

# Συναρτήσεις

## Ρυθμός Μεταβολής

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

# Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- ❶ ακολουθούν κανόνες
  - ❷ είναι σαφώς ορισμένα
  - ❸ δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
  - ❹ δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
  - ❺ ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική
- Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

# Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
  - 2 είναι σαφώς ορισμένα
  - 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
  - 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
  - 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική
- Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

# Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

# Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

# Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

# Καλώς ορίσατε στα Oscar των μαθηματικών

Τα μαθηματικά είναι ωραία γιατί:

- 1 ακολουθούν κανόνες
- 2 είναι σαφώς ορισμένα
- 3 δεν δίνουν διαφορετικές ερμηνίες
- 4 δεν είναι για όλους, αλλά κυρίως
- 5 ενώ θα ήταν βαρετά από μόνα τους, εφαρμόζουν ΠΛΗΡΩΣ στη φυσική

Γι αυτό μάλιστα δεν αρέσουν σε όλους

# Ρυθμός μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής του μεγέθους  $A$

Είναι το πηλίκο

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}$$



# Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

$$\textcircled{1} \text{ μέση ταχύτητα } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

# Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

$$\textcircled{1} \text{ μέση ταχύτητα } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

# Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

$$\textcircled{1} \text{ μέση ταχύτητα } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

# Ερμηνίες

Καλός ο ορισμός αλλά μιλάει για μεταβολή ή πιο σωστά για μέση μεταβολή, π.χ.

$$\textcircled{1} \text{ μέση ταχύτητα } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Τι γίνεται με τη στιγμιαία ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη κτλ?

# Στιγμιαία λοιπόν

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

ή ποιά elegant

# Στιγμιαία λοιπόν

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

ή ποιο elegant

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F(t) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$\textcircled{4} \text{ ενέργεια } E(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{d(\int F dx)}{dt}$$

# Στιγμιαία λοιπόν

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

ή πιο elegant

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

# Στιγμαία λαιπόν

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

ή ποιό elegant

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = P'(t)$$



# Στιγμαία λαιπόν

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

ή ποιό elegant

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = P'(t)$$

# Στιγμαία λαιπόν

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

ή ποιό elegant

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = P'(t)$$

# Στιγμαία λοιπόν

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = \frac{dP}{dt}$$

ή ποιά elegant

$$\textcircled{1} \text{ ταχύτητα } v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ επιτάχυνση } a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ δύναμη } F = P'(t)$$

# Επιστροφή στα μαθηματικά!

Αν και δεν μου αρέσει, στα μαθηματικά ορίζεται

Ρυθμός μεταβολής του μεγέθους  $A$  ως προς την μεταβλητή  $B$

Είναι το πηλίκο

$$A'(B) = \frac{dA}{dB}$$

ή αλλιώς η παράγωγος του  $A$  ως προς το  $B$

# One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος! ΤΕΛΟΣ

- Αρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Αρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή

# One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος! ΤΕΛΟΣ

- Αρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Αρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή

# One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος! ΤΕΛΟΣ

- Αρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Αρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή

$$x' = x'$$

$$(x^2)' = 2xx'$$

$$(x^2)' = 2x \cdot x' = 2x \cdot 1 = 2x$$

# One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος! ΤΕΛΟΣ

- Αρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Αρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή

- $x' = x'$

- $(x^2)' = 2xx'$

- $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x}x'$



# One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος! ΤΕΛΟΣ

- Αρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Αρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
  - $x' = x'$
  - $(x^2)' = 2xx'$
  - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x}x'$

# One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος! ΤΕΛΟΣ

- Αρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Αρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
  - $x' = x'$
  - $(x^2)' = 2xx'$
  - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x} x'$

# One only rule

Σαν πολλά μας τα 'παν. Ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος! ΤΕΛΟΣ

- Αρα κάθε συνάρτηση αφού έχει παράγωγο έχει και ρυθμό μεταβολής
- Δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή πέρα από αυτή που παραγωγίζουμε
- Αρα όλα είναι συναρτήσεις εκτός από ΤΗΝ μεταβλητή
  - $x' = x'$
  - $(x^2)' = 2xx'$
  - $(xy + y^3 \ln x)' = x'y + xy' + 3y^2y' \ln x + y^3 \frac{1}{x} x'$

# Κύριε μας μπερδεύει ο συμβολισμός

Πολλοί, για να είναι σίγουροι κρατάνε το  $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  και γράφουνε πάντα τις συναρτήσεις. π.χ.

$$(x^2(t))' = \frac{dx^2(t)}{dt} = \frac{dx^2(t)}{dx(t)} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t)x'(t)$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

- ① Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της  $f$  ως προς το  $x$  στο σημείο με  $x = 1$
- ② Να βρείτε τις τιμές του  $x$ , που ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  ως προς το  $x$  είναι αρνητικός

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

- ① Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της  $f$  ως προς το  $x$  στο σημείο με  $x = 1$
- ② Να βρείτε τις τιμές του  $x$ , που ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  ως προς το  $x$  είναι αρνητικός



**2.** Το εμβαδό  $E$  ενός τετραγώνου αυξάνει. Η πλευρά του  $a$  σε cm, που αυξάνει, δίνεται από τον τύπο  $a = 3t + 2$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε sec.

- ❶ Να αποδείξετε ότι  $E = E(t) = (3t + 2)^2$
- ❷ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$  του τετραγώνου, όταν  $t = 2$  sec.

**2.** Το εμβαδό  $E$  ενός τετραγώνου αυξάνει. Η πλευρά του  $a$  σε cm, που αυξάνει, δίνεται από τον τύπο  $a = 3t + 2$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε sec.

- ① Να αποδείξετε ότι  $E = E(t) = (3t + 2)^2$
- ② Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$  του τετραγώνου, όταν  $t = 2$  sec.

**3.** Δύο κινητά Α και Β ξεκινούν συγχρόνως από την αρχή των αξόνων Ο. Το Α κινείται στον ημιάξονα  $Ox$  με ταχύτητα  $6cm/sec$  και το Β στον ημιάξονα  $Oy$  με ταχύτητα  $8cm/sec$ .

- ① Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Α και Β
- ② Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η απόσταση των Α και Β είναι  $50cm$
- ③ Να αποδείξετε ότι η απόσταση  $d = (AB)$  των δύο κινητών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

**3.** Δύο κινητά Α και Β ξεκινούν συγχρόνως από την αρχή των αξόνων Ο. Το Α κινείται στον ημιάξονα  $Ox$  με ταχύτητα  $6cm/sec$  και το Β στον ημιάξονα  $Oy$  με ταχύτητα  $8cm/sec$ .

- ① Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Α και Β
- ② Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η απόσταση των Α και Β είναι  $50cm$
- ③ Να αποδείξετε ότι η απόσταση  $d = (AB)$  των δύο κινητών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

**3.** Δύο κινητά Α και Β ξεκινούν συγχρόνως από την αρχή των αξόνων Ο. Το Α κινείται στον ημιάξονα  $Ox$  με ταχύτητα  $6cm/sec$  και το Β στον ημιάξονα  $Oy$  με ταχύτητα  $8cm/sec$ .

- ① Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Α και Β
- ② Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η απόσταση των Α και Β είναι  $50cm$
- ③ Να αποδείξετε ότι η απόσταση  $d = (AB)$  των δύο κινητών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

**4.** Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = \sqrt{x}$  ξεκινώντας από το Ο και η τετμημένη του  $x$  αυξάνεται με ρυθμό  $4\text{cm/sec}$

- ① Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$  δίνεται από τον τύπο  $x(t) = 4t$ .
- ② Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να φθάσει στο σημείο  $(4, 2)$
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ καθώς περνάει από το σημείο  $B(16, 4)$

4. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = \sqrt{x}$  ξεκινώντας από το Ο και η τετμημένη του  $x$  αυξάνεται με ρυθμό  $4\text{cm/sec}$

- ① Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$  δίνεται από τον τύπο  $x(t) = 4t$ .
- ② Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να φθάσει στο σημείο  $(4, 2)$
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ καθώς περνάει από το σημείο  $B(16, 4)$

4. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = \sqrt{x}$  ξεκινώντας από το Ο και η τετμημένη του  $x$  αυξάνεται με ρυθμό  $4\text{cm/sec}$

- ① Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$  δίνεται από τον τύπο  $x(t) = 4t$ .
- ② Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να φθάσει στο σημείο  $(4, 2)$
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ καθώς περνάει από το σημείο  $B(16, 4)$



**5.** Οι διαστάσεις  $x$  και  $y$  ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το  $x$  αυξάνει με ρυθμό  $2\text{cm}/\text{sec}$  και το  $y$  ελαττώνεται με ρυθμό  $3\text{cm}/\text{sec}$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- ① Της περιμέτρου
- ② Του εμβαδού  $E$  του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που είναι  $x = 10\text{cm}$  και  $y = 12\text{cm}$

5. Οι διαστάσεις  $x$  και  $y$  ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το  $x$  αυξάνει με ρυθμό  $2cm/sec$  και το  $y$  ελαττώνεται με ρυθμό  $3cm/sec$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- ① Της περιμέτρου
- ② Του εμβαδού  $E$  του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που είναι  $x = 10cm$  και  $y = 12cm$

6. Εστω  $E$  το εμβαδό του τριγώνου  $OAM$  που περικλείεται από την ευθεία  $\varepsilon : y = x$ , το άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \lambda$ ,  $\lambda > 0$ .

① Να αποδείξετε ότι  $E = \frac{1}{2}\lambda^2$

② Αν το  $\lambda$  αυξάνεται με ρυθμό  $3cm/s$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$ , όταν  $\lambda = 2cm$

6. Εστω  $E$  το εμβαδό του τριγώνου  $OAM$  που περικλείεται από την ευθεία  $\varepsilon : y = x$ , το άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \lambda$ ,  $\lambda > 0$ .

- ① Να αποδείξετε ότι  $E = \frac{1}{2}\lambda^2$
- ② Αν το  $\lambda$  αυξάνεται με ρυθμό  $3cm/s$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$ , όταν  $\lambda = 2cm$

7. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$  ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων Ο.

- ① Αν ο ρυθμός μεταβολής  $x'(t)$  της τετμημένης του σημείου Μ είναι  $2\text{cm/s}$ , να βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο  $B(4, 16)$
- ② Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του  $x$  αν υποτεθεί ότι  $x'(t) > 0$ , για κάθε  $t \geq 0$
- ③ Καθώς το Μ περνάει από το  $A(2, 4)$ , η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό  $3\text{cm/s}$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του Μ τη χρονική στιγμή που περνάει από το Α

7. Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$  ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων  $O$ .

- ① Αν ο ρυθμός μεταβολής  $x'(t)$  της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι  $2cm/s$ , να βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο  $B(4, 16)$
- ② Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του  $M$  είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του  $x$  αν υποτεθεί ότι  $x'(t) > 0$ , για κάθε  $t \geq 0$
- ③ Καθώς το  $M$  περνάει από το  $A(2, 4)$ , η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό  $3cm/s$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του  $M$  τη χρονική στιγμή που περνάει από το  $A$

7. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$  ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων Ο.

- ① Αν ο ρυθμός μεταβολής  $x'(t)$  της τετμημένης του σημείου Μ είναι  $2cm/s$ , να βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο  $B(4, 16)$
- ② Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του  $x$  αν υποτεθεί ότι  $x'(t) > 0$ , για κάθε  $t \geq 0$
- ③ Καθώς το Μ περνάει από το  $A(2, 4)$ , η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό  $3cm/s$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του Μ τη χρονική στιγμή που περνάει από το Α

**8.** Ένα κινητό κινείται σε ελλειπτική τροχιά με εξίσωση  $4x^2 + y^2 = 4$ . Καθώς περνάει από το σημείο  $A(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$  η τετμημένη του  $x$  ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του  $y$  τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το  $A$ .



**9.** Ένα κινητό κινείται στη καμπύλη  $C : y = e^x$ . Καθώς το  $M$  περνάει από το σημείο  $A(0, 1)$ , η τετμημένη του  $x$  αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης  $l = (OM)$  τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το  $A$ .

**10.** Ένα κινητό  $M$  κινείται στην καμπύλη  $C : y = x^3$ . Καθώς το  $M$  περνάει από το σημείο  $A(1, 1)$ , η τετμημένη του  $x$  ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta = \widehat{M\hat{O}x}$  τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το  $A$ .

**11.** Μία σκάλα μήκους  $5m$  είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας Β γλιστράει στο δάπεδο με σταθερό ρυθμό  $0,3m/s$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο  $3m$ , να βρείτε τη ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.

**12.** Μία γυναίκα ύψους  $2m$  απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους  $10cm$  με ταχύτητα  $0,5m/s$ . Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της?

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2, x \leq 0$ .

- ① Να βρείτε την τετμημένη του σημείο τομής  $M$  της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(a, f(a)), a \neq 0$  με τον άξονα  $x'x$ .
- ② Εστω ότι το σημείο  $A$  κινείται κατά μήκος της  $C_f$  και ο ρυθμός μεταβολής του  $a(t)$  δίνεται από τον τύπο  $a'(t) = 2a(t)$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή που το  $A$  έχει τετμημένη  $-2$
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$  με τον  $x'x$  την ίδια χρονική στιγμή με το 2. ερώτημα

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2, x \leq 0$ .

- ① Να βρείτε την τετμημένη του σημείο τομής  $M$  της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(a, f(a)), a \neq 0$  με τον άξονα  $x'x$ .
- ② Εστω ότι το σημείο  $A$  κινείται κατά μήκος της  $C_f$  και ο ρυθμός μεταβολής του  $a(t)$  δίνεται από τον τύπο  $a'(t) = 2a(t)$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή που το  $A$  έχει τετμημένη  $-2$
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$  με τον  $x'x$  την ίδια χρονική στιγμή με το 2. ερώτημα

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2, x \leq 0$ .

- ① Να βρείτε την τετμημένη του σημείο τομής  $M$  της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(a, f(a)), a \neq 0$  με τον άξονα  $x'x$ .
- ② Εστω ότι το σημείο  $A$  κινείται κατά μήκος της  $C_f$  και ο ρυθμός μεταβολής του  $a(t)$  δίνεται από τον τύπο  $a'(t) = 2a(t)$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή που το  $A$  έχει τετμημένη  $-2$
- ③ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$  με τον  $x'x$  την ίδια χρονική στιγμή με το 2. ερώτημα