Πετρίδης Κωνσταντίνος - Ταλαντώσεις

1. Να δώσετε τον ορισμό της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης.

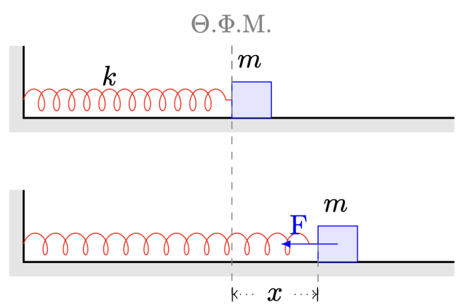
Λύση:

Η παλινδρομική περιοδική κίνηση που εκτελεί ένα σώμα, όταν η συνισταμένη δύναμη σε αυτό είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος από τη Θέση Ισορροπίας του:

$$\sum \vec{F} = -D\vec{x}$$

όπου η θετική σταθερά D εκφράζεται σε N/m.

2. Η ελεύθερη άκρη ενός οριζόντιου ελατηρίου, που υπακούει στον Νόμο του Hooke, είναι συνδεδεμένη με σώμα μάζας $m = 4{,}00\,\mathrm{kg}$. Το σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές. Εάν το ελατήριο επιμηκυνθεί κατά 30,0 cm, ασκεί στο σώμα δύναμη μέτρου 120,0 N. Επιμηκύνουμε το ελατήριο κατά 10,0 cm, και το αφήνουμε ελεύθερο. Να υπολογίσεται τη δύναμη ελατηρίου και την επιτάχυνση του σώματος (i) στην αρχική θέση x_1, (ii) στη Θ_I και (iii) σε μία θέση x_2, στην οποία το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 5,00 cm.



Λύση:

Θέτουμε $x = 0$ τη θέση της ελεύθερης άκρης (ΘΙ), όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (Θ.Φ.Μ). Ορίζουμε ως θετική τη φορά, κατά την οποία το ελατήριο επιμηκύνεται.

i. Η σταθερά ελατηρίου είναι $k = \dfrac{|\vec{F}_{\varepsilon\lambda}|}{|x|} = \dfrac{120{,}0\,\mathrm{N}}{0{,}300\,\mathrm{m}} = 4{,}00 \times 10^2\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Άρα, στη θέση x_1 η δύναμη ελατηρίου έχει αλγεβρική τιμή:

$$F_{\varepsilon\lambda} = -kx_1 = -\left(4{,}00 \times 10^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right) \times (0{,}100\,\mathrm{m}) = -40{,}0\,\mathrm{N}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη ελατηρίου είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση. Η επιτάχυνση του σώματος είναι ομόρροπη με τη συνισταμένη δύναμη, και έχει αλγεβρική τιμή:

$$\alpha = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{m} = \frac{-40{,}0\,\mathrm{N}}{4{,}00\,\mathrm{kg}} = -10{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

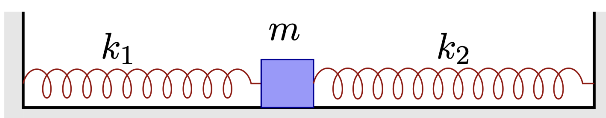
ii. Στη Θ_I, η δύναμη και η επιτάχυνση μηδενίζονται.

iii. Επειδή το ελατήριο είναι συσπειρωμένο, η θέση της ελεύθερης άκρης του είναι αρνητική: $x_2 = -0{,}050\,\mathrm{m}$. Άρα, η δύναμη ελατηρίου ισούται με:

$$F_{\varepsilon\lambda} = -\left(4{,}00 \times 10^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right) \times (-0{,}050\,\mathrm{m}) = +20{,}0\,\mathrm{N}$$

Η επιτάχυνση του σώματος ισούται με $\alpha = \dfrac{20{,}0\,\mathrm{N}}{4{,}00\,\mathrm{kg}} = 5{,}00\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

3. Σώμα μάζας m είναι συνδεδεμένο με δύο αβαρή οριζόντια ελατήρια σταθερών k_1 και k_2 και μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να διερευνήσετε κατά πόσο το σώμα εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση.



Λύση:

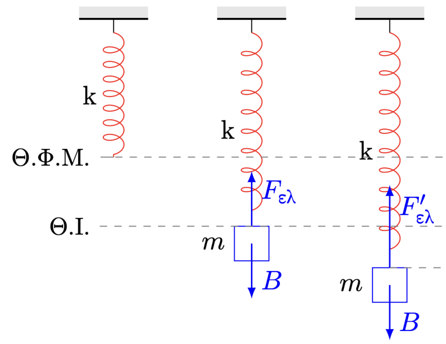
Εάν το σώμα μετακινηθεί σε μία θέση $x > 0$, το μήκος του αριστερού ελατηρίου αυξάνεται κατά x , και το μήκος του δεξιού ελατηρίου ελαττώνεται κατά x .

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,1}$ και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,2}$ έχουν μέτρα ανάλογα με το μέγεθος x , την ίδια κατεύθυνση (προς τη ΘΙ), και είναι αντίρροπες με τη μετατόπιση x.

$$\sum |\vec{F}_x| = |\vec{F}_{\varepsilon\lambda,1}| + |\vec{F}_{\varepsilon\lambda,2}| = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

Επειδή η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη και αντίρροπη της μετατόπισης από τη ΘΙ, το σώμα εκτελεί ΑΑΤ. Η σταθερά της αρμονικής ταλάντωσης ισούται με το άθροισμα των δύο σταθερών ελατηρίου $D = (k_1 + k_2)$.

4. Πιο κάτω απεικονίζει μια σφαίρα μάζας m, που είναι προσδεμένη σε αβαρές κατακόρυφο ελατήριο. Να υπολογίσετε συνάρτηση της μάζας (m) και της σταθεράς ελατηρίου (k) την θέση στην οποία το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση;



Λύση:

$$F_\varepsilon = -k(y - y_{\Phi M})$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη ελατηρίου F_ε, μηδενίζεται για $y = y_{\Phi M}$, όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Η συνισταμένη δύναμη στη σφαίρα ισούται με:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_\varepsilon + \vec{B} \;\Rightarrow\; \sum |\vec{F}| = -k(y - y_{\Phi M}) - mg$$

Η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται στη ΘΙ όταν $y = 0$.

Θέτοντας $\sum F = 0$ για $y = 0$, υπολογίζουμε τη θέση $y_{\Phi M}$:

$$-k(0 - y_{\Phi M}) - mg = 0 \;\Rightarrow\; k y_{\Phi M} = mg \;\Rightarrow\; y_{\Phi M} = \frac{mg}{k}$$

Έλεγχος ΑΑΤ:

Εάν αντικαταστήσουμε την τιμή $y_{\Phi M} = \dfrac{mg}{k}$ στην έκφραση για τη συνισταμένη δύναμη, βρίσκουμε:

$$\sum F = -k\left(y - \frac{mg}{k}\right) - mg = -ky$$

Επομένως, η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη και αντίρροπη με τη μετατόπιση της σφαίρας από τη ΘΙ. Η σφαίρα εκτελεί ΑΑΤ.

5. Ένα σώμα μάζας m είναι αναρτημένο από ένα αβαρές, κατακόρυφο ελατήριο. Να απαντήσετε στα πιο κάτω.

i. Όταν η ελεύθερη άκρη βρίσκεται στη θέση $y_{\Phi M} = mg/k$ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Σε εκείνη τη θέση, ποιο από τα επόμενα μεγέθη μηδενίζεται:

α. η δύναμη ελατηρίου

β. το βάρος του σώματος

γ. η συνισταμένη δύναμη στο σώμα.

ii. Όταν η ελεύθερη άκρη βρίσκεται στη θέση ισορροπίας $y = 0$, ποιο από τα επόμενα μεγέθη μηδενίζεται:

α. η δύναμη ελατηρίου

β. το βάρος του σώματος

γ. η συνισταμένη δύναμη στο σώμα.

iii. Εάν αναρτήσουμε ένα σώμα μάζας $2m$ στο ίδιο ελατήριο, θα μεταβληθεί:

α. η σταθερά της ταλάντωσης

β. η θέση ισορροπίας

Λύση:

i. Η δύναμη ελατηρίου - (α)

ii. Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα - (γ)

iii. Η σταθερά της ταλάντωσης δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος. Η θέση ισορροπίας θα μεταβληθεί: Επειδή το σώμα έχει διπλάσιο βάρος, η συνισταμένη δύναμη μηδενίζεται όταν η δύναμη ελατηρίου διπλασιασθεί. Άρα, το ελατήριο επιμηκύνεται (η νέα ΘΙ χαμηλώνει) - (β)

6. Να ελέγξετε ποιες από τις πιο προτάσεις για την περίοδο της ΑΑΤ είναι Ορθές.

i. Η περίοδος ταλάντωσης σώματος συνδεδεμέ- νου σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο αυξάνεται, εάν αυξηθεί η μάζα του σώματος.

ii. Η περίοδος ταλάντωσης σώματος συνδεδεμέ- νου σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο αυξάνεται, εάν αυξηθεί η μάζα του σώματος.

iii. Η περίοδος ταλάντωσης σώματος συνδεδεμέ- νου σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο ελαττώνεται, εάν αυξηθεί η σταθερά ελατηρίου.

iv. Η περίοδος ταλάντωσης σώματος συνδεδεμέ- νου σε οριζόντιο ή κατακόρυφο ελατήριο δεν εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας.

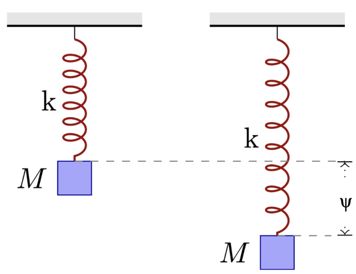
v. Η περίοδος της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης.

Λύση:

i. Σωστή, ii. Σωστή, iii. Σωστή, iv. Σωστή, v. Λάθος

$$D = m\omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

7. Σώμα μάζας $m = 500\,\mathrm{g}$ είναι στερεωμένο στο άκρο αβαρούς κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K = 25\,\mathrm{N/m}$ και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε το σώμα $l = 4\,\mathrm{cm}$ πιο κάτω από τη θέση ισορροπίας του και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ το αφήνουμε να κινηθεί προς τα πάνω. Θεωρούμε ότι όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης η μετατόπισή του είναι θετική.



i. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

ii. Να υπολογίσετε τη περίοδο.

iii. Να γράψετε την εξίσωση της μετατόπισης σε σχέση με τον χρόνο και να την παραστήσετε γραφικά για χρόνο 2 περιόδων.

Λύση:

i. Στην θέση ισορροπίας θεωρούμε $\psi = 0$ οπότε ισχύει:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} + \vec{F}_\varepsilon = \vec{0} \Rightarrow -mg - k(\psi - \psi_{\Phi M}) = 0 \Rightarrow mg = k\psi_{\Phi M} \tag{1}$$

Σε μια τυχαία θέση ψ κάτω από τη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\sum \vec{F} = \vec{B} + \vec{F}_\varepsilon \Rightarrow \sum F = -mg - k(\psi - \psi_{\Phi M}) = -mg - k\psi + k\psi_{\Phi M} \tag{2}$$

Από την σχέση (1) η σχέση (2) γίνεται:

$$\sum F = -k\psi \qquad \text{όμως} \qquad F_{\varepsilon\pi} = -D\psi \Rightarrow \text{Α.Α.Τ με } D = k$$

ii. Απο την σχέση $D = k \Rightarrow m\omega^2 = k$

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = k \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}500\,\text{kg}}{25\,\text{N/m}}} = 0{,}18\,\text{s}$$

iii. Με αντικατάσταση στη εξίσωση της θέσης βρίσκουμε τη μορφή της σε σχέση με το χρόνο

$$\psi = \psi_0\,\eta\mu(\omega t + \theta_0) \Rightarrow \psi = 4\,\eta\mu\left(34{,}9t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{σε cm}$$

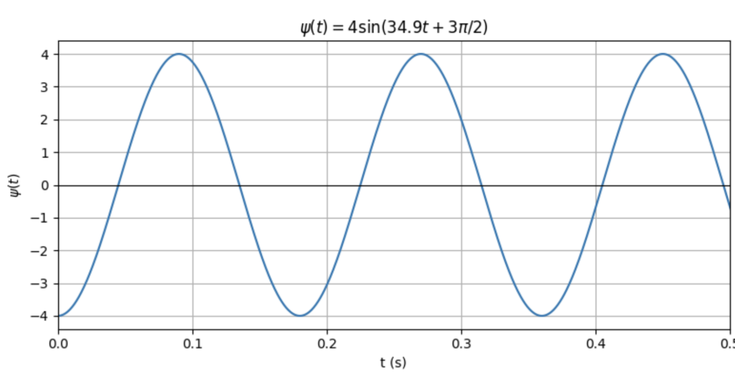
Η κυκλική συχνότητα υπολογίζεται από την σχέση

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28\,\text{rad}}{0{,}18\,\text{s}} = 34{,}9\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

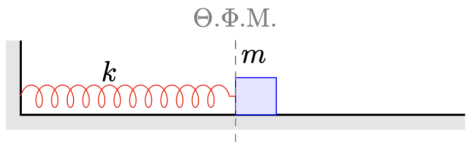
και η αρχική φάση είναι

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{2}\,\text{rad}$$

γιατί την χρονική στιγμή $t = 0\text{s}$ βρίσκεται κάτω ακραία θέση $\psi = -\psi_0$.



8. Σύστημα μάζας – ιδανικού ελατηρίου, μπορεί να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Η μάζα του σώματος είναι $m = 5\,\mathrm{kg}$ και η σταθερά του ελατηρίου έχει τιμή $K = 100\,\mathrm{N/m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, καθώς το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας λόγω εσωτερικής αιτίας, διασπάται ακαριαία σε δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_A = 1\,\mathrm{kg}$ και $m_B = 4\,\mathrm{kg}$, αντίστοιχα. Το σώμα Α μετά τη διάσπαση παραμένει συνδεδεμένο στο ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_A = 1\,\mathrm{m/s}$ προς τα αριστερά, ενώ το σώμα Β κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου προς τα δεξιά.



Να υπολογίσετε:

i. Την περίοδο ταλάντωσης T_A του σώματος Α.

ii. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Α.

iii. Την αρχική φάση.

Λύση:

i.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_A}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1\,\mathrm{kg}}{100\,\mathrm{N/m}}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\,\mathrm{s}$$

ii. Η ταχύτητα του σώματος Α είναι η μέγιστη του ταχύτητα αφού την έχει στη θέση ισορροπίας.

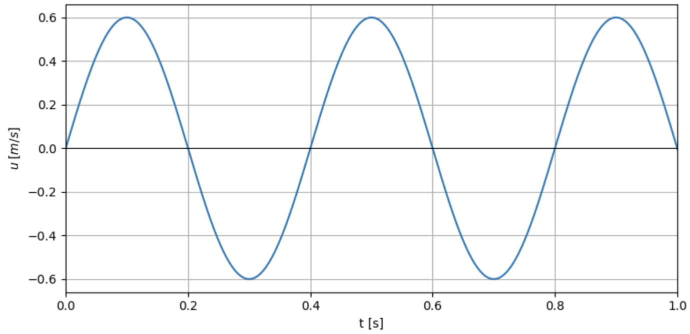
Επομένως:

$$\upsilon_0 = \omega\psi_0 \;\Rightarrow\; \psi_0 = \frac{\upsilon_0}{\omega} = \frac{\upsilon_0 T}{2\pi} = \frac{1\,\frac{m}{s}\cdot\frac{\pi}{5}\,s}{2\pi} = 0{,}1\,\mathrm{m}$$

iii. Θεωρούμε ότι όταν το σώμα βρίσκεται δεξιά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης η απομάκρυνση του είναι θετική. Αφού ο ταλαντωτής μας βρίσκεται στη θέση ισορροπίας με φορά προς τα αρνητικά τη χρονική στιγμή $t = 0\,\mathrm{s}$, επομένως θα έχει αρχική φάση

$$\theta_0 = \pi\,\mathrm{rad}$$

9. Η πιο κάτω γραφική παράσταση δείχνει τη ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση.



i. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα όπου τα διανύσματα της ταχύτητας (υ) και επιτάχυνσης (α) έχουν την ίδια φορά.

ii. Να προσδιορίσετε την αρχική φάση της ταλάντωσης και να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας με το χρόνο για το πιο πάνω ταλαντωτή

iii. Να γράψετε τη εξίσωση της θέσης σε σχέση με το χρόνο $x = f(t)$.

Λύση

i. Επειδή η γραφική παράσταση είναι της ταχύτητας με το χρόνο, η κλίση μας δίνει την επιτάχυνση. Οπότε τα χρονικά διαστήματα όπου η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια φορά είναι:

$$0-0,1s \ \ u>0 \text{ και } a>0$$
$$0,2-0,3s \ \ u<0 \text{ και } a<0$$
$$0,4-0,5s \ \ u>0 \text{ και } a>0$$
$$0,6-0,7s \ \ u<0 \text{ και } a<0$$

ii. Αφού την χρονική στιγμή $t = 0s$ η ταχύτητα είναι μηδέν σημαίνει ότι βρισκόμαστε σε ακραία θέση. Το γεγονός ότι η ταχύτητα που ακολουθεί είναι θετική σημαίνει ότι βρισκόμαστε στη μέγιστη αρνητική θέση. Άρα η αρχική φάση είναι

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{2}\,\text{rad} \implies \upsilon = 0{,}6\,\text{συν}(5\pi t + \tfrac{3\pi}{2})$$

iii.

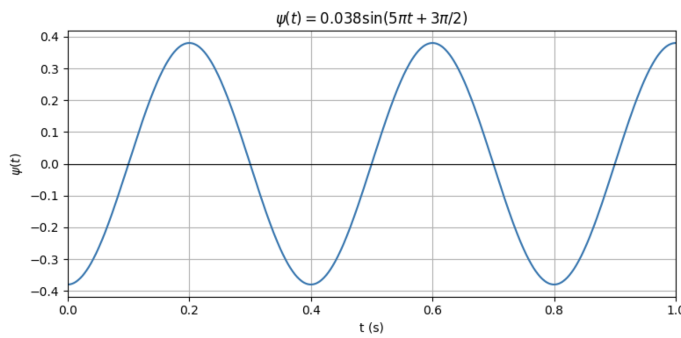
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0{,}4s} = 5\pi\ \text{rad/s}$$

$$\upsilon_0 = 0{,}6\,m/s \qquad \text{άρα} \quad \upsilon_0 = \omega x_0 \Rightarrow 0{,}6\,\frac{m}{s} = 5\pi\,\frac{rad}{s}\,x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{0{,}6}{5\cdot 3{,}14} = 0{,}038\,m$$

Η αρχική φάση είναι $\phi_0 = 3\pi/2$ rad αφού την χρονική στιγμή $t = 0s$ η ταχύτητα είναι μηδέν, επομένως βρίσκεται σε ακραία θέση, και αφού η ταχύτητα είναι θετική ο ταλαντωτής κινείται προς τα θετικά, άρα βρίσκεται στο $-x_0$.

Άρα η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x = 0{,}038\,\eta\mu(5\pi t + 3\pi/2) \qquad \text{στο S.I.}$$



10. Ένα σώμα μάζας m, αναρτάται σε αβαρές κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς K και τίθεται σε ταλάντωση. Η περίοδος του σε ένα τόπο είναι T. Να εξηγήσετε πόση θα γίνει η περίοδος του, αν ελαττωθεί στο μισό:

i. η μάζα του σώματος

ii. η σταθερά του ελατηρίου

iii. το πλάτος της ταλάντωσης.

Λύση:

i. Όταν η μάζα μειώνεται τότε μειώνεται και η περίοδος. Συγκεκριμένα γίνεται ίση με:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow T' = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

ii. Όταν η σταθερά του ελατηρίου μειώνεται τότε η περίοδος αυξάνεται και γίνεται ίση με:

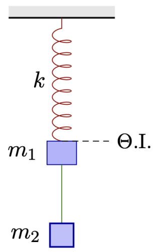
$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k/2}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow T' = T\sqrt{2}$$

iii. Το πλάτος της ταλάντωσης δεν επηρεάζει την περίοδο σύμφωνα με τον τύπο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Επομένως η περίοδος παραμένει σταθερή.

11. Τα σώματα του πιο κάτω σχήματος έχουν μάζες $m_1 = 10\,\text{kg}$ και $m_2 = 4\,\text{kg}$, ενωμένα με αβαρές νήμα και αρχικά ισορροπούν ακίνητα με το σώμα μάζας m_2 να απέχει από το έδαφος απόσταση h. Το ένα άκρο του ελατηρίου σταθεράς k είναι στερεωμένο στην οροφή, ενώ στο άλλο άκρο είναι δεμένο το σώμα μάζας m_1. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα. Τη στιγμή $t = 0{,}5s$ που το σώμα μάζας m_2 φθάνει στο έδαφος, το σώμα μάζας m_1 φθάνει για πρώτη φορά σε θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.



Να υπολογίσετε:

i. την περίοδο της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1.

ii. τη θέση φυσικού μεγέθους, θεωρώντας την παλιά θέση ισορροπίας την θέση 0.

iii. τη νέα θέση ισορροπίας καθώς και την μέγιστη ταχύτητα του σώματος μάζας m_1.

iv. την εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος μάζας m_1 από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση:

i. Επομένως μέχρι το σώμα μάζας m_2 να φθάσει στο έδαφος το σώμα μάζας m_1 θα εκτελέσει μισή ταλάντωση. Επομένως:

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2t \Rightarrow T = 2 \cdot 0{,}5s = 1s$$

ii. Στην θέση ισορροπίας ισχύει ότι

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{B}_{o\lambda} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow -m_{o\lambda} \cdot g - k(\psi - \psi_{\Phi.M}) = 0 \Rightarrow -m_{o\lambda} g + k\psi_{\Phi.M} = 0$$

$$\Rightarrow \psi_{\Phi.M} = \frac{m_{o\lambda} \cdot g}{k} = \frac{14\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{552{,}14\,\text{N/m}} = 0{,}249\,\text{m}$$

$$k = m_{o\lambda}\omega^2 = m_{o\lambda} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = 14\text{kg} \cdot \frac{4 \cdot (3{,}14)^2}{(1s)^2} = 552{,}14\,\text{N/m}$$

iii. Στην νέα θέση ισορροπίας θεωρώντας την παλιά θέση ισορροπίας τη θέση 0 ισχύει:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{B}_1 + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow -m_1 g - k(\psi - \psi_{\Phi.M}) = 0 \Rightarrow -m_1 g - k\psi + k\psi_{\Phi.M} = 0$$

$$\Rightarrow -m_1 g - k\psi + m_2 g + m_1 g = 0 \Rightarrow k\psi = m_2 g \Rightarrow \psi = \frac{m_2 g}{k} = \frac{4\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2}{552{,}14\,\text{N/m}} = 0{,}071\,\text{m}$$

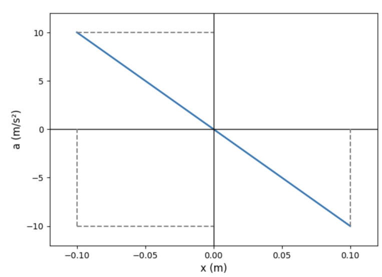
$$\psi_0 = \psi = 0{,}071\,\text{m} \qquad \text{άρα} \qquad \upsilon_0 = \omega\psi_0 = 2\pi \cdot 0{,}071 = 0{,}446\,\text{m/s}$$

iv. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με 0,071 m γιατί η παλιά θέση ισορροπίας είναι ακραία θέση της νέας ταλάντωσης. Η αρχική φάση είναι $3\pi/2$ rad αφού την χρονική στιγμή που ξεκινάει η ταλάντωση το σώμα βρίσκεται στο $-\psi_0$.
Η κυκλική συχνότητα είναι ίση με $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(1s) = 2\pi$ rad/s.

