

# Ευθεία

## Εξίσωση Ευθείας

Κωνσταντίνος Λόλας

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

# Το μεγάλο ταξίδι

- Ορισμός
- Εξίσωση
- Γενική Εξίσωση, to rule them all!
- Ελάχιστος συνδυασμός με διανύσματα, shame!
- Εύρεση εξίσωσης από κάθε περίπτωση, brace yourselves!
- 2 νέοι τύποι (απόστασης και εμβαδού)

# Γνωστά ή Άγνωστα νερά?

Λέξεις κλειδιά

- Κλίση
- Συντελεστής διεύθυνσης
- $\varepsilon\varphi\theta$
- $\alpha$
- Σημεία
- Παραλληλία
- Καθετότητα
- Σημεία τομής...

είναι μερικά που θυμάμαι!



# Γραμμές, γραμμές παντού

- Τι είναι γραμμή?
- Γραφικά ή Αλγεβρικά?

# Γραμμές, γραμμές παντού

- Τι είναι γραμμή?
- Γραφικά ή Αλγεβρικά?

# Γραφικά

Εύκολο!

# Αλγεβρικά

Ορισμός γραμμής

Μία εξίσωση με τουλάχιστον έναν άγνωστο

Σημείο στη γραμμή

Κάθε σημείο που επαληθεύει την εξίσωση

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$

# Ας φτιάξουμε απλές γραμμές

- $y = 2$
- $x = 1$
- $x - y = 0$
- $y = 2x$



# Ορισμοί

## Γωνία Ευθείας

Ονομάζουμε γωνία της ευθείας με τον άξονα  $x'x$ , την γωνία που σχηματίζει ο  $x'x$  όταν στραφεί αντίστροφα με τους δείκτες του ρολογιού έως ότου συμπέσει με την ευθεία

## Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης (ή κλίση) της ευθείας την εφαπτομένη της γωνίας της ευθείας με τον  $x'x$

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!

# Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι τιμές παίρνει μία γωνία
- Τι τιμές παίρνει η κλίση
- Πότε είναι παράλληλες δύο ευθείες
- Πότε είναι παράλληλη μία ευθεία με ένα διάνυσμα
- Ποιά άλλα διανύσματα είναι παράλληλα με την ευθεία?
- Πότε είναι κάθετες δύο ευθείες? μην βιάζεστε!!!!



# Λίγη ιστορία

Κλίση διανύσματος

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## Εξισώση ευθείας 1 (από κλίση και σημείο)

Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  και ας έχουμε γνωστό ένα σημείο  $(x_0, y_0)$ . Κάθε σημείο  $(x, y)$  που ανήκει στην ευθεία θα έχει με το γνωστό σημείο κλίση  $\lambda$ . Άρα

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$$

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

## Εξισώση ευθείας 1 (από κλίση και σημείο)

Ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  και ας έχουμε γνωστό ένα σημείο  $(x_0, y_0)$ . Κάθε σημείο  $(x, y)$  που ανήκει στην ευθεία θα έχει με το γνωστό σημείο κλίση  $\lambda$ . Άρα

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$$

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

## Εξισώση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ . Αν  $x_1 \neq x_2$ ...

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

## Εξισώση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ . Αν  $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

## Εξισώση ευθείας 2 (από δύο σημεία)

Ας είναι δύο σημεία  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ . Αν  $x_1 \neq x_2 \dots$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots$$

και έχουμε κλίση και σημείο (κοίτα προηγούμενη διαφάνεια)

## Εξισώση ευθείας 3 (δεν έχει κλίση)

Εύκολο?

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διαύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας η οποία:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{3}$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (2, -4)$
- 3 διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(3, 6)$



# Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διαύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας η οποία:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{3}$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (2, -4)$
- 3 διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(3, 6)$

# Εξάσκηση 1

Να βρείτε το συντελεστή διαύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας η οποία:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{3}$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- 3 διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(3, 6)$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία

①  $A(1, 0)$  και  $B(2, \sqrt{3})$

②  $A(2, 3)$  και  $B(1, 3)$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία

①  $A(1, 0)$  και  $B(2, \sqrt{3})$

②  $A(2, 3)$  και  $B(1, 3)$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας  $\varepsilon$ , η οποία:

- 1 είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_1$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 120^\circ$
- 2 είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(3, 5)$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας  $\varepsilon$ , η οποία:

- 1 είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_1$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 120^\circ$
- 2 είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(3, 5)$

## Εξάσκηση 4

Έστω η ευθεία  $\varepsilon$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$  και η ευθεία  $\zeta$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(3, \alpha)$  και  $B(5, 3\alpha - 2)$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε:

- 1 Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι παράλληλες
- 2 Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι κάθετες

## Εξάσκηση 4

Έστω η ευθεία  $\varepsilon$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$  και η ευθεία  $\zeta$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(3, \alpha)$  και  $B(5, 3\alpha - 2)$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε:

- ❶ Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι παράλληλες
- ❷ Οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι κάθετες



## Εξάσκηση 5

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 3$ . Να βρείτε:

- 1 Την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- 2 Την τιμή του  $\lambda$ , για την οποία το σημείο  $M(\lambda - 1, 2\lambda)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ .

## Εξάσκηση 5

Θεωρούμε την ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 3$ . Να βρείτε:

- 1 Την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$
- 2 Την τιμή του  $\lambda$ , για την οποία το σημείο  $M(\lambda - 1, 2\lambda)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ .

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$  και:

- 1 σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$
- 2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (2, -4)$
- 3 είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta$  με συντελεστή διεύθυνσης  $-\frac{1}{2}$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$  και:

- ① σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a} = (2, -4)$
- ③ είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta$  με συντελεστή διεύθυνσης  $-\frac{1}{2}$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$  και:

- ① σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = 45^\circ$
- ② είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -4)$
- ③ είναι κάθετη στην ευθεία  $\zeta$  με συντελεστή διεύθυνσης  $-\frac{1}{2}$