Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Σειρές

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\text{i.}\ \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 4^\kappa \qquad \text{ii.}\ \sum_{\kappa=1}^{+\infty}(2\kappa-1) \qquad \text{iii.}\ \sum_{\kappa=1}^{+\infty}(-1)^\kappa$$

$$\text{iv.}\ \sum_{\kappa=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa \qquad \text{v.}\ \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^\kappa \qquad \text{vi.}\ \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{-\kappa}$$

Λύση:

i. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = 4$ και λόγο $r = 4$. Επομένως:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 4^\kappa = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^\nu = \frac{4(1-4^\nu)}{1-4} = \frac{4}{3}(4^\nu - 1)$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1-r^\nu)}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\frac{4}{3}(4^\nu-1) = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε $|r| > 1$

ii. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε μια αριθμητική σειρά.

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\nu-1) = \frac{\nu}{2}(1 + 2\nu - 1) = \nu^2$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu)$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \nu^2 = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε είναι αριθμητική σειρά με $d \neq 0$

iii. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^\kappa = (-1) + (+1) + (-1) + (+1) + \cdots + (-1)^\nu = \begin{cases} -1, & \nu \text{ περιττός} \\ 0, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Επομένως, καθώς το ν τείνει στο άπειρο, το s_ν δεν υπάρχει, γιατί η τιμή του κυμαίνεται στους δύο αριθμούς -1 και 0. Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει.

iv. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = -\frac{1}{2}$ και λόγο $r = -\frac{1}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right), \end{aligned}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1 - r^\nu)}{1 - r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = -\lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right) = -\frac{1}{3}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει, άλλωστε είναι γεωμετρική με $|r| < 1$

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa = -\frac{1}{3}$$

Προσοχή, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, άμεσα από τον τύπο (γεωμετρικής σειράς)

$$\lim_{\nu\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{-1/2}{1-(-1/2)} = -\frac{1}{3}$$

v. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με $a_1 = 3$ και $r = 3$:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 3^\kappa = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^\nu = \frac{3(1-3^\nu)}{1-3} = \frac{3^{\nu+1}-3}{2}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1-r^\nu)}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε $|r| > 1$.

vi. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με $a_1 = \frac{1}{3}$ και $r = \frac{1}{3}$:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 3^{-\kappa} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^\nu} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^\nu\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^\nu}{2}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1-r^\nu)}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \frac{1}{2}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει, άλλωστε $|r| < 1$, και

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{-\kappa} = \frac{1}{2}.$$

Προσοχή, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, άμεσα από τον τύπο (γεωμετρικής σειράς)

$$\lim_{\nu\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1/3}{1-(1/3)} = -\frac{1}{2}$$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\text{i.}\quad \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n}2^{4n+1} \quad \text{ii.}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}} \quad \text{iii.}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n}$$

$$\text{iv.}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{3-n}}{8^{2-n}} \quad \text{v.}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}} \quad \text{vi.}\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n}\, 2^{1-3n}$$

Λύση:

i.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-(n-2)}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}4^2}{9^{n-1}9^{-1}}$$

Μπορούμε να το φέρουμε σε τυποποιημένη μορφή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 16 \cdot 9 \left(\frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 144 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a = 144$ και $r = \frac{4}{9} < 1$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$ η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \frac{144}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}(144) = \frac{1296}{5}$$

ii.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-4)^3)^n}{5^n 5^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 5\frac{(-64)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{-64}{5}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 5$ και $r = -\frac{64}{5}$. Δεδομένου ότι $|r| \geq 1$ η σειρά αποκλίνει.

iii.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5\frac{1}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 5$ και $r = \frac{1}{6}$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \frac{5 \cdot \frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

iv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{3-n}}{8^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}8^{-1}}{(-6)^{n-1}(-6)^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^2}{8^1} \left(\frac{8}{-6}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2} \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a = \frac{9}{2}$ και $r = -\frac{4}{3}$. Δεδομένου ότι $|r| > 1$, η σειρά αποκλίνει.

v.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}5^2}{7^{n-1}7^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (25)(7) \frac{5^{n-1}}{7^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 175 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a = 175$ και $r = \frac{5}{7}$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 175 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-1} = \frac{175}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{1225}{2}$$

vi.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = 3^{2+0} 2^{1-3\cdot 0} + \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = 18 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 2^{-3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 18 \cdot \frac{3^n}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 18 \left(\frac{3}{8}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 18$ και $r = \frac{3}{8} < 1$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει και το άθροισμα της σειράς από $n = 1$ είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 18 \left(\frac{3}{8}\right)^n = 18 \cdot \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = 18 \cdot \frac{3/8}{5/8} = \frac{54}{5}$$

Προσθέτοντας τον πρώτο όρο $n = 0$:

$$18 + \frac{54}{5} = \frac{90 + 54}{5} = \frac{144}{5}$$

Επομένως,

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = \frac{144}{5}.$$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω τηλεσκοπικές σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\text{i.}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2} \qquad \text{ii.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$$

$$\text{iii.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+7n+12} \qquad \text{iv.}\quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{10}{n^2-4n+3}$$

Λύση:

i.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i^2+3i+2}.$$

Σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{i^2+3i+2}=\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}.$$

Το μερικό άθροισμά είναι,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2} \\ &= 1-\frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=1.$$

ii. Το μερικό άθροισμα είναι,

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{i+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{i+3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{5}{12}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{5}{12}$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{3}{n^2+7n+12} = \frac{3}{(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+4}$$

$$\rightarrow \quad 3 = A(n+4) + B(n+3)$$

$$n=-3 \quad \Rightarrow \quad 3 = A$$

$$n=-4 \quad \Rightarrow \quad 3 = -B \quad \Rightarrow \quad B = -3$$

$$A = 3$$

$$\frac{3}{n^2+7n+12} = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+4}$$

Το μερικό άθροισμα είναι,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{i+3} - \frac{3}{i+4}\right]$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{i+3} - \frac{3}{i+4}\right] = \left[\frac{3}{4} - \cancel{\frac{3}{5}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{5}} - \cancel{\frac{3}{6}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{6}} - \cancel{\frac{3}{7}}\right] + \cdots$$

$$+ \left[\cancel{\frac{3}{n+1}} - \cancel{\frac{3}{n+2}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{n+2}} - \cancel{\frac{3}{n+3}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{n+3}} - \frac{3}{n+4}\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{n+4}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{n+4}\right] = \frac{3}{4}$$

iv. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{10}{n^2-4n+3} = \frac{10}{(n-1)(n-3)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n-3}$$

$$\rightarrow \quad 10 = A(n-3) + B(n-1)$$

$$
\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad 10 = -2A \quad \Rightarrow \quad A = -5 \\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad 10 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = 5
\end{aligned}
$$

$$\frac{10}{n^2 - 4n + 3} = \frac{5}{n-3} - \frac{5}{n-1}$$

Το μερικό άθροισμα είναι,

$$s_n = \sum_{i=4}^{n} \left[\frac{5}{i-3} - \frac{5}{i-1} \right]$$

$$
\begin{aligned}
= &\left[\frac{5}{1} - \cancel{\frac{5}{3}}\right] + \left[\frac{5}{2} - \cancel{\frac{5}{4}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{3}} - \cancel{\frac{5}{5}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{4}} - \cancel{\frac{5}{6}}\right] \\
&+ \left[\cancel{\frac{5}{5}} - \frac{5}{7}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{6}} - \cancel{\frac{5}{8}}\right] + \cdots \\
&+ \left[\cancel{\frac{5}{n-7}} - \cancel{\frac{5}{n-5}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{n-6}} - \cancel{\frac{5}{n-4}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{n-5}} - \cancel{\frac{5}{n-3}}\right] \\
&+ \left[\cancel{\frac{5}{n-4}} - \frac{5}{n-2}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{n-3}} - \frac{5}{n-1}\right]
\end{aligned}
$$

$$= 5 + \frac{5}{2} - \frac{5}{n-2} - \frac{5}{n-1}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{15}{2} - \frac{5}{n-2} - \frac{5}{n-1} \right] = \frac{15}{2}$$

4*. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου (Ratio Test).

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$ ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ iii. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$

iv. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{(-2)^{n+1}n}$ v. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ vi. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2n+7}$

Λύση:

i.

$$a_n = \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2(n+1)+1}((n+1)+1)} = \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)}$$

Επομένως,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right|$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} \cdot \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)} \right| \\ &= \frac{10}{16} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{10}{16} < 1 \end{aligned}$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

ii.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{5\, n!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n!}{5\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty > 1$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

iii.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)n^2} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

iv.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{9^{n+1}}{(-2)^{n+2}(n+1)} \cdot \frac{(-2)^{n+1}n}{9^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{9n}{(-2)(n+1)} \right| \\ &= \frac{9}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{9}{2} > 1 \end{aligned}$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

v.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

Επομένως δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την σύγκλιση μέσω του κριτηρίου λόγου.

Σημείωση:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}, \quad n \ge 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει (p–σειρά, με } p = 2 > 1).$$

$$\text{Άρα, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \text{ συγκλίνει απολύτως.}$$

vi.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+3}{2(n+1)+7} \cdot \frac{2n+7}{n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(2n+7)}{(2n+9)(n+2)} = 1$$

Επομένως δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την σύγκλιση μέσω του κριτηρίου λόγου.

5*. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο ρίζας(Root Test).

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$

ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$

iii. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-12)^n}{n}$

i.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n}{3^{1+2n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^{\frac{1}{n}+2}} = \frac{\infty}{3^2} = \infty > 1$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

ii.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right| = \left|\frac{-3}{7}\right| = \frac{3}{7} < 1$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

iii.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-12)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^{1/n}} = \frac{12}{1} = 12 > 1$$

Η σειρά απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

6. Ο γενικός τύπος Faulhaber δίνεται πιο κάτω.

$$\sum_{n=1}^{N} n^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k \, N^{\,p+1-k}$$

όπου για $p = 1, 2, 3$ είναι,

$$\begin{aligned} p=1: \quad & \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}, \\ p=2: \quad & \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \\ p=3: \quad & \sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα, χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω.

i. $\sum\limits_{k=1}^{v}(4k^3+2k)$

ii. $\Sigma = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + \nu(\nu+1)(\nu+2)$

iii. $\sum\limits_{k=11}^{30}\left(6k^2+2k\right)$

i. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αθροίσματος και τα γνωστά αποτελέσματα

$$\sum_{k=1}^{\nu} k, \qquad \sum_{k=1}^{\nu} k^3$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu}(4k^3+2k) &= 4\sum_{k=1}^{\nu} k^3 + 2\sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= 4\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + 2\frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ &= \nu^2(\nu+1)^2 + \nu(\nu+1) \\ &= \nu(\nu+1)[\nu(\nu+1)+1] \\ &= \nu(\nu+1)(\nu^2+\nu+1) \end{aligned}$$

ii.

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+2)$$

Κάνοντας τις πράξεις, και χρησιμοποιώντας τις σχετικές ιδιότητες των αθροισμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{\nu} k(k^2+3k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{\nu}(k^3+3k^2+2k) \\
&= \sum_{k=1}^{\nu} k^3 + 3\sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 2\sum_{k=1}^{\nu} k \\
&= \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + 3\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2\frac{\nu(\nu+1)}{2} \\
&= \frac{\nu(\nu+1)}{4}\left(\nu(\nu+1)+2(2\nu+1)+4\right) \\
&= \frac{\nu(\nu+1)}{4}(\nu^2+5\nu+6) \\
&= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}
\end{aligned}$$

iii.

$$\sum_{k=11}^{30}(6k^2+2k) = \sum_{k=1}^{30}(6k^2+2k) - \sum_{k=1}^{10}(6k^2+2k) = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το ζητούμενο άθροισμα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους:

$$\sum_{k=1}^{\nu}(6k^2+2k) = 6\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2\frac{\nu(\nu+1)}{2} = \nu(\nu+1)(2\nu+1+1) = 2\nu(\nu+1)^2$$

- Για $\nu = 30$, έχουμε: $\Sigma_1 = 2\cdot 30\cdot 31^2 = 57660$
- Για $\nu = 10$, έχουμε: $\Sigma_2 = 2\cdot 10\cdot 11^2 = 2420$

Επομένως:

$$\sum_{k=11}^{30}(6k^2+2k) = \Sigma_1 - \Sigma_2 = 57660 - 2420 = 55240$$