# Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Κωνσταντίνος Λόλας

# Γεύση από το μέλλον (part 2)

#### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- $\bigcirc$  γραφική παράσταση  $\eta\mu x$ ,  $\sigma v \nu x$ ,  $\varepsilon \varphi x$  και  $\sigma \varphi x$
- ③ γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Λόλας Τριγωνομετρία 2/22

# Γεύση από το μέλλον (part 2)

#### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- $oldsymbol{2}$  γραφική παράσταση  $\eta \mu x$ ,  $\sigma v 
  u x$ ,  $\varepsilon \varphi x$  και  $\sigma \varphi x$
- ③ γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

# Γεύση από το μέλλον (part 2)

#### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- $m{2}$  γραφική παράσταση  $\eta \mu x$ ,  $\sigma v 
  u x$ ,  $\varepsilon \varphi x$  και  $\sigma \varphi x$
- γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

## Καταιγίδα πριν την λιακάδα

#### Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- f 4 περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της Tpprox 24 ώρες
- ② λεπτοδείκτη 60 λεπτό
- ③ σελήνης γύρω από τη γη  $\approx 27$  ημέρες...

## Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- f a περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της Tpprox 24 ώρες
- λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- ③ σελήνης γύρω από τη γη  $\approx 27$  ημέρες...

## Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- f 4 περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της Tpprox 24 ώρες
- λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- lacksquare σελήνης γύρω από τη γη pprox 27 ημέρες...

## Λίιιιιιγο μαθηματικά

#### Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται <u>περιοδική</u>, όταν υπάρχει αριθμός T τέτοιος ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

• 
$$x + T \in A$$
,  $x - T \in A$ 

• 
$$f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός  $\Tau$  λέγεται περίοδος της συνάρτησης f

Ορισμός (εξτρά

Θεμελιώδης περίοδος είναι το μικρότερο θετικό  ${f T}$ 

Λόλας Τριγωνομετρία 4/22

## Λίιιιιιγο μαθηματικά

#### Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται <u>περιοδική</u>, όταν υπάρχει αριθμός T τέτοιος ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

• 
$$x + T \in A$$
,  $x - T \in A$ 

• 
$$f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός  $\Tau$  λέγεται περίοδος της συνάρτησης f

#### Ορισμός (εξτρά)

Θεμελιώδης περίοδος είναι το μικρότερο θετικό  ${\mathbf T}$ 

Λόλας Τριγωνομετρία 4/22

#### Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

ullet ημx με περίοδο  $\mathrm{T}=2\pi$  ή  $\mathrm{T}=4\pi$ 

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

ullet ημx με περίοδο  $\mathrm{T}=2\pi$  ή  $\mathrm{T}=4\pi$ 

#### Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta \mu x$  με περίοδο  $T=2\pi$  ή  $T=4\pi$

Λόλας Τριγωνομετρία

5/22

#### Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- ullet ημx με περίοδο  $T=2\pi$  ή  $T=4\pi$
- $\sigma v \nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν

 $\bullet \ \varepsilon \omega x$  us περίοδο  $\tau$ 

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\sigma v \nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν
- εφχ με περίοδο

#### Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\sigma v \nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν

#### Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\sigma v \nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν

## Γραφικές yeah!

- ullet Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\eta \mu x$  στο Geogebra
- Για το συνχ σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- ullet Ας δούμε την γραφική παράσταση της arepsilon arphi x στο Geogebra

Λόλας Τριγωνομετρία 6/22

## Γραφικές yeah!

- ullet Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\eta\mu x$  στο Geogebra
- ullet Για το  $\sigma v \nu x$  σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- lacksquare Ας δούμε την γραφική παράσταση της arepsilon arphi x στο Geogebra

## Γραφικές yeah!

- ullet Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\eta\mu x$  στο Geogebra
- ullet Για το  $\sigma v \nu x$  σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- ullet Ας δούμε την γραφική παράσταση της arepsilon arphi x στο Geogebra

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) έχει περίοδο  $\mathbf{T}=\pi$ 

Λόλας Τριγωνομετρία 7/22

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

Λόλας Τριγωνομετρία 8/22

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

- **2**  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{r^2}$

Λόλας Τριγωνομετρία 8/22

- $\circ \sigma v \nu \frac{\pi}{5}$ ,  $\sigma v \nu \frac{\pi}{7}$

- $\circ \sigma v \nu \frac{\pi}{5}$ ,  $\sigma v \nu \frac{\pi}{7}$
- $\odot \varepsilon \varphi \frac{\pi}{5}, \varepsilon \varphi \frac{\pi}{7}$

- $\bullet$   $\eta\mu\frac{\pi}{5}$ ,  $\eta\mu\frac{\pi}{7}$
- $\circ \sigma v \nu \frac{\pi}{5}$ ,  $\sigma v \nu \frac{\pi}{7}$
- $\bullet$   $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}$ ,  $\sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

- f 1 Να δείξετε ότι αν,  $0 < x < rac{\pi}{6}$ , τότε  $2\eta \mu x 1 < 0$
- $m{2}$  Να δείξετε ότι αν,  $x \in (rac{3\pi}{4},\pi)$ , τότε  $arepsilon \varphi x + 1 > 0$

Λόλας Τριγωνομετρία 10/22

- Να δείξετε ότι αν,  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , τότε  $2\eta \mu x 1 < 0$
- Να δείξετε ότι αν,  $x \in (\frac{3\pi}{4},\pi)$ , τότε  $\varepsilon \varphi x + 1 > 0$

Λόλας Τριγωνομετρία 10/22

Σε ένα σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta \mu x$  και στη συνέχεια, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = 1 + \eta \mu x$ 

> Λόλας Τριγωνομετρία 11/22

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = |\eta \mu x|$  στο διάστημα  $[0,2\pi]$ 

Λόλας Τριγωνομετρία 12/22

#### Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους

$$(2) f(x) = -2\sigma v \nu \frac{\pi}{3}$$

 $f(x) = \varepsilon \varphi \frac{\pi x}{2}$ 

Λόλας Τριγωνομετρία 13/22

#### Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους
  - **1**  $f(x) = 3\eta \mu 2x$
  - $(x) = -2\sigma v \nu \frac{x}{3}$

#### Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους
  - **1**  $f(x) = 3\eta \mu 2x$
  - $(x) = -2\sigma v \nu \frac{x}{3}$
  - 3  $f(x) = \varepsilon \varphi \frac{\pi x}{2}$

Λόλας Τριγωνομετρία 13/22

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu\frac{x}{2}$ 

Λόλας Τριγωνομετρία 14/22

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x)=3\sigma v \nu 2x$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

Λόλας Τριγωνομετρία 15/22

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu(\pi-x) + \sigma v \nu(\frac{\pi}{2}-x)$ 

Λόλας Τριγωνομετρία 16/22

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)=2\eta\mu x+\sigma v \nu \frac{x}{2}$  έχει περίοδο  $T=4\pi$ 

Αν η συνάρτηση  $f(x)=(2-\alpha)\eta\mu\beta x$ ,  $\alpha>2$  και  $\beta>0$  έχει περίοδο το  $\frac{\pi}{2}$  και μέγιστη τιμή το 3, να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$ 

#### Εστω η συνάρτηση $f(x)=1-3\eta\mu 2x$

- ① Ποιά είναι η περίοδός της
- ② Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- ③ Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιασπεριόδου

Εστω η συνάρτηση  $f(x)=1-3\eta\mu 2x$ 

- ① Ποιά είναι η περίοδός της
- ② Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- ③ Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

Εστω η συνάρτηση  $f(x)=1-3\eta\mu 2x$ 

- 1 Ποιά είναι η περίοδός της
- Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- ③ Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta=10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \le t \le 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta=10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν
  - 0°C
  - Ø κάτω από 0°C

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta=10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
  - ① 0°C
  - ② κάτω από 0°C

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta=10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- $oldsymbol{2}$  Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 24$
- Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
  - ① 0°C
  - από 0°C

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ ,  $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- $② \ \ \text{An } \alpha,\beta \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right) \text{ kal } \alpha < \beta \text{, na deíxete ótl } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή  $f(\frac{\pi}{2})$
- $m{4}$  Να δείξετε ότι  $rac{\eta \mu x}{x} < rac{\pi}{2}$  για κάθε  $x \in \left[rac{\pi}{2}, \pi
  ight)$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$  ,  $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Av lpha,  $eta\in\left[rac{\pi}{2},\pi
  ight)$  και lpha<eta, να δείξετε ότι  $rac{lpha}{eta}<rac{\eta\mulpha}{\eta\mueta}$
- ullet Να βρείτε την τιμή  $f(rac{\pi}{2})$
- $ext{ } ext{ } ext{ } ext{ } ext{ } ext{N} ext{ } ext{ } ext{ } ext{ } ext{ } ext{για κάθε } ext{ } ex$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Av lpha,  $eta\in\left[rac{\pi}{2},\pi
  ight)$  και lpha<eta, να δείξετε ότι  $rac{lpha}{eta}<rac{\eta\mulpha}{\eta\mueta}$
- $oldsymbol{3}$  Να βρείτε την τιμή  $f(rac{\pi}{2})$
- $\P$  Να δείξετε ότι  $rac{\eta \mu x}{x} < rac{\pi}{2}$  για κάθε  $x \in \left[rac{\pi}{2}, \pi
  ight)$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- Aν  $\alpha$ ,  $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta \mu \alpha}{\eta \mu \beta}$
- Nα βρείτε την τιμή  $f(\frac{\pi}{2})$
- Να δείξετε ότι  $\frac{\eta\mu x}{x}<\frac{\pi}{2}$  για κάθε  $x\in [\frac{\pi}{2},\pi)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση