Η Πίεση και τα Μαθηματικά της

Κ. Λόλας[1] Μ. Ελευθεριάδης[2] Π. Πετρίδης[3]

[1] 10ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

[2] 32ο ΓΕΛ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ (ΠΕ03)

[3] ΓΕΛ ΧΑΛΑΣΤΡΑΣ (ΠΕ04.01)

Λευκάδα, Οκτώβριος 2017

Η Ανάγκη

- Διαισθητικοί - Εμπειρικοί
- Μαθηματικό υπόβαθρο (?)
- Εμβάθυνση - Παράδοξα

Ορισμός

Ορισμός (Β Γυμνασίου)

Πίεση ονομάζουμε το πηλίκο της δύναμης που ασκείται κάθετα σε μια επιφάνεια προς το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής

Πίεση - Εμπειρικά

- Μονόμετρο

Πίεση - Εμπειρικά

- Μονόμετρο
- ~~Διανυσματικό~~

Πίεση - Μαθηματικά

- $\vec{F} = p\vec{A}$

Πίεση - Μαθηματικά

- $\vec{F} = p\vec{A}$
- $p = \dfrac{\vec{F}}{\vec{A}}$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσεταιριστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\frac{\vec{a}}{\vec{c}},\ k \in \mathbb{R}$

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσεταιριστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\frac{\vec{a}}{\vec{c}},\ k \in \mathbb{R}$
- ~~Αντιμεταθετική~~

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσεταιριστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\frac{\vec{a}}{\vec{c}},\ k \in \mathbb{R}$
- ~~Αντιμεταθετική~~
- ~~Προσεταιριστική~~

Διαίρεση Διανυσμάτων

$$V \times V^* \to \mathbb{R}$$
$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

- Καλά ορισμένη πράξη
- Αρ.Επιμεριστική $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}}{\vec{c}} + \frac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- Προσεταιριστική $\frac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\frac{\vec{a}}{\vec{c}},\ k \in \mathbb{R}$
- ~~Αντιμεταθετική~~
- ~~Προσεταιριστική~~
- ~~Ουδέτερο~~ - ~~Αντίστροφο~~

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

- $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \dfrac{\vec{a}}{\vec{c}} + \dfrac{\vec{b}}{\vec{c}}$

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

- $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \dfrac{\vec{a}}{\vec{c}} + \dfrac{\vec{b}}{\vec{c}}$

$$p(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = p(\vec{F}_1) + p(\vec{F}_2)$$

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

- $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \dfrac{\vec{a}}{\vec{c}} + \dfrac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- $\dfrac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\dfrac{\vec{a}}{\vec{c}},\ k \in \mathbb{R}$

Διαίρεση Διανυσμάτων Συμπεράσματα

- $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}} = \dfrac{\vec{a}}{\vec{c}} + \dfrac{\vec{b}}{\vec{c}}$
- $\dfrac{k\vec{a}}{\vec{c}} = k\dfrac{\vec{a}}{\vec{c}},\ k \in \mathbb{R}$

$$p(k\vec{F}) = kp(\vec{F})$$

Υδροστατική Πίεση

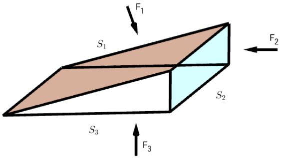
Παραδοχή

- Ανεξάρτητη Επιφάνειας
- $\rho(z) = c$
- $g(z) = c'$

Υδροστατική Εξίσωση

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Απόδειξη Ανεξαρτησίας ως προς Επιφάνεια



$$F_1 cos\theta = F_3 \text{ και } F_1 sin\theta = F_3$$

Αντίστοιχα

$$p_1 S_1 cos\theta = p_3 S_3 \Rightarrow p_1 = p_3$$

και

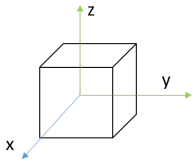
$$p_1 S_1 sin\theta = p_2 S_2 \Rightarrow p_1 = p_2$$

Απόδειξη Υδροστατικής

Παραδοχή

- $\rho(z) = c$
- $g(dz) = c'$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow$$
$$F_{z1} - F_{z2} = B \Rightarrow$$
$$\left(p_{z_0} - p_{z_0+dx}\right) dx\, dy = \iiint_V \rho g\, dx\, dy\, dz \Rightarrow$$
$$-dp\, dx\, dy = \rho g \iiint_V dx\, dy\, dz \Rightarrow$$
$$-dp\, dx\, dy = \rho g dz\, dx\, dy \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$



Ατμοσφαιρική Πίεση

Παραδοχή

- $g(z) = c$
- $T(z) = c'$
- $\rho = \dfrac{mp}{kT}$

Εξίσωση Πίεσης

$$p = p_0 e^{-\frac{m}{kTg} z}$$

Απόδειξη Ατμοσφαιρικής

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow$$
$$\frac{dp}{dz} = -\frac{mp}{kT} g \Rightarrow$$
$$\frac{dz}{dp} = -\frac{kTg}{m} \frac{1}{p} \Rightarrow$$
$$z = -\frac{kTg}{m} \ln \frac{p}{p_0} \Rightarrow$$
$$p = p_0 e^{-\frac{m}{kTg} z}$$

Ρευστά

Παραδοχή

- Δεν υπάρχει τριβή με τα τοιχώματα
- Υγρό ασυμπίεστο

Εξισώσεις

- Οριζόντιο σωλήνα: $\dfrac{\rho v^2}{2} + p = c$

Ρευστά

Παραδοχή

- Δεν υπάρχει τριβή με τα τοιχώματα
- Υγρό ασυμπίεστο

Εξισώσεις

- Οριζόντιο σωλήνα: $\frac{\rho v^2}{2} + p = c$
- Γενικά: $\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g h = c$

Απόδειξη Ρευστών - Οριζόντιου

Παραδοχή

- Δεν υπάρχει τριβή με τα τοιχώματα
- Υγρό ασυμπίεστο

$$F = ma \Rightarrow -Adp = \rho V \frac{dv}{dt}$$

$$-Adp = \rho A dx \frac{dv}{dt} \Rightarrow -dp = \rho v dv$$

$$-\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{v_1}^{v_2} \rho v dv \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = c$$

Πίεση

$$p = \frac{\vec{F}}{\vec{A}} = \frac{\vec{F}\vec{A}}{|A|^2}$$

Σας Ευχαριστούμε...