# Συναρτήσεις

## Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Κωνσταντίνος Λόλας

$10^o$ ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Κάτι πολύ θεωρητικό

Αλλά πρώτα ας παίξουμε με Geogebra

# Σε ακόμα πιο θεωρητικό

Συμβολίζουμε με

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

# Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$
2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$
3. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$
4. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x)\,dx$
5. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$
6. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$
7. Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $\xi$ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$

# Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$
2. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$
3. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$
4. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x) + g(x)\,dx$
5. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$
6. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$
7. Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $\xi$ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$

# Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$
2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$
3. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$
4. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x)\,dx$
5. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$
6. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$
7. Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $\xi$ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$

# Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$
2. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$
3. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$
4. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x) + g(x)\,dx$
5. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$
6. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$
7. Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $\xi$ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$

# Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$
2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$
3. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$
4. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x)\,dx$
5. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$
6. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$
7. Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $\xi$ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$

# Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$
2. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$
3. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$
4. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x) + g(x)\,dx$
5. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$
6. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$
7. Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $\xi$ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$

# Που οδηγεί σε ιδιότητες

Αμεσες συνέπειες του ορισμού:

1. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$
2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$
3. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$
4. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) + g(x)\,dx$
5. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$
6. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$
7. Αν $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $\xi$ με $f(\xi) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

# Ασκήσεις

**1.** Αν $\int_1^3 f(x)\,dx = 1$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 2$, $\int_2^3 f(x)\,dx = 3$ και $\int_1^3 g(x)\,dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_3^2 f(x)\,dx$
2. $\int_1^5 f(x)\,dx$
3. $\int_1^3 2f(x) - 3g(x)\,dx$

**1.** Αν $\int_1^3 f(x)\,dx = 1$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 2$, $\int_2^3 f(x)\,dx = 3$ και $\int_1^3 g(x)\,dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_3^2 f(x)\,dx$
2. $\int_1^5 f(x)\,dx$
3. $\int_1^3 2f(x) - 3g(x)\,dx$

**1.** Αν $\int_1^3 f(x)\,dx = 1$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 2$, $\int_2^3 f(x)\,dx = 3$ και $\int_1^3 g(x)\,dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_3^2 f(x)\,dx$
2. $\int_1^5 f(x)\,dx$
3. $\int_1^3 2f(x) - 3g(x)\,dx$

**2.** Να εξετάσετε αν είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$

osidfji odosifjsdoi sdofijsoi σδοφιξσοδ ιsodifjsodij

**3.** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $\mathrm{A}(1, 2)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x)\, dx$, εφόσον η $f'$ είναι συνεχής

**4.** Να υπολογίσετε το $\kappa$ ώστε

$$\int_2^{\kappa} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx - 2\int_k^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx = 1$$

**5.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \, dx$
2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$
3. $\int_0^1 x^2 \, dx$
4. $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$
5. $\int_0^4 x\sqrt{x} \, dx$
6. $\int_1^2 1 \, dx$

**5.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x\, dx$
2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\, dx$
3. $\int_0^1 x^2\, dx$
4. $\int_2^1 \frac{1}{x^5}\, dx$
5. $\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx$
6. $\int_1^2 1\, dx$

**5.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x\, dx$
2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\, dx$
3. $\int_0^1 x^2\, dx$
4. $\int_2^1 \frac{1}{x^5}\, dx$
5. $\int_0^4 x\sqrt{x}\, dx$
6. $\int_1^2 1\, dx$

**5.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \, dx$
2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$
3. $\int_0^1 x^2 \, dx$
4. $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$
5. $\int_0^4 x\sqrt{x} \, dx$
6. $\int_1^2 1 \, dx$

**5.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \, dx$
2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$
3. $\int_0^1 x^2 \, dx$
4. $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$
5. $\int_0^4 x\sqrt{x} \, dx$
6. $\int_1^2 1 \, dx$

**5.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \, dx$
2. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \, dx$
3. $\int_0^1 x^2 \, dx$
4. $\int_2^1 \frac{1}{x^5} \, dx$
5. $\int_0^4 x\sqrt{x} \, dx$
6. $\int_1^2 1 \, dx$

**6.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x}\right)\, dx$
2. $\int_{1}^{2} \left(2^x + \frac{1}{x^2}\right)\, dx$
3. $\int_{0}^{1} x(3x-1)\, dx$
4. $\int_{0}^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x)\, dx$
5. $\int_{0}^{1} (4x^3 - x^2 - 3x - 1)\, dx$

**6.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x}\right)\, dx$
2. $\int_{1}^{2} \left(2^{x} + \frac{1}{x^{2}}\right)\, dx$
3. $\int_{0}^{1} x(3x-1)\, dx$
4. $\int_{0}^{\pi} (3x^{2} - \eta\mu x)\, dx$
5. $\int_{0}^{1} (4x^{3} - x^{2} - 3x - 1)\, dx$

**6.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(2\sigma\upsilon\nu x+\frac{3}{x}\right)\,dx$
2. $\int_{1}^{2}\left(2^x+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$
3. $\int_{0}^{1}x(3x-1)\,dx$
4. $\int_{0}^{\pi}(3x^2-\eta\mu x)\,dx$
5. $\int_{0}^{1}(4x^3-x^2-3x-1)\,dx$

**6.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x}\right) \, dx$
2. $\int_{1}^{2} \left(2^x + \frac{1}{x^2}\right) \, dx$
3. $\int_{0}^{1} x(3x-1)\, dx$
4. $\int_{0}^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x)\, dx$
5. $\int_{0}^{1} (4x^3 - x^2 - 3x - 1)\, dx$

**6.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x}\right)\, dx$
2. $\int_{1}^{2} \left(2^x + \frac{1}{x^2}\right)\, dx$
3. $\int_{0}^{1} x(3x-1)\, dx$
4. $\int_{0}^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x)\, dx$
5. $\int_{0}^{1} (4x^3 - x^2 - 3x - 1)\, dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx$
2. $\int_0^1 e^{2x}\,dx$
3. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^1 e^{2x-1}\,dx$
6. $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\,dx$
8. $\int_0^1 (x-2)^4\,dx$
9. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\, dx$
2. $\int_0^{1} e^{2x}\, dx$
3. $\int_0^{1} e^{-x}\, dx$
4. $\int_0^{1} \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^{1} e^{2x-1}\, dx$
6. $\int_0^{1} \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^{1} \frac{1}{3x+2}\, dx$
8. $\int_0^{1} (x-2)^4\, dx$
9. $\int_2^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx$
2. $\int_0^{1} e^{2x}\,dx$
3. $\int_0^{1} e^{-x}\,dx$
4. $\int_0^{1} \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^{1} e^{2x-1}\,dx$
6. $\int_0^{1} \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^{1} \frac{1}{3x+2}\,dx$
8. $\int_0^{1} (x-2)^4\,dx$
9. $\int_2^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx$
2. $\int_0^{1} e^{2x}\,dx$
3. $\int_0^{1} e^{-x}\,dx$
4. $\int_0^{1} \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^{1} e^{2x-1}\,dx$
6. $\int_0^{1} \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^{1} \frac{1}{3x+2}\,dx$
8. $\int_0^{1} (x-2)^4\,dx$
9. $\int_2^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\, dx$
2. $\int_0^1 e^{2x}\, dx$
3. $\int_0^1 e^{-x}\, dx$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^1 e^{2x-1}\, dx$
6. $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\, dx$
8. $\int_0^1 (x-2)^4\, dx$
9. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\, dx$
2. $\int_0^1 e^{2x}\, dx$
3. $\int_0^1 e^{-x}\, dx$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^1 e^{2x-1}\, dx$
6. $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\, dx$
8. $\int_0^1 (x-2)^4\, dx$
9. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx$
2. $\int_0^1 e^{2x}\,dx$
3. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^1 e^{2x-1}\,dx$
6. $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\,dx$
8. $\int_0^1 (x-2)^4\,dx$
9. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx$
2. $\int_0^1 e^{2x}\,dx$
3. $\int_0^1 e^{-x}\,dx$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^1 e^{2x-1}\,dx$
6. $\int_0^1 \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\,dx$
8. $\int_0^1 (x-2)^4\,dx$
9. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

**7.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(2x)\, dx$
2. $\int_0^{1} e^{2x}\, dx$
3. $\int_0^{1} e^{-x}\, dx$
4. $\int_0^{1} \frac{dt}{e^{3t}}$
5. $\int_0^{1} e^{2x-1}\, dx$
6. $\int_0^{1} \frac{du}{u+3}$
7. $\int_0^{1} \frac{1}{3x+2}\, dx$
8. $\int_0^{1} (x-2)^4\, dx$
9. $\int_2^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x\ln x}, \alpha > 1$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x\ln x}, \alpha > 1$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. $\int_0^1 x e^{x^2}\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x\ln x},\ \alpha>1$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. $\int_0^1 x e^{x^2}\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_\alpha^{\alpha^2} \frac{dx}{x\ln x},\ \alpha > 1$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x\ln x}, \alpha > 1$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x\ln x}, \alpha > 1$

**8.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
3. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\,dx$
6. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{dx}{x\ln x}, \alpha > 1$

**9.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

**9.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

**9.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

1. $\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$
3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

**10.**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$
   1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής
   2. Να βρείτε το $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x-1|\,dx$

**10.**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$
   1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής
   2. Να βρείτε το $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x-1|\,dx$

**10.**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$
   1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής
   2. Να βρείτε το $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1|\, dx$

**10.**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x & , x < 0 \\ e^x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$
    1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής
    2. Να βρείτε το $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
2. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x-1|\, dx$

**11.**

1. Αν $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx$
2. Αν $f(1) = 2f(0)$ και ισχύουν $f^2(x) - f'(x) = f(x)$, $x \in [0,1]$, $f(x) > 0$,$x \in [0,1]$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

**11.**

1. Αν $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)f'(x)\,dx$
2. Αν $f(1) = 2f(0)$ και ισχύουν $f^2(x) - f'(x) = f(x)$, $x \in [0,1]$, $f(x) > 0$,$x \in [0,1]$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

**12.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ όταν ισχύει:

1. $f(x) = x \int_0^1 e^{xt}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x \int_0^1 \frac{1}{|x-t|+1}\, dt$, $x \geq 1$

**12.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ όταν ισχύει:

1. $f(x) = x\int_0^1 e^{xt}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x\int_0^1 \frac{1}{|x-t|+1}\,dt$, $x \geq 1$

**13.** Να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(t)\,dt\right)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

**14.** Εστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x) = 2x + \int_0^2 f(x)\,dx,\ x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

# Απόδειξη Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Εστω $f$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο $\mu$ και μέγιστο $\mathrm{M}$ στο $[a,b]$.

$$\mu \leq f(x) \leq \mathrm{M}$$

$$\mu(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \mathrm{M}(b-a)$$

$$\mu \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \mathrm{M}$$

Αρα από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$.

# Απόδειξη Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Εστω $f$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η $f$ παρουσιάζει ελάχιστο $\mu$ και μέγιστο $\mathrm{M}$ στο $[a,b]$.

$$\mu \leq f(x) \leq \mathrm{M}$$

$$\mu(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \mathrm{M}(b-a)$$

$$\mu \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \mathrm{M}$$

Αρα από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$.

# Απόδειξη Αρχική = Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$\text{Αν } F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \implies \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)h}{h}, \xi \in [x, x+h] \\
&= f(\xi), \xi \in [x, x+h] \\
&= f(x), \text{ αφού } h \to 0
\end{aligned}$$

# Απόδειξη Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν $G$ είναι μια αρχική συνάρτηση της $f$ στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Αφού $G$ αρχική της $f$ ισχύει $G(x) = F(x) + c$
Εχουμε $G(a) = F(a) + c \implies G(a) = c \implies G(x) = F(x) + G(a)$
Αρα $G(b) = F(b) + G(a) \implies F(b) = G(b) - G(a)$