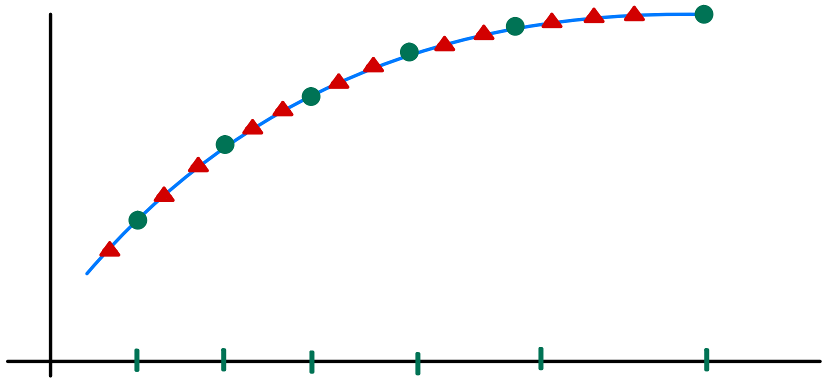
Πολυωνυμική Παρεμβολή



1. Παρεμβολή
2. Προσαρμογή

Interpolation → Lagrange

Interpolation → Neuville

Μέθοδος Lagrange

$$P(x) = \sum_{k}^{n} y(x_k) \cdot L_k(x) \longrightarrow L_{n,k} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Γραμμική Προσαρμογή $(n=1)$

$$L_{1,0} = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad n=1, \; k=0$$

$$L_{1,1} = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \qquad \left.\begin{matrix} n=1 \\ k=1 \end{matrix}\right\} \; n=k \Rightarrow n=0 \;\; (i \neq k)$$

$$\boxed{P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)}$$

$$\boxed{E_1 \approx \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1)}$$

Παρεμβολή 2ης Τάξης

$$L_{2,0} = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} \quad n=2,\ K=0 \qquad , \qquad L_{2,1} = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} \quad n=2,\ K=1$$

$$L_{2,2} = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} \quad n= \ \ K=$$

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$E_2 \approx \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

Παράδειγμα: $f(x) = x^4$

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	16

a. Βρείτε το $P_1(x)$, E_1

b. Βρείτε το $P_2(x)$, E_2

c. Βρείτε το E_1 και E_2 στο χωρίο $[0,2]$

a. $P_1(x) = \frac{(x-2)}{(0-2)}\cdot 0 + \frac{(x-0)}{(2-0)}\cdot 16 = 8x$

$E_1 \approx \frac{12}{2}\xi^2 (x-0)\cdot(x-1)$

b. $P_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\,0 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\,1 + \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)}\,16 = 7x^2-6x$

$E_2 \approx \frac{24}{6}\xi\,(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-16)$

c. $[0,2] \rightarrow f_{max} = f(2)$ (από πίνακα) $\Rightarrow \xi = 2$

$\max\{(x-0)\cdot(x-1)\} = 1/2$ $\qquad E_1 = 6\cdot 4\cdot \frac{1}{2} = 12$

$\max\{(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-16)\} \approx 0{,}42$ $\qquad E_2 = 4\cdot 2\cdot 0{,}4 = 3{,}2$

STEP 1: Ορισμός $x_p =$ (Interpolation Point)
$y_p = 0$ (Default)

STEP 2: Υπολογίστε

$$L = L * \left(\frac{x_p - x_i}{x_k - x_i}\right)$$

Repeat $i \neq k$
$i \rightarrow n$

$$y_p = y_p + L * y_k$$

Repeat $i \rightarrow n$

Loop $k \rightarrow n$

Lagrange - Interpolation

$P(x) = \sum_k^n y(x_k)\, L_k(x)$

where,

$L = \prod_i^n \frac{(x_o - x_i)}{(x_k - x_i)}$ when, $k \neq i$

In [ ]:

```
import matplotlib.pyplot as plt

x= [-1.6, -1.0, -0.4, 0.2, 0.8, 1.4]
y= [0.278037, 0.606531, 0.923116, 0.980199, 0.726149, 0.375311]
n=len(x)

yp = 0  # By default
xp= 1   # interpolation point


# Implementing Lagrange Interpolation
for k in range(n):
    L = 1
    for i in range(n):
        if i != k:
            L = L * (xp - x[i])/(x[k] - x[i])
    yp = yp + L * y[k]


print('Interpolated value at %.5f is %.5f.' % (xp, yp))
```

```
Interpolated value at 1.00000 is 0.60037.
```

Διαδοχικές Πολυωνυμικές Παρεμβολές

σημεία	βαθμός	0	1	2	3	4
x_0		P_0				
x_1		P_1	$P_{0,1}$			
x_2		P_2	$\mathbf{P_{1,2}}$	$\mathbf{P_{0,1,2}}$		
x_3		P_3	$P_{2,3}$	$\mathbf{P_{1,2,3}}$	$\mathbf{P_{0,1,2,3}}$	
x_4		P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$\mathbf{P_{1,2,3,4}}$	$\mathbf{P_{0,1,2,3,4}}$

Q = np.zeros(n,n)

σημεία	βαθμός	0	1	2	3	4
x_0		$Q_{0,0}$				
x_1		$Q_{1,0}$	$Q_{1,1}$			
x_2		$Q_{2,0}$	$\mathbf{Q_{2,1}}$	$\mathbf{Q_{2,2}}$		
x_3		$Q_{3,0}$	$Q_{3,1}$	$\mathbf{Q_{3,2}}$	$\mathbf{Q_{3,3}}$	
x_4		$Q_{4,0}$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$\mathbf{Q_{4,3}}$	$\mathbf{Q_{4,4}}$

STEP 1: Ορίζω Q(xo):

$$Q_{i0} = y_i$$

Repeat
$i \to n$

Loop!

$$Q_{ij} = \frac{(x_o - x_{i-j}) * Q_{i,j-1} - (x_o - x_i) * Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

Repeat
$j \to (1, i+1)$

STEP 2: Επιστρέφω Qii

Define Q - matrix n x n

$i \to Q[i][0] = y[i]. \quad \to i\ in\ range(n)$

$j \to Q[i][j] = y[i] \quad \to j\ in\ range(1, i+1)$

$$Q[i][j] = \frac{(x_o - x_{i-j}) \cdot Q\,[i][j-1] - (x_o - x_i) \cdot Q[i-1][j-1]}{x_i - x_{i-j}}$$

```
x = [-1.6, -1.0, -0.4, 0.2, 0.8, 1.4]
y = [0.278037, 0.606531, 0.923116, 0.980199, 0.726149, 0.375311]
n=len(x)

def Q(xo):
  Q = np.zeros((n,n))

  for i in range(n):
    Q[i][0]=y[i]
    for j in range(1, i+1):
      Q[i][j] = ((xo - x[i-j]) * Q[i][j-1] - (xo - x[i]) * Q[i-1][j-1]) / (x[i] - x[i-j])
  return Q[i][i]

print('Interpolated value for f(0)= %.4f' %(Q(0)))
```

```
Interpolated value for f(0)= 0.9980
```

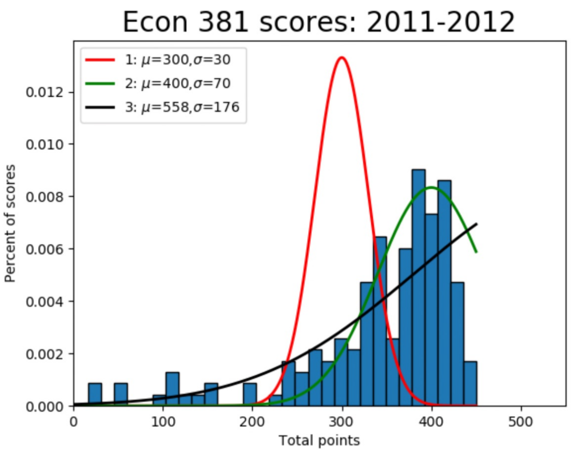
Προσαρμογή Μοντέλων

Δεδομένα → Ροπές

Δεδομένα → χ^2

Δεδομένα → Πιθανοφάνεια

Μέθοδος Ροπών



$$\mu_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t \cdot f(x,p) \longrightarrow$$ Θεωρητικές Τιμές

Πειραματικά

$$M_t = \frac{1}{N}\sum^{N} (x_i)^t \longrightarrow$$ Πειραματικές Ροπές

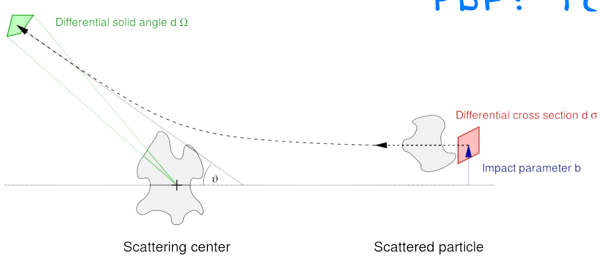
Εύρεση Παραμέτρων

$$\mu_t(p) = M_t$$

Παράδειγμα

$$PDF = A(1 + a \cdot \cos\theta) \xrightarrow{x=\cos\theta} \int_{-1}^{1} A(1+ax)\,dx = 1$$

$$PDF: \; f(x,a) = \frac{1}{2}(1+ax)$$



$$\langle x \rangle = \int_{-1}^{1} x\, f(x,a) \cdot dx = \frac{2}{3}a$$

STEP 1: Δίνω πίνακες δεδομένων.

STEP 2: Ορίζω,

$$M_1 = \sum \frac{y_i \cdot x_i}{y_i}$$ Μέση Τιμή

$$M_2 = \sqrt{\sum \frac{y_i\,(x_i - \bar{x})^2}{y_i}}$$ Απόκλιση

Παράδειγμα:

x	y
1	2
2	2
3	3
4	3
5	2
6	2

$$\bar{x} = M_1 = \sum \frac{y_i \cdot x_i}{y_i} = 3.5$$

$$\sigma_x^2 = M_2 = \sqrt{\sum \frac{y_i\,(x_i - x)^2}{y_i}} = 1.59$$

Ελαχίστων Τετραγώνων

$$\chi^2 = \sum \frac{(f(x_i,\theta) - y_i)^2}{\sigma_i^2} \longrightarrow \frac{\partial \chi^2}{\partial p_j} = 0$$

$$S_K = \sum \frac{x_i^{K}}{\sigma_i^2} \longrightarrow$$ Ροπών y

$$M_K = \sum \frac{x_i^{K} \cdot y_i}{\sigma_i^2} \longrightarrow$$ Δυναμοσειρές x

Γραμμική Περίπτωση

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{a + b \cdot x_i - y_i}{\sigma_i} \right)^2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} a \cdot S_0 + b \cdot S_1 &= M_0 \\ a \cdot S_1 + b \cdot S_2 &= M_1 \end{aligned}$$

Σύστημα προς επίλυση

STEP 1: Εφαρμόζω

$$b = \frac{M_0/S_0 - M_1/S_1}{S_1/S_0 - S_2/S_1}$$

$$a = \frac{M_1 - b \cdot S_2}{S_1}$$

STEP 2: Εφαρμόζω $y = bx + a$

Παραβολή

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{a + b \cdot x_i + c x_i^2 - y_i}{\sigma_i} \right)^2$$

$$\downarrow$$

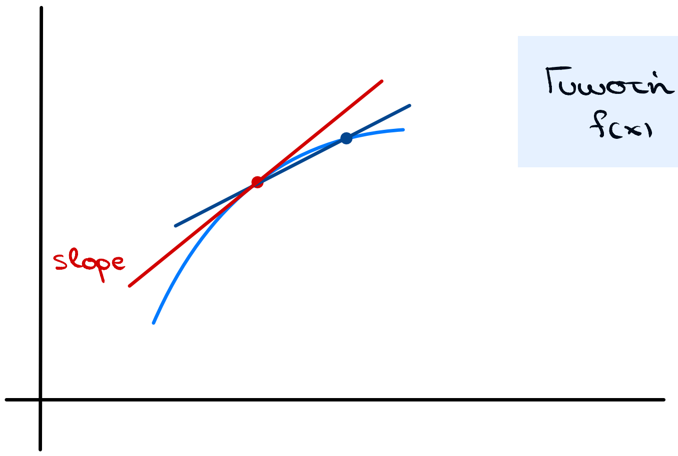
$$\begin{aligned} a S_0 + b S_1 + c S_2 &= M_0 \\ a S_1 + b S_2 + c S_3 &= M_1 \\ a S_2 + b S_3 + c S_4 &= M_2 \end{aligned}$$

Σύστημα προς επίλυση

Αριθμητική Παραγώγιση

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

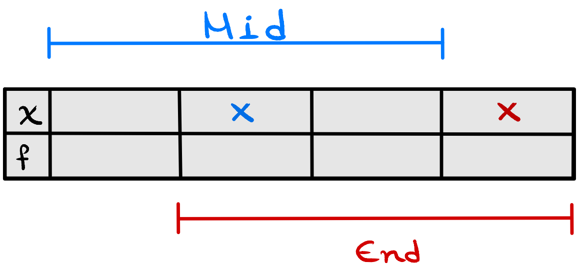
Forward - derivative



Γνωστή $f(x)$ → $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$\text{Error} = -\frac{h}{2} f''(\xi)$$

3 - Points derivative



Ενδιάμεσο Σημείο

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Τελευταίο Σημείο

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)}{2h}$$

5 - Points derivative

Mid

x				$\times$			$\times$
f							

End

Ενδιάμεσο Σημείο

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{12h}$$

Τελευταίο Σημείο

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)}{12h}$$

Παράγωγος από δεδομένα

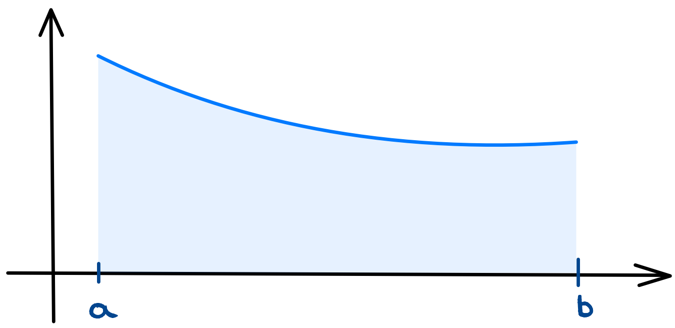
0.1

x	1.8	1.9			
$f(x)$					

$$f(x) \longrightarrow \quad i = \frac{x_0 - 1.8}{0.1}$$

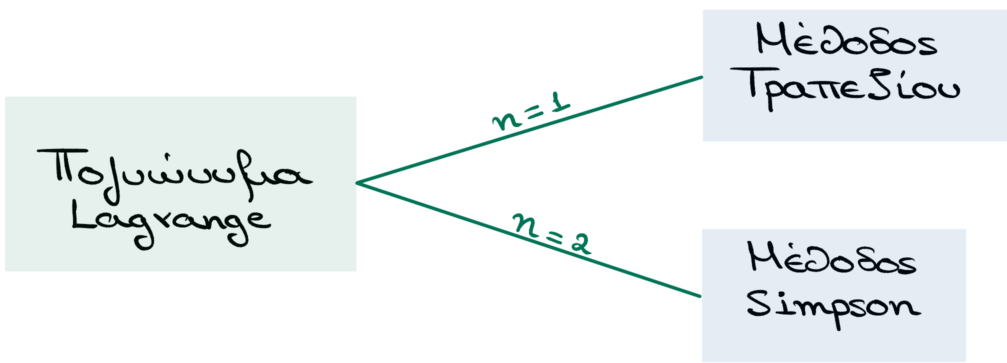
$$\longrightarrow y[i]$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση



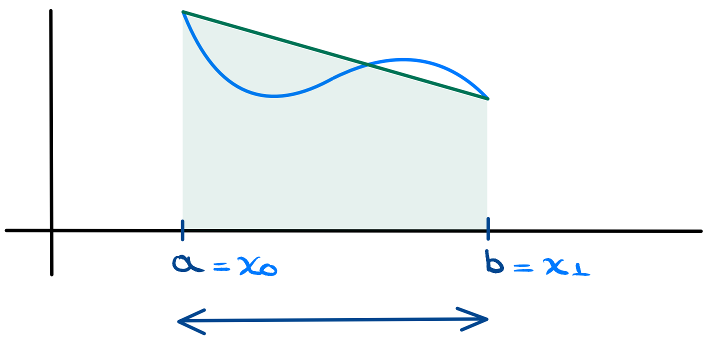
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i^n \left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot f(x_i)$$

Ορισμός



$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \int_a^b P_n(x)\cdot dx = \sum^n \int_a^b f(x_i)\cdot L_{n,i}(x)\cdot dx$$

Κανόνας Τραπεζίου



$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) \right]$$

$$h = b-a$$

Μέθοδος Τραπεζίου

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + \sum_{1}^{n-1} 2\cdot f(x_i) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

