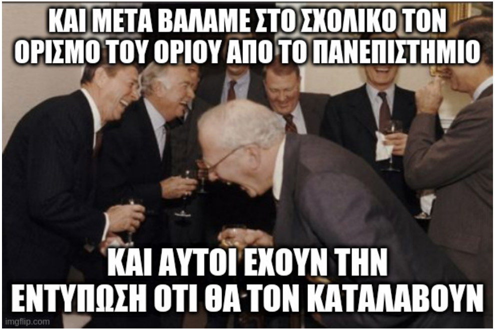
# Συναρτήσεις

## Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Κωνσταντίνος Λόλας

# Όριο


ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΒΑΛΑΜΕ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΑΙ ΑΥΤΟΙ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΕΝΤΥΠΩΣΗ ΟΤΙ ΘΑ ΤΟΝ ΚΑΤΑΛΑΒΟΥΝ
imgflip.com

# Όριο

## Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

# Όριο

## Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν

# Όριο

## Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της $f$ στο $x_0$

# Όριο

## Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της $f$ στο $x_0$
- Όταν το $x$ πάει στο $x_0$, πού πάει η $f$...

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο $x_0$

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο $x_0$
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$

## Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο $x_0$
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η $f$ πλησιάζει στο $l$

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο $x_0$
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η $f$ πλησιάζει στο $l$
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

# Ας γίνουμε νονοί

## Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

# Ας γίνουμε νονοί

## Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0)$ για κατάλληλο $\alpha$

# Ας γίνουμε νονοί

## Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

# Ας γίνουμε νονοί

## Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

## Δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

# Ας γίνουμε νονοί

## Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

## Δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(x_0, \alpha)$ για κατάλληλο $\alpha$

# Άρα

## Ύπαρξη ορίου

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \end{cases}$$

# Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

# Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0)$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

## Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0)$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Όμοια για $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

# Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό

# Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - k) = 0$

# Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - k) = 0$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim_{h \to 0} f(x - x_0) = k$

# Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε

# Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)

# Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές

# Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

# Επίδειξη

Στο διάλλειμα όποιος θέλει μπορεί να μάθει τον υπέρτατο ορισμό του ορίου

# Επίδειξη

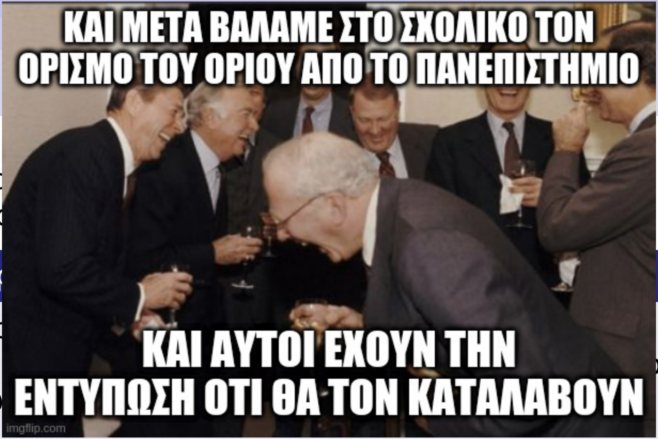
Στο διάλλειμα όποιος θέλει μπορεί να μάθει τον υπέρτατο ορισμό του ορίου. Ιδού:

## Ορισμός ορίου

Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Λέμε ότι η συνάρτηση τείνει στο $\lambda \in \mathbb{R}$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ όταν:

# Επίδειξη

Στο διάλλε
υπέρτατο 




**Ορισμός ο**

Έστω μια 
μορφής $(\alpha,$
$\lambda \in \mathbb{R}$ καθώ

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \lambda| < \epsilon$

# Εξάσκηση

Μόνο από το βιβλίο, μόνο γραφικά!

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση