

Συναρτήσεις

Παράγωγος

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Μαγεία

Ξέρετε τι είναι η κλίση...

- ευθείας
- καμπύλης?

Μαγεία

Ξέρετε τι είναι η κλίση...

- ευθείας
- καμπύλης?

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω $(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0})$
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Κλίση σε σημείο = Παράγωγος

Ας παίξουμε Geogebra

Ορισμός

Παράγωγος

Εστω μια συνάρτηση f . Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ και γράφουμε $f'(x_0)$ αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Με αντικατάσταση $x = x_0 + h$

Άλλος τύπος

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ορισμός

Παράγωγος

Εστω μια συνάρτηση f . Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ και γράφουμε $f'(x_0)$ αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Με αντικατάσταση $x = x_0 + h$

Άλλος τύπος

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Αμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Θεώρημα

Παράγωγος \rightarrow Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

$$\text{Έχω } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Θέτω } g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = g(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + f(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Θεώρημα

Παράγωγος \rightarrow Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

$$\text{Έχω } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Θέτω } g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = g(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) + f(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Θεώρημα

Παράγωγος \rightarrow Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Αρα Συνέχεια \nrightarrow Παράγωγος

Θεώρημα

Παράγωγος \rightarrow Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Αρα Συνέχεια \nrightarrow Παράγωγος

Θεώρημα

Παράγωγος \rightarrow Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Αρα Συνέχεια \nrightarrow Παράγωγος

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\frac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\frac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\frac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 εφόσον υπάρχει

① $f(x) = 1 + \eta\mu x, x_0 = 0$

② $f(x) = \sqrt{x-1}, x_0 = 1$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 εφόσον υπάρχει

① $f(x) = 1 + \eta\mu x, x_0 = 0$

② $f(x) = \sqrt{x-1}, x_0 = 1$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x + 1 - x\eta\mu|x|$, στο σημείο $x_0 = 0$.

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, όταν

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, όταν

$$① \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Εξάσκηση 4

Αν $x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την

$$\frac{df(0)}{dx}$$

Εξάσκηση 5

Αν για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(3 + h) = 2 + h^2 + \eta \mu h, \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$ και να βρείτε την $f'(3)$.

Εξάσκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\eta\mu^2x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Εξάσκηση 7

Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεις στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = |x - 1| + 3x - 2, \text{ αν } x_0 = 1$$

Εξάσκηση 7

Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεις στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ αν } x_0 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = |x - 1| + 3x - 2, \text{ αν } x_0 = 1$$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε τις τιμές των α και β , για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + 1, & x \leq 1 \\ \beta x + 3, & x > 1 \end{cases}, \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1$$

Εξάσκηση 9

Εστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$

Εξάσκηση 9

Εστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$

Εξάσκηση 9

Εστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(3) = 0$ και $f'(3) = 5$. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2x - 1)}{x - 2}$$

Εξάσκηση 11

Εστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} x f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f'(1), \text{ αν } f(1) = 0$$

Εξάσκηση 11

Εστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f'(1), \text{ αν } f(1) = 0$$

Εξάσκηση 11

Εστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f'(1), \text{ αν } f(1) = 0$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h) - 2}{h} = 8$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2x \right]$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h) - 2}{h} = 8$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2x \right]$$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2h) - 2}{h} = 8$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f \left(\frac{x+1}{x} \right) - 2x \right]$$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

① Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

② $f'(1) = 3$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

① Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

② $f'(1) = 3$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

Εξάσκηση 13

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

- ① Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
- ② $f'(1) = 3$
- ③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

Εξάσκηση 14

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ και ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$