

# Συναρτήσεις

## Ασύμπτωτες

Κωνσταντίνος Λόλας

# Ναι αλλά "καταλήγουμε" κάπου?

Σχεδόν τελειώσαμε την σχεδίαση. Έμεινε να δούμε, αν πλησιάζουμε σε ευθείες και πότε!

# Ζωγραφική 1 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που να τείνει να γίνει η ευθεία  $x = 1$   
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο  $x \rightarrow 1$ ?

## Ζωγραφική 1 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που να τείνει να γίνει η ευθεία  $x = 1$   
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο  $x \rightarrow 1$ ?

# Κατακόρυφη ασύμπτωτη

## Ορισμός

Η  $x = x_0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$  αν ένα τουλάχιστον από τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$ .

## Ζωγραφική 2 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία  $y = 1$   
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο  $x \rightarrow +\infty$ ?

## Ζωγραφική 2 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία  $y = 1$   
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο  $x \rightarrow +\infty$ ?

# Οριζόντια ασύμπτωτη

## Ορισμός

Η  $y = a$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$$

και αντίστοιχα

## Ορισμός

Η  $y = a$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$  αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$



## Ζωγραφική 3 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία  $y = 2x + 1$   
Προσπαθήστε να ορίσετε συνθήκη για να είναι μία ευθεία  
ασύμπτωτη της  $f(x)$

## Ζωγραφική 3 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία  $y = 2x + 1$   
Προσπαθήστε να ορίσετε συνθήκη για να είναι μία ευθεία  
ασύμπτωτη της  $f(x)$

# Πλάγια ασύμπτωτη

## Ορισμός

Η  $y = ax + b$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

και αντίστοιχα

## Ορισμός

Η  $y = ax + b$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$  αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

# Μην μπερδεύουμε μόνο

- η ασύμπτωτη με  $a = 0$  ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με  $a \neq 0$  ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το  $a$  ονομάζεται κατακόρυφη

# Μην μπερδεύουμε μόνο

- η ασύμπτωτη με  $a = 0$  ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με  $a \neq 0$  ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το  $a$  ονομάζεται κατακόρυφη

# Μην μπερδεύουμε μόνο

- η ασύμπτωτη με  $a = 0$  ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με  $a \neq 0$  ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το  $a$  ονομάζεται κατακόρυφη

## Και λίγοι υπολογισμοί

Ξέροντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

να βρείτε τα  $a$  και  $b$ .

Πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία  $y = ax + b$  λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

## Και λίγοι υπολογισμοί

Ξέροντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

να βρείτε τα  $a$  και  $b$ .

Πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία  $y = ax + b$  λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$



# Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

# Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

# Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

# Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

①  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

②  $f(x) = \frac{x}{x-2}$

③  $f(x) = \varepsilon\varphi x$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

$$① \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$② \quad f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$③ \quad f(x) = \varepsilon\varphi x$$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

$$① \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$② \quad f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$③ \quad f(x) = \varepsilon\varphi x$$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

2  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

3  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

4  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$



## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$① \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$② \quad f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$③ \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$④ \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$① \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$② \quad f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$③ \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$④ \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$① \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$② \quad f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$③ \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$④ \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- 1 Να βρείτε στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$  τις ασύμπτωτες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα της  $C_f$
- 2 Να δείξετε ότι η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $\varepsilon_1$  κοντά στο  $+\infty$  και πάνω από την  $\varepsilon_2$  κοντά στο  $-\infty$

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- ① Να βρείτε στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$  τις ασύμπτωτες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα της  $C_f$
- ② Να δείξετε ότι η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $\varepsilon_1$  κοντά στο  $+\infty$  και πάνω από την  $\varepsilon_2$  κοντά στο  $-\infty$

## Εξάσκηση 4

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$g(x) = f(x) - 2x + \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία  $y = 3x - 2$  η οποία είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

- ❶ Να βρείτε την ασύμπτωτη της  $C_g$  στο  $+\infty$
- ❷ Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1$$

## Εξάσκηση 4

Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$g(x) = f(x) - 2x + \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία  $y = 3x - 2$  η οποία είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

- ❶ Να βρείτε την ασύμπτωτη της  $C_g$  στο  $+\infty$
- ❷ Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1$$

## Εξάσκηση 5

Να δείξετε ότι η ευθεία  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$  στο  $+\infty$



## Εξάσκηση 6

Να βρείτε τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο  $+\infty$  των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

①  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$

②  $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο  $+\infty$  των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$$

## Εξάσκηση 7

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2a}{x - a^2}$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η ευθεία  $\varepsilon : x = 1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$

## Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{a^2 x^n + 5x + 1}{x^2 + 1}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $a \in \mathbb{R}^*$  και  $n \in \mathbb{N} - 0, 1$  για τις οποίες η ευθεία  $\varepsilon : y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

## Εξάσκηση 9

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta \in \mathbb{R}$ , ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 1} - x \right) = 2$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

# Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία



# Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία

## Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η  $f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0$  με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα  $f'(x) < f'(x_0)$  για κάθε  $x < x_0$  και  $f'(x) > f'(x_0)$  για κάθε  $x > x_0$

Αφού  $f'$  παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα  $f''(x_0) = 0$  Πίσω στη θεωρία