# Πολυώνυμα Διαίρεση

Κωνσταντίνος Λόλας

Εννοείται τη διαίρεση!

Εννοείται τη διαίρεση! και ειδικά την κάθετη!

Εννοείται τη διαίρεση! Να σας δω: Να γίνει η διαίρεση

51.32:2.7

Εννοείται τη διαίρεση! Το τέλειο φέτος είναι ότι θα ασχολούμαστε <u>MONO</u> με ακέραιους συντελεστές

# Δημοτικό ολέ!

#### Ευκελείδεια Διαίρεση

Για κάθε ζευγάρι φυσικών  $\Delta$  και  $\delta>0$ , υπάρχουν μοναδικοί  $\pi\in\mathbb{N}$  και  $v\in\mathbb{N}$  ώστε

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$
, he  $0 \le \upsilon < \delta$ 

Με ονομασίες:  $\Delta$  διαιρετέος,  $\delta$  διαιρέτης,  $\pi$  πηλίκο και v υπόλοιπο

Αλλη μορφή της διαίρεσης

Av 
$$\Delta = \delta \cdot \pi + v$$
 tóte

$$\frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\imath}{\delta}$$

Λόλας Πολυώνυμα 3/25

## Δημοτικό ολέ!

#### Ευκελείδεια Διαίρεση

Για κάθε ζευγάρι φυσικών  $\Delta$  και  $\delta>0$ , υπάρχουν μοναδικοί  $\pi\in\mathbb{N}$  και  $v \in \mathbb{N}$  ώστε

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$
, he  $0 \le \upsilon < \delta$ 

Με ονομασίες:  $\Delta$  διαιρετέος,  $\delta$  διαιρέτης,  $\pi$  πηλίκο και v υπόλοιπο

#### Αλλη μορφή της διαίρεσης

Aν 
$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$
 τότε

$$\frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta}$$

Λόλας Πολυώνυμα 3/25

#### Περνάμε στα καινούρια

#### Διαίρεση Πολυωνύμων

Για κάθε ζευγάρι πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x) \neq 0$ , υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $\upsilon(x)$  ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

Με  $\upsilon(x)$  να είναι μηδενικό πολυώνυμο ή βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $\delta(x)$ 

Αλλη μορφή της διαίρεσης

Αν 
$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$
 τότε

$$\frac{\Delta(x)}{\delta(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{\delta(x)}$$

Λόλας Πολυώνυμα 4/25

#### Περνάμε στα καινούρια

#### Διαίρεση Πολυωνύμων

Για κάθε ζευγάρι πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x) \neq 0$ , υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $\upsilon(x)$  ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

Με  $\upsilon(x)$  να είναι μηδενικό πολυώνυμο ή βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $\delta(x)$ 

#### Αλλη μορφή της διαίρεσης

Aν  $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$  τότε

$$\frac{\Delta(x)}{\delta(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{\delta(x)}$$

Λόλας Πολυώνυμα 4/25

- ①  $(x^2-1):(x-1)$
- $(x^2-1):(x)$
- $(x^2 + 2x + 3) : (x+1)$

- ①  $(x^2-1):(x-1)$
- $(x^2-1):(x)$
- $(x^2 + 2x + 3) : (x+1)$

- $(x^2-1):(x)$
- $(x^2+2x+3):(x+1)$

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 | x - 3 |$$

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \frac{|x - 3|}{|x^2|}$$

$$\begin{array}{c|c} x^3 - 5x^2 + 2x & -1 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x^2 \\ \hline -2x^2 + 2x & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x^3 - 5x^2 + 2x & -1 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x^2 + 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
x^3 - 5x^2 + 2x & -1 & x - 3 \\
-x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x \\
\hline
-2x^2 + 2x & 2x^2 - 6x
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
x^3 - 5x^2 + 2x & -1 & x - 3 \\
-x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x \\
\hline
-2x^2 + 2x & \\
2x^2 - 6x & \\
-4x & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
x^3 - 5x^2 + 2x & -1 & x - 3 \\
-x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x - 4 \\
\hline
-2x^2 + 2x & \\
2x^2 - 6x & \\
-4x & -1
\end{array}$$

Από γνωστά

Αρα

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x - 3} = x^2 - 2x - 4 + \frac{-13}{x - 3}$$

- ullet x-5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $\bullet \ x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^5 + 3x + 2$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...

Apa 
$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$$

- x-5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^5 + 3x + 2$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής..

Ara 
$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$$

- x-5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $\bullet x^5 + 3x + 2$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...

$$Aρα P(x) = (x - ρ)π(x) + v$$

- $\bullet$  x-5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $\bullet x^5 + 3x + 2$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...

Αρα 
$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

## 1 Θεωρηματάκι

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

#### Βρείτε τρόπο να υπολογίσετε το $\upsilon$

Θεώρημα Υπολοίπου

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το  $x-\rho$  δίνει υπόλοιπο  $P(\rho)$ 

### 1 Θεωρηματάκι

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

Βρείτε τρόπο να υπολογίσετε το v

Θεώρημα Υπολοίπου

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το  $x-\rho$  δίνει υπόλοιπο  $P(\rho)$ 

# Και το πόρισμά του!

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

Τι γίνεται αν  $P(\rho) = 0$ ?

Πόρισμα Υπολοίπου

Aν  $P(\rho)=0$  τότε  $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$  δηλαδή το  $x-\rho$  είναι παράγοντας

Γενικά

Ενα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του

# Και το πόρισμά του!

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

Τι γίνεται αν  $P(\rho) = 0$ ?

#### Πόρισμα Υπολοίπου

Αν  $P(\rho)=0$  τότε  $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$  δηλαδή το  $x-\rho$  είναι παράγοντας

Γενικό

Ενα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του

Λόλας Πολυώνυμα 9/25

## Και το πόρισμά του!

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

Τι γίνεται αν  $P(\rho) = 0$ ?

#### Πόρισμα Υπολοίπου

Αν  $P(\rho)=0$  τότε  $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$  δηλαδή το  $x-\rho$  είναι παράγοντας

#### Γενικά

Ενα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του

Λόλας Πολυώνυμα 9/25

# Σχήμα Horner

Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{ίσως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

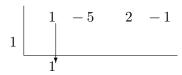
- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- $oldsymbol{2}$  γράφουμε το lpha δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!

Λόλας Πολυώνυμα 10/25

# Σχήμα Horner

Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με x-lpha τότε ίσως είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

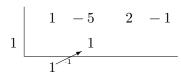
- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- γράφουμε το  $\alpha$  δεξιά
- ράβουμε!!!!!



# Σχήμα Horner

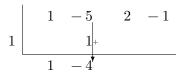
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με x-lpha τότε ίσως είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- γράφουμε το  $\alpha$  δεξιά
- ράβουμε!!!!!



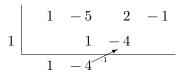
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με x-lpha τότε ίσως είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- γράφουμε το  $\alpha$  δεξιά
- ράβουμε!!!!!



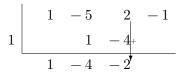
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{ίσως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



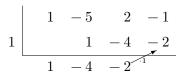
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με x-lpha τότε ίσως είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- γράφουμε το  $\alpha$  δεξιά
- ράβουμε!!!!!



Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{ίσως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- $\mathbf{2}$  γράφουμε το  $\alpha$  δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{ίσως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- $\mathbf{2}$  γράφουμε το  $\alpha$  δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!

#### Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+3x+1$

- f 1 Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- ③ Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- 🐠 Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλειο
- Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) = P(x) (4x+1) διαιρείται από το  $x^2-1$

#### Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x + 1$

- f Q Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- ③ Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- 🚇 Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 3x + 1$ 

- f 1 Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- ② Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο  $\upsilon(x)$  της παραπάνω διαίρεσης
- Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- 🚇 Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια
- § Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) = P(x) (4x+1) διαιρείται από το  $x^2-1$

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 3x + 1$ 

- f 1 Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- ② Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο  $\upsilon(x)$  της παραπάνω διαίρεσης
- Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- 🚇 Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια
- § Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) = P(x) (4x+1) διαιρείται από το  $x^2-1$

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 3x + 1$ 

- f 1 Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια
- Nα δείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) = P(x) - (4x+1) διαιρείται από το  $x^2-1$

Εστω το πολυώνυμο  $P(x) = (x^2 - 1)(3x - 2) + 5x - 1$ 

- Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x):(x^2-1)$

Λόλας Πολυώνυμα 12/25

Εστω το πολυώνυμο  $P(x) = (x^2 - 1)(3x - 2) + 5x - 1$ 

- Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x):(x^2-1)$
- Η παραπάνω ισότητα είναι η ταυτότητα διαίρεσης του P(x) με το 3x - 2:

Λόλας Πολυώνυμα 12/25

- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 - 5x + 1$  me to x + 1

Λόλας Πολυώνυμα 13/25

- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 - 5x + 1$  us to x + 1
- ② Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x) = 2x^2 - \alpha x + \alpha$  με το  $x + 2\alpha$  είναι 11

Λόλας Πολυώνυμα 13/25

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x-1 είναι 2, να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $Q(x)=P(3x+7)-x^2+2$  έχει ρίζα το -2

> Λόλας Πολυώνυμα 14/25

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το  $3x^2-x-4$ είναι 2x+5, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1

> Λόλας Πολυώνυμα 15/25

- Να εξετάσετε, αν τα πολυώνυμα x+1 και x-1 είναι παράγοντες του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 - x^2 + 2$

Λόλας Πολυώνυμα 16/25

- Να εξετάσετε, αν τα πολυώνυμα x+1 και x-1 είναι παράγοντες του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 - x^2 + 2$
- **2** Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha^3 x^3 - 5x + 2$  έχει παράγοντα το x - 2

Λόλας Πολυώνυμα 16/25

Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής  $x-\rho$ 

$$P(x) = 3x^6 + 5x^2 + 3$$

$$Q(x) = -3x^4 - 5x^2 - 3$$

Πολυώνυμα Λόλας 17/25

Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής  $x-\rho$ 

$$P(x) = 3x^6 + 5x^2 + 3$$

$$Q(x) = -3x^4 - 5x^2 - 3$$

Πολυώνυμα Λόλας 17/25

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες το πολυώνυμο  $P(x) = -x^3 + 2\alpha x - \beta + \alpha$ , έχει παράγοντα το x + 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 3.

> Λόλας Πολυώνυμα 18/25

Αν το πολυώνυμο  $P(x)=x^3+\alpha x-\alpha+\beta$  έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου  $x^2-2x$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ 

> Λόλας Πολυώνυμα 19/25

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιραίσεων και να γράψετε τις ταυτότητες των διαιρέσεων

$$2 -2x^3 : (x+1)$$

Λόλας Πολυώνυμα 20/25

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιραίσεων και να γράψετε τις ταυτότητες των διαιρέσεων

- $2 -2x^3 : (x+1)$

Λόλας Πολυώνυμα 20/25

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 7x + 6$  διαιρείται με το πολυώνυμο Q(x) = (x-1)(x+3) και στη συνέχεια, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης P(x):Q(x)

Λόλας Πολυώνυμα 21/25

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^5$ , όπου  $\nu$  θετικός αριθμός. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 

Λόλας Πολυώνυμα 22/25

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το  $x^2 + x$ , όταν ισχύουν P(0) = 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του P(x) με το x + 1 είναι 3

> Λόλας Πολυώνυμα 23 / 25

Να γράψετε τις παρακάτω συναρτήσεις στη μορφή  $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$ 

① 
$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$
  
②  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ 

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Λόλας Πολυώνυμα 24/25

Να γράψετε τις παρακάτω συναρτήσεις στη μορφή  $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$ 

① 
$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$
  
②  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ 

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Λόλας Πολυώνυμα 24/25

Εστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το  $x^2+3$ 

- ① Να βρείτε τη μορφή του πηλίκου  $\pi(x)$
- ② Αν επιπλέον έχει ρίζα το -1 και ισχύει P(-2)=14, να βρείτε το P(x)

Λόλας Πολυώνυμα 25/25

Εστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το  $x^2+3$ 

- ① Να βρείτε τη μορφή του πηλίκου  $\pi(x)$
- ② Αν επιπλέον έχει ρίζα το -1 και ισχύει P(-2)=14, να βρείτε το P(x)

Λόλας Πολυώνυμα 25/25