

Συναρτήσεις

Ενα προς ένα (1-1)

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

1-1

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση συνάστηση 1-1 (ένα προς ένα), όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Αντέχετε?

Ενδιαφέροντα

- $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- $x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$
- $f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 \neq x_2$
- $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Φαντασία θέλει

Μια συνάρτηση 1-1:

- Κάθε y το πολύ μία φορά
- Κάθε y του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά
- Κάθε οριζόντια γραμμή...

Φαντασία θέλει

Μια συνάρτηση 1-1:

- Κάθε y το πολύ μία φορά
- Κάθε y του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά
- Κάθε οριζόντια γραμμή...

Φαντασία θέλει

Μια συνάρτηση 1-1:

- Κάθε y το πολύ μία φορά
- Κάθε y του συνόλου τιμών ΑΚΡΙΒΩΣ μία φορά
- **Κάθε οριζόντια γραμμή...**

ΤΟΟΟ μπέρδεμα

Προσοχή

- Γνησίως μονότονη \Rightarrow είναι 1-1
- 1-1 \Rightarrow ΜΠΟΡΕΙ!

ΤΟΟΟ μπέρδεμα

Προσοχή

- Γνησίως μονότονη \Rightarrow είναι 1-1
- 1-1 \Rightarrow ΜΠΟΡΕΙ!

ΤΟΟΟ μπέρδεμα

Προσοχή

- Γνησίως μονότονη \Rightarrow είναι 1-1
- 1-1 \Rightarrow ΜΠΟΡΕΙ!

ΤΟΟΟ μπέρδεμα

Προσοχή

- Γνησίως μονότονη \implies είναι 1-1
- 1-1 \implies ΜΠΟΡΕΙ!

Βρείτε την!

Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

Γιατί να το κάνουμε?

Λύνουμε σύνθετες εξισώσεις διώχνοντας f

Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

Γιατί να το κάνουμε?

Λύνουμε σύνθετες εξισώσεις διώχνοντας f

Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

Γιατί να το κάνουμε?

Λύνουμε σύνθετες εξισώσεις διώχνοντας f

Ανακεφαλαίωση

Θα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1, αλλά πώς? Κυρίως

- Κατασκευή
- Μονοτονία σε διάστημα

Γιατί να το κάνουμε?

Λύνουμε σύνθετες εξισώσεις διώχνοντας f

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

1. Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

① $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

② $f(x) = 2x + e^x - 1$

③ $f(x) = x^2 - 1$

1. Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

① $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

② $f(x) = 2x + e^x - 1$

③ $f(x) = x^2 - 1$

1. Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

① $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

② $f(x) = 2x + e^x - 1$

③ $f(x) = x^2 - 1$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $f(x) = 0$

β. $f(\ln x) = 0$

γ. $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

δ. $f(\sqrt{x} + 1) = 0$

③ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x) = 0$

② $f(\ln x) = 0$

③ $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

④ $f(f(x) + 1) = 0$

③ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x) = 0$

② $f(\ln x) = 0$

③ $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

④ $f(f(x) + 1) = 0$

③ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x) = 0$

② $f(\ln x) = 0$

③ $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

④ $f(f(x) + 1) = 0$

③ Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x) = 0$

② $f(\ln x) = 0$

③ $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

④ $f(f(x) + 1) = 0$

③ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x) = 0$

② $f(\ln x) = 0$

③ $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

④ $f(f(x) + 1) = 0$

③ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x) = 0$

② $f(\ln x) = 0$

③ $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

④ $f(f(x) + 1) = 0$

③ Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε την εξίσωση $(1 - e^{-x})f(x^2 + 2x) = 1$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε την εξίσωση $(1 - e^{-x})f(x^2 + 2x) = 1$

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο \mathbb{R} . Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x^4 + 1) = f(x^2 + 1)$

② $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$

③ $f(f(x)) = 1$

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο \mathbb{R} . Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x^4 + 1) = f(x^2 + 1)$

② $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$

③ $f(f(x)) = 1$

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο \mathbb{R} . Να λύσετε τις εξισώσεις:

① $f(x^4 + 1) = f(x^2 + 1)$

② $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$

③ $f(f(x)) = 1$

5. Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε:

① Την ανίσωση $f(x) - x > f(2x)$

② Την εξίσωση $f(x) - \ln x = f(x^2)$

5. Εστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε:

① Την ανίσωση $f(x) - x > f(2x)$

② Την εξίσωση $f(x) - \ln x = f(x^2)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$$

7. Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, όπου η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

8. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) + f^3(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1

② Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x) + x^2 - x) = f(f(x) + 2x - 2)$

③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f(2x + 1)) - f(f(x)) = x + 1$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) + f^3(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② **Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x) + x^2 - x) = f(f(x) + 2x - 2)$**
- ③ Να λύσετε την εξίσωση $f(f(2x + 1)) - f(f(x)) = x + 1$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) + f^3(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1
- ② Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x) + x^2 - x) = f(f(x) + 2x - 2)$
- ③ **Να λύσετε την εξίσωση $f(f(2x + 1)) - f(f(x)) = x + 1$**

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση