# Θεωρήματα και Αποδείξεις Γ’ Λυκείου

Κωνσταντίνος Λόλας

2025

**Απόδειξη 1:**

Εστω $P(x) = \alpha_\nu x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Τότε

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} \alpha_\nu x^n + \lim_{x\to x_0} \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \lim_{x\to x_0} \alpha_1 x + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x\to x_0} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu x_0^n + \alpha_{n-1}x_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu x_0^n + \alpha_{n-1}x_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 \\
&= P(x_0)
\end{aligned}$$

□

**Απόδειξη 2:**

Εστω $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με $P, Q$ πολυώνυμα. Τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

αν $Q(x_0) \neq 0$.

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} \\
&= \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} \\
&= \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}
\end{aligned}$$

□

**Απόδειξη 3: Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών**

Εστω μία συνάρτηση $f$ η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. αν

- $f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$,
- $f(a) \neq f(b)$

τότε για κάθε αριθμό $\eta$ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

**Απόδειξη:** Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Τότε θα ισχύει ότι $f(a) < \eta < f(b)$. Αν θεωρήσουμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, παρατηρούμε ότι

- η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[a, b]$,
- $g(a)g(b) < 0$ (γιατί $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(b) = f(b) - \eta > 0$).

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Αρα $f(x_0) = \eta$. □

**Απόδειξη 4:**

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Απόδειξη:** Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot 0 \\
&= f'(x_0) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Αφού η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$. Επομένως $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$. □

**Απόδειξη 5:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$(c)' = 0$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

Επομένως

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Αρα $c' = 0$. □

**Απόδειξη 6:**

´Εστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, Δηλαδή

$$(x)' = 1$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

Επομένως

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Αρα $x' = 1$. □

**Απόδειξη 7:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = nx^{n-1}$, δηλαδή

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{x^n-(x_0)^n}{x-x_0} \\ &= \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+...+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1})}{x-x_0} \\ &= x^{n-1}+x^{n-2}x_0+...+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = nx_0^{n-1}$$

Αρα $(x^n)' = nx_0^{n-1}$. □

**Απόδειξη 8:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^+$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}^+$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
&= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Αρα $(\sqrt(x))' = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. □

**Απόδειξη 9:**

Αν οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0$, τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Επομένως, αφού οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0$, ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Αρα $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. □

**Απόδειξη 10:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{R}^*$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{1' \cdot x^{\nu} - \nu \cdot 1 \cdot x^{\nu-1}}{(x^{\nu})^2} = \frac{0 - \nu \cdot x^{-\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$$

□

**Απόδειξη 11:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' \\
&= \frac{\eta\mu' x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu' x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} \\
&= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} \\
&= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} \\
&= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}
\end{aligned}$$

□

**Απόδειξη 12:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$, δηλαδή

**Απόδειξη:** Πράγματι, αν $y = x^a$, τότε $y = e^{a \ln x}$. Αν θέσουμε $u = a \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$ επομένως

$$\begin{aligned}
y' = (e^u)' = e^u \cdot u' &= e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' \\
&= e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} \\
&= x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} \\
&= ax^{a-1}
\end{aligned}$$

□

**Απόδειξη 13:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \cdot \ln a$, δηλαδή

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

**Απόδειξη:** Πράγματι, αν $y = a^x$, τότε $y = e^{x \ln a}$. Αν θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$ επομένως

$$\begin{aligned} y' = (e^u)' = e^u \cdot u' &= e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' \\ &= e^{x \ln a} \cdot \ln a \cdot 1 \\ &= a^x \cdot \ln a \end{aligned}$$

□

**Απόδειξη 14:**

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, δηλαδή

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

**Απόδειξη:** Πράγματι,

- Αν $x > 0$ έχουμε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ενώ
- αν $x < 0$ έχουμε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $u = -x$ έχουμε

$$\begin{aligned} y' = (\ln(u))' &= \frac{1}{u} \cdot u' \\ &= \frac{1}{-x} \cdot (-1) \\ &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

□

**Απόδειξη 15: Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής**

΄Εστω μία συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $\Delta$,
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$,

τότε η $f$ είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $\Delta$.

**Απόδειξη:** Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ιακονοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή $f'(\xi) = 0$, προκύπτει ότι

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

Αρα $f(x_2) - f(x_1) = 0$ και επομένως $f(x_2) = f(x_1)$.

Αν $x_2 < x_1$ τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$. □

**Απόδειξη 16:**

Εστω δύο συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες στο $\Delta$. Αν

- οι $f, g$ είναι συνεχείς στο $\Delta$,
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$,

τότε υπάρχει σταθερός αριθμός $c$ ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$f(x) = g(x) + c$$

**Απόδειξη:** Η συνάρτηση $f(x) - g(x)$ είναι συνεχής στο $\Delta$ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως, από το θεώρημα συνέπειας του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, προκύπτει ότι η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο $\Delta$. Αρα υπάρχει σταθερός αριθμός $c$ ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) - g(x) = c$. Δηλαδή $f(x) = g(x) + c$. □

**Απόδειξη 17:**

Εστω η συνάρτηση $f$ η οποία είναι συνεχής στο $\Delta$.

- Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$, τότε η $f$ είναι αύξουσα στο $\Delta$.
- Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$, τότε η $f$ είναι φθίνουσα στο $\Delta$.

**Απόδειξη:** Αποδεικνύουμε την περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Εστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$, και $x_2 - x_1$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$ άρα $f(x_1) < f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$, η απόδειξη γίνεται με παρόμοιο τρόπο. □

**Απόδειξη 18:**

Εστω η συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του $\Delta$. Αν η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, τότε

$$f'(x_0) = 0$$

**Απόδειξη:** Ας υποθέσουμε ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ τοπικό μέγιστο. Επειδή το $x_0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\Delta$ και η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \Delta$$

και

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως

- Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
- Αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Συνεπώς έχουμε

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ και } f'(x_0) \leq 0$$

Αρα $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. □

**Απόδειξη 19:**

Εστω μία συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $(\alpha, \beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0$ στο οποίο όμως η $f$ είναι συνεχής.

1. Αν $f'(x) > 0$ στο $(\alpha, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, \beta)$, τότε η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0$.
2. Αν $f'(x) < 0$ στο $(\alpha, x_0)$ και $f'(x) > 0$ στο $(x_0, \beta)$, τότε η $f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0$.
3. Αν $f'(x) > 0$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η $f$ είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha, \beta)$.

**Απόδειξη:**

1. Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(\alpha, x_0)$, και η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Ετσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$.

   Επειδή $f'(x) < 0$ στο $(x_0, \beta)$, και η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, τότε η $f$ είναι φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Ετσι έχουμε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$.

   Επομένως έχουμε
   $$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

   Αρα η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0$. Για το

2. Εργαζόμαστε αναλόγως

3. Εστω ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

   Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2$ έχουμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Αρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

   Θα δείξουμε τώρα ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta)$.

   Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

   - Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$.
   - Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$.
   - Τέλος αν $x_1 < x_0 < x_2$ τότε όπως είδαμε παραπάνω έχουμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

   Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta)$. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, \beta)$.

$\square$

**Απόδειξη 20:**

Εστω $f$ μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$. Αν $F$ είναι μία παράγουσα της $f$ στο $\Delta$, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής
  $$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$
  είναι παράγουσες της $f$ στο $\Delta$.
- κάθε άλλη παράγουσα $G$ της $f$ στο $\Delta$ παίρνει τη μορφή
  $$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

**Απόδειξη:**

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$ είναι μία παράγουσα της $f$ στο $\Delta$. Πράγματι, αν $x_0 \in \Delta$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$G'(x) = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

- Αν $G$ είναι μία άλλη παράγουσα της $f$ στο $\Delta$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$F'(x) = G'(x),\ x \in \Delta$$

  Αρα $F(x) = G(x) + c$ για κάποιο σταθερό $c \in \mathbb{R}$.

□

**Απόδειξη 21: Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού**

´Εστω $f$ μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $G$ είναι μία παράγουσα της $f$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Απόδειξη:** Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή η $G$ είναι παράγουσα της $f$ στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει σταθερός αριθμός $c$ τέτοιος ώστε

$$G(x) = F(x) + c \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Ειδικότερα, για $x = \alpha$ έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_a^a f(t)\,dt + c = c$$

Επομένως, $c = G(\alpha)$ και άρα

$$G(x) = F(x) + G(\alpha) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Αρα

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha)$$

Επομένως

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

□

Ολες οι διατυπώσεις και οι αποδείξεις είναι από το το σχολικό βιβλίο ”Μαθηματικά Β μέρος” του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ), εκδόσεις Διόφαντος.

Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0273, ISBN 978-960-06-5175-1