

Συναρτήσεις

Πράξεις Συναρτήσεων

Κωνσταντίνος Λόλας

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Ισότητα Συναρτήσεων

Ορισμός

Δύο συναρτήσεις f και g θα είναι ίσες αν:

- έχουν ίδιο πεδίο ορισμού A
- $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$

Πράξεις Συναρτήσεων

Πρόσθεση

Εστω $f, x \in A$ και $g, x \in B$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f + g)(x)$ έχει

- Πεδίο ορισμού το $A \cap B$
- Κανόνα $f(x) + g(x)$

Πράξεις Συναρτήσεων

Πράξεις

Εστω $f, x \in A$ και $g, x \in B$ δύο συναρτήσεις.

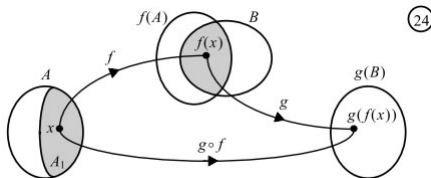
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in A \cap B$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A \cap B$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x), x \in A \cap B$ και $g(x) \neq 0$

Και κάτι καινούριο

Σύνθεση της g με την f

Εστω $f, x \in A$ και $g, x \in B$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Πεδίο ορισμού το $\{x \in B | g(x) \in A\}$



Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Εστω $f, x \in A$ και $g, x \in B$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Ορίζεται αν $A \cap g(B) \neq \emptyset$
 - $x \in B$
 - $g(x) \in A$
 - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Εστω $f, x \in A$ και $g, x \in B$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Ορίζεται αν $A \cap g(B) \neq \emptyset$
 - $x \in B$
 - $g(x) \in A$
 - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Εστω $f, x \in A$ και $g, x \in B$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Ορίζεται αν $A \cap g(B) \neq \emptyset$
 - $x \in B$
 - $g(x) \in A$
 - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

Δύσκολο; Μπα

Σύνθεση

Εστω $f, x \in A$ και $g, x \in B$ δύο συναρτήσεις. Η συνάρτηση $(f \circ g)(x)$ έχει

- Κανόνα $f(g(x))$
- Ορίζεται αν $A \cap g(B) \neq \emptyset$
 - $x \in B$
 - $g(x) \in A$
 - τύπος είναι απλά αντικατάσταση

Εξάσκηση 1

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1) \text{ και } g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$$

είναι ίσες

Εξάσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- 1 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
- 2 Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο να ισχύει $f = g$
- 3 Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης

Εξάσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- ① Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
- ② Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο να ισχύει $f = g$
- ③ Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης

Εξάσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- ① Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες
- ② Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο να ισχύει $f = g$
- ③ Να γράψετε τη συνάρτηση g σε μορφή δύναμης

Εξάσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ Να βρείτε τις συναρτήσεις:

1 $f + g$

2 $\frac{1}{g}$

3 $\frac{f}{g}$

Εξάσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ Να βρείτε τις συναρτήσεις:

1 $f + g$

2 $\frac{1}{g}$

3 $\frac{f}{g}$

Εξάσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$ Να βρείτε τις συναρτήσεις:

① $f + g$

② $\frac{1}{g}$

③ $\frac{f}{g}$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = 4e^x (f(x) - e^x)$$

Εξάσκηση 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

① $f \circ g$

② $g \circ f$

③ $f \circ f$

Εξάσκηση 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

① $f \circ g$

② $g \circ f$

③ $f \circ f$

Εξάσκηση 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

① $f \circ g$

② $g \circ f$

③ $f \circ f$

Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

① $f \circ g$

② $g \circ \frac{1}{f}$

Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

① $f \circ g$

② $g \circ \frac{1}{f}$

Εξάσκηση 7

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = 3x + 2 \ln x - 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f

Εξάσκηση 8

Εστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε τη συνάρτηση g , αν $f(x) = e^x - 1$
- ② Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν $g(x) = 3x - 2$

Εξάσκηση 8

Εστω δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$(g \circ f)(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε τη συνάρτηση g , αν $f(x) = e^x - 1$
- ② Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν $g(x) = 3x - 2$

Εξάσκηση 9

Να εκφράσετε την συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν ισχύει:

- $f(x) = \eta\mu 3x$
- $f(x) = e^{-x}$
- $f(x) = \ln(1 + e^x)$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ❶ Να βρείτε το $f(0)$
- ❷ Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f
- ❸ Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x - 2$
- ❹ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της f είναι το \mathbb{R} , να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2023 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ❶ Να βρείτε το $f(0)$
- ❷ Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f
- ❸ Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x - 2$
- ❹ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της f είναι το \mathbb{R} , να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2023 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε το $f(0)$
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x - 2$
- ④ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της f είναι το \mathbb{R} , να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2023 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να βρείτε το $f(0)$
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f
- ③ Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x - 2$
- ④ Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο της f είναι το \mathbb{R} , να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2023 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + 2) + f(3x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ❶ Να δείξετε ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1, x \in \mathbb{R}$
- ❷ Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

Εξάσκηση 12

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- ① Να δείξετε ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1, x \in \mathbb{R}$
- ② Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα