

# Αλγεβρα - Ανισώσεις

## 2ου βαθμού Ανισώσεις

Κωνσταντίνος Λόλας

## Ανισώσεις 2ου βαθμού



## Εκτιμούμε τα παλιά

Αν μπορώ να λύσω ως προς  $x$  έχω τελειώσει. Τα καινούρια...

- $x^2 - 9 > 0$
- $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
- $5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \geq 0$

## Κάτι βαρετόoooooooooooo

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \left( x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right) \\ &= \alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right)\end{aligned}$$

## Περιπτώσεις

- $\Delta > 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \\ = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

- $\Delta = 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \alpha(x - \rho)^2$$

- $\Delta < 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha(+)$$

## Περιπτώσεις

- $\Delta > 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \\ = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

- $\Delta = 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right) = \alpha(x - \rho)^2$$

- $\Delta < 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha(+)$$

## Περιπτώσεις

- $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) &= \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \\ &= \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)\end{aligned}$$

- $\Delta = 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \alpha(x - \rho)^2$$

- $\Delta < 0$

$$\alpha \left( \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = \alpha(+)$$

## Παράδειγμα

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 1(x - 1)(x - 2)$$

$$\textcircled{2} \quad -2x^2 + 12x - 18$$

$$-2(x^2 - 6x + 9) = -2(x - 3)^2$$

$$\textcircled{3} \quad x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$



## Παράδειγμα

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 1(x - 1)(x - 2)$$

$$\textcircled{2} \quad -2x^2 + 12x - 18$$

$$-2(x^2 - 6x + 9) = -2(x - 3)^2$$

$$\textcircled{3} \quad x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

## Παράδειγμα

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 1(x - 1)(x - 2)$$

$$\textcircled{2} \quad -2x^2 + 12x - 18$$

$$-2(x^2 - 6x + 9) = -2(x - 3)^2$$

$$\textcircled{3} \quad x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

# Τι χρειαζόμαστε

Πρόσημο  $x - \rho$

$x$	$-\infty$	$\rho$	$+\infty$
$x - \rho$	$-$	$0$	$+$

# Τι χρειαζόμαστε

Πρόσημο  $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ ?

$x$	$-\infty$	$\rho_1$	$\rho_2$	$+\infty$
$x - \rho_1$	-	0	+	+
$x - \rho_2$	-	-	0	+
$(x - \rho_1)(x - \rho_2)$	+	0	-	+

Αν  $\alpha < 0$ ?

Πρόσημο  $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ ?

$x$	$-\infty$	$\rho_1$	$\rho_2$	$+\infty$	
$\alpha$	—	—	—		
$x - \rho_1$	—	0	+	+	
$x - \rho_2$	—	—	0	+	
$\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$	—	0	+	0	—

## Συγκεντρωτικά για $\alpha > 0$

- $\Delta > 0$

$x$	$-\infty$	$\rho_1$	$\rho_2$	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

- $\Delta = 0$

$x$	$-\infty$	$\rho$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	+	0	+

- $\Delta < 0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	+	

## Συγκεντρωτικά για $\alpha < 0$

- $\Delta > 0$

$x$	$-\infty$	$\rho_1$	$\rho_2$	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

- $\Delta = 0$

$x$	$-\infty$	$\rho$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$-$	$0$	$-$

- $\Delta < 0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$-$	

## Ασκήσεις



## Εξάσκηση 1

Για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το πρόσημο των τιμών των παρακάτω τριωνύμων.

①  $x^2 - 3x + 2$

②  $-3x^2 + x + 2$

③  $x^2 - 1$

④  $-x^2 + x$

# Εξάσκηση 1

Για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το πρόσημο των τιμών των παρακάτω τριωνύμων.

①  $x^2 - 3x + 2$

②  $-3x^2 + x + 2$

③  $x^2 - 1$

④  $-x^2 + x$

# Εξάσκηση 1

Για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το πρόσημο των τιμών των παρακάτω τριωνύμων.

①  $x^2 - 3x + 2$

②  $-3x^2 + x + 2$

③  $x^2 - 1$

④  $-x^2 + x$

## Εξάσκηση 1

Για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το πρόσημο των τιμών των παρακάτω τριωνύμων.

①  $x^2 - 3x + 2$

②  $-3x^2 + x + 2$

③  $x^2 - 1$

④  $-x^2 + x$

## Εξάσκηση 2

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου  $x^2 - 2x + 1$ .

## Εξάσκηση 3

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των τριωνύμων

①  $x^2 - 2x + 2$

②  $x - 1 - x^2$

③  $-3x^2 - 1$

## Εξάσκηση 3

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των τριωνύμων

①  $x^2 - 2x + 2$

②  $x - 1 - x^2$

③  $-3x^2 - 1$

## Εξάσκηση 3

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των τριωνύμων

①  $x^2 - 2x + 2$

②  $x - 1 - x^2$

③  $-3x^2 - 1$



## Εξάσκηση 4

Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - x - 2 > 0$ .

## Εξάσκηση 5

Να λύσετε την ανίσωση  $4x - 2 \geq x(3x - 1)$ .

## Εξάσκηση 6

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $x^2 \leq 3x$

②  $2x^2 > 1$

③  $x^2 - 5x + 6 < 0$

## Εξάσκηση 6

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $x^2 \leq 3x$

②  $2x^2 > 1$

③  $x^2 - 5x + 6 < 0$

## Εξάσκηση 6

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $x^2 \leq 3x$

②  $2x^2 > 1$

③  $x^2 - 5x + 6 < 0$

## Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $4x^2 > 4x - 1$

②  $(x - 1)^2 > 2x - 4$

## Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις ανισώσεις

①  $4x^2 > 4x - 1$

②  $(x - 1)^2 > 2x - 4$

## Εξάσκηση 8

Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x^2 \leq 9 \text{ και } x + 2 < x^2$$



## Εξάσκηση 9

Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:

$$2x - 1 < x \leq 3x$$

## Εξάσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda - 3)x^2 - \lambda x - 1 = 0$ ,  $\lambda \neq 3$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

## Εξάσκηση 11

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^2 - (2\lambda - 1)x - 2\lambda + 1 = 0$  για κάθε τιμή του  $\lambda$ .

## Εξάσκηση 12

Να δείξετε ότι

- ①  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 > 0$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$
- ②  $x^2 + xy + y^2 > 0$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 12

Να δείξετε ότι

- ①  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 > 0$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$
- ②  $x^2 + xy + y^2 > 0$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 13

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^2 + \lambda x + \lambda - 2 = 0$  έχει 2 πραγματικές ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Εξάσκηση 14

Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 3|x| + 2 < 0$ .

## Εξάσκηση 15

Να λύσετε την ανίσωση  $|x^2 - 1| < x^2 - x - 2$ .



## Εξάσκηση 16

Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει

$$(\lambda - 1)x^2 - \lambda x + \lambda < 0, \lambda \neq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

## Εξάσκηση 17

Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει

$$(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

## Εξάσκηση 18

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda^2 + 2 > 0$ .