

# Συναρτήσεις

## Γραφική Παραστάση

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Ορισμός

## Ορισμός

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των σημείων  $A(x, f(x))$ ,  $x \in D_f$ , και συμβολίζεται με  $C_f$

# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση



# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

# Τι βλέπω

- Είναι γραφική παράσταση?
- Πεδίο Ορισμού
- Σύνολο τιμών
- Ρίζες
- Πρόσημο
- Κοινά σημεία
- Κατακόρυφη απόσταση
- Σχετική θέση

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \epsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις



# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Γνωστές Γραφικές

- $y = a$
- $y = ax + b$
- $y = x^2, y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^3$
- $y = \frac{a}{x}$
- $y = |x|$
- $y = \eta\mu x, y = \sigma\upsilon\nu x, y = \varepsilon\varphi x$
- $y = a^x, y = e^x$
- $y = \ln x$
- Μετατοπίσεις

# Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

# Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

# Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

# Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$



# Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

# Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

# Μετατοπίσεις

$$y = f(x)$$

- $y = f(x) + c$
- $y = f(x + c)$
- $a \cdot f(x)$
- $y = f(a \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(-x)$

# Εξάσκηση 1

► Άσκηση Geogebra

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- 2 Να βρείτε τις τιμές:  $f(2)$  και  $f(f(0))$
- 3 Να λύσετε γραφικά την  $f(x) = 0$
- 4 Να λύσετε γραφικά την  $f(x) < 0$
- 5 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \ln f(x)$

# Εξάσκηση 1

► Άσκηση Geogebra

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- 2 Να βρείτε τις τιμές:  $f(2)$  και  $f(f(0))$
- 3 Να λύσετε γραφικά την  $f(x) = 0$
- 4 Να λύσετε γραφικά την  $f(x) < 0$
- 5 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \ln f(x)$

# Εξάσκηση 1

► Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- ② Να βρείτε τις τιμές:  $f(2)$  και  $f(f(0))$
- ③ Να λύσετε γραφικά την  $f(x) = 0$
- ④ Να λύσετε γραφικά την  $f(x) < 0$
- ⑤ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \ln f(x)$

# Εξάσκηση 1

► Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών
- ② Να βρείτε τις τιμές:  $f(2)$  και  $f(f(0))$
- ③ Να λύσετε γραφικά την  $f(x) = 0$
- ④ Να λύσετε γραφικά την  $f(x) < 0$
- ⑤ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \ln f(x)$

## Εξάσκηση 2

### ► Άσκηση Geogebra

- 1 Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$
- 2 Να λύσετε την  $f(x) = g(x)$
- 3 Να λύσετε τις ανισώσεις:  
 $f(x) > g(x)$   
 $f(x) < g(x)$
- 4 Να λύσετε την εξίσωση  $2g(x) = f(g(0))$
- 5 Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο  $x_0 = 0$



## Εξάσκηση 2

### ▶ Ασκήση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$
- ② Να λύσετε την  $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
  - ⓐ  $f(x) > g(x)$
  - ⓑ  $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση  $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 2

► Ασκήση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$
- ② Να λύσετε την  $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
  - ①  $f(x) > g(x)$
  - ②  $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση  $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 2

► Ασκήση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$
- ② Να λύσετε την  $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
  - ①  $f(x) > g(x)$
  - ②  $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση  $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 2

► Ασκήση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$
- ② Να λύσετε την  $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
  - ①  $f(x) > g(x)$
  - ②  $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση  $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 2

► Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$
- ② Να λύσετε την  $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
  - ①  $f(x) > g(x)$
  - ②  $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση  $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 2

► Άσκηση Geogebra

- ① Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_g$
- ② Να λύσετε την  $f(x) = g(x)$
- ③ Να λύσετε τις ανισώσεις:
  - ①  $f(x) > g(x)$
  - ②  $f(x) < g(x)$
- ④ Να λύσετε την εξίσωση  $2g(x) = f(g(0))$
- ⑤ Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση των συναρτήσεων στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 - 5a + 1$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(3, 5)$ . Να βρείτε:

- 1 την τιμή του  $a$
- 2 τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τους άξονες  $y'y$  και  $x'x$
- 3 τα διαστήματα του  $x$  που η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 - 5a + 1$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(3, 5)$ . Να βρείτε:

- 1 την τιμή του  $a$
- 2 τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τους άξονες  $y'y$  και  $x'x$
- 3 τα διαστήματα του  $x$  που η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$



## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 - 5a + 1$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(3, 5)$ . Να βρείτε:

- 1 την τιμή του  $a$
- 2 τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τους άξονες  $y'y$  και  $x'x$
- 3 τα διαστήματα του  $x$  που η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$

## Εξάσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $g(x) = 1$ . Να βρείτε:

- 1 τα κοινά τους σημεία
- 2 την σχετική τους θέση

## Εξάσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $g(x) = 1$ . Να βρείτε:

- 1 τα κοινά τους σημεία
- 2 την σχετική τους θέση

## Εξάσκηση 5

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών σε καθεμία περίπτωση

## Εξάσκηση 5

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών σε καθεμία περίπτωση

## Εξάσκηση 6

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $e^x$ ,  $\eta\mu x$  για  $x > 0$ , να βρείτε τη σχετική τους θέση και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την ανισότητα:

$$e^x > \eta\mu x, \text{ για κάθε } x > 0$$

## Εξάσκηση 7

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1, x \geq 1 \text{ και } g(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$$

## Εξάσκηση 8

### ► Άσκηση Geogebra

① Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$

② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

$$f(x) = 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$



# Εξάσκηση 8

► Άσκηση Geogebra

- ① Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$
- ② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

- ③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

①  $f(x) = 5/2$

②  $2f(x) - 1 = 0$

③  $f(x) = x^2 + 1, x \neq 0$

## Εξάσκηση 8

### ► Άσκηση Geogebra

① Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$

② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

①  $f(x) = 5/2$

②  $2f(x) - 1 = 0$

③  $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

## Εξάσκηση 8

### ► Άσκηση Geogebra

① Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$

② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

①  $f(x) = 5/2$

②  $2f(x) - 1 = 0$

③  $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

## Εξάσκηση 8

► Άσκηση Geogebra

① Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$

② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

①  $f(x) = 5/2$

②  $2f(x) - 1 = 0$

③  $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

## Εξάσκηση 8

### ► Ασκήση Geogebra

① Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$

② Να βρείτε πεδίο ορισμού της

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$$

③ Να Βρείτε το πλήθος ριζών των εξισώσεων

①  $f(x) = 5/2$

②  $2f(x) - 1 = 0$

③  $f(x) = a^2 + 1, a \neq 0$

## Εξάσκηση 9

► Άσκηση Geogebra

- 1 Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = a$ , για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$
- 2 Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 3\eta\mu a - 5$  είναι αδύνατη, για κάθε  $a \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 9

► Άσκηση Geogebra

- 1 Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = a$ , για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$
- 2 Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 3\eta\mu a - 5$  είναι αδύνατη, για κάθε  $a \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 10

Να εξετάσετε

- ① αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης  
 $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
- ② αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$



## Εξάσκηση 10

Να εξετάσετε

- ① αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης  
 $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
- ② αν ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

## Εξάσκηση 11

Εστω  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $A = \mathbb{R}$  και  $f(A) = (1, +\infty)$ .

- ❶ Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2023$  έχει μία τουλάχιστον λύση
- ❷ Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = a^2 + 1$  έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε  $a \in \mathbb{R}^*$
- ❸ Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \geq 0$  τέτοιο ώστε  $f(x) = e^{x_0}$

## Εξάσκηση 11

Εστω  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $A = \mathbb{R}$  και  $f(A) = (1, +\infty)$ .

- ① Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2023$  έχει μία τουλάχιστον λύση
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = a^2 + 1$  έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε  $a \in \mathbb{R}^*$
- ③ Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \geq 0$  τέτοιο ώστε  $f(x) = e^{x_0}$

## Εξάσκηση 11

Εστω  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $A = \mathbb{R}$  και  $f(A) = (1, +\infty)$ .

- ① Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2023$  έχει μία τουλάχιστον λύση
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = a^2 + 1$  έχει μία τουλάχιστον λύση, για κάθε  $a \in \mathbb{R}^*$
- ③ Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \geq 0$  τέτοιο ώστε  $f(x) = e^{x_0}$