

Συναρτήσεις

Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε MONO (υπολογίζουμε)

- ① Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
- ② Θα βρίσκουμε μονοτονία
- ③ Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε ΜΟΝΟ (υπολογίζουμε)

- 1 Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
- 2 Θα βρίσκουμε μονοτονία
- 3 Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε ΜΟΝΟ (υπολογίζουμε)

- ① Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
- ② Θα βρίσκουμε μονοτονία
- ③ Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε ΜΟΝΟ (υπολογίζουμε)

- ① Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
- ② Θα βρίσκουμε μονοτονία
- ③ Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Από $f' \rightarrow f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

- 1 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
- 2 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
- 3 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
- 4 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Από $f' \rightarrow f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

- 1 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
- 2 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
- 3 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
- 4 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Από $f' \rightarrow f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

- ① Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
- ② Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
- ③ Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
- ④ Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Από $f' \rightarrow f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

- 1 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
- 2 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
- 3 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
- 4 Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Θεώρημα σταθερής συνάρτησης

Θεώρημα σταθερής συνάρτησης

Εστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο Δ όπου

- f συνεχής στο Δ
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

Τότε

$$f(x) = c, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

- ❶ Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
- ❷ Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
- ❸ Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
- ❹ Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

- ① Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
- ② Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
- ③ Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
- ④ Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

- ① Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
- ② Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
- ③ Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
- ④ Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

- ① Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
- ② Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
- ③ Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
- ④ Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Θεώρημα ίσων παραγώγων

Θεώρημα ίσων παραγώγων

Εστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες στο Δ όπου

- f και g συνεχείς στο Δ
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

Τότε

$$f(x) = g(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x) - 2f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x > 0$ είναι σταθερή
- ② Αν επιπλέον $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 1

Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x) - 2f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x > 0$ είναι σταθερή
- ② Αν επιπλέον $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 2

Εστω $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = x \sin x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$

Να δείξετε ότι $f(x) = x \cos x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$

Εξάσκηση 3

Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1 - xf(x)}{x^2}$ για κάθε $x > 0$

Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Εξάσκηση 4

Εστω $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) - \sigma\varphi x \cdot f(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$
Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x, x \in (0, \pi)$

Εξάσκηση 5

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = f(x) - e^x \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $f(x) = e^x \sigma \upsilon \nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 6

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 7

Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και ισχύουν

- $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) + 1$

Να δείξετε ότι $f(0) = g(0) + 1$

Εξάσκηση 8

Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) = x(f(x) - f'(x))$ για κάθε $x > 0$

- ① Αν $g(x) = xf(x)$, $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) = c \cdot e^x$, $x > 0$
- ② Αν επιπλέον $f(1) = e$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 8

Εστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) = x(f(x) - f'(x))$ για κάθε $x > 0$

- ① Αν $g(x) = xf(x)$, $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) = c \cdot e^x$, $x > 0$
- ② Αν επιπλέον $f(1) = e$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 9

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $2f(x) + 4xf'(x) + (x^2 + 9)f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$ και $f'(0) = \frac{1}{9}$

Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή

Εξάσκηση 11

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 0, g(0) = 1, f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

① $f^2(x) + g^2(x) = 1, x \in \mathbb{R}$

② $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 11

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 0, g(0) = 1, f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

- ① $f^2(x) + g^2(x) = 1, x \in \mathbb{R}$
- ② $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

Αν $x_1 = x_2$...

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.

Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Αρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

Αν $x_1 = x_2 \dots$

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.

Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Αρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

Αν $x_1 = x_2 \dots$

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.

Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Αρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

Αν $x_1 = x_2 \dots$

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.

Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Αρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

Αν $x_1 = x_2 \dots$

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.

Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Αρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

Αν $x_1 = x_2 \dots$

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.

Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Αρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$f(x_2) = f(x_1)$