Συναρτήσεις

Θεώρημα Rolle

Κωνσταντίνος Λόλας

Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ήρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιό εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

1. το θεώρημα... γελοίο
2. οι εφαρμογές... πφφφφ
3. οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
4. όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

1. μονοτονία
2. ακρότατα
3. αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

1. μονοτονία
2. ακρότατα
3. αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

1. μονοτονία
2. ακρότατα
3. αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Θεώρημα Rolle

Θεώρημα Rolle

Έστω μία συνάρτηση f:

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$

Συμπεράσματα

1. ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
2. ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
3. έχει περίεργες προϋποθέσεις

Συμπεράσματα

1. ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
2. ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
3. έχει περίεργες προϋποθέσεις

Συμπεράσματα

1. ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
2. ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
3. έχει περίεργες προϋποθέσεις

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

1. βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
2. βρίσκουμε πλήθος ριζών
3. βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

1. βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
2. βρίσκουμε πλήθος ριζών
3. βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

1. βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
2. βρίσκουμε πλήθος ριζών
3. βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Άσκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Άσκηση 24

Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Άσκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Άσκηση 24

Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Άσκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Άσκηση 24

Έστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$
2. Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$
2. Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$
2. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$
2. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

Εξάσκηση 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία το πολύ ρίζα

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

1. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

1. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

1. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ και στη συνέχεια, να βρείτε όλα τα $\xi \in (0, \pi)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 7

Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^\beta = \beta^\alpha$, να δείξετε ότι:

1. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο $[\alpha, \beta]$
2. $1 < \alpha < e < \beta$

Εξάσκηση 7

Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^\beta = \beta^\alpha$, να δείξετε ότι:

1. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο $[\alpha, \beta]$
2. $1 < \alpha < e < \beta$

Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $f'(x) \neq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $1 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = x_0^2 + 1$

Εξάσκηση 10

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Να αποδείξετε ότι:

- Για την συνάρτηση $G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο $[1, 2]$
- Υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3, 0)$