Σφάλμα Τραπεζίου

$$E(\tau\rho\alpha\pi) = -\frac{(b-a)^3}{12}\cdot\frac{1}{n^2} f''(\xi)$$

$$E = \frac{S_{2n} - S_n}{3}$$

Παράδειγμα Για το $I = \int_0^4 e^x dx$, με την μέθοδο Τραπεζίου

a) 1 υποδιάστημα
b) 4 υποδιαστήματα
c) Σε πόσα διαστήματα πρέπει να χωρίσουμε το διάστημα [0,4] για να έχουμε ακρίβεια 0.01

a. $I = \frac{(4-0)}{2}\left(e^0 + e^4\right) = 111.196$

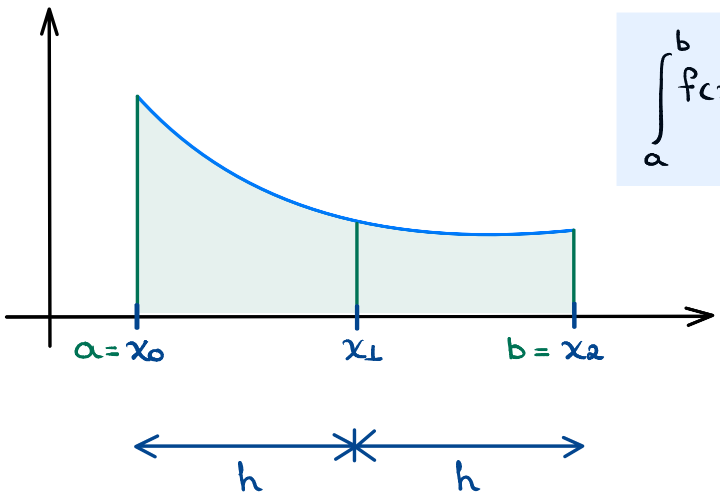
b. $I = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$

$= \frac{1}{2}\left(e^0 + e^1\right) + \frac{1}{2}\left(e^1 + e^2\right) + \frac{1}{2}\left(e^2 + e^3\right) + \frac{1}{2}\left(e^3 + e^4\right) = 57.99$

c. $E = \frac{(b-a)^3}{12}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot f''(\xi) = \frac{4}{12}\cdot\frac{1}{n^2} e^4 < 0.01$

Επομένως $n^2 \geq \frac{4^3}{12}\cdot\frac{e^4}{0.01} = 2.91\cdot 10^4 \Rightarrow n \geq 171$

Κανόνας Simpson



$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Μέθοδος Simpson

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{0}^{n-2:2} f(x_{2i}) + 4\sum_{1}^{n-1:2} f(x_{2i-1}) + f(b)\right]$$

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

Σφάλματα Simpson

$$E_{(simp)} = -\frac{(b-a)^5}{180}\cdot\frac{1}{16n^2}\cdot f^{(4)}(\xi)$$

$$E_{2n} = \frac{S_{2n} - S_n}{15}$$

Παράδειγμα Για το $I = \int_0^4 e^x dx$, με την μέθοδο Simpson

a) 1 υποδιάστημα
b) 4 υποδιαστήματα
c) Σε πόσα διαστήματα πρέπει να χωρίσουμε το διάστημα $[0,4]$ για να έχουμε ακρίβεια 0.01

a. $$I = \frac{\frac{4-0}{2}}{3}\left(e^0 + 4\cdot e^2 + e^4\right) = 56.769$$

b. $$I = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

$$\frac{1}{6}\left(e^0 + 4\cdot e^{0.5} + e^1\right) + \frac{1}{6}\left(e^1 + 4\cdot e^{1.5} + e^2\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(e^2 + 4\cdot e^{2.5} + e^3\right) + \frac{1}{6}\left(e^3 + 4\cdot e^{3.5} + e^4\right) = 53.616$$

c. $$E_{(simpson)} = \frac{(b-a)^5}{180}\,\frac{1}{16n^4}\,f^{(4)}(\xi) = \frac{4^5}{180}\,\frac{1}{16n^4}\,e^4 < 0.01$$

$$n^4 \geq \frac{4^5}{180\cdot 16}\,\frac{e^4}{0.01} \geq 7$$

Newton - Cotes Open (3)

$$I = \frac{4h}{3}\left(2f_0 - f_1 + 2f_2\right) \longrightarrow \frac{14}{15} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$h = \frac{b-a}{4}$$

Μέθοδος Gauss

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\Big((b-a)t + a + b\Big) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\tilde{x})\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

Διαφορικές Εξισώσεις

- Μονοβηματικές
  - Euler
  - Taylor
  - Runge - Kutta
- Πολυβηματικές
  - Adams

Μέθοδος Euler

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

$$a \le t \le b\ , \quad y(a) = c$$

$$\xrightarrow{\tau = \frac{b-a}{N}}$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \tau \cdot y'(t_i)$$

Βήμα 1: Ορίζω a, b, c, τ σταθερές

Ορίζω συνάρτηση f = lambda t,y: " y' "

Βήμα 2: Ορίζω πίνακες w και t

```
t = np.arrange(a, b+τ, τ)   →   N = len(t)

w = np.zeros(N)
```

Βήμα 3: Υπολογίζω

```
w[0]   = c
w[i+1] = w[i] + τ * f(t[i], w[i])
```

Repeat

$i \rightarrow N-1$

Μέθοδος Taylor

$$w_0 = c$$
$$w_{i+1} = w_i + \tau \cdot T^{(n)}(t_i, w_i)$$

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{\tau}{2} f'(t_i, w_i) + \dots + \frac{\tau^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i)$$

Παράδειγμα Ποια η μέθοδος Taylor 2ης και 3ης Τάξης για το $y' = \frac{1}{2} y$ για $0 \le t \le 2$, $y(0) = 1$

- $f(t, y(t)) = \frac{1}{2} y$
- $f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} y\right) = \frac{1}{4} y$
- $f''(t, y(t)) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2} y\right) = \frac{1}{8} y$

2η Τάξη:

$$w_0 = 1$$
$$w_{i+1} = w_i + \tau \cdot T^{(2)}$$

$$T^{(2)} = f(t_i, w_i) + \frac{\tau}{2} f'(t_i, w_i)$$
$$= \frac{1}{2} w_i + \frac{\tau}{2}\left(\frac{1}{4} w_i\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{8}\right) w_i$$

$$w_0 = 1$$
$$w_{i+1} = w_i + \tau \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{8}\right) w_i\right]$$

3η Τάξη:

$$w_0 = 1$$
$$w_{i+1} = w_i + \tau \cdot T^{(3)}$$

$$T^{(2)} = f(t_i, w_i) + \frac{\tau}{2} f'(t_i, w_i) + \frac{\tau^2}{2 \cdot 3} f''(t_i, w_i)$$

$$= \frac{1}{2} w_i + \frac{\tau}{2}\left(\frac{1}{4} w_i\right) + \frac{\tau^2}{6}\left(\frac{1}{8} w_i\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{8} + \frac{\tau^2}{48}\right) w_i$$

$$\Longrightarrow \quad w_0 = 1$$
$$w_{i+1} = w_i + \tau \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{8} + \frac{\tau^2}{48}\right) w_i\right]$$

Runge - Kutta

- Runge - Kutta
  - 2ης Τάξης
  - 3ης Τάξης
  - 4ης Τάξης

$2^{ης}$ Τάξης

$$
\begin{aligned}
w_0 &= c \\
w_{i+1} &= w_i + \tau \cdot f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, \quad w_i + \frac{\tau}{2} \cdot f(t_i, w_i) \right)
\end{aligned}
$$

$3^{ης}$ Τάξης

$$
\begin{aligned}
w_0 &= c \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{\tau}{2} \cdot \left[f(t_i, w_i) + f\left(t_{i+1}, \quad w_i + \tau \cdot f(t_i, w_i)\right) \right]
\end{aligned}
$$

$4^{ης}$ Τάξης

$$
\begin{aligned}
w_0 &= c \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \tau\, f(t_i, w_i) \\
k_2 &= \tau\, f(t_i + \tau/2, w_i + k_1/2) \\
k_3 &= \tau\, f(t_i + \tau/2, w_i + k_2/2) \\
k_4 &= \tau\, f(t_i + \tau, w_i + k_3)
\end{aligned}
$$

Διαφορικές Εξισώσεις II

$$
\frac{dy^{(m)}}{dt} = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) \longrightarrow
\begin{aligned}
u_1(t) &= y(t) \\
u_2(t) &= y'(t) \\
u_3(t) &= y''(t) \\
u_4(t) &= y'''(t) \\
&\vdots \\
u_m(t) &= y^{(m-1)}(t)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$ $\quad 0 \le t \le t_1 \quad y(0) = h$ και $y'(0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -g \end{aligned}\right] \xrightarrow[?]{\text{Euler}} \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \tau \cdot v(t) \\ v_{i+1} &= v_i - \tau \cdot g(t) \end{aligned}$$

?

$$y = y(0) + v(0) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v(0) - g \cdot t$$