Συναρτήσεις Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Κωνσταντίνος Λόλας

Όταν πάμε εμείς στο άπειρο λοιπόν!





$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



- $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$



- $\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$



- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$



- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $4 \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- 6 $\mu \epsilon a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $4 \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- 6 $\mu \epsilon a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

Λόλας

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- **6** $\mu \varepsilon a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- **8** $\mu \epsilon 0 < a < 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

Λόλας

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος} \\ -\infty & n \text{ περιττός} \end{cases}$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- 6 $\mu \epsilon a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- **8** $\mu \epsilon 0 < a < 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$
- 9 με 0 < a < 1, $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$



Λόλας

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- **6** $\mu \varepsilon a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- **8** $\mu \epsilon 0 < a < 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$
- 9 με 0 < a < 1, $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- $\mathbf{10} \quad \mu \varepsilon \lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$



Συμπέρασμα

Όπως και με τα κανονικά όρια:

- $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=k\in\mathbb{R}\ \acute{\mathbf{\eta}}$
- $2 \lim_{x \to \pm \infty} f(x) = \pm \infty \ \acute{\boldsymbol{\eta}}$
- $\lim_{x \to \pm \infty} f(x)$ δεν θα υπάρχει



Μόνο 2 περιπτώσεις

Ασχολούμαστε μόνο με

- $1 \quad \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$
- $2 + \infty \infty$



 \bullet x vs x^2



- \bullet x vs x^2
- $\quad \quad \bullet \quad x^2 \text{ vs } x^5$



- ullet x vs x^2
- ullet x^2 vs x^5
- Πολυώνυμο vs εκθετική



- ullet x vs x^2
- $x^2 \text{ vs } x^5$
- Πολυώνυμο vs εκθετική
- Πολυώνυμο vs λογαριθμική



Πιο άπειρο είναι μεγαλύτερο κάνει κουμάντο

- Υπάρχει μεγαλύτερο? το βγάζω κοινό παράγοντα
- Είναι ίσα? κάνω πράξεις και τα διώχνω



Δύο έτοιμα όρια

Έστω
$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
 και
$$Q(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

$$\lim_{n\to\infty}P(x)=\lim_{n\to\infty}a_nx^n$$

- $\quad \ \ \, \lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$
- $\bullet \ \lim_{x \to \pm \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm \infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$



Στο σχήμα • Geogebra φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x). Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

 $\bullet \ \lim_{x \to -\infty} f(x)$



Στο σχήμα • Geogebra φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x). Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x)$
- $\bullet \ \lim_{x \to +\infty} f(x)$



Στο σχήμα • Geogebra φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x). Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x)$
- $\bullet \ \lim_{x \to +\infty} f(x)$
- $\bullet \ \lim_{x\to -\infty} \tfrac{1}{f(x)-1}$



Στο σχήμα • Geogebra φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x). Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια (εφόσον υπάρχουν):

- $\bullet \lim_{x \to -\infty} f(x)$
- $\bullet \ \lim_{x \to +\infty} f(x)$
- $\bullet \ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)-1}$
- $\bullet \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)}$



$$\bullet \lim_{x \to +\infty} 3x^2 - x - 1$$





- $\bullet \lim_{x \to +\infty} -2x^2 + 3x 1$



- $\bullet \lim_{x \to -\infty} -3x^2 + 5x 1$







$$\bullet \lim_{x\to +\infty} \tfrac{2x^3-x+1}{3x^3+x^2+1}$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} + x \right)$$

Να βρείτε το όριο
$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - |x^3 - x - 1|\right)$$





- $\bullet \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 2x + 1}$
- $\bullet \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} x \right)$



$$\bullet \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x \right)$$



$$\bullet \ \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x \right)$$



Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to +\infty} \left((a-1)x^3-2x+1\right)$, για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$



Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\mu-1)x^3+\mu x^2-2}{(\mu-2)x^2+3x+1}$, είναι πραγματικός αριθμός



Λόλας Συναρτήσεις 16/34

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε το $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+\mu x\right)$



Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^n+x-1}{x^2+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $n\in\mathbb{N}^*$.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\left(xf\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)=2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$.



Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε τα όρια



$$1 \quad \lim_{x \to 1} \, \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$$

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 1}f(x)=-\infty$, να υπολογίσετε τα όρια

- $1 \lim_{x \to 1} \frac{2f^2(x) + f(x) 1}{f^3(x) f(x) 2}$
- $2 \lim_{x \to 1} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} f(x) \right)$



Έστω $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\int_{0}^{\infty} \frac{f(x)-2x+3}{x} dx$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{xf(x)-2x+3}{x+2} = 1$$

- 📵 να βρείτε τα όρια:
 - $\mathbf{1} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$



Έστω $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x\to-\infty} \frac{xf(x)-2x+3}{x+2}=1$

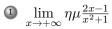
- 🛈 να βρείτε τα όρια:
 - $\mathbf{1} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$
 - 2 $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 f(x) x^2 + 1}{x f(x) + 3}$
- ② Αν επιπλέον ισχύει $f\left((-\infty,0)\right)=(3,+\infty)$, να βρείτε το $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{f(x)-3}$

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=5\ \mathrm{kal}\ \lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-5x\right)=2$$

Nα βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε

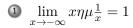
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$$





- $1\hspace{-.1cm} \lim_{x\to +\infty} \eta \mu \tfrac{2x-1}{x^2+1}$
- $2 \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} \sigma v \nu x$



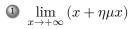




- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

- $\lim_{x \to -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

- $\lim_{x \to -\infty} x \eta \mu \frac{1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \eta \mu x}{x 1} = 1$





- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2 \eta \mu x}$

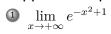


$$\lim_{x\to+\infty} \lim_{3^x-5^x-2} \frac{e^x-2^x+1}{3^x-5^x-2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x - 2^x}$$

Nα βρείτε το
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x-a^x}{2^x+3a^x}$$
, $a>0$







- $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2 + 1}$
- $\lim_{x \to 0^{-}} e^{-\frac{1}{x}}$

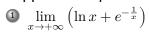
- $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2 + 1}$
- $\lim_{x \to 0^{-}} e^{-\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{x^2} 1}$



- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x}$

- $\mathbf{1} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln x$
- $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{1 + \sqrt{x 1}}{\ln x}$

- $\mathbf{1} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln x$
- $\begin{array}{cc}
 2 & \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x}
 \end{array}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{1 + \sqrt{x 1}}{\ln x}$
- $\begin{array}{cc}
 \mathbf{4} & \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\eta \mu x}
 \end{array}$

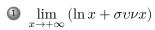




- $\lim_{x \to +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$
- $\lim_{x \to 1} \ln \frac{x}{x-1}$



- $\lim_{x \to +\infty} \left(\ln x + e^{-\frac{1}{x}} \right)$
- $\lim_{x \to 1} \ln \frac{x}{x-1}$





- $\lim_{x \to +\infty} (\ln x + \sigma v \nu x)$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sigma v \nu x}{\ln x}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$

① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται



Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x-1}$ με σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$

- ① Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ② Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 f^{-1}(x) \right)$



Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=x^x$$
, $x>0$. Να βρείτε το $\lim_{x\to +\infty}f(x)$



Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση