

Συναρτήσεις

Ασύμπτωτες

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025

Ναι αλλά "καταλήγουμε" κάπου?

Σχεδόν τελειώσαμε την σχεδίαση. Εμεινε να δούμε, αν πλησιάζουμε σε ευθείες και πότε!

Ζωγραφική 1 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που να τείνει να γίνει η ευθεία $x = 1$

Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \rightarrow 1$?

Ζωγραφική 1 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που να τείνει να γίνει η ευθεία $x = 1$
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \rightarrow 1$?

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Ορισμός

Η $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Ζωγραφική 2 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 1$

Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \rightarrow +\infty$?

Ζωγραφική 2 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 1$
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \rightarrow +\infty$?

Οριζόντια ασύμπτωτη

Ορισμός

Η $y = a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$

και αντίστοιχα

Ορισμός

Η $y = a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

Ζωγραφική 3 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 2x + 1$

Προσπαθήστε να ορίσετε συνθήκη για να είναι μία ευθεία ασύμπτωτη της $f(x)$

Ζωγραφική 3 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 2x + 1$
Προσπαθήστε να ορίσετε συνθήκη για να είναι μία ευθεία ασύμπτωτη της $f(x)$

Πλάγια ασύμπτωτη

Ορισμός

Η $y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

και αντίστοιχα

Ορισμός

Η $y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Μην μπερδευτούμε μόνο

- η ασύμπτωτη με $a = 0$ ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με $a \neq 0$ ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το a ονομάζεται κατακόρυφη

Μην μπερδευτούμε μόνο

- η ασύμπτωτη με $a = 0$ ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με $a \neq 0$ ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το a ονομάζεται κατακόρυφη

Μην μπερδευτούμε μόνο

- η ασύμπτωτη με $a = 0$ ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με $a \neq 0$ ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το a ονομάζεται κατακόρυφη

Και λίγοι υπολογισμοί

Ξέροντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

να βρείτε τα a και b .

Πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία $y = ax + b$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

Και λίγοι υπολογισμοί

Ξέροντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

να βρείτε τα a και b .

Πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία $y = ax + b$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικά πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικά πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικά πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικά πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

1. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

① $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

② $f(x) = \frac{x}{x-2}$

③ $f(x) = \varepsilon\varphi x$

1. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

① $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

② $f(x) = \frac{x}{x-2}$

③ $f(x) = \varepsilon\varphi x$

1. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \varepsilon\varphi x$$

2. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

① $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

② $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

③ $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

④ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

① $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

② $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

③ $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

④ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

① $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

② $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

③ $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

④ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- ① Να βρείτε στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα της C_f
- ② Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $+\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $-\infty$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- ① Να βρείτε στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα της C_f
- ② Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $+\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $-\infty$

4. Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$g(x) = f(x) - 2x + \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία $y = 3x - 2$ η οποία είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- ① Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$
- ② Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1$$

4. Εστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$g(x) = f(x) - 2x + \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία $y = 3x - 2$ η οποία είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- ① Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$
- ② Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1$$

5. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ στο $+\infty$

6. Να βρείτε τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

① $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$

② $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$

6. Να βρείτε τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

① $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$

② $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$

7. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 2a}{x - a^2}$. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon : x = 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^2 x^n + 5x + 1}{x^2 + 1}$. Να βρείτε τις τιμές των $a \in \mathbb{R}^*$ και $n \in \mathbb{N} - 0, 1$ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon : y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

9. Να βρείτε τις τιμές των α και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 1} - x \right) = 2$$