Συναρτήσεις
Κυρτότητα, Σημεία Καμπής

Κωνσταντίνος Λόλας

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$

Συγκρίσεις παντού

Ορισμός

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ μέγιστο, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ακροτάτου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό ΣΩΣΤΟ
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
   ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
   ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα <u>ΣΩΣΤΟ</u>

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Θεώρημα Fermat

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Όλα μαζί

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε <u>μπορεί</u> να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Όλα μαζί

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε <u>μπορεί</u> να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Όλα μαζί

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε <u>μπορεί</u> να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε <u>μπορεί</u> να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Ναι, αλλά πότε τα “πιθανά” είναι και “σίγουρα”

Να βρείτε συνθήκη για την f ώστε ένα σημείο της να είναι τοπικό μέγιστο

Έλεγχος πιθανών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (\beta, x_0)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Ναι, αλλά πότε τα “πιθανά” είναι και “σίγουρα”

Να βρείτε συνθήκη για την f ώστε ένα σημείο της να είναι τοπικό μέγιστο

Έλεγχος πιθανών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (\beta, x_0)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Εξάσκηση 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x - \dfrac{\beta}{x} + 3\alpha$, όπου α, $\beta \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 5, να βρείτε τα α και β

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \alpha x$, για την οποία ισχύει

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

Εξάσκηση 3

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\alpha \ln x \leq x - 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

να βρείτε την τιμή του α

Εξάσκηση 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει

$$f(x) \geq 2e^x - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Εξάσκηση 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει

$$f(x) \geq 2e^x - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Εξάσκηση 5

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

1. Τα κρίσιμα σημεία της f
2. Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
3. Το σύνολο τιμών της f

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

1. Τα κρίσιμα σημεία της f
2. Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
3. Το σύνολο τιμών της f

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

1. Τα κρίσιμα σημεία της f
2. Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
3. Το σύνολο τιμών της f

Εξάσκηση 7

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) = x^3 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$ και ισχύει:

$$f^3(x) + e^x = f(f(x)) + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(1) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\left(f^2(x)\right)' \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
2. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
3. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(1) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\left(f^2(x)\right)' \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
2. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
3. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Εξάσκηση 9

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(1)=1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\left(f^2(x)\right)'\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$
2. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι
$$f'(0) = 0$$
2. Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι
$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$
3. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(\mathrm{B})$

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|, x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι
$$f'(0) = 0$$
2. Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι
$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$
3. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(\mathrm{B})$

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι
$$f'(0) = 0$$
2. Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι
$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$
3. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(\mathrm{B})$

Εξάσκηση 11

Έστω $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Αν $f' \uparrow (0,2)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

Εξάσκηση 12

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που έχουν κοινά σημεία τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g στο διάστημα (α, β). Να δείξετε ότι:

1. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σημείων με τετμημένη ξ των C_f και C_g, να γίνεται μέγιστη
2. Οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες

Εξάσκηση 12

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που έχουν κοινά σημεία τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g στο διάστημα (α, β). Να δείξετε ότι:

1. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σημείων με τετμημένη ξ των C_f και C_g, να γίνεται μέγιστη
2. Οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία