# **Συναρτήσεις** Πράξεις ορίων

Κωνσταντίνος Λόλας

 $10^o$  ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Υπολογισμοί ορίων



### Πρόσημο

#### Θεώρημα 1ο

- Aν  $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ , τότε f(x) > 0 κοντά στο  $x_0$
- ullet Αν  $\lim_{x o x_0}f(x)<0$ , τότε f(x)<0 κοντά στο  $x_0$

### Πρόσημο

#### Θεώρημα 1ο

- Αν  $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ , τότε f(x) > 0 κοντά στο  $x_0$
- ullet Αν  $\lim_{x o x_0}f(x)<0$ , τότε f(x)<0 κοντά στο  $x_0$

### Πρόσημο

#### Θεώρημα 1ο

- Αν  $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ , τότε f(x) > 0 κοντά στο  $x_0$

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 3/36

#### Διάταξη

#### Θεώρημα 2ο

Aν οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  , τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

### Από κάπου να ποιαστούμε?

- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} x = x_0$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} c = c$

### Και υπολογίζουμε...

#### ΜΟΝΟ αν υπάρχουν τα όρια των f και g τότε

$$\bullet \ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \text{ ennotities otherwise} \ g(x) \neq 0$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)|$$

$$\bullet \lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$
, εννοείται ότι  $f(x)>0$  κοντά στο  $x_0$ 

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 6/36

#### Από τα προηγούμενα...

- $\bullet$   $\lim x^n = x_0^n$ , yia  $n \in \mathbb{N}^*$  $x \rightarrow x_0$

Συναρτήσεις 7/36

#### Από τα προηγούμενα...

- $\bullet$   $\lim x^n = x_0^n$ , yia  $n \in \mathbb{N}^*$  $x \rightarrow x_0$
- lim  $P(x) = P(x_0)$  , η πρώτη σας απόδειξη!!!  $x \rightarrow x_0$

Συναρτήσεις 7/36

#### Από τα προηγούμενα...

- ullet  $\lim_{x o x_0}x^n=x_0^n$ , για  $n\in\mathbb{N}^*$
- ullet  $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$  , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet  $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή
- $\lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} \sigma \upsilon \nu(x) = \sigma \upsilon \nu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

Λόλας ( $10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 7/36

#### Από τα προηγούμενα...

- $\bullet$   $\lim x^n = x_0^n$ , yia  $n \in \mathbb{N}^*$  $x \rightarrow x_0$
- ullet  $P(x)=P(x_0)$  , η πρώτη σας απόδειξη!!!  $x \rightarrow x_0$
- $\bullet \lim_{x o x_0} rac{P(x)}{Q(x)} = rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή

Συναρτήσεις 7/36

#### Από τα προηγούμενα...

- $\bullet$   $\lim x^n = x_0^n$ , yia  $n \in \mathbb{N}^*$  $x \rightarrow x_0$
- ullet  $P(x)=P(x_0)$  , η πρώτη σας απόδειξη!!!  $x \rightarrow x_0$
- ullet  $\lim_{x o x_0} rac{P(x)}{Q(x)} = rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή

Συναρτήσεις 7/36

#### Από τα προηγούμενα...

- $\bullet$   $\lim x^n = x_0^n$ , yia  $n \in \mathbb{N}^*$  $x \rightarrow x_0$
- ullet  $P(x)=P(x_0)$  , η πρώτη σας απόδειξη!!!  $x \rightarrow x_0$
- ullet  $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή
- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$

#### Από τα προηγούμενα...

- $\circ \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ , για  $n \in \mathbb{N}^*$
- ullet  $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$  , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet  $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή
- $\circ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma \upsilon \nu(x) = \sigma \upsilon \nu(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

#### Από τα προηγούμενα...

- $\circ \lim_{x o x_0} x^n = x_0^n$ , yia  $n \in \mathbb{N}^*$
- ullet  $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$  , η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet  $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  με λίγη προσοχή
- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma \upsilon \nu(x) = \sigma \upsilon \nu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

Λόλας ( $10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 7/36

### Θεώρημα 3ο

#### Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$
, κοντά στο  $x_0$ 

$$\bullet \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R},$$

τότε 
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

### Θεώρημα 3ο

#### Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , κοντά στο  $x_0$
- $\bullet \ \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R} \text{,}$

τότε 
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

### Θεώρημα 3ο

#### Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$
, κοντά στο  $x_0$ 

$$\quad \quad 0 \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R} \text{,}$$

τότε 
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

### Σχεδόν τελειώσαμε

#### Και λίγα άγνωστα όρια

$$\bullet \ \lim_{x\to 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu x}{x} = 0$$

### Σχεδόν τελειώσαμε

#### Και λίγα άγνωστα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

$$\circ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu x}{x} = 0$$

# Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$ ?

- Θέτουμε u = q(x)

Τότε αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε προφανώς  $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = k$ 

Συναρτήσεις 10/36

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$ ?

- Θέτουμε u = g(x)
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Τότε αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε προφανώς  $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = k$ 

Συναρτήσεις 10/36

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$ ?

- Θέτουμε u = g(x)
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $k = \lim_{u \to u_0} f(u)$

Τότε αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε προφανώς  $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = k$ 

Συναρτήσεις 10/36

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$ ?

- Φέτουμε <math> u = g(x)
- $\mathbf{2}$  Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Τότε αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε προφανώς  $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$ 

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 10/36

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \ \mathrm{kal} \ \lim_{x\to 2} g(x) = 2$$

να υπολογίσετε το 
$$\lim_{x \to 2} \left( 3f(x) + f(x) \cdot g(x) \right)$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \left( \frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2 - x} \right)$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$\bigoplus_{x \to 1} \left( \frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2 - x} \right)$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

Συναρτήσεις 14/36

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$4 \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

Εστω η συνάρτηση 
$$f(x)= egin{cases} x-2, & 0< x \leq 1 \\ 3x-4, & 1< x < 2 \,. \ \text{Nα βρείτε (αν υπάρχουν)} \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$$

#### τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x \to 1} f(x)$
- $\lim_{x \to 2} f(x)$

Λόλας  $(10^{\circ}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 15/36

Εστω η συνάρτηση 
$$f(x)= egin{cases} x-2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \,. \ \text{Nα βρείτε (αν υπάρχουν)} \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$$

### τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$

Εστω η συνάρτηση 
$$f(x)=egin{cases} x-2,&0< x\leq 1\\ 3x-4,&1< x<2\,. \ \text{Nα βρείτε (αν υπάρχουν)}\\ 2x-1,&x>2 \end{cases}$$

#### τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x \to 2} f(x)$

Λόλας  $(10^{\circ}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 15/36

Εστω η συνάρτηση 
$$f(x)=egin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ a, & x=2 \end{cases}$$

- Να βρείτε το  $\lim_{x \to 2} f(x)$

Εστω η συνάρτηση 
$$f(x)= \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ a, & x=2 \end{cases}$$

- Να βρείτε το  $\lim_{x \to 2} f(x)$
- ② Να βρείτε το a ώστε  $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Συναρτήσεις 16/36

Εστω η συνάρτηση 
$$f(x)=egin{cases} \alpha\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\beta,&x<0\\ \alpha\sqrt{x+1}+2\beta,&x\geq0 \end{cases}$$
. Να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta\in\mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ 

Συναρτήσεις 17/36

#### Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{1} & \lim_{x \to 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}
\end{array}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

### Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\mathbf{1} \lim_{x \to 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 18/36

### Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

- $\ \, \textbf{Δν ισχύει}\ 3x-2-x^2\leq f(x)\leq x^2-x$  , για κάθε  $x\in\mathbb{R}$  , να βρείτε το  $\lim_{x\to 1}f(x)$
- ② Αν ισχύει  $|f(x)-2| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x o 0} f(x)$
- $egin{aligned} {
  m 3} {
  m \ Av} \ {
  m log}$ ύει  $f(\mathbb{R})=(0,1)$ , να βρείτε το  $\lim_{x o 0}\left(x^2f(x)
  ight)$

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 19/36

Εστω  $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x-2-x^2 \leq f(x) \leq x^2-x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \to 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει  $|f(x)-2| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \to 0} f(x)$
- $egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} \mathbf{a} \end{pmatrix} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{aligned}$  Aν ισχύει  $f(\mathbb{R}) = (0,1)$ , να βρείτε το  $\lim_{x o 0} \left(x^2 f(x)\right)$

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 19/36

Εστω  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x-2-x^2 \leq f(x) \leq x^2-x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \to 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει  $|f(x)-2| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \to 0} f(x)$
- ${
  m 3}$  Αν ισχύει  $f(\mathbb{R})=(0,1)$ , να βρείτε το  $\lim_{x o 0}\left(x^2f(x)
  ight)$

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 19/36

Nα βρείτε το 
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$
, όταν ισχύει:

$$2x - 3x^2 \le f(x) \le x^4 + 2x$$

Na breite to 
$$\lim_{x\to 0} x\sigma v\nu \frac{1}{x}$$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 21/36

### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$$

$$2 \lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x - 1}{x} - \varepsilon \varphi x$$

$$\lim_{x \to 0} \left( x \eta \mu \frac{1}{x} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu^2 x}{x}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x - 1}{x} - \varepsilon \varphi x$$

$$\lim_{x \to 0} \left( x \eta \mu \frac{1}{x} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v v^2 x}{x}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma \upsilon\nu x-1}{x}-\varepsilon\varphi x$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma \upsilon\nu x-1}{x}-\varepsilon\varphi x$

### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim \frac{x}{}$  $x \to 0$   $\eta \mu x$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 23/36

### Να υπολογίσετε τα όρια

- lim  $x \rightarrow 0 \eta \mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$  $x \rightarrow 0$  x

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 23/36

#### Να υπολογίσετε τα όρια

- lim  $x \rightarrow 0 \eta \mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$  $x \to 0$  x
- $3 \lim \frac{\sigma v \nu x 1}{}$  $x\rightarrow 0$   $\eta \mu x$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 23/36

### Να υπολογίσετε τα όρια

- lim  $x \to 0$   $\eta \mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$  $x \to 0$  x
- $\lim \frac{\sigma v \nu x 1}{}$  $x \to 0$   $\eta \mu x$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\begin{array}{cc}
& \lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}
\end{array}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta \mu(\pi-x)}{x^2+x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x - \eta \mu x}$$

$$4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x\to 0} \frac{\eta \mu(\pi-x)}{x^2+x}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+3x}{2x-\eta\mu x}$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta \mu(\pi-x)}{x^2+x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+3x}{2x-\eta\mu x}$$

$$4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu 3x 1}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας  $(10^{\circ}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 25/36

### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim \frac{\eta \mu 5x}{}$  $x\rightarrow 0$  x
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma v\nu 3x-1}{x}$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 25/36

### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim \frac{\eta \mu 5x}{}$  $x\rightarrow 0$  x
- $\sigma v \nu 3x 1$  $x\rightarrow 0$  x
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 25/36

### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim \frac{\eta \mu 5x}{}$  $x\rightarrow 0$  x
- $\sigma v \nu 3x 1$  $x \to 0$   $x \to 0$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 25/36

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2}$$

#### Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 26/36

An 
$$\lim_{x\to 1}f(x)=0$$
 , na breite to  $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2\eta\mu f(x)}{f(x)+1-\sigma v\nu f(x)}$ 

Εστω  $f:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x o 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

Εστω  $f:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x o 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

Εστω  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-1}{h}=2.$  Να βρείτε τα όρια:

- $\text{ } \lim_{h \to 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) f(1-h)}{h}$

Λόλας  $(10^{o}$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 29/36

Εστω  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-1}{h}=2.$  Να βρείτε τα όρια:

- $\text{ } \lim_{h \to 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$
- $2 \lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) f(1-h)}{h}$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 29/36

Aν 
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 2$$
, να βρείτε το  $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2-x+1)-3}{x-1}$ 

Συναρτήσεις 30/36

Εστω  $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{} f(x)$  όταν:

- $\lim_{x \to x_0} \left( f(x) x^2 + 3x \right) = 3$  και  $x_0 = 2$

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 31/36

Εστω  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \to \infty} f(x)$  όταν:

- $\lim_{x \to x_0} \left( f(x) x^2 + 3x \right) = 3$  και  $x_0 = 2$
- $2 \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3 \ \mathrm{kal} \ x_0 = 2$

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 31/36

Εστω  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \to \infty} f(x)$  όταν:

- $\ \, \lim_{x\to x_0} \left(f(x)-x^2+3x\right)=3 \ \mathrm{kal} \ x_0=2$
- $2 \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) 1}{x 2} = 3 \text{ kal } x_0 = 2$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x} = 2 \text{ kal } x_0 = 0$

Συναρτήσεις 31/36

Εστω  $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$ 

- Να βρείτε το  $\lim_{x\to 0} f(x)$

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 32/36

Εστω  $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$ 

- Να βρείτε το  $\lim_{x\to 0} f(x)$
- **2** Na breite to  $\lim_{x \to 0} \frac{f^2(x) + x f(x) + x \eta \mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta \mu^2 x}$

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 32/36

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

① 
$$f(x) = \sqrt{|x| - |\eta \mu x|}$$
  
②  $f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x - x^2}$ 

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 33/36

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

① 
$$f(x) = \sqrt{|x| - |\eta \mu x|}$$
 ② 
$$f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x - x^2}$$

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 33/36

Να λύσετε την εξίσωση  $|\eta \mu x| = |\pi - x|$ 

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) 34/36 Συναρτήσεις

- Nα λύσετε την εξίσωση  $\eta \mu(x^2+x)-x^2=x$

$$2x-3 < f(x) < 2x+3$$
 για κάθε  $x \neq 0$ 

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 35/36

- Nα λύσετε την εξίσωση  $\eta \mu(x^2+x)-x^2=x$
- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x + 3\frac{\eta\mu x}{x}$ . Να αποδείξετε ότι

$$2x-3 < f(x) < 2x+3$$
 για κάθε  $x \neq 0$ 

Λόλας  $(10^o \text{ ΓΕΛ})$ Συναρτήσεις 35/36

#### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\begin{array}{ccc}
  \mathbf{1} & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \\
  \mathbf{2} & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}
  \end{array}$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 36/36

#### Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

Λόλας ( $10^o$  ΓΕΛ) Συναρτήσεις 36/36