g ™ † ‡ ‹ Ž

b … • } • • • z

g • ‰ • • } ‰ • { ‰ ‹ Ž h ˜ ‡ } Ž

g•‰…†yŽ p‹ˆyŽ

\•} •…} Œ}…“‰H{R€J.HEUD

Z‡•Ž" g}‰‹‰…†x ‰}… }‡‡x

e} }•“‹‡ƒ„‹™ˆ• ˆ•

- g™†‡‹
- W‡‡•…”ƒ
- m}•}~‹‡z
- qŒ••~‹‡z

j}… }‡‡x •…"

`…} †x„• †•‰…†z •‹ˆz „}

‹•{•‹‘ˆ• •‹‰ •••ˆ••• …†˜ •˜Œ‹

‹‰‹ˆx•‹‘ˆ• ••‹…“•{}

~•{•†‹‘ˆ• ••‹…“•{} •‹‘Ž

”xŠ‹‘ˆ• …€…˜•ƒ••Ž

•ƒ‰ }‰}•‰••{‚‹‘ˆ• }Œ˜ ••‰…†z •Š{•••ƒ

j}… }‡‡x •…"

`…} †x„• †•‰…†z •‹ˆz „}

‹•{•‹‘ˆ• •‹‰ •••ˆ••• …†˜ •˜Œ‹

‹‰‹ˆx•‹‘ˆ• ••‹…“•{}

~•{•†‹‘ˆ• ••‹…“•{} •‹‘Ž

”xŠ‹‘ˆ• …€…˜•ƒ••Ž

•ƒ‰ }‰}•‰••{‚‹‘ˆ• }Œ˜ ••‰…†z •Š{•••ƒ

j}… }‡‡x •…"

`…} †x„• †•‰…†z •‹ˆz „}

‹•{•‹‘ˆ• •‹‰ •••ˆ••• …†˜ •˜Œ‹

‹‰‹ˆx•‹‘ˆ• ••‹…“•{}

~•{•†‹‘ˆ• ••‹…“•{} •‹‘Ž

”xŠ‹‘ˆ• …€…˜•ƒ••Ž

•ƒ‰ }‰}•‰••{‚‹‘ˆ• }Œ˜ ••‰…†z •Š{•••ƒ

j } … } ‡ ‡ x • … "

` … } † x „ • † • ‰ … † z • ‹ ˆ z   „ }

‹ • { • ‹ ‘ ˆ • • ‹ ‰ • • • ˆ • • • … † ˜ • ˜ Œ ‹

‹ ‰ ‹ ˆ x • ‹ ‘ ˆ • • • ‹ … “ • { }

~ • { • † ‹ ‘ ˆ • • • ‹ … “ • { } • ‹ ‘ Ž

” x Š ‹ ‘ ˆ • … € … ˜ • ƒ • • Ž

• ƒ ‰ } ‰ } • ‰ • • { ‚ ‹ ‘ ˆ • } Œ ˜ • • ‰ … † z • Š { • • • ƒ

j } … } ‡ ‡ x • … "

` … } † x „ • † • ‰ … † z • ‹ ˆ z „ }

‹ • { • ‹ ' ˆ • • ‹ ‰ • • • ˆ • • • … † ˜ • ˜ Œ ‹

‹ ‰ ‹ ˆ x • ‹ ' ˆ • • • ‹ … " • { }

~ • { • † ‹ ' ˆ • • • ‹ … " • { } • ‹ ' Ž

" x Š ‹ ' ˆ • … € … ˜ • ƒ • • Ž

• ƒ ‰ } ‰ } • ‰ • • { , ‹ ' ˆ • } Œ ˜ • • ‰ … † z • Š { • • • ƒ

g ™ † ‡ ‹ Ž ‹ ‡ y

[redacted]

