Συναρτήσεις

Θεώρημα Rolle

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

But Whyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

1. μονοτονία
2. ακρότατα
3. αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

1. μονοτονία
2. ακρότατα
3. αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

1. μονοτονία
2. ακρότατα
3. αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

Ωρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Θεώρημα Rolle

Θεώρημα Rolle

Εστω μία συνάρτηση f:

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$

Συμπεράσματα

1. ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
2. ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
3. έχει περίεργες προϋποθέσεις

Συμπεράσματα

1. ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
2. ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
3. έχει περίεργες προϋποθέσεις

Συμπεράσματα

1. ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
2. ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
3. έχει περίεργες προϋποθέσεις

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

1. βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
2. βρίσκουμε πλήθος ριζών
3. βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

1. βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
2. βρίσκουμε πλήθος ριζών
3. βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

1. βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
2. βρίσκουμε πλήθος ριζών
3. βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Ασκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Ασκηση 24

Εστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Ασκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Ασκηση 24

Εστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Ασκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Ασκηση 24

Εστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$
2. Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$
2. Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$
2. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$
2. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

4. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x)\neq 1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία το πολύ ρίζα

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

1. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

1. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

1. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ και στη συνέχεια, να βρείτε όλα τα $\xi \in (0, \pi)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

7. Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^\beta = \beta^\alpha$, να δείξετε ότι:

1. Για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο $[\alpha, \beta]$
2. $1 < \alpha < e < \beta$

7. Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$, να δείξετε ότι:

1. Για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο $[\alpha, \beta]$
2. $1 < \alpha < e < \beta$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $f'(x) \neq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $1 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = x_0^2 + 1$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Να αποδείξετε ότι:

- Για την συνάρτηση $G(x) = \dfrac{f(x)}{x-3}$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο $[1, 2]$
- Υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3, 0)$