

Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Κωνσταντίνος Λόλας

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ ΑΥΤΑ

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ ΑΥΤΑ

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ ΑΥΤΑ

Εξισώσεις! Πάλι?

Μέχρι στιγμής τι είδους εξισώσεις λύναμε?

- ① πολυωνυμικές 1ου βαθμού
- ② πολυωνυμικές 2ου βαθμού
- ③ όσες ανάγονται σε πολυωνυμικές
- ④ ΑΥΤΑ

Γιατί?????

Γιατί ειδικά οι τριγωνομετρικές?

- 1 δεν απομονώνεται το x
- 2 έχουν σχεδόν πάντα άπειρες??? λύσεις
- 3 και άλλα πολλά που δεν θυμάμαι...

Γιατί?????

Γιατί ειδικά οι τριγωνομετρικές?

- 1 δεν απομονώνεται το x
- 2 έχουν σχεδόν πάντα άπειρες??? λύσεις
- 3 και άλλα πολλά που δεν θυμάμαι...

Γιατί?????

Γιατί ειδικά οι τριγωνομετρικές?

- 1 δεν απομονώνεται το x
- 2 έχουν σχεδόν πάντα άπειρες??? λύσεις
- 3 και άλλα πολλά που δεν θυμάμαι...

Λίλιιγο μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτόνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίλιιγο μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίλιιγο μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτόνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίλιιγο μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίλιιγο μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Λίλιιγο μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των ημιτώνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το ημίτονο

Συμπέρασμα

Εξίσωση 1

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta$$

Η εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu\theta$ έχει λύσεις

$$x = 2\kappa\pi + \theta$$

και

$$x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Λίλιγγο ακόμα μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Λίλιγγο ακόμα μαθηματικά

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των συνημιτώνων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτό το συνημίτονο

Εξίσωση 2

$$\sin x = \sin \theta$$

Η εξίσωση $\sin x = \sin \theta$ έχει λύσεις

$$x = 2\kappa\pi + \theta$$

και

$$x = 2\kappa\pi - \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Λίλιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Λίλιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Λίλιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Λίλιιγο ακόμα μαθηματικά υπόσχομαι!

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε μία τιμή στον άξονα των εφαπτομένων
- 3 Βρείτε μία γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 4 Βρείτε δεύτερη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη
- 5 Βρείτε τρίτη γωνία που να έχει αυτή την εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Εξίσωση 3

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

και όμοια γιατί το υποσχέθηκα

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Εξίσωση 3

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

και όμοια γιατί το υποσχέθηκα

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Εξίσωση 3

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

και όμοια γιατί το υποσχέθηκα

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$$

Η εξίσωση $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$ έχει λύσεις

$$x = \kappa\pi + \theta$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Αρα

① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$

② αν δεν είναι

• ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή

• χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή

• θέτουμε για να διασκεδάσουμε με

γενική αντιστοίχηση

και πάλι φτάει στα βήματα 1

• με Q.E.D. ή τα δίνουμε πάλι "αποκατάσταση"

Αρα

① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$

② αν δεν είναι

- ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
- χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
- θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
- γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

Αρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

Αρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

Αρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

Σημειώστε ότι οι παραπάνω βήματα είναι γενικά

Αρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

③ ΜΟΝΟ τότε διώχνουμε τους "προστάτες"

Αρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$
- ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε

και πάμε ξανά στο βήμα 1

- ③ ΜΟΝΟ τότε διώχνουμε τους "προστάτες"

Αρα

- ① τα φέρνουμε πάντα στην μορφή $\eta\mu = \eta\mu$ ή $\sigma\upsilon\nu = \sigma\upsilon\nu...$
 - ② αν δεν είναι
 - ανάγουμε στο 1ο τεταρτημόριο ή
 - χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές (και όχι μόνο) ταυτότητες ή
 - θέτουμε για να διευκολύνουμε και...
 - γενικά σκεφτόμαστε
- και πάμε ξανά στο βήμα 1
- ③ ΜΟΝΟ τότε διώχνουμε τους "προστάτες"

Εξάσκηση 1

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

④ $\sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$

Εξάσκηση 1

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

④ $\sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$

Εξάσκηση 1

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

③ $\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

④ $\sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$

Εξάσκηση 1

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\textcircled{1} \quad \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 = 0$$

Εξάσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

② $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

③ $\epsilon\varphi x + 1 = 0$

④ $(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1)(\epsilon\varphi x + 1) = 0$

Εξάσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

② $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

③ $\epsilon\varphi x + 1 = 0$

④ $(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1)(\epsilon\varphi x + 1) = 0$

Εξάσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

② $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

③ $\epsilon\varphi x + 1 = 0$

④ $(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1)(\epsilon\varphi x + 1) = 0$

Εξάσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\textcircled{1} \quad \eta\mu x = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \varepsilon\varphi x + 1 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad (\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1)(\varepsilon\varphi x + 1) = 0$$

Εξάσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\textcircled{1} (\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$$

$$\textcircled{2} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$$

$$\textcircled{3} 1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

Εξάσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $(\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

② $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$

③ $1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$

Εξάσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\textcircled{1} (\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$$

$$\textcircled{2} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$$

$$\textcircled{3} 1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

Εξάσκηση 4

- ① Να λύσετε την ανίσωση: $\eta\mu x < \sqrt{12}$, στο διάστημα $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$
- ② Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$, $x \in [0, \pi]$

Εξάσκηση 4

- ① Να λύσετε την ανίσωση: $\eta\mu x < \sqrt{12}$, στο διάστημα $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$
- ② Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$, $x \in [0, \pi]$

Εξάσκηση 5

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\varepsilon\varphi 2x = 1$

② $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

③ $\eta\mu 3x = \eta\mu 2x$

Εξάσκηση 5

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\varepsilon\varphi 2x = 1$

② $\sigma\nu\nu(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

③ $\eta\mu 3x = \eta\mu 2x$

Εξάσκηση 5

Να λύσετε τις εξισώσεις

① $\varepsilon\varphi 2x = 1$

② $\sigma\nu\nu(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

③ $\eta\mu 3x = \eta\mu 2x$

Εξάσκηση 6

Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2 x - 1 = 0$

Εξάσκηση 7

Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\nu\nu x = 0$

Εξάσκηση 8

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0$

Εξάσκηση 10

Να λύσετε την ανίσωση $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x > 0$ στο διάστημα $\Delta = (0, \frac{\pi}{2})$

Εξάσκηση 11

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$,
 $x \in (0, \pi)$

Εξάσκηση 12

Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x - \eta\mu x = 1 - \eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}\eta\mu x + 1 = 0$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

Εξάσκηση 14

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(\sigma\nu\nu(x)) = 0$

Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x$
- ③ Να δείξετε ότι $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x$
- ③ Να δείξετε ότι $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

Εξάσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x$

- ① Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια
- ② Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = x$
- ③ Να δείξετε ότι $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 + 1} = \sigma\upsilon\nu x$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση