

# Διανύσματα

## Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Τι, δεν τελειώσαμε με τα διανύσματα?

Αν προσέχατε μιλήσαμε για:

- ① τι είναι
- ② μέτρο
- ③ άθροισμα - διαφορά
- ④ πολλαπλασιασμό με αριθμό
- ⑤ ισότητα
- ⑥ παραλληλία

# Τι, δεν τελειώσαμε με τα διανύσματα?

Αν προσέχατε μιλήσαμε για:

- 1 τι είναι
- 2 μέτρο
- 3 άθροισμα - διαφορά
- 4 πολλαπλασιασμό με αριθμό
- 5 ισότητα
- 6 παραλληλία
- 7 τι έμεινε...



# Τι, δεν τελειώσαμε με τα διανύσματα?

Αν προσέχατε μιλήσαμε για:

- 1 τι είναι
- 2 μέτρο
- 3 άθροισμα - διαφορά
- 4 πολλαπλασιασμό με αριθμό
- 5 ισότητα
- 6 παραλληλία
- 7 γωνίες, καθετότητα...

# Νέος κόσμος

Κάθε διανυσματικός χώρος (?), εφοδιάζεται με ένα δικό του εσωτερικό γινόμενο. Για εμάς, να ναι καλά ο Ευκλείδης!

## Ευκλείδειο Εσωτερικό Γινόμενο

Εστω  $\vec{\alpha} = (x_\alpha, y_\alpha)$  και  $\vec{\beta} = (x_\beta, y_\beta)$ . Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο την πράξη  $\mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta$$

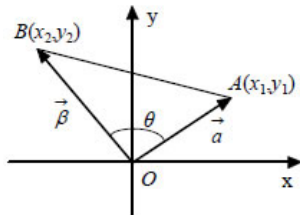
Η απλά για τους ποσάδες: εσωτερικό γινόμενο

Ναι αλλά πού είναι η γωνία?



## Για δυνατούς λύτες

Αν μάθατε τον τύπο των συνημιτόνων:



$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}^2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}^2 - 2|OA| \cdot |OB| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$-2(x_1x_2 + y_1y_2) = -2|OA| \cdot |OB| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = |OA| \cdot |OB| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

## Τι, δεύτερος τύπος?

Στο βιβλίο τον μαθαίνετε ως πρώτο (και stick to it)

Ευκλείδειο Εσωτερικό Γινόμενο

Εστω  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  δύο μη μηδενικά διανύσματα. Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο την πράξη

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$



## Τι, δεύτερος τύπος?

Στο βιβλίο τον μαθαίνετε ως πρώτο (και stick to it)

Ευκλείδειο Εσωτερικό Γινόμενο

Εστω  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  δύο μη μηδενικά διανύσματα. Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο την πράξη

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Problems, problems, problems!

Τι γίνεται αν  $\vec{\alpha} = \vec{0}$  ή  $\vec{\beta} = \vec{0}$ ?

## Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

# Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

## Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

## Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigmaυνθ$

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $\sigmaυνθ = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

## Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigmaυνθ$

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$  και το αστέρι μας...

- $\sigmaυνθ = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

## Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

## Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}$  (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$  (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$  (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά  $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$ , αλλά γιατί?



## Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}$  (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$  (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$  (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά  $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$ , αλλά γιατί?

## Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}$  (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$  (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$  (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά  $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$ , αλλά γιατί?

## Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}$  (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$  (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$  (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά  $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$ , αλλά γιατί?



Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Εξάσκηση 1

Δίνονται δύο διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε:

1  $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

2  $\vec{\alpha}^2$

## Εξάσκηση 1

Δίνονται δύο διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε:

①  $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

②  $\vec{\alpha}^2$

## Εξάσκηση 2

Αν  $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$ ,  $|\vec{\alpha}| = 3$  και  $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -6$ , να βρείτε το  $|\vec{\beta}|$



## Εξάσκηση 3

Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ,  $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$  και  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}| = 1$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(\vec{\alpha}\vec{\beta})^{2023} + |\vec{\alpha}\vec{\gamma}|$$

