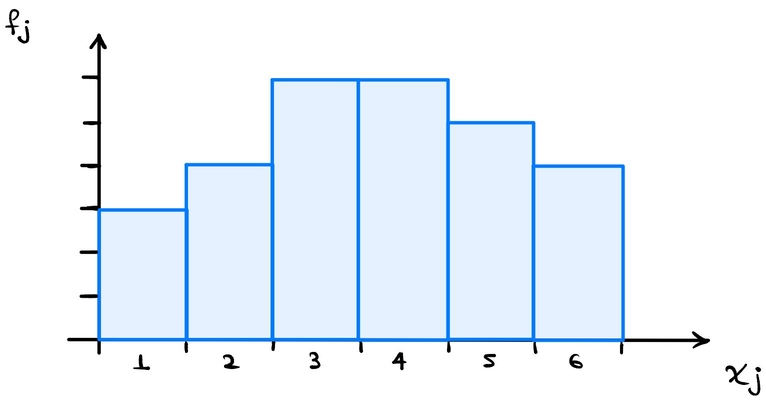
Στατιστική Ανάλυση

$$X : \text{Sample} \implies X = \{ x_1, x_2, \dots, x_N \}$$

Στατιστική Ανάλυση



Εμβαδόν $= x_j \cdot f_j$

Μέση Τιμή $\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum_{i}^{N} \frac{x_i}{N} = \sum_{j} \frac{f_j \cdot x_j}{N}$$

Διακύμανση

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

! x: array $\implies$ var = sum((x - mean)**2) / (N - 1)

Τυπική Απόκλιση

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

1. Linear Congruential Generator
2. Reverse Transformation
3. Hit or Miss

Κατανομές

Linear Congruential Generator

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i + b) \% m$$

- x_i : Αρχική Τιμή
- a : Σταθερα
- b : Σταθερά
- m : Σταθερά, μέχρι αυτόν

Αρνητικά

- Επαναληψιμότητα
- Σταθερές τιμές

Reverse Transformation

$$X = F^{-1}(u) \quad [a, b]$$

STEP 1: Κανονικοποιώ την $f(x)$

$$\int_a^b c \cdot f(x) \cdot dx = 1$$

STEP 2: Υπολογισμός

$$F(x) = \int_a^x c \cdot f(t) \cdot dt$$

STEP 3: $F(x) \longrightarrow u$

$x \longrightarrow X$

Παράδειγμα: $X \sim e^x$ για $[0,s]$

Βήμα 1: Κανονικοποίηση $\displaystyle\int_0^s c e^x dx = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{e^s - 1}}$

Βήμα 2: $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^s - 1} \cdot dt = \frac{e^x - 1}{e^s - 1}$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{e^x - 1}{e^s - 1}}$$

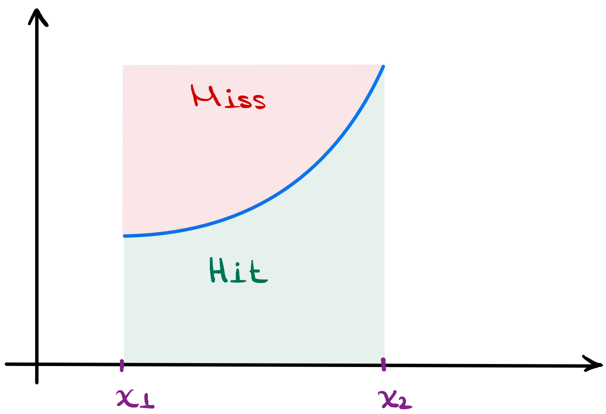
Βήμα 3: $F(x) \longrightarrow u$ Επομένως $u(e^s - 1) = e^X - 1$

$x \longrightarrow X$

$$e^X = 1 + u(e^s - 1)$$

Επομένως $\boxed{X = \log\left(1 + u(e^s - 1)\right)}$

Hit or Miss



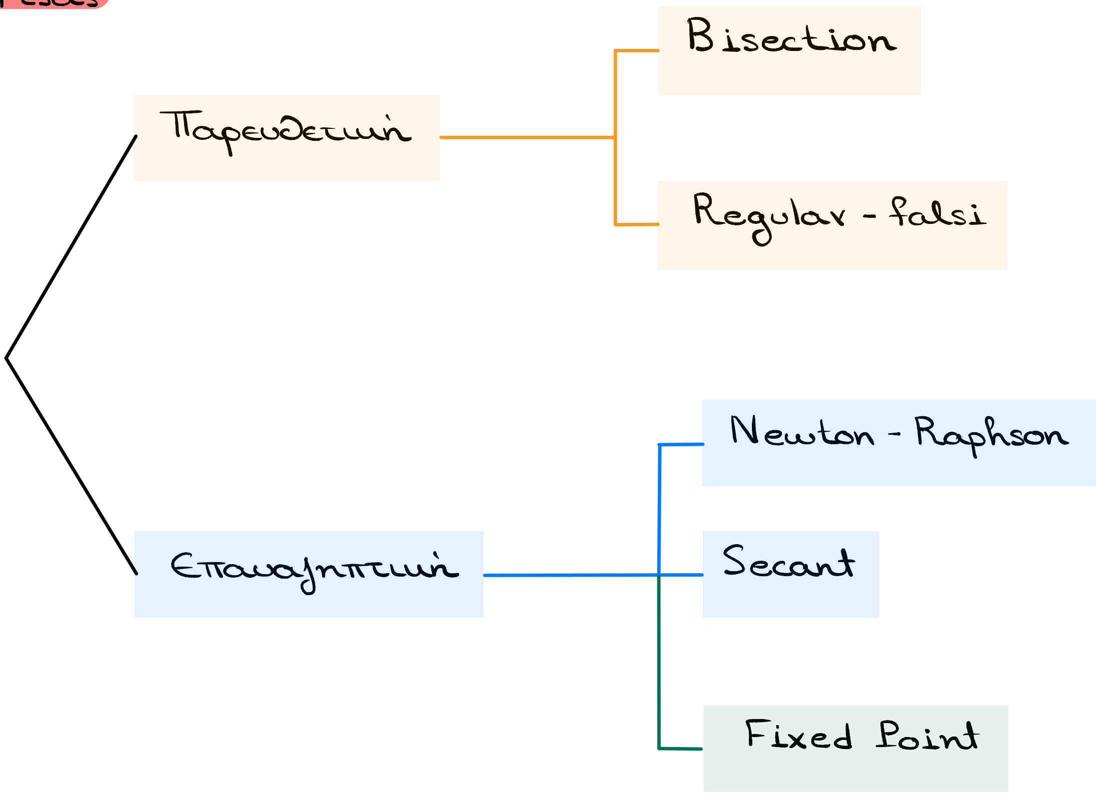
$$\boxed{\begin{array}{l} x_i \sim U(x_1, x_2) \\ y_i \sim U(0, f_{max}) \end{array}}$$

STEP 1: Κανονικοποιώ την $f(x)$ και βρίσκω f_{max}

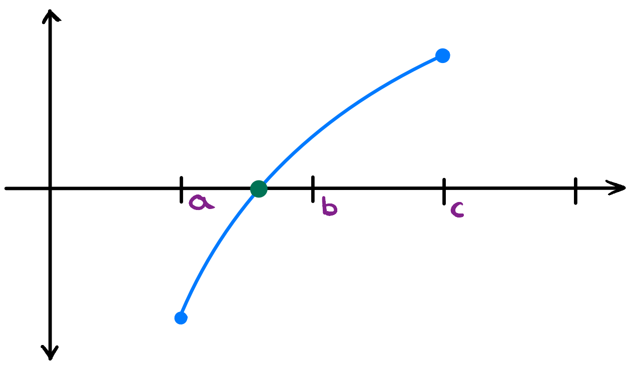
STEP 2: Κρατάω x_i : $y_i \le f(x_i)$

$\boxed{y_i \le f(x_i)} \longrightarrow$ Κρατάω x_i] Loop!

Εύρεση Ρίζας



Bisection



Εκμετάλλευση Θεωρήματος Bolzano

STEP 1: Βρίσκω $c = \dfrac{a+b}{2}$

Repeat

STEP 2: Ελέγχω

$f(a) \cdot f(c) < 0 \rightarrow b = c$

$f(c) \cdot f(b) < 0 \rightarrow a = c$

Loop!

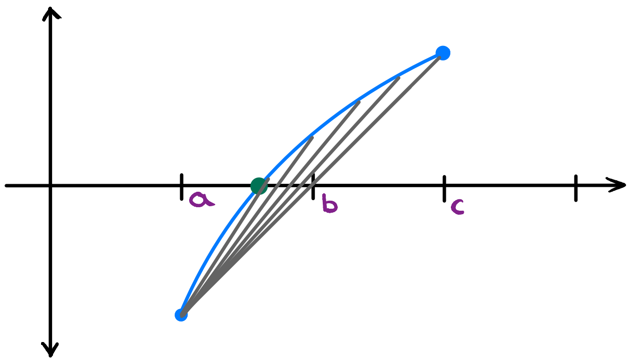
STEP 3: Κριτήριο $|f(c)| < 0$

Λύση : c : Root

Επισημάνσεις

- $a_n < p < b_n$ Εγγυημένα
- $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Regula - falsi



$$y(x) = f(a)\cdot\frac{b-x}{b-a} + f(b)\cdot\frac{x-a}{b-a}$$

$$y(c) = 0$$

STEP 1: Βρίσκω

$$c = \frac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Repeat

Loop!

STEP 2: Έλεγχος

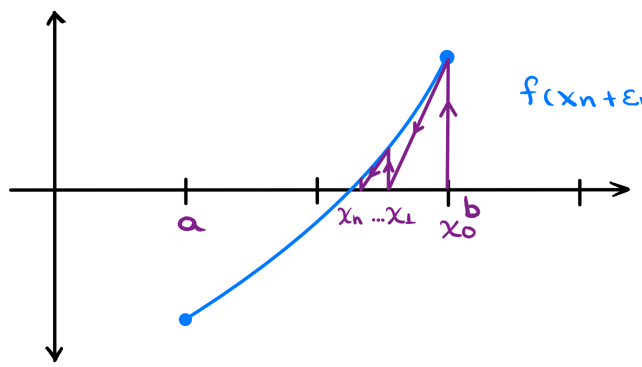
$f(a)\cdot f(c) < 0 \longrightarrow b = c$

$f(c)\cdot f(b) < 0 \longrightarrow a = c$

STEP 3: Κριτήριο $|f(c)| < 0$ Λύση : c : Root

Παρενθετική	
Bisection: $c = \frac{a+b}{2}$	**Regula falsi:** $c = \frac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$

Newton - Raphson



$$f(x_n+\varepsilon_n) = f(x_n) + \varepsilon_n \cdot f'(x_n) + \frac{1}{2}\cdot \varepsilon_n^2 f''(x_n) + \dots + \approx 0$$

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

STEP 1: Βρίσκω $f'(x)$ - Παράγωγο

STEP 2: Για αρχική τιμή x_0. Επιλέγω το a και b :

$$f(x)\cdot f'(x) > 0$$

και εκτελώ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Repeat

Loop!

STEP 3: Κριτήριο $\left| f(x_n) \right| < 0$ Λύση : : Root

Παράδειγμα : $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 4 \quad x \in [2,3]$

Βρείτε αναλυτικά την λύση.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x + 1$ $\xrightarrow{x=2}$ $f(2)\cdot f'(2) < 0$ ✗

$\xrightarrow{x=3}$ $f(3)\cdot f'(3) > 0$ ✓ $\Big\}$ $x_0 = 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2,68$$

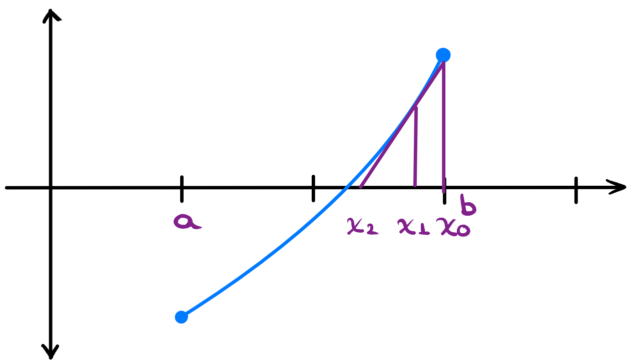
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,5289308$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,4942732504$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2,4925763796$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 2,492572713$$

Secant Method



* ΔΕΝ χριάζομαι Παράγωγο

STEP 1: Για αρχική τιμή x_0. Επιλέγω το a και b :

$$f(x)\cdot f'(x) > 0$$

και εκτελώ

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Repeat

Loop!

STEP 2: Κριτήριο $\left| f(x_n) \right| < 0$

Λύση : : Root

Newton Raphson:	Secant:
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
Χριάζομαι Παράγωγο	Χρειάζομαι τα δύο σημεία

Fixed Point

$$x_{n+1} = g(x) \ : \ x = g(x)$$

! g(x) όχι μονοσήμαντα ορισμένο

STEP 1: Γράφω την $f(x)=0$ ως $g(x)=x$

STEP 2: Εφαρμόζω σχέση

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Repeat

Loop!

STEP 3: Κριτήριο $\left| f(x_n) \right| < 0$

Λύση : : Root

Παράδειγμα Βρείτε ένα g(x), για τα πιό κάτω

i. $y = x^3 - x - 1$

ii. $y = x^2 + 4x + 3$

iii. $y = x^3 - 13x + 18$

iv. $f(x) = x^2 - 11x + 25$

i. $g(x) = (x+1)^{1/3}$ ή $g(x) = x^3 + 1$

ii. $g(x) = \dfrac{x^2+3}{-4}$

iii. $g(x) = \dfrac{18 + x^3}{13}$ ή $g(x) = \sqrt[3]{13x - 18}$

iv. $x^2 - 11x + 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 25 + x = x$

$x^2 - 10x + 25 = x$

$(x-5)^2 = x$

$x = \sqrt{x} + 5 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x} + 5$

Ιδιότητες:

- $\left| g'(x) \right| \leq \lambda \leq 1$
- Τάξη σύγκλισης $\lim \dfrac{x_{n+1} - c}{\left| x_{n+1} - c \right|^{k}}$

K=1 Linear
K=2 Squered
K=3 Qubic.

Εκτίμηση Σφάλματος

$$\lambda = \max_{\text{στο } a \le x \le b} \{ |g'(x)| \} < 1 \longrightarrow |c - x_{n+1}| \le \lambda |c - x_n|$$

$$\Longrightarrow \boxed{|c - x_n| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|}$$

Παράδειγμα Έστω $g(x) = 5 + \sqrt{x}$ με $x \in [1, 16]$ και $x_0 = 4$. Πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για να $|x_n - c| < \frac{10^{-6}}{2}$;

- Έχουμε $g(1) = 6 > 1$, $g(16) = 9 < 16$ και $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in [1, 16]$
- $\lambda = \max \{ |g'(x)| \} = \frac{1}{2}$
- $x_0 = 4 \Rightarrow x_1 = 5 + \sqrt{4} = 7$

$$\Rightarrow \frac{(1/2)^n}{1 - (1/2)} |7 - 4| = \frac{10^{-6}}{2} \Rightarrow \boxed{n \approx 24}$$

Γραμμικά Συστήματα

1. Gauss Elimination
2. Μέθοδος LU
3. Μέθοδος Jacobi - Siedel

Gauss - Elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

```
C = np.concatenate((A,b), axis=1)
(n,m) = C.shape
```

Elimination :

> import numpy
> import sys

$$ratio = \frac{C_{ji}}{C_{ii}}$$

Repeat $i \neq j \to n$

$$C_{jk} = C_{jk} - ratio * C_{ik}$$

Repeat $k \to m$

Loop !

Obtaning Solutions

- $x = np.zeros(n)$

$$x_i = \frac{C_{in}}{C_{ii}}$$

Repeat $i \to n$

Loop !

Παράδειγμα :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 + R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Μέθοδος LU

$$A \cdot X = b \longrightarrow \underbrace{L \cdot U}_{A} \cdot X = b$$

$Ly = b \longrightarrow$ Εμπρός αντικατάσταση Εύρεση y

$Ux = y \longrightarrow$ Πίσω αντικατάσταση Εύρεση x !

Lower:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

Upper:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

* Στόχος: Εύρεση Πίνακα L και U !

STEP 1: Ορίζω

```
U = A.copy()
L = np.identity(n)
```

STEP 2: Εφαρμόζω

$$L_{jk} = \frac{U_{jk}}{U_{kk}}$$

$$U_{j,k:n} = U_{j,k:n} - L_{jk} * U_{k,k:n}$$

Repeat
$k \to n-1$
$j \to k+1, n$

Loop!

Μέθοδος Jacobi - Siedel

STEP 1: Απομονώνω το x_i ∀ γραμμή και βρίσκω αναλυτική μορφή

STEP 2: Εφαρμόζω

Jacobi:	Siedel:
$\underbrace{x_i^{n+1} = f(x_n)}_{\text{Repeat}}$	$\underbrace{x^{n+1} = f(x^{n+1})}_{\text{Repeat}}$

Παράδειγμα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & x_1 \\ -1 & 3 & -1 & x_2 \\ 0 & -2 & 4 & x_3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= (10 + x_2)/3 \\ x_2 &= (5 + x_1 + x_3)/3 \\ x_3 &= (10 + 2x_2)/4 \end{aligned}$$

Jacobi:

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= (10 + x_2^n)/3 \\ x_2^{n+1} &= (5 + x_1^n + x_3^n)/3 \\ x_3^{n+1} &= (10 + 2x_2^n)/4 \end{aligned}$$

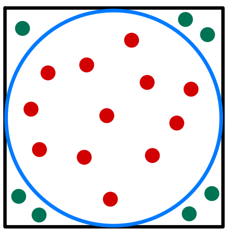
Siedel:

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= (10 + x_2^n)/3 \\ x_2^{n+1} &= (5 + x_1^{n+1} + x_3^{n+1})/3 \\ x_3^{n+1} &= (10 + 2x_2^{n+1})/4 \end{aligned}$$

Monte Carlo Integrals

- Accept - Reject
- Crude n-dim
  - 1-dim
  - n-dim

Accept - Reject



$$P = \frac{\#\, hit}{N}$$ → Πιθανότητα hit!

$$I = V \cdot P$$

V → of Space

STEP 1: Εύρεση V: Αντικαθιστώ $x_{max}, y_{max}, z_{max} \longrightarrow f(\vec{x})$

STEP 2: Ορίζω

$$x_i \sim U(x_{min}, x_{max})$$
$$y_i \sim U(y_{min}, y_{max})$$
$$z_i \sim U(z_{min}, z_{max})$$

$$w_i \sim U(0, f_{max})$$

$$w_i \leq f(x_i, y_i, z_i)$$

↓

Hit

Repeat για εντός D

↓

Domain αν υπάρχει

Loop!

STEP 3: Υπολογισμός,

$$P = \frac{\#hit}{N} \longrightarrow I = V * P$$

$$\delta I = \frac{V\sqrt{P - P^2}}{\sqrt{N}}$$

Παράδειγμα Έστω $\int_0^1\int_0^5 \frac{20}{13}(x+y)\, dx \cdot dy$

i. Ποιο το V
ii. Ορίστε το $U(a,b)$ $\forall$ xi
iii. Ποιο το κριτήριο για hit

i. $V_{space} = (5-0)\cdot(1-0)\cdot f_{max}$

$f_{max} = f(5,1)$

$\Big\}$ $V_{space} = (5-0)\cdot(1-0)\cdot f(5,1)$

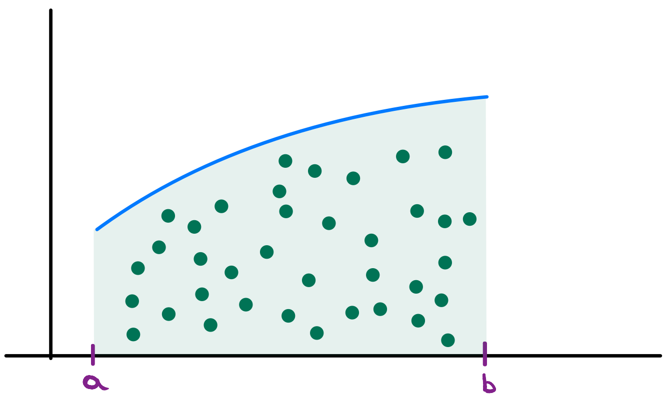
ii. $x \sim U(0,5)$

$y \sim U(0,1)$

$w \sim U(0, f_{max})$

hit $\rightarrow$ $w \leq f(x,y)$

Crude 1 dim



$$I = \bar{f}\cdot(b-a)$$

$$V = (b-a)$$

$$x \sim U(a,b)$$

STEP 1: Ορίζω x_i

$$x_i \sim U(a,b)$$

$$I = \overline{f(x_i)} \cdot (b-a)$$

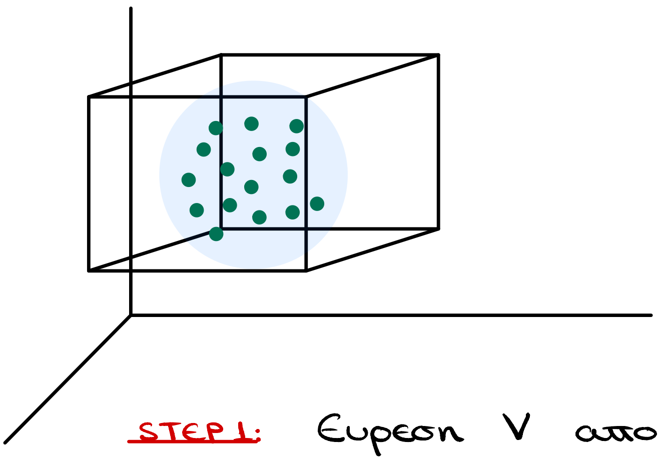
Loop!

$$\sigma_f = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$$

STEP 2: Υπολογισμός Σχετικού σφάλματος

$$\delta I = \frac{b-a}{\sqrt{N}} \cdot \sigma_f$$

Crude n-dim



V ≡ Volume of Domain

STEP 1: Εύρεση V από Όγκο Χωρίου

STEP 2: Ορίζω

$$x_i \sim U(x_{min}, x_{max})$$
$$y_i \sim U(y_{min}, y_{max})$$
$$z_i \sim U(z_{min}, z_{max})$$

$$f = f(x_i, y_i, z_i)$$

$$I = \overline{f} \cdot V$$

Repeat if (x,y,z) in Domain

Loop!

STEP 3: Σχετικό Σφάλμα

$$\delta I = \frac{V}{\sqrt{N}} \cdot \sigma_f$$

Accept - Reject:	**Crude n-d:**
$w_i \leq f(x_i, y_i, z_i)$ Κριτήριο	$f = f(x_i, y_i, z_i)$
$I = \underbrace{V}_{\text{of Space}} \cdot P$	$I = \bar{f} \cdot \underbrace{V}_{\text{of Domain}}$

Παράδειγμα: Έστω $\int_0^1 \int_0^5 \frac{20}{13}(x+y)\, dx \cdot dy$

i. Ποιο το V
ii. Ορίστε το U(a,b) ∀ xi
iii. Ποιο το κριτήριο για hit

i. $V_{domain} = (5-0) \cdot (1-0)$

ii. $\left. \begin{array}{l} x \sim U(0,5) \\ y \sim U(0,1) \end{array} \right\} \quad I = \bar{f}_{(x,y)} \cdot V_D$