

# Συναρτήσεις

## Συνέχεια Συνάρτησης

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Όταν εμείς το υπολογίζαμε...

Μέχρι στιγμής πλησιάζαμε. Ηρθε ο καιρός να φτάσουμε!

# Συνέχεια 1

Συνέχεια σε σημείο

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο  $x_0$  αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

## Συνέχεια 2

### Συνέχεια σε διάστημα

Μία συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  όταν:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$
- $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

## Συνέχεια 3

### Συνεχής συνάρτηση

Μία συνάρτηση είναι συνεχής όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές

# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές

# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές



# Ας γνωριστούμε

Γνωστές συνεχείς συναρτήσεις:

- Πολυωνυμικές
- Εκθετικές
- Λογαριθμικές
- Τριγωνομετρικές

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

- $f - g$

- $f \cdot g$

- $\frac{f}{g}$

- $f \circ g$

- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

- $f - g$

- $f \cdot g$

- $\frac{f}{g}$

- $f \circ g$

- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

- $f - g$

- $f \cdot g$

- $\frac{f}{g}$

- $f \circ g$

- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

- $f - g$

- $f \cdot g$

- $\frac{f}{g}$

- $f \circ g$

- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$

- $f - g$

- $f \cdot g$

- $\frac{f}{g}$

- $f \circ g$

- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

# Και πράξεις αυτών

Αν  $f$  και  $g$  συνεχείς τότε συνεχής

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$
- $f \circ g$
- ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

# Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν "διακόπτεται" βγάζουμε ωραία θεωρήματα



## Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν "διακόπτεται" βγάζουμε ωραία θεωρήματα

## Το μέλλον...

- Αντί να υπολογίζουμε όρια, θα υπολογίζουμε τιμές
- Αν δεν μπορούμε να υπολογίζουμε τιμές, θα υπολογίζουμε όρια
- Αφού η συνάρτηση δεν "διακόπτεται" βγάζουμε ωραία θεωρήματα

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις

# Εξάσκηση 1

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο  $x_0$ :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

# Εξάσκηση 1

Να εξετάσετε, αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο  $x_0$ :

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

## Εξάσκηση 2

Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f(x) = e^x + \ln(x + 1)$  ως προς τη συνέχεια και να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x + 1), & x > 0 \end{cases}$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια.
- ② Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-\pi, 0]$ .



## Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x + 1), & x > 0 \end{cases}$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια.
- ② Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-\pi, 0]$ .

## Εξάσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 4\alpha e^x + \beta \sin x, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x + \alpha x - \beta, & x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες η  $f$  είναι συνεχής.

## Εξάσκηση 5

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$xf(x) = x^2 + \eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

## Εξάσκηση 6

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3$ , να δείξετε ότι  $f(1) = 2$

## Εξάσκηση 7

Εστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = \ln x, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$

## Εξάσκηση 8

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x) = x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

- ①  $|f(x)| \leq |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ② Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 8

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$2f(x) = x + \eta\mu f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

- ①  $|f(x)| \leq |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ② Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$

## Εξάσκηση 9

Εστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

Να δείξετε ότι αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 1$ , τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$