

# Ευθεία

## Εξίσωση Ευθείας

Κωνσταντίνος Λόλας

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβადού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
  - Γενική Εξίσωση, to rule them all!
  - Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
  - Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
  - 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβადού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβადού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβადού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβადού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβადού)

# Γνωστά ή Αγνωστα νερά?

Λέξεις κλειδιά

- Κλίση
- Συντελεστής διεύθυνσης
- $\varepsilon\varphi\theta$
- $\alpha$
- Σημεία
- Παραλληλία
- Καθετότητα
- Σημεία τομής...

είναι μερικά που θυμάμαι!



# Γραμμές, γραμμές παντού

- Τι είναι γραμμή?
- Γραφικά ή Αλγεβρικά?

# Γραμμές, γραμμές παντού

- Τι είναι γραμμή?
- Γραφικά ή Αλγεβρικά?

# Γραφικά

Εύκολο!

# Αλγεβρικά

Ορισμός γραμμής

Μία εξίσωση με τουλάχιστον έναν άγνωστο

Σημείο στη γραμμή

Κάθε σημείο που επαληθεύει την εξίσωση

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$



# Ορισμοί

## Γωνία Ευθείας

Ονομάζουμε γωνία της ευθείας με τον άξονα  $x'x$ , την γωνία που σχηματίζει ο  $x'x$  όταν στραφεί αντίστροφα με τους δείκτες του ρολογιού έως ότου συμπέσει με την ευθεία

## Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης (ή κλίση) της ευθείας την εφαπτομένη της γωνίας της ευθείας με τον  $x'x$

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!



## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

# Λίγη ιστορία

Κλίση διανύσματος

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## Εξίσωση ευθείας 1 (από κλίση και σημείο)

Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  και ας έχουμε γνωστό ένα σημείο  $(x_0, y_0)$ . Κάθε σημείο  $(x, y)$  που ανήκει στην ευθεία θα έχει με το γνωστό σημείο κλίση  $\lambda$ . Αρα

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$$

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

## Εξίσωση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ . Αν  $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

## Εξίσωση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ . Αν  $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

## Εξίσωση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ . Αν  $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

## Εξισώση ευθείας 3 (δεν έχει κλίση)

Εύκολο?

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση



## Ασκήσεις

## Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας η οποία:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{3}$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- 3 διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(3, 6)$

## Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας η οποία:

- ① σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{3}$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- ③ διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(3, 6)$

## Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας η οποία:

- ① σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{3}$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- ③ διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(3, 6)$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία

①  $A(1, 0)$  και  $B(2, \sqrt{3})$

②  $A(2, 3)$  και  $B(1, 3)$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία

- ①  $A(1, 0)$  και  $B(2, \sqrt{3})$
- ②  $A(2, 3)$  και  $B(1, 3)$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας  $\varepsilon$ , η οποία:

- ① είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_1$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 120^\circ$
- ② είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(3, 5)$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας  $\varepsilon$ , η οποία:

- ① είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_1$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 120^\circ$
- ② είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(3, 5)$



## Εξάσκηση 4

Εστω η ευθεία  $\varepsilon$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$  και η ευθεία  $\zeta$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(3, \alpha)$  και  $B(5, 3\alpha - 2)$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε:

- ① Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι παράλληλες
- ② Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι κάθετες

## Εξάσκηση 4

Εστω η ευθεία  $\varepsilon$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$  και η ευθεία  $\zeta$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(3, \alpha)$  και  $B(5, 3\alpha - 2)$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε:

- ① Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι παράλληλες
- ② Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι κάθετες

## Εξάσκηση 5

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 3$ . Να βρείτε:

- 1 Την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- 2 Την τιμή του  $\lambda$ , για την οποία το σημείο  $M(\lambda - 1, 2\lambda)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ .

## Εξάσκηση 5

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 3$ . Να βρείτε:

- 1 Την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- 2 Την τιμή του  $\lambda$ , για την οποία το σημείο  $M(\lambda - 1, 2\lambda)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ .

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$  και:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- 3 είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta$  με συντελεστή διεύθυνσης  $-\frac{1}{2}$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$  και:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- 3 είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta$  με συντελεστή διεύθυνσης  $-\frac{1}{2}$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$  και:

- ① σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- ③ είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta$  με συντελεστή διεύθυνσης  $-\frac{1}{2}$

## Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $M(\alpha, 2\alpha + 1)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$ .

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- ② Αν επιπλέον η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $N(1, -2)$ , να βρείτε:
  - ③ την τιμή του  $\alpha$
  - ④ τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
  - ⑤ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία  $\varepsilon$  και τους άξονες



## Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $M(\alpha, 2\alpha + 1)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$ .

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- ② Αν επιπλέον η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $N(1, -2)$ , να βρείτε:
  - ① την τιμή του  $\alpha$
  - ② τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
  - ③ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία  $\varepsilon$  και τους άξονες

## Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $M(\alpha, 2\alpha + 1)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$ .

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- ② Αν επιπλέον η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $N(1, -2)$ , να βρείτε:
  - ① την τιμή του  $\alpha$
  - ② τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
  - ③ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία  $\varepsilon$  και τους άξονες

## Εξάσκηση 7

Εστω μία ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $M(\alpha, 2\alpha + 1)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$ .

- ① Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- ② Αν επιπλέον η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $N(1, -2)$ , να βρείτε:
  - ① την τιμή του  $\alpha$
  - ② τα σημεία τομής της ευθείας  $\varepsilon$  με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
  - ③ το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία  $\varepsilon$  και τους άξονες

## Εξάσκηση 8

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(2, -3)$ ,  $B(1, 5)$  και  $\Gamma(2, 3)$ . Να βρείτε την εξίσωση:

- ① της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $B\Gamma$
- ② του ύψους  $A\Delta$
- ③ της διαμέσου  $BM$

## Εξάσκηση 9

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 4)$  και  $B(3, -6)$ . Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου  $\varepsilon$  του τμήματος  $AB$

## Εξάσκηση 10

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

①  $A(3, 2)$  και  $B(-1, 6)$

②  $\Gamma(5, -3)$  και  $\Delta(5, -4)$

## Εξάσκηση 11

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A(2, 5)$ ,  $B(1, 7)$  και  $\Gamma(4, 1)$ . Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου  $B\Delta$ .

## Εξάσκηση 12

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  όταν:

- ① η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $A(0, -3)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 2$
- ② η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = -\frac{2}{3}$
- ③ η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 4)$  και  $B(\lambda^2, 4)$



## Εξάσκηση 13

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon : y = \frac{x}{2} - 1$  και  $\zeta : (|\mu| - 2)x - 5$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\mu$  ώστε η ευθεία να είναι:

- ① παράλληλη στην ευθεία  $\zeta$
- ② κάθετη στην ευθεία  $\zeta$

## Εξάσκηση 14

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\zeta$  που διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 2)$  και:

- ① είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_1 : y = 3x + 1$
- ② είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_2 : y = -2x + 3$

## Εξάσκηση 15

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : y = 2x - 1$  και  $\varepsilon_2 : y = x + 1$ .

- 1 Να βρείτε το σημείο τομής  $M$  των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$
- 2 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 135^\circ$
- 3 Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\zeta : y = 5x - 7$  συντρέχουν

## Εξάσκηση 16

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\Gamma(4, 3)$ . Αν η εξίσωση της ευθείας  $AB$  είναι  $y = 2x + 1$  και του ύψους  $A\Delta$  είναι  $y = x - 1$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$

## Εξάσκηση 17

Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της ευθείας  $\varepsilon : y = -2x + 1$  από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια την ελάχιστη απόσταση του σημείου  $O$  από τα σημεία της ευθείας  $\varepsilon$

## Εξάσκηση 18

Να βρείτε το συμμετρικό σημείο του σημείου  $A(5, 4)$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon : y = -4x + 7$

## Εξάσκηση 19

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B(1, 2)$ . Το ύψος και η διάμεσος από μία κορυφή του τριγώνου έχουν εξισώσεις  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  και  $y = x$ . Να βρείτε τις άλλες κορυφές και το βαρύκεντρο του τριγώνου

## Εξάσκηση 20

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1, 2)$ ,  $B\Gamma : y = 2x + 5$  και η διάμεσος  $BM$  έχει εξίσωση  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ . Να βρείτε:

- 1 τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$
- 2 την εξίσωση του ύψους  $\Gamma\Delta$



## Εξάσκηση 21

Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 2)$  και  $B(3, 1)$ . Να βρείτε το σημείο  $M$  της ευθείας  $\varepsilon : y = x + 3$ , τέτοιο ώστε το τρίγωνο  $AMB$  να είναι ορθογώνιο στην κορυφή  $M$

## Εξάσκηση 22

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB : y = 2x$  και  $A\Gamma : y = 3x - 1$ . Αν το σημείο  $M(1, 0)$  είναι μέσον της πλευράς  $B\Gamma$

## Εξάσκηση 23

Θεωρούμε το σημείο  $A(2, 1)$  και το συμμετρικό του  $A'$  ως προς τον άξονα  $x'x$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OA'} = 2$$

όπου  $M'$  το συμμετρικό του  $M$  ως προς τον άξονα  $x'x$

## Εξάσκηση 24

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M(x, y)$  όταν:

- ①  $M(\lambda - 1, 2\lambda - 3), \lambda \in \mathbb{R}$
- ②  $M(-3, \lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$
- ③  $M(\lambda^2 + 1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
- ④  $M(-3, \eta\mu\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 25

Αν το σημείο  $M(\alpha, \beta)$  κινείται στην ευθεία  $\varepsilon : y = 2x - 4$ , να βρείτε πού κινείται το σημείο  $N\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

## Εξάσκηση 26

Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M(3 - \sigma\nu\nu^2\theta, 1 - \eta\mu^2\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , κινείται σε σταθερή ευθεία.