Συναρτήσεις
Κανόνας De L' Hospital

Κωνσταντίνος Λόλας

Ας τελειώσουμε με τα όρια ΕΠΙΤΕΛΟΥΣ

Αφήσαμε κάποια όρια

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $1^{+\infty}$
- $(+\infty)^0$
- 0^0

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Longrightarrow \frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Longrightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^{0} \Longrightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^{0} \Longrightarrow e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^{0} \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^{0} \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^{0} \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^{0} \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ένας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ορισμός

Κανόνας De L' Hospital

Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $\dfrac{0}{0}$, με $x_0\in\bar{\mathbb{R}}$ τότε αν

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k\in\bar{\mathbb{R}}$$

όπου $\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Έχει προϋποθέσεις που απλά
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Έχει προϋποθέσεις που απλά
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Έχει προϋποθέσεις που απλά
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Έχει προϋποθέσεις που απλά
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
3. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Εξάσκηση 1

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x-e^{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x-1\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-3^{x}}{x-\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \ln x - e^x\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \ln x - 1\right)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 3^x}{x - \ln x}$

Εξάσκηση 3

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x - e^x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x - 1)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 3^x}{x - \ln x}$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \ln(1 + e^x) \right)$
2. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$
2. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x e^{x} \right)$
2. $\lim\limits_{x \to -0} \left(x \ln x \right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x e^{x^{3}}}$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x})$
2. $\lim\limits_{x\to-0}(x\ln x)$
3. $\lim\limits_{x\to0^{+}}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{xe^{x^3}}$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)$
2. $\lim\limits_{x \to -0} (x \ln x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{xe^{x^3}}$

Εξάσκηση 5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)$
2. $\lim\limits_{x \to -0} (x \ln x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{xe^{x^3}}$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \to 0^-} x^x$
2. $\lim_{x \to +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

Εξάσκηση 6

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} x^x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

Εξάσκηση 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2a}{x - a^2}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon : x = 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{a^2x^n + 5x + 1}{x^2 + 1}$. Να βρείτε τις τιμές των $a \in \mathbb{R}^*$ και $n \in \mathbb{N} - 0, 1$ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon : y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε τις τιμές των α και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 1} - x \right) = 2$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Άρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Άρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία