Γράφω Μαθηματικά στον Υπολογιστή

Εργαστήριο

Κωνσταντίνος Λόλας	Παναγιώτης Πετρίδης
Ερυθραίας 46, Θεσσαλονίκη	*Δαγκλή 45, Τριανδρία*
τηλ.6973380837	τηλ.6973416317
costasmath@yahoo.gr	sch@sch.gr

Περίληψη

Υπάρχουν ακόμα συγγραφείς που δεν γνωρίζουν καν πώς γράφονται τα μαθηματικά στον υπολογιστή τους. Με το εργαστήριο αυτό γίνεται μία προσπάθεια να παρουσιαστούν όλοι (σχεδόν) οι τρόποι που μπορεί κάποιος να γράψει μαθηματικά με ηλεκτρονικό τρόπο.

Η συνάρτηση $\ln x$ ως εμβαδό.

Γνωρίζουμε φυσικά ότι $\int_1^x \frac{1}{x} = \ln x$. Οι μαθητές όμως της Β Λυκείου στη Φυσική Κατεύθυνσης μαθαίνουν ότι το έργο που παράγεται-καταναλώνεται αντιστοιχεί στο εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P = P(V)$ του άξονα V και μεταξύ δύο όγκων V_a και V_b. Έτσι αφού ο τύπος (καταστατική εξίσωση) για τα ιδανικά αέρια είναι ο $PV = nRT$, για να βρεθεί το έργο σε μία ισόθερμη μεταβολή ζητάται το εμβαδό μεταξύ της $P(V) = nRT\frac{1}{V}$ με n, R και T σταθερά, του άξονα των V και μεταξύ δύο όγκων V_a και V_b. Ο τύπος τους δίνεται χωρίς απόδειξη και ίσος με $W = nRT \ln \frac{V_b}{V_a}$ χωρίς να γνωρίζουν πώς το $\frac{1}{V}$ μετατρέπεται σε $\ln V$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ που έχει τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με την συνάρτηση $\ln x$ και μάλιστα $f(a^x) = x$ με $a = e$. Συνεπώς $f(x) = \ln x$.

Ορισμός της f Η συνάρτηση $f(t)$ ορίζεται ως το εμβαδό μεταξύ της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ του άξονα των x και των ευθειών $x = 1$ και $x = t$. Χάριν συντομίας θα συμβολίζουμε το εν λόγω εμβαδό με $E_1^t(\frac{1}{x})$.

Ιδιότητα $f(ab) = f(a) + f(b)$ Με εργαλείο την άλγεβρα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το $E_a^a b(\frac{1}{x}) = E_1^b(\frac{1}{x})$. Ας το δούμε πρώτα γραφικά:

Τα δύο γραμμοσκιασμένα σχήματα έχουν το ίδιο ακριβώς εμβαδό. Αν "τεντώσουμε" (ή συρικνώσουμε) το μήκος κατά a και "συρικνώσουμε" (αντ. τεντώσουμε) το πλάτος κατά a τα εμβαδά θα ισούνται. Το ίδιο αποτέλεσμα επαληθεύεται και με την άλγεβρα της Β Λυκείου, στο κεφάλαιο .... Αν έχουμε μία γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $g(x)$ τότε η $g(ax)$ είναι μία μεγέθυνση αν $a > 1$ (αντ. σμίκρινση αν $a < 1$) στον άξονα των x ενώ η $ag(x)$ είναι και πάλι μεγέθυνση αν $a > 1$ (αντ. σμίκρινση αν $a < 1$) αλλά αυτή τη φορά στον άξονα των y. Η συνάρτηση που έχουμε είναι η $g(x) = \frac{1}{x}$ για την οποία προφανώς ισχύει $ag(ax) = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x} = g(x)$. Δηλαδή αν μεγενθύνουμε στον άξονα x και συρικνώσουμε ταυτόχρονα στον y κατά κλίμακα a βρίσκουμε την ίδια συνάρτηση, δηλαδή το ίδιο εμβαδό. Συνεπώς:

$$E_a^{ab}(\frac{1}{x}) = E_1^b(\frac{a}{ax}) = E_1^b(\frac{1}{x})$$

Αλλά $E_a^{ab}(\frac{1}{x}) = f(ab) - f(a)$ και $E_1^b(\frac{1}{x}) = f(b)$. Έτσι

$$f(ab) - f(a) = f(b)f(ab) = f(a) + f(b)$$

Ιδιότητα $f(1) = 0$ Προφανώς το εμβαδό $E_1^t(\frac{1}{x}) = 1$ και άρα $f(1) = 0$.

Ιδιότητα $f(\infty) = \infty$ Με επαγωγή δείχνουμε εύκολα ότι $f(x^n) = nf(x)$, $n \in \mathbb{N}$ που για $x > 1$ έχουμε $f(x) > 0$ ως εμβαδό και άρα για $n \to \infty$ ισχύει $f(\infty) = \infty$.

Ιδιότητα $f(a) = 1$ Αφού το εμβαδό στο 1 είναι 0 και σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα δεν είναι φραγμένο προς τα δεξιά, θα υπάρχει τιμή στην οποία θα ισούται με 1. Έτσι υπάρχει $a > 1$ ώστε $f(a) = 1$.

Ιδιότητα $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ Για $a = x$ και $b = \frac{1}{x}$ από την πρώτη ιδιότητα έχουμε $f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ συνεπώς $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

Ιδιότητα $f(a^k) = k, k \in \mathbb{Q}, k > 0$ Έστω $k = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$. τότε

$$nf(a^k) = nf(a^{\frac{m}{n}}) = f(a^{\frac{mn}{n}}) = f(a^m) = mf(a) = m$$

Απόδειξη ότι $a = e$ Το $E_1^{1+x}(\frac{1}{t})$ για πολύ μικρό x προσεγγίζει το ορθογώνιο με ύψος 1 και μήκος x. Έτσι για $x \to 0$ ισχύει

$$f(1+x) = x\frac{1}{x}f(1+x) = 1f\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$$

Το οποίο $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ για $x \to 0$ ισούται με e. Δηλαδή $a = e$.

Δείξαμε λοιπόν ότι σε όλους τους ρητούς αριθμούς η f έχει όλες τις ιδιότητες της συνάρτησης ln.

Αναφορές

[1] *Φυσική B Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Επιστήμης Υπολογιστών και Εδόσεων "Διόφαντος", ISBN: 978-960-06-2731-2, σελ. 65-66.

[2] *Φυσική Γ Λυκείου*. Ινστιτούτο Επιστήμης Υπολογιστών και Εδόσεων "Διόφαντος", ISBN: 978-960-06-2432-8, σελ. 90-101.

[3] *Fundamentals Of Physics*, Halliday, Resnick, Walker, 9th Edition, σελ. 361.

[4] *The Feynman Lectures on Physics*, Feynman, Leighton, Sands, vol. 2, ch. 40.