Συναρτήσεις

Θεώρημα Bolzano

Κωνσταντίνος Λόλας

Challenge

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ χωρίς να περάσετε από τον άξονα $x'x$

Συμπέρασμα...

Challenge

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ χωρίς να περάσετε από τον άξονα $x'x$

Συμπέρασμα...

Challenge

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ χωρίς να περάσετε από τον άξονα $x'x$

Συμπέρασμα...

Challenge

- Φτιάξτε άξονες
- Σημειώστε ένα σημείο A με θετική τεταγμένη και ένα σημείο B με αρνητική
- Σχηματίστε συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ χωρίς να περάσετε από τον άξονα $x'x$

Συμπέρασμα...

Χωρίς πολλά πολλά...

Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

Παρατηρήσεις

- ΔΕΝ είναι τρόπος επίλυσης εξισώσεων
- ΔΕΝ βρίσκει - εντοπίζει ρίζες
- ΔΕΝ τις μετράει σε πλήθος

Το μόνο που κάνει είναι να σε πληροφορεί ότι ΣΙΓΟΥΡΑ έχει ρίζα μια συνάρτηση. ΜΟΝΟ

Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς x
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς x
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς x
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

Τεστ μνήμης - ικανοτήτων

Πώς επιλύουμε εξισώσεις αλγεβρικά?

- Προφανής ρίζα
- Λύνουμε ως προς x
- Παραγοντοποίηση
- 1-1

Εξάσκηση 1

Να αποδείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.
2. Η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Εξάσκηση 1

Να αποδείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.
2. Η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Εξάσκηση 2

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $x_0^2 + 3x_0 = e^{x_0} + 1$.

Εξάσκηση 3

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Εξάσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-2} + \frac{x^2+1}{x-1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Εξάσκηση 5

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $e^{x_0} + x_0 = 2$

Εξάσκηση 6

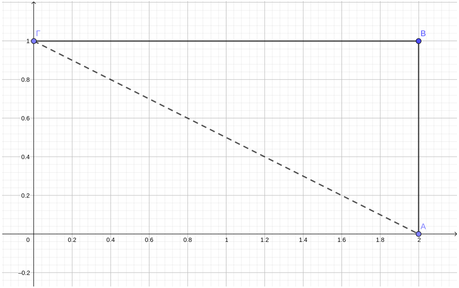
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g στο διάστημα $(1, e)$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

Εξάσκηση 7

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

Εξάσκηση 8

Δίνεται το ορθογώνιο $\mathrm{OAB\Gamma}$ του σχήματος και μία συνεχής συνάρτηση f στο $[0,2]$ της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται στο χωρίο που ορίζει το ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τη διαγώνιο $\mathrm{A\Gamma}$.



Εξάσκηση 9

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x-1}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Εξάσκηση 10

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $-1 < f(x) < 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση