# Συναρτήσεις

## Συνέπειες Bolzano 2 (the rest)

Κωνσταντίνος Λόλας

# Ένα μάθημα μόνο θεωρία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$ που δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο

Συμπέρασμα...

# Ένα μάθημα μόνο θεωρία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$ που δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο

Συμπέρασμα...

# Ένα μάθημα μόνο θεωρία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$ που δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο

Συμπέρασμα...

# Θεώρημα 1

**Θεώρημα μέγιστου ελάχιστου**

Κάθε συνεχής σε κλειστό διάστημα συνάρτηση $f$ έχει μέγιστο ΚΑΙ ελάχιστο στο $\Delta$.

# Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το $2.5$

Συμπέρασμα...

# Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το $2.5$

Συμπέρασμα...

# Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το $2.5$

Συμπέρασμα...

# Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το $2.5$

Συμπέρασμα...

# Θεώρημα 2

**Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (γενίκευση Bolzano)**

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f$ στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = \kappa$ και $f(\beta) = \lambda$ με $\lambda \neq \kappa$. Για κάθε $\eta \in (\kappa, \lambda)$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$

# Θεώρημα 3

**Θεώρημα εικόνας διαστήματος συνεχούς συνάρτησης**

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f$ στο $[\alpha, \beta]$. Η εικόνα $f([\alpha, \beta])$ είναι και πάλι διάστημα.

# Φαντασία με Σ-Λ

- Γνησίως αύξουσα σε διάστημα έχει πάντα μέγιστο
- Γνησίως αύξουσα σε κλειστό διάστημα έχει πάντα μέγιστο
  Πού?

Συμπέρασμα...

# Φαντασία με Σ-Λ

- Γνησίως αύξουσα σε διάστημα έχει πάντα μέγιστο
- Γνησίως αύξουσα σε κλειστό διάστημα έχει πάντα μέγιστο
  Πού?

Συμπέρασμα...

# Φαντασία με Σ-Λ

- Γνησίως αύξουσα σε διάστημα έχει πάντα μέγιστο
- Γνησίως αύξουσα σε κλειστό διάστημα έχει πάντα μέγιστο
  Πού?

Συμπέρασμα...

# Θεώρημα 4

## Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα

Έστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f$.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια

Ή φτάνουμε την τιμή Ή πλησιάζουμε συνεχώς

# Θεώρημα 4

**Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα**

Έστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f$.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια
Ή φτάνουμε την τιμή Ή πλησιάζουμε συνεχώς

# Θεώρημα 4

**Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα**

Έστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f$.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια

Ή φτάνουμε την τιμή Ή πλησιάζουμε συνεχώς

# Θεώρημα 4

**Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα**

Έστω μια συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f$.

- $f([\alpha,\beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha,\beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$
- $f((\alpha,\beta]) = (\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha,\beta)) = (\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια

Ή φτάνουμε την τιμή Ή πλησιάζουμε συνεχώς

# Θεώρημα 4

**Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα**

Έστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f$.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια
Ή φτάνουμε την τιμή Ή πλησιάζουμε συνεχώς

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (10, 11)$ ώστε $f(\xi) = 2023$.

Λύση

# Εξάσκηση 2

Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 3)$ ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3}$$

Λύση

# Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^4(x-3)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $f$ έχει δύο θέσεις ελαχίστων $x_1$, $x_2$ με $x_1 < x_2$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ που η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $[x_1, x_2]$.

Λύση

# Εξάσκηση 4

Έστω $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon : y = x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $C_f$ που απέχει από την ευθεία $\varepsilon$ περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της $C_f$.

Λύση

# Εξάσκηση 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [2,4] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ενα τουλάχιστον $x_0 \in (2,4)$ ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(4)}{6}$$

Λύση

# Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f$, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

# Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f$, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

# Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f$, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

# Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f$, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

# Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f$, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

# Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $f$, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

# Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1. Να δείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία ρίζα
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 2$

# Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1. Να δείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία ρίζα
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 2$

# Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1. Να δείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία ρίζα
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 2$

# Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Στο σχήμα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της $f$ και οι οριακές τιμές της στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει ακριβώς δύο ρίζες
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

# Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Στο σχήμα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της $f$ και οι οριακές τιμές της στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει ακριβώς δύο ρίζες
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

# Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Στο σχήμα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας της $f$ και οι οριακές τιμές της στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει ακριβώς δύο ρίζες
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

# Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η $f$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha)-1}{x-x_1} + \frac{f(\beta)-1}{x-x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(x_1, x_2)$ για κάθε $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda+1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές $\kappa$ και $\lambda$.

# Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η $f$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha) - 1}{x - x_1} + \frac{f(\beta) - 1}{x - x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(x_1, x_2)$ για κάθε $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda + 1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές $\kappa$ και $\lambda$.

# Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η $f$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha)-1}{x-x_1} + \frac{f(\beta)-1}{x-x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(x_1, x_2)$ για κάθε $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda+1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές $\kappa$ και $\lambda$.

# Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η $f$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν $x_1, x_2$ $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha) - 1}{x - x_1} + \frac{f(\beta) - 1}{x - x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(x_1, x_2)$ για κάθε $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda + 1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές $\kappa$ και $\lambda$.

# Εξάσκηση 10

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)-x}{x+f(x)}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$

# Εξάσκηση 10

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x}{x + f(x)}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$

# Εξάσκηση 10

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x}{x + f(x)}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$

# Εξάσκηση 11

Έστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

# Εξάσκηση 11

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $A = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

# Εξάσκηση 11

Έστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

# Εξάσκηση 11

Έστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

# Εξάσκηση 11

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $A = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

# Εξάσκηση 12

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι $1-1$, συνεχής και ισχύει

$$0 < f(0) < 1$$

Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

# Εξάσκηση 13

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f^3(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Με θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[10, 11]$ με $f(10) = 1024$ και $f(11) = 2048$. Αφού $2023 \in (1024, 2048)$ υπάρχει $x_0$...

Πίσω στην άσκηση

Με Bolzano ή με μέγιστης ελάχιστης τιμής και ΘΕΤ.

$$f(3) < f(2) < f(1)$$
$$3f(3) < f(1) + f(2) + f(3) < 3f(1)$$
$$f(3) < \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3} < f(1)$$

Πίσω στην άσκηση

Προφανές ελάχιστο στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Ως συνεχής στο $[1, 3]$ έχει σίγουρα ΚΑΙ μέγιστο στο $(1, 3)$

Πίσω στην άσκηση

Η συνάρτηση ‘απόστασης‘ $f(x) - x$ είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα και έχει σίγουρα μέγιστο

Πίσω στην άσκηση

Όμοια με την Άσκηση 2

Πίσω στην άσκηση

1. Είναι γνησίως αύξουσα άρα $(f(+\infty), f(-\infty))$
2. Προφανώς $[f(0), f(1)]$...

Πίσω στην άσκηση