

Πολυώνυμα

Βασικά

Κωνσταντίνος Λόλας

Πού βρισκόμαστε?

Πιάνουμε πολυώνυμα

- 1 Ορισμοί
- 2 Μορφές
- 3 Πράξεις
- 4 Ρίζες
- 5 Παραγοντοποίηση
- 6 Πρόσημο

Πού βρισκόμαστε?

Πιάνουμε πολυώνυμα

- 1 Ορισμοί
- 2 Μορφές
- 3 Πράξεις
- 4 Ρίζες
- 5 Παραγοντοποίηση
- 6 Πρόσημο

Πού βρισκόμαστε?

Πιάνουμε πολυώνυμα

- 1 Ορισμοί
- 2 Μορφές
- 3 Πράξεις
- 4 Ρίζες
- 5 Παραγοντοποίηση
- 6 Πρόσημο

Πού βρισκόμαστε?

Πιάνουμε πολυώνυμα

- 1 Ορισμοί
- 2 Μορφές
- 3 Πράξεις
- 4 Ρίζες
- 5 Παραγοντοποίηση
- 6 Πρόσημο

Πού βρισκόμαστε?

Πιάνουμε πολυώνυμα

- 1 Ορισμοί
- 2 Μορφές
- 3 Πράξεις
- 4 Ρίζες
- 5 Παραγοντοποίηση
- 6 Πρόσημο

Πού βρισκόμαστε?

Πιάνουμε πολυώνυμα

- 1 Ορισμοί
- 2 Μορφές
- 3 Πράξεις
- 4 Ρίζες
- 5 Παραγοντοποίηση
- 6 Πρόσημο

Παλιά, Ξινά σταφύλλια

Μονώνυμο του x

Καλούμε μονώνυμο κάθε παράσταση της μορφής $\alpha \cdot x^\nu$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$

Πολυώνυμο του x

Καλούμε πολυώνυμο κάθε παράσταση της μορφής

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq \nu$

Παλιά, Ξινά σταφύλλια

Μονώνυμο του x

Καλούμε μονώνυμο κάθε παράσταση της μορφής $\alpha \cdot x^\nu$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$

Πολυώνυμο του x

Καλούμε πολυώνυμο κάθε παράσταση της μορφής

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq \nu$

Παλιά, Ξινά σταφύλλια

Ορισμοί στα πολυώνυμα

- Όροι: Τα μονώνυμα $\alpha_i x^i$, $0 \leq i \leq \nu$
- Συντελεστές: Οι πραγματικοί α_i , $0 \leq i \leq \nu$
- Σταθερός όρος: Το α_0
- Σταθερό πολυώνυμο: το πολυώνυμο α_0
- Μηδενικό πολυώνυμο: το πολυώνυμο με όλα τα $\alpha_i = 0$, $0 \leq i \leq \nu$
- Βαθμός πολυωνύμου: ο μεγαλύτερος εκθέτης από τους μη μηδενικούς όρους

Ισότητα

Ισότητα Πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και } \beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

με $\nu \geq \kappa$

είναι ίσα όταν

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\kappa = \beta_\kappa \text{ και } \beta_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+2} = \dots = \beta_\nu = 0$$

Πολυώνυμο = Συνάρτηση, άρα...

Αριθμητική Τιμή

Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$

Αριθμητική τιμή ή απλά τιμή του είναι κάθε αριθμός $P(\rho)$ με $\rho \in \mathbb{R}$

$$P(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$$

Ρίζα

Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$

Ρίζα του είναι κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ με $P(\rho) = 0$

Πράξεις

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση
- Πολλαπλασιασμός
- Διαίρεση!!!!

Τι γίνεται με τους βαθμούς?

Πράξεις

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση
- Πολλαπλασιασμός
- Διαίρεση!!!!

Τι γίνεται με τους βαθμούς?

Πράξεις

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση
- Πολλαπλασιασμός
- Διαίρεση!!!!

Τι γίνεται με τους βαθμούς?

Πράξεις

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση
- Πολλαπλασιασμός
- Διαίρεση!!!!

Τι γίνεται με τους βαθμούς?

Πράξεις

- Πρόσθεση
- Αφαίρεση
- Πολλαπλασιασμός
- Διαίρεση!!!!

Τι γίνεται με τους βαθμούς?

Εξάσκηση 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x + 2$

- 1 Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για $x = 2$
- 2 Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 1 και -1 είναι ρίζες του

Εξάσκηση 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x + 2$

- ① Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για $x = 2$
- ② Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 1 και -1 είναι ρίζες του

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x + 1$$

για $x = 2$ είναι 5 και ο αριθμός 1 είναι ρίζα του

Εξάσκηση 3

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - x$ και $Q(x) = 2x - 1$. Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και τον βαθμό τους:

① $R(x) = 2P(x) - 3Q(x)$

② $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$

③ $\Phi(x) = (Q(x))^2$

Εξάσκηση 3

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - x$ και $Q(x) = 2x - 1$. Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και τον βαθμό τους:

① $R(x) = 2P(x) - 3Q(x)$

② $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$

③ $\Phi(x) = (Q(x))^2$

Εξάσκηση 3

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - x$ και $Q(x) = 2x - 1$. Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και τον βαθμό τους:

① $R(x) = 2P(x) - 3Q(x)$

② $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$

③ $\Phi(x) = (Q(x))^2$

Εξάσκηση 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x + 1)\lambda^2 + (x^2 - 1)\lambda - x^2 - x + 2$.

- 1 Να βρείτε τους συντελεστές του πολυωνύμου $P(x)$ και το σταθερό όρο του
- 2 Να δείξετε ότι ο σταθερός όρος του είναι μη μηδενικός για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- 3 Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο

Εξάσκηση 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x + 1)\lambda^2 + (x^2 - 1)\lambda - x^2 - x + 2$.

- 1 Να βρείτε τους συντελεστές του πολυωνύμου $P(x)$ και το σταθερό όρο του
- 2 Να δείξετε ότι ο σταθερός όρος του είναι μη μηδενικός για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- 3 Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο

Εξάσκηση 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x + 1)\lambda^2 + (x^2 - 1)\lambda - x^2 - x + 2$.

- 1 Να βρείτε τους συντελεστές του πολυωνύμου $P(x)$ και το σταθερό όρο του
- 2 Να δείξετε ότι ο σταθερός όρος του είναι μη μηδενικός για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- 3 Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο

Εξάσκηση 5

Να βρείτε τιμές του μ , για τις οποίες το πολυώνυμο

$$P(x) = (\mu^3 - 1)x^3 + (\mu^2 - \mu)x + |\mu| - 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α , β και γ για τις οποίες τα πολυώνυμα

$$P(x) = (\alpha - 2)x^2 - 3x \text{ και } Q(x) = (\beta - 1)x + \gamma - \alpha$$

είναι ίσα

Εξάσκηση 7

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ και δ για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = \alpha x(x^2 - 1) + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

Εξάσκηση 8

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x - \lambda + 2$. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες:

- ❶ Το $P(x)$ είναι 1ου βαθμού
- ❷ Το $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού
- ❸ Δεν ορίζεται βαθμός του $P(x)$

Εξάσκηση 8

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x - \lambda + 2$. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες:

- ❶ Το $P(x)$ είναι 1ου βαθμού
- ❷ Το $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού
- ❸ Δεν ορίζεται βαθμός του $P(x)$

Εξάσκηση 8

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x - \lambda + 2$. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες:

- ① Το $P(x)$ είναι 1ου βαθμού
- ② Το $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού
- ③ Δεν ορίζεται βαθμός του $P(x)$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε πολυώνυμο 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $-1, 0$ και να ισχύει $P(1) = 4$

Εξάσκηση 10

Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου

$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x - \lambda + 2$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(x^2 + 1)P(x) = 2x^3 - x(x - 2) - 1$$

Εξάσκηση 12

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1, να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$$Q(x) = P(x^2 - 3) + (x - 2)P(3x)$$

έχει ρίζα το 2

Εξάσκηση 13

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει

$$P(x + 1) = x^3 - 3x + 1$$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει

$$[P(x)]^2 - P(x) = x^2 + x$$