

Συναρτήσεις

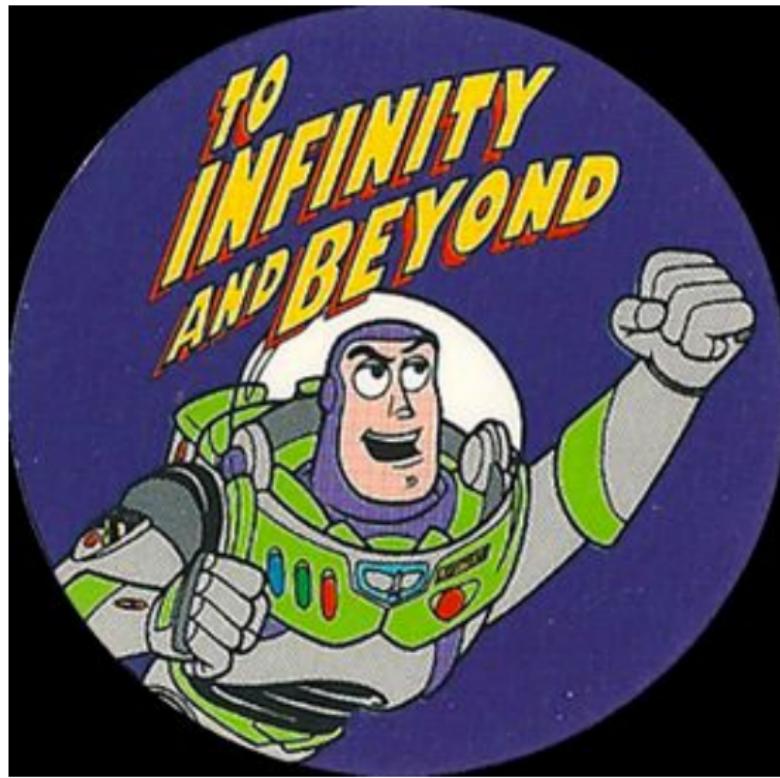
Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Κωνσταντίνος Λόλας,

10^ο ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

6 Νοεμβρίου 2025 — Έκδοση: 2.7

Όταν πάμε εμείς στο άπειρο λοιπόν!



Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Στο προηγούμενο επεισόδιο...

① $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

⑥ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

⑦ με $a > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

⑧ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

⑨ με $0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

⑩ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Συμπέρασμα

Όπως και με τα κανονικά όρια:

① $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$ ή

② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ή

③ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ δεν θα υπάρχει

Μόνο 2 περιπτώσεις

Ασχολούμαστε μόνο με

① $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

② $+\infty - \infty$

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

Δεν είναι όλα τα άπειρα ίδια

- x vs x^2
- x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική

Πιο άπειρο είναι μεγαλύτερο κάνει κουμάντο

- Υπάρχει μεγαλύτερο? το βγάζω κοινό παράγοντα
- Είναι ίσα? κάνω πράξεις και τα διώχνω

Δύο έτοιμα όρια

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και
 $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$

Στο σχήμα ▶ Geogebra φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

Στο σχήμα ▶ Geogebra φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

Στο σχήμα ▶ **Geogebra** φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

Στο σχήμα ▶ **Geogebra** φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 + 3x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x - 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 1$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - x \right)$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - x \right)$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - x \right)$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$

Να βρείτε τα όρια:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x \right)$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a - 1)x^3 - 2x + 1)$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + \mu x^2 - 2}{(\mu - 2)x^2 + 3x + 1}$, είναι πραγματικός αριθμός

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} + \mu x \right)$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^n + x - 1}{x^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}^*$.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f \left(\frac{x-1}{x} \right) \right) = 2, \text{ να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}.$$

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} + f(x) \right)$$

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} + f(x) \right)$$

Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{x f(x) + 3}$$

② Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{x f(x) + 3}$$

② Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{x f(x) + 3}$$

② Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

Έστω $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

① να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{x f(x) + 3}$$

② Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$$

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \sigma v \nu x$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \sigma v \nu x$

Να αποδείξετε ότι:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$

Να αποδείξετε ότι:

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$

Να αποδείξετε ότι:

- ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$
- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$

Να αποδείξετε ότι:

- ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$
- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x - 1} = 1$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta \mu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta \mu x}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2^x + 1}{3^x - 5^x - 2}$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - a^x}{2^x + 3a^x}, a > 0$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

② $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

② $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

② $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \ln x$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}$

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) - x)$$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma v \nu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma v \nu x}{\ln x}$

Να βρείτε τα όρια:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma v \nu x)$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma v \nu x}{\ln x}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$

① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

② Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση