Η συνάρτηση $\ln x$ ως εμβαδό

Μαθηματικά και οι άλλες επιστήμες στην εκπαίδευση

Κωνσταντίνος Λόλας
Γραβιάς 15, Θεσσαλονίκη
τηλ.6973380837
costasmath@yahoo.gr

Παγώνα Παπακωνσταντίνου
Γραβιάς 15, Θεσσαλονίκη
τηλ.6958386849
pecoaganzi@gmail.com

Περίληψη

Γνωρίζουμε φυσικά ότι $\int_1^t \frac{1}{x} = \ln t$. Οι μαθητές όμως της Β Λυκείου στη Φυσική Κατεύθυνσης μαθαίνουν ότι το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται αντιστοιχεί στο εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P = P(V)$ του άξονα V και μεταξύ δύο όγκων V_a και V_b. Έτσι αφού ο τύπος (καταστατική εξίσωση) για τα ιδανικά αέρια είναι ο $PV = nRT$, για να βρεθεί το έργο σε μία ισόθερμη μεταβολή ζητάται το εμβαδό μεταξύ της $P(V) = nRT\frac{1}{V}$ με n, R και T σταθερά, του άξονα των V και μεταξύ δύο όγκων V_a και V_b. Ο τύπος τους δίνεται χωρίς απόδειξη και ίσος με $W = nRT \ln \frac{V_b}{V_a}$ χωρίς να γνωρίζουν πώς το $\frac{1}{V}$ μετατρέπεται σε $\ln V$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ που έχει τις ίδιες

ακριβώς ιδιότητες με την συνάρτηση $\ln x$ και μάλιστα $f(a^x) = x$ με $a = e$.

Συνεπώς $f(x) = \ln x$.

1 Ορισμός της f

Η συνάρτηση $f(t)$ ορίζεται ως το εμβαδό μεταξύ της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ του άξονα των x και των ευθειών $x = 1$ και $x = t$. Χάριν συντομίας θα συμβολίζουμε το εν λόγω εμβαδό με E_1^t.

Θα αποδείξουμε για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ ότι

$$f(e^x) = x$$

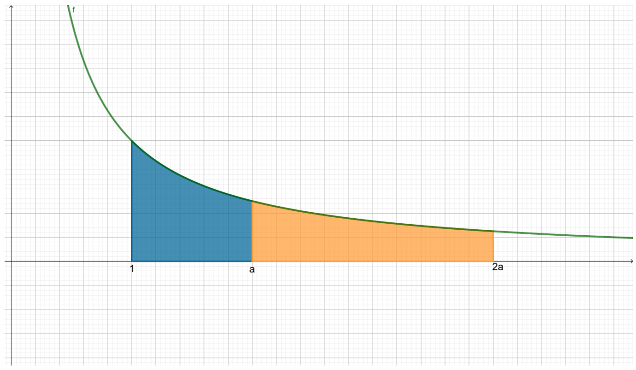
το οποίο σημαίνει ότι η f είναι η αντίστροφη της e^x δηλαδή η $\ln x$.

Για να φτάσουμε σε αυτή τη σχέση θα χρειαστούμε τις ιδιότητες:

1. $f(e) = 1$
2. $f(a^k) = kf(a), k \in \mathbb{Q}$
3. $f(a^k) = kf(a), k \in \mathbb{N}$
4. υπάρχει a ώστε $f(a) = 1$
5. $f(ab) = f(a) + f(b)$

2 Ιδιότητα $f(ab) = f(a) + f(b)$

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $E_a^{ab} = E_1^b$. Γραφικά και για $b = 2$: Τα δύο γραμμοσκιασμένα σχήματα έχουν το ίδιο ακριβώς εμβαδό. Αν ”τεντώσουμε” (ή συρικνώσουμε) το μήκος κατά a και ”συρικνώσουμε” (αντ. τεντώσουμε) το πλάτος κατά a, τα εμβαδά θα ισούνται. Το ίδιο αποτέλεσμα επαληθεύεται και με την άλγεβρα της Β Λυκείου, στο κεφάλαιο 2.4 παράδειγμα 2ο. Αν έχουμε μία γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $g(x)$ τότε η $g(ax)$ είναι μία μεγέθυνση αν $a > 1$ (αντ. σμίκρινση αν $a < 1$) στον άξονα των x ενώ η $ag(x)$ είναι και πάλι μεγέθυνση αν $a > 1$ (αντ. σμίκρινση αν $a < 1$) αλλά αυτή τη φορά στον άξονα των y. Η συνάρτηση που έχουμε



είναι η $g(x) = \frac{1}{x}$ για την οποία προφανώς ισχύει $ag(ax) = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x} = g(x)$. Δηλαδή αν μεγενθύνουμε στον άξονα x και συρικνώσουμε ταυτόχρονα στον y κατά κλίμακα a βρίσκουμε την ίδια συνάρτηση, δηλαδή το ίδιο εμβαδό. Συνεπώς:

$$E_a^{ab} = E_1^b = E_1^b$$

Αλλά $E_a^{ab} = 7f(ab) - f(a)$ και $E_1^b = f(b)$. Έτσι

$$f(ab) - f(a) = f(b) \Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$$

3 Ιδιότητα $f(1) = 0$

Προφανώς το εμβαδό $E_1^1 = 0$ και άρα $f(1) = 0$.

4 Ιδιότητα $f(\infty) = \infty$

Αν χωρίσουμε το εμβαδό στα τμήματα

$$(1, b) \cup (b, 2b) \cup (2b, 4b) \cup \cdots$$

τότε το συνολικό εμβαδό θα είναι $f(\infty) = f(b) + f(b) + f(b) + \cdots = \infty$.

5 Ιδιότητα $f(a) = 1$

Αφού το εμβαδό στο 1 είναι 0 και σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα δεν είναι φραγμένο προς τα δεξιά, θα υπάρχει τιμή στην οποία θα ισούται με 1. Έτσι υπάρχει $a > 1$ ώστε $f(a) = 1$.

6 Ιδιότητα $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

Για τον ίδιο λόγο με την 1η ιδιότητα. Το σημείο $1/x$ βρίσκεται αριστερά από το 1 και μάλιστα το διάστημα $(\frac{1}{x}, 1)$ είναι σμίκρυνση του διαστήματος $(1, x)$ κατά x στον οριζόντιο άξονα. Το πρόσημο $-$ μπροστά στο $f(x)$ έχει να κάνει με τη σύμβαση ότι θα θεωρούμε κάθε εμβαδό προς τα δεξιά θετικό, ενώ προς τα αριστερά αρνητικό.

7 Ιδιότητα $f(a^k) = k$, $k \in \mathbb{N}$

Αν χωρίσουμε τα εμβαδά κάτω από την γραφική παράσταση στα διαστήματα

$$(1, a^k) = (1, a) \cup (a, a^2) \cup (a^2, a^3) \cup \cdots \cup (a^{k-1}, a^k)$$

τότε τα εμβαδά θα ισούνται με

$$f(a^k) = f(a) + f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = kf(a)$$

8 Ιδιότητα $f(a^k) = k$, $k \in \mathbb{Q}$, $k > 0$

Έστω $k = \frac{m}{n}$. Τότε σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα

$$f(a^{\frac{m}{n}}) = mf(a^{\frac{1}{n}})$$

Αν τώρα χωρίζουμε το διάστημα $(1,a)$ σε διαστήματα

$$(1,a) = (1, a^{\frac{1}{n}}) \cup (a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}) \cup (a^{\frac{2}{n}}, a^{\frac{3}{n}}) \cup \cdots \cup (a^{\frac{n-1}{n}}, a)$$

τότε και σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα θα ισχύει

$$f(a) = f(a^{\frac{1}{n}}) + f(a^{\frac{1}{n}}) + f(a^{\frac{1}{n}}) + \cdots + f(a^{\frac{1}{n}}) = nf(a^{\frac{1}{n}})$$

Δηλαδή

$$f(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} f(a)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση

$$f(a^k) = f(a^{\frac{m}{n}}) = mf(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{m}{n} f(a) = kf(a)$$

9 Απόδειξη ότι $a = e$

Το E_1^{1+x} για πολύ μικρό $x \in \mathbb{Q}$ προσεγγίζει το ορθογώνιο με ύψος 1 και μήκος x. Έτσι για $x \to 0$ ισχύει

$$f(1+x) = x \Rightarrow \frac{1}{x} f(1+x) = 1 \Rightarrow f\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$$

Το οποίο $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ για $x \to 0$ ισούται με e. Δηλαδή $a = e$.

Δείξαμε λοιπόν ότι σε όλους τους ρητούς αριθμούς η f έχει όλες τις ιδιότητες της συνάρτησης ln.

Όλα τα προηγούμενα θα μπορούσαμε βέβαια να τα δείξουμε με την βοήθεια της άλγεβρας ή της ανάλυσης, αλλά σκοπός ήταν να γίνει μία προσέγγιση από την πλευρά της γεωμετρίας - εμβαδών. φ

Αναφορές

άλγεβρα Β Λυκείου...