Κωνικές Τομές

Παραβολή

Κωνσταντίνος Λόλας

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες

άρα το επόμενο, μοιραία θα είναι το

Γεωμετρικοί τόποι παντού

Κάναμε

1. σταθερή απόσταση από ένα σημείο
2. ίση απόσταση από δύο σημεία
3. σταθερή απόσταση από ευθεία
4. ίση απόσταση από δύο ευθείες

<u>ίση απόσταση από σημείο και ευθεία?</u>

Φύγαμε για Geogebra

▸ Geogebra

Λίγο πιο απλά?

Φυσικά. Θα ασχοληθούμε μόνο με τις παραβολές που έχουν:

- εστία πάνω στους άξονες
- διευθετούσα κάθετη στον άξονα της εστίας
- η αρχή των αξόνων είναι στο μέσο της εστίας και της διευθετούσας

Ακόμα πιο απλά?

Και πάλι φυσικά.

- Εστία $\mathrm{E}(\frac{p}{2}, 0)$
- Διευθετούσα $x = -\frac{p}{2}$

ή

- Εστία $\mathrm{E}(0, \frac{p}{2})$
- Διευθετούσα $y = -\frac{p}{2}$

Πιο επίσημα?

Εξίσωση Παραβολής 1

Η παραβολή με εστία το σημείο $\mathrm{E}(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα $x = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

Πάμε για απόδειξη?

Πρώτες παρατηρήσεις

- Το σημείο $(0,0)$ ανήκει πάντα στην παραβολή
- ο $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας
- η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι ο "πάνω" κλάδος της παραβολής

Πρώτες παρατηρήσεις

- Το σημείο $(0, 0)$ ανήκει πάντα στην παραβολή
- ο $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας
- η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ο ”πάνω” κλάδος της παραβολής

Πρώτες παρατηρήσεις

- Το σημείο $(0,0)$ ανήκει πάντα στην παραβολή
- ο $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας
- η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ο "πάνω" κλάδος της παραβολής

Τα ίδια, αλλά ανάποδα!

Αλλάξτε τα x με τα y!

Εξίσωση Παραβολής 2

Η παραβολή με εστία το σημείο $\mathrm{E}(0, \frac{p}{2})$ και διευθετούσα $y = -\frac{p}{2}$ έχει εξίσωση

$$x^2 = 2py$$

Πρώτες παρατηρήσεις 2

- Το σημείο $(0,0)$ ανήκει πάντα στην παραβολή
- ο $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας
- η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή

Πρώτες παρατηρήσεις 2

- Το σημείο $(0, 0)$ ανήκει πάντα στην παραβολή
- ο $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας
- η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή

Πρώτες παρατηρήσεις 2

- Το σημείο $(0, 0)$ ανήκει πάντα στην παραβολή
- ο $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας
- η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή

Εφαπτομένη παραβολής

Εξίσωση

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της (x_1, y_1) είναι η

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Πάμε για απόδειξη?

Ιδιότητες Παραβολής $y^2 = 2px$

1. Η εφαπτομένη της στο σημείο της (x_1, y_1) τέμνει τον άξονα στο σημείο $(-x_1, 0)$
2. Κάθε παράλληλη στον $x'x$ ανακλάται στην παραβολή και περνά από την εστία

Πάμε για απόδειξη?

Ιδιότητες Παραβολής $y^2 = 2px$

1. Η εφαπτομένη της στο σημείο της (x_1, y_1) τέμνει τον άξονα στο σημείο $(-x_1, 0)$
2. Κάθε παράλληλη στον $x'x$ ανακλάται στην παραβολή και περνά από την εστία

Πάμε για απόδειξη?

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και επιπλέον:

1. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και εστία $\mathrm{E}(3,0)$
2. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διευθετούσα $\delta : x = 4$
3. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και εστία $\mathrm{E}(0,-2)$
4. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ είναι 2

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και επιπλέον:

1. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και εστία $\mathrm{E}(3, 0)$
2. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διευθετούσα $\delta : x = 4$
3. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και εστία $\mathrm{E}(0, -2)$
4. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ είναι 2

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και επιπλέον:

Απόδειξη εφαπτόμενης

Η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και έστω σημείο της $M(x_1, y_1)$. Επιλέγουμε τυχαίο σημείο $A(x_2, y_2)$. Η εφαπτόμενη στο M έστω είναι της μορφής

$$y = \lambda x + \beta$$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ και αφού διέρχεται από το M}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Για τα M και A ισχύει:

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ και } y_2^2 = 2px_2$$

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1) \implies (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1) \implies$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$$

Απόδειξη εφαπτόμενης

Η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και έστω σημείο της $M(x_1, y_1)$. Επιλέγουμε τυχαίο σημείο $A(x_2, y_2)$. Η εφαπτόμενη στο M έστω είναι της μορφής

$$y = \lambda x + \beta$$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ και αφού διέρχεται από το M}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Για τα M και A ισχύει:

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ και } y_2^2 = 2px_2$$

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1) \implies (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1) \implies$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$$

Απόδειξη εφαπτόμενης

Είχαμε $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ και βρήκαμε $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2p}{y_2 + y_1}$. Άρα

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Αν τώρα το y_2 τείνει στο y_1 θα έχουμε

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$$

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1$$

$$yy_1 = px + px_1$$

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτόμενης

Είχαμε $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ και βρήκαμε $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$. Άρα

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Αν τώρα το y_2 τείνει στο y_1 θα έχουμε

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$
$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$$
$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1$$
$$yy_1 = px + px_1$$
$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτόμενης

Είχαμε $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ και βρήκαμε $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$. Άρα

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Αν τώρα το y_2 τείνει στο y_1 θα έχουμε

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$$

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1$$

$$yy_1 = px + px_1$$

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτόμενης

Είχαμε $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ και βρήκαμε $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$. Άρα

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Αν τώρα το y_2 τείνει στο y_1 θα έχουμε

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{p}{y_1}(x - x_1) \\ yy_1 - y_1^2 &= px - px_1 \\ yy_1 - 2px_1 &= px - px_1 \\ yy_1 &= px + px_1 \\ yy_1 &= p(x + x_1) \end{aligned}$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτόμενης

Είχαμε $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ και βρήκαμε $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$. Άρα

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1)$$

Αν τώρα το y_2 τείνει στο y_1 θα έχουμε

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{p}{y_1}(x - x_1) \\ yy_1 - y_1^2 &= px - px_1 \\ yy_1 - 2px_1 &= px - px_1 \\ yy_1 &= px + px_1 \\ yy_1 &= p(x + x_1) \end{aligned}$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη τομής εφαπτόμενης - άξονα

Στην

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

και για $y = 0$, έχουμε

$$0 = p(x + x_1) \implies x = -x_1$$

Άρα το σημείο

$$\mathrm{K}(-x_1, 0)$$

Πίσω στη θεωρία

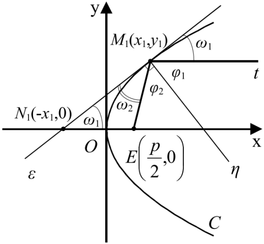
Απόδειξη ανακλαστικής ιδιότητας

Θα δείξουμε ότι $|\mathrm{ME}| = |\mathrm{NE}|$

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + y_1^2}$$

$$\sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{x_1^2 + px_1 + \frac{p^2}{4}}$$

$$\sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|\frac{p}{2} + x_1\right|$$



Πίσω στη Θεωρία

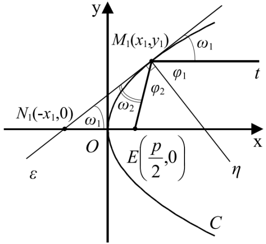
Απόδειξη ανακλαστικής ιδιότητας

Θα δείξουμε ότι $|\mathrm{ME}| = |\mathrm{NE}|$

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + y_1^2}$$

$$\sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{x_1^2 + px_1 + \frac{p^2}{4}}$$

$$\sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|\frac{p}{2} + x_1\right|$$



Πίσω στη θεωρία

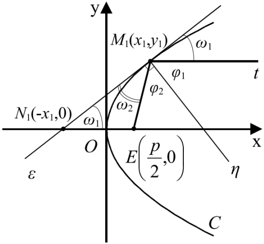
Απόδειξη ανακλαστικής ιδιότητας

Θα δείξουμε ότι $|\mathrm{ME}| = |\mathrm{NE}|$

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + y_1^2}$$

$$\sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{x_1^2 + px_1 + \frac{p^2}{4}}$$

$$\sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|\frac{p}{2} + x_1\right|$$



Πίσω στη θεωρία