Εκθετική Λογαριθμική Συνάρτηση

Τα ωραία των λογαρίθμων

Κωνσταντίνος Λόλας

Παρατήρηση 1

Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Αρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως $9.999999\ldots$ θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 1

Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Αρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως $9.999999\ldots$ θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 1

Ιδιότητα 1 Λογάριθμου

- $\log 54.324 = \log 10 \cdot 5.4324 = \log 10 + \log 5.4324$
- $\log 432.53 = \log 100 \cdot 4.3253 = \log 100 + \log 4.3253$

Αρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 1 έως $9.999999...$ θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 2

Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Αρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως $0.999999\ldots$ θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 2

Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Αρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως $0.999999\ldots$ θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Παρατήρηση 2

Ιδιότητα 2 Λογάριθμου

$$\log 54.324 \cdot 432.53 = \log 54.342 + \log 432.53 =$$

Αρα αν ξέραμε τους λογάριθμους από 0 έως $0.999999...$ θα ξέραμε τους λογάριθμους όλων των αριθμών!

Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν $f(x) = \ln x$ τότε τα σημεία της είναι τα $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν $g(x) = e^x$ τότε τα σημεία της είναι τα (x, e^x)

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Αυτό σημαίνει ότι...

Σχέση με προηγούμενα?

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

- Αν λοιπόν $f(x) = \ln x$ τότε τα σημεία της είναι τα $(x, \ln x)$
- Αντίστοιχα, αν $g(x) = e^x$ τότε τα σημεία της είναι τα (x, e^x)

Με απλή αντικατάσταση

$$(x, e^x) = (\ln x, e^{\ln x}) = (\ln x, x)$$

Η γραφική παράσταση της $\ln x$ είναι συμμετρική της e^x ως προς την ευθεία $y = x$

Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία
- Ακρότατα
- Ενα προς ένα?

Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία $\rightarrow$ Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα
- Ενα προς ένα?

Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία $\rightarrow$ Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα $\rightarrow$ Δεν έχει
- Ενα προς ένα?

Ιδιότητες της $C_{\ln}$

- Μονοτονία $\rightarrow$ Γνησίως αύξουσα
- Ακρότατα $\rightarrow$ Δεν έχει
- Ενα προς ένα? $\rightarrow$ Ως γνησίως αύξουσα είναι!

Και τελειώνοντας...

Εξάσκηση 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

1. $f(x) = \ln(e^x - 1)$
2. $f(x) = \ln\left(x - \dfrac{4}{x}\right)$

Εξάσκηση 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

1. $f(x) = \ln(e^x - 1)$
2. $f(x) = \ln\left(x - \dfrac{4}{x}\right)$

Εξάσκηση 2

Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

1. $f(x) = \ln x + 1$
2. $f(x) = \ln(x - 1)$

Εξάσκηση 2

Να Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

1. $f(x) = \ln x + 1$
2. $f(x) = \ln(x - 1)$

Εξάσκηση 3

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $y = x$
2. $y = x + 1$
3. $y = x - 1$
4. $y = e^x$
5. $y = \ln x$

Εξάσκηση 4

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

1. $g(x) = \ln \frac{1}{x}$
2. $h(x) = |\ln x|$
3. $\varphi(x) = \ln |x|$

Εξάσκηση 4

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

1. $g(x) = \ln \dfrac{1}{x}$
2. $h(x) = |\ln x|$
3. $\varphi(x) = \ln |x|$

Εξάσκηση 4

Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

1. $g(x) = \ln \dfrac{1}{x}$
2. $h(x) = |\ln x|$
3. $\varphi(x) = \ln |x|$

Εξάσκηση 5

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \dfrac{5-x}{5+x}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 5

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \dfrac{5-x}{5+x}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 6

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 6

Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
3. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1 + x)$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
3. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$

Εξάσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(1+x)$

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f
3. Αν α, $\beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\alpha - \beta < \ln \dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$

Εξάσκηση 8

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $\ln x - 1 = 0$
2. $\ln(x-1) = 0$
3. $\ln x^2 - 1 = 0$
4. $\ln 3x - \ln(4-x) = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $\ln x - 1 = 0$
2. $\ln(x-1) = 0$
3. $\ln x^2 - 1 = 0$
4. $\ln 3x - \ln(4-x) = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $\ln x - 1 = 0$
2. $\ln(x-1) = 0$
3. $\ln x^2 - 1 = 0$
4. $\ln 3x - \ln(4-x) = 0$

Εξάσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $\ln x - 1 = 0$
2. $\ln(x-1) = 0$
3. $\ln x^2 - 1 = 0$
4. $\ln 3x - \ln(4-x) = 0$

Εξάσκηση 10

Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+3) + \ln 2$

Εξάσκηση 11

Να λύσετε την εξίσωση $\log(x^2 + 7x) = 1 + \log(x + 1)$

Εξάσκηση 12

Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln^2 x - 3\ln x - 4 = 0$$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x = 2$
2. $3^x = 10$
3. $2e^x - 1 = 0$
4. $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x = 2$
2. $3^x = 10$
3. $2e^x - 1 = 0$
4. $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x = 2$
2. $3^x = 10$
3. $2e^x - 1 = 0$
4. $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $e^x = 2$
2. $3^x = 10$
3. $2e^x - 1 = 0$
4. $e^{-x} = 2^x$

Εξάσκηση 14

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $\ln x + 1 \leq 0$
2. $3 \ln x - 1 < 0$

Εξάσκηση 14

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $\ln x + 1 \leq 0$
2. $3 \ln x - 1 < 0$

Εξάσκηση 15

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln(1-x) > 1 + \ln x$$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3e^x - 1 < 0$
2. $e^{-x} - 2 > 0$
3. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x > 3$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3e^x - 1 < 0$
2. $e^{-x} - 2 > 0$
3. $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 3$

Εξάσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $3e^x - 1 < 0$
2. $e^{-x} - 2 > 0$
3. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x > 3$

Εξάσκηση 17

Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln^2 x - lnx^2 - 3 > 0$$

Εξάσκηση 18

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{e^x - 1}{2e^x - 1} < \frac{1}{3}$$

Εξάσκηση 19

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2e^x - 1$$

Εξάσκηση 20

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης

$$f(x) = 2\ln x - 1$$

Εξάσκηση 21

Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x-1) - 1$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
3. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 21

Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x-1) - 1$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
3. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 21

Εστω η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x-1) - 1$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
2. Να βρείτε τις ρίζες της f και να κάνετε τον πίνακα προσήμων της
3. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{x - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4. $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{x - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4. $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{x - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4. $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Εξάσκηση 22

Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των συναρτήσεων

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{x - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$
4. $f(x) = x^2 - 1 + \ln x$

Εξάσκηση 23

Να λύσετε την εξίσωση

$$2\ln(2x-1)-\frac{1}{2}\ln 9=\ln(x-1)+\ln(x+1)$$

Εξάσκηση 24

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \ln x^3 + \ln y^4 = 11 \\ \ln(xy) = 3 \end{cases}$$

Εξάσκηση 25

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = xe^x \\ \ln y - \ln^2 x = x \end{cases}$$

Εξάσκηση 26

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^{x-1} = e^{2-x}$
2. $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

Εξάσκηση 26

Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $3^{x-1} = e^{2-x}$
2. $\ln(e^x + 2^x) = x + \ln 3$

Εξάσκηση 27

1. Να δείξετε ότι $5^{\ln x} = x^{ln 5}$
2. Να λύσετε την εξίσωση $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$

Εξάσκηση 27

1. Να δείξετε ότι $5^{\ln x} = x^{ln5}$
2. Να λύσετε την εξίσωση $25^{\ln x} - 4x^{\ln 5} + 3 = 0$

Εξάσκηση 28

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^{\ln x^2} = e^2 x$$

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}),\ \beta, \gamma \neq 0,\ t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

1. Να βρείτε τα α, β και γ
2. Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64\left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
3. Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
4. Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
5. Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}),\, \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

1. Να βρείτε τα α, β και γ
2. Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64\left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
3. Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
4. Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
5. Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

1. Να βρείτε τα α, β και γ
2. Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64\left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
3. Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
4. Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
5. Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

1. Να βρείτε τα α, β και γ
2. Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64\left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
3. Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
4. Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
5. Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ

Εξάσκηση 29

Το ενοίκιο $Q(t)$ ενός σπιτιού που πληρώνει ένας ενοικιαστής μετά από t χρόνια από όταν το ενοικίασε, δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(t) = \alpha + \beta(1 - e^{-\gamma t}), \beta, \gamma \neq 0, t \geq 0$$

Στην αρχή πλήρωσε ενοίκιο 200 Ευρώ, μετά από 2 χρόνια πλήρωσε 232 Ευρώ και μετά από άλλα 2 χρόνια πλήρωσε 248 Ευρώ

1. Να βρείτε τα α, β και γ
2. Να δείξετε ότι $Q(t) = 200 + 64\left(1 - 2^{-\frac{1}{2}}\right)$
3. Να βρείτε ποιο χρόνο θα πληρώνει ενοίκιο 262 Ευρώ
4. Να βρείτε για πόσα χρόνια το ενοίκιο δεν θα ξεπεράσει τα 260 Ευρώ
5. Να δείξετε ότι το ποσόν του ενοικίου δεν θα ξεπεράσει τα 264 Ευρώ


Thats all Folks!

Στο moodle θα βρείτε τις ασκήσεις που πρέπει να κάνετε, όπως και αυτή τη παρουσίαση