

Συναρτήσεις

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Κωνσταντίνος Λόλας

Στο άπειρο λοιπόν...



Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

Ορισμός απείρου

Αν για κάθε $k \in \mathbb{R}$ μπορώ να βρώ $m \in A$ ώστε $m > k$, τότε λέμε ότι το A έχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς.

Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

Ορισμός απείρου

Αν για κάθε $k \in \mathbb{R}$ μπορώ να βρώ $m \in A$ ώστε $m > k$, τότε λέμε ότι το A έχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς.

άρα

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε $k \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε για κάθε x σε κατάλληλη περιοχή γύρω από το x_0 να ισχύει $f(x) > k$

Ελληνικά!

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι τείνει στο άπειρο αν μεγαλώνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο x_0 . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Ελληνικά!

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι τείνει στο άπειρο αν μεγαλώνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο x_0 . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

ΜΟΝΟ ΕΓΩ θα επιτρέπεται να γράφω σκέτο ∞ και θα εννοώ $+\infty$ και εννοείται επειδή ξεχνάω!

Το άλλο άπειρο?

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι τείνει στο μείον άπειρο αν μικραίνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο x_0 . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Το άλλο άπειρο?

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι τείνει στο μείον άπειρο αν μικραίνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο x_0 . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Αυτό δεν μπορώ να το παραβλέψω και αναγκαστικά το γράφω και εγώ!

Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο $+\infty$.

Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο $+\infty$. Πάμε...

Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο $+\infty$. Πάμε...

- $\frac{1}{x}$
- $\frac{1}{x^2}$
- $\frac{1}{x^{2k}}$
- $\frac{1}{x^{2k+1}}$
- $\ln x$
- $\varepsilon\varphi(x)$

Το άπειρο δεν είναι παιχνίδι (part 1)

Γρίφος time!

- Υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια.
- Έρχεται ένας ταλαιπωρημένος οδηγός και ζητάει δωμάτιο!!!!
- Ο ξενοδόχος του λέει ότι όλα τα δωμάτια είναι κατελημένα και δεν έχει ελεύθερο.
- Επειδή ο οδηγός είστε εσείς και κάνετε μαθηματικά με τον Λόλα, του δίνετε την λύση και τελικά παίρνετε το δωμάτιο 4.
- Προτείνετε μία λύση

Το άπειρο δεν είναι παιχνίδι (part 2)

Μπορώ πολύ εύκολα να αποδείξω ότι $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$



Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?
- πολλαπλασιάσω με 0?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?
- πολλαπλασιάσω με 0?
- διαιρέσω με άλλο τόσο?

Τι θα ήταν τα μαθηματικά χωρίς πράξεις

Μα, μα, μα... Είπαμε δεν είναι αριθμός!, αλλά, αν μπορώ να μεγαλώνω συνέχεια και...

- προσθέσω έναν αριθμό?
- αφαιρέσω έναν αριθμό?
- πολλαπλασιάσω με αριθμό πάνω από 1?
- διαιρέσω με αριθμό?
- υψώσω σε δύναμη?
- πολλαπλασιάσω με άλλο τόσο?
- αφαιρέσω άλλο τόσο?
- πολλαπλασιάσω με 0?
- διαιρέσω με άλλο τόσο?

Άρα προσοχή σε όσα δεν ορίζονται!

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a =$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a =$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a =$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} =$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} =$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $(+\infty)^a =$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

- $\pm\infty + a = \pm\infty$

- $\pm\infty - a = \pm\infty$

- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

- $\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$

- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$

- $(+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} =$$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

$$\bullet a^{-\infty} =$$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

$$\bullet a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Ας τα δούμε ΟΛΑ

όπου $a \in \mathbb{R}$ και δεν προκύπτει από όριο, δηλαδή είναι αριθμός

$$\bullet \pm\infty + a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty - a = \pm\infty$$

$$\bullet \pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\bullet (+\infty)^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ ?, & a = 0 \end{cases}$$

$$\bullet a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

$$\bullet a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq a < 1 \\ ?, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

Κρατάμε τα $\infty \cdot 0, \infty^0, 1^{\pm\infty}$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

● $+\infty + +\infty =$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

● $+\infty + +\infty = +\infty$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) =$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) =$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty =$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} =$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$
- $(+\infty)^{+\infty} =$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
- $(+\infty)^{-\infty} =$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $+\infty + (-\infty) = ?$
- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
- $(+\infty)^{-\infty} = 0$

Και παιχνίδι με τα $\pm\infty$

- $+\infty + +\infty = +\infty$

- $-\infty + (-\infty) = -\infty$

- $+\infty + (-\infty) = ?$

- $\pm\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$


- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$

- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

- $(+\infty)^{-\infty} = 0$


Κρατάμε τα $\infty \cdot 0$, ∞^0 , $1^{\pm\infty}$, $+\infty + (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$

Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):


● $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):


- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} |f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

Εξάσκηση

Στο σχήμα  φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|, \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} |f(x)|$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)-3}$ και $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{f(x)}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

① $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

$$\begin{aligned} 1 & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} \\ 2 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2} \\ 3 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2} \end{aligned}$$

Εξάσκηση

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

- 1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$
- 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2}$
- 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sqrt{x}}{x}$

Εξάσκηση

Να βρείτε, (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x^2-1}$

Εξάσκηση

Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda x + \lambda}{(x-2)^2}$

Εξάσκηση

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + x - 2}{x^2 - x}$ είναι πραγματικός αριθμός

Εξάσκηση

Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \leq x - \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Εξάσκηση

Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \leq x - \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τα όρια:

- 1 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)-3|}{f^2(x)-3f(x)}$

Εξάσκηση

Αν για μια συνάρτηση ισχύει:

$$|x - 2|f(x) \geq x - 1 \text{ για κάθε } x \neq 2$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Εξάσκηση

Αν για μια συνάρτηση ισχύει:

$$|x - 2|f(x) \geq x - 1 \text{ για κάθε } x \neq 2$$

Να βρείτε τα όρια:

1 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)}$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 1$. Να βρείτε τα όρια

① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 1$. Να βρείτε τα όρια

1 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{f(x)}$

Εξάσκηση

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια.

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\eta\mu x| - |x|}$

Εξάσκηση

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια.

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{|\eta\mu x| - |x|}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση