Συναρτήσεις

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Κωνσταντίνος Λόλας

Ήρθε η ώρα για τα ΠΙΟ δύσκολα

Θυμάστε Bolzano $\sim$ ΘΕΤ
Τώρα Rolle $\sim$ ΘΜΤ

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει ”τέτοια” εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει ”τέτοια” εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει ”τέτοια” εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει "τέτοια" εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει ”τέτοια” εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Ώρα για Ζωγραφιές

1. Φτιάξτε άξονες
2. Διαλέξτε δύο διαφορετικές τιμές στον άξονα των x τις α και β
3. Θεωρήστε δύο σημεία μιας συνάρτησης με $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$
4. Φτιάξτε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και μελετήστε την εφαπτόμενή της
5. Εντοπίστε σημεία στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα AB
6. Επαναλάβετε όλη τη διαδικασία, δημιουργώντας συνάρτηση που δεν έχει ”τέτοια” εφαπτόμενη

Συμπέρασμα

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω μία συνάρτηση f:

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (α, β)

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Παρατήρηση

1. O Rolle είναι το ΘΜΤ για $f(\alpha) = f(\beta)$
2. Το ΘΜΤ προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

Παρατήρηση

1. Ο Rolle είναι το ΘΜΤ για $f(\alpha) = f(\beta)$
2. Το ΘΜΤ προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

Παρατήρηση

1. Ο Rolle είναι το ΘΜΤ για $f(\alpha) = f(\beta)$
2. Το ΘΜΤ προκύπτει από το Rolle (μπορείτε να βρείτε ποιά συνάρτηση θα θέσουμε?)

Άρα παίρνουμε ότι από τα δύο θέλουμε!

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να δείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[1,5]$ και να βρείτε τα $\xi \in [1,5]$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{1}{2}$

Εξάσκηση 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(3) - f(1) = 4$$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2$
2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x + 3$

Εξάσκηση 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(3) - f(1) = 4$$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2$
2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x + 3$

Εξάσκηση 3

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει $f(1) - f(0) > 0$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$
2. Αν επιπλέον ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 3

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει $f(1) - f(0) > 0$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) > 0$
2. Αν επιπλέον ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x)$, $x > 0$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$

Εξάσκηση 5

Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f' \uparrow \mathbb{R}$

1. Αν $f(1) = 0$ να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$ για $x > 1$
2. Να δείξετε ότι $f(2x) > f(x) + xf'(x)$ για κάθε $x > 0$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 6

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f'\uparrow\mathbb{R}$

1. Αν $f(1)=0$ να δείξετε ότι $f'(x)>\frac{f(x)}{x-1}$ για $x>1$
2. Να δείξετε ότι $f(2x)>f(x)+xf'(x)$ για κάθε $x>0$
3. Να δείξετε ότι $f(x)+f(5x)>2f(3x)$ για κάθε $x>0$

Εξάσκηση 6

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f' \uparrow \mathbb{R}$

1. Αν $f(1) = 0$ να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$ για $x > 1$
2. Να δείξετε ότι $f(2x) > f(x) + xf'(x)$ για κάθε $x > 0$
3. Να δείξετε ότι $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$ για κάθε $x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1. $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\ln x < x$, $x > 0$
3. $e^{x-1} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$
5. $e^x > \ln x$, $x > 0$
6. $e^x - \ln x > 2$, $x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1. $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\ln x < x$, $x > 0$
3. $e^{x-1} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$
5. $e^x > \ln x$, $x > 0$
6. $e^x - \ln x > 2$, $x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1. $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\ln x < x$, $x > 0$
3. $e^{x-1} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$
5. $e^x > \ln x$, $x > 0$
6. $e^x - \ln x > 2$, $x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1. $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\ln x < x$, $x > 0$
3. $e^{x-1} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$
5. $e^x > \ln x$, $x > 0$
6. $e^x - \ln x > 2$, $x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1. $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\ln x < x$, $x > 0$
3. $e^{x-1} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$
5. $e^x > \ln x$, $x > 0$
6. $e^x - \ln x > 2$, $x > 0$

Εξάσκηση 7

Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

1. $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\ln x < x$, $x > 0$
3. $e^{x-1} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$
4. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$
5. $e^x > \ln x$, $x > 0$
6. $e^x - \ln x > 2$, $x > 0$

Εξάσκηση 8

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(e) = e \ln 2$ και $f'(x) < \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(1) > \ln 2$

Εξάσκηση 9

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη και ισχύουν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) - f(0) > f'(0)$. Να αποδείξετε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 10

Έστω f μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f\left(\sqrt{x^2+1}\right) - f(x) \right]$

Εξάσκηση 10

Έστω f μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f\left(\sqrt{x^2+1}\right) - f(x) \right]$

Εξάσκηση 11

1. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
2. Να δείξετε ότι $2e^5 < e^3 + e^7$

Εξάσκηση 11

1. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
2. Να δείξετε ότι $2e^5 < e^3 + e^7$

Εξάσκηση 12

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(\alpha) + f(3\alpha) = 2f(2\alpha)$, $\alpha > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, 3\alpha)$ ώστε $f''(\xi) = 0$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι:

1. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$
2. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)f(x_2) = 1$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι:

1. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$
2. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)f(x_2) = 1$