

# Συναρτήσεις

## Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0$

Κωνσταντίνος Λόλας

Στο άπειρο λοιπόν...



# Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

# Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

Ορισμός απείρου

Αν για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  μπορώ να βρώ  $m \in A$  ώστε  $m > k$ , τότε λέμε ότι το  $A$  έχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς.

# Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

Ορισμός απείρου

Αν για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  μπορώ να βρώ  $m \in A$  ώστε  $m > k$ , τότε λέμε ότι το  $A$  έχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς.

άρα

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $x_0 \in A$  ώστε για κάθε  $x$  σε κατάλληλη περιοχή γύρω από το  $x_0$  να ισχύει  $f(x) > k$

# Ελληνικά!

## Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο άπειρο αν μεγαλώνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

# Ελληνικά!

## Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο άπειρο αν μεγαλώνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

ΜΟΝΟ ΕΓΩ θα επιτρέπεται να γράφω σκέτο  $\infty$  και θα εννοώ  $+\infty$  και εννοείται επειδή ξεχνάω!

# Το άλλο άπειρο?

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο μείον άπειρο αν μικραίνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



# Το άλλο άπειρο?

## Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο μείον άπειρο αν μικραίνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Αυτό δεν μπορώ να το παραβλέψω και αναγκαστικά το γράφω και εγώ!

# Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο  $+\infty$ .

# Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο  $+\infty$ . Πάμε...

# Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο  $+\infty$ . Πάμε...

- $\frac{1}{x}$
- $\frac{1}{x^2}$
- $\frac{1}{x^{2k}}$
- $\frac{1}{x^{2k+1}}$
- $\ln x$
- $\varepsilon\varphi(x)$

# Το άπειρο δεν είναι παιχνίδι (part 1)

Γρίφος time!

- Υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια.
- Έρχεται ένας ταλαιπωρημένος οδηγός και ζητάει δωμάτιο!!!!
- Ο ξενοδόχος του λέει ότι όλα τα δωμάτια είναι κατελημένα και δεν έχει ελεύθερο.
- Επειδή ο οδηγός είστε εσείς και κάνετε μαθηματικά με τον Λόλα, του δίνετε την λύση και τελικά παίρνετε το δωμάτιο 4.
- Προτείνετε μία λύση

## Το άπειρο δεν είναι παιχνίδι (part 2)

Μπορώ πολύ εύκολα να αποδείξω ότι  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$



# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?



# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?
- πολλαπλασιάσω με 0?

# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?
- πολλαπλασιάσω με 0?
- διαιρέσω με άλλο τόσο?



# Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?
- πολλαπλασιάσω με 0?
- διαιρέσω με άλλο τόσο?

Άρα προσοχή σε όσα δεν ορίζονται!

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a =$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a =$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a =$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} =$



# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} =$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $(+\infty)^a =$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} =$$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

$$\bullet a^{-\infty} =$$



# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

$$\bullet a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

# Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου  $a \in \mathbb{R}$  και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

$$\bullet a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Κρατάμε τα  $\infty \cdot 0, \infty^0, 1^{\pm\infty}$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

●  $+\infty + +\infty =$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

●  $+\infty + +\infty = +\infty$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) =$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) =$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$



# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty =$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} =$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$
- $(+\infty)^{+\infty} =$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
- $(+\infty)^{-\infty} =$

# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$

- $-\infty + (-\infty) = -\infty$

- $+\infty + (-\infty) = ?$

- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$

- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

- $(+\infty)^{-\infty} = 0$



# Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$

- $-\infty + (-\infty) = -\infty$

- $+\infty + (-\infty) = ?$

- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$


- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$

- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

- $(+\infty)^{-\infty} = 0$


Κρατάμε τα  $\infty \cdot 0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^{\pm\infty}$ ,  $+\infty + (-\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$

# Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):


●  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):


- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} |f(x)|$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ . Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} |f(x)|$  και  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)-3}$  και  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

①  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

1  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$

2  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

1  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$

2  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$

3  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2}$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

- 1  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$
- 2  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$
- 3  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2}$
- 4  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sqrt{x}}{x}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε, (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x^2-1}$

# Εξάσκηση

Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda x + \lambda}{(x-2)^2}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για την οποία το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + x - 2}{x^2 - x}$  είναι πραγματικός αριθμός

# Εξάσκηση

Έστω μια συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) \leq x - \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω μια συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) \leq x - \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τα όρια:

- 1  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)-3|}{f^2(x)-3f(x)}$

# Εξάσκηση

Αν για μια συνάρτηση ισχύει:

$$|x - 2|f(x) \geq x - 1 \text{ για κάθε } x \neq 2$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

# Εξάσκηση

Αν για μια συνάρτηση ισχύει:

$$|x - 2|f(x) \geq x - 1 \text{ για κάθε } x \neq 2$$

Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)}$



# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 1$ . Να βρείτε τα όρια

①  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 1$ . Να βρείτε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{f(x)}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια.

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\eta\mu x| - |x|}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια.

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\eta\mu x| - |x|}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση