

Συναρτήσεις

Ολοκληρώματα και Ανισότητες

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$. Να δείξετε ότι:

① Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

② $\sqrt{2} < f(x) < \sqrt{1 + e}$, για κάθε $x \in [0, 1]$

③ $\sqrt{2} < \int_0^1 f(x) dx < \sqrt{1 + e}$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$. Να δείξετε ότι:

① Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

② $\sqrt{2} < f(x) < \sqrt{1 + e}$, για κάθε $x \in [0, 1]$

③ $\sqrt{2} < \int_0^1 f(x) dx < \sqrt{1 + e}$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$. Να δείξετε ότι:

- ① Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
- ② $\sqrt{2} < f(x) < \sqrt{1 + e}$, για κάθε $x \in [0, 1]$
- ③ $\sqrt{2} < \int_0^1 f(x) dx < \sqrt{1 + e}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$

① Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

② Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx > \frac{3e}{2}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$

- ① Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα
- ② Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx > \frac{3e}{2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
- ② Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
- ② Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^1 f(x) dx &> \frac{1}{4} + \ln 2 \\ \text{b) } \int_0^2 xf(x) dx &> \frac{7 + 9 \ln 2}{6} \end{aligned}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
- ② Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{4} + \ln 2$$

$$\textcircled{2} \int_1^2 x f(x) dx > \frac{7 + 9 \ln 2}{6}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
- ② Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

① $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{4} + \ln 2$

② $\int_1^2 x f(x) dx > \frac{7 + 9 \ln 2}{6}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή
- ② Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

- ① $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{4} + \ln 2$
- ② $\int_1^2 xf(x) dx > \frac{7 + 9 \ln 2}{6}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Να δείξετε ότι:

- ① Η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f για $x \rightarrow +\infty$ και είναι κάτω από την C_f στο $[0, +\infty)$
- ② $\int_0^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Να δείξετε ότι:

- ① Η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f για $x \rightarrow +\infty$ και είναι κάτω από την C_f στο $[0, +\infty)$
- ② $\int_0^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Να δείξετε ότι:

① $f(x) \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

② $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{3}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Να δείξετε ότι:

① $f(x) \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

② $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{3}$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

- ① $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$
- ② $\int_0^1 f(e^x) dx < 2$, όταν $f(e) = 2$
- ③ Αν $f(1) = 2$, τότε

6. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

① $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

② $\int_0^1 f(e^x) dx < 2$, όταν $f(e) = 2$

③ Αν $f(1) = 2$, τότε

α. $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx > 2 \ln 2$

β. $\int_1^2 f^2(x) dx > 4$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

① $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

② $\int_0^1 f(e^x) dx < 2$, όταν $f(e) = 2$

③ Αν $f(1) = 2$, τότε

① $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx > 2 \ln 2$

② $\int_1^2 f^2(x) dx > 4$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

① $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

② $\int_0^1 f(e^x) dx < 2$, όταν $f(e) = 2$

③ Αν $f(1) = 2$, τότε

① $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx > 2 \ln 2$

② $\int_1^2 f^2(x) dx > 4$

6. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

① $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

② $\int_0^1 f(e^x) dx < 2$, όταν $f(e) = 2$

③ Αν $f(1) = 2$, τότε

① $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx > 2 \ln 2$

② $\int_1^2 f^2(x) dx > 4$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e \\ & \text{b) } \int_0^2 f(x) dx > \frac{23}{5} \\ & \text{c) } \int_0^2 x f(x) dx > \frac{17}{5} \end{aligned}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

- ① $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e$

- ② $\int_1^2 x f(x) dx > \frac{23}{6}$

- ③ $\int_0^1 x f(e^x) dx > \frac{3}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

- ① $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e$

- ② $\int_1^2 x f(x) dx > \frac{23}{6}$

- ③ $\int_0^1 x f(e^x) dx > \frac{3}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
- ③ Να δείξετε ότι:

- ① $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e$

- ② $\int_1^2 xf(x) dx > \frac{23}{6}$

- ③ $\int_0^1 xf(e^x) dx > \frac{3}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

- ① Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- ② Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$
- ③ Να δείξετε ότι:
 - ① $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e$
 - ② $\int_1^2 xf(x) dx > \frac{23}{6}$
 - ③ $\int_0^1 xf(e^x) dx > \frac{3}{2}$

8. Εστω $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύουν:

$$f(x) \geq \frac{1}{x} + 1, \text{ για κάθε } x \in [1, e] \text{ και } \int_1^e f(x) dx = e$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

9. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$$

10. Εστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 3. Να δείξετε ότι:

$$\frac{4}{3} < \int_0^2 f(x) dx \cdot \int_0^2 \frac{1}{f(x)} dx < 12$$

11. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι θετική και συνεχής. Να δείξετε ότι

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx > \int_1^2 x f(x) dx$$

12. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής. Αν $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$ να δείξετε ότι

$$2 + 3 \int_0^1 f(x) dx \geq 0$$

13. Εστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και κυρτή. Να δείξετε ότι:

① $f(2x) - f(x) \geq xf'(x)$, για κάθε $x \geq 0$

② $\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$

③ $\int_0^2 f(x) dx \geq 2f(1)$.

13. Εστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και κυρτή. Να δείξετε ότι:

① $f(2x) - f(x) \geq xf'(x)$, για κάθε $x \geq 0$

② $\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$

③ $\int_0^2 f(x) dx \geq 2f(1)$.

13. Εστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και κυρτή. Να δείξετε ότι:

① $f(2x) - f(x) \geq xf'(x)$, για κάθε $x \geq 0$

② $\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$

③ $\int_0^2 f(x) dx \geq 2f(1)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- ② Εστω α ένας σταθερός αριθμός με $\alpha \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι:

$$\int_1^\alpha f(x) dx < \frac{1}{\alpha^2} \int_\alpha^{\alpha^2} x f(x) dx$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- ② Εστω α ένας σταθερός αριθμός με $\alpha \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι:

$$\int_1^\alpha f(x) dx < \frac{1}{\alpha^2} \int_\alpha^{\alpha^2} x f(x) dx$$

15. Εστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 0$ και $xf'(x) > 1$, για κάθε $x > 1$.

① Να δείξετε ότι $f(x) \geq \ln x$, για κάθε $x \geq 1$

② Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1) \int_1^e \frac{f(x)}{e-1} dx = 1$ έχει μία τουλάχιστη λύση στο $(1, e)$

15. Εστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 0$ και $xf'(x) > 1$, για κάθε $x > 1$.

- ① Να δείξετε ότι $f(x) \geq \ln x$, για κάθε $x \geq 1$
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x - 1) \int_1^e \frac{f(x)}{e - 1} dx = 1$ έχει μία τουλάχιστη λύση στο $(1, e)$

16. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 2(xf(x) + e^{x^2})$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

① $f(x) \geq 2xe^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$

② $\int_0^1 f(x) dx > e - 1$

③ Η εξίσωση $x \int_0^x f(x) dx = e - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$

16. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 2(xf(x) + e^{x^2})$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

① $f(x) \geq 2xe^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$

② $\int_0^1 f(x) dx > e - 1$

③ Η εξίσωση $x \int_0^x f(x) dx = e - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$

16. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) > 2(xf(x) + e^{x^2})$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- ① $f(x) \geq 2xe^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$
- ② $\int_0^1 f(x) dx > e - 1$
- ③ Η εξίσωση $x \int_0^x f(x) dx = e - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$

17. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι κυρτή με $f'(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

① $f(x) \leq 3x$, για κάθε $x \in [0, 1]$

② Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\alpha \int_0^1 f(x^2) dx = 2\alpha - 1$

17. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι κυρτή με $f'(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

① $f(x) \leq 3x$, για κάθε $x \in [0, 1]$

② Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\alpha \int_0^1 f(x^2) dx = 2\alpha - 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να δείξετε ότι:

- ① Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή
- ② $\frac{1}{4} + \ln 2 < \int_0^1 f(x) dx < \ln(1 + e)$
- ③ Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4 \int_0^\theta f(x) dx = 4f(\theta) - \theta + 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να δείξετε ότι:

- ① Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή
- ② $\frac{1}{4} + \ln 2 < \int_0^1 f(x) dx < \ln(1 + e)$
- ③ Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4 \int_0^\theta f(x) dx = 4f(\theta) - \theta + 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να δείξετε ότι:

- ① Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή
- ② $\frac{1}{4} + \ln 2 < \int_0^1 f(x) dx < \ln(1 + e)$
- ③ Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $4 \int_0^\theta f(x) dx = 4f(\theta) - \theta + 1$