

Ευθεία

Εξίσωση Ευθείας

Κωνσταντίνος Λόλας

Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβადού)

Γνωστά ή Αγνωστα νερά?

Λέξεις κλειδιά

- Κλίση
- Συντελεστής διεύθυνσης
- $\varepsilon\varphi\theta$
- α
- Σημεία
- Παραλληλία
- Καθετότητα
- Σημεία τομής...

είναι μερικά που θυμάμαι!

Γραμμές, γραμμές παντού

- Τι είναι γραμμή?
- Γραφικά ή Αλγεβρικά?

Γραμμές, γραμμές παντού

- Τι είναι γραμμή?
- Γραφικά ή Αλγεβρικά?

Γραφικά

Εύκολο!

Αλγεβρικά

Ορισμός γραμμής

Μία εξίσωση με τουλάχιστον έναν άγνωστο

Σημείο στη γραμμή

Κάθε σημείο που επαληθεύει την εξίσωση

Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

Ορισμοί

Γωνία Ευθείας

Ονομάζουμε γωνία της ευθείας με τον άξονα $x'x$, την γωνία που σχηματίζει ο $x'x$ όταν στραφεί αντίστροφα με τους δείκτες του ρολογιού έως ότου συμπέσει με την ευθεία

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης (ή κλίση) της ευθείας την εφαπτομένη της γωνίας της ευθείας με τον $x'x$

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

Λίγη ιστορία

Κλίση διανύσματος

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Εξίσωση ευθείας 1 (από κλίση και σημείο)

Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει συντελεστής διεύθυνσης λ και ας έχουμε γνωστό ένα σημείο (x_0, y_0) . Κάθε σημείο (x, y) που ανήκει στην ευθεία θα έχει με το γνωστό σημείο κλίση λ . Αρα

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$$

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

Εξίσωση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) . Αν $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

Εξίσωση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) . Αν $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

Εξίσωση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) . Αν $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

Εξισώση ευθείας 3 (δεν έχει κλίση)

Εύκολο?

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας η οποία:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2, -4)$
- 3 διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 6)$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας η οποία:

- ① σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- ③ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 6)$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας η οποία:

- ① σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{3}$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- ③ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 6)$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία

① $A(1, 0)$ και $B(2, \sqrt{3})$

② $A(2, 3)$ και $B(1, 3)$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία

- ① $A(1, 0)$ και $B(2, \sqrt{3})$
- ② $A(2, 3)$ και $B(1, 3)$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε , η οποία:

- ① είναι παράλληλη στην ευθεία ε_1 που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 120^\circ$
- ② είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, 5)$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε , η οποία:

- ① είναι παράλληλη στην ευθεία ε_1 που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 120^\circ$
- ② είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, 5)$

Εξάσκηση 4

Εστω η ευθεία ε που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και η ευθεία ζ που διέρχεται από τα σημεία $A(3, \alpha)$ και $B(5, 3\alpha - 2)$. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε:

- ① Οι ευθείες ε και ζ να είναι παράλληλες
- ② Οι ευθείες ε και ζ να είναι κάθετες

Εξάσκηση 4

Εστω η ευθεία ε που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και η ευθεία ζ που διέρχεται από τα σημεία $A(3, \alpha)$ και $B(5, 3\alpha - 2)$. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε:

- ① Οι ευθείες ε και ζ να είναι παράλληλες
- ② Οι ευθείες ε και ζ να είναι κάθετες

Εξάσκηση 5

Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$. Να βρείτε:

- 1 Την εξίσωση της ευθείας ε
- 2 Την τιμή του λ , για την οποία το σημείο $M(\lambda - 1, 2\lambda)$ ανήκει στην ευθεία ε .

Εξάσκηση 5

Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$. Να βρείτε:

- 1 Την εξίσωση της ευθείας ε
- 2 Την τιμή του λ , για την οποία το σημείο $M(\lambda - 1, 2\lambda)$ ανήκει στην ευθεία ε .

Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$ και:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- 3 είναι κάθετη στην ευθεία ζ με συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{2}$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$ και:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- 3 είναι κάθετη στην ευθεία ζ με συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{2}$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$ και:

- ① σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- ③ είναι κάθετη στην ευθεία ζ με συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{2}$

Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 2\alpha + 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
- ② Αν επιπλέον η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(1, -2)$, να βρείτε:
 - Ⓐ την τιμή του α
 - Ⓑ τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
 - Ⓒ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ε και τους άξονες

Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 2\alpha + 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
- ② Αν επιπλέον η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(1, -2)$, να βρείτε:
 - ① την τιμή του α
 - ② τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
 - ③ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ε και τους άξονες

Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 2\alpha + 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
- ② Αν επιπλέον η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(1, -2)$, να βρείτε:
 - ① την τιμή του α
 - ② τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
 - ③ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ε και τους άξονες

Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 2\alpha + 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
- ② Αν επιπλέον η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(1, -2)$, να βρείτε:
 - ① την τιμή του α
 - ② τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
 - ③ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ε και τους άξονες

Εξάσκηση 8

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, -3)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση:

- ① της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$
- ② του ύψους $A\Delta$
- ③ της διαμέσου BM

Εξάσκηση 9

Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(3, -6)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του τμήματος AB

Εξάσκηση 10

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

- ① $A(3, 2)$ και $B(-1, 6)$
- ② $\Gamma(5, -3)$ και $\Delta(5, -4)$

Εξάσκηση 11

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(2, 5)$, $B(1, 7)$ και $\Gamma(4, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$.

Εξάσκηση 12

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε όταν:

- ① η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -3)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$
- ② η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{2}{3}$
- ③ η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 4)$ και $B(\lambda^2, 4)$

Εξάσκηση 13

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon : y = \frac{x}{2} - 1$ και $\zeta : (|\mu| - 2)x - 5$. Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε η ευθεία να είναι:

- ① παράλληλη στην ευθεία ζ
- ② κάθετη στην ευθεία ζ

Εξάσκηση 14

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και:

- ① είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y = 3x + 1$
- ② είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2 : y = -2x + 3$

Εξάσκηση 15

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2x - 1$ και $\varepsilon_2 : y = x + 1$.

- ① Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2
- ② Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$
- ③ Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 , ε_2 και $\zeta : y = 5x - 7$ συντρέχουν

Εξάσκηση 16

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\Gamma(4, 3)$. Αν η εξίσωση της ευθείας AB είναι $y = 2x + 1$ και του ύψους $A\Delta$ είναι $y = x - 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B

Εξάσκηση 17

Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της ευθείας $\varepsilon : y = -2x + 1$ από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια την ελάχιστη απόσταση του σημείου O από τα σημεία της ευθείας ε

Εξάσκηση 18

Να βρείτε το συμμετρικό σημείο του σημείου $A(5, 4)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon : y = -4x + 7$

Εξάσκηση 19

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(1, 2)$. Το ύψος και η διάμεσος από μία κορυφή του τριγώνου έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ και $y = x$. Να βρείτε τις άλλες κορυφές και το βαρύκεντρο του τριγώνου

Εξάσκηση 20

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$, $B\Gamma : y = 2x + 5$ και η διάμεσος BM έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Να βρείτε:

- 1 τις συντεταγμένες του σημείου Γ
- 2 την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$

Εξάσκηση 21

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 2)$ και $B(3, 1)$. Να βρείτε το σημείο M της ευθείας $\varepsilon : y = x + 3$, τέτοιο ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στην κορυφή M

Εξάσκηση 22

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB : y = 2x$ και $A\Gamma : y = 3x - 1$. Αν το σημείο $M(1, 0)$ είναι μέσον της πλευράς $B\Gamma$

Εξάσκηση 23

Θεωρούμε το σημείο $A(2, 1)$ και το συμμετρικό του A' ως προς τον άξονα $x'x$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OA'} = 2$$

όπου M' το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 24

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ όταν:

- ① $M(\lambda - 1, 2\lambda - 3), \lambda \in \mathbb{R}$
- ② $M(-3, \lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$
- ③ $M(\lambda^2 + 1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
- ④ $M(-3, \eta\mu\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 25

Αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ κινείται στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 4$, να βρείτε πού κινείται το σημείο $N\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

Εξάσκηση 26

Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3 - \sigma \nu^2 \theta, 1 - \eta \mu^2 \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, κινείται σε σταθερή ευθεία.