g ™ † ‡ ‹ Ž ‹ ‰ ‹ ˆ x , • • } … ‹ • • • ˆ • • • … † ˜ Ž • ˜ Œ ‹ Ž • • ‰ • ƒ ˆ •
• Œ … Œ y € ‹ ‘ Œ ‹ ‘ … • } Œ y “ ‹ ‘ ‰ } Œ ˜ y ‰ } • • } „ • • ˜ • ƒ ˆ •
‹ ‰ ‹ ˆ x , • • } … † y ‰ • • ‹ • ‹ ‘ † ™ † ‡ ‹ ‘ † } … ƒ } Œ ˜ • • } • ƒ }

mxˆ•

W•••ö ' (•‹ ‹Œ‹…‹€zŒ‹•• •ƒˆ•{‹ •‹‘ {† ƒ™}††‡•‹{‘‰} †}…
' (•‹ †y‰••‹ •‹‘

e}Œ•yŒ[•.]. {

' 7 ' õ (7 (õ {

' 7 ' õ (7 (õ {õ

p… }‘•˜z•}‰"

mx^•

W•••ö ' (•‹ ‹Œ‹…‹€zŒ‹•• •ƒ^•{‹ •‹‘ {† ƒ™}††‡•‹{‘‰} †}..
' (•‹ †y‰••‹ •‹‘
e} Œ•yŒ‡•.]. {

' 7 ' õ (7 (õ {

' 7 ' õ (7 (õ { õ

p… }‘•˜ z•}‰"

mxˆ•

W•••ö ' (•‹ ‹Œ‹…‹€zŒ‹•• •ƒ ˆ•{‹ •‹‘ {† ƒ™}††‡•‹{‘‰} †}..
' (•‹ †y‰••‹ •‹‘
e} Œ•yŒ‡•.]. {

' 7 ' õ (7 (õ {
―――――――――――――
' 7 ' õ (7 (õ {õ

p… }‘•˜ z•}‰"

l i‹‰}€…}{‹Ž

gy‰••‹ †}… }†•{{‰} x•}

' 7 õ (7 õ õ

' õ (õ

p … y ˆ • … ‰ • "

… € … ˜ • ƒ • • Ž

• ’ } Œ • ‹ ˆ y ‰ ƒ

• • ‰ … † z • Š { • • • ƒ

f € … ˜ • ƒ • • Ž † ™ † ‡ ‹ ‘

d • ’ } Œ • ‹ ˆ y ‰ ƒ • ‹ ‘ • • y ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … • † † x • „ { • • ƒ •
} † • { ‰ }

p ‹ † y ‰ • • ‹ • ‹ ‘ † ™ † ‡ ‹ ‘ Œ ‹ ‘ ‹ • { , • • • } ƒ … ˆ • } { Œ ˜ • { ‰ } … • ‹
• ƒ ˆ • { ‹ • ‹ ˆ z Ž • • ‰ ˆ • • ‹ † } „ y • • ‰

p ‹ } Œ ˜ • • ƒ ˆ } • { ‰ } … ˆ • • ‹ † x „ • • ‹ • ƒ Ž “ ‹ • € z Ž

p ‹ † y ‰ • • ‹ } Œ y “ • … } Œ ˜ • ƒ ‰ • ’ } Œ • ˜ ˆ • ‰ ƒ ˜ • ‹ ƒ } †

W ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … y Š • ˆ y • } z } ‰ z † • … ˜ • } ‰

a ™ ‹ † ™ † ‡ ‹ … ˆ • • } Š ™ • ‹ ‘ Ž

g ™ † ‡ ‹ Ž † } … • ‘ „ • { }

f€…˜•ƒ••Ž †™†‡‹‘

d •’}Œ•‹ˆy‰ƒ •‹‘ •• y‰}•ƒˆ•{‹ •{‰}… †x„{••ƒ •
}†•{‰}

p‹ †y‰••‹ •‹‘ †™†‡‹‘ Œ‹‘ ‹•{‚•••}ƒ…ˆ•}{Œ˜{‰}… •‹
•ƒˆ•{‹ •‹ˆzŽ ••‰ ˆ••‹†}„y••‰

p‹ }Œ˜••ƒˆ} •{‰}… ˆ••‹†x„••‹ •ƒŽ “‹•€zŽ

p‹ †y‰••‹ }Œy“•… }Œ˜ •ƒ‰ •’}Œ•˜ˆ•‰ƒ ˜•‹ ƒ }†

W‰} •ƒˆ•{‹ •{‰}… yŠ• ˆy•} z }‰z†•… ˜•}‰

a™‹ †™†‡‹… ˆ••}Š™ •‹‘Ž

g™†‡‹Ž †}… •‘„•{}

f€…˜•ƒ••Ž †™ †‡‹‘

d •’}Œ•‹ˆy‰ƒ •‹‘ •• y‰}•ƒˆ•{‹ •{‰}… •†x„{••ƒ •
}†•{‰}

p‹ †y‰••‹ •‹‘ †™ †‡‹‘ Œ‹‘ ‹•{,•••}ƒ…ˆ•}{Œ˜{‰}… •‹
•ƒˆ•{‹ •‹ˆzŽ ••‰ ˆ••‹†}„y••‰

p‹ }Œ˜••ƒˆ} •{‰}… ˆ••‹†x„••‹ •ƒŽ “‹•€zŽ

p‹ †y‰••‹ }Œy“•… }Œ˜ •ƒ‰ •’}Œ•˜ˆ•‰ƒ ˜•‹ ƒ }†

W‰} •ƒˆ•{‹ •{‰}… yŠ• ˆy•} z }‰z†•… ˜•}‰

a™‹ †™ †‡‹… ˆ••}Š™ •‹‘Ž

g™ †‡‹Ž †}… •‘„•{}

f€…˜•ƒ••Ž †™†‡‹‘

d •'}Œ•‹ˆy‰ƒ •‹‘ •• y‰}•ƒˆ•{‹ •{‰}… •†x„{••ƒ •
}†•{‰}

p‹ †y‰••‹ •‹‘ †™†‡‹‘ Œ‹‘ ‹•{,•••}ƒ…ˆ•}{Œ•˜{‰}… •‹
•ƒˆ•{‹ •‹ˆzŽ ••‰ ˆ••‹†}„y••‰

p‹ }Œ˜••ƒˆ} •{‰}… ˆ••‹†x„••‹ •ƒŽ "‹•€zŽ

p‹ †y‰••‹ }Œy"•… }Œ˜ •ƒ‰ •'}Œ•˜ˆ•‰ƒ ˜•‹ ƒ }†

W‰} •ƒˆ•{‹ •{‰}… yŠ• ˆy•} z }‰z†•… ˜•}‰

a™‹ †™†‡‹… ˆ••}Š™ •‹‘Ž

g™†‡‹Ž †}… •'„•{}

f € … ˜ • ƒ • • Ž † ™ † ‡ ‹ ‘

d • ’ } Œ • ‹ ˆ y ‰ ƒ • ‹ ‘ • • y ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … • † x „ { • • ƒ •
} † • { ‰ }

p ‹ † y ‰ • • ‹ • ‹ ‘ † ™ † ‡ ‹ ‘ Œ ‹ ‘ ‹ • { , • • • } ƒ … ˆ • } { Œ • ˜ { ‰ } … • ‹
• ƒ ˆ • { ‹ • ‹ ˆ z Ž • • ‰ ˆ • • ‹ † } „ y • • ‰

p ‹ } Œ ˜ • • ƒ ˆ } • { ‰ } … ˆ • • ‹ † x „ • • ‹ • ƒ Ž “ ‹ • € z Ž

p ‹ † y ‰ • • ‹ } Œ y “ • … } Œ ˜ • ƒ ‰ • ’ } Œ • ˜ ˆ • ‰ ƒ ˜ • ‹ ƒ } †

W ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … y Š • ˆ y • } z } ‰ z † • … ˜ • } ‰

a ™ ‹ † ™ † ‡ ‹ … ˆ • • } Š ™ • ‹ ‘ Ž

g ™ † ‡ ‹ Ž † } … • ‘ „ • { }

f € … ˜ • ƒ • • Ž † ™ † ‡ ‹ ‘

d • ’ } Œ • ‹ ˆ y ‰ ƒ • ‹ ‘ • • y ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … • † † x „ { • • ƒ •
} † • { ‰ }

p ‹ † y ‰ • • ‹ • ‹ ‘ † ™ † ‡ ‹ ‘ Œ ‹ ‘ ‹ • { , • • • } ƒ … ˆ • } { Œ • ˜ { ‰ } … • ‹
• ƒ ˆ • { ‹ • ‹ ˆ z Ž • • ‰ ˆ • • ‹ † } „ y • • ‰

p ‹ } Œ ˜ • • ƒ ˆ } • { ‰ } … ˆ • • ‹ † x „ • • ‹ • ƒ Ž “ ‹ • € z Ž

p ‹ † y ‰ • • ‹ } Œ y “ • … } Œ ˜ • ƒ ‰ • ’ } Œ • ˜ ˆ • ‰ ƒ ˜ • ‹ ƒ } †

W ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … y Š • ˆ y • } z } ‰ z † • … ˜ • } ‰

a ™ ‹ † ™ † ‡ ‹ … ˆ • • } Š ™ • ‹ ‘ Ž

g ™ † ‡ ‹ Ž † } … • ‘ „ • { }

f € … ˜ • ƒ • • Ž † ™ † ‡ ‹ ‘

d • ’ } Œ • ‹ ˆ y ‰ ƒ • ‹ ‘ • • y ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … • † x „ { • • ƒ • } † • { ‰ }

p ‹ † y ‰ • • ‹ • ‹ ‘ † ™ † ‡ ‹ ‘ Œ ‹ ‘ ‹ • { ‚ • • } ƒ … ˆ • } { Œ ˜ { ‰ } … • ‹ • ƒ ˆ • { ‹ • ‹ ˆ z Ž • • ‰ ˆ • • ‹ † } „ y • • ‰

p ‹ } Œ ˜ • • ƒ ˆ } • { ‰ } … ˆ • • ‹ † x „ • • ‹ • ƒ Ž “ ‹ • € z Ž

p ‹ † y ‰ • • ‹ } Œ y “ • … } Œ ˜ • ƒ ‰ • ’ } Œ • ˜ ˆ • ‰ ƒ ˜ • ‹ ƒ } †

W ‰ } • ƒ ˆ • { ‹ • { ‰ } … y Š • ˆ y • } z } ‰ z † • … ˜ • } ‰

a ™ ‹ † ™ † ‡ ‹ … ˆ • • } Š ™ • ‹ ‘ Ž

g ™ † ‡ ‹ Ž † } … • ‘ „ • { }

f€…˜•ƒ••Ž †™†‡‹‘

d •’}Œ•‹ˆy‰ƒ •‹‘ •• y‰} •ƒˆ•{‹ •{‰}… †x„{••ƒ •
}†•{‰}

p‹ †y‰••‹ •‹‘ †™†‡‹‘ Œ‹‘ ‹•{‚••}ƒ…ˆ•}{Œ˜•{‰}… •‹
•ƒˆ•{‹ •‹ˆzŽ ••‰ ˆ••‹†}„y••‰

p‹ }Œ˜••ƒˆ} •{‰}… ˆ••‹†x„••‹ •ƒŽ “‹•€zŽ

p‹ †y‰••‹ }Œy“•… }Œ˜ •ƒ‰ •’}Œ•˜ˆ•‰ƒ ˜•‹ ƒ }†

W‰} •ƒˆ•{‹ •{‰}… yŠ• ˆy•} z }‰z†•… ˜•}‰

a™‹ †™†‡‹… ˆ••}Š™ •‹‘Ž

g™†‡‹Ž †}… •‘„•{}

b ' } Œ • ˜ ˆ • ‰ ƒ

^ ‰ • ƒ ‰ † } • } • † • ' x , • • • € • ‰ " • • … x , • • • • • ™ Œ ‹
i ˜ ‰ ‹ • … } • ‹ ‰ ˆ ‹ ‰ } € … } { ‹ † ™ † ‡ ‹ ƒ • ' } Œ • ˜ ˆ • ‰ ƒ } Œ
' Æ (Æ • { ‰ } … ƒ

' A ' Æ (A (Æ

X • • ƒ • • ‰ … † z Œ • • { Œ • • • ƒ • † • ˜ Ž ™ ‡ ƒ Ž • } ‰ • ™ Œ ‹ Ž

' 7 ' ' Æ 7 ' (7 ((Æ 7 ({ õ

^ Œ ˜ € • ..

Z “ … Œ x ‰ • } • • ƒ ‰ y • ‹ … ˆ ƒ ˆ ‹ • ’ z

[redacted]

g x „ • • Š { • • • ƒ

' õ (õ ' (ˆ • õ õ 7

Œ } • … • • x ‰ • … † ™ † ‡ ‹ † } … † x „ • † ™ † ‡ ‹ Ž y “ • … • Š { • •
ˆ ‹ • ’ z Ž

p ‹ † y ‰ • • ‹ • { ‰ } … 7 ← 7 † } … ƒ } † • { ‰ } õ õ 7

^ Œ ˜ € • ..BŠ

^ Œ ˜ € • ..AŠ

bŠx•†ƒ•ƒ

j} ~••{•• •ƒ‰ •Š{•••ƒ •‹' †™Œ‡‹'y"• … †y‰••‹ •ƒ‰ }
••‰ }Š˜‰•‰ †}…

y"• … }†•{‰}

€… y•"••}… }Œ˜ •‹ •ƒ7ˆ•{‹

•'xŒ•••}… •ƒŽ •'ƒ„•Ç}Ž (7

bŠx•†ƒ•ƒ

j} ~••{•• •ƒ‰ •Š{•••ƒ •‹‘ †™Œ‡‹‘y“• … †y‰••‹ •ƒ‰ }
••‰ }Š˜‰•‰ †}…

y“• … }†•{‰}

€… y•“••}… }Œ˜ •‹ •ƒ7ˆ•{‹

Εξάσκηση 19

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

1. Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά
2. Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
3. Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη των κύκλων

Εξάσκηση 20

Δίνεται η οικογένεια κύκλων

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
2. Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση

Εξάσκηση 20

Δίνεται η οικογένεια κύκλων

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
2. Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση

Εξάσκηση 21

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο
2. Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε

Εξάσκηση 21

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο
2. Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε

Εξάσκηση 22

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C, όταν ισχύουν:

- η ευθεία $\varepsilon : y = -2x$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}(3,1)$ και B
- ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1,0)$
- $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}} = 0$

Εξάσκηση 23

Δίνεται ο κύκλος $C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,2)$ και έχει μήκος $2\sqrt{5}$

Εξάσκηση 24

Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες που φέρνουμε στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 5$ από το σημείο $\mathrm{A}(1, 3)$ είναι κάθετες

Εξάσκηση 25

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$ και $B(-2,4)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, για τα οποία ισχύει:

1. $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$
2. $\widehat{AMB} = 90^\circ$

Εξάσκηση 25

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(2,0)$ και $\mathrm{B}(-2,4)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, για τα οποία ισχύει:

1. $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MB}}$
2. $\widehat{\mathrm{AMB}} = 90^\circ$

Εξάσκηση 26

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$ είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $\varepsilon : y = \dfrac{3}{2}$

Εξάσκηση 27

Να βρείτε που κινείται το σημείο $\mathrm{M}(3 + 2\eta\mu\theta, 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Εξάσκηση 28

Δίνεται ο κύκλος $C : (x-1)^2 + y^2 = 4$. Αν το σημείο A κινείται στον κύκλο C με κέντρο το K, να βρείτε που κινείται το σημείο M, για το οποίο ισχύει:

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 3\overrightarrow{\mathrm{KA}}$$

Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος $C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

1. Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
2. Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $\mathrm{A}(1,2)$ ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου
3. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε

Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος $C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

1. Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
2. Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $\mathrm{A}(1,2)$ ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου
3. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε

Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος $C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

1. Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
2. Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $\mathrm{A}(1,2)$ ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου
3. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε

Εξάσκηση 30

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$C_2 : (x-7)^2 + (y-10)^2 = 9$$

και

$$C_3 : (x-3)^2 + (y-7)^2 = 64$$

1. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 και μετά να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_1 από ένα σημείο του C_2
2. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_2 και C_3 και μετά να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ποτ απέχει ένα σημείο του C_2 από ένα σημείο του C_3

Εξάσκηση 30

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$C_2 : (x-7)^2 + (y-10)^2 = 9$$

και

$$C_3 : (x-3)^2 + (y-7)^2 = 64$$

1. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 και μετά να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_1 από ένα σημείο του C_2
2. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_2 και C_3 και μετά να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ποτ απέχει ένα σημείο του C_2 από ένα σημείο του C_3

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ και έστω το σημείο του $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $\mathrm{MA} \perp \mathrm{KM}$

$$(x-x_1, y-y_1) \perp (x_1-x_0, y_1-y_0)$$
$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x_1-x_0, y_1-y_0)=0$$
$$(x-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1)(y_1-y_0)=0$$
$$(x-x_0+x_0-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1+y_1-y_0)(y_1-y_0)=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)-(x_1-x_0)^2+(y-y_0)(y_1-y_0)-(y_1-y_0)^2=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)-\rho^2=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=\rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ και έστω το σημείο του $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $\mathrm{MA} \perp \mathrm{KM}$

$$(x-x_1, y-y_1) \perp (x_1-x_0, y_1-y_0)$$
$$(x-x_1, y-y_1) \cdot (x_1-x_0, y_1-y_0) = 0$$
$$(x-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1)(y_1-y_0)=0$$
$$(x-x_0+x_0-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1+y_1-y_0)(y_1-y_0)=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)-(x_1-x_0)^2+(y-y_0)(y_1-y_0)-(y_1-y_0)^2=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)-\rho^2=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=\rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ και έστω το σημείο του $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης

Θα ισχύει $\mathrm{MA} \perp \mathrm{KM}$

$$(x-x_1, y-y_1) \perp (x_1-x_0, y_1-y_0)$$
$$(x-x_1, y-y_1) \cdot (x_1-x_0, y_1-y_0) = 0$$
$$(x-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1)(y_1-y_0) = 0$$
$$(x-x_0+x_0-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1+y_1-y_0)(y_1-y_0) = 0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)-(x_1-x_0)^2+(y-y_0)(y_1-y_0)-(y_1-y_0)^2 = 0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)-\rho^2 = 0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0) = \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $\mathrm{MA} \perp \mathrm{KM}$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$
$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $\mathrm{MA} \perp \mathrm{KM}$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$
$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ και έστω το σημείο του $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $\mathrm{MA} \perp \mathrm{KM}$

$$(x-x_1, y-y_1) \perp (x_1-x_0, y_1-y_0)$$
$$(x-x_1, y-y_1) \cdot (x_1-x_0, y_1-y_0) = 0$$
$$(x-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1)(y_1-y_0)=0$$
$$(x-x_0+x_0-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1+y_1-y_0)(y_1-y_0)=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)-(x_1-x_0)^2+(y-y_0)(y_1-y_0)-(y_1-y_0)^2=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)-\rho^2=0$$
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=\rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $\mathrm{M}(x_1, y_1)$. Έστω $\mathrm{A}(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $\mathrm{MA} \perp \mathrm{KM}$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$
$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$
$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$
$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Άρα $\mathrm{A} = -2x_0$, $\mathrm{B} = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Άρα $\mathrm{A} = -2x_0$, $\mathrm{B} = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$
$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Άρα $\mathrm{A} = -2x_0$, $\mathrm{B} = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$
$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Άρα $\mathrm{A} = -2x_0$, $\mathrm{B} = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$
$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Άρα $\mathrm{A} = -2x_0$, $\mathrm{B} = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$
$$x^2 + \mathrm{A}x + y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$
$$x^2 + \mathrm{A}x + \frac{\mathrm{A}^2}{4} + y^2 + \mathrm{B}y + \frac{\mathrm{B}^2}{4} = \frac{\mathrm{A}^2}{4} + \frac{\mathrm{A}^2}{4} - \Gamma$$
$$(x - \frac{\mathrm{A}}{2})^2 + (y - \frac{\mathrm{B}}{2})^2 = \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}{4}$$

