Θεωρήματα και Αποδείξεις Γ’ Λυκείου

Κωνσταντίνος Λόλας

2025

Απόδειξη 1:

Εστω $P(x) = \alpha_\nu x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$. Τότε

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} P(x) &= \lim_{x \to x_0} \alpha_\nu x^n + \lim_{x \to x_0} \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \lim_{x \to x_0} \alpha_1 x + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + ... + \alpha_1 \lim_{x \to x_0} x + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu x_0^n + \alpha_{n-1}x_0^{n-1} + ... + \alpha_1 x_0 + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu x_0^n + \alpha_{n-1}x_0^{n-1} + ... + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 \\
&= P(x_0)
\end{aligned}$$

□

Απόδειξη 2:

Εστω $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με P, Q πολυώνυμα. Τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

αν $Q(x_0) \neq 0$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} \\
&= \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} \\
&= \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}
\end{aligned}$$

□

Απόδειξη 3:

[Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών] Εστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $[a,b]$. αν

- f είναι συνεχής στο $[a,b]$,
- $f(a) \neq f(b)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Τότε θα ισχύει ότι $f(a) < \eta < f(b)$. Αν θεωρήσουμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, παρατηρούμε ότι

- η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[a,b]$,
- $g(a)g(b) < 0$ (γιατί $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(b) = f(b) - \eta > 0$).

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Αρα $f(x_0) = \eta$. □

Απόδειξη 4:

Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot 0 \\
&= f'(x_0) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Αρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Απόδειξη 5:

[] Εστω η συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Επομένως

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Αρα $f'(x_0) = 0$. □

Απόδειξη 6:

´Εστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, Δηλαδή

$$(x)' = 1$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

Επομένως

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1$$

Αρα $f'(x_0) = 1$. ☐

Απόδειξη 7:

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = nx^{n-1}$, δηλαδή

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{x^n-(x_0)^n}{x-x_0}\\ &= \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+...+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1})}{x-x_0}\\ &= x^{n-1}+x^{n-2}x_0+...+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = nx_0^{n-1}$$

Αρα $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$. ☐

Απόδειξη 8:

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^+$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}^+$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}\\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\\ &= \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\\ &= \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Αρα $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. ☐

Απόδειξη 9:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

Επομένως, αφού οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Αρα $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. □

Απόδειξη 10:

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{R}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή
$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{1' \cdot x^{\nu} - \nu \cdot 1 \cdot x^{\nu-1}}{(x^{\nu})^2} = \frac{0 - \nu \cdot x^{-\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$$

□

Απόδειξη 11:

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή
$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}(\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' \\ &= \frac{\eta\mu' x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu' x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\end{aligned}$$

□

Απόδειξη 12:

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$, δηλαδή

Απόδειξη. Πράγματι, αν $y = x^a$, τότε $y = e^{a \ln x}$. Αρα

$$\begin{aligned}(x^a)' &= \left(e^{a \ln x}\right)' \\ &= e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} \\ &= ax^{a-1}\end{aligned}$$

□

Απόδειξη 13:

Εστω η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \cdot \ln a$, δηλαδή

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $y = a^x$, τότε $y = e^{x \ln a}$. Αρα

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \left(e^{x \ln a}\right)' \\ &= e^{x \ln a} \cdot \ln a \\ &= a^x \cdot \ln a\end{aligned}$$

□

Απόδειξη 14:

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη. Πράγματι,

- Για $x > 0$ έχουμε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- Για $x < 0$ έχουμε $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$

□

Απόδειξη 15: Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

´Εστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ,
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 \neq x_2$, τότε το διάστημα $[x_1, x_2]$ είναι εσωτερικό του Δ. Επομένως, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

  $$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

  Επειδή $f'(\xi) = 0$, προκύπτει ότι

  $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

  Αρα $f(x_2) - f(x_1) = 0$ και επομένως $f(x_2) = f(x_1)$.

□

Απόδειξη 16:

Εστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ,
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερός αριθμός c ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει

$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) - g(x)$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως, από το θεώρημα συνέπειας του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, προκύπτει ότι η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Αρα υπάρχει σταθερός αριθμός c ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) - g(x) = c$. Δηλαδή $f(x) = g(x) + c$. □

Απόδειξη 17:

Εστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι αύξουσα στο Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι φθίνουσα στο Δ.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Εστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο Δ, το διάστημα $[x_1, x_2]$ είναι εσωτερικό του Δ. Επομένως, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Απειδή $f'(\xi) > 0$, τότε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$. Αρα $f(x_2) > f(x_1)$ και επομένως η f είναι αύξουσα στο Δ.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$, η απόδειξη γίνεται με παρόμοιο τρόπο. □

Απόδειξη 18:

Εστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο $x0$ τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως

- Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

- Αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Συνεπώς έχουμε

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ και } f'(x_0) \leq 0$$

Αρα $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. □

Απόδειξη 19:

Εστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

1. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.
2. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.
3. Αν $f'(x) > 0$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Απόδειξη.

1. Επειδή $f'(x) > 0$ στο (α, x_0), και η f είναι συνεχής στο (α, x_0), τότε η f είναι αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Ετσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. Επειδή $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), και η f είναι συνεχής στο (x_0, β), τότε η f είναι φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Ετσι έχουμε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. Επομένως έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

Αρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. Για το

2. Εργαζόμαστε αναλόγως
3. Εστω ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2$ έχουμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Αρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος αν $x_1 < x_0 < x_2$ τότε όπως είδαμε παραπάνω έχουμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β).

□

Απόδειξη 20:

Εστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ.

- κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη.

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$ είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Πράγματι, αν $x_0 \in \Delta$, τότε για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε

$$G'(x) = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

- Αν G είναι μία άλλη παράγουσα της f στο Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$F'(x) = G'(x), x \in \Delta$$

  Αρα $F(x) = G(x) + c$ για κάποιο σταθερό $c \in \mathbb{R}$.

□

Απόδειξη 21: Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

΄Εστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή η G είναι παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε

$$G(x) = F(x) + c \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Ειδικότερα, για $x = \alpha$ έχουμε

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_a^a f(t)\,dt + c = c$$

Επομένως, $c = G(\alpha)$ και άρα

$$G(x) = F(x) + G(\alpha) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Αρα

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha)$$

Επομένως

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

□