Συναρτήσεις

Fermat, Κρίσιμα Σημεία

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Λίγη Γεωγραφία?

1. Το ψηλότερο σημείο στη γη
2. Το ψηλότερο σημείο στην Ελλάδα
3. Το ψηλότερο σημείο στη διαδρομή Θεσσαλονίκη - Γιάννινα

Λίγη Γεωγραφία?

1. Το ψηλότερο σημείο στη γη
2. Το ψηλότερο σημείο στην Ελλάδα
3. Το ψηλότερο σημείο στη διαδρομή Θεσσαλονίκη - Γιάννινα

Λίγη Γεωγραφία?

1. Το ψηλότερο σημείο στη γη
2. Το ψηλότερο σημείο στην Ελλάδα
3. Το ψηλότερο σημείο στη διαδρομή Θεσσαλονίκη - Γιάννινα

Τοπικά Ακρότατα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ <u>τοπικό μέγιστο</u>, όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται <u>θέση</u> ή <u>σημείο τοπικού ακροτάτου</u>, ενώ το $f(x_0)$ <u>τοπικό μέγιστο</u> της f

Αρα <u>ΣΤΟ</u> x_0, <u>ΤΟ</u> $f(x_0)$

Τοπικά Ακρότατα

Ορισμός

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ <u>τοπικό μέγιστο</u>, όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται <u>θέση</u> ή <u>σημείο τοπικού ακροτάτου</u>, ενώ το $f(x_0)$ <u>τοπικό μέγιστο</u> της f

Αρα <u>ΣΤΟ</u> x_0, <u>ΤΟ</u> $f(x_0)$

Συγκρίσεις παντού

Ορισμός

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ μέγιστο, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A}$$

Ορισμός

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ακροτάτου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό ΣΩΣΤΟ
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα ΛΑΘΟΣ!!!!!!!!!!
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα

Σιγά μην τα ξεκαθαρίσαμε

1. Το μέγιστο είναι και τοπικό
2. Το τοπικό μέγιστο είναι το μέγιστο
3. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το μέγιστο
4. Αν δεν έχει μέγιστο, δεν έχει και τοπικά μέγιστα
5. Υπάρχει συνάρτηση με άπειρα τοπικά μέγιστα ΣΩΣΤΟ

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Ζωγραφική

1. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο δεξί άκρο ενός διαστήματος
2. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
3. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος
4. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?
5. Φτιάξτε συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό ενός διαστήματος και να υπάρχει το $f'(x_0)$
6. Συμπέρασμα για το $f'(x_0)$?

Θεώρημα Fermat

Ορισμός

Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ολα μαζί

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Ολα μαζί

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Ολα μαζί

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε <u>μπορεί</u> να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Αρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Αρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Αρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα

1. Αν στο εσωτερικό δεν ισχύει $f' = 0$ τότε δεν έχω τ.ακρότατο
2. Αν στο εσωτερικό δεν υπάρχει f' τότε μπορεί να έχω
3. Και μένουν τα άκρα (προσοχή, δεν είναι πάντα ακρότατα)

Αρα

Πιθανές θέσεις ακροτάτων

- Τα εσωτερικά που $f' = 0$
- Τα εσωτερικά που δεν ορίζεται η f'
- Τα άκρα

Κρίσιμα σημεία είναι οι 2 πρώτες περιπτώσεις

Ναι, αλλά πότε τα “πιθανά” είναι και “σίγουρα”

Να βρείτε συνθήκη για την f ώστε ένα σημείο της να είναι τοπικό μέγιστο

Ελεγχος πιθανών ακροτάτων

Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (\beta, x_0)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Ναι, αλλά πότε τα “πιθανά” είναι και “σίγουρα”

Να βρείτε συνθήκη για την f ώστε ένα σημείο της να είναι τοπικό μέγιστο

Ελεγχος πιθανών ακροτάτων

Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (\beta, x_0)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

1. Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x - \dfrac{\beta}{x} + 3\alpha$, όπου α, $\beta \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 5, να βρείτε τα α και β

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \alpha x$, για την οποία ισχύει

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

3. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\alpha \ln x \leq x - 1, \alpha \in \mathbb{R}$$

να βρείτε την τιμή του α

4. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει

$$f(x) \geq 2e^x - x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$
2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=1$ και ισχύει

$$f(x)\geq 2e^x-x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

5. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

1. Τα κρίσιμα σημεία της f
2. Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
3. Το σύνολο τιμών της f

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

1. Τα κρίσιμα σημεία της f
2. Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
3. Το σύνολο τιμών της f

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & , 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε

1. Τα κρίσιμα σημεία της f
2. Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f
3. Το σύνολο τιμών της f

7. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) = x^3 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$ και ισχύει:

$$f^3(x) + e^x = f(f(x)) + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

9. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(1)=1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\left(f^2(x)\right)'\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$
2. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(1) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\left(f^2(x)\right)' \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
2. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
3. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(1) = 1$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\left(f^2(x)\right)' \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$
2. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα
3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|, x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι
$$f'(0) = 0$$
2. Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι
$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$
3. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(\mathrm{B})$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι

$$f'(0) = 0$$

2. Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι

$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

3. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(\mathrm{B})$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|, x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη.

1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι
$$f'(0) = 0$$
2. Να βρείτε την τιμή του α και να δείξετε ότι
$$f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$$
3. Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(\mathrm{B})$

11. Εστω $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Αν $f' \uparrow (0,2)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

12. Εστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που έχουν κοινά σημεία τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g στο διάστημα (α, β). Να δείξετε ότι:

1. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σημείων με τετμημένη ξ των C_f και C_g, να γίνεται μέγιστη
2. Οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες

12. Εστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που έχουν κοινά σημεία τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g στο διάστημα (α, β). Να δείξετε ότι:

1. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σημείων με τετμημένη ξ των C_f και C_g, να γίνεται μέγιστη
2. Οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες

Απόδειξη Fermat

Εστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Αρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Εστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Αρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Εστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Αρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Εστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Αρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη Fermat

Εστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Αρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x γύρω από το x_0.
Αφού f παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbb{R}$$

Για $x < x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Για $x > x_0 \implies \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ άρα

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $0 \leq k \leq 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία