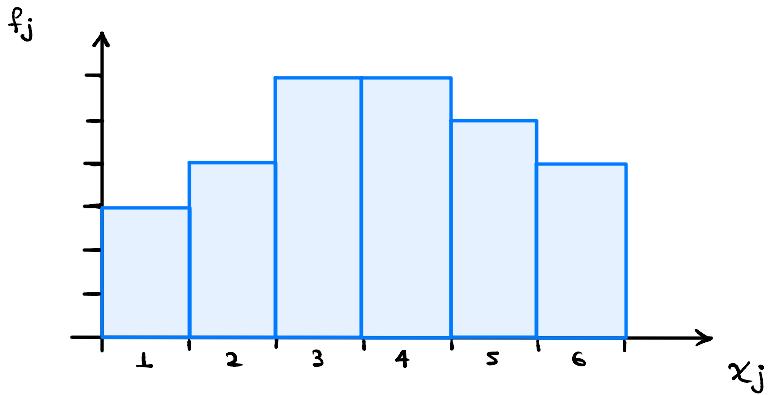


Στατιστική Ανάλυση

X : Sample $\implies X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Στατιστική Ανάλυση



$$\text{Εμβασή} = x_j \cdot f_j$$

Μέση Τιμή \bar{x}

$$\bar{x} = \sum_i^n \frac{x_i}{N} = \sum_j \frac{f_j \cdot x_j}{N}$$

Διακύψηση

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

! $x: \text{array} \implies \text{var} = \text{sum}((x - \text{mean})^{**2}) / (N-1)$

Τυπική Απόκυψη

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Ψευδοτυχαιοί Αριθμοί

1. Linear Congruential Generator
2. Reverse Transformation
3. Hit or Miss

Katastrophes

Linear Congruential Generator

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i + b) \% m$$

- x_i : Αρχική Τιμή
- a : Σταθερά
- b : Σταθερά
- m : Σταθερά, φέρει αυτόν

Αρνητικά

- Επωαγγελματίστηκα
- Σταθερές τιμές

Reverse Transformation

$$X = F^{-1}(U) \quad [a, b]$$

STEP 1: Κανονισμός την $f(x)$

$$\int_a^b c \cdot f(x) \cdot dx = 1$$

STEP 2: Υπολογισμός

$$F(x) = \int_a^x c \cdot f(t) \cdot dt$$

STEP 3: $F(x) \rightarrow U$
 $x \rightarrow X$

Παράδειγμα: $X \sim e^x$ για $[0, s]$

Brief 1: Κανονικοποίηση $\int_0^s ce^x dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e^s - 1}$

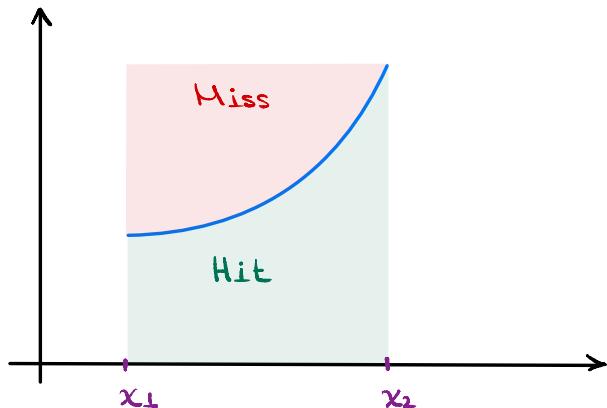
Brief 2: $F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^s - 1} dt = \frac{e^x - 1}{e^s - 1}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{e^x - 1}{e^s - 1}$$

Brief 3: $F(x) \rightarrow u$ $x \rightarrow X$ Εποφέυως $u(e^s - 1) = e^x - 1$
 $e^x = 1 + u(e^s - 1)$

Εποφέυως $X = \log(1 + u(e^s - 1))$

Hit or Miss



$$x_i \sim U(x_1, x_2)$$

$$y_i \sim U(0, f_{\max})$$

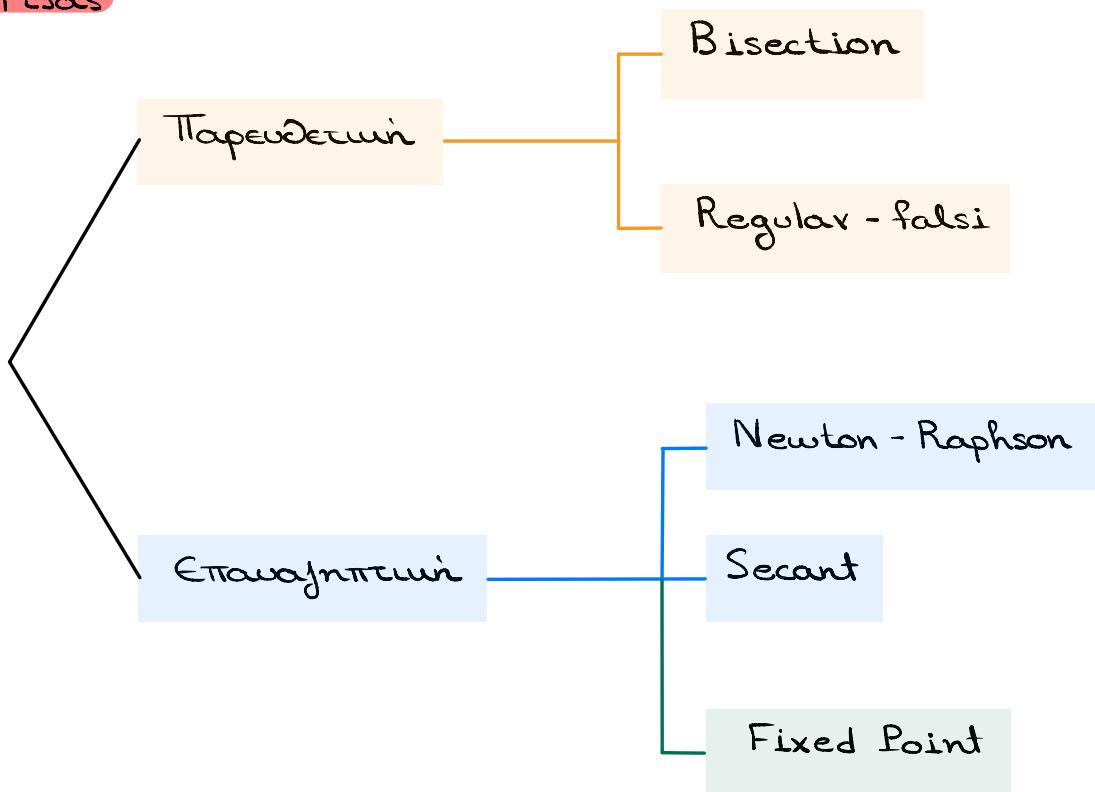
STEP 1: Κανονικοποιώ την $f(x)$ και βρίσκω f_{\max}

STEP 2: Κρατώ x_i : $y_i \leq f(x_i)$

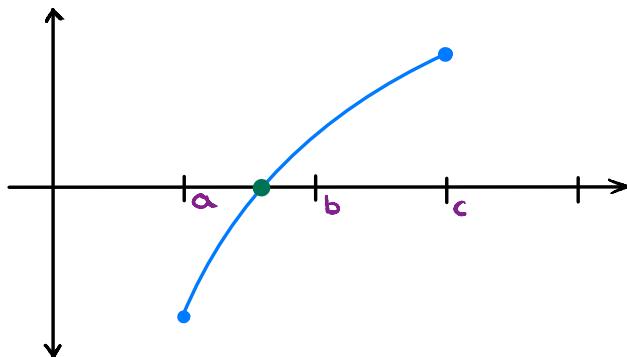
$$y_i \leq f(x_i) \longrightarrow \text{Κρατώ } x_i$$

Loop!

Eukleioon Plas



Bisection



Ευκλείουν Θεωρίατος
Bolzano

STEP 1: Βρισκω

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Repeat

STEP 2: Εξεγκριση

$$f(a) \cdot f(c) < 0 \rightarrow b=c$$

Loop!

$$f(c) \cdot f(b) < 0 \rightarrow a=c$$

STEP 3: Κριτηριο

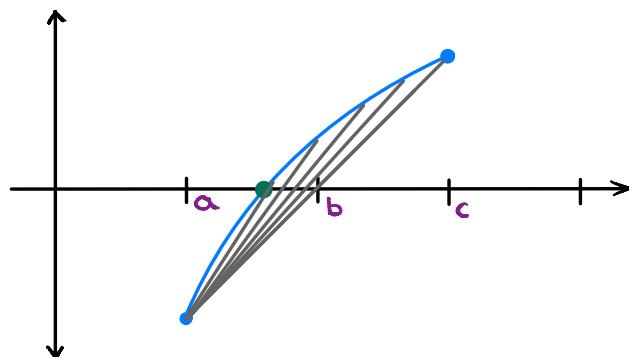
$$|f(c)| < 0$$

λύση: c : Root

Ergänzungswerte

- $a_n < p < b_n$ Ergänzungswerte
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

Regula - falsi



$$y(x) = f(a) \cdot \frac{b-x}{b-a} + f(b) \cdot \frac{x-a}{b-a}$$

$$y(c) = 0$$

STEP 1: Bisection

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Repeat

STEP 2: Check

$$f(a) \cdot f(c) < 0 \longrightarrow b=c$$

$$f(c) \cdot f(b) < 0 \longrightarrow a=c$$

Loop!

STEP 3: Conclusion

$$| f(c) | < 0$$

Conclusion: c : Root

Trapezregel

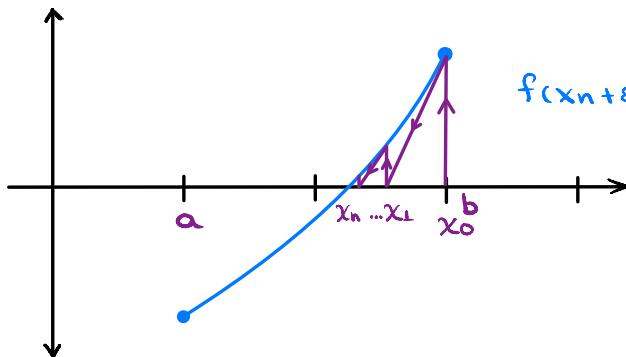
Bisection:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Regula falsi:

$$c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Newton - Raphson



$$f(x_n + \varepsilon_n) = f(x_n) + \varepsilon_n \cdot f'(x_n) + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_n^2 f''(x_n) + \dots \approx 0$$

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

STEP 1: Βρίσκω $f'(x)$ - Παράγωγο

STEP 2: Για αρχική τιμή x_0 . Επιλέγω το a να είναι b :

$$f(x) \cdot f'(x) > 0$$

να είτεγμα

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Repeat

Loop!

STEP 3: Κριτήριο

$$|f(x_n)| < 0$$

λύση: : Root

Παράδειγμα :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 4 \quad x \in [2, 3]$$

Bereite ausführliche τιμες für den.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x + 1$$

$x=2$	$f(2) \cdot f'(2) < 0$	x
$x=3$	$f(3) \cdot f'(3) > 0$	\checkmark

$x_0 = 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2,68$$

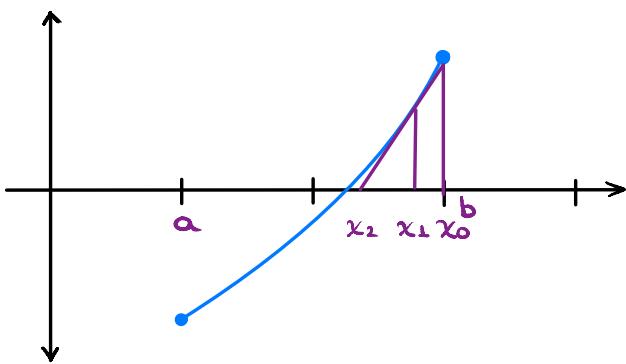
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,5289308$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,4942732504$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2,4925763736$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 2,492572713$$

Secant Method



Δευ Χρειαζομένη Πλούτων

STEP 1: Για αρχική τιμή x_0 . Επιλέγω το a και b :

$$f(x) \cdot f'(x) > 0$$

να ευτελώ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Repeat

Loop!

STEP 2: Κρίσιμο

$$|f(x_n)| < 0$$

λύση : : Root

Newton Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Secant:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

fixed Point

$$x_{n+1} = g(x) : x = g(x)$$

! $g(x)$ οχι παραίηστα αριθμένο

STEP 1: Γράψω την $f(x)=0$ ως $g(x)=x$

STEP 2: Εργαζόμεν σχετικά

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Repeat

Loop!

STEP 3: Κριτήριο

$$\left| f(x_n) \right| < 0$$

λύση: : Root

Παραδείγματα

Βρείτε ένα $g(x)$, για τα πιο νόστιμα

i. $y = x^3 - x - 1$

iv. $f(x) = x^2 - 11x + 25$

ii. $y = x^2 + 4x + 3$

iii. $y = x^3 - 13x + 18$

i. $g(x) = (x+1)^{1/3}$ ή $g(x) = x^3 + 1$

ii. $g(x) = \frac{x^2 + 3}{-4}$

iii. $g(x) = \frac{18 + x^3}{13}$ ή $g(x) = \sqrt[3]{13x - 18}$

iv. $x^2 - 11x + 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 25 + x = x$

$$x^2 - 10x + 25 = x$$

$$(x-5)^2 = x$$

$$x = Tx + s \Rightarrow g(x) = Tx + s$$

Iδιότητες:

- $|g'(x)| \leq \lambda \leq 1$

- Τάξη σύγκλισης $\lim \frac{|x_{n+1} - c|}{|x_n - c|^k}$

$k=1$	Linear
$k=2$	Squared
$k=3$	Cubic.

Euklifnon Σπάζοντας

$$\lambda = \max_{a \leq x \leq b} \{ |g'(x)| \} < 1 \rightarrow |c - x_{n+1}| \leq \lambda |c - x_n|$$

$$\Rightarrow |c - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

Παραδειγμα

Έστω $g(x) = 5 + \sqrt{x}$ για $x \in [1, 16]$ και $x_0 = 4$. Τόσος επαναγινώσις χρειάζονται για να

$$|x_n - c| < \frac{10^{-6}}{2};$$

- Έστω $g(1) = 6 > 1$ και $g(16) = 9 < 16$
- $\lambda = \max \{ |g'(x)| \} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $x_0 = 4 \Rightarrow x_1 = 5 + \sqrt{4} = 7$

$$\Rightarrow \frac{(1/2)^n}{1 - (1/2)} |7 - 4| = \frac{10^{-6}}{2} \Rightarrow n \approx 24$$

Παραδειγμα Ινστιντιατα

1. Gauss Elimination
2. Μέθοδος LU
3. Μέθοδος Jacobi - Siedel

Gauss - Elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

$$C = np.concatenate((A, b), axis=1)$$

$$(n, m) = C.shape$$

Elimination :

```
> import numpy  
> import sys
```

$$\text{ratio} = \frac{C_{ji}}{C_{ii}}$$

Repeat $i \neq j \rightarrow n$

Loop !

$$C_{jk} = C_{jk} - \text{ratio} * C_{ik}$$

Repeat $k \rightarrow m$

Obtaining Solutions

- $x = np.zeros(n)$

$$x_i = \frac{C_{in}}{C_{ii}}$$

Repeat $i \rightarrow n$

Loop !

Matrices :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \implies \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Méodos LU

$$A \cdot x = b \longrightarrow \underbrace{L \cdot U \cdot x = b}_A$$

$L y = b \longrightarrow$ Εμπος ανιχνάστασην Ευρεση y

$U x = y \longrightarrow$ Τισω ανιχνάστασην Ευρεση x !

Lower:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

Upper:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

* Ιτόχος: Ευρεση Τιμων L και U !

STEP 1: Ορίσω

$$U = A \cdot \text{copy}()$$

$$L = \text{np. identity}(n)$$

STEP 2: Εφαρμόσω

$$L_{jk} = \frac{U_{jk}}{U_{kk}}$$

$$U_{jk:n} = U_{jk:n} - L_{jk} * U_{kk:n}$$

Repeat
 $K \rightarrow n-1$
 $J \rightarrow k+1, n$

Loop!

Μέθοδος Jacobi - Siedel

STEP 1: Αποβάσιμων το x_i & γραφειν να
βρισκει ανατακή προφή

STEP 2: Εφαρμόζω

<u>Jacobi:</u>	<u>Siedel:</u>
$x_i^{n+1} = f(x_n)$ Repeat	$x^n = f(x^{n+1})$ Repeat

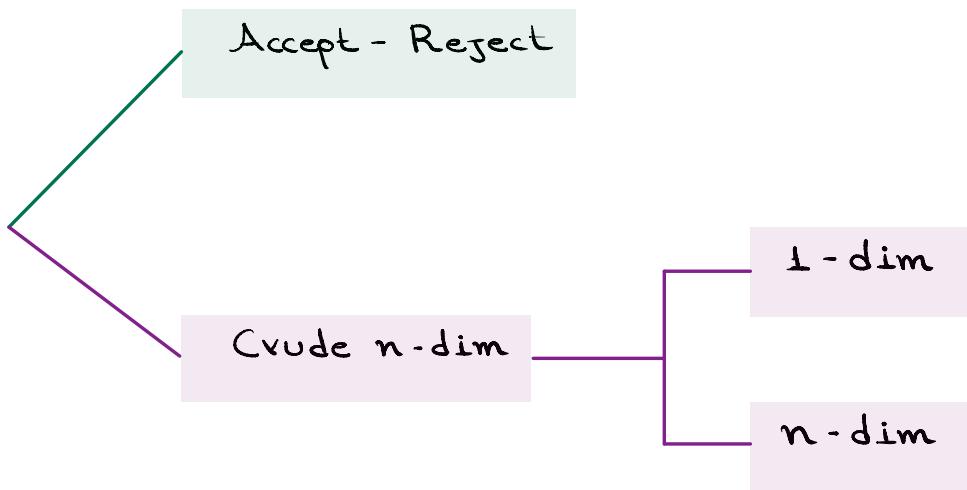
Παραδείγμα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & x_1 \\ -1 & 3 & -1 & x_2 \\ 0 & -2 & 4 & x_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 5 \\ 10 \end{array} \right) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= (10 + x_2)/3 \\ x_2 &= (5 + x_1 + x_3)/3 \\ x_3 &= (10 + 2x_2)/4 \end{aligned}$$

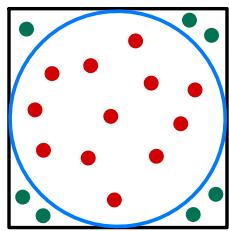
Jacobi : $\begin{aligned} x_1^{n+1} &= (10 + x_2^n)/3 \\ x_2^{n+1} &= (5 + x_1^n + x_3^n)/3 \\ x_3^{n+1} &= (10 + 2x_2^n)/4 \end{aligned}$

Siedel : $\begin{aligned} x_1^{n+1} &= (10 + x_2^n)/3 \\ x_2^{n+1} &= (5 + x_1^{n+1} + x_3^{n+1})/3 \\ x_3^{n+1} &= (10 + 2x_2^{n+1})/4 \end{aligned}$

Monte Carlo Integrals



Accept - Reject



$$P = \frac{\# \text{ hit}}{N} \rightarrow \text{Probability hit!}$$

$I = V \cdot P$

of Space

This block contains a light blue box with the formula $P = \frac{\# \text{ hit}}{N}$. To the right, an arrow points to the text "Probability hit!". Below this, another light blue box contains the formula $I = V \cdot P$, with a blue curved arrow pointing from the "hit!" text to the "V" term.

STEP 1: Eύπειν V : Αντικαθωτώ $x_{\max}, y_{\max}, z_{\max} \rightarrow f(\vec{x})$

STEP 2: Ορίσω

$$\begin{aligned} x_i &\sim U(x_{\min}, x_{\max}) \\ y_i &\sim U(y_{\min}, y_{\max}) \\ z_i &\sim U(z_{\min}, z_{\max}) \\ w_i &\sim U(0, f_{\max}) \end{aligned}$$

Loop!

$$w_i \leq f(x_i, y_i, z_i)$$

↓
Hit

Repeat
για ευρώς Δ

Domain
αυ παράξελ

STEP 3: Υπολογισμός,

$$P = \frac{\text{# hit}}{N} \longrightarrow I = V * P$$

$$SI = \frac{V \sqrt{P - P^2}}{\sqrt{N}}$$

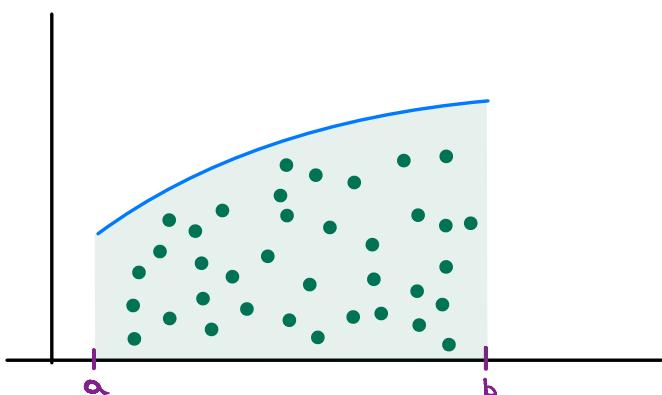
Παραδείγμα Έρωτη $\iint_0^s \frac{20}{13} (x+y) dx dy$

- i. Ήσω το V
- ii. Οριστε $\sim U(a,b)$ $\forall x_i$
- iii. Ήσω το υπερήπου για hit

i. $V_{\text{space}} = (s-a) \cdot (1-a) \cdot f_{\max}$ } $V_{\text{space}} = (s-a) \cdot (1-a) \cdot f(s,1)$
 $f_{\max} = f(s,1)$

ii. $x \sim U(0,s)$
 $y \sim U(0,1)$ hit $\rightarrow w \leq f(x,y)$
 $w \sim U(0, f_{\max})$

Cxude 1dim



$$I = \bar{f} \cdot (b-a)$$

$$V = (b-a)$$

$$x \sim U(a,b)$$

STEP 1: Ορίσω x_i

$$x_i \sim U(a, b)$$

$$I = \overline{f(x_i)} \cdot (b - a)$$

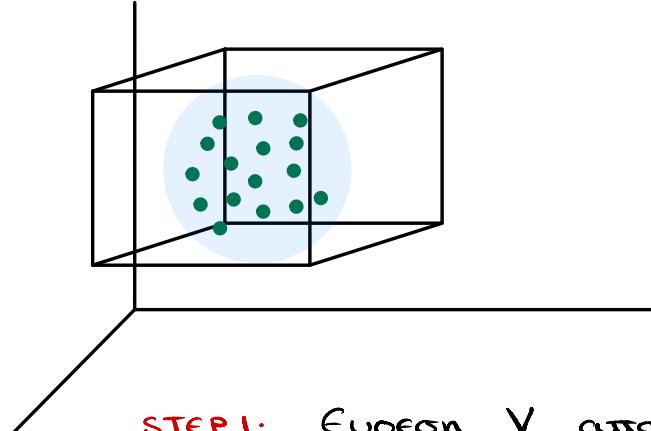
Loop!

$$\sigma_f = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$$

STEP 2: Υπολογισμός Ιχετικού σφάγματος

$$SI = \frac{b - a}{\sqrt{N}} \cdot \sigma_f$$

Crude n-dim



$V \equiv$ Volume of Domain

STEP 1: Ευρέων V από Όγκο Χωρίου

STEP 2: Ορίσω

$$x_i \sim U(x_{\min}, x_{\max})$$

$$y_i \sim U(y_{\min}, y_{\max})$$

$$z_i \sim U(z_{\min}, z_{\max})$$

$$f = f(x_i, y_i, z_i)$$

Loop!

$$I = \overline{f} \cdot V$$

Repeat if
(x, y, z) in Domain

STEP 3: Ιχετικό Τρόπος

$$\delta I = \frac{V}{\sqrt{N}} \cdot \sigma_f$$

Accept - Reject:

$$w_i \leq f(x_i, y_i, z_i)$$

Kriterio

$$I = V \cdot P$$

of Space

Crude n-d:

$$f = f(x_i, y_i, z_i)$$

$$I = \bar{f} \cdot V$$

of
Domain

Παραδείγμα: Έστω $\iint_0^5 \frac{xy}{z^3} (x+y) dx dy$

- i. Ήσω το V
- ii. Οριστε το $U(a,b)$ $\forall x_i$
- iii. Ήσω το υπότιμο για hit

i. $V_{\text{domain}} = (5-0) \cdot (1-0)$

ii. $x \sim U(0,5)$ $y \sim U(0,1)$ $I = \bar{f}(x,y) \cdot V_0$