Άρα $x_0 = -\frac{\mathrm{A}}{2}$, $y_0 = -\frac{\mathrm{B}}{2}$, $\rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$x^2 + \mathrm{A}x + y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$x^2 + \mathrm{A}x + \frac{\mathrm{A}^2}{4} + y^2 + \mathrm{B}y + \frac{\mathrm{B}^2}{4} = \frac{\mathrm{A}^2}{4} + \frac{\mathrm{A}^2}{4} - \Gamma$$

$$(x - \frac{\mathrm{A}}{2})^2 + (y - \frac{\mathrm{B}}{2})^2 = \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}{4}$$

Άρα $x_0 = -\frac{\mathrm{A}}{2}, y_0 = -\frac{\mathrm{B}}{2}, \rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma &= 0 \\ x^2 + \mathrm{A}x + y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma &= 0 \\ x^2 + \mathrm{A}x + \frac{\mathrm{A}^2}{4} + y^2 + \mathrm{B}y + \frac{\mathrm{B}^2}{4} &= \frac{\mathrm{A}^2}{4} + \frac{\mathrm{A}^2}{4} - \Gamma \\ (x - \frac{\mathrm{A}}{2})^2 + (y - \frac{\mathrm{B}}{2})^2 &= \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}{4} \end{aligned}$$

Άρα $x_0 = -\frac{\mathrm{A}}{2}, y_0 = -\frac{\mathrm{B}}{2}, \rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$x^2 + \mathrm{A}x + y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$

$$x^2 + \mathrm{A}x + \frac{\mathrm{A}^2}{4} + y^2 + \mathrm{B}y + \frac{\mathrm{B}^2}{4} = \frac{\mathrm{A}^2}{4} + \frac{\mathrm{A}^2}{4} - \Gamma$$

$$(x - \frac{\mathrm{A}}{2})^2 + (y - \frac{\mathrm{B}}{2})^2 = \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}{4}$$

Άρα $x_0 = -\frac{\mathrm{A}}{2}, y_0 = -\frac{\mathrm{B}}{2}, \rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma &= 0 \\
x^2 + \mathrm{A}x + y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma &= 0 \\
x^2 + \mathrm{A}x + \frac{\mathrm{A}^2}{4} + y^2 + \mathrm{B}y + \frac{\mathrm{B}^2}{4} &= \frac{\mathrm{A}^2}{4} + \frac{\mathrm{A}^2}{4} - \Gamma \\
(x - \frac{\mathrm{A}}{2})^2 + (y - \frac{\mathrm{B}}{2})^2 &= \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}{4}
\end{aligned}$$

Άρα $x_0 = -\frac{\mathrm{A}}{2}, y_0 = -\frac{\mathrm{B}}{2}, \rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$
$$x^2 + \mathrm{A}x + y^2 + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$$
$$x^2 + \mathrm{A}x + \frac{\mathrm{A}^2}{4} + y^2 + \mathrm{B}y + \frac{\mathrm{B}^2}{4} = \frac{\mathrm{A}^2}{4} + \frac{\mathrm{A}^2}{4} - \Gamma$$
$$(x - \frac{\mathrm{A}}{2})^2 + (y - \frac{\mathrm{B}}{2})^2 = \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}{4}$$

Άρα $x_0 = -\frac{\mathrm{A}}{2}, y_0 = -\frac{\mathrm{B}}{2}, \rho = \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

Πίσω στη θεωρία