

# Συναρτήσεις

## Θεώρημα Rolle

Κωνσταντίνος Λόλας

# Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιο εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- 1 το θεώρημα... γελοίο
- 2 οι εφαρμογές... πφφφφ
- 3 οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- 4 όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

# Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιά εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- 1 το θεώρημα... γελοίο
- 2 οι εφαρμογές... πφφφφ
- 3 οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- 4 όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

# Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιά εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- 1 το θεώρημα... γελοίο
- 2 οι εφαρμογές... πφφφφ
- 3 οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- 4 όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

# Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιο εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- 1 το θεώρημα... γελοίο
- 2 οι εφαρμογές... πφφφφ
- 3 οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- 4 όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

# But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

- ① μονοτονία
- ② ακρότατα
- ③ αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

# But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

- ① μονοτονία
- ② ακρότατα
- ③ αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

# But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

- ① μονοτονία
- ② ακρότατα
- ③ αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ



# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των  $x$  τις  $\alpha$  και  $\beta$
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με  $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

# Θεώρημα Rolle

## Θεώρημα Rolle

Έστω μία συνάρτηση  $f$ :

- συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  με  $f'(\xi) = 0$



# Συμπεράσματα

- 1 ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
- 2 ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
- 3 έχει περίεργες προϋποθέσεις

# Συμπεράσματα

- 1 ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
- 2 ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
- 3 έχει περίεργες προϋποθέσεις

# Συμπεράσματα

- ① ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
- ② ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
- ③ έχει περίεργες προϋποθέσεις

# Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

- 1 βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
- 2 βρίσκουμε πλήθος ριζών
- 3 βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

# Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

- 1 βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
- 2 βρίσκουμε πλήθος ριζών
- 3 βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ??????????

# Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

- 1 βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
- 2 βρίσκουμε πλήθος ριζών
- 3 βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

## Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

### Άσκηση 22

Αν για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  με  $\alpha < \beta$  ισχύει  $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}$  να δείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ετερόσημοι

### Άσκηση 24

Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $[2, 3]$  με  $2f(3) = 3f(2)$ . Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (2, 3)$  ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

## Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

### Άσκηση 22

Αν για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  με  $\alpha < \beta$  ισχύει  $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}$  να δείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ετερόσημοι

### Άσκηση 24

Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $[2, 3]$  με  $2f(3) = 3f(2)$ . Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (2, 3)$  ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle



## Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

### Άσκηση 22

Αν για τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  με  $\alpha < \beta$  ισχύει  $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}$  να δείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ετερόσημοι

### Άσκηση 24

Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $[2, 3]$  με  $2f(3) = 3f(2)$ . Να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (2, 3)$  ώστε  $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- ❶ Να δείξετε ότι η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο  $\Delta = [0, 3]$
- ❷ Να βρείτε τα  $\xi \in (0, 3)$  για τα οποία ισχύει  $f'(\xi) = 0$

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο  $\Delta = [0, 3]$
- 2 Να βρείτε τα  $\xi \in (0, 3)$  για τα οποία ισχύει  $f'(\xi) = 0$

## Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 2)\eta\mu x$ . Να αποδείξετε ότι:

- 1 Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(2, \pi)$
- 2 Η εξίσωση  $\varepsilon\varphi x = 2 - x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(2, \pi)$

## Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 2)\eta\mu x$ . Να αποδείξετε ότι:

- 1 Η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(2, \pi)$
- 2 Η εξίσωση  $\varepsilon\varphi x = 2 - x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(2, \pi)$

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

- ① Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 0)$  και μία τουλάχιστον στο διάστημα  $(0, 1)$
- ② Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

- ① Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 0)$  και μία τουλάχιστον στο διάστημα  $(0, 1)$
- ② Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$

## Εξάσκηση 4

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει μία το πολύ ρίζα



## Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

- 1 Να αποδείξετε ότι για την  $f$  ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο  $[0, 1]$
- 2 Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο το πολύ ρίζες
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

## Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

- 1 Να αποδείξετε ότι για την  $f$  ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο  $[0, 1]$
- 2 Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο το πολύ ρίζες
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

## Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

- ① Να αποδείξετε ότι για την  $f$  ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο  $[0, 1]$
- ② Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει δύο το πολύ ρίζες
- ③ Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

## Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(2x)$ . Να δείξετε ότι η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Rolle στο διάστημα  $[0, \pi]$  και στη συνέχεια, να βρείτε όλα τα  $\xi \in (0, \pi)$  για τα οποία ισχύει  $f'(\xi) = 0$

## Εξάσκηση 7

Αν  $0 < \alpha < \beta$  και  $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ , να δείξετε ότι:

- 1 Για τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο  $[\alpha, \beta]$
- 2  $1 < \alpha < e < \beta$

# Εξάσκηση 7

Αν  $0 < \alpha < \beta$  και  $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ , να δείξετε ότι:

- ① Για τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο  $[\alpha, \beta]$
- ②  $1 < \alpha < e < \beta$

## Εξάσκηση 8

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1

## Εξάσκηση 9

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $f'(x) \neq 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $1 < f(x) < 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 1)$  ώστε  $f(x_0) = x_0^2 + 1$



## Εξάσκηση 10

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα  $x'x$  στα σημεία  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 2$ . Να αποδείξετε ότι:

- Για την συνάρτηση  $G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$  εφαρμόζεται το θ. Rolle στο  $[1, 2]$
- Υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  να διέρχεται από το σημείο  $A(3, 0)$