

# Συναρτήσεις

## Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0$

Κωνσταντίνος Λόλας

Στο άπειρο λοιπόν...



# Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

# Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

Ορισμός απείρου

Αν για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  μπορώ να βρώ  $m \in A$  ώστε  $m > k$ , τότε λέμε ότι το  $A$  έχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς.

# Λάθος συλλογισμός

Το άπειρο ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ!

Ορισμός απείρου

Αν για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  μπορώ να βρώ  $m \in A$  ώστε  $m > k$ , τότε λέμε ότι το  $A$  έχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς.

άρα

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $x_0 \in A$  ώστε για κάθε  $x$  σε κατάλληλη περιοχή γύρω από το  $x_0$  να ισχύει  $f(x) > k$

# Ελληνικά!

## Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο άπειρο αν μεγαλώνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

# Ελληνικά!

## Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο άπειρο αν μεγαλώνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

ΜΟΝΟ ΕΓΩ θα επιτρέπεται να γράφω σκέτο  $\infty$  και θα εννοώ  $+\infty$  και εννοείται επειδή ξεχνάω!

# Το άλλο άπειρο?

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο μείον άπειρο αν μικραίνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



# Το άλλο άπειρο?

Ορισμός μη πεπερασμένου ορίου

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Θα λέμε ότι τείνει στο μείον άπειρο αν μικραίνει συνεχώς όταν πλησιάζουμε στο  $x_0$ . Τότε θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Αυτό δεν μπορώ να το παραβλέψω και αναγκαστικά το γράφω και εγώ!

# Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο  $+\infty$ .

# Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο  $+\infty$ . Πάμε...

# Πάμε στα γνωστά

Συναρτήσεις που πηγαίνουν στο  $+\infty$ . Πάμε...

- $\frac{1}{x}$
- $\frac{1}{x^2}$
- $\frac{1}{x^{2k}}$
- $\frac{1}{x^{2k+1}}$
- $\ln x$
- $\varepsilon\varphi(x)$

# Το άπειρο δεν είναι παιχνίδι (part 1)

Γρίφος time!

- Υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια.
- Έρχεται ένας ταλαιπωρημένος οδηγός και ζητάει δωμάτιο!!!!
- Ο ξενοδόχος του λέει ότι όλα τα δωμάτια είναι κατελημένα και δεν έχει ελεύθερο.
- Επειδή ο οδηγός είστε εσείς και κάνετε μαθηματικά με τον Λόλα, του δίνετε την λύση και τελικά παίρνετε το δωμάτιο 4.
- Προτείνετε μία λύση

## Το άπειρο δεν είναι παιχνίδι (part 2)

Μπορώ πολύ εύκολα να αποδείξω ότι  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$



# Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1,$

# Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$



# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

① Θέτουμε  $u = g(x)$

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

- 1 Θέτουμε  $u = g(x)$
- 2 Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

- 1 Θέτουμε  $u = g(x)$
- 2 Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 3 Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $k = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$

# Όλα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ ?

- ① Θέτουμε  $u = g(x)$
- ② Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- ③ Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το  $k = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$

Τότε αν  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε προφανώς  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = k$

# Εξάσκηση

Αν για τις συναρτήσεις  $f, g$  ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$$

να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) + f(x) \cdot g(x))$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$



# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-x} \right)$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

①  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x - 4, & 1 < x < 2. \end{cases}$  Να βρείτε (αν

υπάρχουν) τα όρια:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x - 4, & 1 < x < 2. \end{cases}$  Να βρείτε (αν

υπάρχουν) τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x - 4, & 1 < x < 2 \\ 2x - 1, & x > 2 \end{cases}$ . Να βρείτε (αν

υπάρχουν) τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

③  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ .

① Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ .

- 1 Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- 2 Να βρείτε το  $a$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha \sin x + \eta \mu x - \beta, & x < 0 \\ \alpha \sqrt{x+1} + 2\beta, & x \geq 0 \end{cases}$ . Να βρείτε  
τα  $\alpha$  και  $\beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$① \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει  $|f(x) - 2| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, για την οποία:

- ① Αν ισχύει  $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει  $|f(x) - 2| \leq x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ③ Αν ισχύει  $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x))$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ , όταν ισχύει:

$$2x - 3x^2 \leq f(x) \leq x^4 + 2x$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \epsilon\varphi x$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \left( x\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \left( x\eta\mu \frac{1}{x} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$$



# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{\eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{\eta \mu x}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x^2 + x}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x^2 + x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x - \eta \mu x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\pi - x)}{x^2 + x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x - \eta \mu x}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$



# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\pi - x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\pi - x}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}}$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x-1}}{x^2 - \sqrt{x}}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2}$$

# Εξάσκηση

Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2\eta\mu f(x)}{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu f(x)}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ .

Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)-1}{x}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ .

Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)-1}{x}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)-f(2x)}{x}$



# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

①  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

1  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$

2  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

# Εξάσκηση

Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2-x+1)-3}{x-1}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  όταν:

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$  και  $x_0 = 2$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  όταν:

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$  και  $x_0 = 2$

②  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3$  και  $x_0 = 2$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  όταν:

①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$  και  $x_0 = 2$

②  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3$  και  $x_0 = 2$

③  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)+\eta\mu x}{x} = 2$  και  $x_0 = 0$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

① Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

- 1 Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 2 Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + x f(x) + x \eta \mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta \mu^2 x}$



# Εξάσκηση

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$① \quad f(x) = \sqrt{|x| - |\eta\mu x|}$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$① \quad f(x) = \sqrt{|x| - |\eta\mu x|}$$

$$② \quad f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x - x^2}$$

# Εξάσκηση

Να λύσετε την εξίσωση  $|\eta\mu x| = |\pi - x|$

# Εξάσκηση

1 Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu(x^2 + x) - x^2 = x$

# Εξάσκηση

- 1 Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu(x^2 + x) - x^2 = x$
- 2 Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x + 3\frac{\eta\mu x}{x}$ . Να αποδείξετε ότι

$$2x - 3 < f(x) < 2x + 3 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

# Εξάσκηση

Να υπολογίσετε τα όρια

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση