Συναρτήσεις

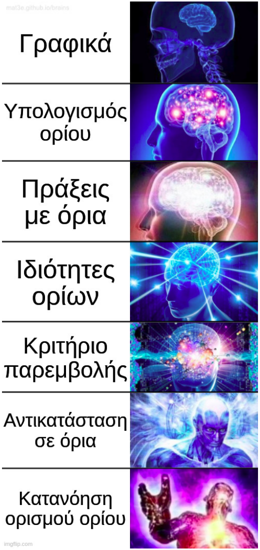
Πράξεις ορίων

Κωνσταντίνος Λόλας

10^o ΓΕΛ Θεσσαλονίκης

5 Ιουλίου 2025 — **Έκδοση:** 2.6

Υπολογισμοί ορίων



Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Πρόσημο

Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Διάταξη

Θεώρημα 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Από κάπου να πιαστούμε?

- $\lim_{x \to x_0} x = x_0$
- $\lim_{x \to x_0} c = c$

Και υπολογίζουμε...

ΜΟΝΟ αν υπάρχουν τα όρια των f και g τότε

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ εννοείται ότι $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εννοείται ότι $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim_{x \to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Τα προφανή όρια!

Από τα προηγούμενα...

- $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, για $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, η πρώτη σας απόδειξη!!!
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ με λίγη προσοχή
- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x_0)$

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R}$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R}$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$

Θεώρημα 3ο

Sandwich, Παρεμβολής...

Εστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R}$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$

Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1,$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Σχεδόν τελειώσαμε

Και λίγα άγνωστα όρια

- $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1,$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Ολα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

1. Θέτουμε $u = g(x)$
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $k = \lim_{u \to u_0} f(u)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

Ολα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

1. Θέτουμε $u = g(x)$
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $k = \lim_{u \to u_0} f(u)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

Ολα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$?

1. Θέτουμε $u = g(x)$
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $k = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε προφανώς $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

Ολα τα είχε η Μαριωρή...

Τι γίνεται με τη σύνθεση $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$?

1. Θέτουμε $u = g(x)$
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει!) το $k = \lim_{u \to u_0} f(u)$

Τότε αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \text{ και } \lim_{x \to 2} g(x) = 2$$

να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 2} (3f(x) + f(x) \cdot g(x))$

2. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-2x}{2x^2-5x+3}$
3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^3-7x+6}$
4. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2-x}\right)$

2. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-2x}{2x^2-5x+3}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^3-7x+6}$
4. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x^2-x}\right)$

2. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-2x}{2x^2-5x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^3-7x+6}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2-x}\right)$

2. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x - 2}{x^2 - x} \right)$

3. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$

4. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-2, & 0<x\leq 1 \\ 3x-4, & 1<x<2 \\ 2x-1, & x>2 \end{cases}$. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

4. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

5. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{2x - 4}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$.

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
2. Να βρείτε το a ώστε $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

5. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{2x - 4}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$.

1. Να βρείτε το $\lim_{x \to 2} f(x)$
2. Να βρείτε το a ώστε $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

6. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \beta, & x < 0 \\ \alpha\sqrt{x+1} + 2\beta, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε τα α και $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

7. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

1. $\lim_{x\to 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$

7. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

1. $$\lim_{x\to 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$
2. $$\lim_{x\to 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

1. Αν ισχύει $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
2. Αν ισχύει $|f(x) - 2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
3. Αν ισχύει $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 f(x)\right)$

8. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

1. Αν ισχύει $3x-2-x^2 \leq f(x) \leq x^2-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
2. Αν ισχύει $|f(x)-2| \leq x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
3. Αν ισχύει $f(\mathbb{R})=(0,1)$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f(x)\right)$

8. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία:

1. Αν ισχύει $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
2. Αν ισχύει $|f(x) - 2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
3. Αν ισχύει $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 f(x)\right)$

9. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, όταν ισχύει:

$$2x-3x^2\leq f(x)\leq x^4+2x$$

10. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

11. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\eta\mu\dfrac{1}{x} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$

11. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\eta\mu\dfrac{1}{x} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$

11. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x\eta\mu\dfrac{1}{x} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$

11. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x^2$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \varepsilon\varphi x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\eta\mu\dfrac{1}{x} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$

12. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\eta\mu x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

12. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\eta\mu x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

12. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\eta\mu x}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x}$
4. $\lim_{x \to 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x}\right)$

12. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\eta\mu x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

13. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \eta\mu x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(\pi - x)}{x^2 + x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x + 3x}{2x - \eta\mu x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

13. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \eta\mu x}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu(\pi - x)}{x^2 + x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x + 3x}{2x - \eta\mu x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1} - 1}$

13. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\eta\mu x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(\pi-x)}{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x+3x}{2x-\eta\mu x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

13. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \eta\mu x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(\pi - x)}{x^2 + x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x + 3x}{2x - \eta\mu x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1} - 1}$

14. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$
2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$$
3. $$\lim_{x\to \pi} \frac{\eta\mu x}{\pi - x}$$
4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$$

14. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 5x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\eta\mu x}{\pi - x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$

14. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 5x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\eta\mu x}{\pi - x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$

14. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 5x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\eta\mu x}{\pi - x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$

15. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - \sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2}{x - 2}$

15. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}$

16. Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2\eta\mu f(x)}{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu f(x)}$

17. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 2$.

Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(5x) - 1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x) - f(2x)}{x}$

17. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = 2$.

Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(5x)-1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(3x)-f(2x)}{x}$

18. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}=2$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-1}{h}$
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

18. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = 2$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{h\to 0} \frac{f(1-2h)-1}{h}$
2. $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

19. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2-x+1)-3}{x-1}$

20. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ όταν:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-x^2+3x\right)=3$ και $x_0=2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=3$ και $x_0=2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x}{x}=2$ και $x_0=0$

20. Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ όταν:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-x^2+3x\right)=3$ και $x_0=2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=3$ και $x_0=2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x}{x}=2$ και $x_0=0$

20. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ όταν:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) - x^2 + 3x\big) = 3$ και $x_0 = 2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - 1}{x - 2} = 3$ και $x_0 = 2$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) + \eta\mu x}{x} = 2$ και $x_0 = 0$

21. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^2(x) + xf(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta\mu^2 x}$

21. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1.$

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^2(x) + xf(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta\mu^2 x}$

22. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt{|x| - |\eta\mu x|}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x - x^2}$

22. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt{|x| - |\eta\mu x|}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x - x^2}$

23. Να λύσετε την εξίσωση $|\eta\mu x| = |\pi - x|$

24.

1. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(x^2 + x) - x^2 = x$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3\frac{\eta\mu x}{x}$. Να αποδείξετε ότι

$$2x - 3 < f(x) < 2x + 3 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

24.

1. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(x^2 + x) - x^2 = x$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3\frac{\eta\mu x}{x}$. Να αποδείξετε ότι

$$2x - 3 < f(x) < 2x + 3 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

25. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

25. Να υπολογίσετε τα όρια

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$