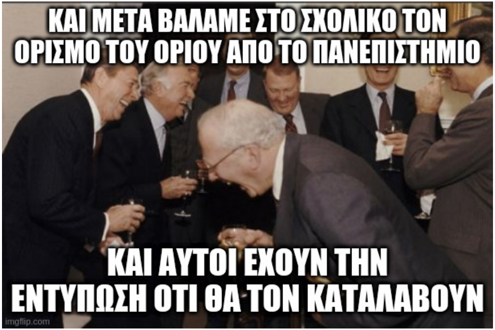
Συναρτήσεις

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Κωνσταντίνος Λόλας

Όριο


ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΒΑΛΑΜΕ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΑΙ ΑΥΤΟΙ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΕΝΤΥΠΩΣΗ ΟΤΙ ΘΑ ΤΟΝ ΚΑΤΑΛΑΒΟΥΝ
imgflip.com

Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν

Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της f στο x_0

Όριο

Το αστέρι μας

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Διαβάζεται ως:

- Το όριο της εφ όταν το χι τείνει στο χιμηδεν
- Το όριο της f στο x_0
- Όταν το x πάει στο x_0, πού πάει η f...

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η f πλησιάζει στο l

Ξεπηδούν οι απορίες

- Τι σημαίνει πλησιάζω στο x_0
  - Δημιουργήστε την γραμμή των πραγματικών αριθμών και πλησιάστε στο $x = 2$
  - Με πόσους τρόπους μπορείτε να πλησιάσετε
- Τι σημαίνει η f πλησιάζει στο l
- Τι σημαίνει οσοδήποτε κοντά

Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) για κατάλληλο α

Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Ας γίνουμε νονοί

Αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Για μια συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, α) για κατάλληλο α

Άρα

Ύπαρξη ορίου

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \end{cases}$$

Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

Περιπτωσάρα

Αν $f(x)=\sqrt{x}$?, ή $f(x)=\ln(-x)$?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Περιπτωσάρα

Αν $f(x) = \sqrt{x}$?, ή $f(x) = \ln(-x)$?

Αν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Όμοια για $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό

Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - k) = 0$

Ιδιότητες

- Το όριο στην περίπτωση που υπάρχει είναι μοναδικό
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - k) = 0$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \iff \lim_{h \to 0} f(x - x_0) = k$

Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε

Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)

Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές

Άρα τι θα κάνουμε?

- Θα περιγράφουμε
- Θα υπολογίζουμε (χωρίς να ξέρουμε γιατί)
- Θα χρησιμοποιούμε ιδιότητες και τεχνικές
- αλλά και πάλι δεν θα καταλαβαίνουμε

Ουσιαστικά τα όρια θα τα υπολογίζουμε εντελώς μηχανικά

Επίδειξη

Στο διάλλειμα όποιος θέλει μπορεί να μάθει τον υπέρτατο ορισμό του ορίου

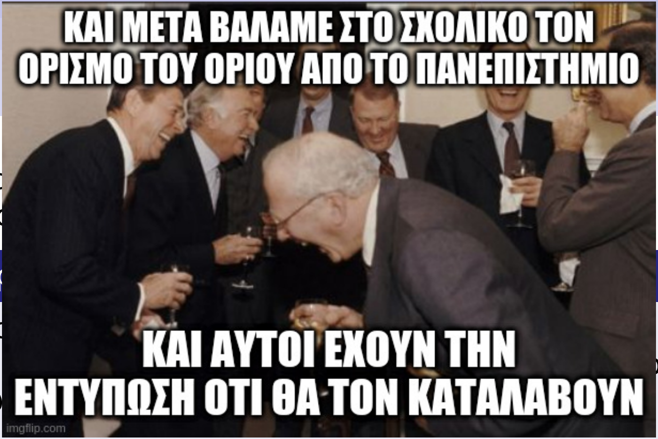
Επίδειξη

Στο διάλλειμα όποιος θέλει μπορεί να μάθει τον υπέρτατο ορισμό του ορίου. Ιδού:

Ορισμός ορίου

Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Λέμε ότι η συνάρτηση τείνει στο $\lambda \in \mathbb{R}$ καθώς το x τείνει στο x_0 όταν:

Επίδειξη



Στο διάλλε
υπέρτατο

Ορισμός ορ

Έστω μια
μορφής $(\alpha,$ ο
$\lambda \in \mathbb{R}$ καθώ

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \lambda| < \epsilon$

Εξάσκηση

Μόνο από το βιβλίο, μόνο γραφικά!

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση