Συναρτήσεις, Μονοτονία

Κωνσταντίνος. Λόλας

Μονοτονία Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Μονοτονία Συναρτήσεων

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Ποιός δεν αναρωτιέται?

Ισχύει η συνεπαγωγή για έστω μια γνησίως αύξουσα

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

?

Ποιός δεν αναρωτιέται?

Ισχύει η συνεπαγωγή για έστω μια γνησίως αύξουσα

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

Φυσικά (?)

αύξουσα, σκέτο αύξουσα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι <u>αύξουσα</u> σε ένα διάστημα Δ αν

για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

αύξουσα, σκέτο αύξουσα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι <u>αύξουσα</u> σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f είναι <u>φθίνουσα</u> σε ένα διάστημα Δ αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2)$$

Συγκρατήσαμε τίποτα?

Παραδείγματα

- $f(x) = x^2$

Συγκρατήσαμε τίποτα?

Παραδείγματα

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = 1/x$

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b$, $a > 0$
- $\ln x$
- x^2, $x \geq 0$
- x^3
- e^x, 2^x
- $\eta\mu x$, $0 < x < \pi/2$
- $\varepsilon\varphi x$

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b$, $a > 0$
- $\ln x$
- x^2, $x \geq 0$
- x^3
- e^x, 2^x
- $\eta\mu x$, $0 < x < \pi/2$
- $\varepsilon\varphi x$

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις θυμάστε

Οι ελέφαντες θυμούνται, εσείς?

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b$, $a > 0$
- $\ln x$
- x^2, $x \geq 0$
- x^3
- e^x, 2^x
- $\eta\mu x$, $0 < x < \pi/2$
- $\varepsilon\varphi x$

Γράψτε στο τετράδιο όσες γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις θυμάστε

- $ax + b$, $a < 0$
- x^2, $x \leq 0$
- $-x^3$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, e^{-x}
- $\sigma\upsilon\nu x$, $0 < x < \pi/2$
- $\frac{1}{x}$, $x < 0$

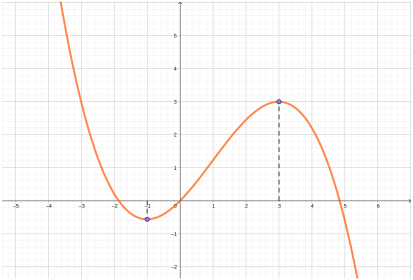
Μπρίκια κολάμε?

Θα ασχολούμαστε

- με κατασκευές
- ανισώσεις

Η συνάρτηση f του σχήματος είναι ορισμένη στους πραγματικούς αριθμούς.

- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της
- Να συγκρίνετε τις τιμές
  - $f(2)$ και $f(e)$
  - $f(3)$ και $f(\pi)$



Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 5$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 5$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2022)$ και $f(2023)$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να αποδείξετε ότι:
    1. Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να αποδείξετε ότι:
   1. Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$
   2. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να αποδείξετε ότι:
    1. Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$
    2. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$
    3. Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να αποδείξετε ότι:
   1. Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$
   2. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$
   3. Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$
   4. Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να αποδείξετε ότι:
    1. Αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$
    2. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$
    3. Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$
    4. Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$
    5. Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

Εξάσκηση

1. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$

Εξάσκηση

1. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
   1. $g(x) = \ln f(x)$

Εξάσκηση

1. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
    1. $g(x) = \ln f(x)$
    2. $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- $f(x) > f(3)$
- $f(2x+1) < 5$, αν $f(3) = 5$
- $f(x^2 - 3x) \geq f(2 - 4x)$
- $f\left(f(3x-1)\right) < f\left(f(2x+3)\right)$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να λύσετε τις ανισώσεις:
    1. $f(x) > 0$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   1. $f(x) > 0$
   2. $e^x + x < e + 1$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   1. $f(x) > 0$
   2. $e^x + x < e + 1$
   3. $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία
2. Να λύσετε τις ανισώσεις:
   1. $f(x) > 0$
   2. $e^x + x < e + 1$
   3. $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$
   4. $e^{f(x)} + f(x) - x > e^x$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$
2. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$
2. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$
3. $\ln^5 x + \ln x < 2$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x < \frac{2}{x^4+1}$
2. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, στο $(0, +\infty)$
3. $\ln^5 x + \ln x < 2$
4. $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x+1)$

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x+1)$

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2+1) > 0$

Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x+1)$

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2+1) > 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

Εξάσκηση

Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $e^x + x^3 < 1$

Εξάσκηση

Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $e^x + x^3 < 1$
2. $e^x - e^{x^2} > \ln x$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$ και $f \uparrow$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $f(x) + e^x > 2$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$ και $f \uparrow$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $f(x) + e^x > 2$
2. $(x+1)f(x) < 1$, στο $(-1, +\infty)$

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 0$.

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g

Εξάσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 0$.

1. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g
2. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g

Εξάσκηση

Έστω $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1, -2)$, $\mathrm{B}(2, -3)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.

1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα

Εξάσκηση

Έστω $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1, -2)$, $\mathrm{B}(2, -3)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.

1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα
2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Εξάσκηση

Έστω $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1, -2)$, $\mathrm{B}(2, -3)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.

1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα
2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
3. Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$

Εξάσκηση

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $g \uparrow$ και

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να λύσετε τις ανισώσεις
   1. $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$, αν $f(1) = f(2)$

Εξάσκηση

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $g \uparrow$ και

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να λύσετε τις ανισώσεις
    1. $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$, αν $f(1) = f(2)$
    2. $f(\sqrt{x} + 1) f(x+1) < f(\sqrt{x}) - f(x)$

Εξάσκηση

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $g \uparrow$ και

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να λύσετε τις ανισώσεις
   1. $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$, αν $f(1) = f(2)$
   2. $f(\sqrt{x} + 1) f(x+1) < f(\sqrt{x}) - f(x)$
2. Να αποδείξετε ότι

$$f(e^x + 1) - f(\eta\mu x + 1) > f(e^x) - f(\eta\mu x), \text{ για κάθε } x > 0$$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα

1. Να δείξετε ότι $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$, για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα

1. Να δείξετε ότι $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$, για κάθε $x > 0$
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8)$, στο $(0, +\infty)$

Εξάσκηση

1. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις όπου $g \circ f \downarrow$ και $g \uparrow$. Να δείξετε ότι $f \downarrow$

Εξάσκηση

1. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις όπου $g \circ f \downarrow$ και $g \uparrow$. Να δείξετε ότι $f \downarrow$
2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + e^{f(x)} - e^{-x} - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

   Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτνία

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση