

Κύκλος

Εξίσωση Κύκλου

Κωνσταντίνος Λόλας

Κωνικές Τομές

Ωρα για παιχνίδι! Geogebra

Όλες? Κανονικά ναι, αλλά!

Θα ασχοληθούμε με

- Κύκλο
- Ελλειψη
- Παραβολή
- Υπερβολή

Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

Κύκλος ολέ!

Ορισμός

Κύκλος ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο. Το σημείο ονομάζεται κέντρο του κύκλου και η απόσταση, ακτίνα.

Πάμε!

Εστω $A(x, y)$ το οποιοδήποτε σημείο του κύκλου, ρ η ακτίνα και $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του

Θα πρέπει $|OA| = \rho$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Τι, αυτό ήταν?

Πάμε!

Εστω $A(x, y)$ το οποιοδήποτε σημείο του κύκλου, ρ η ακτίνα και $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του

Θα πρέπει $|OA| = \rho$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Τι, αυτό ήταν?

Πάμε!

Εστω $A(x, y)$ το οποιοδήποτε σημείο του κύκλου, ρ η ακτίνα και $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του

Θα πρέπει $|OA| = \rho$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Τι, αυτό ήταν?

Ο Μοναδιαίος!

Κέντρο $K(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, άρα...

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Τι έμεινε?

- ιδιότητες
- εφαπτομένη
- γενική εξίσωση

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

Εφαπτόμενη

Αν την κατασκευάζετε δεν χρειάζεστε τύπο!

Μόνο για τον μοναδιαίο κύκλο, η εφαπτόμενη από το σημείο του (x_1, y_1) είναι η

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 1$$

Η στη γενική περίπτωση (εκτός ύλης σαν τύπος)

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη

Οχι πάντα στην έτοιμη μορφή

Γενική εξίσωση κύκλου

Κάθε εξίσωση

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

παριστάνει κύκλο και κάθε κύκλος έχει εξίσωση αυτής της μορφής.

Το κέντρο είναι το $K = (-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και η ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

Απόδειξη →

Απόδειξη ←

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και:

- ① έχει ακτίνα $\rho = 2$
- ② διέρχεται από το σημείο $A(-3, 4)$
- ③ εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y - 10 = 0$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και:

- ① έχει ακτίνα $\rho = 2$
- ② διέρχεται από το σημείο $A(-3, 4)$
- ③ εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y - 10 = 0$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και:

- ① έχει ακτίνα $\rho = 2$
- ② διέρχεται από το σημείο $A(-3, 4)$
- ③ εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y - 10 = 0$

Εξάσκηση 2

Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε:

- 1 την εξίσωση της χορδής του κύκλου C που έχει μέσον το σημείο $A(2, 4)$
- 2 το μήκος της παραπάνω χορδής

Εξάσκηση 2

Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε:

- 1 την εξίσωση της χορδής του κύκλου C που έχει μέσον το σημείο $A(2, 4)$
- 2 το μήκος της παραπάνω χορδής

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του:

① $A(3, 4)$

② $B(-4, \mu), \mu > 0$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του:

① $A(3, 4)$

② $B(-4, \mu), \mu > 0$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:

- ① κέντρο το σημείο $K(3, -2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{7}$
- ② διάμετρο το τμήμα AB με άκρα τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-5, 6)$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:

- ① κέντρο το σημείο $K(3, -2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{7}$
- ② διάμετρο το τμήμα AB με άκρα τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-5, 6)$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο

$$C_2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 7$$

και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : 4x - 3y + 2 = 0$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας
 $\varepsilon_1 : 4x + 3y = 12$ στο σημείο $A(3, 0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία
 $\varepsilon_2 : y = x - 1$

Εξάσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, -1)$, $B(1, -3)$ και $\Gamma(7, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Εξάσκηση 8

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$

Εξάσκηση 9

Δίνεται η εξίσωση

$$(2x - 1)^2 + 2y(2y + 1) = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο και μετά να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

Εξάσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1 Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο
- 2 Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση, βρίσκονται σε ευθεία

Εξάσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο
- ② Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση, βρίσκονται σε ευθεία

Εξάσκηση 11

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta - 3 = 0, \theta \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$
- ② Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο

Εξάσκηση 11

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta - 3 = 0, \theta \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$
- ② Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο

Εξάσκηση 12

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

και

$$C_2 : (x + 1)^2 + y^2 = 3^2$$

- ① Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(-1, 5)$
- ② Να αποδείξετε ότι η ε εφάπτεται και του κύκλου C_2

Εξάσκηση 12

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

και

$$C_2 : (x + 1)^2 + y^2 = 3^2$$

- ① Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο του $A(-1, 5)$
- ② Να αποδείξετε ότι η ε εφάπτεται και του κύκλου C_2

Εξάσκηση 13

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C : (x - 1)^2 + y^2 = 2$, που είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : y = x + 1$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 0)$

Εξάσκηση 15

Από το σημείο $M(4, 3)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 2$. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε:

- 1 την ευθεία AB
- 2 την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία AB

Εξάσκηση 15

Από το σημείο $M(4, 3)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 2$. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε:

- 1 την ευθεία AB
- 2 την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία AB

Εξάσκηση 16

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 4$$

και

$$C_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 25$$

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2

Εξάσκηση 17

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 4$ ως προς:

- ① το σημείο $A(1, 3)$
- ② την ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$
- ③ τον κύκλο $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$

Εξάσκηση 17

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 4$ ως προς:

- ① το σημείο $A(1, 3)$
- ② την ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$
- ③ τον κύκλο $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$

Εξάσκηση 17

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 4$ ως προς:

- ① το σημείο $A(1, 3)$
- ② την ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$
- ③ τον κύκλο $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$

Εξάσκηση 18

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

- ❶ Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται
- ❷ Να βρείτε την κοινή χορδή των κύκλων

Εξάσκηση 18

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

- ① Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται
- ② Να βρείτε την κοινή χορδή των κύκλων

Εξάσκηση 19

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

- ❶ Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά
- ❷ Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
- ❸ Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη των κύκλων

Εξάσκηση 19

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

- ① Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά
- ② Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
- ③ Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη των κύκλων

Εξάσκηση 19

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

- ① Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά
- ② Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
- ③ Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη των κύκλων

Εξάσκηση 20

Δίνεται η οικογένεια κύκλων

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
- ② Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση

Εξάσκηση 20

Δίνεται η οικογένεια κύκλων

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
- ② Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση

Εξάσκηση 21

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- ① Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο
- ② Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε

Εξάσκηση 21

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- ① Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο
- ② Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε

Εξάσκηση 22

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C , όταν ισχύουν:

- η ευθεία $\varepsilon : y = -2x$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία $A(3, 1)$ και B
- ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-1, 0)$
- $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = 0$

Εξάσκηση 23

Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $A(4, 2)$ και έχει μήκος $2\sqrt{5}$

Εξάσκηση 24

Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες που φέρνουμε στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 5$ από το σημείο $A(1, 3)$ είναι κάθετες

Εξάσκηση 25

Δίνονται τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(-2, 4)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύει:

① $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

② $\widehat{AMB} = 90^\circ$

Εξάσκηση 25

Δίνονται τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(-2, 4)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύει:

- ① $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$
- ② $\widehat{AMB} = 90^\circ$

Εξάσκηση 26

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο $A(0, 1)$ είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $\varepsilon : y = \frac{3}{2}$

Εξάσκηση 27

Να βρείτε που κινείται το σημείο $M(3 + 2\eta\mu\theta, 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Εξάσκηση 28

Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 1)^2 + y^2 = 4$. Αν το σημείο A κινείται στον κύκλο C με κέντρο το K , να βρείτε που κινείται το σημείο M , για το οποίο ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{KA}$$

Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

- 1 Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
- 2 Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $A(1, 2)$ ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου
- 3 Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε

Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

- 1 Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
- 2 Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $A(1, 2)$ ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου
- 3 Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε

Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

- 1 Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
- 2 Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $A(1, 2)$ ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου
- 3 Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε

Εξάσκηση 30

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$C_2 : (x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 9$$

και

$$C_3 : (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 64$$

- ① Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 και μετά να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_1 από ένα σημείο του C_2
- ② Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_2 και C_3 και μετά να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_2 από ένα σημείο του C_3

Εξάσκηση 30

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$C_2 : (x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 9$$

και

$$C_3 : (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 64$$

- ① Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 και μετά να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_1 από ένα σημείο του C_2
- ② Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_2 και C_3 και μετά να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_2 από ένα σημείο του C_3

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $M(x_1, y_1)$. Εστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $M(x_1, y_1)$. Εστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $M(x_1, y_1)$. Εστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
 Θα ισχύει $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $M(x_1, y_1)$. Εστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $M(x_1, y_1)$. Εστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $M(x_1, y_1)$. Εστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και έστω το σημείο του $M(x_1, y_1)$. Εστω $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης
Θα ισχύει $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Άρα $A = -2x_0$, $B = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Αρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

πιστοτή θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία