

# Τριγωνομετρία

## Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Κωνσταντίνος Λόλας

## Γεύση από το μέλλον (part 2)

### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- 1 νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- 2 γραφική παράσταση  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\varphi x$  και  $\sigma\varphi x$
- 3 γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

## Γεύση από το μέλλον (part 2)

### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- 1 νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- 2 γραφική παράσταση  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\varepsilon\varphi x$  και  $\sigma\varphi x$
- 3 γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

## Γεύση από το μέλλον (part 2)

### Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- 1 νέα ιδιότητα συναρτήσεων (περίοδος)
- 2 γραφική παράσταση  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\varphi x$  και  $\sigma\varphi x$
- 3 γραφική παράσταση σύνθετων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

# Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- 1 περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της  $T \approx 24$  ώρες
- 2 λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- 3 σελήνης γύρω από τη γη  $\approx 27$  ημέρες...

# Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- 1 περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της  $T \approx 24$  ώρες
- 2 λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- 3 σελήνης γύρω από τη γη  $\approx 27$  ημέρες...

# Καταιγίδα πριν την λιακάδα

Γνωστή έννοια με άγνωστα μαθηματικά... Περίοδος

- 1 περιστροφής γης γύρω από τον εαυτό της  $T \approx 24$  ώρες
- 2 λεπτοδείκτη 60 λεπτά
- 3 σελήνης γύρω από τη γη  $\approx 27$  ημέρες...

# Λίλιιγο μαθηματικά

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει αριθμός  $T$  τέτοιος ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

- $x + T \in A, x - T \in A$

και

- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός  $T$  λέγεται περίοδος της συνάρτησης  $f$

## Ορισμός (εξτρά)

Θεμελιώδης περίοδος είναι το μικρότερο θετικό  $T$



# Λίλιιγο μαθηματικά

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει αριθμός  $T$  τέτοιος ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

- $x + T \in A, x - T \in A$

και

- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός  $T$  λέγεται περίοδος της συνάρτησης  $f$

## Ορισμός (εξτρά)

Θεμελιώδης περίοδος είναι το μικρότερο θετικό  $T$

# Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$  με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $T = 4\pi$

# Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$  με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $T = 4\pi$

•  $\sigma\upsilon\nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν

ή με περίοδο  $\pi$

# Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$  με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\epsilon\varphi x$  με περίοδο  $\pi$

# Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$  με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\epsilon\varphi x$  με περίοδο  $\pi$

# Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$  με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\varepsilon\varphi x$  με περίοδο  $\pi$

# Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$  με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\varepsilon\varphi x$  με περίοδο  $\pi$

# Δεν κρατιέστε!

Γνωστές περιοδικές συναρτήσεις

- $\eta\mu x$  με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $T = 4\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x$  με περίοδο το ίδιο με πριν
- $\varepsilon\varphi x$  με περίοδο  $\pi$



# Γραφικές yeah!

- Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\eta\mu x$  στο Geogebra
- Για το  $\sigma\upsilon\nu x$  σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\epsilon\varphi x$  στο Geogebra

# Γραφικές yeah!

- Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\eta\mu x$  στο Geogebra
- Για το  $\sigma\upsilon\nu x$  σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\varepsilon\varphi x$  στο Geogebra

# Γραφικές yeah!

- Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\eta\mu x$  στο Geogebra
- Για το  $\sigma\upsilon\nu x$  σιγά μην ξανακάνουμε το ίδιο
- Ας δούμε την γραφική παράσταση της  $\varepsilon\varphi x$  στο Geogebra

# Εξάσκηση 1

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  έχει περίοδο  $T = \pi$

## Εξάσκηση 2

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

①  $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x} - 3\sigma\nu\nu x$

②  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$

## Εξάσκηση 2

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

①  $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x} - 3\sigma\upsilon\nu x$

②  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$

## Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

①  $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

②  $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

③  $\epsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \epsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

④  $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

## Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

①  $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

②  $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \varepsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

④  $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$



## Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

①  $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

②  $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \varepsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

④  $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

## Εξάσκηση 3

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

①  $\eta\mu\frac{\pi}{5}, \eta\mu\frac{\pi}{7}$

②  $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$

③  $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{5}, \varepsilon\varphi\frac{\pi}{7}$

④  $\sigma\varphi\frac{\pi}{5}, \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$

## Εξάσκηση 4

- ① Να δείξετε ότι αν,  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , τότε  $2\eta\mu x - 1 < 0$
- ② Να δείξετε ότι αν,  $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ , τότε  $\varepsilon\varphi x + 1 > 0$

## Εξάσκηση 4

- ① Να δείξετε ότι αν,  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , τότε  $2\eta\mu x - 1 < 0$
- ② Να δείξετε ότι αν,  $x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ , τότε  $\varepsilon\varphi x + 1 > 0$

## Εξάσκηση 5

Σε ένα σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$  και στη συνέχεια, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = 1 + \eta\mu x$

## Εξάσκηση 6

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = |\eta\mu x|$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$

## Εξάσκηση 7

Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους

①  $f(x) = 3\eta\mu 2x$

②  $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$

③  $f(x) = \varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$

## Εξάσκηση 7

Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους

①  $f(x) = 3\eta\mu 2x$

②  $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$

③  $f(x) = \varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$



## Εξάσκηση 7

Στις παρακάτω συναρτήσεις:

- Να εξετάσετε αν είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους
- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους

①  $f(x) = 3\eta\mu 2x$

②  $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$

③  $f(x) = \varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2}$

## Εξάσκηση 8

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu\frac{x}{2}$

## Εξάσκηση 9

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

## Εξάσκηση 10

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - x)$

## Εξάσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$  έχει περίοδο  $T = 4\pi$

## Εξάσκηση 12

Αν η συνάρτηση  $f(x) = (2 - \alpha)\eta\mu\beta x$ ,  $\alpha > 2$  και  $\beta > 0$  έχει περίοδο το  $\frac{\pi}{2}$  και μέγιστη τιμή το 3, να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$

## Εξάσκηση 13

Εστω η συνάρτηση  $f(x) = 1 - 3\eta\mu 2x$

- 1 Ποιά είναι η περίοδός της
- 2 Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- 3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

## Εξάσκηση 13

Εστω η συνάρτηση  $f(x) = 1 - 3\eta\mu 2x$

- 1 Ποιά είναι η περίοδός της
- 2 Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- 3 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου



## Εξάσκηση 13

Εστω η συνάρτηση  $f(x) = 1 - 3\eta\mu 2x$

- ① Ποιά είναι η περίοδός της
- ② Ποιά είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής
- ③ Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου

## Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε ώρες.

- 1 Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- 2 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 24$
- 3 Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:  
α)  $0^\circ\text{C}$   
β)  $10^\circ\text{C}$   
γ)  $5^\circ\text{C}$

## Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε ώρες.

- ① Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
  - ①  $0^{\circ}\text{C}$
  - ② κάτω από  $0^{\circ}\text{C}$

## Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε ώρες.

- ① Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
  - ①  $0^{\circ}\text{C}$
  - ② κάτω από  $0^{\circ}\text{C}$

## Εξάσκηση 14

Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση  $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε ώρες.

- ① Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου?
- ② Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $0 \leq t \leq 24$
- ③ Να βρείτε γραφικά ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν:
  - ①  $0^{\circ}\text{C}$
  - ② κάτω από  $0^{\circ}\text{C}$

## Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ ,  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Αν  $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή  $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι  $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$  για κάθε  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

## Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ ,  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Αν  $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή  $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι  $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$  για κάθε  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

## Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ ,  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Αν  $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή  $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι  $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$  για κάθε  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$



## Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ ,  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ② Αν  $\alpha, \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  και  $\alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$
- ③ Να βρείτε την τιμή  $f(\frac{\pi}{2})$
- ④ Να δείξετε ότι  $\frac{\eta\mu x}{x} < \frac{\pi}{2}$  για κάθε  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση