

# Συναρτήσεις

## Πράξεις ορίων

Κωνσταντίνος Λόλας

## Υπολογισμοί ορίων

## Γραφικά



## Υπολογισμός ορίου



## Πράξεις με όρια



Ιδιότητες  
ορίων



## Κριτήριο παρεμβολής



## Αντικατάσταση σε όρια



## Κατανόηση ορισμού ορίου



# Πρόσημο

## Θεώρημα 1ο

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε

# Πρόσημο

## Θεώρημα 1ο

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$

# Πρόσημο

## Θεώρημα 1ο

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

# Διάταξη

## Θεώρημα 2ο

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

# Από κάπου να ποιαστούμε?

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

# Και υπολογίζουμε...

ΜΟΝΟ αν υπάρχουν τα όρια των  $f$  και  $g$  τότε

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$  εννοείται ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ , εννοείται ότι  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$



# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$

# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , η πρώτη σας απόδειξη!!!

# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή

# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$

# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$

# Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$



## Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Έστω οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , κοντά στο  $x_0$

## Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Έστω οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , κοντά στο  $x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k \in \mathbb{R}$ ,

## Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Έστω οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , κοντά στο  $x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k \in \mathbb{R}$ ,

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$

# Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1,$

# Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

① Θέτουμε  $u = g(x)$

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

- 1 Θέτουμε  $u = g(x)$
- 2 Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$



# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

- 1 Θέτουμε  $u = g(x)$
- 2 Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 3 Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $k = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

- ① Θέτουμε  $u = g(x)$
- ② Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- ③ Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $k = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$

Τότε αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε προφανώς  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = k$

# Εξάσκηση

Αν για τις συναρτήσεις  $f, g$  ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$$

να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) + f(x) \cdot g(x))$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-x} \right)$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

①  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$



# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x - 4, & 1 < x < 2 \\ 2x - 1, & x > 2 \end{cases}$ . Να βρείτε (αν

υπάρχουν) τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x - 4, & 1 < x < 2. \end{cases}$  Να βρείτε (αν

υπάρχουν) τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x - 4, & 1 < x < 2 \\ 2x - 1, & x > 2 \end{cases}$ . Να βρείτε (αν

υπάρχουν) τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

③  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ .

① Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ .

- 1 Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- 2 Να βρείτε το  $a$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$



# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha \sin x + \eta \mu x - \beta, & x < 0 \\ \alpha \sqrt{x+1} + 2\beta, & x \geq 0 \end{cases}$ . Να βρείτε  
τα  $\alpha$  και  $\beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει  $|f(x) - 2| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει  $|f(x) - 2| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ③ Αν ισχύει  $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x))$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ , όταν ισχύει:

$$2x - 3x^2 \leq f(x) \leq x^4 + 2x$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$



# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \epsilon\varphi x$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \left( x\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \left( x\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{\eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{\eta \mu x}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$



# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x^2 + x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x^2 + x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x - \eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x^2 + x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x - \eta \mu x}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\pi - x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\pi - x}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$$



# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x-1}}{x^2 - \sqrt{x}}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2}$$

# Εξάσκηση

Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2\eta\mu f(x)}{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu f(x)}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ .

Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)-1}{x}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ .

Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)-1}{x}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)-f(2x)}{x}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$

2  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

# Εξάσκηση

Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2-x+1)-3}{x-1}$



# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  όταν:

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$  και  $x_0 = 2$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  όταν:

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$  και  $x_0 = 2$

②  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3$  και  $x_0 = 2$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  όταν:

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$  και  $x_0 = 2$

②  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3$  και  $x_0 = 2$

③  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)+\eta\mu x}{x} = 2$  και  $x_0 = 0$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

① Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

- 1 Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 2 Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + x f(x) + x \eta \mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta \mu^2 x}$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$① \quad f(x) = \sqrt{|x| - |\eta\mu x|}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$① \quad f(x) = \sqrt{|x| - |\eta\mu x|}$$

$$② \quad f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x - x^2}$$

# Εξάσκηση

Να λύσετε την εξίσωση  $|\eta\mu x| = |\pi - x|$



# Εξάσκηση

1 Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu(x^2 + x) - x^2 = x$

# Εξάσκηση

- ① Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu(x^2 + x) - x^2 = x$
- ② Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x + 3\frac{\eta\mu x}{x}$ . Να αποδείξετε ότι

$$2x - 3 < f(x) < 2x + 3 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση