Συναρτήσεις

Κανόνας De L' Hospital

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Ας τελειώσουμε με τα όρια ΕΠΙΤΕΛΟΥΣ

Αφήσαμε κάποια όρια

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $1^{+\infty}$
- $(+\infty)^0$
- 0^0

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \Longrightarrow \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \Longrightarrow e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$

  $(+\infty)^{0} \Longrightarrow e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$

  $0^{0} \Longrightarrow e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^{0} \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^{0} \implies e^{0 \ln 0} = e^{-\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{\ldots}$ [illegible]

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ενας για όλους και όλοι για έναν

Θα ήταν τέλεια αν κατέληγαν όλες οι περιπτώσεις σε μία!!!!

- $0 \cdot \infty \implies \frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- $1^{+\infty} \implies e^{+\infty \ln 1} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $(+\infty)^0 \implies e^{0 \ln \infty} = e^{+\infty \cdot 0}$
- $0^0 \implies e^{0 \ln 0} = e^{+\infty \cdot 0}$

Ορισμός

Κανόνας De L' Hospital

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή $\dfrac{0}{0}$, με $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ τότε αν

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \in \bar{\mathbb{R}}$$

όπου $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L’ Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Εχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως ΞΑΝΑ DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L’ Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Εχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως ΞΑΝΑ DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L' Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Εχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως ΞΑΝΑ DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Παρατηρήσεις

Ο κανόνας De L’ Hospital δεν είναι απλό παιχνίδι!

- Εχει προϋποθέσεις!
- Αν προκύπτει πάλι απροσδιοριστία ίσως ΞΑΝΑ DLH
- Ισχύουν και για πλευρικά
- Δεν ισχύει το αντίστροφο!

Τα γνωστά!

Ας αποδείξουμε τα γνωστά όρια:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}$

Τα γνωστά!

Ας αποδείξουμε τα γνωστά όρια:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$

Πώς θα το γράφουμε!

Κανονικά θα έπρεπε... αλλά! π.χ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1}=1$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7+x-2}{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7+x-2}{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7+x-2}{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^7+x-2}{x^2-x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x-e^x)$
2. $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x-1)$
3. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-3^x}{x-\ln x}$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x-e^x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-3^x}{x-\ln x}$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x - e^x)$
2. $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x - 1)$
3. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 3^x}{x - \ln x}$

4. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$
2. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

4. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)$
2. $\lim\limits_{x \to -0} (x \ln x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^{x^3}}$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)$
2. $\lim\limits_{x \to -0} (x \ln x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{xe^{x^3}}$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \to -\infty} (xe^x)$
2. $\lim_{x \to -0} (x \ln x)$
3. $\lim_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^{x^3}}$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)$
2. $\lim\limits_{x \to -0} (x \ln x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{xe^{x^3}}$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} x^x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} (1+x)^{\sigma\varphi x}$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} x^x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} (1+x)^{\sigma\varphi x}$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} x^x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} (1+x)^{\sigma\varphi x}$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 0} (\eta\mu x \cdot \ln x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left[(e^x - 1)\eta\mu \frac{1}{x}\right]$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \to 0} (\eta\mu x \cdot \ln x)$
2. $\lim_{x \to 0} \left[(e^x - 1)\eta\mu \frac{1}{x}\right]$

8. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2(\sigma\upsilon\nu x-1)^3}{\eta\mu^4 x\cdot\ln(1+x)}$$

9. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1) = f'(1) = 0$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x+\ln x)}{x-1}$

10. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0)=f'(0)=0$ και f”(0)=2. Εστω $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

1. Να βρείτε την $g'(0)$
2. Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0=0$

10. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 0$ και f”(0)=2. Εστω $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

1. Να βρείτε την $g'(0)$
2. Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

11. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x)$$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση