

---

## Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Διαγνωστικό Δοκίμιο 1

---

Όνομα: \_\_\_\_\_

1. [1μ] Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int (5x + e^{3x} + \eta\mu 2x) dx.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int (5x + e^{3x} + \eta\mu 2x) dx &= 5 \int x dx + \int e^{3x} dx + \int \eta\mu 2x dx \\ &= 5 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x + c \\ &= \frac{5x^2}{2} + \frac{e^{3x}}{3} - \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + c.\end{aligned}$$

2. [1μ] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

Λύση:

**1ος τρόπος:** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$ . Είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική, άρα συνεχής στο  $[-1, 1]$  και  $f(-1) = -2 < 0$  και  $f(1) = 4 > 0$ , άρα  $f(-1) \cdot f(1) < 0$ . Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την  $f$  στο διάστημα  $[-1, 1]$ : υπάρχει (τουλάχιστον ένα)  $\xi \in (-1, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = 0$ . Δηλαδή, η εξίσωση  $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$  έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

Θα δείξουμε τώρα ότι έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$ . Υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι η εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες ρίζες έστω  $x_1, x_2$  στο διάστημα  $(-1, 1)$ , δηλαδή  $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $x_1 < x_2$ . Ορίζεται το διάστημα  $[x_1, x_2]$  το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος  $[-1, 1]$ .

Εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την  $f$  στο διάστημα  $[x_1, x_2]$ : υπάρχει (τουλάχιστον ένα)  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

Είναι για κάθε  $x \in (x_1, x_2)$ ,

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5 = 5[3x^2(x^2 - 1) + 1].$$

Εδώ χρειάζεται μελέτη (μονοτονία/ακρότατα) της συνάρτησης  $g(x) = x^2(x^2 - 1)$  : είναι άρτια συνάρτηση, άρα τη μελετάμε στο διάστημα  $(-1, 0)$  και βρίσκουμε ότι έχει ολικά ελάχιστη τιμή την  $-3/4$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$ , δηλαδή  $-3/4 \leq g(x) < 0$  και άρα  $3x^2(x^2 - 1) + 1 > 1/4 > 0$ , δηλαδή  $f'(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_2)$ . Καταλήξαμε σε άτοπο.

**Εναλλακτικά**, θέτουμε  $w = x^2$  και παρατηρούμε ότι το τριώνυμο  $3w^2 - 3w + 5$  είναι  $> 0$ .

Άρα, τουλάχιστον 1 ρίζα και το πολύ 1 ρίζα  $\Rightarrow$  ακριβώς 1 ρίζα.

**2ος τρόπος:** Δείχνουμε όπως και πριν ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον 1 ρίζα και ακολούθως, βρίσκουμε ότι  $f'(x) > 0$  στο διάστημα  $(-1, 1)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, συνεπώς η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

**3. [4μ]** Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

(a)

$$\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx.$$

**Λύση:**

$$\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx = \int (\eta\mu^2 x + 2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x) dx$$

$$(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \quad 2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(2x))$$

$$= \int (1 + \eta\mu(2x)) dx = x - \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x) + c$$

(b)

$$\int \left( e^{2x} + 4x - \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right) dx$$

**Λύση:**

$$\int \left( e^{2x} + 4x - \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right) dx = \int e^{2x} dx + \int 4x dx - \int \left( 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + 2x^2 - x - \arctan x + c.$$

(c)

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+2} dx.$$

**Λύση:** Το τριώνυμο  $x^2+2x+2$  δεν έχει (πραγματικές) ρίζες. Ιδιαίτερα, είναι  $x^2+2x+2 >$

0,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^2+2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-6}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{6}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx. \end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} dx = \ln(x^2+2x+2) + c_1.$$

και για το δεύτερο:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1+1} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx \\ u = x+1 &\Rightarrow \int \frac{1}{u^2+1} du = \text{τοξ} \varepsilon \phi u + c_2 \\ &= \text{τοξ} \varepsilon \phi (x+1) + c_2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) - 3 \text{τοξ} \varepsilon \phi (x+1) + c$$

(d)

$$\int e^{2x} \cos\left(\frac{1}{4}x\right) dx.$$

**Λύση:**

$$I = \int e^{2x} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

Θέτουμε

$$u = \cos\left(\frac{x}{4}\right), \quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow du = -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{8} \int e^{2x} \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

---

Θέτουμε ξανά

$$u = \sin\left(\frac{x}{4}\right), \quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow du = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$\int e^{2x} \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{8} I$$

Άρα

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{16} e^{2x} \sin\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{64} I$$

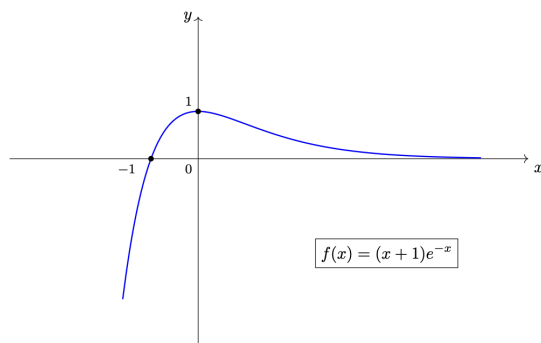
$$\frac{65}{64} I = \frac{1}{2} e^{2x} \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{16} e^{2x} \sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\int e^{2x} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = \frac{e^{2x}}{65} \left( 32 \cos\left(\frac{x}{4}\right) + 4 \sin\left(\frac{x}{4}\right) \right) + c$$

4. [5μ] Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.



5. [3μ]

(a) Να δείξετε ότι το κλάσμα

$$\frac{1}{x(x+1)^2}$$

γράφεται ως άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(b) Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}, & x \in (0, +\infty) \\ f(1) = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Λύση:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2}.$$

Ισοδύναμα,

$$1 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1) + \Gamma x.$$

Δηλαδή,

$$1 \equiv Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + \Gamma x,$$

οπότε

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \equiv (A+B)x^2 + (2A+B+\Gamma)x + A.$$

---

Τότε καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + \Gamma = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

το οποίο δίνει τη λύση

$$A = 1, \quad B = -1, \quad \Gamma = -1.$$

Έτσι, η ισότητα (κλασμάτων)

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

είναι αληθής.

(β) Λόγω του ότι η  $f$  έχει (παντού) συνεχή πρώτη παράγωγο, έπεται ότι

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad \forall x \in D(f) = (0, +\infty),$$

για κάποια αυθαίρετη πραγματική σταθερά  $c$ .

Αλλά,  $\forall x \in D(f) = (0, +\infty)$ ,

$$\int f'(x) dx = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = \int \ln x \cdot \left( -\frac{1}{2(x+1)} \right)' dx.$$

(κατά μέρη)

$$\begin{aligned} &= -\frac{\ln x}{2(x+1)} - \frac{1}{2} \int \left( -\frac{1}{x+1} \right) (\ln x)' dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(x+1)} dx \end{aligned}$$

(α) ερώτημα

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$x > 0$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)}$$

---


$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)}.$$

Άρα, από τα πιο πάνω,

$$f(x) + c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)}.$$

Αλλά, η αρχική συνθήκη

$$f(1) = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4}$$

της υπόθεσης δίνει

$$-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}.$$

Δηλαδή,

$$c - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4},$$

οπότε

$$c = 0.$$

Έτσι,

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} \right], \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (2)$$

---

6. [3μ] Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$xf''(x) + f'(x) = 4x, \quad \forall x > 0$$

και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(1, f(1))$  έχει εξίσωση  $y = 3x - 2$ . Να βρείτε:

(a') Τις τιμές  $f'(1)$  και  $f(1)$ .

(b') Τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

(c') Το ολοκλήρωμα

$$\int e^{f(x)} dx.$$

**Λύση:**

(α') Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$  είναι  $\lambda = 3$ , άρα

$$f'(1) = 3.$$

Επίσης, αφού το σημείο  $M$  ανήκει στην εφαπτομένη, οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωσή της:

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

(β') Έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} xf''(x) + f'(x) = 4x, & x > 0 \\ f'(1) = 3 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Έχουμε:

$$xf''(x) + f'(x) = 4x \Leftrightarrow x(f'(x))' + x' f'(x) = 4x \Leftrightarrow (xf'(x))' = 4x.$$

Ολοκληρώνουμε αμφότερα μέλη:

$$\int (xf'(x))' dx = 4 \int x dx \Rightarrow xf'(x) = 2x^2 + c.$$

Και αφού  $x > 0$ ,

$$f'(x) = 2x + \frac{c}{x}.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη  $f'(1) = 3$ :

$$3 = 2 \cdot 1 + \frac{c}{1} \Rightarrow c = 1.$$

---

Και άρα

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

Ολοκληρώνουμε αμφοτέρα μέλη:

$$\int f'(x) dx = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow f(x) = x^2 + \ln x + c_*.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη  $f(1) = 1$ :

$$1 = 1^2 + \ln 1 + c_* \Rightarrow c_* = 0.$$

Άρα,

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

(γ') Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int e^{f(x)} dx &= \int e^{x^2 + \ln x} dx = \int e^{x^2} \cdot e^{\ln x} dx \\ &= \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (x^2)' dx \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} + c. \end{aligned}$$

7. [3μ] Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 5 \quad \text{και} \quad C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0.$$

- (a) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κάθε κύκλου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κάθε κύκλου.
- (b) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
- (c) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) του κύκλου  $C_1$  στο σημείο του  $B(1, -2)$  και να αποδείξετε ότι η ( $\varepsilon$ ) εφάπτεται και στον κύκλο  $C_2$ .