

Εκθετική Λογαριθμική Συνάρτηση

Λογαριθμική Συνάρτηση

Κωνσταντίνος Λόλας

Και τελειώνουμεεεεεε...

ΩΩΩΩ ναι!

Λογαριθμική Συνάρτηση

Από τους λογάριθμους στις λογαριθμικές συναρτήσεις

Ορισμός

Για $a \in (0, +\infty) - \{1\}$, η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \log_a(x)$ ονομάζεται Λογαριθμική Συνάρτηση

Από εδώ και πέρα ασχολούμαστε μόνο με \ln οπότε

Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν $f(x) = \ln x$ τότε τα σημεία της είναι τα $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν $g(x) = e^x$ τότε τα σημεία της είναι τα (x, e^x)

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Αυτό σημαίνει ότι...

Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν $f(x) = \ln x$ τότε τα σημεία της είναι τα $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν $g(x) = e^x$ τότε τα σημεία της είναι τα (x, e^x)

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Η γραφική παράσταση της $\ln x$ είναι συμμετρική της e^x ως προς την ευθεία $y = x$

Ιδιότητες της C_{\ln}

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Ένα προς ένα?

Ιδιότητες της C_{\ln}

- Μονοτονία \rightarrow Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα
- Ένα προς ένα?

Ιδιότητες της C_{\ln}

- Μονοτονία \rightarrow Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα \rightarrow Δεν έχει
- Ενα προς ένα?

Ιδιότητες της C_{\ln}

- Μονοτονία \rightarrow Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα \rightarrow Δεν έχει
- Ενα προς ένα? \rightarrow Ως γνησίως αύξουσα είναι!

Και τελειώνοντας...

Εξάσκηση 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

① $f(x) = \ln(e^x - 1)$

② $f(x) = \ln\left(x - \frac{4}{x}\right)$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

① $f(x) = \ln(e^x - 1)$

② $f(x) = \ln\left(x - \frac{4}{x}\right)$

Εξάσκηση 2

Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

① $f(x) = \ln x + 1$

② $f(x) = \ln(x - 1)$

Εξάσκηση 2

Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

① $f(x) = \ln x + 1$

② $f(x) = \ln(x - 1)$

Εξάσκηση 3

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

① $y = x$

② $y = x + 1$

③ $y = x - 1$

④ $y = e^x$

⑤ $y = \ln x$

Εξάσκηση 4

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

① $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

② $h(x) = |\ln x|$

③ $\varphi(x) = \ln |x|$

Εξάσκηση 4

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

① $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

② $h(x) = |\ln x|$

③ $\varphi(x) = \ln |x|$

Εξάσκηση 4

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

① $g(x) = \ln \frac{1}{x}$

② $h(x) = |\ln x|$

③ $\varphi(x) = \ln |x|$

Εξάσκηση 5

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$.

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 5

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$.

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 6

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 6

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ② Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
- ③ Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
- ③ Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

- ① Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
- ② Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
- ③ Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}$

Εξάσκηση 8

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x - 1 = 0$

② $\ln(x - 1) = 0$

③ $\ln x^2 - 1 = 0$

④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x - 1 = 0$

② $\ln(x - 1) = 0$

③ $\ln x^2 - 1 = 0$

④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x - 1 = 0$

② $\ln(x - 1) = 0$

③ $\ln x^2 - 1 = 0$

④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x - 1 = 0$

② $\ln(x - 1) = 0$

③ $\ln x^2 - 1 = 0$

④ $\ln 3x - \ln(4 - x) = 0$

Εξάσκηση 10

Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x + 1) = \ln(x + 3) + \ln 2$

Εξάσκηση 11

Να λύσετε την εξίσωση $\log(x^2 + 7x) = 1 + \log(x + 1)$

Εξάσκηση 12

Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln^2 x - 3 \ln x - 4 = 0$$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $e^x = 2$

② $3^x = 10$

③ $2e^x - 1 = 0$

④ $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $e^x = 2$

② $3^x = 10$

③ $2e^x - 1 = 0$

④ $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $e^x = 2$

② $3^x = 10$

③ $2e^x - 1 = 0$

④ $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $e^x = 2$

② $3^x = 10$

③ $2e^x - 1 = 0$

④ $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 14

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x + 1 \leq 0$

② $3 \ln x - 1 < 0$

Εξάσκηση 14

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\ln x + 1 \leq 0$

② $3 \ln x - 1 < 0$

Εξάσκηση 15

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln(1 - x) > 1 + \ln x$$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις

① $3e^x - 1 < 0$

② $e^{-x} - 2 > 0$

③ $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις

① $3e^x - 1 < 0$

② $e^{-x} - 2 > 0$

③ $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις

① $3e^x - 1 < 0$

② $e^{-x} - 2 > 0$

③ $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Εξάσκηση 17

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln^2 x - \ln x^2 - 3 > 0$$

Εξάσκηση 18

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{e^x - 1}{2e^x - 1} < \frac{1}{3}$$

Εξάσκηση 19

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2e^x - 1$$

Εξάσκηση 20

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2 \ln x - 1$$

Εξάσκηση 21

Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- 2 Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- 3 Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 21

Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- 2 Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- 3 Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 21

Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln(x - 1) - 1$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- 2 Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
- 3 Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{e^x - 2}{x - 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x - 2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

Εξάσκηση 23

Να λύσετε την εξίσωση

$$2 \ln(2x - 1) - \frac{1}{2} \ln 9 = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$$

Εξάσκηση 24

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^4 = 11 \\ \ln(xy) = 3 \end{cases}$$

Εξάσκηση 25

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = xe^x \\ \ln y - \ln^2 x = x \end{cases}$$

Εξάσκηση 26

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $3^{x-1} = e^{2-x}$

② $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

Εξάσκηση 26

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $3^{x-1} = e^{2-x}$

② $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

Εξάσκηση 27

- ① Να δείξετε ότι $5^{\ln x} = x^{\ln 5}$
- ② Να λύσετε την εξίσωση $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$

Εξάσκηση 27

- ① Να δείξετε ότι $5^{\ln x} = x^{\ln 5}$
- ② Να λύσετε την εξίσωση $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$

Εξάσκηση 28

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^{\ln x^2} = e^2 x$$

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ❶ Να βρείτε τα α , β και γ
- ❷ Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64(1 - 2^{-\frac{1}{2}})$
- ❸ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ❹ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ❺ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ❶ Να βρείτε τα α , β και γ
- ❷ Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64(1 - 2^{-\frac{1}{2}})$
- ❸ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ❹ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ❺ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64(1 - 2^{-\frac{1}{2}})$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64(1 - 2^{-\frac{1}{2}})$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

- ① Να βρείτε τα α , β και γ
- ② Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64(1 - 2^{-\frac{1}{2}})$
- ③ Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
- ④ Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
- ⑤ Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ



Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση