Συναρτήσεις

Συνάρτηση Ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Στο σημερινό επεισόδιο

Θα μάθουμε:

1. Πώς υπολογίζουμε τα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ και
2. Τι σχέση έχουμε με τις αρχικές

Ηρθε η ώρα της σύνδεσης!

Θεώρημα Παράγουσας - Ορισμένου

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Ηρθε η ώρα της σύνδεσης!

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha) = [G(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

Ρεζουμέ!

Για να υπολογίσουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

1. Δεν το κάνουμε με τα άπειρα αθροίσματα!
2. Υπολογίζουμε το $G(x) = \int f(x)\,dx$
3. Υπολογίζουμε το $[G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

Ρεζουμέ!

Για να υπολογίσουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

1. Δεν το κάνουμε με τα άπειρα αθροίσματα!
2. Υπολογίζουμε το $G(x) = \int f(x)\,dx$
3. Υπολογίζουμε το $[G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

Ρεζουμέ!

Για να υπολογίσουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

1. Δεν το κάνουμε με τα άπειρα αθροίσματα!
2. Υπολογίζουμε το $G(x) = \int f(x)\,dx$
3. Υπολογίζουμε το $[G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

Μέσης τιμής

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Απόδειξη Μέσης τιμής

Στο $[\alpha, \beta]$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής άρα έχει μέγιστη M και ελάχιστη μ τιμή, συνεπώς

$$\mu \leq f(x) \leq \mathrm{M}$$

Με τον ορισμό του ορισμοένου ολοκληρώματος η σχέση γίνεται

$$\mu(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \mathrm{M}(\beta - \alpha)$$

$$\mu \leq \frac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\beta - \alpha} \leq \mathrm{M}$$

που σύμφωνα με το ΘΕΤ θα ισχύει

$$\frac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\beta - \alpha} = f(\xi) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Αρχικής

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_{\alpha}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)h}{h}, \xi \in [x, x+h] \\
&= \lim_{h\to 0} f(\xi) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Ολοκληρωτικού

Η $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ είναι μία αρχική της f άρα θα ισχύει

$$G(x) = F(x) + c$$

Αλλά

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = 0 + c = c$$

Ετσι

$$G(x) = F(x) + G(\alpha)$$

Τότε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Rightarrow$$

$$F(\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha)$$