

# Συναρτήσεις

## Συνέπειες Bolzano 1 (Διατήρηση Προσήμου)

Κωνσταντίνος Λόλας

# Ένα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες

# Ένα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει  $f^2(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

# Ένα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει  $f^2(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

# Ένα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες

# Ένα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει  $f^2(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

# Ένα μάθημα μόνο για το πρόσημο?

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε όσες συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις μπορείτε που ισχύει  $f^2(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα...

# Θεώρημα 1

Θεώρημα σταθερού προσήμου

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$  τότε η  $f$  διατηρεί το πρόσημο της σε όλο το  $\Delta$



## Θεώρημα 2

Θεώρημα σταθερού προσήμου (γενίκευση)

Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί το πρόσημό της μεταξύ δύο διαδοχικών της ριζών.

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(0) = 1$  η οποία είναι συνεχής και ισχύει  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = \ln f(x)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει  $f^2(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^2 + 1}{f(0)x + 2}$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής. Αν  $f(3) = -2$  και  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 4$  είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2)x^3 - x + 1$$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων

- $f(x) = 2x^3 - x - 1$
- $f(x) = x - \eta\mu x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

# Εξάσκηση

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f(x) = 2\eta\mu x - 1$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$|f(x)| = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να αποδείξετε ότι  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- Αν  $f(0) = -1$  να βρείτε τον τύπο της  $f$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(0) = 1$  η οποία είναι συνεχής και ισχύει  $f^2(x) = x^2 + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .



# Εξάσκηση

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση  $f$  με  $f(0) = 1$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(2) = 2$  η οποία είναι συνεχής και ισχύει  $f^2(x) + 2 = x + 2f(x)$  για κάθε  $x \in [1, +\infty]$ . Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

# Εξάσκηση

Έστω  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(0) = -1$  η οποία είναι συνεχής και ισχύει  $x^2 + f^2(x) = 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

# Εξάσκηση

Έστω  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει  $4x^2 + f^2(x) = 4$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$

- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$
- Να δείξετε ότι η  $f$  διατηρεί το πρόσημό της στο  $(-1, 1)$
- Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της  $f$ ;
- Αν  $f(0) = 2$ , να βρείτε την  $f$

# Εξάσκηση

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιούν τη σχέση

$$f^2(x) + 2x = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση