Ορισμοί Γ' Λυκείου

Κωνσταντίνος Λόλας

2025

Ορισμός 1: Συνάρτηση

Εστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

Απόδειξη. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $\in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. □

Ορισμός 2: Γραφική Παράσταση

Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

Απόδειξη. Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. □

Ορισμός 3: Ισότητα Συναρτήσεων

Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Απόδειξη. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

□

Ορισμός 4: Πράξεις Συναρτήσεων

Εστω f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στα A και B αντίστοιχα. Πώς ορίζονται οι πράξεις άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο των συναρτήσεων f και g;

Απόδειξη. Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$, fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f και g, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$ εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρανομαστή g. δηλαδή

$$\{x|x \in A \cap B, g(x) \neq 0\}$$

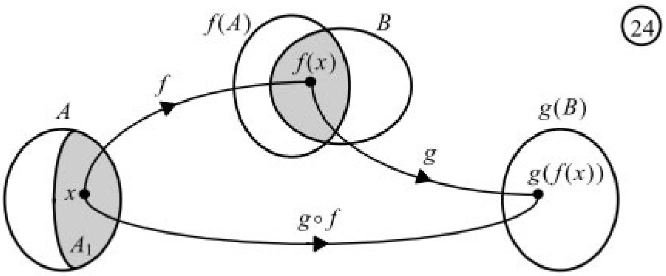
□

Ορισμός 5: Σύνθεση Συναρτήσεων

Εστω f και g δύο συναρτήσεις ορισμένες στα A και B αντίστοιχα. Πώς ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων f και g;

Απόδειξη. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A | f(x) \in \mathrm{B}\}$ □

Ορισμός 6: Γνησίως Αύξουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. □

Ορισμός 7: Γνησίως Φθίνουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. □

Ορισμός 8: Αύξουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$. □

Ορισμός 9: Φθίνουσα Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$. □

Ορισμός 10: Γνησίως Μονότονη Συνάρτηση

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ;

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε αυτό. □

Ορισμός 11: Μέγιστο

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι έχει μέγιστο στο x_0;

Απόδειξη. Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ μέγιστο το $f(x_0)$ αν ισχύει:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

□

Ορισμός 12: Ελάχιστο

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι έχει ελάχιστο στο x_0;

Απόδειξη. Εστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ ελάχιστο το $f(x_0)$ αν ισχύει:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

□

Ορισμός 13: Ακρότατο

Τι ονομάζουμε ακρότατα μιας συνάρτησης f;

Απόδειξη. Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ακρότατα της f. □

Ορισμός 14: 1-1

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται 1-1;

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f λέγεται 1-1 αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

Ορισμός 15: Αντίστροφη Συνάρτηση

Πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση μιας f;

Απόδειξη. Εστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. □

Ορισμός 16: Κριτήριο Παρεμβολής

Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

Απόδειξη. Εστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$,

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

$\square$

Ορισμός 17: Ακολουθία

Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απόδειξη. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. $\square$

Ορισμός 18: Συνέχεια σε σημείο

Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας σε σημείο x_0.

Απόδειξη. Εστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\square$

Ορισμός 19: Συνέχεια σε ανοιχτό διάστημα

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση ? είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) $\square$

Ορισμός 20: Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση ? είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Απόδειξη. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής στο ανοιχτό (α, β) και επιπλέον

- $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$
- $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$

$\square$

Ευρετήριο