

# Συναρτήσεις

## Ακρότατα, Άρτιες - Περιττές

Κωνσταντίνος. Λόλας

# Ακρότατα Συναρτήσεων

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  είναι με πεδίο ορισμού το  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_0 \in A$  το  $f(x_0)$ , όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

# Ακρότατα Συναρτήσεων

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  είναι με πεδίο ορισμού το  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_0 \in A$  το  $f(x_0)$ , όταν:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  είναι με πεδίο ορισμού το  $A$ , λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 \in A$  το  $f(x_0)$ , όταν:

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

# Ο τσομπάνης και τα πρόβατα

Στάνη, πλαγιά, φράχτης, πρόβατα, τσομπάνης...

# Ο τσομπάνης και τα πρόβατα

Στάνη, πλαγιά, φράχτης, πρόβατα, τσομπάνης...

## Προσοχή

- Ποιό είναι το πρόβατο στο ψηλότερο σημείο?
- Ποιό είναι το ψηλότερο σημείο της στάνης?
- Ποιό σημείο του φράχτη...

Φράγμα(άνω/κάτω),  $\sup/\inf$ ,  $\max/\min$

## Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο

## Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο

# Quiz time $\Sigma$ - $\Lambda$

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα



# Quiz time $\Sigma$ - $\Lambda$

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο

# Quiz time $\Sigma$ - $\Lambda$

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα

# Quiz time Σ-Λ

Μια συνάρτηση:

- έχει πάντα μέγιστο
- έχει πάντα ακρότατο
- έχει το πολύ ένα
- μπορεί να έχει μέγιστο και όχι ελάχιστο
- μπορεί να έχει 3 ακριβώς ελάχιστα
- μπορεί να έχει άπειρα

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|$



# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x)$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

# Λίγο ιστορία

Γνωστά ακρότατα, τυπικών συναρτήσεων:

- $f(x) = x^2, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, f(x) \geq f(-\frac{\beta}{2\alpha})$
- $f(x) = |x|, f(x) \geq f(0)$
- $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0, f(x) \geq f(1)$
- $f(x) = \eta\mu(2x), f(x) \geq f(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), f(x) \leq f(k\pi + \frac{\pi}{4})$

# Συμμετρίες...

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  είναι άρτια σε ένα διάστημα  $\Delta$  αν για κάθε  $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = f(x)$$

# Συμμετρίες...

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  είναι άρτια σε ένα διάστημα  $\Delta$  αν για κάθε  $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = f(x)$$

## Ορισμός

Μία συνάρτηση  $f$  είναι περιττή σε ένα διάστημα  $\Delta$  αν για κάθε  $x \in \Delta$

$$-x \in \Delta \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

# Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση



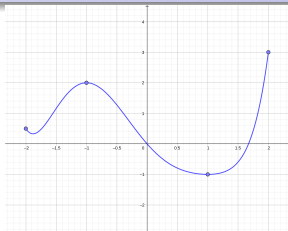
# Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση

# Quiz Time

- Υπάρχει τουλάχιστον μια άρτια συνάρτηση
- Υπάρχει τουλάχιστον μία περιττή συνάρτηση
- Υπάρχει συνάρτηση που δεν είναι άρτια ούτε περιττή

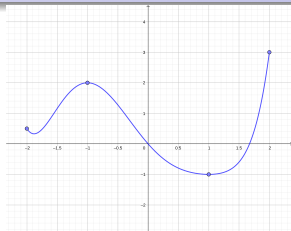
# Εξάσκηση



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$

- 1 Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της  $f$

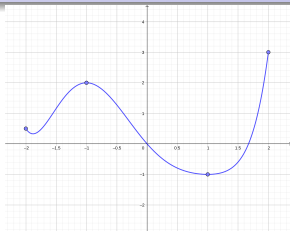
## Εξάσκηση



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$

- 1 Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της  $f$
- 2 Να δείξετε ότι  $-1 \leq f(x) \leq 3$  για κάθε  $x \in [-2, 2]$

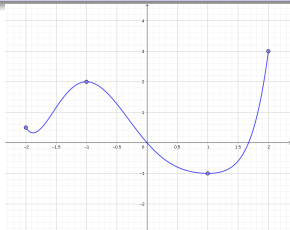
## Εξάσκηση



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$

- 1 Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της  $f$
- 2 Να δείξετε ότι  $-1 \leq f(x) \leq 3$  για κάθε  $x \in [-2, 2]$
- 3 Να δείξετε ότι  $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$ ,  $\alpha, \beta \in [-2, 2]$

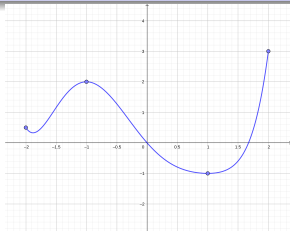
## Εξάσκηση



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$

- ❶ Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της  $f$
- ❷ Να δείξετε ότι  $-1 \leq f(x) \leq 3$  για κάθε  $x \in [-2, 2]$
- ❸ Να δείξετε ότι  $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$ ,  $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
- ❹ Να λύσετε
  - ❶ Την εξίσωση  $f(x) = 1$

## Εξάσκηση



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$

- ❶ Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων και τα ακρότατα της  $f$
- ❷ Να δείξετε ότι  $-1 \leq f(x) \leq 3$  για κάθε  $x \in [-2, 2]$
- ❸ Να δείξετε ότι  $f(\alpha) - f(\beta) \leq 4$ ,  $\alpha, \beta \in [-2, 2]$
- ❹ Να λύσετε
  - ❶ Την εξίσωση  $f(x) = 1$
  - ❷ Την ανίσωση  $f(x) > -1$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

1  $|e^x - 1|$



# Εξάσκηση

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

1  $|e^x - 1|$

2  $f(x) = (e^x - 1)^2(x - 1)^4$

# Εξάσκηση

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

1  $|e^x - 1|$

2  $f(x) = (e^x - 1)^2(x - 1)^4$

3  $f(x) = x^2 - 2x - 5$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . Από σημείο  $M$  της  $C_f$  φέρνουμε παράλληλες ως προς τους άξονες  $y'y$  και  $x'x$  που τέμνουν τον  $x'x$  στο  $A$  και τον  $y'y$  στο  $B$ . Να βρείτε τη θέση του σημείου  $M$  για το οποίο η περίμετρος του ορθογωνίου  $OAMB$  γίνεται ελάχιστη (όπου  $O$  η αρχή των αξόνων).

## Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, με  $f(0) = 1$ , για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f(x))$  και  $B(f(x), x)$ . Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$ .

# Εξάσκηση

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

❶ Να δείξετε ότι  $f(x) \geq 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

# Εξάσκηση

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

- 1 Να δείξετε ότι  $f(x) \geq 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- 2 Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + (x - 1)^2 = 2$

# Εξάσκηση

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 2.

- 1 Να δείξετε ότι  $f(x) \geq 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- 2 Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + (x - 1)^2 = 2$
- 3 Αν ισχύει  $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 4$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

## Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x - 2$ . Να λύσετε τις ανισώσεις:

1  $x < \frac{2}{x^4+1}$



## Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x - 2$ . Να λύσετε τις ανισώσεις:

❶  $x < \frac{2}{x^4+1}$

❷  $x^4 - \frac{2}{x} > -1$ , στο  $(0, +\infty)$

## Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x - 2$ . Να λύσετε τις ανισώσεις:

- 1  $x < \frac{2}{x^4+1}$
- 2  $x^4 - \frac{2}{x} > -1$ , στο  $(0, +\infty)$
- 3  $\ln^5 x + \ln x < 2$

## Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x - 2$ . Να λύσετε τις ανισώσεις:

- 1  $x < \frac{2}{x^4+1}$
- 2  $x^4 - \frac{2}{x} > -1$ , στο  $(0, +\infty)$
- 3  $\ln^5 x + \ln x < 2$
- 4  $f(2x - 1) + 2 > x^5 + x$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- 1 Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- 1 Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- 2 Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(x + 1)$

- 1 Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- 2 Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$
- 3 Να λύσετε την ανίσωση  $x^4 - x^2 < \frac{x^2+1}{x^4+1}$

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- 1 Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης  $f$  και τη θέση που το παρουσιάζει

# Εξάσκηση

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- 1 Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης  $f$  και τη θέση που το παρουσιάζει
- 2 Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x^2 + 1} = \sin x$



# Εξάσκηση

Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

❶  $f(x) = x \eta \mu \frac{1}{x}$

# Εξάσκηση

Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

1  $f(x) = x \eta \mu \frac{1}{x}$

2  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, x \in (-1, 1)$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

❶ Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$

# Εξάσκηση

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- 1 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- 2 Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση με  $f(1) = 2$  η οποία είναι γνησίως μονότονη και περιττή. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x-1) + f(x-3) < 5(2-x)$$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία περιττή συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

1 το  $f(0)$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία περιττή συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- 1 το  $f(0)$
- 2 τον τύπο της συνάρτησης  $f$

# Εξάσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή



Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση