

# Συναρτήσεις

## Αόριστο Ολοκλήρωμα

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

# Καιρός να τελειώνουμε!

Απλά, θα μάθουμε να αντιπαραγωγίζουμε! Επειδή:

- μπορούμε
- θα λύνουμε προβλήματα ρυθμού μεταβολής (ροπή αδράνειας, έργο δύναμης, κέντρο μάζας...)
- θα βρίσκουμε εμβαδά. Whattttttttttt???????

# Καιρός να τελειώνουμε!

Απλά, θα μάθουμε να αντιπαραγωγίζουμε! Επειδή:

- μπορούμε
- θα λύνουμε προβλήματα ρυθμού μεταβολής (ροπή αδράνειας, έργο δύναμης, κέντρο μάζας...)
- θα βρίσκουμε εμβαδά. Whattttttttttt???????

# Καιρός να τελειώνουμε!

Απλά, θα μάθουμε να αντιπαραγωγίζουμε! Επειδή:

- μπορούμε
- θα λύνουμε προβλήματα ρυθμού μεταβολής (ροπή αδράνειας, έργο δύναμης, κέντρο μάζας...)
- θα βρίσκουμε εμβαδά. Whattttttttttt????????

# Ποιό Σύμβολο?

## Ορισμός Αόριστου Ολοκληρώματος

Εστω  $f(x)$  συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα  $\Delta$  και  $F(x)$  μία συνάρτηση με  $F'(x) = f(x)$ . Τότε

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Η  $F$  έχει πολλά ονόματα: Αρχική, Αντιπαράγωγος, Παράγουσα...

# Πόσες αρχικές υπάρχουν μίας $f$

## Θεώρημα

Εστω  $F(x)$  μία αρχική της  $f(x)$ . Τότε:

- κάθε  $F(x) + c$  είναι επίσης αρχική
- κάθε αρχική είναι της μορφής  $F(x) + c$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

$$\bullet \int 0 \, dx = c$$

$$\bullet \int a \, dx = ax + c$$

$$\bullet \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c \text{ !!!!!!!!!}$$

$$\bullet \int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$$

$$\bullet \int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \varepsilon \varphi x + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$$

$$\bullet \int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\bullet \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

$$\bullet \int 0 \, dx = c$$

$$\bullet \int a \, dx = ax + c$$

$$\bullet \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c \text{ !!!!!!!!!!!}$$

$$\bullet \int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$$

$$\bullet \int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \epsilon \varphi x + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$$

$$\bullet \int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\bullet \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$$



# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$

$$\bullet \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \epsilon \varphi x + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$$

$$\bullet \int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\bullet \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 dx = c$
- $\int a dx = ax + c$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x dx = \eta \mu x + c$

$$\bullet \int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \epsilon \varphi x + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{\eta \mu^2 x} dx = -\sigma \varphi x + c$$

$$\bullet \int e^x dx = e^x + c$$

$$\bullet \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$

- $\int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \epsilon \varphi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 dx = c$
- $\int a dx = ax + c$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x dx = \eta \mu x + c$

- $\int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \epsilon \varphi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} dx = -\sigma \varphi x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c...$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$

- $\int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \varepsilon \varphi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$

- $\int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \varepsilon \varphi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$
- $\int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \varepsilon \varphi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$

# Σαν έτοιμοι από καιρό, σαν θαρραλέοι...

Γνωστές αρχικές:

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$  !!!!!!!!!!!
- $\int \eta \mu x \, dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \sigma \nu \nu x \, dx = \eta \mu x + c$
- $\int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} \, dx = \varepsilon \varphi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} \, dx = -\sigma \varphi x + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \dots$



# Άλλες Αρχικές?

Γνωστές αρχικές 2:

- $\int f'(x) dx = f(x) + c$
- $\int a f'(x) dx = a f(x) + c$
- $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
- $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$

# Άλλες Αρχικές?

Γνωστές αρχικές 2:

- $\int f'(x) dx = f(x) + c$
- $\int a f'(x) dx = a f(x) + c$
- $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
- $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$

# Άλλες Αρχικές?

Γνωστές αρχικές 2:

- $\int f'(x) dx = f(x) + c$
- $\int a f'(x) dx = a f(x) + c$
- $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
- $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$

# Άλλες Αρχικές?

Γνωστές αρχικές 2:

- $\int f'(x) dx = f(x) + c$
- $\int a f'(x) dx = a f(x) + c$
- $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
- $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$

# Άλλες Αρχικές?

Γνωστές αρχικές 2:

- $\int f'(x) dx = f(x) + c$
- $\int a f'(x) dx = a f(x) + c$
- $\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
- $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$

# Το "τέλειο" των ολοκληρωμάτων...

Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις "αλγεβρικό τύπο" για αρχική!

- $e^{x^2}$
- $\frac{e^x}{x}$
- $\eta\mu x^2 \dots$

# Το "τέλειο" των ολοκληρωμάτων...

Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις "αλγεβρικό τύπο" για αρχική!

- $e^{x^2}$
- $\frac{e^x}{x}$
- $\eta\mu x^2 \dots$

# Το "τέλειο" των ολοκληρωμάτων...

Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις "αλγεβρικό τύπο" για αρχική!

- $e^{x^2}$
- $\frac{e^x}{x}$
- $\eta\mu x^2 \dots$



# Τι γίνεται με την ύπαρξη?

Εκτός ύλης! Να σας αρκεί ότι αν είναι συνεχής τότε έχει αρχική...

# Τι γίνεται με την ύπαρξη?

Εκτός ύλης! Να σας αρκεί ότι αν είναι συνεχής τότε έχει αρχική...  
Πάντως, εννοείται υπάρχουν και μη συνεχείς που έχουν αρχική!

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ . Να βρείτε:

- 1 Μια παράγουσα της  $f$
- 2 Όλες τις παράγουσες της  $f$
- 3 Την παράγουσα της  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(0, 1)$

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ . Να βρείτε:

- 1 Μια παράγουσα της  $f$
- 2 Όλες τις παράγουσες της  $f$
- 3 Την παράγουσα της  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(0, 1)$

# Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ . Να βρείτε:

- 1 Μια παράγουσα της  $f$
- 2 Όλες τις παράγουσες της  $f$
- 3 Την παράγουσα της  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(0, 1)$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε μία παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = x^4$

②  $f(x) = \frac{1}{x^5}, x > 0$

③  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

④  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x > 0$



## Εξάσκηση 2

Να βρείτε μία παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = x^4$

②  $f(x) = \frac{1}{x^5}, x > 0$

③  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

④  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x > 0$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε μία παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = x^4$

②  $f(x) = \frac{1}{x^5}, x > 0$

③  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

④  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x > 0$

## Εξάσκηση 2

Να βρείτε μία παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = x^4$

②  $f(x) = \frac{1}{x^5}, x > 0$

③  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

④  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x > 0$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε μία παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = \eta\mu x + e^x - \frac{1}{x}, x > 0$

②  $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x^2}, x < 0$

## Εξάσκηση 3

Να βρείτε μία παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \eta\mu x + e^x - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x^2}, \quad x < 0$$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = 5x^2$

②  $f(x) = 4x^3$

③  $f(x) = \frac{3}{2x}, x > 0$

④  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

⑤  $f(x) = 3x^2 + ax + b$

⑥  $f(x) = \frac{a}{x} - b\sin x, x > 0$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = 5x^2$

②  $f(x) = 4x^3$

③  $f(x) = \frac{3}{2x}, x > 0$

④  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

⑤  $f(x) = 3x^2 + ax + b$

⑥  $f(x) = \frac{a}{x} - b\sin x, x > 0$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = 5x^2$

②  $f(x) = 4x^3$

③  $f(x) = \frac{3}{2x}, x > 0$

④  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

⑤  $f(x) = 3x^2 + ax + b$

⑥  $f(x) = \frac{a}{x} - b\sin x, x > 0$



## Εξάσκηση 4

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = 5x^2$

②  $f(x) = 4x^3$

③  $f(x) = \frac{3}{2x}, x > 0$

④  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

⑤  $f(x) = 3x^2 + ax + b$

⑥  $f(x) = \frac{a}{x} - b\sin x, x > 0$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = 5x^2$

②  $f(x) = 4x^3$

③  $f(x) = \frac{3}{2x}, x > 0$

④  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

⑤  $f(x) = 3x^2 + ax + b$

⑥  $f(x) = \frac{a}{x} - b\sin x, x > 0$

## Εξάσκηση 4

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = 5x^2$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = 4x^3$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{3}{2x}, x > 0$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = 3x^2 + ax + b$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{a}{x} - b \sin x, x > 0$$

## Εξάσκηση 5

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2}, x < 0$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

## Εξάσκηση 5

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{x^2}, \quad x < 0$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$

②  $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$

## Εξάσκηση 6

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$$

## Εξάσκηση 7

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = e^{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x$

②  $f(x) = 2xe^{x^2}$

③  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

④  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$



## Εξάσκηση 7

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = e^{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x$

②  $f(x) = 2xe^{x^2}$

③  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

④  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

## Εξάσκηση 7

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = e^{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = 2xe^{x^2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

## Εξάσκηση 7

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = e^{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = 2xe^{x^2}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

## Εξάσκηση 8

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$

②  $f(x) = \frac{1}{x - 1}, x > 1$

③  $f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

④  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 1$

⑤  $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$

⑥  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

## Εξάσκηση 8

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{x - 1}, x > 1$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 1$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

## Εξάσκηση 8

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{x - 1}, x > 1$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 1$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

## Εξάσκηση 8

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{x - 1}, x > 1$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 1$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

## Εξάσκηση 8

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{x - 1}, x > 1$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 1$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



## Εξάσκηση 8

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1}{x - 1}, x > 1$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}, x > 1$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

## Εξάσκηση 9

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

①  $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^2$

②  $f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

③  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

④  $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

⑤  $f(x) = \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

## Εξάσκηση 9

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

①  $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^2$

②  $f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

③  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

④  $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

⑤  $f(x) = \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

## Εξάσκηση 9

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

①  $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^2$

②  $f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

③  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

④  $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

⑤  $f(x) = \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

## Εξάσκηση 9

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

①  $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^2$

②  $f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

③  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

④  $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

⑤  $f(x) = \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

## Εξάσκηση 9

Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

$$\textcircled{1} \quad f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^2$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

## Εξάσκηση 10

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = e^{2x}$

②  $f(x) = \frac{1}{3x+2}, x > 0$

③  $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + e^{-x}$

## Εξάσκηση 10

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = e^{2x}$

②  $f(x) = \frac{1}{3x+2}, x > 0$

③  $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + e^{-x}$



## Εξάσκηση 10

Να βρείτε μια παράγουσα των συναρτήσεων:

①  $f(x) = e^{2x}$

②  $f(x) = \frac{1}{3x+2}, x > 0$

③  $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + e^{-x}$

## Εξάσκηση 11

Να βρείτε της αρχικές της συνάρτησης  $f(x) = 2|x| + 1, x \in \mathbb{R}$

## Εξάσκηση 12

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $f'(x) = e^x - \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 2$

②  $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1, x > 0$  και  $f(1) = 1$

## Εξάσκηση 12

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $f'(x) = e^x - \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 2$

②  $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1, x > 0$  και  $f(1) = 1$

## Εξάσκηση 13

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $f'(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}, x > -1$  και  $f(0) = -1$

②  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$  και  $f(1) = \sqrt{2}$

## Εξάσκηση 13

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\textcircled{1} \quad f'(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}, \quad x > -1 \text{ και } f(0) = -1$$

$$\textcircled{2} \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \sqrt{2}$$

## Εξάσκηση 14

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $x^2 f'(x) = x^2 + x - 1, x > 0$  και  $f(1) = 0$

②  $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$

## Εξάσκηση 14

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $x^2 f'(x) = x^2 + x - 1, x > 0$  και  $f(1) = 0$

②  $f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$



## Εξάσκηση 15

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $f'(x) = x(2\sigma\nu\nu x - x\eta\mu x), x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 1$

②  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x > 0$  και  $f(1) = 0$

## Εξάσκηση 15

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\textcircled{1} \quad f'(x) = x(2\sigma\nu\nu x - x\eta\mu x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

$$\textcircled{2} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0 \text{ και } f(1) = 0$$

## Εξάσκηση 16

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  όταν ισχύουν  $f''(x) = e^x - \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $f'(0) = f(0) = 1$

## Εξάσκηση 17

Εστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει  $f''(x) = e^x - \eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Αν οι  $C_f$  και  $C_g$  τέμνονται πάνω στον άξονα  $y'y$  και οι εφαπτομένες των  $C_f$  και  $C_g$  στο  $x_0 = 1$  είναι παράλληλες, να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < g(x)$$

## Εξάσκηση 18

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(\pi) = 0$ , η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τον τύπο της  $f(x)$

## Εξάσκηση 19

Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $f(0) = 2$  και

$$(x - 1)f'(x) = 2x^2 - x - 1$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε την  $f(x)$

## Εξάσκηση 20

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $(x^2 + 1)f'(x) = 1 - 2xf(x), x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 1$

②  $f'(x)\eta\mu x = \eta\mu^2 x + f(x)\sigma\upsilon\nu x, x \in (0, \pi)$  και  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

## Εξάσκηση 20

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $(x^2 + 1)f'(x) = 1 - 2xf(x), x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 1$

②  $f'(x)\eta\mu x = \eta\mu^2 x + f(x)\sigma\upsilon\nu x, x \in (0, \pi)$  και  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$



## Εξάσκηση 21

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $f'(x) = e^{x-f(x)}, x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = \ln 2$

②  $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + \frac{1}{x}, x > 0$  και  $f(1) = e$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 21

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $f'(x) = e^{x-f(x)}, x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = \ln 2$

②  $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + \frac{1}{x}, x > 0$  και  $f(1) = e$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 0$

## Εξάσκηση 22

Εστω  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει  $xf'(x) + (1-x)f(x) = 0$  για κάθε  $x > 0$  και  $f(1) = e$ . Να βρείτε την  $f(x)$

## Εξάσκηση 23

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

①  $xf'(x) = \sin x - f(x), x \in \mathbb{R}$

②  $f'(x) - \frac{x}{f(x)} = 0, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2$

## Εξάσκηση 23

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\textcircled{1} \quad x f'(x) = \sin x - f(x), x \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad f'(x) - \frac{x}{f(x)} = 0, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2$$

## Εξάσκηση 24

Από την πώληση ενός προϊόντος μιας εταιρείας, διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους  $K(t)$  του προϊόντος είναι  $1000 - 0.8t$  (σε ευρώ την ημέρα), ενώ ο ρυθμός είσπραξης  $E(t)$  στο τέλος των  $t$  ημερών δίνεται από τον τύπο  $E'(t) = 1300 + 0.4t$  (σε ευρώ την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έβδομη ημέρα.