Συναρτήσεις

Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Κωνσταντίνος Λόλας

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε ΜΟΝΟ (υπολογίζουμε)

1. Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
2. Θα βρίσκουμε μονοτονία
3. Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε ΜΟΝΟ (υπολογίζουμε)

1. Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
2. Θα βρίσκουμε μονοτονία
3. Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε ΜΟΝΟ (υπολογίζουμε)

1. Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
2. Θα βρίσκουμε μονοτονία
3. Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Ανάσες, τελείωσε η ανηφόρα

Από εδώ και πέρα θα εφαρμόζουμε ΜΟΝΟ (υπολογίζουμε)

1. Θα βρίσκουμε συνάρτηση από την παράγωγο
2. Θα βρίσκουμε μονοτονία
3. Θα βρίσκουμε ακρότατα

και όλα αυτά χάρις το ΘΜΤ (για όσους έλεγαν ΠΟΥ θα χρειαστούν αυτά που κάνουμε!!!!)

Από $f^{'} \to f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

1. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
2. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
3. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
4. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Από $f^{'} \to f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

1. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
2. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
3. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
4. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Από $f^{'} \to f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

1. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
2. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
3. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
4. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Από $f^{'} \to f$

Μέχρι τώρα, ξέραμε την συνάρτηση και υπολογίζαμε την παράγωγο. Πάμε για το αντίστροφο!

1. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = 0$
2. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = x$
3. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \eta\mu x + \frac{1}{x}$
4. Βρείτε μία συνάρτηση που $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ ΟΥΠΣ!

Θεώρημα σταθερής συνάρτησης

Θεώρημα σταθερής συνάρτησης

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο Δ όπου

- f συνεχής στο Δ
- $f'(x) = 0$ για κάθε <u>εσωτερικό</u> σημείο του Δ

Τότε

$$f(x) = c, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

1. Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
2. Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
3. Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
4. Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

1. Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
2. Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
3. Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
4. Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

1. Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
2. Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
3. Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
4. Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Μάλλον μπλέκουμε σε μπελάδες!

1. Για αρχή θα δίνεται η συνάρτηση που ζητάται!
2. Αν δεν δίνεται... καλώς ήρθατε στις διαφορικές εξισώσεις!
3. Αν τα μάθετε καλά, τα ολοκληρώματα θα είναι γελοία
4. Στο μαθηματικό είναι 2-3 μαθήματα (Λογισμός 2, Διαφορικές εξισώσεις...)

Θεώρημα ίσων παραγώγων

Θεώρημα ίσων παραγώγων

Έστω δύο συναρτήσεος f και g ορισμένες στο Δ όπου

- f και g συνεχείς στο Δ
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε <u>εσωτερικό</u> σημείο του Δ

Τότε

$$f(x) = g(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Εξάσκηση 1

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x) - 2f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. $x > 0$ είναι σταθερή
2. Αν επιπλέον $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο υης f

Εξάσκηση 1

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x) - 2f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. $x > 0$ είναι σταθερή
2. Αν επιπλέον $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο υης f

Εξάσκηση 2

Έστω $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$
Να δείξετε ότι $f(x) = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$

Εξάσκηση 3

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1 - xf(x)}{x^2}$ για κάθε $x > 0$
Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Εξάσκηση 4

Έστω $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\frac{\pi}{2})=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)-\sigma\varphi x\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$
Να δείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$, $x\in(0,\pi)$

Εξάσκηση 5

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = f(x) - e^x \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 7

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και ισχύουν

- $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) + 1$

Να δείξετε ότι $f(0) = g(0) + 1$

Εξάσκηση 8

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) = x(f(x) - f'(x))$ για κάθε $x > 0$

1. Αν $g(x) = xf(x)$, $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) = c \cdot e^x$, $x > 0$
2. Αν επιπλέον $f(1) = e$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 8

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) = x(f(x) - f'(x))$ για κάθε $x > 0$

1. Αν $g(x) = xf(x)$, $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) = c \cdot e^x$, $x > 0$
2. Αν επιπλέον $f(1) = e$ να βρείτε τον τύπο της f

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $2f(x) + 4xf'(x) + (x^2 + 9)f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$ και $f'(0) = \frac{1}{9}$

Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$

Εξάσκηση 10

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή

Εξάσκηση 11

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

1. $f^2(x) + g^2(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 11

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

1. $f^2(x) + g^2(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

Αν $x_1 = x_2$...

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.

Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$

Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$

$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$
Αν $x_1 = x_2$...
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$
Αν $x_1 = x_2$...
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$
Αν $x_1 = x_2$...
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$
Αν $x_1 = x_2$...
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
$f(x_2) = f(x_1)$

Απόδειξη σταθερής συνάρτησης

Θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$
Αν $x_1 = x_2$...
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ θα ισχύει το ΘΜΤ.
Υπάρχει $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Αλλά $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$
Άρα $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$
$f(x_2) = f(x_1)$