Συναρτήσεις

Ασύμπτωτες

Κωνσταντίνος Λόλας

Ναι αλλά ”καταλήγουμε” κάπου?

Σχεδόν τελειώσαμε την σχεδίαση. Εμεινε να δούμε, αν πλησιάζουμε σε ευθείες και πότε!

Ζωγραφική 1 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που να τείνει να γίνει η ευθεία $x = 1$

Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \to 1$?

Ζωγραφική 1 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που να τείνει να γίνει η ευθεία $x = 1$
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \to 1$?

Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Ορισμός

Η $x = x_0$ είναι <u>κατακόρυφη ασύμπτωτη</u> της C_f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ή $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Ζωγραφική 2 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 1$

Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \to +\infty$?

Ζωγραφική 2 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 1$
Τι παρατηρείτε για την συνάρτηση όσο $x \to +\infty$?

Οριζόντια ασύμπτωτη

Ορισμός

Η $y = a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$

και αντίστοιχα

Ορισμός

Η $y = a$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

Ζωγραφική 3 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που δεξιά να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 2x + 1$

Προσπαθήστε να ορίσετε συνθήκη για να είναι μία ευθεία ασύμπτωτη της $f(x)$

Ζωγραφική 3 από 3

Φτιάξτε συνάρτηση που <u>δεξιά</u> να τείνει να γίνει η ευθεία $y = 2x + 1$
Προσπαθήστε να ορίσετε συνθήκη για να είναι μία ευθεία ασύμπτωτη της $f(x)$

Πλάγια ασύμπτωτη

Ορισμός

Η $y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

και αντίστοιχα

Ορισμός

Η $y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν
$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Μην μπερδευτούμε μόνο

- η ασύμπτωτη με $a = 0$ ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με $a \neq 0$ ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το a ονομάζεται κατακόρυφη

Μην μπερδευτούμε μόνο

- η ασύμπτωτη με $a = 0$ ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με $a \neq 0$ ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το a ονομάζεται κατακόρυφη

Μην μπερδευτούμε μόνο

- η ασύμπτωτη με $a = 0$ ονομάζεται οριζόντια
- η ασύμπτωτη με $a \neq 0$ ονομάζεται πλάγια
- η ασύμπτωτη που δεν ορίζεται το a ονομάζεται κατακόρυφη

Και λίγοι υπολογισμοί

Ξέροντας ότι

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

να βρείτε τα a και b.

Πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία $y = ax + b$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

Και λίγοι υπολογισμοί

Ξέροντας ότι

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

να βρείτε τα a και b.

Πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία $y=ax+b$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\in\mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Παρατηρήσεις

Για το βιβλίο σχόλια, για εμάς ασκήσεις

- Ποιό είναι τα μοναδικα πολυώνυμα που έχουν ασύμπτωτες και ποιές?
- Τι πρέπει να ισχύει για τις ρητές συναρτήσεις ώστε να έχουν πλάγιες ασύμπτωτες?
- Ποιές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες?
- Πού ψάχνουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες?

Εξάσκηση 1

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
3. $f(x) = \varepsilon\varphi x$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
3. $f(x) = \varepsilon\varphi x$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
3. $f(x) = \varepsilon\varphi x$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
3. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$
4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
3. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$
4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
3. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$
4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
3. $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$
4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

1. Να βρείτε στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα της C_f
2. Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $+\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $-\infty$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1. Να βρείτε στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα της C_f
2. Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $+\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $-\infty$

Εξάσκηση 4

Εστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$g(x) = f(x) - 2x + \frac{x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία $y = 3x - 2$ η οποία είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

1. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$
2. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1$$

Εξάσκηση 4

Εστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$g(x) = f(x) - 2x + \frac{x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία $y = 3x - 2$ η οποία είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

1. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$
2. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1$$

Εξάσκηση 5

Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ στο $+\infty$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$

Εξάσκηση 7

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2a}{x - a^2}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon : x = 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f

Εξάσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{a^2x^n + 5x + 1}{x^2 + 1}$. Να βρείτε τις τιμές των $a \in \mathbb{R}^*$ και $n \in \mathbb{N} - 0, 1$ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon : y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε τις τιμές των α και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 1} - x \right) = 2$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.

Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$

Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία

Απόδειξη σημείο καμπής

Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο x_0 με κυρτή αριστερά και κοίλη δεξιά του σημείου.
Αρα $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f'(x) < f'(x_0)$ για κάθε $x > x_0$
Αφού f' παραγωγίσιμη, θα υπάρχει το όριο

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

όμοια

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Αρα $f''(x_0) = 0$ Πίσω στη θεωρία