

Η Πίεση και τα Μαθηματικά της

Κ. Λόλας¹ Μ. Ελευθεριάδης² Π. Πετρίδης³

¹ 10ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

² 32ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

³ ΓΕΛ ΧΑΛΑΣΤΡΑΣ (ΠΕ04.01)

Λευκάδα, Οκτώβριος 2017

Η Ανάγκη

- Διαισθητικοί - Διαισθητικοί - Εμπειρικοί
- Μαθηματικό υπόβαθρο (?)
- Εμβάθυνση - Παράδοξα

Ορισμός

Ορισμός (B Γυμνασίου)

Πίεση ονομάζουμε το πηλίκο της δύναμης που ασκείται κάθετα σε μια επιφάνεια προς το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής

Πίεση - Εμπειρικά



- Μονόμετρο

Πίεση - Εμπειρικά



- Μονόμετρο
- Διανυσματικό

Πίεση - Μαθηματικά

- $\vec{F} = p\vec{A}$

Πίεση - Μαθηματικά

- $\vec{F} = p\vec{A}$
- $p = \frac{\vec{F}}{\vec{A}}$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσαιρεριστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k \frac{\vec{a}}{\vec{c}}, k \in \mathbb{R}$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσαιρεριστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\frac{\vec{a}}{\vec{c}}, k \in \mathbb{R}$
- Αντιμεταθετική

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσαιρεστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k \frac{\vec{a}}{\vec{c}}, k \in \mathbb{R}$
- Αντιμεταθετική
- Προσαιρεστική

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσαιρεστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k \frac{\vec{a}}{\vec{c}}, k \in \mathbb{R}$
- Αντιμεταθετική
- Προσαιρεστική
- Θυδέτερο - Αντίστροφο

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

$$\bullet \quad \frac{\vec{a} + \vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$$

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

- $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$

$$p(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = p(\vec{F}_1) + p(\vec{F}_2)$$

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

- $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\frac{\vec{a}}{\vec{c}}, k \in \mathbb{R}$

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

- $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\frac{\vec{a}}{\vec{c}}, k \in \mathbb{R}$

$$p(k\vec{F}) = kp(\vec{F})$$

Υδροστατική Πίεση

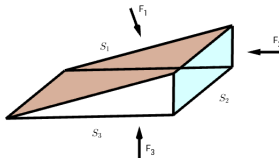
Παραδοχή

- Ανεξάρτητη Επιφάνειας
- $\rho(z) = c$
- $g(z) = c'$

Υδροστατική Εξίσωση

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Απόδειξη Ανεξαρτησίας ως προς Επιφάνεια



$$F_1 \cos\theta = F_3 \text{ και } F_1 \sin\theta = F_2$$

Αντίστοιχα

$$p_1 S_1 \cos\theta = p_3 S_3 \Rightarrow p_1 = p_3$$

και

$$p_1 S_1 \sin\theta = p_2 S_2 \Rightarrow p_1 = p_2$$

Απόδειξη Υδροστατικής

Παραδοχή

- $\rho(z) = c$
- $g(dz) = c'$

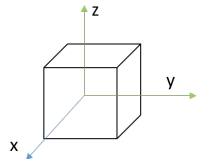
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow$$

$$F_{z1} - F_{z2} = B \Rightarrow$$

$$(p_{z_0} - p_{z_0+dx}) dx dy = \iiint_V \rho g dx dy dz \Rightarrow$$

$$-dp dx dy = \rho g \iiint_V dx dy dz \Rightarrow$$

$$-dp dx dy = \rho g dz dx dy \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$



Ατμοσφαιρική Πίεση

Παραδοχή

- $g(z) = c$
- $T(z) = c'$
- $\rho = \frac{mp}{kT}$

Εξίσωση Πίεσης

$$p = p_0 e^{-\frac{m}{kTg}z}$$

Απόδειξη Ατμοσφαιρικής

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dz} &= -\rho g \Rightarrow \\ \frac{dp}{dz} &= -\frac{mp}{kT} g \Rightarrow \\ \frac{dz}{dp} &= -\frac{kTg}{m} \frac{1}{p} \Rightarrow \\ z &= -\frac{kTg}{m} \ln \frac{p}{p_0} \Rightarrow \\ p &= p_0 e^{-\frac{m}{kT} g z}\end{aligned}$$

Ρευστά

Παραδοχή

- Δεν υπάρχει τριβή με τα τοιχώματα
- Υγρό ασυμπίεστο

Εξισώσεις

- Οριζόντιο σωλήνα: $\frac{\rho v^2}{2} + p = c$

Ρευστά

Παραδοχή

- Δεν υπάρχει τριβή με τα τοιχώματα
- Υγρό ασυμπίεστο

Εξισώσεις

- Οριζόντιο σωλήνα: $\frac{\rho v^2}{2} + p = c$
- Γενικά: $\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh = c$

Απόδειξη Ρευστών - Οριζόντιου

Παραδοχή

- Δεν υπάρχει τριβή με τα τοιχώματα
- Υγρό ασυμπίεστο

$$F = ma \Rightarrow -Adp = \rho V \frac{dv}{dt}$$

$$-Adp = \rho A dx \frac{dv}{dt} \Rightarrow -dp = \rho v dv$$

$$\frac{dp}{dv} = -\rho v \Rightarrow p = -\rho \frac{v^2}{2} + c$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = c$$

Σας Ευχαριστούμε...