Συναρτήσεις

Κυρτότητα, Σημεία Καμπής

Κωνσταντίνος Λόλας

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Γραφικές παραστάσεις λοιπόν!

Τι μπορούμε να ”χαράξουμε”

1. Το πεδίο ορισμού
2. Τα σημεία τομής με άξονες
3. Τη συμμετρία ως προς $x'x$ ή $y'y$
4. Τη συνέχεια
5. Την παραγωγισιμότητα
6. Τη μονοτονία
7. Τα ακρότατα

Έμειναν

1. Το πώς ”ανέρχεται” ή ”κατέρχεται” (κυρτότητα)
2. Αν πλησιάζει προς ευθείες (ασύμπτωτες)

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Ορισμός

Ένα σχήμα λέγεται κυρτό, αν-ν κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα εσωτερικά σημεία του σχήματος, βρίσκεται εξολοκλήρου στο σχήμα

π.χ.

- Κυρτή γωνία $180 < \theta < 360$
- Κυρτή παραβολή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$
- Κυρτή συνάρτηση?

Κυρτότητα

Συναρτήσεων

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

- η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ
- η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

Και άρα στο εύκολο

Κυρτότητα από $f''(x)$

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι <u>κυρτή</u> στο Δ
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι <u>κοίλη</u> στο Δ

Προσοχή, δεν είναι αυτός ο ορισμός. Ούτε ισχύει το αντίστροφο

Και άρα στο εύκολο

Κυρτότητα από $f''(x)$

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι <u>κυρτή</u> στο Δ
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι <u>κοίλη</u> στο Δ

Προσοχή, δεν είναι αυτός ο ορισμός. Ούτε ισχύει το αντίστροφο

Και ένα σχόλιο

Φτιάξτε μία κυρτή συνάρτηση και μελετήστε ΚΑΘΕ εφαπτομένη της!

Ανίσωση SOS

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική της παράσταση. Αντίστοιχα από "πάνω" όταν είναι κοίλη.

Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και γίνεται με ΘΜΤ ή με ακρότατα.

Και ένα σχόλιο

Φτιάξτε μία κυρτή συνάρτηση και μελετήστε ΚΑΘΕ εφαπτομένη της!

Ανίσωση SOS

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ”κάτω” από τη γραφική της παράσταση. Αντίστοιχα από ”πάνω” όταν είναι κοίλη.

Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και γίνεται με ΘΜΤ ή με ακρότατα.

Και ένα σχόλιο

Φτιάξτε μία κυρτή συνάρτηση και μελετήστε ΚΑΘΕ εφαπτομένη της!

Ανίσωση SOS

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ”κάτω” από τη γραφική της παράσταση. Αντίστοιχα από ”πάνω” όταν είναι κοίλη.

Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη και γίνεται με ΘΜΤ ή με ακρότατα.

Σημείο Καμπής

Ορισμός

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτόμενη στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται <u>σημείο καμπής</u> της γραφικής παράστασης της f

Θεώρημα Σημείου Καμπής

Ιδιότητα

Αν το $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Απόδειξη

Πού κρύβονται?

1. $f''(x_0) = 0$
2. $f''(x_0)$ δεν ορίζεται

Πού κρύβονται?

1. $f''(x_0) = 0$
2. $f''(x_0)$ δεν ορίζεται

Πού κρύβονται?

1. $f''(x_0) = 0$
2. $f''(x_0)$ δεν ορίζεται

Πείτε το, αφού δεν κρατιέστε! Τα σημεία καμπής είναι τα ακρότατα της f', χωρίς τα άκρα!

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

1. $f(x) = x^2 - \ln x$
2. $f(x) = \sqrt{x} - e^x$
3. $f(x) = x^4 - 2x + 1$
4. $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

1. $f(x) = x^2 - \ln x$
2. $f(x) = \sqrt{x} - e^x$
3. $f(x) = x^4 - 2x + 1$
4. $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

1. $f(x) = x^2 - \ln x$
2. $f(x) = \sqrt{x} - e^x$
3. $f(x) = x^4 - 2x + 1$
4. $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 1

Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα

1. $f(x) = x^2 - \ln x$
2. $f(x) = \sqrt{x} - e^x$
3. $f(x) = x^4 - 2x + 1$
4. $f(x) = x \ln x - e^{-x}$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
2. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
2. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα
2. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
2. $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
2. $f(x) = 3x^5 - 5x^4$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$
2. $f(x) = 2x(\ln x - 1) - \ln^2 x$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$
2. $f(x) = 2x(\ln x - 1) - \ln^2 x$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

1. $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \pi)$
2. $f(x) = \varepsilon\varphi x - x + 2\ln(\sigma\upsilon\nu x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής

1. $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \pi)$
2. $f(x) = \varepsilon\varphi x - x + 2\ln(\sigma\upsilon\nu x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
2. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$. Να δείξετε ότι:

1. Η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$
2. $x_0 < \dfrac{4}{5}$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x$. Να δείξετε ότι:

1. Η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$
2. $x_0 < \dfrac{4}{5}$

Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6e^x - x^3 - 4x^2$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

1. Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$
2. Η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Εξάσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} + \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

1. Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$
2. Η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

Εξάσκηση 11

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 - 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f''(x) + f(x) \neq 2f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής.

Εξάσκηση 13

Έστω $f : (1, 3) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 - 3x + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in (1, 3)$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f, δεν παρουσιάζει καμπή

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$

Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία