# Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

## Εκθετική Συνάρτηση

Κωνσταντίνος Λόλας

# Ώρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Ώρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Ώρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

## Ώρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Ώρα ιστορίας

Ξέρουμε όλοι τι σημαίνει

- αριθμός υψωμένος σε φυσικό αριθμό
- αριθμός υψωμένος σε ακέραιο αριθμό
- μάθαμε στην Α Λυκείου, αριθμό υψωμένο σε ρητό
- πάμε για αριθμό υψωμένο σε πραγματικό!

και επειδή σίγουρα δεν θυμάστε...

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\cdot\lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

**Ορισμός**

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\cdot\lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Βασική επανάληψη

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{\kappa+\lambda} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda}$
- $\alpha^{\kappa-\lambda} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}$
- $\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda} = \alpha^{\kappa\cdot\lambda}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$

## Ορισμός

Για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$$

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Πώς υπολογίζουμε λοιπόν

- Φυσικός: $\alpha^x = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}^{\text{x φορές}}$
- Ακέραιος: $\alpha^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- Ρητός: $\alpha^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\alpha^x}$, μόνο για $\alpha \geq 0$
- Άρρητος: ΤΣΟΥΚ! Μόνο με υπολογιστή, προσεγγιστικά!

# Επιστροφή στο σήμερα

Ιδιότητες δυνάμεων με $\alpha$, $\beta$ θετικοί πραγματικοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

- $\alpha^{x_1+x_2} = \alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2}$
- $\alpha^{x_1-x_2} = \dfrac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}$
- $\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$
- $\alpha^x \cdot \beta^x = (\alpha \cdot \beta)^x$
- $\dfrac{\alpha^x}{\beta^x} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x$

# Με τι θα ασχοληθούμε

Συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και εξισώσεις με άγνωστους εκθέτες!!!!

# Πάμε!

**Ορισμός**

Εκθετική συνάρτηση ονομάζεται κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = a^x$, $\alpha > 0$, $a \neq 1$

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε $a$

Geogebra

- Για ποιά $a$ ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε $a$

Geogebra

- Για ποιά $a$ ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε $a$

▸ Geogebra

- Για ποιά $a$ ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε $a$

Geogebra

- Για ποιά $a$ ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε $a$

Geogebra

- Για ποιά $a$ ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Παιχνίδι Geogebra

Ας μελετήσουμε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ για κάθε $a$

Geogebra

- Για ποιά $a$ ορίζεται ως εκθετική?
- Τι γίνεται με την μονοτονία
- Τι γίνεται με τα ακρότατα
- Τι γίνεται με τα $-\infty$ και $+\infty$
- Υπάρχει ένα σταθερό σημείο για όλες?
- Σύνολο τιμών?

# Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται <u>ένα προς ένα</u>.

# Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

# Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

# Ταξίδι στο μέλλον

1. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση πιάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, το πολύ μία φορά!
2. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
3. Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται ένα προς ένα.

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς $x$. Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς $x$. Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς $x$. Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

# Άρα για εξισώσεις!

- Αν μπορούμε να έχουμε $a^x = a^y$ τότε $x = y$
- Αν δεν μπορούμε, ίσως δεν μπορούμε να λύσουμε άμεσα ως προς $x$. Ίσως
  - Θέτουμε
  - Μετασχηματίζουμε
  - ...

# Εξάσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

1. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$
2. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}}, x > 0$

# Εξάσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

1. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$
2. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}}, x > 0$

# Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = e^{x-1}$
3. $f(x) = e^{|x|}$

# Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = e^{x-1}$
3. $f(x) = e^{|x|}$

# Εξάσκηση 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = e^{x-1}$
3. $f(x) = e^{|x|}$

# Εξάσκηση 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (a-1)^x$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha$ για τις οποίες η συνάρτηση $f$:

1. ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$
2. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
3. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

# Εξάσκηση 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (a-1)^x$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha$ για τις οποίες η συνάρτηση $f$:

1. ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$
2. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
3. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

# Εξάσκηση 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (a-1)^x$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha$ για τις οποίες η συνάρτηση $f$:

1. ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$
2. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
3. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

# Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

# Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

# Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

# Εξάσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τη τιμή $f(0)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < 1$
4. Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $e^\alpha - e^\beta < \beta - \alpha$

# Εξάσκηση 5

Να κάνετε το πίνακα προσήμων της συνάρτησης
$f(x) = e^x - 1 + \dfrac{x}{x^2 + 1}$

# Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση $g$ σε μορφή δύναμης
4. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

# Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση $g$ σε μορφή δύναμης
4. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

# Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση $g$ σε μορφή δύναμης
4. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

# Εξάσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
2. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$
3. Να γράψετε τη συνάρτηση $g$ σε μορφή δύναμης
4. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

# Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \dfrac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-1} = \dfrac{8}{27}$

# Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \dfrac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-1} = \dfrac{8}{27}$

# Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \dfrac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-1} = \dfrac{8}{27}$

# Εξάσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^x = 9$
2. $2^{x-1} = \dfrac{1}{8}$
3. $3^x = \sqrt{3}$
4. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-1} = \dfrac{8}{27}$

# Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

# Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

# Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

# Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

# Εξάσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - e = 0$
2. $e^{3x-2} = 1$
3. $e^{-x} - \sqrt{e} = 0$
4. $e^x - e^{-x} = 0$
5. $e^x + 1 = 0$

# Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^{x+1} + 4 \cdot 2^{x-1} = 4$
2. $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

# Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^{x+1} + 4 \cdot 2^{x-1} = 4$
2. $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

# Εξάσκηση 10

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - 2 \cdot e^{-x} + 1 = 0$
2. $3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0$

# Εξάσκηση 10

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x - 2 \cdot e^{-x} + 1 = 0$
2. $3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0$

# Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3^x < 9$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{8}{27}$
3. $e^x - 1 < 0$

# Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3^x < 9$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{8}{27}$
3. $e^x - 1 < 0$

# Εξάσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3^x < 9$
2. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \dfrac{8}{27}$
3. $e^x - 1 < 0$

# Εξάσκηση 12

Να λύσετε την ανίσωση $5^x + 5^{1-x} < 6$

# Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

# Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

# Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

# Εξάσκηση 13

Να αποδείξετε ότι:

1. $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $e^{x^2} - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. $e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$
4. $e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x > 0$

# Εξάσκηση 14

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = e - e^x$
2. $f(x) = \dfrac{e^x - e^2}{x - 1}$

# Εξάσκηση 14

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = e - e^x$
2. $f(x) = \dfrac{e^x - e^2}{x - 1}$

# Εξάσκηση 15

Να λύσετε τα συστήματα

1. $\begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-1} \cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3^{x} - 5^{y} = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^{y} = 6 \end{cases}$

# Εξάσκηση 15

Να λύσετε τα συστήματα

1. $$\begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-1} \cdot 3^{y-3} = 1 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} 3^{x} - 5^{y} = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^{y} = 6 \end{cases}$$

# Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^x + \sqrt{2^{x+4}} - 5 = 0$
2. $2 \cdot 5^{x-2} + 2^x - 12 \cdot 5^{x-3} - 3 \cdot 2^{x-3} = 0$

# Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2^x + \sqrt{2^{x+4}} - 5 = 0$
2. $2 \cdot 5^{x-2} + 2^x - 12 \cdot 5^{x-3} - 3 \cdot 2^{x-3} = 0$

# Εξάσκηση 17

Να λύσετε την ανίσωση $8^x + 4^x - 2 < 0$

# Εξάσκηση 17

1. Να αποδείξετε ότι $e^x > ημx$ για κάθε $x > 0$
2. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = συνx$ στο διάστημα $[0, +\infty)$

# Εξάσκηση 17

1. Να αποδείξετε ότι $e^x > \eta\mu x$ για κάθε $x > 0$
2. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$

# Εξάσκηση 18

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι $t_0$ χρόνια, να δείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_0}}$

# Εξάσκηση 19

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι $20$ γραμμάρια, τότε:

1. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
2. Να υπολογίσετε την ποσότητ που θα έχει απομείνει μετά από $20$ χρόνια
3. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{5}{256}$ γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού

# Εξάσκηση 19

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι $20$ γραμμάρια, τότε:

1. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
2. Να υπολογίσετε την ποσότητ που θα έχει απομείνει μετά από $20$ χρόνια
3. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{5}{256}$ γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού

# Εξάσκηση 19

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 10 χρόνια και η αρχική ποσότητα είναι $20$ γραμμάρια, τότε:

1. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού
2. Να υπολογίσετε την ποσότητ που θα έχει απομείνει μετά από $20$ χρόνια
3. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει $\frac{5}{256}$ γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού