

# Συναρτήσεις

## Εννοια Πραγματικής Συνάρτησης

Κωνσταντίνος Λόλας

10<sup>ο</sup> ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — Έκδοση: 2.6

# Ορισμοί

## Ορισμός Συνάρτησης

Εστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$  μια διαδικασία (κανόνα)  $f$ , με την οποία κάθε στοιχείο  $x \in A$  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό  $y$ . Το  $y$  ονομάζεται τιμή της  $f$  στο  $x$  και συμβολίζεται με  $f(x)$ .

# Τρόπος ορισμού

- Απλός τύπος

$$f(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R} \quad g(a) = \frac{2}{\eta\mu a}, a \leq 1$$

- Ορισμένη κατά "κλάδους"

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2 \\ \frac{2}{\eta\mu x}, & x > 5 \\ -\sqrt{2}, & x = 3 \end{cases}$$

- Περιγραφικά

# Τρόπος ορισμού

- Απλός τύπος

$$f(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R} \quad g(a) = \frac{2}{\eta\mu a}, a \leq 1$$

- Ορισμένη κατά "κλάδους"

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2 \\ \frac{2}{\eta\mu x}, & x > 5 \\ -\sqrt{2}, & x = 3 \end{cases}$$

- Περιγραφικά

# Τρόπος ορισμού

- Απλός τύπος

$$f(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R} \quad g(a) = \frac{2}{\eta\mu a}, a \leq 1$$

- Ορισμένη κατά "κλάδους"

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2 \\ \frac{2}{\eta\mu x}, & x > 5 \\ -\sqrt{2}, & x = 3 \end{cases}$$

- Περιγραφικά

# Συμβολισμοί

- $f, g, h$
- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$
- $x, y, t \dots$
- $D_f, A_f$
- $x \rightarrow f(x)$
- $f(A) = \{y | y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$

# Πεδίο Ορισμού

- Διαίρεση

$$\frac{a}{b}, b \neq 0$$

- Ρίζες

$$\sqrt[n]{a}, a \geq 0$$

- Λογάριθμοι

$$\ln a, a > 0$$

- Κρυφά

$$e^{\varphi x}, \quad x^x \dots$$

# Πεδίο Ορισμού

- Διαίρεση

$$\frac{a}{b}, b \neq 0$$

- Ρίζες

$$\sqrt[n]{a}, a \geq 0$$

- Λογάριθμοι

$$\ln a, a > 0$$

- Κρυφά

$$e^{\varphi x}, \quad x^x \dots$$



# Πεδίο Ορισμού

- Διαίρεση

$$\frac{a}{b}, b \neq 0$$

- Ρίζες

$$\sqrt[n]{a}, a \geq 0$$

- Λογάριθμοι

$$\ln a, a > 0$$

- Κρυφά

$$e^{\varphi x}, \quad x^x \dots$$

# Πεδίο Ορισμού

- Διαίρεση

$$\frac{a}{b}, b \neq 0$$

- Ρίζες

$$\sqrt[n]{a}, a \geq 0$$

- Λογάριθμοι

$$\ln a, a > 0$$

- Κρυφά

$$\varepsilon\varphi x, \quad x^x \dots$$

# Προαπαιτούμενα

Πρέπει να γνωρίζετε πολύ καλά

- Εξισώσεις
- Ανισώσεις

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

## Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x + a$  με  $f(-1) = 1$

- ① Να βρείτε την τιμή του  $a$ .
- ② Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$ .

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x + a$  με  $f(-1) = 1$

- ① Να βρείτε την τιμή του  $a$ .
- ② Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$ .

2. Για τη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2x + a^2, & x < 3 \\ x - 3 + b^2, & x \geq 3 \end{cases}$ , ισχύει  $f(0) + f(3) = 0$ .

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ② Να υπολογίσετε τα  $a$  και  $b$ .
- ③ Να βρείτε τις τιμές  $f(\pi)$  και  $f(e)$ .



2. Για τη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2x + a^2, & x < 3 \\ x - 3 + b^2, & x \geq 3 \end{cases}$ , ισχύει  $f(0) + f(3) = 0$ .

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ② Να υπολογίσετε τα  $a$  και  $b$ .
- ③ Να βρείτε τις τιμές  $f(\pi)$  και  $f(e)$ .

2. Για τη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2x + a^2, & x < 3 \\ x - 3 + b^2, & x \geq 3 \end{cases}$ , ισχύει  $f(0) + f(3) = 0$ .

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ② Να υπολογίσετε τα  $a$  και  $b$ .
- ③ Να βρείτε τις τιμές  $f(\pi)$  και  $f(e)$ .

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

①  $\frac{1}{x-1}$

②  $\frac{2x}{x^2-3x+2}$

③  $\sqrt{x-1}$

④  $\ln(x-1)$

⑤  $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$

⑥  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

⑦  $\frac{\ln x}{x-1}$

⑧  $\frac{x-1}{\ln x}$

⑨  $\sqrt{\ln x}$

⑩  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

⑪  $\ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

①  $\frac{1}{x-1}$

②  $\frac{2x}{x^2-3x+2}$

③  $\sqrt{x-1}$

④  $\ln(x-1)$

⑤  $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$

⑥  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

⑦  $\frac{\ln x}{x-1}$

⑧  $\frac{x-1}{\ln x}$

⑨  $\sqrt{\ln x}$

⑩  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

⑪  $\ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

①  $\frac{1}{x-1}$

②  $\frac{2x}{x^2-3x+2}$

③  $\sqrt{x-1}$

④  $\ln(x-1)$

⑤  $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$

⑥  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

⑦  $\frac{\ln x}{x-1}$

⑧  $\frac{x-1}{\ln x}$

⑨  $\sqrt{\ln x}$

⑩  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

⑪  $\ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

①  $\frac{1}{x-1}$

②  $\frac{2x}{x^2-3x+2}$

③  $\sqrt{x-1}$

④  $\ln(x-1)$

⑤  $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$

⑥  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

⑦  $\frac{\ln x}{x-1}$

⑧  $\frac{x-1}{\ln x}$

⑨  $\sqrt{\ln x}$

⑩  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

⑪  $\ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \frac{1}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x-1}$$

$$\textcircled{4} \ln(x-1)$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$$

$$\textcircled{6} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\textcircled{7} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\textcircled{8} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\textcircled{9} \sqrt{\ln x}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\textcircled{11} \ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \frac{1}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x-1}$$

$$\textcircled{4} \ln(x-1)$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$$

$$\textcircled{6} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\textcircled{7} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\textcircled{8} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\textcircled{9} \sqrt{\ln x}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\textcircled{11} \ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$$



### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \frac{1}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x-1}$$

$$\textcircled{4} \ln(x-1)$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$$

$$\textcircled{6} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\textcircled{7} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\textcircled{8} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\textcircled{9} \sqrt{\ln x}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\textcircled{11} \ln(\sqrt{x-1} - x + 3)$$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$① \frac{1}{x-1}$$

$$② \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$③ \sqrt{x-1}$$

$$④ \ln(x-1)$$

$$⑤ \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$$

$$⑥ \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$⑦ \frac{\ln x}{x-1}$$

$$⑧ \frac{x-1}{\ln x}$$

$$⑨ \sqrt{\ln x}$$

$$⑩ \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$⑪ \ln(\sqrt{x-1}-x+3)$$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \frac{1}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x-1}$$

$$\textcircled{4} \ln(x-1)$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$$

$$\textcircled{6} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\textcircled{7} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\textcircled{8} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\textcircled{9} \sqrt{\ln x}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\textcircled{11} \ln(\sqrt{x-1}-x+3)$$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \frac{1}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x-1}$$

$$\textcircled{4} \ln(x-1)$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$$

$$\textcircled{6} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\textcircled{7} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\textcircled{8} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\textcircled{9} \sqrt{\ln x}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\textcircled{11} \ln(\sqrt{x-1}-x+3)$$

### 3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

$$\textcircled{1} \frac{1}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x-1}$$

$$\textcircled{4} \ln(x-1)$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x}$$

$$\textcircled{6} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\textcircled{7} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\textcircled{8} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$\textcircled{9} \sqrt{\ln x}$$

$$\textcircled{10} \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\textcircled{11} \ln(\sqrt{x-1}-x+3)$$

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha + \ln \frac{2x}{x+1}$ , για την οποία ισχύει  $f(1) = 0$ .

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και την τιμή του  $\alpha$ .
- ② Να βρείτε τις ρίζες της  $f$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha + \ln \frac{2x}{x+1}$ , για την οποία ισχύει  $f(1) = 0$ .

- ① Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και την τιμή του  $\alpha$ .
- ② Να βρείτε τις ρίζες της  $f$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1 \\ \ln(x - 1), & x > 1 \end{cases}$ .

① Να βρείτε τις τιμές

①  $f(\eta\mu a), a \in \mathbb{R}$

②  $f(x^2 + 1), x \neq 0$

② Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1 \\ \ln(x - 1), & x > 1 \end{cases}$ .

① Να βρείτε τις τιμές

①  $f(\eta\mu a), a \in \mathbb{R}$

②  $f(x^2 + 1), x \neq 0$

② Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1 \\ \ln(x - 1), & x > 1 \end{cases}$ .

① Να βρείτε τις τιμές

①  $f(\eta\mu a), a \in \mathbb{R}$

②  $f(x^2 + 1), x \neq 0$

② Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$