

# Τριγωνομετρία

## Αναγωγή στο Α' Τεταρτημόριο

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

29 Ιανουαρίου 2026 — Έκδοση: 2.7

# Γιατί αναγωγή;

Το πρόβλημα: Πώς υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών εκτός του Α' τεταρτημορίου;

- $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$  (εύκολο!)
- $\eta\mu 150^\circ = ???$  (Β' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 210^\circ = ???$  (Γ' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 330^\circ = ???$  (Δ' τεταρτημόριο)
- Θα μάθουμε να τα φέρνουμε όλα στο Α' τεταρτημόριο!

# Γιατί αναγωγή;

Το πρόβλημα: Πώς υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών εκτός του Α' τεταρτημορίου;

- $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$  (εύκολο!)
- $\eta\mu 150^\circ = ???$  (Β' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 210^\circ = ???$  (Γ' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 330^\circ = ???$  (Δ' τεταρτημόριο)
- Θα μάθουμε να τα φέρνουμε όλα στο Α' τεταρτημόριο!

# Γιατί αναγωγή;

Το πρόβλημα: Πώς υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών εκτός του Α' τεταρτημορίου;

- $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$  (εύκολο!)
- $\eta\mu 150^\circ = ???$  (Β' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 210^\circ = ???$  (Γ' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 330^\circ = ???$  (Δ' τεταρτημόριο)
- Θα μάθουμε να τα φέρνουμε όλα στο Α' τεταρτημόριο!

# Γιατί αναγωγή;

Το πρόβλημα: Πώς υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών εκτός του Α' τεταρτημορίου;

- $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$  (εύκολο!)
- $\eta\mu 150^\circ = ???$  (Β' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 210^\circ = ???$  (Γ' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 330^\circ = ???$  (Δ' τεταρτημόριο)
- Θα μάθουμε να τα φέρνουμε όλα στο Α' τεταρτημόριο!

# Γιατί αναγωγή;

Το πρόβλημα: Πώς υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών εκτός του Α' τεταρτημορίου;

- $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$  (εύκολο!)
- $\eta\mu 150^\circ = ???$  (Β' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 210^\circ = ???$  (Γ' τεταρτημόριο)
- $\eta\mu 330^\circ = ???$  (Δ' τεταρτημόριο)
- Θα μάθουμε να τα φέρνουμε όλα στο Α' τεταρτημόριο!

# Η μαγική ιδέα

## Αναγωγή στο Α' Τεταρτημόριο

Κάθε γωνία μπορεί να γραφεί σε σχέση με μια γωνία του Α' τεταρτημορίου!

• Β' τεταρτημόριο:  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  ή  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

• Γ' τεταρτημόριο:  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ή  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

• Δ' τεταρτημόριο:  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  ή  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

Όλα μπορούν να αναχθούν στο  $0^\circ < \omega < 90^\circ$

# Η μαγική ιδέα

## Αναγωγή στο Α' Τεταρτημόριο

Κάθε γωνία μπορεί να γραφεί σε σχέση με μια γωνία του Α' τεταρτημορίου!

- Β' τεταρτημόριο:  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  ή  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
- Γ' τεταρτημόριο:  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ή  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
- Δ' τεταρτημόριο:  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  ή  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
- Όλες μπορούν να αναχθούν στο  $0^\circ < \omega < 90^\circ$



# Η μαγική ιδέα

## Αναγωγή στο Α' Τεταρτημόριο

Κάθε γωνία μπορεί να γραφεί σε σχέση με μια γωνία του Α' τεταρτημορίου!

- Β' τεταρτημόριο:  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  ή  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
- Γ' τεταρτημόριο:  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ή  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
- Δ' τεταρτημόριο:  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  ή  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
- Όλες μπορούν να αναχθούν στο  $0^\circ < \omega < 90^\circ$

# Η μαγική ιδέα

## Αναγωγή στο Α' Τεταρτημόριο

Κάθε γωνία μπορεί να γραφεί σε σχέση με μια γωνία του Α' τεταρτημορίου!

- Β' τεταρτημόριο:  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  ή  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
- Γ' τεταρτημόριο:  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ή  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
- Δ' τεταρτημόριο:  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  ή  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
- Όλες μπορούν να αναχθούν στο  $0^\circ < \omega < 90^\circ$

# Η μαγική ιδέα

## Αναγωγή στο Α' Τεταρτημόριο

Κάθε γωνία μπορεί να γραφεί σε σχέση με μια γωνία του Α' τεταρτημορίου!

- Β' τεταρτημόριο:  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  ή  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
- Γ' τεταρτημόριο:  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ή  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
- Δ' τεταρτημόριο:  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  ή  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
- Όλες μπορούν να αναχθούν στο  $0^\circ < \omega < 90^\circ$

# Παραπληρωματική γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Β' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ - \omega$  ή  $\theta = \pi - \omega$   
όπου  $\omega$  είναι η παραπληρωματική γωνία στο Α' τεταρτημόριο

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = +\eta\mu\omega$  (θετικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

# Παραπληρωματική γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Β' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ - \omega$  ή  $\theta = \pi - \omega$   
όπου  $\omega$  είναι η παραπληρωματική γωνία στο Α' τεταρτημόριο

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = +\eta\mu\omega$  (θετικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

# Παραπληρωματική γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Β' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ - \omega$  ή  $\theta = \pi - \omega$   
όπου  $\omega$  είναι η παραπληρωματική γωνία στο Α' τεταρτημόριο

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = +\eta\mu\omega$  (θετικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

# Παραπληρωματική γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Β' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ - \omega$  ή  $\theta = \pi - \omega$   
όπου  $\omega$  είναι η παραπληρωματική γωνία στο Α' τεταρτημόριο

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = +\eta\mu\omega$  (θετικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

# Παραπληρωματική γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Β' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ - \omega$  ή  $\theta = \pi - \omega$   
όπου  $\omega$  είναι η παραπληρωματική γωνία στο Α' τεταρτημόριο

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = +\eta\mu\omega$  (θετικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$



# Παραπληρωματική γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Β' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ - \omega$  ή  $\theta = \pi - \omega$   
όπου  $\omega$  είναι η παραπληρωματική γωνία στο Α' τεταρτημόριο

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = +\eta\mu\omega$  (θετικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

**Παράδειγμα:**  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

## Γ' Τεταρτημόριο

### Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Γ' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ + \omega$  ή  $\theta = \pi + \omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = +\epsilon\varphi\omega$  (θετικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

# Γ' Τεταρτημόριο

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Γ' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ + \omega$  ή  $\theta = \pi + \omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = +\epsilon\varphi\omega$  (θετικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

# Γ' Τεταρτημόριο

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Γ' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ + \omega$  ή  $\theta = \pi + \omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = +\epsilon\varphi\omega$  (θετικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

## Γ' Τεταρτημόριο

### Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Γ' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ + \omega$  ή  $\theta = \pi + \omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = +\epsilon\varphi\omega$  (θετικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

## Γ' Τεταρτημόριο

### Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Γ' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ + \omega$  ή  $\theta = \pi + \omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = +\epsilon\varphi\omega$  (θετικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

## Γ' Τεταρτημόριο

### Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Γ' τεταρτημόριο:  $\theta = 180^\circ + \omega$  ή  $\theta = \pi + \omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$  (αρνητικό!)
- $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = +\epsilon\varphi\omega$  (θετικό!)

**Παράδειγμα:**  $\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

# Αντίθετη γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Δ' τεταρτημόριο:  $\theta = -\omega$   
 όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

$$\circ \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega \text{ (αρνητικό!)}$$

$$\circ \sigma\upsilon\nu -\omega = +\sigma\upsilon\nu\omega \text{ (θετικό!)}$$

$$\circ \epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega \text{ (αρνητικό!)}$$

$$\text{Παράδειγμα: } \sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



# Αντίθετη γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Δ' τεταρτημόριο:  $\theta = -\omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu - \omega) = +\sigma\upsilon\nu\omega$  (θετικό!)
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Αντίθετη γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Δ' τεταρτημόριο:  $\theta = -\omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu - \omega = +\sigma\upsilon\nu\omega$  (θετικό!)
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Αντίθετη γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Δ' τεταρτημόριο:  $\theta = -\omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu - \omega) = +\sigma\upsilon\nu\omega$  (θετικό!)
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Αντίθετη γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Δ' τεταρτημόριο:  $\theta = -\omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu - \omega) = +\sigma\upsilon\nu\omega$  (θετικό!)
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

Παράδειγμα:  $\sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Αντίθετη γωνία

## Τύπος

Για γωνία  $\theta$  στο Δ' τεταρτημόριο:  $\theta = -\omega$   
όπου  $\omega$  είναι γωνία του Α' τεταρτημορίου

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$  (αρνητικό!)
- $\sigma\upsilon\nu - \omega) = +\sigma\upsilon\nu\omega$  (θετικό!)
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$  (αρνητικό!)

**Παράδειγμα:**  $\sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$

- $\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Παράδειγμα:  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$

- $\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$

Παράδειγμα:  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$

- $\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Παράδειγμα:  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$

- $\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Παράδειγμα:  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$

- $\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$

- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$

Παράδειγμα:  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$

Παράδειγμα:  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$

Παράδειγμα:  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# Ειδικές γωνίες - Το μυστικό όπλο!

Γωνίες που απλοποιούν τα πάντα:

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

**Παράδειγμα:**  $\eta\mu 60^\circ = \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

# One rule to rule them all

- 1 Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- 2 Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- 3 Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή

- 4 Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- 5 Βάλε το πρόσημο

# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή

$$\alpha = \pi \pm \omega$$

$$\alpha = \omega$$

$$\alpha = \pm \omega$$

$$\alpha = \pm \omega$$

- ④ Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο

# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή
  - $\pi \pm \omega$
  - $-\omega$
  - $\frac{\pi}{2} \pm \omega$
  - $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$
- ④ Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο



# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή
  - $\pi \pm \omega$
  - $-\omega$
  - $\frac{\pi}{2} \pm \omega$
  - $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$
- ④ Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο

# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή
  - $\pi \pm \omega$
  - $-\omega$
  - $\frac{\pi}{2} \pm \omega$
  - $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$
- ④ Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο

# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή
  - $\pi \pm \omega$
  - $-\omega$
  - $\frac{\pi}{2} \pm \omega$
  - $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$
- ④ Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο

# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή
  - $\pi \pm \omega$
  - $-\omega$
  - $\frac{\pi}{2} \pm \omega$
  - $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$
- ④ Αν από άξονα " $x'x''$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο

# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή
  - $\pi \pm \omega$
  - $-\omega$
  - $\frac{\pi}{2} \pm \omega$
  - $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$
- ④ Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο

# One rule to rule them all

- ① Βρες σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία
- ② Διάλεξε άξονα από τον οποίο θα ξεκινήσεις
- ③ Γράψε την γωνία στην κατάλληλη μορφή
  - $\pi \pm \omega$
  - $-\omega$
  - $\frac{\pi}{2} \pm \omega$
  - $\frac{3\pi}{2} \pm \omega$
- ④ Αν από άξονα " $x'x$ " κρατάμε το ίδιο, αλλιώς αλλάζουμε
- ⑤ Βάλε το πρόσημο

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις



Να υπολογίσετε τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών:

①  $\eta\mu 120^\circ$

②  $\sigma\upsilon\nu 150^\circ$

③  $\varepsilon\varphi 135^\circ$

④  $\eta\mu 210^\circ$

⑤  $\sigma\upsilon\nu 240^\circ$

⑥  $\varepsilon\varphi 300^\circ$

Να υπολογίσετε τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών:

①  $\eta\mu 120^\circ$

②  $\sigma\nu\nu 150^\circ$

③  $\varepsilon\varphi 135^\circ$

④  $\eta\mu 210^\circ$

⑤  $\sigma\nu\nu 240^\circ$

⑥  $\varepsilon\varphi 300^\circ$

Να υπολογίσετε τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών:

①  $\eta\mu 120^\circ$

②  $\sigma\nu\nu 150^\circ$

③  $\varepsilon\varphi 135^\circ$

④  $\eta\mu 210^\circ$

⑤  $\sigma\nu\nu 240^\circ$

⑥  $\varepsilon\varphi 300^\circ$

Να υπολογίσετε τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών:

①  $\eta\mu 120^\circ$

②  $\sigma\upsilon\nu 150^\circ$

③  $\varepsilon\varphi 135^\circ$

④  $\eta\mu 210^\circ$

⑤  $\sigma\upsilon\nu 240^\circ$

⑥  $\varepsilon\varphi 300^\circ$

Να υπολογίσετε τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών:

①  $\eta\mu 120^\circ$

②  $\sigma\upsilon\nu 150^\circ$

③  $\varepsilon\varphi 135^\circ$

④  $\eta\mu 210^\circ$

⑤  $\sigma\upsilon\nu 240^\circ$

⑥  $\varepsilon\varphi 300^\circ$

Να υπολογίσετε τις τιμές των τριγωνομετρικών αριθμών:

①  $\eta\mu 120^\circ$

②  $\sigma\upsilon\nu 150^\circ$

③  $\varepsilon\varphi 135^\circ$

④  $\eta\mu 210^\circ$

⑤  $\sigma\upsilon\nu 240^\circ$

⑥  $\varepsilon\varphi 300^\circ$

Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής:

①  $\eta\mu\frac{2\pi}{3}$

②  $\sigma\nu\nu\frac{3\pi}{4}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6}$

④  $\eta\mu\frac{7\pi}{6}$

⑤  $\sigma\nu\nu\frac{5\pi}{3}$

Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής:

①  $\eta\mu\frac{2\pi}{3}$

②  $\sigma\nu\nu\frac{3\pi}{4}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6}$

④  $\eta\mu\frac{7\pi}{6}$

⑤  $\sigma\nu\nu\frac{5\pi}{3}$



Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής:

①  $\eta\mu\frac{2\pi}{3}$

②  $\sigma\nu\nu\frac{3\pi}{4}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6}$

④  $\eta\mu\frac{7\pi}{6}$

⑤  $\sigma\nu\nu\frac{5\pi}{3}$

Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής:

①  $\eta\mu\frac{2\pi}{3}$

②  $\sigma\nu\nu\frac{3\pi}{4}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6}$

④  $\eta\mu\frac{7\pi}{6}$

⑤  $\sigma\nu\nu\frac{5\pi}{3}$

Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής:

①  $\eta\mu\frac{2\pi}{3}$

②  $\sigma\nu\nu\frac{3\pi}{4}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6}$

④  $\eta\mu\frac{7\pi}{6}$

⑤  $\sigma\nu\nu\frac{5\pi}{3}$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

①  $\eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)$

②  $\varepsilon\varphi(360^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$

③  $\frac{\eta\mu(\pi-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi+x)}{\varepsilon\varphi(2\pi-x)}$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

①  $\eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)$

②  $\epsilon\varphi(360^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$

③  $\frac{\eta\mu(\pi-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi+x)}{\epsilon\varphi(2\pi-x)}$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\textcircled{1} \quad \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)$$

$$\textcircled{2} \quad \varepsilon\varphi(360^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\eta\mu(\pi-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi+x)}{\varepsilon\varphi(2\pi-x)}$$

Αν  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , να βρείτε τα:

①  $\sigma\upsilon\nu x$

②  $\epsilon\varphi x$

③  $\eta\mu(180^\circ - x)$

④  $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)$

Αν  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , να βρείτε τα:

①  $\sigma\upsilon\nu x$

②  $\epsilon\varphi x$

③  $\eta\mu(180^\circ - x)$

④  $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)$



Αν  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , να βρείτε τα:

①  $\sigma\upsilon\nu x$

②  $\varepsilon\varphi x$

③  $\eta\mu(180^\circ - x)$

④  $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)$

Αν  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , να βρείτε τα:

- ①  $\sigma\upsilon\nu x$
- ②  $\epsilon\varphi x$
- ③  $\eta\mu(180^\circ - x)$
- ④  $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu 120^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 210^\circ + \varepsilon\varphi 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$$

Να δείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \eta\mu(180^\circ - x) + \eta\mu(180^\circ + x) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma\upsilon\nu(360^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \varepsilon\varphi(180^\circ + x) \cdot \varepsilon\varphi(360^\circ - x) = -\varepsilon\varphi^2 x$$

Να δείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \eta\mu(180^\circ - x) + \eta\mu(180^\circ + x) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma\upsilon\nu(360^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \varepsilon\varphi(180^\circ + x) \cdot \varepsilon\varphi(360^\circ - x) = -\varepsilon\varphi^2 x$$

Να δείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \quad \eta\mu(180^\circ - x) + \eta\mu(180^\circ + x) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma\upsilon\nu(360^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \varepsilon\varphi(180^\circ + x) \cdot \varepsilon\varphi(360^\circ - x) = -\varepsilon\varphi^2 x$$

Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

①  $A = \eta\mu 100^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 200^\circ$

②  $B = \varepsilon\varphi 150^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$

③  $\Gamma = \eta\mu 250^\circ \cdot \varepsilon\varphi 320^\circ$

Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

①  $A = \eta\mu 100^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 200^\circ$

②  $B = \varepsilon\varphi 150^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$

③  $\Gamma = \eta\mu 250^\circ \cdot \varepsilon\varphi 320^\circ$



Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

①  $A = \eta\mu 100^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 200^\circ$

②  $B = \varepsilon\varphi 150^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$

③  $\Gamma = \eta\mu 250^\circ \cdot \varepsilon\varphi 320^\circ$

Να υπολογίσετε χωρίς αριθμομηχανή:

$$A = \eta\mu^2 150^\circ + \sigma\nu\nu^2 150^\circ + \varepsilon\varphi 135^\circ \cdot \sigma\varphi 135^\circ$$

Αν  $\sin x = -\frac{5}{13}$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , να υπολογίσετε:

- ① τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς του  $x$
- ② το  $\eta\mu(\pi - x)$
- ③ το  $\sin(2\pi - x)$

Αν  $\sin x = -\frac{5}{13}$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , να υπολογίσετε:

- ① τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς του  $x$
- ② το  $\eta\mu(\pi - x)$
- ③ το  $\sin(2\pi - x)$

Αν  $\sin x = -\frac{5}{13}$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , να υπολογίσετε:

- ① τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς του  $x$
- ② το  $\eta\mu(\pi - x)$
- ③ το  $\sin(2\pi - x)$

Να λύσετε τις εξισώσεις στο  $[0, 2\pi]$ :

①  $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

②  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$

③  $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}$

Να λύσετε τις εξισώσεις στο  $[0, 2\pi]$ :

①  $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

②  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$

③  $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}$

Να λύσετε τις εξισώσεις στο  $[0, 2\pi]$ :

①  $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

②  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$

③  $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$