

# Εκθετική Λογαριθμική Συνάρτηση

## Λογάριθμοι

Κωνσταντίνος Λόλας

# Σταμάτααααααα

Τελειώνουμε!

# Γιατί καινούρια έννοια?

- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στον χειρισμό
- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στην εύρεση
- Οι τεράστιοι αριθμοί είναι δυσβάσταχτοι

# Γιατί καινούρια έννοια?

- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στον χειρισμό
- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στην εύρεση
- Οι τεράστιοι αριθμοί είναι δυσβάσταχτοι

# Γιατί καινούρια έννοια?

- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στον χειρισμό
- Οι εκθέτες είναι δύσκολοι στην εύρεση
- Οι τεράστιοι αριθμοί είναι δυσβάσταχτοι

# Ας κατανοήσουμε την ανάγκη!

- Δεν γνωρίζουμε τις ρίζες των πραγματικών, αλλά γράφουμε  $\sqrt{2}$
- Δεν γνωρίζουμε τα ημίτονα των τόξων, αλλά γράφουμε  $\eta\mu(\frac{\pi}{7})$

Γιατί να μην υπάρχει λοιπόν το  $2^x = 5$ ? Περιγράψτε το!

## Ας κατανοήσουμε την ανάγκη!

- Δεν γνωρίζουμε τις ρίζες των πραγματικών, αλλά γράφουμε  $\sqrt{2}$
- Δεν γνωρίζουμε τα ημίτονα των τόξων, αλλά γράφουμε  $\eta\mu(\frac{\pi}{7})$

Γιατί να μην υπάρχει λοιπόν το  $2^x = 5$ ? Περιγράψτε το!

# Ας κατανοήσουμε την ανάγκη!

- Δεν γνωρίζουμε τις ρίζες των πραγματικών, αλλά γράφουμε  $\sqrt{2}$
- Δεν γνωρίζουμε τα ημίτονα των τόξων, αλλά γράφουμε  $\eta\mu(\frac{\pi}{7})$

Γιατί να μην υπάρχει λοιπόν το  $2^x = 5$ ? Περιγράψτε το!



# Λογάριθμοι λοιπόν

## Ορισμός

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Για κάθε  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  και  $x > 0$

## Παραλλαγές

- $\log_{10} = \log$
- $\log_e = \ln$

## Ασκήσεις

# Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

## Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$

# Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

## Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \iff (\log_a x = y \iff a^y = x)$

# Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

## Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \iff (\log_a x = y \iff a^y = x)$

# Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

## Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \iff (\log_a x = y \iff a^y = x)$

# Πάμε για ιδιότητες

Από τον ορισμό έχουμε άμεσα...

## Ιδιότητες

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x \iff (\log_a x = y \iff a^y = x)$

# Και λίγες ακόμα

## Ιδιότητες

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Απόδειξη

# Και λίγες ακόμα

## Ιδιότητες

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Απόδειξη



# Και λίγες ακόμα

## Ιδιότητες

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Απόδειξη

# Σχεδόν Τελειώσαμε!

Εμεινε μόνο ο ορισμός της συνάρτησης  $\ln x$  και η γραφική της παράσταση!

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

①  $\log_2 x = 3$

②  $\log_3 x = -2$

③  $\log_4 x = \frac{1}{2}$

④  $\ln x = 2$

⑤  $\log x + 1 = 0$

⑥  $\log_x 9 = 2$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

①  $\log_2 x = 3$

②  $\log_3 x = -2$

③  $\log_4 x = \frac{1}{2}$

④  $\ln x = 2$

⑤  $\log x + 1 = 0$

⑥  $\log_x 9 = 2$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

①  $\log_2 x = 3$

②  $\log_3 x = -2$

③  $\log_4 x = \frac{1}{2}$

④  $\ln x = 2$

⑤  $\log x + 1 = 0$

⑥  $\log_x 9 = 2$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

①  $\log_2 x = 3$

②  $\log_3 x = -2$

③  $\log_4 x = \frac{1}{2}$

④  $\ln x = 2$

⑤  $\log x + 1 = 0$

⑥  $\log_x 9 = 2$

## Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

①  $\log_2 x = 3$

②  $\log_3 x = -2$

③  $\log_4 x = \frac{1}{2}$

④  $\ln x = 2$

⑤  $\log x + 1 = 0$

⑥  $\log_x 9 = 2$

## Εξάσκηση 1

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει:

①  $\log_2 x = 3$

②  $\log_3 x = -2$

③  $\log_4 x = \frac{1}{2}$

④  $\ln x = 2$

⑤  $\log x + 1 = 0$

⑥  $\log_x 9 = 2$



## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

①  $\ln e^3$

②  $\log \frac{1}{100}$

③  $e^{\ln 3}$

④  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

⑤  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

⑥  $\log_8 \sqrt{2}$

⑦  $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

①  $\ln e^3$

②  $\log \frac{1}{100}$

③  $e^{\ln 3}$

④  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

⑤  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

⑥  $\log_8 \sqrt{2}$

⑦  $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

①  $\ln e^3$

②  $\log \frac{1}{100}$

③  $e^{\ln 3}$

④  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

⑤  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

⑥  $\log_8 \sqrt{2}$

⑦  $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

①  $\ln e^3$

②  $\log \frac{1}{100}$

③  $e^{\ln 3}$

④  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

⑤  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

⑥  $\log_8 \sqrt{2}$

⑦  $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

①  $\ln e^3$

②  $\log \frac{1}{100}$

③  $e^{\ln 3}$

④  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

⑤  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

⑥  $\log_8 \sqrt{2}$

⑦  $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

①  $\ln e^3$

②  $\log \frac{1}{100}$

③  $e^{\ln 3}$

④  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

⑤  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

⑥  $\log_8 \sqrt{2}$

⑦  $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

## Εξάσκηση 2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

①  $\ln e^3$

②  $\log \frac{1}{100}$

③  $e^{\ln 3}$

④  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

⑤  $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

⑥  $\log_8 \sqrt{2}$

⑦  $\ln^2 e^3$

Συνέχεια Θεωρίας

## Εξάσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

①  $\log 4 + \log 20 - 3 \log 2 = 1$

②  $\ln 2e - \frac{1}{2} \ln 4 = 1$

③  $\log \sqrt{8} + \frac{3}{2} \log 5$



## Εξάσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

①  $\log 4 + \log 20 - 3 \log 2 = 1$

②  $\ln 2e - \frac{1}{2} \ln 4 = 1$

③  $\log \sqrt{8} + \frac{3}{2} \log 5$

## Εξάσκηση 3

Να αποδείξετε ότι:

$$\textcircled{1} \log 4 + \log 20 - 3 \log 2 = 1$$

$$\textcircled{2} \ln 2e - \frac{1}{2} \ln 4 = 1$$

$$\textcircled{3} \log \sqrt{8} + \frac{3}{2} \log 5$$

## Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

①  $5^{1+3\log_5 2}$

②  $100^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 2}$

③  $\left(\frac{1}{e}\right)^{3-\ln \sqrt{2}}$

## Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

①  $5^{1+3\log_5 2}$

②  $100^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 2}$

③  $\left(\frac{1}{e}\right)^{3-\ln \sqrt{2}}$

## Εξάσκηση 4

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

①  $5^{1+3\log_5 2}$

②  $100^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log 2}$

③  $\left(\frac{1}{e}\right)^{3-\ln \sqrt{2}}$

# Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$

- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$

- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Θέτουμε  $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \implies \alpha^{x_1} = \theta_1$  και  $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \implies \alpha^{x_2} = \theta_2$  και έχουμε

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$

- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$

- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Θέτουμε  $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \implies \alpha^{x_1} = \theta_1$  και  $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \implies \alpha^{x_2} = \theta_2$  και έχουμε

$$\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} (\alpha^{x_1} \alpha^{x_2}) = \log_{\alpha} \alpha^{x_1+x_2} = x_1 + x_2 = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Θέτουμε  $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \implies \alpha^{x_1} = \theta_1$  και  $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \implies \alpha^{x_2} = \theta_2$  και έχουμε

$$\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \log_{\alpha} \alpha^{x_1 - x_2} = x_1 - x_2 = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$$

Πίσω στη θεωρία



# Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Θέτουμε  $\log_{\alpha} \theta = x \implies \alpha^x = \theta$  και έχουμε

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη Ιδιοτήτων λογαρίθμων

- $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
- $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

Θέτουμε  $\log_{\alpha} \theta = x \implies \alpha^x = \theta$  και έχουμε

$$\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \log_{\alpha} (\alpha^x)^{\kappa} = \log_{\alpha} \alpha^{\kappa x} = \kappa x = \kappa \log_{\alpha} \theta$$

Πίσω στη θεωρία