

FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE

## **Simulation, Control, and Estimation for an Inverted Pendulum**

PRE-ASSIGNMENT - SEACLEAR

Autor: **Costin CHITIC**

Conducător științific: **Prof. Dr. Ing. Busoniu Ion Lucian**

**2024**

# 1 Modelling and Simulation

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J} \times \left[ mgl \sin \alpha - b\dot{\alpha} - \frac{K^2 \dot{\alpha}}{R} + \frac{Ku}{R} \right] \quad (1)$$

Am implementat aceasta ecuatie in SIMULINK cu ajutorul block-ului "Fcn". Pentru a obtine viteza unghiulara si mai apoi pozitia unghiulara, am legat doua integratoare in serie. Integratorului de la pozitie am aplicat "Wrap" intre  $[0, 2\pi]$

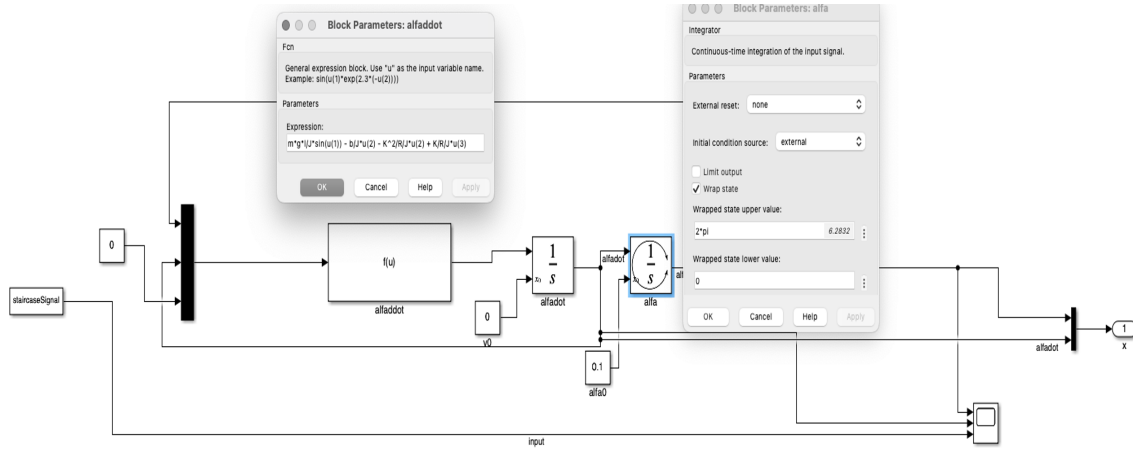


Figure 1: Sistemul nelinier in SIMULINK

' Simulate trajectories with the model in the following conditions: '

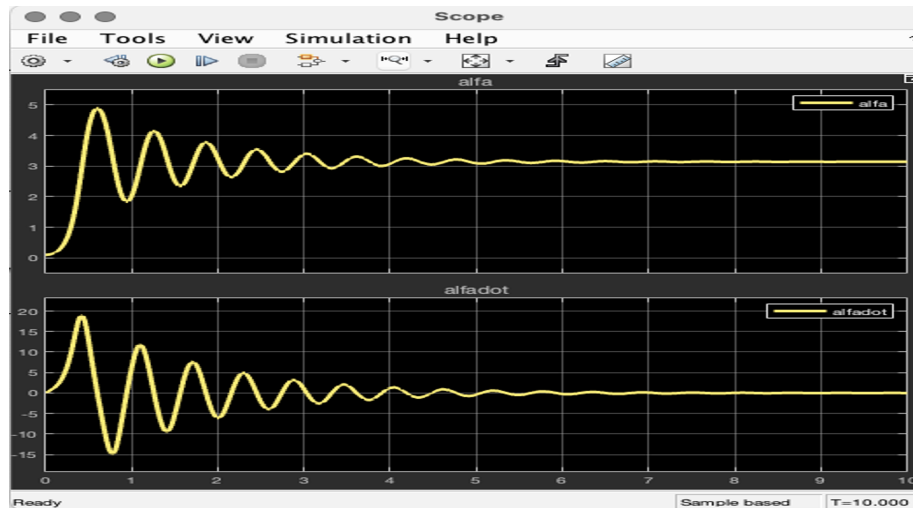


Figure 2: Raspunsul sistemului in cazul  $x(0) = [0.1, 0]^T, u(t) = 0$ .

In acest caz se poate vedea ca pozitia unghiulara se stabilizeaza dupa 7 [secunde] in jurul pozitiei sale firesti,  $\pi$  (pointing down) unde doar gravitatea actioneaza asupra masei.

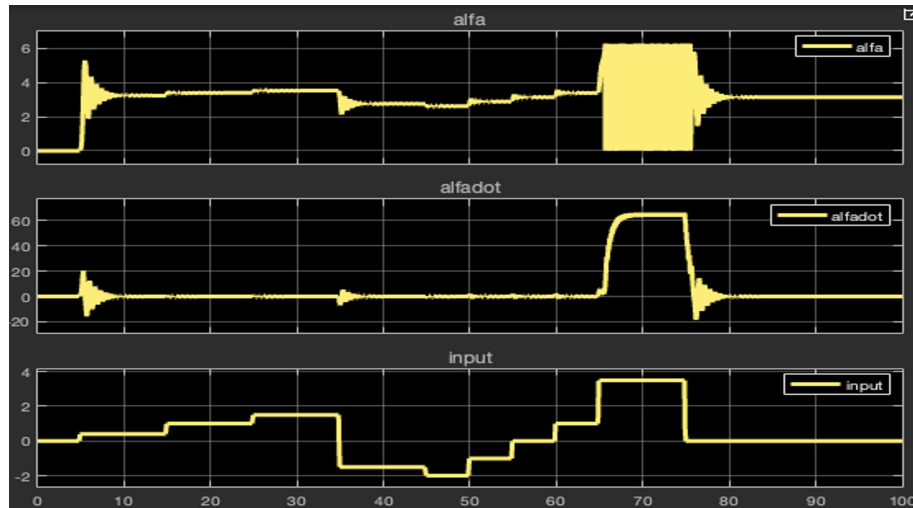


Figure 3: Raspunsul sistemului in cazul  $x(0) = [0, 0]^T, u(t)$  a random staircase sequence.

Pentru 3 si 6 am generat un semnal tip timeseries pentru a crea un input tip “Step” de amplitudini constante cu valori intre  $[-10, 10]$ .

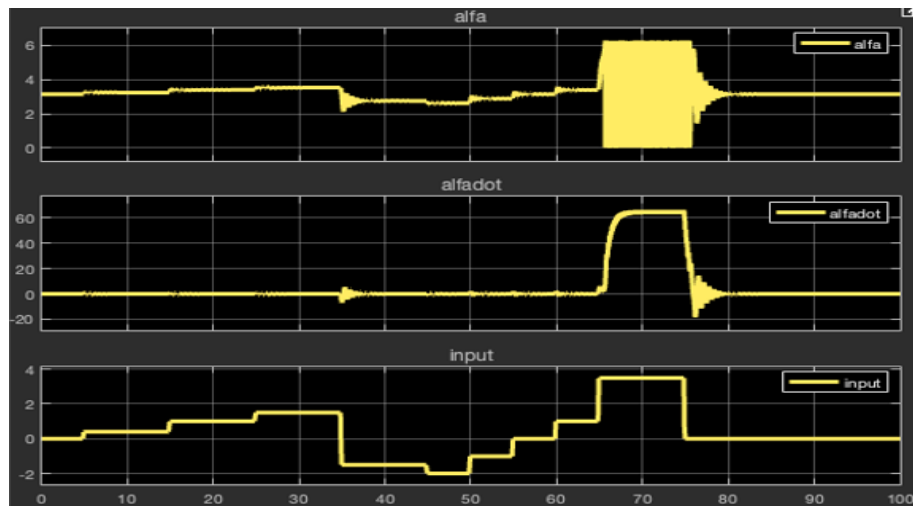


Figure 4: Raspunsul sistemului in cazul  $x(0) = [\pi, 0]^T, u(t)$  a similar random staircase sequence.

**OBSERVATIE!!** – In primul caz energia potentiala joaca un rol important intrucat se poate vedea diferenta dintre raspunsuri la un input de numai  $0.4[V]$ . Daca se incepe din pozitia pointing down, atunci nu se vad oscilatii la prima influentare a pendulului. In acelasi caz am observat ca


daca dau o intrare de 3[V], iar pendulul este pointing down, atunci pendulul nu va efectua o rotatie completa; dar daca este din pozitia pointing up, atunci se vor efectua rotatii intretinute cum se poate observa la momentul de timp  $t = [65, 75]$ .

## 2 Linearization around an equilibrium point + discretization using Euler with $T_s = 0.001[s]$

CHIRIC  
COSTIN.

Simulation, Control and Estimation  
for an Inverted Pendulum

(1)



$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J} \cdot [m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\alpha) - b \cdot \dot{\alpha} - \frac{K^2}{R} \cdot \dot{\alpha} + \frac{K \cdot u}{R}]$$

$$x = [\alpha, \dot{\alpha}]^T \quad u \in [-10, 10]V$$

Goal: Stabilize pendulum in the unstable equilibrium  
 $x_{eq} = [0, 0]^T$  (pointing up).

Linearization:  $x_{eq} = [0, 0]^T$   
 $u_{eq} = 0$

First-Order Taylor Expansion:  $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$   
! Singular termen nelinar al ecuatiei este  $\sin(\alpha)$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) \approx \sin(\alpha_{eq}) + \cos(\alpha_{eq})(\alpha - \alpha_{eq}) = \sin(0) + \cos(0)(\alpha - 0)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) \approx \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} \approx \frac{1}{J} [m \cdot g \cdot l \cdot \alpha - b \cdot \dot{\alpha} - \frac{K^2}{R} \cdot \dot{\alpha} + \frac{K \cdot u}{R}] \quad (2)$$

Reprezentarea în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\alpha} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\alpha} = \frac{1}{J} [m \cdot g \cdot l \cdot x_1 - (b + \frac{K^2}{R}) \cdot x_2 + \frac{K \cdot u}{R}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m \cdot g \cdot l}{J} & -\frac{b + \frac{K^2}{R}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{R \cdot J} \end{bmatrix} u$$

$$\Rightarrow A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m \cdot g \cdot l}{J} & -\frac{b + \frac{K^2}{R}}{J} \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{R \cdot J} \end{bmatrix}$$

= Euler's Forward Method =  
 $x(t + \Delta t) \approx x(t) + \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t$   
 $\Rightarrow x_{k+1} \approx x_k + T_s \cdot \dot{x}_k \quad (3)$

\* Discretization by using Euler with  $T_s = 0.01[s]$

$$\dot{x}_k = A_c \cdot x(t) + B_c \cdot u(t)$$

Înlocuind în (3), obținem  $x_{k+1} = x_k + T_s (A_c \cdot x_k + B_c \cdot u_k)$

$$\Rightarrow x_{k+1} = \underbrace{(I_2 + T_s \cdot A_c)}_{A_d} x_k + \underbrace{T_s \cdot B_c}_{B_d} u_k$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0,01 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m \cdot g \cdot l}{J} & -\frac{b + \frac{K^2}{R}}{J} \end{bmatrix} \Rightarrow A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 \\ 0,01 \cdot \frac{m \cdot g \cdot l}{J} & 1 - 0,01 \cdot \frac{b + \frac{K^2}{R}}{J} \end{bmatrix}$$

$$B_d = 0,01 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{R \cdot J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \cdot \frac{K}{R \cdot J} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 \\ 0,01 \cdot \frac{m \cdot g \cdot l}{J} & 1 - 0,01 \cdot \frac{b + \frac{K^2}{R}}{J} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \cdot \frac{K}{R \cdot J} \end{bmatrix} u_k$$

