Συναρτήσεις Πράξεις ορίων

Κωνσταντίνος Λόλας

 10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

Υπολογισμοί ορίων



Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Aν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0
- ullet Αν $\lim_{x o x_{t}} f(x) < 0$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_{0}

Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0
- ullet Αν $\lim_{x o x_0}f(x)<0$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 3/36

Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0

Διάταξη

Θεώρημα 2ο

Aν οι συναρτήσεις f , g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 4/36

Από κάπου να πιαστούμε?

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

$$\bullet \lim_{x \to x_0} c = c$$

Και υπολογίζουμε...

ΜΟΝΟ αν υπάρχουν τα όρια των f και g τότε

$$\bullet \ \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} \left(k \cdot f(x) \right) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\bullet \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \text{ ennotities otherwise} \ g(x) \neq 0$$

$$\bullet \ \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)|$$

$$\bullet \lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$
, εννοείται ότι $f(x)>0$ κοντά στο x_0

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 6/36

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- lim $P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- ullet $\lim P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$

Από τα προηγούμενα...

- \bullet $\lim x^n = x_0^n$, yia $n \in \mathbb{N}^*$ $x \rightarrow x_0$
- ullet $P(x)=P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!! $x \rightarrow x_0$
- ullet $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή

Από τα προηγούμενα...

- ullet $\lim_{x o x_0}x^n=x_0^n$, για $n\in\mathbb{N}^*$
- ullet $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma v \nu(x) = \sigma v \nu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 7/36

Από τα προηγούμενα...

- $\circ \lim_{x o x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- ullet $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma \upsilon \nu(x) = \sigma \upsilon \nu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 7/36

Από τα προηγούμενα...

- $\circ \lim_{x o x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- ullet $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- ullet $\lim_{x o x_0}rac{P(x)}{Q(x)}=rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma v \nu(x) = \sigma v \nu(x_0)$
- $\lim_{x\to x_0}\varepsilon\varphi(x)=\varepsilon\varphi(x_0)$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 7/36

Από τα προηγούμενα...

- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \text{, fix } n \in \mathbb{N}^*$
- ullet $\lim_{x o x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\bullet \lim_{x o x_0} rac{P(x)}{Q(x)} = rac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\bullet \ \lim_{x \to x_0} \eta \mu(x) = \eta \mu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \sigma \upsilon \nu(x) = \sigma \upsilon \nu(x_0)$
- $\bullet \lim_{x \to x_0} \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x_0)$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 7/36

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$
, κοντά στο x_0

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R},$$

τότε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 8/36

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0
- $\bullet \ \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R},$

τότε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 8/36

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$
, κοντά στο x_0

$$\quad 0 \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R} \text{,}$$

τότε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k$$

Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

$$\bullet \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1,$$

$$\oint \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu x}{x} = 0$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 9/36

Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 9/36

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Θέτουμε u = q(x)

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Θέτουμε u = g(x)
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025

10/36

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Φέτουμε <math> u = g(x)
- $\mathbf{2}$ Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$
- ${
 m 3}$ Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $k=\lim_{u o u_0}f(u)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

Λόλας $(10^o$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 10/36

Ti gínetai me th súndesh $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

- Φ έτουμε <math> u = g(x)
- ② Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

Λόλας $(10^o$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025

10/36

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

11/36

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \ \mathrm{kal} \ \lim_{x\to 2} g(x) = 2$$

να υπολογίσετε το
$$\lim_{x \to 2} \left(3f(x) + f(x) \cdot g(x) \right)$$

- $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 3x}{x^2 9}$

- $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 3x}{x^2 9}$

- $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 2x}{2x^2 5x + 3}$
- $4 \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2-x} \right)$

- $\begin{array}{cc}
 & \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}
 \end{array}$

- $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
- $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} 2}{x^2 + x}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} - 1}$$

- $\lim_{x \to 4} \frac{x 4}{\sqrt{x} 2}$
- $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} 3x + 1}{x^2 1}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{2x 1} \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x} 1}$

4. Εστω η συνάρτηση
$$f(x)= egin{cases} x-2,&0< x\leq 1\\ 3x-4,&1< x<2 \text{. Nα βρείτε (αν }\\ 2x-1,&x>2 \end{cases}$$

υπάρχουν) τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$

4. Εστω η συνάρτηση $f(x)= egin{cases} x-2,&0< x\leq 1\\ 3x-4,&1< x<2 \text{. Nα βρείτε (αν }\\ 2x-1,&x>2 \end{cases}$

υπάρχουν) τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 15/36

4. Εστω η συνάρτηση
$$f(x)= egin{cases} x-2,&0< x\leq 1\\ 3x-4,&1< x<2 \,.$$
 Να βρείτε (αν $2x-1,&x>2$

υπάρχουν) τα όρια:

- $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\ \, \lim_{x\to 2}f(x)$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 15/36

5. Εστω η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x\neq 2\\ a, & x=2 \end{cases}$$

- **1** Να βρείτε το $\lim_{x \to 2} f(x)$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 16/36

5. Εστω η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x\neq 2\\ a, & x=2 \end{cases}$$

- Nα βρείτε το $\lim_{x \to 2} f(x)$
- Να βρείτε το a ώστε $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 16/36 **6.** Εστω η συνάρτηση $f(x)=egin{cases} \alpha\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\beta,&x<0\\ \alpha\sqrt{x+1}+2\beta,&x\geq0 \end{cases}$. Να βρείτε τα α και $\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to 0}f(x)=1$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 17/36

7. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 18/36

7. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

- $\lim_{x \to 2} \frac{|x^3 x 1| |x 7|}{x^2 4}$
- $\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 4| x + 2}{x^2 2x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 18/36

8. Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

- Αν ισχύει $3x-2-x^2 \le f(x) \le x^2-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει $|f(x)-2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 19/36

- **8.** Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:
 - Αν ισχύει $3x-2-x^2 \le f(x) \le x^2-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 1} f(x)$
 - Αν ισχύει $|f(x)-2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 19/36 **8.** Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

- Αν ισχύει $3x-2-x^2 \le f(x) \le x^2-x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 1} f(x)$
- ② Αν ισχύει $|f(x)-2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$
- An iscúel $f(\mathbb{R})=(0,1)$, na breíte to $\lim_{x \to 0} \left(x^2 f(x)\right)$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 19/36 9. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$, όταν ισχύει:

$$2x - 3x^2 \le f(x) \le x^4 + 2x$$

Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 20/36

10. Να βρείτε το $\lim_{x\to 0} x\sigma v \nu \frac{1}{x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 21/36

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 22/36

$$\lim_{x \to 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$4 \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu^2 x}{x}$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 22/36

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x - 1}{x} - \varepsilon \varphi x$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sigma v \nu^2 x}{x}$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 22/36

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x}{x} + \sigma v \nu x^2$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x 1}{x} \varepsilon \varphi x$
- $\lim_{x \to 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right)$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma \upsilon \nu^2 x}{x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 22/36

- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\eta \mu x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon \varphi_3}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x \eta \mu x}{\eta \mu x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 23/36

- $\begin{array}{cc}
 \mathbf{1} & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\eta \mu x}
 \end{array}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ddot{\varepsilon} \varphi x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu x \eta \mu x}{\eta \mu x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 23/36

- $x \rightarrow 0 \eta \mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$ $x \rightarrow 0$ x
- $\lim \frac{\sigma v \nu x 1}{}$ $x \to 0$ $\eta \mu x$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 23/36

- $x\rightarrow 0$ $\eta\mu x$
- $\lim \frac{\varepsilon \varphi x}{}$ $x \rightarrow 0$ x
- $\lim \frac{\sigma v \nu x 1}{}$ $x \to 0$ $\eta \mu x$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 23/36

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu(\pi x)}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x \eta \mu x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} 1}$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 24/36

- $1 \lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\eta \mu(\pi-x)}{x^2+x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x \eta \mu x}$
- $4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} 1}$

Λόλας $(10^{o}$ ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 24/36

- $\lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu(\pi x)}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x \eta \mu x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 24/36

- $\lim_{x \to 0} \frac{x + \eta \mu x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu(\pi x)}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x + 3x}{2x \eta \mu x}$
- $4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} 1}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 24/36

- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu 3x 1}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi \gamma}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 25/36

- $\ \, \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu 3x 1}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας (10^{o} ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 25/36

- $\lim_{x \to \infty} \frac{\eta \mu 5x}{1 2x}$ $x \to 0$ x
- $\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma v \nu 3x 1}{n}$ $x \to 0$ $x \to 0$
- $x \rightarrow \pi \pi x$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 25/36

- $\mathbf{1} \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu 5x}{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma v \nu 3x 1}{x}$
- $\lim_{x \to \pi} \frac{\eta \mu x}{\pi x}$
- $4 \lim_{x \to 0} \frac{\eta \mu x^2}{\eta \mu 3x}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 25/36

- $\lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x} 1}{x^2 \sqrt{x}}$
- $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} 2}{x-2}$

Λόλας (10° ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 26/36

- $\begin{array}{cc}
 \mathbf{1} & \lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x} 1}{x^2 \sqrt{x}}
 \end{array}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 26/36

16. An
$$\lim_{x\to 1}f(x)=0$$
 , na breite to $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2\eta\mu f(x)}{f(x)+1-\sigma\upsilon\nu f(x)}$

Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 27/36

17. Εστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim \frac{f(x)-1}{}=2.$ Να βρείτε τα όρια:

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 28/36 **17.** Εστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{\stackrel{}{}} \frac{f(x)-1}{}=2.$

Να βρείτε τα όρια:

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 28/36

- **18.** Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\frac{f(1+h)-1}{f(1+h)}=2$. Να βρείτε τα όρια: $h\rightarrow 0$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 29/36

- **18.** Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\frac{f(1+h)-1}{f(1+h)}=2$. Να βρείτε τα όρια: $h\rightarrow 0$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 29/36 19. An $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-3}{x-1} = 2$, na breite to $\lim_{x \to 1} \frac{f(x^2-x+1)-3}{x-1}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 30/36 **20.** Εστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ όταν:

$$\label{eq:continuous} \text{ } \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - x^2 + 3x \right) = 3 \text{ } \text{kal } x_0 = 2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-1}{x-2}=3\ \mathrm{KOL}\ x_0=2$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+\eta\mu x}{x}=2\ \mathrm{kal}\ x_0=0$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 31/36 **20.** Εστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ όταν:

- $egin{array}{c} \ \ \lim_{x
 ightarrow x_0} \left(f(x) x^2 + 3x
 ight) = 3 \ \mathrm{Kal} \ x_0 = 2 \end{array}$
- $2 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3 \ \mathrm{kal} \ x_0 = 2$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 31/36 **20.** Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim_{x \to \infty} f(x)$ όταν:

$$egin{aligned} & \lim_{x o x_0} \left(f(x) - x^2 + 3x
ight) = 3 \ \mathrm{Kal} \ x_0 = 2 \end{aligned}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3 \ \mathrm{kal} \ x_0 = 2$$

$$\label{eq:final_sum} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+\eta\mu x}{x}=2\ \mathrm{kal}\ x_0=0$$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 31/36

- **21.** Εστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$
 - Να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$

Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 32/36

- Να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$
- $\text{ Na breite to} \lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)+xf(x)+x\eta\mu x}{f^2(x)+x^2+n\mu^2 x}$

Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 32/36

22. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1
$$f(x) = \sqrt{|x| - |\eta \mu x|}$$

①
$$f(x) = \sqrt{|x| - |\eta \mu x|}$$

② $f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x - x^2}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 33/36

22. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- ① $f(x) = \sqrt{|x| |\eta \mu x|}$ ② $f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x x^2}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 33/36

23. Να λύσετε την εξίσωση $|\eta \mu x| = |\pi - x|$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 34/36 24.

- Nα λύσετε την εξίσωση $\eta \mu(x^2+x)-x^2=x$

$$2x-3 < f(x) < 2x+3$$
 για κάθε $x \neq 0$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 35/36

24.

- Nα λύσετε την εξίσωση $\eta \mu(x^2+x)-x^2=x$
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+3\frac{\eta\mu x}{x}$. Να αποδείξετε ότι

$$2x-3 < f(x) < 2x+3$$
 για κάθε $x \neq 0$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 35/36

25. Να υπολογίσετε τα όρια

- $\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \\
 \mathbf{2} & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}
 \end{array}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025 36/36

25. Να υπολογίσετε τα όρια

- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

Λόλας (10^o ΓΕΛ) 36/36 Συναρτήσεις 5 Ιουλίου 2025