τα άπειρα αθροίσματα!
2. Υπολογίζουμε το $G(x) = \int f(x)\,dx$
3. Υπολογίζουμε το $[G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

# Ρεζουμέ!

Για να υπολογίσουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

1. Δεν το κάνουμε με τα άπειρα αθροίσματα!
2. Υπολογίζουμε το $G(x) = \int f(x)\,dx$
3. Υπολογίζουμε το $[G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

# Ρεζουμέ!

Για να υπολογίσουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

1. Δεν το κάνουμε με τα άπειρα αθροίσματα!
2. Υπολογίζουμε το $G(x) = \int f(x)\,dx$
3. Υπολογίζουμε το $[G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

# Μέσης τιμής

### Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

# Απόδειξη Μέσης τιμής

Στο $[\alpha, \beta]$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής άρα έχει μέγιστη $\mathrm{M}$ και ελάχιστη $\mu$ τιμή, συνεπώς

$$\mu \leq f(x) \leq \mathrm{M}$$

Με τον ορισμό του ορισμοένου ολοκληρώματος η σχέση γίνεται

$$\mu(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \mathrm{M}(\beta-\alpha)$$

$$\mu \leq \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}{\beta-\alpha} \leq \mathrm{M}$$

που σύμφωνα με το ΘΕΤ θα ισχύει

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}{\beta-\alpha} = f(\xi) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$$

# Αρχικής

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\alpha}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)h}{h}, \xi \in [x, x+h] \\
&= \lim_{h\to 0} f(\xi) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

# Ολοκληρωτικού

Η $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ είναι μία αρχική της $f$ άρα θα ισχύει

$$G(x) = F(x) + c$$

Αλλά

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = 0 + c = c$$

Ετσι

$$G(x) = F(x) + G(\alpha)$$

Τότε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Rightarrow$$

$$F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha)$$