## Εξάσκηση 4

Αν  $\vec{\alpha} = (2, 3)$  και  $\vec{\beta} = (4, 5)$  να υπολογίσετε τα:

①  $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

②  $\vec{\alpha}^2$

## Εξάσκηση 4

Αν  $\vec{\alpha} = (2, 3)$  και  $\vec{\beta} = (4, 5)$  να υπολογίσετε τα:

①  $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

②  $\vec{\alpha}^2$

## Εξάσκηση 5

Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x - 1, -4)$ ,  $\vec{\beta} = (6, x)$  είναι κάθετα, να βρείτε το  $x$

## Εξάσκηση 6

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  και  $\Gamma(5, -2)$  είναι ορθογώνιο με  $A = 90^\circ$

## Εξάσκηση 7

Δίνεται ένα διάνυσμα  $\vec{v} = (2, -1)$ . Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{u}$ , ώστε να ισχύει  $\vec{u}\vec{v} = 0$  και  $|\vec{u}| = \sqrt{5}$

## Εξάσκηση 8

Δίνονται δύο διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε:

①  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

②  $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$

## Εξάσκηση 8

Δίνονται δύο διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε:

- ①  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
- ②  $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$



## Εξάσκηση 9

Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{5\pi}{6}$ . Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος

$$\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$$

## Εξάσκηση 10

Αν  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2$ . Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$

## Εξάσκηση 11

Αν  $\vec{\alpha} = (2, -1)$ ,  $\vec{\beta} = (3, 1)$  να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

## Εξάσκηση 12

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ , όπου το  $\vec{\alpha}$  είναι μοναδιαίο,  $|\vec{\beta}| = 2$  και η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\alpha}$  είναι  $120^\circ$ . Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\delta}$  και  $\vec{\alpha}$ , όπου  $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

## Εξάσκηση 13

- ① Αν  $\vec{v}$  και  $\vec{u}$  είναι δύο διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{v} + \vec{v}|^2 + |\vec{v} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}|^2$$

- ② Αν για τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{v}$  ισχύουν  $|\vec{v}| = 1$ ,  $|\vec{v}| = 2$  και  $|\vec{v} + \vec{v}| = 3$ , να βρείτε το  $|\vec{v} - \vec{v}|$

## Εξάσκηση 13

- ① Αν  $\vec{v}$  και  $\vec{u}$  είναι δύο διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{v} + \vec{v}|^2 + |\vec{v} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}|^2$$

- ② Αν για τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{v}$  ισχύουν  $|\vec{v}| = 1$ ,  $|\vec{v}| = 2$  και  $|\vec{v} + \vec{v}| = 3$ , να βρείτε το  $|\vec{v} - \vec{v}|$

## Εξάσκηση 14

Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$  και  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ , να υπολογίσετε:

- ① το μέτρο του  $\vec{\gamma}$
- ② την τιμή της παράστασης  $\vec{\alpha}\vec{\gamma} + \vec{\beta}\vec{\gamma}$

## Εξάσκηση 14

Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$  και  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ , να υπολογίσετε:

- ① το μέτρο του  $\vec{\gamma}$
- ② την τιμή της παράστασης  $\vec{\alpha}\vec{\gamma} + \vec{\beta}\vec{\gamma}$



## Εξάσκηση 15

Εστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$

- ① Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \neq \vec{0}$
- ② Να βρείτε διάνυσμα  $\vec{x}$ , ώστε:
  - $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$  και
  - $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$

## Εξάσκηση 15

Εστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$

- ① Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \neq \vec{0}$
- ② Να βρείτε διάνυσμα  $\vec{x}$ , ώστε:
  - $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$  και
  - $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$

## Εξάσκηση 16

Αν  $\vec{\alpha} = (x, 3)$  και  $\vec{\beta} = (1, 7)$ , να βρείτε την τιμή του  $x$  ώστε  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{4}$

## Εξάσκηση 17

Δίνονται τα σταθερά σημεία Α και Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει

$$|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = \sqrt{\overrightarrow{MA}^2 + 4\overrightarrow{MB}^2}$$

## Εξάσκηση 18

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $(AB) = 6$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} = 7 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$$