## Πολυώνυμα Διαίρεση

Κωνσταντίνος Λόλας

Εννοείται τη διαίρεση!

Εννοείται τη διαίρεση! και ειδικά την κάθετη!

Εννοείται τη διαίρεση! Να σας δω: Να γίνει η διαίρεση

51.32:2.7

Εννοείται τη διαίρεση! Το τέλειο φέτος είναι ότι θα ασχολούμαστε <u>MONO</u> με ακέραιους συντελεστές

#### Δημοτικό ολέ!

#### Ευκελείδεια Διαίρεση

Για κάθε ζευγάρι φυσικών  $\Delta$  και  $\delta>0$ , υπάρχουν μοναδικοί  $\pi\in\mathbb{N}$  και  $v\in\mathbb{N}$  ώστε

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$
, be  $0 \le \upsilon < \delta$ 

Με ονομασίες:  $\Delta$  διαιρετέος,  $\delta$  διαιρέτης,  $\pi$  πηλίκο και v υπόλοιπο

Άλλη μορφή της διαίρεσης

$$Aν \Delta = \delta \cdot \pi + υ τότε$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{v}{\delta}$$

#### Δημοτικό ολέ!

#### Ευκελείδεια Διαίρεση

Για κάθε ζευγάρι φυσικών  $\Delta$  και  $\delta>0$ , υπάρχουν μοναδικοί  $\pi\in\mathbb{N}$  και  $v\in\mathbb{N}$  ώστε

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$
,  $\mu \epsilon \ 0 \le \upsilon < \delta$ 

Με ονομασίες:  $\Delta$  διαιρετέος,  $\delta$  διαιρέτης,  $\pi$  πηλίκο και v υπόλοιπο

#### Άλλη μορφή της διαίρεσης

$$Aν \Delta = δ \cdot π + υ τότε$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = \pi + \frac{\upsilon}{\delta}$$

## Περνάμε στα καινούρια

#### Διαίρεση Πολυωνύμων

Για κάθε ζευγάρι πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x)\neq 0$ , υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και  $\upsilon(x)$  ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

Με v(x) να είναι μηδενικό πολυώνυμο ή βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $\delta(x)$ 

Άλλη μορφή της διαίρεσης

$$Aν \Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + v(x)$$
 τότε

$$\frac{\Delta(x)}{\delta(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{\delta(x)}$$

## Περνάμε στα καινούρια

#### Διαίρεση Πολυωνύμων

Για κάθε ζευγάρι πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x)\neq 0$ , υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα  $\pi(x)$  και v(x) ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

Με v(x) να είναι μηδενικό πολυώνυμο ή βαθμού μικρότερου ή ίσου του  $\delta(x)$ 

#### Άλλη μορφή της διαίρεσης

$$Αν \Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$
 τότε

$$\frac{\Delta(x)}{\delta(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{\delta(x)}$$

Λόλας Πολυώνυμα

4/25

- $(x^2-1):(x)$
- $(x^2 + 2x + 3) : (x+1)$

- ②  $(x^2-1):(x)$
- $(x^2 + 2x + 3) : (x+1)$

- $(x^2-1):(x-1)$
- ②  $(x^2-1):(x)$
- $(x^2+2x+3):(x+1)$

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 | x - 3 |$$

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \frac{x - 3}{x^2}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x^3 - 5x^2 + 2x & -1 & x - 3 \\
-x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x - 4 \\
\hline
-2x^2 + 2x & \\
2x^2 - 6x & \\
-4x & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x^3 - 5x^2 + 2x & -1 & x - 3 \\
-x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x - 4 \\
\hline
-2x^2 + 2x & \\
2x^2 - 6x & \\
-4x & -1 & \\
4x - 12 & \\
\end{array}$$

Από γνωστά

Άρα

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x - 3} = x^2 - 2x - 4 + \frac{-13}{x - 3}$$

- x-5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^5 + 3x + 2$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής..

Aρα 
$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$$

- x 5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...

$$Aρα P(x) = (x - ρ)π(x) + v$$

- x 5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^5 + 3x + 2$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...

Aρα 
$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$$

- $\bullet$  x-5 θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^2 + 2x 1$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...
- $x^5 + 3x + 2$  θα δώσει υπόλοιπο πολυώνυμο μορφής...

Άρα 
$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

## 1 Θεωρηματάκι

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

#### Βρείτε τρόπο να υπολογίσετε το v

Θεώρημα Υπολοίπου

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το  $x-\rho$  δίνει υπόλοιπο  $P(\rho)$ 

### 1 Θεωρηματάκι

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$$

Βρείτε τρόπο να υπολογίσετε το  $\upsilon$ 

#### Θεώρημα Υπολοίπου

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το  $x-\rho$  δίνει υπόλοιπο  $P(\rho)$ 

## Και το πόρισμά του!

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

Τι γίνεται αν  $P(\rho) = 0$ ?

Πόρισμα Υπολοίπου

Αν  $P(\rho)=0$  τότε  $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$  δηλαδή το  $x-\rho$  είναι παράγοντας

#### Γενικά

Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$ είναι ρίζα του

### Και το πόρισμά του!

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

Tι γίνεται αν  $P(\rho) = 0$ ?

#### Πόρισμα Υπολοίπου

Αν  $P(\rho)=0$  τότε  $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$  δηλαδή το  $x-\rho$  είναι παράγοντας

#### Γενικά

Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$ είναι ρίζα του

#### Και το πόρισμά του!

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

Tι γίνεται αν  $P(\rho) = 0$ ?

#### Πόρισμα Υπολοίπου

Αν  $P(\rho)=0$  τότε  $P(x)=(x-\rho)\pi(x)$  δηλαδή το  $x-\rho$  είναι παράγοντας

#### Γενικά

Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το  $x-\rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του

# Σχήμα Horner

Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{(σως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

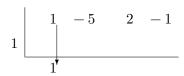
- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- ② γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

# Σχήμα Horner

Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{(σως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

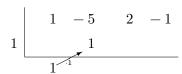
- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- ② γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



## Σχήμα Horner

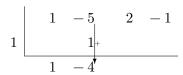
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{(σως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- ② γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



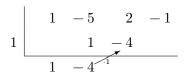
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{(σως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- ② γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



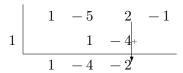
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{(σως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- ② γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



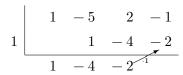
Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε ίσως είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{(σως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- ② γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!



Αν έχουμε να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με  $x-\alpha$  τότε  $\underline{\text{(σως}}$  είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε Horner

- γράφουμε όλους τους συντελεστές του διαιρεταίου
- ② γράφουμε το α δεξιά
- ③ ράβουμε!!!!!

#### Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x + 1$

- $\ensuremath{\text{\textbf{0}}}$  Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- ② Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο  $\psi(x)$  της παραπάνω διαίρεσης
- ③ Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- 🐠 Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 3x + 1$ 

- **1** Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο v(x) της παραπάνω διαίρεσης

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 3x + 1$ 

- **1** Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο v(x) της παραπάνω διαίρεσης
- Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 3x + 1$ 

- **1** Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο v(x) της παραπάνω διαίρεσης
- Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 3x + 1$ 

- Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) δια το  $x^2-1$
- Να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο v(x) της παραπάνω διαίρεσης
- Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
- Να εξετάσετε αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια
- Να δείξετε ότι το πολυώνυμο Q(x) = P(x) (4x + 1) διαιρείται από το  $x^2-1$

#### Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - 1)(3x - 2) + 5x - 1$

- Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x):(x^2-1)$

Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = (x^2 - 1)(3x - 2) + 5x - 1$ 

- Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x):(x^2-1)$
- το 3x - 2:

- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 - 5x + 1 \mu \epsilon \tau \sigma x + 1$

- Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 - 5x + 1 \mu \epsilon \tau \sigma x + 1$
- **2** Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x) = 2x^2 - \alpha x + \alpha$  με το  $x + 2\alpha$  είναι 11

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x-1 είναι 2, να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $Q(x)=P(3x+7)-x^2+2$  έχει ρίζα το -2

Λόλας Πολυώνυμα 14/25

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το  $3x^2-x-4$  είναι 2x+5, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1

Λόλας Πολυώνυμα 15/25

- ① Να εξετάσετε, αν τα πολυώνυμα x+1 και x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου
- ② Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha^3 x^3 5x + 2$  έχει παράγοντα το x-2

Λόλας Πολυώνυμα 16/25

- oxdot Να εξετάσετε, αν τα πολυώνυμα x+1 και x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου
- **2** Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha^3 x^3 - 5x + 2$  έχει παράγοντα το x - 2

Πολυώνυμα Λόλας 16/25

Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμο δεν έχουν παράγοντα της μορφής  $x - \rho$ 

$$P(x) = 3x^6 + 5x^2 + 3$$

$$Q(x) = -3x^4 - 5x^2 - 3$$

Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμο δεν έχουν παράγοντα της μορφής  $x-\rho$ 

- $P(x) = 3x^6 + 5x^2 + 3$
- $Q(x) = -3x^4 5x^2 3$

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες το πολυώνυμο  $P(x) = -x^3 + 2\alpha x - \beta + \alpha$ , έχει παράγοντα το x + 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x + 1 είναι 3.

Αν το πολυώνυμο  $P(x)=x^3+\alpha x-\alpha+\beta$  έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου  $x^2-2x$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ 

Λόλας Πολυώνυμα 19/25

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιραίσεων και να γράψετε τις ταυτότητες των διαιρέσεων

$$2 -2x^3 : (x+1)$$

Λόλας Πολυώνυμα 20/25

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιραίσεων και να γράψετε τις ταυτότητες των διαιρέσεων

$$2 -2x^3 : (x+1)$$

Λόλας Πολυώνυμα 20/25

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)=x^3-7x+6$  διαιρείται με το πολυώνυμο Q(x)=(x-1)(x+3) και στη συνέχεια, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης P(x):Q(x)

Λόλας Πολυώνυμα 21/25

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^5$ , όπου  $\nu$  θετικός αριθμός. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 

Λόλας Πολυώνυμα 22/25

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το  $x^2+x$ , όταν ισχύουν P(0)=2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του P(x) με το x+1 είναι 3

Λόλας Πολυώνυμα 23/25

Να γράψετε τις παρακάτω συναρτήσεις στη μορφή

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

#### Να γράψετε τις παρακάτω συναρτήσεις στη μορφή

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Έστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το  $x^2+3$ 

- f 1 Να βρείτε τη μορφή του πηλίκου  $\pi(x)$
- ② Αν επιπλέον έχει ρίζα το -1 και ισχύει P(-2)=14, να βρείτε το P(x)

Λόλας Πολυώνυμα 25/25

Έστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το  $x^2+3$ 

- f 0 Να βρείτε τη μορφή του πηλίκου  $\pi(x)$
- ② Αν επιπλέον έχει ρίζα το -1 και ισχύει P(-2)=14, να βρείτε το P(x)

Λόλας Πολυώνυμα 25/25