

Συναρτήσεις

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Κωνσταντίνος Λόλας

Σιγά τα ολοκληρώματα!

Τι μπορούμε να ολοκληρώσουμε

- 1 Πολυώνυμα
- 2 Εκθετικές
- 3 Τριγωνομετρικές
- 4 Ρητές με πρωτοβάθμιο διαιρέτη
- 5 Πρωτοβάθμιες άρρητες
- 6 Έτοιμες από σύνθεση και φυσικά
- 7 κάθε πρόσθεση ή αφαίρεση αυτών ΜΟΝΟ

Τι γίνεται με τον πολλαπλασιασμό? Διάρθρωση? Ακόμα και την απλή $\ln x$?

Ιστορία

Ξέρουμε να παραγωγίζουμε γινόμενο

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (f \cdot g)' - fg'\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int f'g \, dx &= \int (f \cdot g)' \, dx - \int fg' \, dx \\ \int f'g \, dx &= f \cdot g - \int fg' \, dx\end{aligned}$$

Ιστορία

Ξέρουμε να παραγωγίζουμε γινόμενο

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= f'g + fg' \\ f'g &= (f \cdot g)' - fg'\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int f'g \, dx &= \int (f \cdot g)' \, dx - \int fg' \, dx \\ \int f'g \, dx &= f \cdot g - \int fg' \, dx\end{aligned}$$

Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Έ και?

$$\int f' g \, dx = f \cdot g - \int f g' \, dx$$

Βρείτε λόγους για να περάσουμε την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη

- Γιατί τελικά... εξαφανίζεται
- Γιατί δεν ξέρουμε να την ολοκληρώνουμε
- Γιατί μπορούμε να ξαναφτάσουμε στον ίδιο τύπο!!!!!!

Παραδείγματα

1 $\int x e^x dx$

2 $\int x^3 e^x dx$

3 $\int x \ln x dx$

4 $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

Παραδείγματα

1 $\int x e^x dx$

2 $\int x^3 e^x dx$

3 $\int x \ln x dx$

4 $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

Παραδείγματα

1 $\int x e^x dx$

2 $\int x^3 e^x dx$

3 $\int x \ln x dx$

4 $\int e^{2x} \eta \mu(3x + 1) dx$

Παραδείγματα

① $\int x e^x dx$

② $\int x^3 e^x dx$

③ $\int x \ln x dx$

④ $\int e^{2x} \eta\mu(3x + 1) dx$

Και στα εντός ύλης!

Κατά παράγοντες

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!
Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!
Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση????

Hold your horses

Δεν θα μάθουμε ΠΟΤΕ να ολοκληρώνουμε όλες τις συναρτήσεις!
Μαθηματικό...!

Μεθόδους για "όμορφες"

- ρητές
- άρρητες
- τριγωνομετρικές
- από σύνθεση?????

Δοκιμές σύνθεσης

$$\int 4x\varepsilon\varphi(x$$

1 $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

2 $\int \frac{\ln x}{x} dx$

3 $\int 4x\varepsilon\varphi(x$

Εξάσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

- ① Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- ② Να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x) dx$

Εξάσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

- 1 Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- 2 Να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x) dx$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}
- ② Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}
- ② Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

- ① ① Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- ② ② Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$
- ② ② Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

- ① ① Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- ② ② Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$
- ② ② Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι:

- ① ① Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
- ② ② Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$
- ② ② Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Εξάσκηση 14

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1-x) + f(1+x) = 2 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1]$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x) dx$

Εξάσκηση 15

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} |\ln x - 1| dx$

Εξάσκηση 16

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \eta\mu(\ln x) dx$

Εξάσκηση 17

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει:

$$f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x) dx, x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την f

Εξάσκηση 18

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$