Τριγωνομετρία

Γενική Εξίσωση Ευθείας

Κωνσταντίνος Λόλας

Αχχχχ! Μεγαλώνουμε

Μέχρι στιγμής καμαρώνουμε τις ευθείες σε μία μορφή

$$y = \alpha x + \beta$$

Αν και όχι πάντα (π.χ. $x = a$)

Αχχχχ! Μεγαλώνουμε

Μέχρι στιγμής καμαρώνουμε τις ευθείες σε μία μορφή

$$y = \alpha x + \beta$$

Αν και όχι πάντα (π.χ. $x = a$)

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

1. γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
2. έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
3. άρα...

γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ.

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

1. γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
2. έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
3. άρα...

   γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ.

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

1. γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
2. έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
3. άρα...

γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ.

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

1. γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
2. έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
3. άρα...

   γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ.

One equation to rule them all?

Τι γνωρίζουμε?

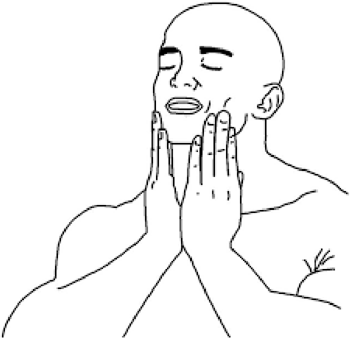
1. γραμμή ονομάζουμε οποιαδήποτε εξίσωση με τουλάχιστον μία μεταβλητή
2. έχουμε δύο περιπτώσεις (λόγω κλίσης λ)
3. άρα...

   γιατί να μην έχουμε ΜΙΑ εξίσωση και ας μην έχουμε λ.

YEAHHHHH!

Θα μας έκανε κάτι τέτοιο?

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0, \text{ με } \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$$



Check 1!

Υπάρχει η $y = \alpha x + \beta$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$?

Φυσικά, αρκεί $\mathrm{B} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma &= 0 \\ \mathrm{B}y &= -\mathrm{A}x - \Gamma \\ y &= -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

Check 1!

Υπάρχει η $y = \alpha x + \beta$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$?
Φυσικά, αρκεί $\mathrm{B} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma &= 0 \\ \mathrm{B}y &= -\mathrm{A}x - \Gamma \\ y &= -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

Check 1!

Υπάρχει η $y = \alpha x + \beta$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$?
Φυσικά, αρκεί $\mathrm{B} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma &= 0 \\ \mathrm{B}y &= -\mathrm{A}x - \Gamma \\ y &= -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

Check 2!

Υπάρχει η $x = \alpha$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$? Φυσικά, αρκεί $\mathrm{B} = 0$ και $\mathrm{A} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + 0y + \Gamma &= 0 \\ \mathrm{A}x &= \Gamma \\ x &= \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

Check 2!

Υπάρχει η $x = \alpha$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$? Φυσικά, αρκεί $\mathrm{B} = 0$ και $\mathrm{A} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + 0y + \Gamma &= 0 \\ \mathrm{A}x &= \Gamma \\ x &= \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

Check 2!

Υπάρχει η $x = \alpha$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$? Φυσικά, αρκεί $\mathrm{B} = 0$ και $\mathrm{A} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x + 0y + \Gamma &= 0 \\ \mathrm{A}x &= \Gamma \\ x &= \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

Check 1!

Γράφεται η $y = \alpha x + \beta$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$?

Φυσικά

$$
\begin{aligned}
y &= \alpha x + \beta \\
\alpha x - 1y + \beta &= 0
\end{aligned}
$$

Check 1!

Γράφεται η $y = \alpha x + \beta$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$?
Φυσικά

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ \alpha x - 1y + \beta &= 0 \end{aligned}$$

Check 1!

Γράφεται η $y = \alpha x + \beta$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$?
Φυσικά

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ \alpha x - 1y + \beta &= 0 \end{aligned}$$

Check 2!

Γράφεται η $x = \alpha$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$? Φυσικά

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha \\
1x + 0y - \alpha &= 0
\end{aligned}
$$

Check 2!

Γράφεται η $x = \alpha$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$? Φυσικά

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ 1x + 0y - \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Check 2!

Γράφεται η $x = \alpha$ στην $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq 0$? Φυσικά

$$x = \alpha$$
$$1x + 0y - \alpha = 0$$

Μα γιατί να ασχοληθούμε???

Μπορούμε να βρίσκουμε άμεσα το παράλληλο στην ευθεία διάνυσμα

Το παράλληλο 1

Αν $\mathrm{B} \neq 0$ γράφεται ως εξής $y = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\Gamma}{\mathrm{A}}$, άρα ένα διάνυσμα παράλληλό της είναι το

$$(-\mathrm{B}, \mathrm{A})$$

Το παράλληλο 2

Αν $\mathrm{B} = 0$ και $\mathrm{A} \neq 0$ τότε ένα παράλληλο είναι το $(0, \mathrm{A})$ (γιατί?) άρα το

$$(-\mathrm{B}, \mathrm{A})$$

Γιατί όχι και κάθετα?

Αφού η ευθεία είναι παράλληλη στο $(-\mathrm{B}, \mathrm{A})$

Το κάθετο

η ευθεία $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα (A, B)

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

1. ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
2. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
3. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
4. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

1. ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
2. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
3. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
4. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

1. ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
2. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
3. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
4. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Από εδώ και πέρα?

Παρατηρήσεις:

1. ξανά τις ασκήσεις από άλλη σκοπιά
2. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την παράλληλη σε διάνυσμα ευθεία
3. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν την κάθετη σε διάνυσμα ευθεία
4. θα ξέρουμε κατ’ ευθείαν τις συμμετρικές ως προς άξονες ευθείες

Εξάσκηση 1

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 2x + 3y - 6 = 0$. Να βρείτε:

1. την ευθεία ζ που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1, 2)$
2. τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τους άξονες

Εξάσκηση 1

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 2x + 3y - 6 = 0$. Να βρείτε:

1. την ευθεία ζ που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1, 2)$
2. τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τους άξονες

Εξάσκηση 2

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - 3y + 2 = 0 \qquad \varepsilon_2 : 2x - y - 1 = 0 \qquad \varepsilon_3 : 5x - 3y - 2 = 0$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο

Εξάσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει:

1. ευθεία
2. ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
3. ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει:

1. ευθεία
2. ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
3. ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$

Εξάσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει:

1. ευθεία
2. ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$
3. ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$

Εξάσκηση 4

Δίνονται οι ευθείες:

- $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x - (\mu - 2)y - \mu = 0$
- $\varepsilon_2 : (\mu - 2)x - (\mu + 1)y - 3 = 0$

Να βρείτε το μ ώστε:

1. οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται
2. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
3. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Εξάσκηση 4

Δίνονται οι ευθείες:

- $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x - (\mu - 2)y - \mu = 0$
- $\varepsilon_2 : (\mu - 2)x - (\mu + 1)y - 3 = 0$

Να βρείτε το μ ώστε:

1. οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται
2. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
3. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Εξάσκηση 4

Δίνονται οι ευθείες:

- $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x - (\mu - 2)y - \mu = 0$
- $\varepsilon_2 : (\mu - 2)x - (\mu + 1)y - 3 = 0$

Να βρείτε το μ ώστε:

1. οι ευθείες ε_1 και ε_2 να τέμνονται
2. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
3. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών

$$\varepsilon_1 : y = (-2 + \sqrt{3})x$$

και

$$\varepsilon_2 : y = -x$$

Εξάσκηση 6

Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{P}(1,-1)$ και σχηματίζουν με την ευθεία $\eta : x + y - 1 = 0$ οξεία γωνία ίση με 45°

Εξάσκηση 7

Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση:

$$\varepsilon_\lambda : (\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2\lambda = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο A και στη συνέχεια, να βρείτε εκείνη την ευθεία ε που ορίζεται από την εξίσωση αυτή και είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = 2x$

Εξάσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 3y^2 - 2x + 1 = 0$

1. Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$
2. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2

Εξάσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 3y^2 - 2x + 1 = 0$

1. Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$
2. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση