Συναρτήσεις

Παράγωγος

Κωνσταντίνος Λόλας

Αν είσαι τεμπέλης!

Γιατί να ψάχνουμε την κλίση σε κάθε σημείο ξεχωριστά?
Ας το βρούμε για όλα και να κάνουμε αντικατάσταση

Αν είσαι τεμπέλης!

Γιατί να ψάχνουμε την κλίση σε κάθε σημείο ξεχωριστά?
Ας το βρούμε για όλα και να κάνουμε αντικατάσταση

Συνάρτηση παράγωγος

Παράγωγος

Έστω μια συνάρτηση f. Η συνάρτηση παράγωγος της f θα είναι η συνάρτηση που απεικονίζει το x_0 στο $f'(x_0)$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = c$

$c' = 0$

$f(x) = x$

$x' = 1$

$f(x) = x^2$

$(x^2)' = 2x$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = c$

$c' = 0$

$f(x) = x$

$x' = 1$

$f(x) = x^2$

$(x^2)' = 2x$

Παράδειγμα

Ας παίξουμε:

$f(x) = c$

$c' = 0$

$f(x) = x$

$x' = 1$

$f(x) = x^2$

$(x^2)' = 2x$

Αποδείξεις

$f+g$

$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

$f-g$

$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$

$f\cdot g$

$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

f/g

$(f(x)/g(x))'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$f(g)$

$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$

Αποδείξεις

$f+g$

$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

$f-g$

$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$

$f\cdot g$

$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

f/g

$(f(x)/g(x))'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$f(g)$

$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$

Αποδείξεις

$f + g$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$f - g$

$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

$f \cdot g$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

f/g

$(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$f(g)$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Αποδείξεις

$f+g$

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

$f-g$

$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

$f\cdot g$

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

f/g

$(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$f(g)$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Αποδείξεις

$f + g$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$f - g$

$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

$f \cdot g$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

f/g

$(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$f(g)$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0, όταν:

1. $f(x) = x^5$, $x_0 = -1$
2. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0, όταν:

1. $f(x) = x^5$, $x_0 = -1$
2. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \alpha^3$
3. $f(x) = x^3 + \eta\mu x + \ln 2$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \alpha^3$
3. $f(x) = x^3 + \eta\mu x + \ln 2$

Εξάσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \alpha^3$
3. $f(x) = x^3 + \eta\mu x + \ln 2$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 2\ln x$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$
4. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \alpha \ln x - \beta$
5. $f(x) = x^3(2x^2 - 5)$
6. $f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
2. $f(x) = 3x^2 \ln x$
3. $f(x) = (x^2+1)e^x$
4. $f(x) = xe^x \eta\mu x$

Εξάσκηση 5

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}\eta\mu x$

Εξάσκηση 6

Έστω $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f(0) = g(0) = 1$ και $f'(0) = 2$, $g'(0) = 3$.

1. Να βρείτε την $(f \cdot g)'(0)$
2. Αν $h(x) = \eta\mu x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $h'(0)$

Εξάσκηση 6

Έστω $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f(0) = g(0) = 1$ και $f'(0) = 2$, $g'(0) = 3$.

1. Να βρείτε την $(f \cdot g)'(0)$
2. Αν $h(x) = \eta\mu x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $h'(0)$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{\ln x}{x}$
2. $\frac{x}{x^2+1}$
3. $\frac{x}{e^x}$
4. $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{\ln x}{x}$
2. $\frac{x}{x^2+1}$
3. $\frac{x}{e^x}$
4. $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{\ln x}{x}$
2. $\frac{x}{x^2+1}$
3. $\frac{x}{e^x}$
4. $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{\ln x}{x}$
2. $\frac{x}{x^2+1}$
3. $\frac{x}{e^x}$
4. $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 7

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{\ln x}{x}$
2. $\frac{x}{x^2+1}$
3. $\frac{x}{e^x}$
4. $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$
5. $\varepsilon\varphi x - x$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{1}{x^2}$
2. $\frac{1}{2\ln x}$
3. $\frac{x^2+2x-3}{x}$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{1}{x^2}$
2. $\frac{1}{2\ln x}$
3. $\frac{x^2+2x-3}{x}$

Εξάσκηση 8

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\frac{1}{x^2}$
2. $\frac{1}{2\ln x}$
3. $\frac{x^2+2x-3}{x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 9

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\eta\mu(2x-5)$
2. $\sigma\upsilon\nu(2x)$
3. e^{-x}
4. $e^{\frac{1}{x}}$
5. $2\sqrt{\ln x}$

Εξάσκηση 10

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\ln \sqrt{x^2+1}$
2. $\ln(\sqrt{x^2+1}) - x$

Εξάσκηση 10

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $\ln \sqrt{x^2+1}$
2. $\ln(\sqrt{x^2+1}) - x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2+2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2+2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2+2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2+2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2+2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2+2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 11

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $(x^2+2)^3$
2. $\eta\mu^3 x$
3. $\ln^2(x^2+2)$
4. $\eta\mu^2 3x$

Εξάσκηση 12

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

1. $g(x) = f(x + \eta\mu x)$
2. $g(x) = f^2(-x)$

Εξάσκηση 13

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

1. $g(x) = f(x + \eta\mu x)$
2. $g(x) = f^2(-x)$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Εξάσκηση 14

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
2. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Εξάσκηση 15

Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Εξάσκηση 15

Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Εξάσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

Να βρείτε την $f''(x)$

Εξάσκηση 17

Έστω $x, y, \theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις με μεταβλητή το χρόνο t, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f(t) = t^2 + x(t)y(t)$
2. $f(t) = \ln x(t) + x^2(t)$
3. $f(t) = \varepsilon\varphi\theta(t)$

Εξάσκηση 17

Έστω $x, y, \theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις με μεταβλητή το χρόνο t, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f(t) = t^2 + x(t)y(t)$
2. $f(t) = \ln x(t) + x^2(t)$
3. $f(t) = \varepsilon\varphi\theta(t)$

Εξάσκηση 17

Έστω $x, y, \theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τρεις συναρτήσεις με μεταβλητή το χρόνο t, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f(t) = t^2 + x(t)y(t)$
2. $f(t) = \ln x(t) + x^2(t)$
3. $f(t) = \varepsilon\varphi\theta(t)$

Εξάσκηση 18

Αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και ισχύουν $y(t) = x^2(t)$, $y'(t) = 2x'(t)$ και $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$, να δείξετε ότι $x(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$.

Εξάσκηση 19

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x, y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με μεταβλητή το χρόνο t, για τις οποίες ισχύει $y^2(t) = 3 + x^2(t)$, για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$ είναι $x(1) = 1$, $x'(1) = 4$ και $y(1) > 0$, να βρείτε το $y'(1)$.

Εξάσκηση 20

1. Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού, για το οποίο ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(2) = 7$ και $f''(2016) = 6$
2. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύουν: $P(0) = 4$ και $8P(x) = (P'(x) \cdot P''(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 20

1. Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού, για το οποίο ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(2) = 7$ και $f''(2016) = 6$
2. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύουν: $P(0) = 4$ και $8P(x) = (P'(x) \cdot P''(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 21

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι:

1. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah)-f(x)}{h} = af'(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$
2. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} = 2f'(x)$

Εξάσκηση 21

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι:

1. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+ah)-f(x)}{h} = af'(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$
2. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} = 2f'(x)$

Εξάσκηση 22

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x) + e^{f(x)} = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
2. Να δείξετε ότι $f'(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 22

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x) + e^{f(x)} = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
2. Να δείξετε ότι $f'(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 23

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 1$

$$f(x) \cdot f'(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής
2. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = x$, για κα΄θε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 23

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 1$

$$f(x) \cdot f'(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής
2. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = x$, για κα΄θε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 23

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 1$

$$f(x) \cdot f'(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής
2. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
3. Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = x$, για κα΄θε $x \in \mathbb{R}$

Εξάσκηση 24

Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\Delta) \subseteq \Delta$, για την οποία ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1} : f(\Delta) \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \Delta$.
Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$, να δείξετε ότι:

1. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
2. $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Εξάσκηση 24

Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\Delta) \subseteq \Delta$, για την οποία ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1} : f(\Delta) \to \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \Delta$.
Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$, να δείξετε ότι:

1. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
2. $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Εξάσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
3. Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
3. Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
2. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της
3. Να δείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Εξάσκηση 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}
2. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

Εξάσκηση 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}
2. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

Εξάσκηση 27

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x \cdot y) = yf(x) + xf(y),\ x,\ y > 0$$

Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1),\ x > 0$