

Συναρτήσεις

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Κωνσταντίνος Λόλας

Ήρθε η ώρα για τα ΠΙΟ δύσκολα

Θυμάστε Bolzano \sim $\Theta E T$

Τώρα Rolle \sim $\Theta M T$

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω μία συνάρτηση f :

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Παρατήρηση

- ❶ Ο Rolle είναι το ΘMT για $f(\alpha) = f(\beta)$
- ❷ Το ΘMT προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

Παρατήρηση

- 1 Ο Rolle είναι το ΘMT για $f(\alpha) = f(\beta)$
- 2 Το ΘMT προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

Παρατήρηση

- 1 Ο Rolle είναι το ΘMT για $f(\alpha) = f(\beta)$
- 2 Το ΘMT προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να δείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[1, 5]$ και να βρείτε τα $\xi \in [1, 5]$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{1}{2}$

Εξάσκηση 2

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(3) - f(1) = 4$$

- ❶ Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2$
- ❷ Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x + 3$

Εξάσκηση 2

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(3) - f(1) = 4$$

- ① Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2$
- ② Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x + 3$

Εξάσκηση 3

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει $f(1) - f(0) > 0$

- 1 Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$
- 2 Αν επιπλέον ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 3

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει $f(1) - f(0) > 0$

- 1 Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$
- 2 Αν επιπλέον ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 4

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x)$, $x > 0$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$$

Εξάσκηση 5

Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f' \uparrow \mathbb{R}$

- 1 Αν $f(1) = 0$ να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$ για $x > 1$
- 2 Να δείξετε ότι $f(2x) > f(x) + xf'(x)$ για κάθε $x > 0$
- 3 Να δείξετε ότι $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f' \uparrow \mathbb{R}$

- ❶ Αν $f(1) = 0$ να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$ για $x > 1$
- ❷ Να δείξετε ότι $f(2x) > f(x) + xf'(x)$ για κάθε $x > 0$
- ❸ Να δείξετε ότι $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f' \uparrow \mathbb{R}$

- ① Αν $f(1) = 0$ να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$ για $x > 1$
- ② Να δείξετε ότι $f(2x) > f(x) + xf'(x)$ για κάθε $x > 0$
- ③ Να δείξετε ότι $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

① $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

② $\ln x < x, x > 0$

③ $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④ $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤ $e^x > \ln x, x > 0$

⑥ $e^x - \ln x > 2, x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

① $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

② $\ln x < x, x > 0$

③ $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④ $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤ $e^x > \ln x, x > 0$

⑥ $e^x - \ln x > 2, x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

① $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

② $\ln x < x, x > 0$

③ $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④ $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤ $e^x > \ln x, x > 0$

⑥ $e^x - \ln x > 2, x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

① $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

② $\ln x < x, x > 0$

③ $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④ $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤ $e^x > \ln x, x > 0$

⑥ $e^x - \ln x > 2, x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

① $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

② $\ln x < x, x > 0$

③ $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④ $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤ $e^x > \ln x, x > 0$

⑥ $e^x - \ln x > 2, x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

① $e^x > x, x \in \mathbb{R}$

② $\ln x < x, x > 0$

③ $e^{x-1} \geq x, x \in \mathbb{R}$

④ $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1, x > 0$

⑤ $e^x > \ln x, x > 0$

⑥ $e^x - \ln x > 2, x > 0$

Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(e) = e \ln 2$ και $f'(x) < \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(1) > \ln 2$

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη και ισχύουν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) - f(0) > f'(0)$. Να αποδείξετε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 10

Έστω f μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x^2 + 1}) - f(x)$

Εξάσκηση 10

Έστω f μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x^2 + 1}) - f(x)$

Εξάσκηση 11

- ① Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
- ② Να δείξετε ότι $2e^5 < e^3 + e^7$

Εξάσκηση 11

- ① Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
- ② Να δείξετε ότι $2e^5 < e^3 + e^7$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(\alpha) + f(3\alpha) = 2f(2\alpha)$, $\alpha > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, 3\alpha)$ ώστε $f''(\xi) = 0$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να αποδείξετε ότι:

- 1 η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$
- 2 υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)f(x_2) = 1$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να αποδείξετε ότι:

- ① η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$
- ② υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)f(x_2) = 1$