

# Κύκλος

## Εισαγωγή

Κωνσταντίνος Λόλας

# Κωνικές Τομές

Ώρα για παιχνίδι! Geogebra

# Όλες? Κανονικά ναι, αλλά!

Θα ασχοληθούμε με

- Κύκλο
- Έλλειψη
- Παραβολή
- Υπερβολή

# Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

# Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

# Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

# Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση

# Ναι, αλλά τι?

Για κάθε κωνική τομή, θα...

- ορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο
- ονομάσουμε στοιχεία
- βρίσκουμε στοιχεία τους
- ψάξουμε ιδιότητες
- την αναγνωρίζουμε από γενική εξίσωση



# Κύκλος ολέ!

## Ορισμός

Κύκλος ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο. Το σημείο ονομάζεται κέντρο του κύκλου και η απόσταση, ακτίνα.

# Πάμε!

Έστω  $A(x, y)$  το οποιοδήποτε σημείο του κύκλου,  $\rho$  η ακτίνα και  $K(x_0, y_0)$  το κέντρο του

Θα πρέπει  $|OA| = \rho$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Τι, αυτό ήταν?

# Πάμε!

Έστω  $A(x, y)$  το οποιοδήποτε σημείο του κύκλου,  $\rho$  η ακτίνα και  $K(x_0, y_0)$  το κέντρο του  
Θα πρέπει  $|OA| = \rho$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \rho \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \rho^2\end{aligned}$$

Τι, αυτό ήταν?

# Πάμε!

Έστω  $A(x, y)$  το οποιοδήποτε σημείο του κύκλου,  $\rho$  η ακτίνα και  $K(x_0, y_0)$  το κέντρο του

Θα πρέπει  $|OA| = \rho$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \rho \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \rho^2\end{aligned}$$

Τι, αυτό ήταν?

# Ο Μοναδιαίος!

Κέντρο  $K(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ , άρα...

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

# Τι έμεινε?

- ιδιότητες
- εφαπτομένη
- γενική εξίσωση

# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...



# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

# Ιδιότητες κύκλου

- Η εφαπτομένη του σε ένα σημείο, είναι κάθετη στην εκεί ακτίνα
- Το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από 3 σημεία είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων
- Το απόστημα είναι μεσοκάθετο της χορδής
- Το κέντρο απέχει από την εφαπτόμενη όσο η ακτίνα
- Ένα σημείο είναι έξω, μέσα ή ανήκει όταν...
- Δύο κύκλοι μεταξύ τους...
- Κύκλος και ευθεία...
- ...

# Εφαπτόμενη

Αν την κατασκευάζετε δεν χρειάζεστε τύπο!

Μόνο για τον μοναδιαίο κύκλο, η εφαπτόμενη από το σημείο του  $(x_1, y_1)$  είναι η

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 1$$

Η στη γενική περίπτωση (εκτός ύλης σαν τύπος)

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

Απόδειξη

## Όχι πάντα στην έτοιμη μορφή

Γενική εξίσωση κύκλου

Κάθε εξίσωση

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

παριστάνει κύκλο και κάθε κύκλος έχει εξίσωση αυτής της μορφής.

Το κέντρο είναι το  $K = (-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$  και η ακτίνα  $\rho = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{2}$

Απόδειξη →

Απόδειξη ←



# Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$  που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και:

- 1 έχει ακτίνα  $\rho = 2$
- 2 διέρχεται από το σημείο  $A(-3, 4)$
- 3 εφάπτεται της ευθείας  $\varepsilon : 3x + 4y - 10 = 0$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$  που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και:

- 1 έχει ακτίνα  $\rho = 2$
- 2 διέρχεται από το σημείο  $A(-3, 4)$
- 3 εφάπτεται της ευθείας  $\varepsilon : 3x + 4y - 10 = 0$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$  που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και:

- ① έχει ακτίνα  $\rho = 2$
- ② διέρχεται από το σημείο  $A(-3, 4)$
- ③ εφάπτεται της ευθείας  $\varepsilon : 3x + 4y - 10 = 0$

## Εξάσκηση 2

Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 = 25$ . Να βρείτε:

- 1 την εξίσωση της χορδής του κύκλου  $C$  που έχει μέσον το σημείο  $A(2, 4)$
- 2 το μήκος της παραπάνω χορδής

## Εξάσκηση 2

Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 = 25$ . Να βρείτε:

- 1 την εξίσωση της χορδής του κύκλου  $C$  που έχει μέσον το σημείο  $A(2, 4)$
- 2 το μήκος της παραπάνω χορδής

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = 25$  στο σημείο του:

①  $A(3, 4)$

②  $B(-4, \mu), \mu > 0$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = 25$  στο σημείο του:

- 1  $A(3, 4)$
- 2  $B(-4, \mu), \mu > 0$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:

- 1 κέντρο το σημείο  $K(3, -2)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{7}$
- 2 διάμετρο το τμήμα  $AB$  με άκρα τα σημεία  $A(1, -2)$  και  $B(-5, 6)$



## Εξάσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει:

- 1 κέντρο το σημείο  $K(3, -2)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{7}$
- 2 διάμετρο το τμήμα  $AB$  με άκρα τα σημεία  $A(1, -2)$  και  $B(-5, 6)$

## Εξάσκηση 5

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C_1$  που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο

$$C_2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 7$$

και εφάπτεται της ευθείας  $\varepsilon : 4x - 3y + 2 = 0$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας  $\varepsilon_1 : 4x + 3y = 12$  στο σημείο  $A(3, 0)$  και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon_2 : y = x - 1$

## Εξάσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-5, -1)$ ,  $B(1, -3)$  και  $\Gamma(7, 3)$ . Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

## Εξάσκηση 8

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$

## Εξάσκηση 9

Δίνεται η εξίσωση

$$(2x - 1)^2 + 2y(2y + 1) = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο και μετά να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

## Εξάσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1 Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο
- 2 Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση, βρίσκονται σε ευθεία

## Εξάσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο
- ② Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση, βρίσκονται σε ευθεία



# Εξάσκηση 11

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta - 3 = 0, \theta \in \mathbb{R}$$

- 1 Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$
- 2 Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο

# Εξάσκηση 11

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta - 3 = 0, \theta \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$
- ② Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο

## Εξάσκηση 12

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

και

$$C_2 : (x + 1)^2 + y^2 = 3^2$$

- 1 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  του κύκλου  $C_1$  στο σημείο του  $A(-1, 5)$
- 2 Να αποδείξετε ότι η  $\varepsilon$  εφάπτεται και του κύκλου  $C_2$

## Εξάσκηση 12

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

και

$$C_2 : (x + 1)^2 + y^2 = 3^2$$

- ① Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  του κύκλου  $C_1$  στο σημείο του  $A(-1, 5)$
- ② Να αποδείξετε ότι η  $\varepsilon$  εφάπτεται και του κύκλου  $C_2$

## Εξάσκηση 13

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

$C : (x - 1)^2 + y^2 = 2$ , που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\zeta : y = x + 1$

## Εξάσκηση 14

Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου  $C : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$  που διέρχονται από το σημείο  $A(-1, 0)$

## Εξάσκηση 15

Από το σημείο  $M(4, 3)$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο  $C : x^2 + y^2 = 2$ . Αν  $A, B$  είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε:

- 1 την ευθεία  $AB$
- 2 την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία  $AB$

## Εξάσκηση 15

Από το σημείο  $M(4, 3)$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο  $C : x^2 + y^2 = 2$ . Αν  $A, B$  είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε:

- 1 την ευθεία  $AB$
- 2 την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία  $AB$



## Εξάσκηση 16

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 4$$

και

$$C_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 25$$

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$

## Εξάσκηση 17

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = 4$  ως προς:

- 1 το σημείο  $A(1, 3)$
- 2 την ευθεία  $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$
- 3 τον κύκλο  $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$

## Εξάσκηση 17

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = 4$  ως προς:

- 1 το σημείο  $A(1, 3)$
- 2 την ευθεία  $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$
- 3 τον κύκλο  $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$

## Εξάσκηση 17

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = 4$  ως προς:

- ① το σημείο  $A(1, 3)$
- ② την ευθεία  $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$
- ③ τον κύκλο  $C_1 : (x - 3)^2 + y^2 = 1$

## Εξάσκηση 18

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

- 1 Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  τέμνονται
- 2 Να βρείτε την κοινή χορδή των κύκλων

## Εξάσκηση 18

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

- ① Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  τέμνονται
- ② Να βρείτε την κοινή χορδή των κύκλων

## Εξάσκηση 19

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

- 1 Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτονται εξωτερικά
- 2 Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
- 3 Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη των κύκλων

## Εξάσκηση 19

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

- ① Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτονται εξωτερικά
- ② Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
- ③ Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη των κύκλων



## Εξάσκηση 19

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

και

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

- ① Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτονται εξωτερικά
- ② Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων
- ③ Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη των κύκλων

## Εξάσκηση 20

Δίνεται η οικογένεια κύκλων

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1 Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
- 2 Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση

## Εξάσκηση 20

Δίνεται η οικογένεια κύκλων

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1 Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
- 2 Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση

## Εξάσκηση 21

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- 1 Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο
- 2 Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε

## Εξάσκηση 21

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- 1 Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει κύκλο
- 2 Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε

## Εξάσκηση 22

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$ , όταν ισχύουν:

- η ευθεία  $\varepsilon : y = -2x$  τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $A(3, 1)$  και  $B$
- ο κύκλος  $C$  διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(-1, 0)$
- $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = 0$

## Εξάσκηση 23

Δίνεται ο κύκλος  $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ . Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που διέρχεται από το σημείο  $A(4, 2)$  και έχει μήκος  $2\sqrt{5}$

## Εξάσκηση 24

Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες που φέρνουμε στον κύκλο  $C : x^2 + y^2 = 5$  από το σημείο  $A(1, 3)$  είναι κάθετες



## Εξάσκηση 25

Δίνονται τα σημεία  $A(2, 0)$  και  $B(-2, 4)$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ , για τα οποία ισχύει:

①  $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

②  $\widehat{AMB} = 90^\circ$

## Εξάσκηση 25

Δίνονται τα σημεία  $A(2, 0)$  και  $B(-2, 4)$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ , για τα οποία ισχύει:

①  $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

②  $\widehat{AMB} = 90^\circ$

## Εξάσκηση 26

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ , των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο  $A(0, 1)$  είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης από την ευθεία  $\varepsilon : y = \frac{3}{2}$

## Εξάσκηση 27

Να βρείτε που κινείται το σημείο  $M(3 + 2\eta\mu\theta, 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$

## Εξάσκηση 28

Δίνεται ο κύκλος  $C : (x - 1)^2 + y^2 = 4$ . Αν το σημείο  $A$  κινείται στον κύκλο  $C$  με κέντρο το  $K$ , να βρείτε που κινείται το σημείο  $M$ , για το οποίο ισχύει:

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{KA}$$

## Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος  $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

- 1 Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου  $C$
- 2 Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου  $A(1, 2)$  ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου  $A$  από ένα σημείο του κύκλου
- 3 Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας  $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$  ως προς τον κύκλο  $C$  και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου  $C$  από την ευθεία  $\varepsilon$

## Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος  $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

- 1 Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου  $C$
- 2 Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου  $A(1, 2)$  ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου  $A$  από ένα σημείο του κύκλου
- 3 Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας  $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$  ως προς τον κύκλο  $C$  και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου  $C$  από την ευθεία  $\varepsilon$

## Εξάσκηση 29

Δίνεται ο κύκλος  $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

- 1 Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου  $C$
- 2 Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου  $A(1, 2)$  ως προς τον κύκλο και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου  $A$  από ένα σημείο του κύκλου
- 3 Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας  $\varepsilon : 3x + 4y + 18 = 0$  ως προς τον κύκλο  $C$  και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου  $C$  από την ευθεία  $\varepsilon$



## Εξάσκηση 30

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$C_2 : (x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 9$$

και

$$C_3 : (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 64$$

- ① Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$  και μετά να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του  $C_1$  από ένα σημείο του  $C_2$
- ② Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων  $C_2$  και  $C_3$  και μετά να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του  $C_2$  από ένα σημείο του  $C_3$

## Εξάσκηση 30

Δίνονται οι κύκλοι:

$$C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$C_2 : (x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 9$$

και

$$C_3 : (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 64$$

- 1 Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$  και μετά να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του  $C_1$  από ένα σημείο του  $C_2$
- 2 Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων  $C_2$  και  $C_3$  και μετά να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του  $C_2$  από ένα σημείο του  $C_3$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

# Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$  και έστω το σημείο του  $M(x_1, y_1)$ . Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης  
Θα ισχύει  $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

# Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$  και έστω το σημείο του  $M(x_1, y_1)$ . Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης  
Θα ισχύει  $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

# Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$  και έστω το σημείο του  $M(x_1, y_1)$ . Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης  
Θα ισχύει  $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

# Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$  και έστω το σημείο του  $M(x_1, y_1)$ . Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης  
Θα ισχύει  $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

# Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$  και έστω το σημείο του  $M(x_1, y_1)$ . Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης  
Θα ισχύει  $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$



# Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$  και έστω το σημείο του  $M(x_1, y_1)$ . Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης  
Θα ισχύει  $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

# Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου

Ο κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$  και έστω το σημείο του  $M(x_1, y_1)$ . Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της εφαπτόμενης  
Θα ισχύει  $MA \perp KM$

$$(x - x_1, y - y_1) \perp (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0 + x_0 - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1 + y_1 - y_0)(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) - (x_1 - x_0)^2 + (y - y_0)(y_1 - y_0) - (y_1 - y_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) - \rho^2 = 0$$

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$$

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

$$\text{Άρα } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία



# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} - \Gamma$$

$$(x - \frac{A}{2})^2 + (y - \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία

# Απόδειξη γενικής εξίσωσης κύκλου

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + y^2 + By + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

$$\text{Άρα } x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2}, \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Πίσω στη θεωρία