1/

2/

Figure 5: Rezolvarea pe foaie a liniarizării în punctul de echilibru  $x_{eq} = [0, 0]^T$  și a discretizării sistemului folosind Euler cu  $T_s = 0.01[s]$

### 3 Compare the results of the discretized system with those obtained with the nonlinear system

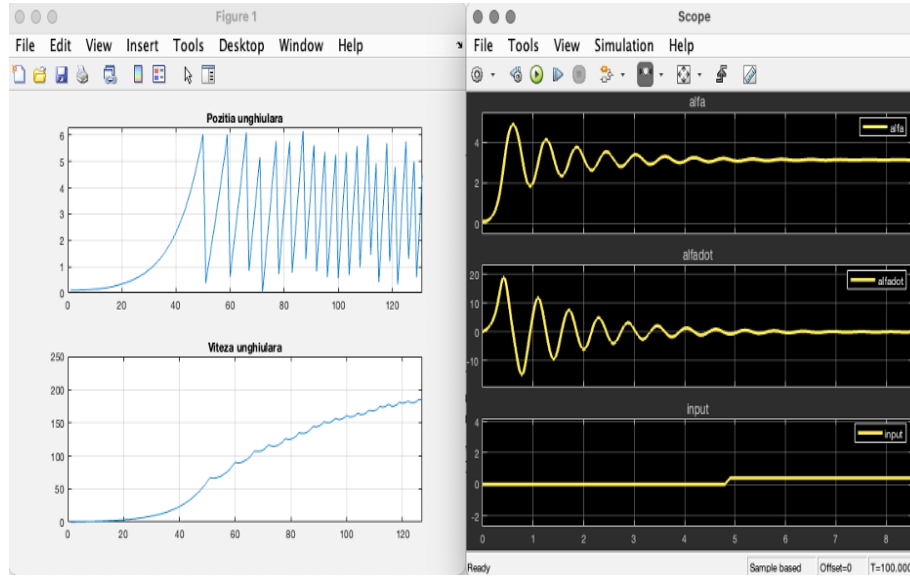


Figure 6: Comparatie intre sistemul discretizat(stanga) si cel neliniar(dreapta) in cazul unei intrari nule si pornind din  $x_0 = [0.1, 0]^T$

In acest caz pendulul efectueaza rotatii complete si nu reuseste sa se stabilizeze in jurul pozitiei ‘pointing down’. Acest comportament este de asteptat intrucat punctul de functionare in jurul caruia acel sistem este liniarizat este  $x_{eq} = [0, 0]^T$ . Odata ce este scos din acest punct de functionare se va observa o relatare cat mai indepartata de adevar.

In graficul din dreapta se poate observa ca pendulul oscileaza de cateva ori stanga-dreapta datorita energiei potentiale induse de pozitia initiala, dar reuseste dupa cateva secunde sa revina in jurul pozitiei ‘pointing down’.

## 4 Control

**Goal:** *Maintaining the pointed upwards positions of the pendulum by using state-feedback (reactie de la stare) control.*

$$u = -Fx \quad (2)$$

$$\dot{x} = (A_c - B_c F)x \quad (3)$$

Pe scurt, se calculeaza valorile proprii ale matricei  $A_c$  si se muta polii in punctul dorit. Apeland  $\text{eig}(A)$  am dedus  $s_1 = -10.1368$  si  $s_2 = 11.7044$ . Se poate observa ca avem un pol in

cadranul drept; fenomen care duce la instabilitate. Astfel, am ales sa duc ambii poli in  $-1$  si astfel am asigurat stabilitatea interna a sistemului. Functia folosita a fost *acker*.

Procedand cum am mentionat mai sus, am ajuns la valorile controllerului cu reactie de la stare:

$$K_{state\_feedback} = [4.0503, 0.1208]$$

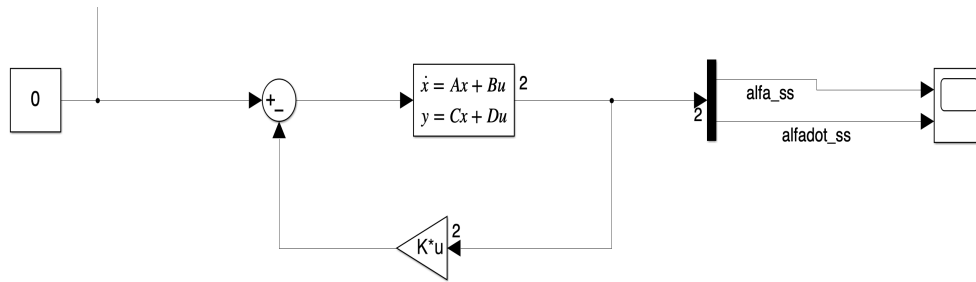


Figure 7: Implementarea SIMULINK a controlului de tip reactie de la stare

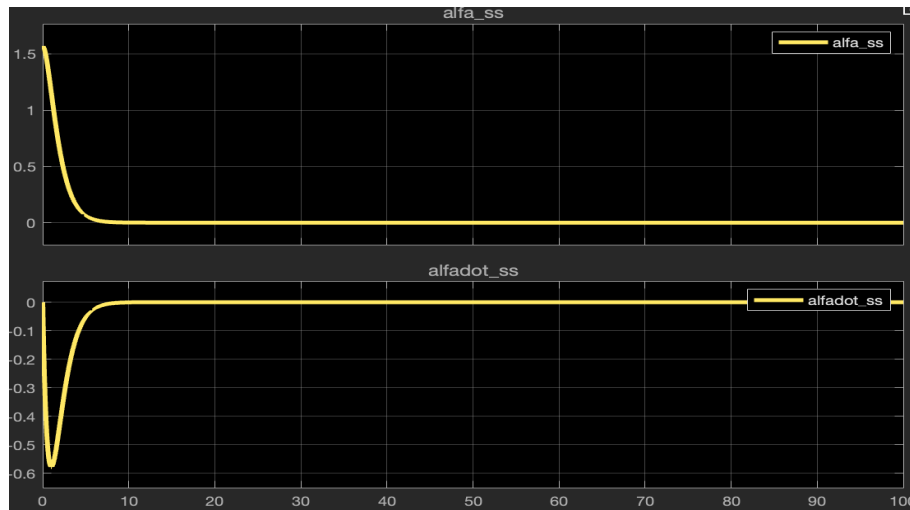


Figure 8: Raspunsul sistemului tip state-space asistat de controlul tip reactie de la stare avand conditiile initiale  $x_0 = [\frac{\pi}{2}, 0]^T$

' Once you have determined that the controller stabilizes the linear system, test the same controller on your Simulink implementation of the nonlinear system for several initial conditions in the range  $0, . . . \pi$ . Comparing to the linearized system, what happens as the initial conditions get further away from the linearization point (e.g., when they get close to  $\pi$ )? '

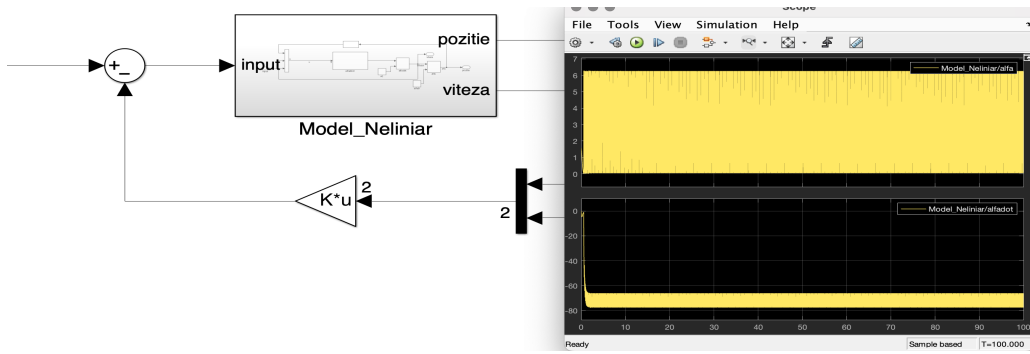


Figure 9: Raspunsul sistemului neliniar asistat de controlul tip reactie de la stare avand conditiile initiale  $x_0 = [\frac{\pi}{2}, 0]^T$

Pentru a raspunde la intrebarea de mai sus, am observat ca raspunsul din 8 este asemanator pentru orice valori initiale as da; rezultand in faptul ca acel controller calculat cu metoda Ackermann asigura stabilitatea interna a sistemului liniarizat state-space. Avand exact acelasi conditii pentru sistemul neliniar, acesta nu reuseste sa pastreze stabilitatea pentru valori  $\alpha_0 > \frac{\pi}{3}$ .

## 5 State Estimation

Pentru implementarea unui control tip reactie de la stare este nevoie ca sistemul sa fie controlabil. Sistemul real dispune numai de un encoder care reda pozitia unghiulara si nu viteza unghiulara. Astfel, controlul de mai sus nu ar putea fi implementat.

Pentru a putea reda viteza unghiulara din masuratorile pozitiei, se va aborda implementarea unui estimator(observer) de stare care se bazeaza pe sistemul discret calculat in 5. Acesta va reda urmatoarea dinamica:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k + L(y_k - \hat{y}_k) \quad (4)$$

$$\hat{y}_k = C_d \hat{x}_k \quad (5)$$

,unde  $C_d = [1, 0]$  deoarece numai pozitia unghiulara este observata.

Matricea de stare a noului sistem devine  $A_d - LC_d$  prin impunerea polilor inaintul cercului unitate (am ales  $[0.1, 0.2]$ ). Estimatorul a fost testat atat pe sistemul neliniar impreuna cu regulatorul calculat la reactia de stare, cat si pe sistemul liniar tip spatiul starilor. Input-ul in cazul din urma este iesirea controlerului state feedback  $u = Fx$

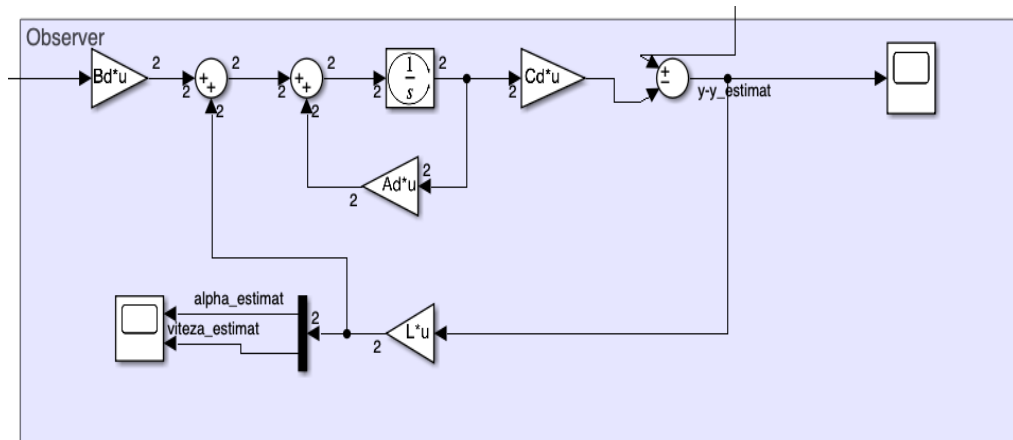


Figure 10: Schema SIMULINK a estimatorului de stare

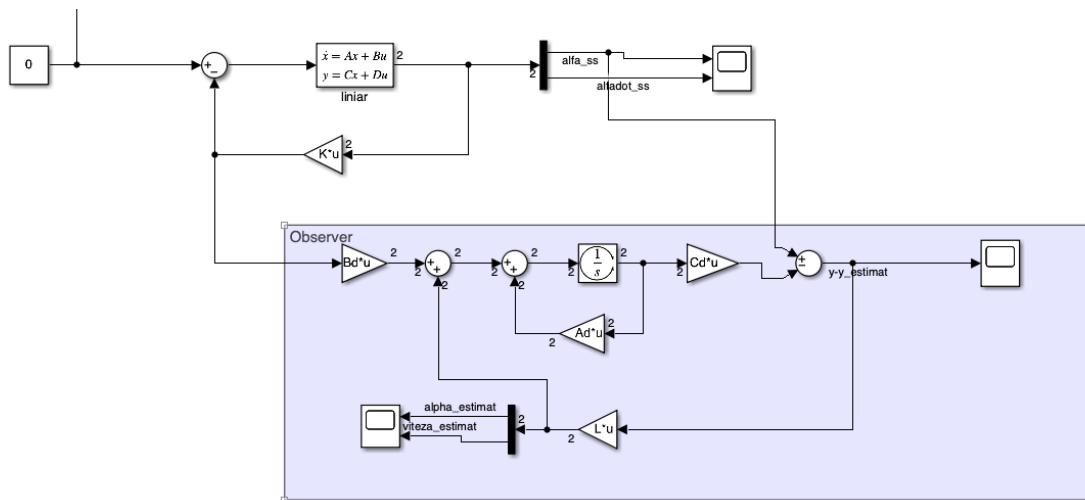


Figure 11: Observerul de stare cu intrare de la regulatorul cu reactie de la stare  $u = Fx$



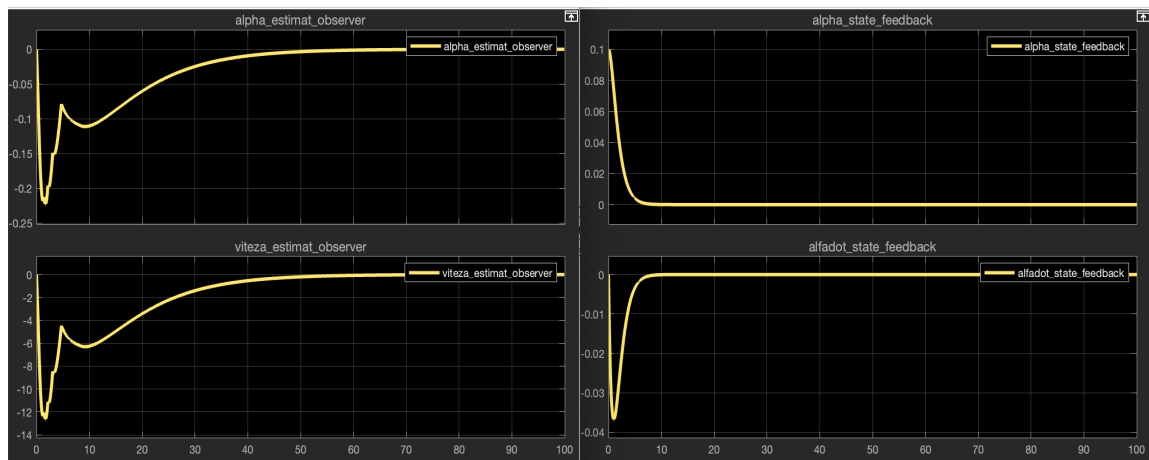


Figure 12: Raspunsul observatorului de stare atunci cand intrarea  $u = Fx$   
+ comparatie intre acesta si raspunsul sistemului liniar cu C.I.  $\alpha_0 = 0.1$ .