Συναρτήσεις

Συνέχεια Συνάρτησης

Κωνσταντίνος Λόλας

Όταν εμείς το υπολογίζαμε...

Μέχρι στιγμής πλησιάζαμε. Ήρθε ο καιρός να φτάσουμε!

Συνέχεια 1

Συνέχεια σε σημείο

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Συνέχεια 2

Συνέχεια σε διάστημα

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ όταν:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Συνέχεια 3

Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση είναι συνεχής όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές

Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f \circ g$

Και πράξεις αυτών

Αν f και g συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f \circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια

Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν ”διακόπτεται” βγάζουμε ωραία θεωρήματα

Εξάσκηση 1

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο x_0:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$

Εξάσκηση 1

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο x_0:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$

Εξάσκηση 2

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ ως προς τη συνέχεια και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$.

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4\alpha e^x + \beta\sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x + \alpha x - \beta, & x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η f είναι συνεχής.

Εξάσκηση 5

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$xf(x) = x^2 + \eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
Αν $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3$, να δείξετε ότι $f(1) = 2$

Εξάσκηση 7

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = \ln x, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x) = x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x) = x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

1. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 9

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x = 1$, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση