

# Συναρτήσεις

## Μονοτονία

Κωνσταντίνος. Λόλας

# Αντίστροφη

## Ορισμός

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$  που είναι 1-1. Η αντίστροφη της  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε  $x \in f(A)$  αντιστοιχεί ένα  $y \in A$  ώστε:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

# Αντίστροφη

## Ορισμός

Έστω συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$  που είναι 1-1. Η αντίστροφη της  $f^{-1} : B \rightarrow A$  ορίζεται η συνάρτηση που για κάθε  $x \in f(A)$  αντιστοιχεί ένα  $y \in A$  ώστε:

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Και επειδή συνήθως το  $x$  αφορά το  $D_f$

## Ορισμός

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$


# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

■  $f(x) = x + 3$

# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$

# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$

# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$



# Μήπως τα έχετε ξαναδεί?

- $f(x) = x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2!!!$

Λόλας

- ## Συναρτήσεις

# Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

# Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το  $x$ !

# Ικανότητες?

Τι προσπαθούμε να κάνουμε?

- Να βρίσκουμε από πού ήρθαμε, το  $x$ !
- Σύνολο τιμών

## Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

■  $y = x + 3$

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

■  $y = x + 3$

■  $y = 2x$



# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

■  $y = x + 3$

■  $y = 2x$

■  $y = \sqrt{x}$

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

■  $y = x + 3$

■  $y = 2x$

■  $y = \sqrt{x}$

■  $y = e^x$

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

■  $y = x + 3$

■  $y = 2x$

■  $y = \sqrt{x}$

■  $y = e^x$

■  $y = x^2!!!$

# Πώς θα το κάνουμε?

Έχετε  $y$  και ζητάτε  $x$

■  $y = x + 3$

■  $y = 2x$

■  $y = \sqrt{x}$

■  $y = e^x$

■  $y = x^2!!!$

■ Πιο σύνθετες?

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.  
Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Άρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  
 $y = x$

# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Άρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$
- Αν η  $f$  περνά από την ευθεία  $y = x$  τότε και η  $f^{-1}$  περνά, και αντίστροφα.



# Μπορώ?

Σχεδιάστε γραφικά μια 1-1 συνάρτηση.

Ξέροντας ότι τα  $x$  γίνονται  $y$  σχηματίστε την  $f^{-1}$

Άρα:

- Η  $f^{-1}$  είναι συμμετρική της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$
- Αν η  $f$  περνά από την ευθεία  $y = x$  τότε και η  $f^{-1}$  περνά, και αντίστροφα.

## Προσοχή στα spam

Σχεδιάστε συνάρτηση που δεν έχει μόνο στην  $y = x$  κοινά σημεία με την αντίστροφή της.

# Βασική Ιδιότητα

Κρατηθείτε!

■  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in f(D_f)$

# Βασική Ιδιότητα

Κρατηθείτε!

- $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in f(D_f)$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \in D_f$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1$

**1** Να δείξετε ότι είναι 1-1.

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1$

- 1 Να δείξετε ότι είναι 1-1.
- 2 Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ .

**1** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1
- 2 Να βρείτε την  $f^{-1}$
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  με τον άξονα συμμετρίας τους.

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

**1** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται



# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε την  $f^{-1}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  
 $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

**1** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται

# Εξάσκηση

Έστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  
 $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  
 $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$
- 3 Να σχεδιάσετε τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων

# Εξάσκηση

Έστω  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  
 $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$
- 3 Να σχεδιάσετε τις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων
- 4 Για κάθε  $x \geq 1$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(f(x), x)$  των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση  $d$  των σημείων  $A$  και  $B$ .

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ . Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ .

Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$f^3(x) + f(x) - x - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$



# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$f^3(x) + f(x) - x - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$
- 2 Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  και της ευθείας  $y = x$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x$ , με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

**1** Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x$ , με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_f^{-1}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

**1** Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f^{-1}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f^{-1}$
- 3 Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f^{-1}$
- 3 Να λύσετε την εξίσωση  $f(f^{-1}(3x+4) - f^{-1}(-2)) = 1$
- 4 Να λύσετε την ανίσωση  $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

**1** Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται και  $f^{-1} \uparrow$



# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται και  $f^{-1} \uparrow$
- 2 Αν η  $f$  είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η  $f^{-1}$  είναι περιττή

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και  $f^{-1} \uparrow$
- 2 Αν η  $f$  είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η  $f^{-1}$  είναι περιττή
- 3 Αν ισχύει  $f(x) > x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να δείξετε ότι

$$f^{-1}(x) < x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ .

**1** Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(0) = 1$ .

- 1 Να δείξετε ότι η  $f$  η  $f$  αντιστρέφεται
- 2 Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) - f^{-1}(1 - x) < x + 1$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση