

Συναρτήσεις

Εφαπτομένη

Κωνσταντίνος Λόλας

Τι μάθαμε?

Ξέρουμε την κλίση ΚΑΘΕ συνάρτησης σε ΚΑΘΕ σημείο. Σημείο - Κλίση...

Εφαπτομένη

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο x_0 είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Τι μάθαμε?

Ξέρουμε την κλίση ΚΑΘΕ συνάρτησης σε ΚΑΘΕ σημείο. Σημείο - Κλίση...

Εφαπτομένη

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο x_0 είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Μελέτη τύπου

① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK

② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0

ⓐ είτε θα δίνεται

ⓑ είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί

ⓐ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί

ⓐ είτε η συνάρτηση είναι κορυφή ή η δε καύση

ⓐ είτε η συνάρτηση είναι κορυφή ή η δε καύση

ⓐ είτε δίνεται κάποια τιμή

ⓐ είτε δίνεται κάποια τιμή

ⓐ είτε κορυφή συνάρτησης σε κάποιο σημείο

ⓐ είτε κορυφή συνάρτησης...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Μελέτη τύπου

- ① Αν έχουμε μία συνάρτηση και ένα σημείο είναι OK
- ② Ο μόνος άγνωστος είναι το x_0
 - ① είτε θα δίνεται
 - ② είτε δίνεται το $f(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ③ είτε δίνεται το $f'(x_0)$ και θα βρεθεί
 - ④ είτε η εφαπτόμενη είναι παράλληλη σε ευθεία
 - ⑤ είτε η εφαπτόμενη είναι κάθετη σε ευθεία
 - ⑥ είτε δίνεται η εφαπτόμενη
 - ⑦ είτε διέρχεται από ένα σημείο
 - ⑧ είτε κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο
 - ⑨ είτε κοινή εφαπτόμενη...

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 2$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$.

- 1 Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που διέρχονται από το σημείο $M(1, 2)$
- 2 Να σχεδιάσετε τη C_f και να βρείτε το εμβαδόν E του τριγώνου που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του ερωτήματος 1, με τον άξονα x'

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$.

- 1 Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που διέρχονται από το σημείο $M(1, 2)$
- 2 Να σχεδιάσετε τη C_f και να βρείτε το εμβαδόν E του τριγώνου που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του ερωτήματος 1, με τον άξονα x'

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης της f που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

- ① Έχουν κλίση 2
- ② Σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία ω ώστε:

- ⓐ $\omega = \frac{3\pi}{4}$
- ⓑ $\varepsilon\varphi\omega > 1$
- ⓒ ω οξεία

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης της f που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

- ① Έχουν κλίση 2
- ② Σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία ω ώστε:

- ① $\omega = \frac{3\pi}{4}$

- ② $\varepsilon\varphi\omega > 1$

- ③ ω : αμβλεία

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης της f που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

- ① Έχουν κλίση 2
- ② Σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία ω ώστε:
 - ① $\omega = \frac{3\pi}{4}$
 - ② $\varepsilon\varphi\omega > 1$
 - ③ ω : αμβλεία

Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης της f που οι εφαπτόμενες σε αυτά:

- ① Έχουν κλίση 2
- ② Σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία ω ώστε:
 - ① $\omega = \frac{3\pi}{4}$
 - ② $\varepsilon\varphi\omega > 1$
 - ③ ω : αμβλεία

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$. Να βρείτε τα σημεία της C_f , που οι εφαπτόμενες σ' αυτά είναι:

- ① Κάθετες στην ευθεία $\varepsilon : x + 2y - 1 = 0$
- ② Παράλληλες στον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$. Να βρείτε τα σημεία της C_f , που οι εφαπτόμενες σ' αυτά είναι:

- ① Κάθετες στην ευθεία $\varepsilon : x + 2y - 1 = 0$
- ② Παράλληλες στον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta \ln x - \ln \beta$. Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 1)$ έχει κλίση 4.

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - 1$. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = 3x - 2$ εφάπτεται της C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + 2$ και η ευθεία $\varepsilon : y = -x + \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθεία ε εφάπτεται της C_f

Εξάσκηση 9

Εστω οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ και $g(x) = x^2 - \alpha x - \beta$. Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = -2$

Εξάσκηση 10

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 3$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινές εφαπτόμενες στα κοινά τους σημεία

Εξάσκηση 11

Εστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 2x^2 + 2x$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g

Εξάσκηση 12

Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + \ln x$ στο σημείο της με τετμημένη x_0 , να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Εξάσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - 1$.

- ① Να βρείτε το σύνολο τιμών της f'
- ② Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(x, f(x))$ με τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - 1$.

- ① Να βρείτε το σύνολο τιμών της f'
- ② Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(x, f(x))$ με τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $D_{f^{-1}}$
- ② Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτόμενη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 3$

Εξάσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

- 1 Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $D_{f^{-1}}$
- 2 Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτόμενη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 3$