Συναρτήσεις

Παράγωγος

Κωνσταντίνος Λόλας

Μαγεία

Ξέρετε τι είναι η κλίση...

- ευθείας
- καμπύλης?

Μαγεία

Ξέρετε τι είναι η κλίση...

- ευθείας
- καμπύλης?

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Τι θα μάθουμε

- Τι είναι η κλίση μιας οποιαδήποτε συνάρτηση στο x_0 της (παράγωγος)
- Από κλίση στο x_0 θα πάμε στο $x \in D_f$ (παράγωγος συνάρτηση)
- Από παράγωγο συνάρτησης, μονοτονία και τα συναφή (ακρότατα, Σ.Τ.)
- Από παράγωγο παραγώγου, κυρτότητα
- Νέα θεωρήματα (Rolle, ΘΜΤ)
- Υπολογισμός ορίων που αφήσαμε πιο πίσω ($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)
- Μελέτη συνάρτησης (Γραφικά)
- Το αγαπημένο μου διαφορικές εξισώσεις

Κλίση σε σημείο = Παράγωγος

Ας παίξουμε Geogebra

Ορισμός

Παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση f. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ και γράφουμε $f'(x_0)$ αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Με αντικατάσταση $x = x_0 + h$

Άλλος τύπος

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ορισμός

Παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση f. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D_f$ και γράφουμε $f'(x_0)$ αν υπάρχει το όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Με αντικατάσταση $x = x_0 + h$

Άλλος τύπος

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Άμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Άμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Άμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Άμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Άμεσες απορίες - παρατηρήσεις

- Τι σημαίνει λοιπόν υπάρχει $f'(x_0)$
- Πότε δεν θα υπάρχει?
- Γραφικά πώς θα είναι η συνάρτηση που είναι (δεν είναι) παραγωγίσιμη
- Πάλι όρια!
- Με την συνέχεια τι έγινε?

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
Άρα Συνέχεια $\nrightarrow$ Παράγωγος

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Άρα Συνέχεια $\nrightarrow$ Παράγωγος

Θεώρημα

Παράγωγος $\rightarrow$ Συνέχεια

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Φτιάξτε συνάρτηση (γραφικά) που ενώ είναι συνεχής σε ένα σημείο, δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
Άρα Συνέχεια $\nrightarrow$ Παράγωγος

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\frac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\frac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Συμβολισμοί

- Lagrange $f'(x)$
- Leibniz $\frac{df}{dx}$
- Euler $f_x(x)$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 εφόσον υπάρχει

1. $f(x) = 1 + \eta\mu x$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 1$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 εφόσον υπάρχει

1. $f(x) = 1 + \eta\mu x$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x_0 = 1$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x + 1 - x\eta\mu|x|$, στο σημείο $x_0 = 0$.

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, όταν

1. $\begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, όταν

1. $\begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 \eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Εξάσκηση 4

Αν $x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την

$$\frac{df(0)}{dx}$$

Εξάσκηση 5

Αν για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(3+h) = 2 + h^2 + \eta\mu h, \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$ και να βρείτε την $f'(3)$.

Εξάσκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\eta\mu^2 x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Εξάσκηση 7

Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεις στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

1. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, αν $x_0 = 0$
2. $f(x) = |x-1| + 3x - 2$, αν $x_0 = 1$

Εξάσκηση 7

Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεις στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

1. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, αν $x_0 = 0$
2. $f(x) = |x-1| + 3x - 2$, αν $x_0 = 1$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε τις τιμές των α και β, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + 1, & x \leq 1 \\ \beta x + 3, & x > 1 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Εξάσκηση 9

Έστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$

Εξάσκηση 9

Έστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-2x}{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^2(x)-2f(x)}{x^2-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{xf(x)-2}{x-1}$

Εξάσκηση 9

Έστω η συνάρτηση f με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$

Εξάσκηση 10

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(3)=0$ και $f'(3)=5$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(2x-1)}{x-2}$

Εξάσκηση 11

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} = 2f'(1)$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} = 2f'(1)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} xf\left(x+\frac{1}{X}\right) = f'(1)$, αν $f(1) = 0$

Εξάσκηση 11

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} = 2f'(1)$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} = 2f'(1)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} xf\left(x+\frac{1}{X}\right) = f'(1)$, αν $f(1) = 0$

Εξάσκηση 11

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} xf\left(x + \frac{1}{X}\right) = f'(1)$, αν $f(1) = 0$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

1. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 4$
2. $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-2}{h} = 8$
3. $\lim_{x \to +\infty} \left[x f\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2x \right]$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 4$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-2}{h} = 8$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x f\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2x\right]$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 4$
2. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-2}{h} = 8$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x f\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2x \right]$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
2. $f'(1) = 3$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
2. $f'(1) = 3$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(2x^2-x)}{x-1}$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x^3, x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
2. $f'(1) = 3$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(2x^2-x)}{x-1}$

Εξάσκηση 14

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ και ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Με θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[10, 11]$ με $f(10) = 1024$ και $f(11) = 2048$. Αφού $2023 \in (1024, 2048)$ υπάρχει x_0...

Πίσω στην άσκηση

Με Bolzano ή με μέγιστης ελάχιστης τιμής και ΘΕΤ.

$$f(3) < f(2) < f(1)$$
$$3f(3) < f(1) + f(2) + f(3) < 3f(1)$$
$$f(3) < \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3} < f(1)$$

Πίσω στην άσκηση

Προφανές ελάχιστο στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Ως συνεχής στο $[1, 3]$ έχει σίγουρα ΚΑΙ μέγιστο στο $(1, 3)$

Πίσω στην άσκηση

Η συνάρτηση ‘απόστασης‘ $f(x) - x$ είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα και έχει σίγουρα μέγιστο

Πίσω στην άσκηση

Όμοια με την Άσκηση 2

Πίσω στην άσκηση

1. Είναι γνησίως αύξουσα άρα $(f(+\infty), f(-\infty))$
2. Προφανώς $[f(0), f(1)]$...

Πίσω στην άσκηση