

---

## Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος

### Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

---

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

i.  $\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii.  $\text{τοξσυν}(1)$

iii.  $\text{τοξεφ}(1)$

iv.  $\text{τοξημ}(\eta\mu(2\pi/3))$

v.  $\text{συν}\left(\text{τοξημ}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

vi.  $\eta\mu(2\text{τοξεφ}\sqrt{2})$

Λύση:

(Ασκ. 1/120)

i.

$$\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \text{διότι } \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ii.

$$\text{τοξσυν}(1) = 0, \quad \text{διότι } \text{συν}(0) = 1.$$

iii.

$$\text{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{διότι } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

iv.

$$\text{τοξημ}(\eta\mu(2\pi/3)) = \text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

v.

$$\text{συν}(\text{τοξημ}(\frac{1}{2})) = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

vi. Έστω  $\alpha = \text{τοξεφ}\sqrt{2}$ . Τότε  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Άρα:

$$\eta\mu(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i.  $\eta\mu\left(\text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

ii.  $\sigma\upsilon\nu\left(\text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

Λύση:

(Ασκ. 2/120)

Θέτουμε

$$\theta = \text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sigma\varphi\theta = -\frac{1}{2}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Εφόσον  $\sigma\varphi\theta < 0$ , προκύπτει  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , άρα  $\eta\mu\theta > 0$  και  $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ .

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$1 + \sigma\varphi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta},$$

η οποία προκύπτει από  $\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$  και  $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ :

$$1 + \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right)^2 = \frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{1}{\eta\mu^2\theta}.$$

Με  $\sigma\varphi\theta = -\frac{1}{2}$  έχουμε

$$\eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\varphi^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} > 0.$$

Επίσης  $\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta$ , οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0.$$

3. Να αποδείξετε ότι, για  $x \neq 0$ ,

$$\text{τοξ}\epsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{τοξ}\epsilon\varphi x, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \text{τοξ}\epsilon\varphi x, & x < 0. \end{cases}$$

Λύση:

(Ασκ. 3/120)

Θέτουμε  $\theta = \text{τοξεφ } x$ . Τότε  $\varepsilon\varphi \theta = x$  και  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Θέτουμε επίσης  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Έχουμε

$$\varepsilon\varphi \varphi = \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sigma\varphi \theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi \theta} = \frac{1}{x}.$$

Άρα  $\varphi$  είναι κάποια γωνία με εφαπτομένη  $1/x$ . Επειδή η  $\text{τοξεφ}$  παίρνει τιμές στο  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

i.  $x > 0$ . Τότε  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  και άρα  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Επομένως η κύρια τιμή είναι ακριβώς αυτή:

$$\text{τοξεφ}(\frac{1}{x}) = \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ } x.$$

ii.  $x < 0$ . Τότε  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  και  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , άρα δεν ανήκει στο διάστημα τιμών της  $\text{τοξεφ}$ . Χρησιμοποιούμε την περιοδικότητα της εφαπτομένης ( $\varepsilon\varphi(\alpha - \pi) = \varepsilon\varphi \alpha$ ) και παίρνουμε

$$\text{τοξεφ}(\frac{1}{x}) = \varphi - \pi = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \theta = -\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ } x.$$

Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει ο ζητούμενος τύπος. □

4. Να εκφράσετε τις παραστάσεις  $\eta\mu(\text{τοξεφ } x)$  και  $\sigma\upsilon\nu(\text{τοξεφ } x)$  ως αλγεβρικές παραστάσεις του  $x$ .

Λύση:

(Ασκ. 4/120)

i. Θέτουμε  $\theta = \text{τοξεφ } x \Rightarrow \varepsilon\varphi \theta = x$  και  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \theta > 0$ . Από την ταυτότητα  $1 + \varepsilon\varphi^2 \theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \theta}$  παίρνουμε

$$\sigma\upsilon\nu \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \eta\mu \theta = \varepsilon\varphi \theta \cdot \sigma\upsilon\nu \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Άρα

$$\eta\mu(\text{τοξεφ } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii. Θέτουμε  $\varphi = \text{τοξσφ } x \Rightarrow \sigma\varphi \varphi = x$  και  $\varphi \in (0, \pi) \Rightarrow \eta\mu \varphi > 0$ . Από την ταυτότητα  $1 + \sigma\varphi^2 \varphi = \frac{1}{\eta\mu^2 \varphi}$  έχουμε

$$\eta\mu \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu \varphi = \sigma\varphi \varphi \cdot \eta\mu \varphi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Άρα

$$\sigma\upsilon\nu(\text{τοξσφ } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια.

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\zeta\eta\mu x}{e^{2x} - 1} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\zeta\eta\mu x}{\tau\omicron\zeta\epsilon\varphi(2x)} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\tau\omicron\zeta\epsilon\varphi(2x)} \quad \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\zeta\epsilon\varphi x - x + \frac{x^3}{3}}{x^3}$$

Λύση:

(Ασκ. 1/124)

i. Μορφή 0/0. Εφαρμόζουμε de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\zeta\eta\mu x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

ii. Μορφή 0/0. De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\zeta\eta\mu x}{\tau\omicron\zeta\epsilon\varphi(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2}{1+(2x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+(2x)^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}.$$

iii. Μορφή 0/0. De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\tau\omicron\zeta\epsilon\varphi(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sigma\upsilon\nu(2x)}{\frac{2}{1+(2x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu(2x) (1+4x^2) = 1.$$

iv. Μορφή 0/0. Θέτουμε  $f(x) = \tau\omicron\zeta\epsilon\varphi x - x + \frac{x^3}{3}$ . Εφαρμόζουμε de L'Hôpital δύο φορές:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2.$$

Και πάλι 0/0. Ξανά de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x^2)^2} + 1}{6} = \frac{0}{6} = 0.$$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \tauοξημ\left(\frac{x}{2}\right)$

ii.  $f(x) = \tauοξσυν\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

iii.  $f(x) = \tauοξεφ(\epsilon\varphi^2 x)$

iv.  $f(x) = \tauοξεφ(x + \sqrt{1+x^2})$

v.  $f(x) = \tauοξσυν\left(\frac{1}{x}\right)$

Λύση:

(Ασκ. 2/124)

i.  $f(x) = \tauοξημ\left(\frac{x}{2}\right)$

Πεδίο ορισμού:  $|x/2| \leq 1 \Rightarrow x \in [-2, 2]$ .

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(x/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in (-2, 2).$$

ii.  $f(x) = \tauοξσυν\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

Πεδίο ορισμού:  $-1 \leq \frac{1-x}{\sqrt{2}} \leq 1 \Rightarrow x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ .

Παράγωγος:

$$f'(x) = -\frac{-1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}, \quad x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}).$$

iii.  $f(x) = \tauοξεφ(\epsilon\varphi^2 x)$

Πεδίο ορισμού: ορίζεται η  $\epsilon\varphi x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{(\epsilon\varphi^2 x)'}{1 + \epsilon\varphi^4 x} = \frac{2 \epsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigmaυν^2 x}}{1 + \epsilon\varphi^4 x} = \frac{2 \epsilon\varphi x (1 + \epsilon\varphi^2 x)}{1 + \epsilon\varphi^4 x}.$$

iv.  $f(x) = \text{τοξεφ}(x + \sqrt{1+x^2})$

Πεδίο ορισμού: για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αφού  $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ .

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + (x + \sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

v.  $f(x) = \text{τοξσυν}(\frac{1}{x})$

Πεδίο ορισμού:  $|\frac{1}{x}| \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .

Παράγωγος:

$$f'(x) = -\frac{-1/x^2}{\sqrt{1-(1/x)^2}} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| \geq 1, x \neq 0.$$

7. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f(x) = 3x - \text{τοξημ} x$ , με  $A_f = [-1, 1]$ .

Λύση:

(Ασκ. 3/124)

Για  $x \in (-1, 1)$  έχουμε

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Θέτουμε  $f'(x) = 0$ :

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3} \iff x^2 = \frac{8}{9} \iff x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**Σχόλιο:** Στα άκρα  $x = \pm 1$  η παράγωγος δεν ορίζεται κάποια σχολικά τα περιλαμβάνουν ως «κρίσιμα» μόνο όταν ζητούνται άκρα σε κλειστό διάστημα. Εδώ, ως εσωτερικά κρίσιμα σημεία, είναι μόνο τα  $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

8. Να βρείτε τα τοπικά μέγιστα/ελάχιστα των παρακάτω συναρτήσεων και να συμπληρώσετε τον πίνακα μονοτονίας:

i.  $f(x) = x - 2 \text{τοξεφ } x$

ii.  $f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$

iii.  $f(x) = \text{τοξημ}(e^x)$ .

Λύση:

(Ασκ. 4/124)

i.  $f(x) = x - 2 \text{τοξεφ } x$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}.$$

Κρίσιμα σημεία (εσωτερικά):  $x = \pm 1$ .

Πίνακας μονοτονίας:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$

Άρα: τοπικό μέγιστο στο  $x = -1$  με  $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$ , τοπικό ελάχιστο στο  $x = 1$  με  $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$ .

ii.

$f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$

$$A_f = [-1, 1], \quad f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad |x| < 1.$$

Εσωτερικό κρίσιμο σημείο:  $x = 0$ .

Πίνακας μονοτονίας στο  $[-1, 1]$ :

$x$	$-1$	$0$	$1$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	TM	$\searrow$

Επιπλέον, στα άκρα:  $f(\pm 1) = \text{τοξσυν}(1) = 0$  (τοπικά ελάχιστα στο κλειστό διάστημα).

Στο  $x = 0$ : τοπικό μέγιστο  $f(0) = \text{τοξσυν}(0) = \frac{\pi}{2}$ .

iii.

$$\underline{f(x) = \text{τοξημ}(e^x).$$

$$A_f = (-\infty, 0], \quad f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \quad x < 0.$$

Για  $x < 0$ ,  $f'(x) > 0$  (αύξουσα).

Πίνακας μονοτονίας:

$x$	$-\infty$	$0$
$f'(x)$		+
$f(x)$		↗ Μέγιστο στο άκρο

Τιμές:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{τοξημ}(0) = 0$ , ενώ  $f(0) = \text{τοξημ}(1) = \frac{\pi}{2}$ . Άρα στο  $x = 0$  η  $f$  έχει (καθολικό/τοπικό) μέγιστο στο άκρο του πεδίου.

9. Να δείξετε ότι:

$$x \leq \text{τοξημ} x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Λύση:

(Ασκ. 5/124)

Θέτουμε  $g(x) = \text{τοξημ} x - x$  για  $x \in [0, 1]$ . Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$ . Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

Για  $x \in [0, 1)$  ισχύει  $\sqrt{1-x^2} \leq 1$ , άρα  $g'(x) \geq 0$  (και μάλιστα  $g'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$ ). Επομένως η  $g$  είναι αύξουσα στο  $[0, 1]$  και

$$g(x) \geq g(0) = \text{τοξημ} 0 - 0 = 0.$$

Άρα

$$x \leq \text{τοξημ} x, \quad \forall x \in [0, 1],$$

με ισότητα μόνο στο  $x = 0$  (διότι για  $x \in (0, 1)$  έχουμε  $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$ ).

*Εναλλακτικά:* Θέτουμε  $y = \text{τοξημ} x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x = \eta\mu y$ . Η  $\eta\mu$  είναι κοίλη στο  $[0, \pi]$ , άρα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο 0:  $\eta\mu y \leq y$  για  $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Άρα  $x = \eta\mu y \leq y = \text{τοξημ} x$ .



10. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu\left(\text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{4}{5}\right)\right).$$

Λύση:

(Ασκ. 1/125)

Θέτουμε  $\theta = \text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{4}{5}\right)$ . Τότε  $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$  και  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (κύριο διάστημα τιμών της τοξημ).  
Άρα

$$A = \eta\mu(\theta) = \frac{4}{5}$$

11. Να δείξετε ότι

$$\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση:

(Ασκ. 2/125)

Θέτουμε

$$\alpha = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3}{4}\right), \quad \beta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Τότε

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{4}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{αφού οι συνημίτονες είναι θετικοί}).$$

Άρα

$$\eta\mu\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \eta\mu\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

Υπολογίζουμε το  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$ :

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

Επειδή  $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , έχουμε  $\alpha + \beta \in [0, \pi]$ . Η μοναδική γωνία στο  $[0, \pi]$  με  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = 0$  είναι  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ . Επομένως

$$\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

**12.** Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tauοξσυν(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}.$$

**Λύση:**

(Ασκ. 3/125)

Για  $x \rightarrow 0^+$  έχουμε  $\tauοξσυν(1-x) \rightarrow \tauοξσυν(1) = 0$  και  $\sqrt{x} \rightarrow 0$ , άρα η μορφή είναι  $0/0$  και εφαρμόζουμε τον κανόνα de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tauοξσυν(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx} [\tauοξσυν(1-x)]}{\frac{d}{dx} [\sqrt{x}]}.$$

Ισχύει  $\frac{d}{dx} \tauοξσυν u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ . Με  $u = 1-x \Rightarrow u' = -1$  παίρνουμε

$$(\tauοξσυν(1-x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tauοξσυν(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}.$$

**13.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \frac{x}{2} \tauοξημ x + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2}$

ii.  $f(x) = 2x \tauοξεφ x - \ln(1+x^2)$

iii.  $f(x) = \tauοξημ(\sqrt{1-x})$

**Λύση:**

(Ασκ. 4/125)

i.

$$A_f = [-1, 1], \quad f'(x) = \frac{1}{2} \tauοξημ x + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

(εναλλακτικά:  $f'(x) = \frac{1}{2} \tauοξημ x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{x-x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$ )

ii.

$$A_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 \operatorname{τοξεφ} x \quad (\text{διότι } (2x) \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 0).$$

iii.

$$A_f = [0, 1], \quad f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1.$$

**15.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \operatorname{τεμ} x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  και να σχεδιάσετε πρόχειρα τη γραφική παράστασή της.

Λύση:

(Ασκ. 5/125)

(i) Μονοτονία και εικόνα της  $f$ .

$$f'(x) = (\operatorname{τεμ} x)' = \operatorname{τεμ} x \cdot \operatorname{εφ} x.$$

Στα  $(0, \frac{\pi}{2})$  και  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  ισχύει  $\operatorname{τεμ} x \cdot \operatorname{εφ} x > 0 \Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα σε καθένα. Επίσης

$$\operatorname{τεμ} 0 = 1, \quad \operatorname{τεμ} \pi = -1, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{τεμ} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{τεμ} x = -\infty.$$

Άρα

$$\operatorname{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

(ii) Πεδίο ορισμού και τύπος της  $f^{-1}$ . Η  $f$  είναι 1-1 στο δοθέν πεδίο της, επομένως αντιστρέψιμη, με

$$A_{f^{-1}} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Από  $y = \operatorname{τεμ} x \Leftrightarrow \operatorname{συν} x = \frac{1}{y}$  (και  $\operatorname{τοξσυν} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ) προκύπτει

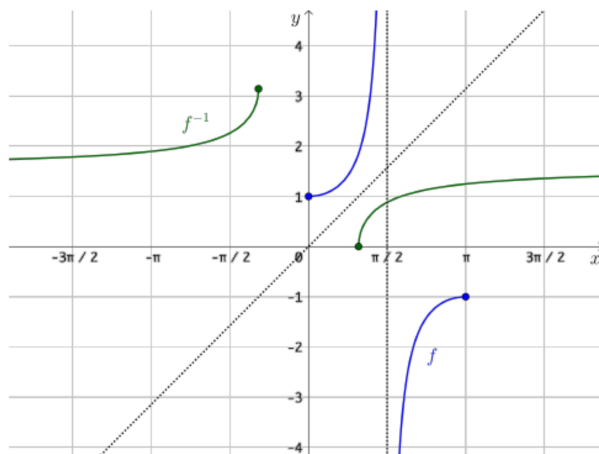
$$f^{-1}(y) = \operatorname{τοξσυν}\left(\frac{1}{y}\right), \quad |y| \geq 1$$

(iii) Οδηγός για το σκίτσο της  $f^{-1}$ . Δύο κλάδοι, συμμετρικοί της γραφικής της  $f$  ως προς  $y = x$ :

$$y \geq 1: \quad f^{-1}(y) = \operatorname{τοξσυν}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y(=x) \uparrow, \quad f^{-1}(1) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}^-,$$

$$y \leq -1: \quad f^{-1}(y) = \operatorname{τοξσυν}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y(=x) \uparrow, \quad f^{-1}(-1) = \pi, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}^+.$$

(Οριζόντια ασύμπτωτη και στους δύο κλάδους:  $y = \frac{\pi}{2}$ .)



16. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = 4 \text{τοξεφ } x - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Λύση:

(Ασκ. 6/125)

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 2 = \frac{2-2x^2}{1+x^2}.$$

Κρίσιμα σημεία από  $f'(x) = 0$ :

$$\frac{4}{1+x^2} - 2 = 0 \iff 4 = 2(1+x^2) \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Πίνακας μονοτονίας:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Τιμές στα κρίσιμα:

$$f(-1) = 4 \text{τοξεφ}(-1) - 2(-1) = -\pi + 2, \quad f(1) = 4 \text{τοξεφ}(1) - 2 = \pi - 2.$$

Τοπικό ελάχιστο στο  $x = -1$  με  $f(-1) = 2 - \pi$ , Τοπικό μέγιστο στο  $x = 1$  με  $f(1) = \pi - 2$

**17.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \text{τοξεφ } x - x + \frac{x^3}{3}$ . Να αποδείξετε ότι  $x - \frac{x^3}{3} < \text{τοξεφ } x$ ,  $\forall x \in (0, +\infty)$ .

Λύση:

(Ασκ. 7/125)

Θέτουμε

$$g(x) = \text{τοξεφ } x - x + \frac{x^3}{3}.$$

Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{-x^2}{1+x^2} + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \text{τοξεφ } 0 - 0 + 0 = 0.$$

Με την αύξηση της  $g$  παίρνουμε  $g(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ , δηλαδή

$$x - \frac{x^3}{3} < \text{τοξεφ } x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

(ισότητα μόνο στο  $x = 0$ ).

$x$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$0$	$\nearrow$

**18.** Να δείξετε ότι

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad 2 \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Λύση:

(Ασκ. 1/126)

Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\text{τοξεφ } a + \text{τοξεφ } b = \text{τοξεφ}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \quad (\text{όταν } ab < 1), \quad 2 \text{τοξεφ } t = \text{τοξεφ}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right) \quad (|t| < 1).$$

(i) Με  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{3}$  έχουμε  $ab = \frac{1}{6} < 1$  και

$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}\right) = \operatorname{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) Πρώτα

$$2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{2/3}{8/9}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{3}{4}\right).$$

Έπειτα, με  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{1}{7}$  (έτσι  $ab = \frac{3}{28} < 1$ ):

$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{3}{4}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{25/28}{25/28}\right) = \operatorname{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα ισχύει

$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right)$$

**19.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \operatorname{τοξημ} x$ ,  $x \in [-1, 1]$  είναι περιττή.

Λύση:

(Ασκ. 2/126)

Θυμόμαστε τον ορισμό: μια συνάρτηση  $f$  είναι *περιττή* αν  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x$  του πεδίου της.

Έστω  $x \in [-1, 1]$  και θέτουμε

$$\theta = \operatorname{τοξημ} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \implies \eta\mu \theta = x.$$

Τότε και  $-\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  και

$$\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu \theta = -x.$$

Με βάση τον ορισμό της  $\operatorname{τοξημ}$  (η μοναδική γωνία του  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  με δεδομένο ημίτονο), προκύπτει

$$\operatorname{τοξημ}(-x) = -\theta = -\operatorname{τοξημ} x.$$

Άρα  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ , δηλαδή η  $f$  είναι *περιττή*. □

**20.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \text{τοξσυν } x$ ,  $x \in [-1, 1]$ , δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

Λύση:

(Ασκ. 3/126)

Για κάθε  $x \in [-1, 1]$  ισχύει

$$\text{τοξσυν}(-x) = \pi - \text{τοξσυν}(x).$$

Πράγματι, αν θέσουμε  $\theta = \text{τοξσυν}(x) \in [0, \pi]$ , τότε  $\cos \theta = x$  και  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -x$ .

Επειδή  $\pi - \theta \in [0, \pi]$  (το διάστημα τιμών της τοξσυν), η μοναδικότητα δίνει  $\text{τοξσυν}(-x) = \pi - \theta = \pi - \text{τοξσυν}(x)$ .

Όχι άρτια:

Αν ήταν άρτια, θα είχαμε  $f(-x) = f(x)$  για όλα τα  $x$ , δηλαδή  $\pi - \text{τοξσυν}(x) = \text{τοξσυν}(x) \Rightarrow \text{τοξσυν}(x) = \frac{\pi}{2}$  για όλα τα  $x$ . Αυτό είναι ψευδές (π.χ.  $f(1) = \text{τοξσυν}(1) = 0 \neq \frac{\pi}{2}$ ). Άρα η  $f$  δεν είναι άρτια.

Όχι περιττή:

Αν ήταν περιττή, θα είχαμε  $f(-x) = -f(x)$  για όλα τα  $x$ , δηλαδή  $\pi - \text{τοξσυν}(x) = -\text{τοξσυν}(x) \Rightarrow \text{τοξσυν}(x) = \frac{\pi}{2}$  για όλα τα  $x$ , που επίσης είναι ψευδές (π.χ.  $f(1) = 0$ ). Άρα η  $f$  δεν είναι περιττή.

Η  $f(x) = \text{τοξσυν } x$  στο  $[-1, 1]$  δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

**21.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \text{τοξεφ } x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ . Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{τοξεφ } x < x, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Λύση:

(Ασκ. 4/126)

(α) Άνω φράγμα. Θέτουμε  $h(x) = x - \text{τοξεφ } x$ , για  $x > 0$ . Τότε

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0, \quad x > 0,$$

άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . Επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$ , παίρνουμε  $h(x) > 0 \Rightarrow \text{τοξεφ } x < x$  για κάθε  $x > 0$ .

(β) *Κάτω φράγμα.* Θέτουμε  $g(x) = \text{τοξεφ } x - \frac{x}{1+x^2}$ , για  $x > 0$ . Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) - (1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

οπότε η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$ . Άρα  $\text{τοξεφ } x > \frac{x}{1+x^2}$  για κάθε  $x > 0$ .

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{τοξεφ } x < x, \quad \forall x > 0$$

**22.** Να αποδείξετε ότι

$$\text{τοξεφ} \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \text{τοξεφ } x + \frac{\pi}{4}, \quad \forall x \in (-\infty, 1),$$

και να βρείτε ανάλογη σχέση για  $x > 1$ .

*Λύση:*

(Ασκ. 5/126)

Θέτουμε  $\theta = \text{τοξεφ } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \tan \theta = x$ .

Για  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{4}$  έχουμε

$$\tan \varphi = \tan \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} = \frac{1+x}{1-x}.$$

• Αν  $x < 1$ , τότε  $\theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Άρα η κύρια τιμή της τοξεφ είναι ακριβώς η  $\varphi$ :

$$\text{τοξεφ} \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \varphi = \text{τοξεφ } x + \frac{\pi}{4}.$$

• Αν  $x > 1$ , τότε  $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  και  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Η τοξεφ επιστρέφει τιμές στο  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , γι' αυτό παίρνουμε την συνεκτική γωνία  $\varphi - \pi$ :

$$\text{τοξεφ} \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \varphi - \pi = \text{τοξεφ } x + \frac{\pi}{4} - \pi = \text{τοξεφ } x - \frac{3\pi}{4}, \quad x > 1.$$



$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \operatorname{τοξεφ} x + \frac{\pi}{4}, & x < 1, \\ \operatorname{τοξεφ} x - \frac{3\pi}{4}, & x > 1. \end{cases}$$