

Τριγωνομετρία

Γενική Εξίσωση Ευθείας

Κωνσταντίνος Λόλας

Αχχχχ! Μεγαλώνουμε

Μέχρι στιγμής καμαρώνουμε τις ευθείες σε μία μορφή

$$y = \alpha x + \beta$$

Αν και όχι πάντα (π.χ. $x = a$)

Αχχχχ! Μεγαλώνουμε

Μέχρι στιγμής καμαρώνουμε τις ευθείες σε μία μορφή

$$y = \alpha x + \beta$$

Αν και όχι πάντα (π.χ. $x = a$)

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

- 1 γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
- 2 έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
- 3 άρα...
γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ .

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

- 1 γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
- 2 έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
- 3 άρα...
γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ .

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

- 1 γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
- 2 έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
- 3 άρα...

γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ .

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

- 1 γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
- 2 έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
- 3 άρα...
γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ .

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

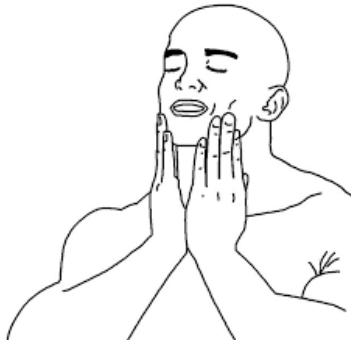
- ① γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
- ② έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
- ③ άρα...
γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ .



ΥΕΑΗΗΗΗΗ!

Θα μας έκανε κάτι τέτοιο?

$$Ax + By + \Gamma = 0, \text{ με } A^2 + B^2 \neq 0$$



Check 1!

Υπάρχει η $y = \alpha x + \beta$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$?
Φυσικά, αρκεί $B \neq 0$

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

$$By = -Ax - \Gamma$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

Check 1!

Υπάρχει η $y = \alpha x + \beta$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$?
Φυσικά, αρκεί $B \neq 0$

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

$$By = -Ax - \Gamma$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

Check 1!

Υπάρχει η $y = \alpha x + \beta$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$?
Φυσικά, αρκεί $B \neq 0$

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

$$By = -Ax - \Gamma$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$



Check 2!

Υπάρχει η $x = \alpha$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$? Φυσικά, αρκεί $B = 0$ και $A \neq 0$

$$Ax + 0y + \Gamma = 0$$

$$Ax = \Gamma$$

$$x = \frac{\Gamma}{A}$$

Check 2!

Υπάρχει η $x = \alpha$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$? Φυσικά, αρκεί $B = 0$ και $A \neq 0$

$$Ax + 0y + \Gamma = 0$$

$$Ax = \Gamma$$

$$x = \frac{\Gamma}{A}$$

Check 2!

Υπάρχει η $x = \alpha$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$? Φυσικά, αρκεί $B = 0$ και $A \neq 0$

$$Ax + 0y + \Gamma = 0$$

$$Ax = \Gamma$$

$$x = \frac{\Gamma}{A}$$



Check 1!

Γράφεται η $y = \alpha x + \beta$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$?

Φυσικά

$$y = \alpha x + \beta$$

$$\alpha x - 1y + \beta = 0$$

Check 1!

Γράφεται η $y = \alpha x + \beta$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$?
Φυσικά

$$y = \alpha x + \beta$$

$$\alpha x - 1y + \beta = 0$$

Check 1!

Γράφεται η $y = \alpha x + \beta$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$?
Φυσικά

$$y = \alpha x + \beta$$

$$\alpha x - 1y + \beta = 0$$



Check!

Γράφεται η $x = \alpha$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$? Φυσικά

$$x = \alpha$$

$$1x + 0y - \alpha = 0$$

Check!

Γράφεται η $x = \alpha$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$? Φυσικά

$$x = \alpha$$

$$1x + 0y - \alpha = 0$$

Check!

Γράφεται η $x = \alpha$ στην $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 \neq 0$? Φυσικά

$$x = \alpha$$

$$1x + 0y - \alpha = 0$$



Μα γιατί να ασχοληθούμε???

Μπορούμε να βρίσκουμε άμεσα το παράλληλο στην ευθεία διάνυσμα

Το παράλληλο 1

Αν $B \neq 0$ γράφεται ως εξής $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{A}$, άρα ένα διάνυσμα παράλληλό της είναι το

$$(-B, A)$$

Το παράλληλο 2

Αν $B = 0$ και $A \neq 0$ τότε ένα παράλληλο είναι το $(0, A)$ (γιατί?) άρα το

$$(-B, A)$$

Γιατί όχι και κάθετα?

Αφού η ευθεία είναι παράλληλη στο $(-B, A)$

Το κάθετο

η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα (A, B)

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

- ❶ ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
- ❷ θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
- ❸ θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
- ❹ θα ξέρουμε κατ' ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

- 1 ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
- 2 θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
- 3 θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
- 4 θα ξέρουμε κατ' ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

- 1 ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
- 2 θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
- 3 θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
- 4 θα ξέρουμε κατ' ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

- ① ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
- ② θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
- ③ θα ξέρουμε κατ' ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
- ④ θα ξέρουμε κατ' ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Εξάσκηση 1

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 2x + 3y - 6 = 0$. Να βρείτε:

- 1 την ευθεία ζ που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$
- 2 τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τους άξονες

Εξάσκηση 1

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 2x + 3y - 6 = 0$. Να βρείτε:

- 1 την ευθεία ζ που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$
- 2 τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τους άξονες

Εξάσκηση 2

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - 3y + 2 = 0 \quad \varepsilon_2 : 2x - y - 1 = 0 \quad \varepsilon_3 : 5x - 3y - 2 = 0$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο

Εξάσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει:

- ① ευθεία
- ② ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
- ③ ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει:

- ① ευθεία
- ② ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
- ③ ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει:

- ① ευθεία
- ② ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
- ③ ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$

Εξάσκηση 4

Δίνονται οι ευθείες:

• $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x - (\mu - 2)y - \mu = 0$

• $\varepsilon_2 : (\mu - 2)x - (\mu + 1)y - 3 = 0$

Να βρείτε το μ ώστε:

① οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται

② $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

③ $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Εξάσκηση 4

Δίνονται οι ευθείες:

- $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x - (\mu - 2)y - \mu = 0$

- $\varepsilon_2 : (\mu - 2)x - (\mu + 1)y - 3 = 0$

Να βρείτε το μ ώστε:

① οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται

② $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

③ $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Εξάσκηση 4

Δίνονται οι ευθείες:

- $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x - (\mu - 2)y - \mu = 0$

- $\varepsilon_2 : (\mu - 2)x - (\mu + 1)y - 3 = 0$

Να βρείτε το μ ώστε:

① οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται

② $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

③ $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών

$$\varepsilon_1 : y = (-2 + \sqrt{3})x$$

και

$$\varepsilon_2 : y = -x$$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $P(1, -1)$ και σχηματίζουν με την ευθεία $\eta : x + y - 1 = 0$ οξεία γωνία ίση με 45°

Εξάσκηση 7

Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση:

$$\varepsilon_\lambda : (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2\lambda = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο A και στη συνέχεια, να βρείτε εκείνη την ευθεία ε που ορίζεται από την εξίσωση αυτή και είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = 2x$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 3y^2 - 2x + 1 = 0$

- 1 Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$
- 2 Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2

Εξάσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 3y^2 - 2x + 1 = 0$

- 1 Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$
- 2 Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση