Συναρτήσεις

Συνέπειες Bolzano 2 (the rest)

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

Ενα μάθημα μόνο θεωρία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$ που δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο

Συμπέρασμα...

Ενα μάθημα μόνο θεωρία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$ που δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο

Συμπέρασμα...

Ενα μάθημα μόνο θεωρία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$ που δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο

Συμπέρασμα...

Θεώρημα 1

Θεώρημα μέγιστου ελάχιστου

Κάθε συνεχής σε κλειστό διάστημα συνάρτηση f έχει μέγιστο ΚΑΙ ελάχιστο στο Δ.

Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το 2.5

Συμπέρασμα...

Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το 2.5

Συμπέρασμα...

Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το 2.5

Συμπέρασμα...

Δοκιμασία

- Φτιάξτε άξονες
- Σχεδιάστε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με σύνολο τιμών το $[2, 3]$
- Δοκιμάστε να δημιουργήσετε άλλη συνεχή συνάρτηση που να μην περνάει τώρα από το 2.5

Συμπέρασμα...

Θεώρημα 2

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (γενίκευση Bolzano)

Εστω μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = \kappa$ και $f(\beta) = \lambda$ με $\lambda \neq \kappa$. Για κάθε $\eta \in (\kappa, \lambda)$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$

Θεώρημα 3

Θεώρημα εικόνας διαστήματος συνεχούς συνάρτησης

Εστω μια συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$. Η εικόνα $f([\alpha, \beta])$ είναι και πάλι διάστημα.

Φαντασία με Σ-Λ

- Γνησίως αύξουσα σε διάστημα έχει πάντα μέγιστο
- Γνησίως αύξουσα σε κλειστό διάστημα έχει πάντα μέγιστο Πού?

Συμπέρασμα...

Φαντασία με Σ-Λ

- Γνησίως αύξουσα σε διάστημα έχει πάντα μέγιστο
- Γνησίως αύξουσα σε κλειστό διάστημα έχει πάντα μέγιστο Πού?

Συμπέρασμα...

Φαντασία με Σ-Λ

- Γνησίως αύξουσα σε διάστημα έχει πάντα μέγιστο
- Γνησίως αύξουσα σε κλειστό διάστημα έχει πάντα μέγιστο Πού?

Συμπέρασμα...

Θεώρημα 4

Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα

Εστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση f.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια
Η φτάνουμε την τιμή Η πλησιάζουμε συνεχώς

Θεώρημα 4

Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα

Εστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση f.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια

Η φτάνουμε την τιμή Η πλησιάζουμε συνεχώς

Θεώρημα 4

Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα

Εστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση f.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια

Η φτάνουμε την τιμή Η πλησιάζουμε συνεχώς

Θεώρημα 4

Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα

Εστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση f.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια

Η φτάνουμε την τιμή Η πλησιάζουμε συνεχώς

Θεώρημα 4

Θεώρημα συνεχών γνησίως μονότονων συναρτήσεων σε διάστημα

Εστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση f.

- $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$
- $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$
- $f((\alpha, \beta]) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), f(\beta)]$
- $f((\alpha, \beta)) = (\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x))$

Με λίγα λόγια
Η φτάνουμε την τιμή Η πλησιάζουμε συνεχώς

Εξάσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (10, 11)$ ώστε $f(\xi) = 2023$.

Λύση

Εξάσκηση 2

Εστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [1,3] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,3)$ ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3}$$

Λύση

Εξάσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^4(x-3)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο θέσεις ελαχίστων x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ που η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $[x_1, x_2]$.

Λύση

Εξάσκηση 4

Εστω $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon : y = x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από την ευθεία ε περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της C_f.

Λύση

Εξάσκηση 5

Εστω η συνεχής συνάρτηση $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ενα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 4)$ ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(4)}{6}$$

Λύση

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

Εξάσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να βρείτε το $f(\mathrm{B})$ όταν
  - $\mathrm{B} = [0, 1]$
  - $\mathrm{B} = [0, 1)$
  - $\mathrm{B} = (-\infty, 0]$
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, όταν είναι ορισμένη στο $\mathrm{B} = [0, 1]$.

Λύση

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία ρίζα
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 2$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία ρίζα
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 2$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία ρίζα
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 2$

Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η f έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha)-1}{x-x_1} + \frac{f(\beta)-1}{x-x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda+1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές κ και λ.

Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η f έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha)-1}{x-x_1} + \frac{f(\beta)-1}{x-x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda+1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές κ και λ.

Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η f έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha)-1}{x-x_1} + \frac{f(\beta)-1}{x-x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda+1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές κ και λ.

Εξάσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι η η f έχει ακριβώς δύο ρίζες ετερόσημες
3. Αν x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες του ερωτήματος 2., να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\alpha)-1}{x-x_1} + \frac{f(\beta)-1}{x-x_2} = 0$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R} - 0$
4. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda + 1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές κ και λ.

Εξάσκηση 10

Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{x+f(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{f(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)}$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x}{x + f(x)}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$

Εξάσκηση 10

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x}{x + f(x)}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

Εξάσκηση 11

Εστω $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $\mathrm{A} = (0, +\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα
3. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

Εξάσκηση 12

Εστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι $1 - 1$, συνεχής και ισχύει

$$0 < f(0) < f(1)$$

Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

Εξάσκηση 13

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f^3(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

3 Λύσεις Ασκήσεων

- Ασκηση 1
- Ασκηση 2
- Ασκηση 3
- Ασκηση 4
- Ασκηση 5
- Ασκηση 6

Με θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[10, 11]$ με $f(10) = 1024$ και $f(11) = 2048$. Αφού $2023 \in (1024, 2048)$ υπάρχει x_0...

Πίσω στην άσκηση

Με Bolzano ή με μέγιστης ελάχιστης τιμής και ΘΕΤ.

$$f(3) < f(2) < f(1)$$
$$3f(3) < f(1) + f(2) + f(3) < 3f(1)$$
$$f(3) < \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3} < f(1)$$

Πίσω στην άσκηση

Προφανές ελάχιστο στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Ως συνεχής στο $[1,3]$ έχει σίγουρα ΚΑΙ μέγιστο στο $(1,3)$

Πίσω στην άσκηση

Η συνάρτηση ‘απόστασης‘ $f(x) - x$ είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα και έχει σίγουρα μέγιστο

Πίσω στην άσκηση

Ομοια με την Ασκηση 2

Πίσω στην άσκηση

1. Είναι γνησίως αύξουσα άρα $(f(+\infty), f(-\infty))$
2. Προφανώς $[f(0), f(1)]$...

Πίσω στην άσκηση