

Συναρτήσεις

Fermat, Κρίσιμα Σημεία

Κωνσταντίνος Λόλας

Λίγη Γεωγραφία?

- 1 Το ψηλότερο σημείο στη γη
- 2 Το ψηλότερο σημείο στην Ελλάδα
- 3 Το ψηλότερο σημείο στη διαδρομή Θεσσαλονίκη - Γιάννινα

Λίγη Γεωγραφία?

- 1 Το ψηλότερο σημείο στη γη
- 2 Το ψηλότερο σημείο στην Ελλάδα
- 3 Το ψηλότερο σημείο στη διαδρομή Θεσσαλονίκη - Γιάννινα

Λίγη Γεωγραφία?

- 1 Το ψηλότερο σημείο στη γη
- 2 Το ψηλότερο σημείο στην Ελλάδα
- 3 Το ψηλότερο σημείο στη διαδρομή Θεσσαλονίκη - Γιάννινα

Τοπικά Ακρότατα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ακροτάτου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f

Άρα ΣΤΟ x_0 , ΤΟ $f(x_0)$

Τοπικά Ακρότατα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ακροτάτου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f

Αρα ΣΤΟ x_0 , ΤΟ $f(x_0)$

Συγκρίσεις παντού

Ορισμός

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ακροτάτου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό ΣΩΣΤΟ
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- ① Το μέγιστο είναι και τοπικό
- ② Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- ③ Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- ④ Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- ⑤ Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- ① Το μέγιστο είναι και τοπικό
- ② Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- ③ Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- ④ Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- ⑤ Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

- 1 Το μέγιστο είναι και τοπικό
- 2 Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
- 3 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
- 4 Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
- 5 Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα ΣΩΣΤΟ

Ζωγραφική

- 1 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
- 2 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 3 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
- 4 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 5 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
- 6 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

- 1 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
- 2 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 3 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
- 4 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 5 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
- 6 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

- 1 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
- 2 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 3 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
- 4 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 5 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
- 6 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

- 1 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
- 2 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 3 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
- 4 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 5 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
- 6 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

- 1 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
- 2 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 3 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
- 4 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 5 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
- 6 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

- 1 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
- 2 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 3 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
- 4 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
- 5 Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
- 6 Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Θεώρημα Fermat

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Όλα μαζί

- ❶ Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
- ❷ Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
- ❸ Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Όλα μαζί

- 1 Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
- 2 Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
- 3 Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Όλα μαζί

- 1 Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
- 2 Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
- 3 Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

- 1 Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
- 2 Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
- 3 Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

- 1 Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
- 2 Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
- 3 Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

- 1 Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
- 2 Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
- 3 Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

- 1 Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
- 2 Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
- 3 Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Άρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Ναι, αλλά τότε τα “πιθανά” είναι και “σίγουρα”

Να βρείτε συνθήκη για την f ώστε ένα σημείο της να είναι τοπικό μέγιστο

Έλεγχος πιθανών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Ναι, αλλά τότε τα “πιθανά” είναι και “σίγουρα”

Να βρείτε συνθήκη για την f ώστε ένα σημείο της να είναι τοπικό μέγιστο

Έλεγχος πιθανών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Εξάσκηση 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x - \frac{\beta}{x} + 3\alpha$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 5, να βρείτε τα α και β

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \alpha x$, για την οποία ισχύει

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

Εξάσκηση 3

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\alpha \ln x \leq x - 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

να βρείτε την τιμή του α

Εξάσκηση 4

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει

$$f(x) \geq 2e^x - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 1 Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
- 2 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Εξάσκηση 4

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει

$$f(x) \geq 2e^x - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
- ② Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Εξάσκηση 5

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

- ❶ Τα κρίσιμα σημεία της f
- ❷ Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
- ❸ Το σύνολο τιμών της f

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

- 1 Τα κρίσιμα σημεία της f
- 2 Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
- 3 Το σύνολο τιμών της f

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

- ① Τα κρίσιμα σημεία της f
- ② Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
- ③ Το σύνολο τιμών της f

Εξάσκηση 7

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) = x^3 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$ και ισχύει:

$$f^3(x) + e^x = f(f(x)) + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(1) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(f^2(x))' \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ❶ Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
- ❷ Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
- ❸ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(1) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(f^2(x))' \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ① Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
- ② Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(1) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(f^2(x))' \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ① Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
- ② Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
- ③ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

- ① Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι

$$f'(0) = 0$$

- ② Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι

$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

- ③ Αν η f είναι ορισμένη στο $B = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(B)$

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

- ① Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι

$$f'(0) = 0$$

- ② Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι

$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

- ③ Αν η f είναι ορισμένη στο $B = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(B)$

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

- ① Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι

$$f'(0) = 0$$

- ② Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι

$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

- ③ Αν η f είναι ορισμένη στο $B = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(B)$

Εξάσκηση 11

Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Αν $f' \uparrow (0, 2)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

Εξάσκηση 12

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που έχουν κοινά σημεία τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g στο διάστημα (α, β) . Να δείξετε ότι:

- 1 Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σημείων με τετμημένη ξ των C_f και C_g , να γίνεται μέγιστη
- 2 Οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες

Εξάσκηση 12

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που έχουν κοινά σημεία τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g στο διάστημα (α, β) . Να δείξετε ότι:

- ① Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σημείων με τετμημένη ξ των C_f και C_g , να γίνεται μέγιστη
- ② Οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Αρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0 .

Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\text{Για } x > x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0 .

Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\text{Για } x > x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0 .

Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\text{Για } x > x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\text{Άρα } 0 \leq k \leq 0, \text{ δηλαδή } f'(x_0) = 0 \quad \text{Πίσω στη θεωρία}$$

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Αρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0 .

Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\text{Για } x > x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0 .

Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\text{Για } x > x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία