

# Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

## Εκθετική Συνάρτηση

Κωνσταντίνος Λόλας

# Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Ωρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε  $\alpha \geq 0$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε  $\alpha \geq 0$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$



# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε  $\alpha \geq 0$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε  $\alpha \geq 0$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε  $\alpha \geq 0$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός:  $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{x \text{ φορές}}$
- Ακέραιος:  $\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x}$
- Ρητός:  $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$ , μόνο για  $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός:  $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{x \text{ φορές}}$
- Ακέραιος:  $\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x}$
- Ρητός:  $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$ , μόνο για  $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός:  $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{x \text{ φορές}}$
- Ακέραιος:  $\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x}$
- Ρητός:  $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$ , μόνο για  $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός:  $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{x \text{ φορές}}$
- Ακέραιος:  $\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x}$
- Ρητός:  $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$ , μόνο για  $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Επιστροφή στο σήμερα

Ιδιότητες δυνάμεων με  $\alpha, \beta$  θετικοί πραγματικοί και  $x, x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{x_1+x_2} = \alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2}$

- $\alpha^{x_1-x_2} = \frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}$

- $(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$

- $\alpha^x \cdot \beta^x = (\alpha \cdot \beta)^x$

- $\frac{\alpha^x}{\beta^x} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$



# Με τι θα ασχοληθούμε

Συνάρτησεις  $f(x) = a^x$  και εξισώσεις με άγνωστους εκθέτες!!!!

# Πάμε!

## Ορισμός

Εκθετική συνάρτηση ονομάζεται κάθε  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = a^x$ ,  
 $a > 0, a \neq 1$

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  για κάθε  $a$

► Geogebra

- Για ποιά  $a$  ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα  $-\infty$  και  $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  για κάθε  $a$

► Geogebra

- Για ποιά  $a$  ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα  $-\infty$  και  $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  για κάθε  $a$

► Geogebra

- Για ποιά  $a$  ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα  $-\infty$  και  $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  για κάθε  $a$

► Geogebra

- Για ποιά  $a$  ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα  $-\infty$  και  $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  για κάθε  $a$

► Geogebra

- Για ποιά  $a$  ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα  $-\infty$  και  $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση  $f(x) = a^x$  για κάθε  $a$

► Geogebra

- Για ποιά  $a$  ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα  $-\infty$  και  $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?



# Ταξίδι στο μέλλον

- 1 Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
- 2 Αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 3 Αν  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

# Ταξίδι στο μέλλον

- 1 Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
- 2 Αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 3 Αν  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

# Ταξίδι στο μέλλον

- ① Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
- ② Αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- ③ Αν  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

# Ταξίδι στο μέλλον

- ① Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
- ② Αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- ③ Αν  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε  $a^x = a^y$  τότε  $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς  $x$ . Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε  $a^x = a^y$  τότε  $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς  $x$ . Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε  $a^x = a^y$  τότε  $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς  $x$ . Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε  $a^x = a^y$  τότε  $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς  $x$ . Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...



# Εξάσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

1  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

2  $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}, x > 0$

# Εξάσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

①  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

②  $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}, x > 0$

## Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1  $f(x) = e^x + 1$

2  $f(x) = e^{x-1}$

3  $f(x) = e^{|x|}$

## Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1  $f(x) = e^x + 1$

2  $f(x) = e^{x-1}$

3  $f(x) = e^{|x|}$

## Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

①  $f(x) = e^x + 1$

②  $f(x) = e^{x-1}$

③  $f(x) = e^{|x|}$

## Εξάσκηση 3

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (a - 1)^x$ . Να βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$ :

- ❶ ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$
- ❷ είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$
- ❸ είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$

## Εξάσκηση 3

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (a - 1)^x$ . Να βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$ :

- ❶ ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$
- ❷ είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$
- ❸ είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$

## Εξάσκηση 3

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (a - 1)^x$ . Να βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$ :

- ① ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$
- ② είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$
- ③ είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$



## Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$ .

- ❶ Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ❷ Να βρείτε τη τιμή  $f(0)$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$
- ❸ Να λύσετε την ανίσωση  $e^x + x < 1$
- ❹ Αν  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

## Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$ .

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τη τιμή  $f(0)$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση  $e^x + x < 1$
- ④ Αν  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

## Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$ .

- 1 Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- 2 Να βρείτε τη τιμή  $f(0)$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$
- 3 Να λύσετε την ανίσωση  $e^x + x < 1$
- 4 Αν  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

## Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - 1$ .

- ① Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τη τιμή  $f(0)$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$
- ③ Να λύσετε την ανίσωση  $e^x + x < 1$
- ④ Αν  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

## Εξάσκηση 5

Να κάνετε το πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = e^x - 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

## Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  και  $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
- 2 Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$
- 3 Να γράψετε τη συνάρτηση  $g$  σε μορφή δύναμης
- 4 Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

## Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  και  $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
- 2 Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$
- 3 Να γράψετε τη συνάρτηση  $g$  σε μορφή δύναμης
- 4 Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

## Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  και  $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
- 2 Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$
- 3 Να γράψετε τη συνάρτηση  $g$  σε μορφή δύναμης
- 4 Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$



## Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  και  $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
- 2 Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$
- 3 Να γράψετε τη συνάρτηση  $g$  σε μορφή δύναμης
- 4 Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

# Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1  $3^x = 9$

2  $2^{x-1} = \frac{1}{8}$

3  $3^x = \sqrt{3}$

4  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} = \frac{8}{27}$

# Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1  $3^x = 9$

2  $2^{x-1} = \frac{1}{8}$

3  $3^x = \sqrt{3}$

4  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} = \frac{8}{27}$

# Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1  $3^x = 9$

2  $2^{x-1} = \frac{1}{8}$

3  $3^x = \sqrt{3}$

4  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} = \frac{8}{27}$

## Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $3^x = 9$

②  $2^{x-1} = \frac{1}{8}$

③  $3^x = \sqrt{3}$

④  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1} = \frac{8}{27}$

## Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1  $e^x - e = 0$

2  $e^{3x-2} = 1$

3  $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$

4  $e^x - e^{-x} = 0$

5  $e^x + 1 = 0$

## Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1  $e^x - e = 0$

2  $e^{3x-2} = 1$

3  $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$

4  $e^x - e^{-x} = 0$

5  $e^x + 1 = 0$

## Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x - e = 0$

②  $e^{3x-2} = 1$

③  $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$

④  $e^x - e^{-x} = 0$

⑤  $e^x + 1 = 0$



## Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x - e = 0$

②  $e^{3x-2} = 1$

③  $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$

④  $e^x - e^{-x} = 0$

⑤  $e^x + 1 = 0$

## Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x - e = 0$

②  $e^{3x-2} = 1$

③  $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$

④  $e^x - e^{-x} = 0$

⑤  $e^x + 1 = 0$

## Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1  $2^{x+1} + 4 \cdot 2^{x-1} = 4$

2  $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

## Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\textcircled{1} \quad 2^{x+1} + 4 \cdot 2^{x-1} = 4$$

$$\textcircled{2} \quad 9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$$

## Εξάσκηση 10

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x - 2 \cdot e^{-x} + 1 = 0$

②  $3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0$

## Εξάσκηση 10

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $e^x - 2 \cdot e^{-x} + 1 = 0$

②  $3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0$

# Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1  $3^x < 9$

2  $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{8}{27}$

3  $e^x - 1 < 0$

# Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1  $3^x < 9$

2  $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{8}{27}$

3  $e^x - 1 < 0$



# Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $3^x < 9$

②  $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{8}{27}$

③  $e^x - 1 < 0$

## Εξάσκηση 12

Να λύσετε την ανίσωση  $5^x + 5^{1-x} < 6$

## Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

- 1  $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- 2  $e^{x^2} - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- 3  $e^x - 1 > 0$  για κάθε  $x > 0$
- 4  $e^{-x} - 1 < 0$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

- 1  $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- 2  $e^{x^2} - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- 3  $e^x - 1 > 0$  για κάθε  $x > 0$
- 4  $e^{-x} - 1 < 0$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

- 1  $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- 2  $e^{x^2} - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- 3  $e^x - 1 > 0$  για κάθε  $x > 0$
- 4  $e^{-x} - 1 < 0$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

- ①  $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ②  $e^{x^2} - 1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ③  $e^x - 1 > 0$  για κάθε  $x > 0$
- ④  $e^{-x} - 1 < 0$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 14

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

①  $f(x) = e - e^x$

②  $f(x) = \frac{e^x - e^2}{x - 1}$

## Εξάσκηση 14

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = e - e^x$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{e^x - e^2}{x - 1}$$



## Εξάσκηση 15

Να λύσετε τα συστήματα

$$① \begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-1} \cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases}$$

## Εξάσκηση 15

Να λύσετε τα συστήματα

$$① \begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-1} \cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases}$$

## Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις εξισώσεις

①  $2^x + \sqrt{2^{x+4}} - 5 = 0$

②  $2 \cdot 5^{x-2} + 2^x - 12 \cdot 5^{x-3} - 3 \cdot 2^{x-3} = 0$

## Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\textcircled{1} \quad 2^x + \sqrt{2^{x+4}} - 5 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 2 \cdot 5^{x-2} + 2^x - 12 \cdot 5^{x-3} - 3 \cdot 2^{x-3} = 0$$

## Εξάσκηση 17

Να λύσετε την ανίσωση  $8^x + 4^x - 2 < 0$

## Εξάσκηση 17

- 1 Να αποδείξετε ότι  $e^x > \eta\mu x$  για κάθε  $x > 0$
- 2 Να λύσετε την εξίσωση  $e^x = \sigma\upsilon\nu x$  στο διάστημα  $[0, +\infty)$

## Εξάσκηση 17

- 1 Να αποδείξετε ότι  $e^x > \eta\mu x$  για κάθε  $x > 0$
- 2 Να λύσετε την εξίσωση  $e^x = \sigma\upsilon\nu x$  στο διάστημα  $[0, +\infty)$

## Εξάσκηση 18

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι  $t_0$  χρόνια, να δείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι  $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_0}}$



## Εξάσκηση 19

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι 20 γραμμάρια, τότε:

- 1 Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
- 2 Να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια
- 3 Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει  $\frac{5}{256}$  γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού

## Εξάσκηση 19

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι 20 γραμμάρια, τότε:

- 1 Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
- 2 Να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια
- 3 Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει  $\frac{5}{256}$  γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού

## Εξάσκηση 19

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι 20 γραμμάρια, τότε:

- 1 Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
- 2 Να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από 20 χρόνια
- 3 Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει  $\frac{5}{256}$  γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού