

Συναρτήσεις

Θεώρημα Rolle

Κωνσταντίνος Λόλας

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιο εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- ① το θεώρημα... γελοίο
- ② οι εφαρμογές... πφφφφ
- ③ οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- ④ όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιο εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- ① το θεώρημα... γελοίο
- ② οι εφαρμογές... πφφφφ
- ③ οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- ④ όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιο εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- ① το θεώρημα... γελοίο
- ② οι εφαρμογές... πφφφφ
- ③ οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- ④ όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

Ηρθε η ώρα για τα δύσκολα

Το πιο εύκολο κεφάλαιο, με τις πιο δύσκολες ασκήσεις!

- ① το θεώρημα... γελοίο
- ② οι εφαρμογές... πφφφφ
- ③ οι αρχικές ασκήσεις... παιχνιδάκι
- ④ όταν είναι όμως στις πανελλαδικές... ΠΑΤΟΣ

But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

- 1 μονοτονία
- 2 ακρότατα
- 3 αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

But Whyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

- 1 μονοτονία
- 2 ακρότατα
- 3 αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

But Whyyyyyyyyyyy!

Χωρίς τον Rolle ξεχάστε

- 1 μονοτονία
- 2 ακρότατα
- 3 αντιπαράγωγο, διαφορικές κτλ

Ωρα για Ζωγραφιές

- ❶ Φτιάξτε άξονες
- ❷ Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- ❸ θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
- ❹ Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- ❺ Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
- ❻ Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- ❶ Φτιάξτε άξονες
- ❷ Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- ❸ θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
- ❹ Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- ❺ Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
- ❻ Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- ❶ Φτιάξτε άξονες
- ❷ Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- ❸ θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
- ❹ Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- ❺ Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
- ❻ Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ωρα για Ζωγραφιές

- 1 Φτιάξτε άξονες
- 2 Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
- 3 Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $f(\alpha) = f(\beta)$
- 4 Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
- 5 Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
- 6 Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Θεώρημα Rolle

Θεώρημα Rolle

Εστω μία συνάρτηση f :

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$

Συμπεράσματα

- ① ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
- ② ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
- ③ έχει περίεργες προϋποθέσεις

Συμπεράσματα

- ① ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
- ② ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
- ③ έχει περίεργες προϋποθέσεις

Συμπεράσματα

- ① ο Rolle όπως και ο Bolzano δεν βρίσκει ρίζες, αλλά βεβαιώνει την ύπαρξη
- ② ο Rolle από την συνάρτηση βγάζει συμπέρασμα για την παράγωγο
- ③ έχει περίεργες προϋποθέσεις

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

- 1 βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
- 2 βρίσκουμε πλήθος ριζών
- 3 βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

- 1 βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
- 2 βρίσκουμε πλήθος ριζών
- 3 βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Πώς θα τον χρησιμοποιούμε?

- 1 βεβαιώνουμε ύπαρξη, αν ο Bolzano δεν μας κάνει
- 2 βρίσκουμε πλήθος ριζών
- 3 βεβαιώνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 ?????????

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Ασκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Ασκηση 24

Εστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Ασκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Ασκηση 24

Εστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Δεν σας πείθω για την δυσκολία έ?

Ασκηση 22

Αν για τους αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ ισχύει $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Ασκηση 24

Εστω συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[2, 3]$ με $2f(3) = 3f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

Και να φανταστείτε ΣΑΣ ΛΕΩ ότι λύνονται με Rolle

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

Ασκήσεις

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- 1 Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$
- 2 Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- ① Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο $\Delta = [0, 3]$
- ② Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

- ① Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$
- ② Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$

Εξάσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

- ① Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$
- ② Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

- ① Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$
- ② Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

- ① Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$
- ② Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

Εξάσκηση 4

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία το πολύ ρίζα

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

- 1 Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
- 2 Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

- 1 Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
- 2 Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

Εξάσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$

- 1 Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Rolle στο $[0, 1]$
- 2 Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο το πολύ ρίζες
- 3 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$g(x) = 2^x \text{ και } h(x) = 2x - x^2 + 1$$

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ και στη συνέχεια, να βρείτε όλα τα $\xi \in (0, \pi)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

Εξάσκηση 7

Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^\beta = \beta^\alpha$, να δείξετε ότι:

- ① Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο $[\alpha, \beta]$
- ② $1 < \alpha < e < \beta$

Εξάσκηση 7

Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^\beta = \beta^\alpha$, να δείξετε ότι:

- ① Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις Rolle στο $[\alpha, \beta]$
- ② $1 < \alpha < e < \beta$

Εξάσκηση 8

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1 – 1

Εξάσκηση 9

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $f'(x) \neq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $1 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = x_0^2 + 1$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Να αποδείξετε ότι:

- Για την συνάρτηση $G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο $[1, 2]$
- Υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(3, 0)$