

Συναρτήσεις

Εμβαδό Επίπεδου Χωρίου

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = 3x^2$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.
- $f(x) = \eta\mu x$ και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{4}$.

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = 3x^2$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.
- $f(x) = \eta\mu x$ και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{4}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες:

● $x = 1, x = 2$

● $x = 2, x = 3$

● $x = 1, x = 3$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες:

● $x = 1, x = 2$

● $x = 2, x = 3$

● $x = 1, x = 3$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες:

- $x = 1, x = 2$
- $x = 2, x = 3$
- $x = 1, x = 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f

- και τον άξονα $x'x$.
- τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f

- και τον άξονα $x'x$.
- τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 3$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.
- $f(x) = \eta\mu x - 2x$ και την ευθεία $x = \pi$.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.
- $f(x) = \eta\mu x - 2x$ και την ευθεία $x = \pi$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0 \end{cases}$

- Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.
- Να βρείτε την ευθεία $x = a$ που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & x > 0 \end{cases}$

- Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.
- Να βρείτε την ευθεία $x = a$ που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

7. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ και τις ευθείες $x = 1, x = e$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του E του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
- Τις C_f , C_g , και τις ευθείες:
 - $x = 2, x = 3$
 - $x = -1, x = 3$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του E του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
- Τις C_f , C_g , και τις ευθείες:
 - $x = 2, x = 3$
 - $x = -1, x = 3$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του E του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
- Τις C_f , C_g , και τις ευθείες:
 - $x = 2, x = 3$
 - $x = -1, x = 3$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του E του χωρίου που περικλείεται από:

- Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
- Τις C_f , C_g , και τις ευθείες:
 - $x = 2, x = 3$
 - $x = -1, x = 3$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - x^2$. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = 2$, να χωρίζεται από την ευθεία $y = 4 - a^2$, $0 < a < \sqrt{2}$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

10. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 0$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και την ευθεία $x = 2$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη ε της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = -1$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$.

- ① Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(1, 2)$.
- ② Αν O, B είναι τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο AOB σε δύο χωρία, ώστε που λόγος των εμβαδών τους να είναι $2 : 1$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$.

- ① Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(1, 2)$.
- ② Αν O, B είναι τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο AOB σε δύο χωρία, ώστε που λόγος των εμβαδών τους να είναι $2 : 1$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} .
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = e$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$.

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την ε , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = a$, $a < 0$.
- ③ Να βρείτε το όριο $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$.
- ④ Αν το a ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$ τη χρονική στιγμή που είναι $a = -\ln 2$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$.

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την ε , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = a$, $a < 0$.
- ③ Να βρείτε το όριο $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$.
- ④ Αν το a ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$ τη χρονική στιγμή που είναι $a = -\ln 2$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$.

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την ε , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = a$, $a < 0$.
- ③ Να βρείτε το όριο $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$.
- ④ Αν το a ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$ τη χρονική στιγμή που είναι $a = -\ln 2$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2-e^x}{1+e^x}$.

- ① Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- ② Να βρείτε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την ε , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = a$, $a < 0$.
- ③ Να βρείτε το όριο $\lim_{a \rightarrow -\infty} E(a)$.
- ④ Αν το a ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$ τη χρονική στιγμή που είναι $a = -\ln 2$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- ② Να βρείτε το σημείο καμπής της C_f .
- ③ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$, και την ευθεία $x = 1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- ② Να βρείτε το σημείο καμπής της C_f .
- ③ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$, και την ευθεία $x = 1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- ② Να βρείτε το σημείο καμπής της C_f .
- ③ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$, και την ευθεία $x = 1$.

18. Εστω $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν $f(-1) = 0$ και $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$.

- ❶ Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.
- ❷ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ❸ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- ❹ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$.

18. Εστω $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν $f(-1) = 0$ και $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$.

- ❶ Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.
- ❷ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ❸ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- ❹ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$.

18. Εστω $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν $f(-1) = 0$ και $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$.

- ① Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.
- ② Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ③ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- ④ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$.

18. Εστω $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν $f(-1) = 0$ και $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$.

- ① Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.
- ② Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ③ Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- ④ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$.