Διανύσματα

Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Τι, δεν τελειώσαμε με τα διανύσματα?

Αν προσέχατε μιλήσαμε για:

1. τι είναι
2. μέτρο
3. άθροισμα - διαφορά
4. πολλαπλασιασμό με αριθμό
5. ισότητα
6. παραλληλία

Τι, δεν τελειώσαμε με τα διανύσματα?

Αν προσέχατε μιλήσαμε για:

1. τι είναι
2. μέτρο
3. άθροισμα - διαφορά
4. πολλαπλασιασμό με αριθμό
5. ισότητα
6. παραλληλία
7. τι έμεινε...

Τι, δεν τελειώσαμε με τα διανύσματα?

Αν προσέχατε μιλήσαμε για:

1. τι είναι
2. μέτρο
3. άθροισμα - διαφορά
4. πολλαπλασιασμό με αριθμό
5. ισότητα
6. παραλληλία
7. γωνίες, καθετότητα...

Νέος κόσμος

Κάθε διανυσματικός χώρος (?), εφοδιάζεται με ένα δικό του εσωτερικό γινόμενο. Για εμάς, να ναι καλά ο Ευκλείδης!

Ευκλείδειο Εσωτερικό Γινόμενο

Εστω $\vec{\alpha} = (x_\alpha, y_\alpha)$ και $\vec{\beta} = (x_\beta, y_\beta)$. Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο την πράξη $\mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

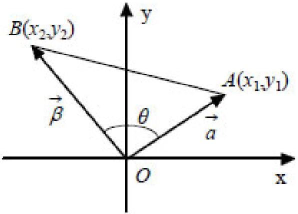
$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta$$

Η απλά για τους noobάδες: εσωτερικό γινόμενο

Ναι αλλά πού είναι η γωνία?

Για δυνατούς λύτες

Αν μάθατε τον τύπο των συνημιτόνων:



$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| \cdot |\mathrm{OB}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}^2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}^2 - 2|OA| \cdot |\mathrm{OB}| \cdot \sigma\upsilon\nu$$

$$-2(x_1x_2 + y_1y_2) = -2|OA| \cdot |\mathrm{OB}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = |OA| \cdot |\mathrm{OB}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Τι, δεύτερος τύπος?

Στο βιβλίο τον μαθαίνετε ως πρώτο (και stick to it)

Ευκλείδειο Εσωτερικό Γινόμενο

Εστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο την πράξη

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Τι, δεύτερος τύπος?

Στο βιβλίο τον μαθαίνετε ως πρώτο (και stick to it)

Ευκλείδειο Εσωτερικό Γινόμενο

Εστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο την πράξη

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Problems, problems, problems!
Τι γίνεται αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$?

Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \upharpoonleft\!\downharpoonright \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \updownarrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \upharpoonleft\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \updownarrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$ και το αστέρι μας...
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

Και ναι ήρθε η ώρα!

Απλά από τον προηγούμενο τύπο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\vec{\alpha}^2}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$ (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$, αλλά γιατί?

Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$ (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$, αλλά γιατί?

Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

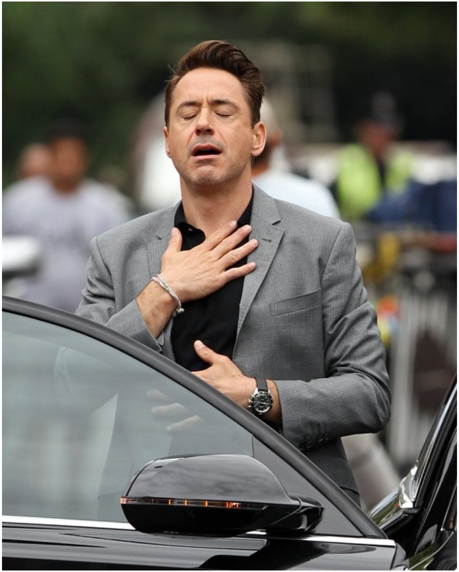
Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$ (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$, αλλά γιατί?

Και λίγο ιδιότητες της νέας πράξης

Η αποδείξεις είναι απλές...

- $\vec{\alpha}(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική)
- $\vec{\alpha}\vec{\beta}=\vec{\beta}\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική)
- $\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta})=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}$ (Προσεταιριστική με πραγματικό)
- Γενικά $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma})\neq(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$, αλλά γιατί?



Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Εξάσκηση 1

Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε:

1. $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
2. $\vec{\alpha}^2$

Εξάσκηση 1

Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε:

1. $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
2. $\vec{\alpha}^2$

Εξάσκηση 2

Αν $\vec{\alpha} \updownarrows \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = 3$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -6$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$

Εξάσκηση 3

Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}| = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(\vec{\alpha}\vec{\beta})^{2023} + |\vec{\alpha}\vec{\gamma}|$$

Εξάσκηση 4

Αν $\vec{\alpha} = (2,3)$ και $\vec{\beta} = (4,5)$ να υπολογίσετε τα:

1. $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
2. $\vec{\alpha}^2$

Εξάσκηση 4

Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (4, 5)$ να υπολογίσετε τα:

1. $\vec{\alpha}\vec{\beta}$
2. $\vec{\alpha}^2$

Εξάσκηση 5

Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x - 1, -4)$, $\vec{\beta} = (6, x)$ είναι κάθετα, να βρείτε το x

Εξάσκηση 6

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{A} = 90^\circ$

Εξάσκηση 7

Δίνεται ένα διάνυσμα $\vec{\nu} = (2, -1)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$, ώστε να ισχύει $\vec{v}\vec{\nu} = 0$ και $|\vec{v}| = \sqrt{5}$

Εξάσκηση 8

Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$. Να υπολογίσετε:

1. $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
2. $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$

Εξάσκηση 8

Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \dfrac{2\pi}{3}$. Να υπολογίσετε:

1. $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
2. $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$

Εξάσκηση 9

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \dfrac{5\pi}{6}$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος

$$\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$$

Εξάσκηση 10

Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2$. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$

Εξάσκηση 11

Αν $\vec{\alpha} = (2, -1)$, $\vec{\beta} = (3, 1)$ να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Εξάσκηση 12

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όπου το $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}$ είναι 120°. Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta}$ και $\vec{\alpha}$, όπου $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Εξάσκηση 13

1. Αν $\vec{\nu}$ και $\vec{u}$ είναι δύο διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{v}+\vec{\nu}|^2+|\vec{v}-\vec{\nu}|^2=2|\vec{v}|^2+2|\vec{\nu}|^2$$

2. Αν για τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\nu}$ ισχύουν $|\vec{v}|=1$, $|\vec{\nu}|=2$ και $|\vec{v}+\vec{\nu}|=3$, να βρείτε το $|\vec{v}-\vec{\nu}|$

Εξάσκηση 13

1. Αν $\vec{\nu}$ και $\vec{u}$ είναι δύο διανύσματα, τότε να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{v}+\vec{\nu}|^2+|\vec{v}-\vec{\nu}|^2=2|\vec{v}|^2+2|\vec{\nu}|^2$$

2. Αν για τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\nu}$ ισχύουν $|\vec{v}|=1$, $|\vec{\nu}|=2$ και $|\vec{v}+\vec{\nu}|=3$, να βρείτε το $|\vec{v}-\vec{\nu}|$

Εξάσκηση 14

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε:

1. το μέτρο του $\vec{\gamma}$
2. την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}\vec{\gamma} + \vec{\beta}\vec{\gamma}$

Εξάσκηση 14

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε:

1. το μέτρο του $\vec{\gamma}$
2. την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}\vec{\gamma} + \vec{\beta}\vec{\gamma}$

Εξάσκηση 15

Εστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$

1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \neq \vec{0}$
2. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, ώστε:
   - $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και
   - $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$

Εξάσκηση 15

Εστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$

1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \neq \vec{0}$
2. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, ώστε:
   - $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και
   - $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$

Εξάσκηση 16

Αν $\vec{\alpha} = (x, 3)$ και $\vec{\beta} = (1, 7)$, να βρείτε την τιμή του x ώστε $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \dfrac{\pi}{4}$

Εξάσκηση 17

Δίνονται τα σταθερά σημεία A και B. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει
$|\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}| = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 + 4\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2}$

Εξάσκηση 18

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $(\mathrm{AB}) = 6$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} = 7 + \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$$