Άρα η εξίσωση της θέσης είναι:

$$\psi = 0{,}071\,\eta\mu(2\pi t + 3\pi/2) \qquad \text{στο S.I.}$$

12. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το διάγραμμα της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας για ένα σώμα μάζας m=0,1kg, που κάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση.



Ζητούνται:

i. Να δικαιολογήσετε την μορφή της γραφικής παράστασης.

ii. Η περίοδος και το πλάτος της ταλάντωσης.

iii. Η σταθερά της ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή και η μέγιστη δύναμη επαναφοράς.

Λύση

i. Η εξίσωση που δίνει την επιτάχυνση σε σχέση με την θέση είναι

$$a = -\omega^2 x.$$

Άρα είναι ευθεία του τύπου $\psi = \alpha x$, με αρνητική κλίση που περνά από την αρχή των αξόνων και με όρια.

ii. Το πλάτος από την γραφική είναι $x_0 = 0,1\,\mathrm{m}$. Από την κλίση υπολογίζουμε την κυκλική συχνότητα.

$$\text{Κλίση} = \frac{\Delta a}{\Delta x} = \frac{-10\,\frac{m}{s^2} - 10\,\frac{m}{s^2}}{0,1\,m - (-0,1\,m)} = \frac{-20}{0,2} = -100 = -\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\,s$$

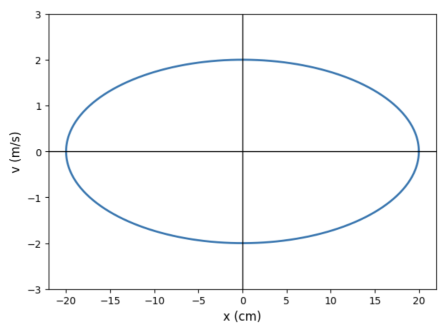
iii. Η σταθερά ταλάντωσης ισούται με:

$$D = m\omega^2 = 0,1\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = 0,04\,\mathrm{N/m}$$

Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς είναι:

$$F_{\text{ΕΠ.(max)}} = -D(-x_0) = -0,04\,\mathrm{N/m} \cdot (-0,1\,\mathrm{m}) = 0,004\,\mathrm{N}$$

13. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας $\upsilon = f(x)$ για ένα σώμα που εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση.



i. Να εξηγήσετε την μορφή της πιο πάνω γραφικής παράστασης.

ii. Το πλάτος και την κυκλική συχνότητα της πιο πάνω ταλάντωσης.

iii. Να δώσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο $\upsilon = f(t)$ για τη πιο πάνω ταλάντωση αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική θέση.

Λύση:

i. Από τις εξισώσεις θέσης–χρόνου και ταχύτητας–χρόνου βρίσκουμε την σχέση μεταξύ ταχύτητας–θέσης που είναι εξίσωση έλλειψης.
Πράγματι:

$$\psi = \psi_0 \cdot \text{ημ}\varphi \Rightarrow \text{ημ}\varphi = \frac{\psi}{\psi_0} \qquad \text{όμοια} \qquad \upsilon = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\varphi \Rightarrow \text{συν}\varphi = \frac{\upsilon}{\upsilon_0}$$

Με την βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$$

με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{\psi^2}{\psi_0^2} + \frac{\upsilon^2}{\upsilon_0^2} = 1 \implies \frac{\psi^2}{\psi_0^2} + \frac{\upsilon^2}{(\omega x_0)^2} = 1$$

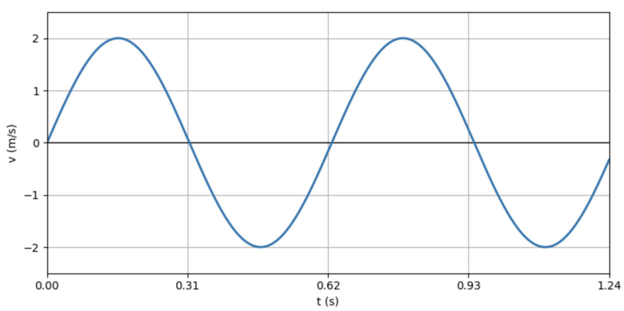
που είναι εξίσωση έλλειψης με κορυφές $(0, \upsilon_0), (0, -\upsilon_0)$ και $(x_0, 0), (-x_0, 0)$.

ii. Το πλάτος από την γραφική ισούται με $x_0 = 20\,\mathrm{cm}$. Και η κυκλική συχνότητα με την βοήθεια της σχέσης

$$\upsilon_0 = \omega x_0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\upsilon_0}{x_0} = \frac{2\,\frac{m}{s}}{0{,}20\,m} = 10\,\mathrm{rad/s}.$$

iii.

$$\upsilon_0 = \omega\psi_0 \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{2\pi}{T}\psi_0 \Rightarrow T = \frac{2\pi\psi_0}{\upsilon_0} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}20\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m/s}} = 0{,}628\,\mathrm{s}$$



14. Ένα σώμα μάζας m=0,5 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και διέρχεται από δύο σημεία A_1 και A_2 του θετικού ημιάξονα, που απέχουν αποστάσεις $x_1 = 10\,\mathrm{cm}$ και $x_2 = 16\,\mathrm{cm}$ από τη θέση ισορροπίας, με ταχύτητες $u_1 = 20\sqrt{3}\,\mathrm{cm/s}$ και $u_2 = 24\,\mathrm{cm/s}$, αντίστοιχα. Αν ως αρχή μέτρησης του χρόνου θεωρηθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται από το σημείο A_1, ζητείται:

i. Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης.

ii. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

iii. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Λύση:

i.

$$u_1^2 = \omega^2\left(x_0^2 - x_1^2\right) \Rightarrow x_0^2 = \frac{u_1^2}{\omega^2} + x_1^2 \quad \text{και} \quad u_2^2 = \omega^2\left(x_0^2 - x_2^2\right) \Rightarrow x_0^2 = \frac{u_2^2}{\omega^2} + x_2^2$$

Άρα:

$$\frac{u_1^2}{\omega^2} + x_1^2 = \frac{u_2^2}{\omega^2} + x_2^2 \Rightarrow \frac{u_1^2 - u_2^2}{\omega^2} = x_2^2 - x_1^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{u_2^2 - u_1^2}{x_2^2 - x_1^2}} = \sqrt{\frac{(20\sqrt{3}\,\mathrm{cm/s})^2 - (24\,\mathrm{cm/s})^2}{(16\,\mathrm{cm})^2 - (10\,\mathrm{cm})^2}} = 2\,\mathrm{rad/s}$$

ii.

$$x_0^2 = \frac{u_1^2}{\omega^2} + x_1^2$$

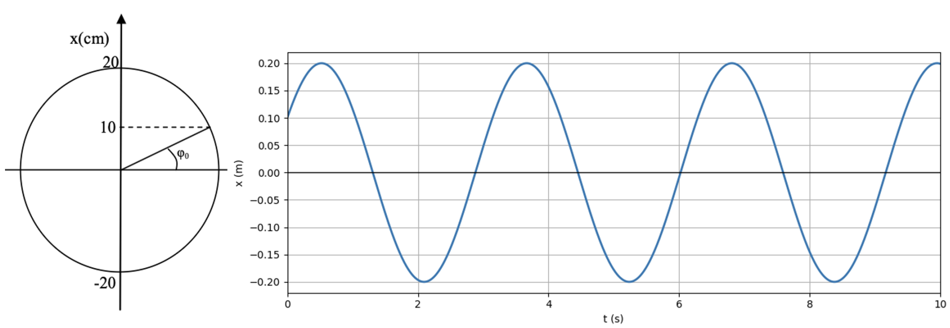
$$x_0 = \sqrt{\frac{(20\sqrt{3}\,\mathrm{cm/s})^2}{(2\,\mathrm{rad/s})^2} + (10\,\mathrm{cm})^2} = 20\,\mathrm{cm}$$

iii. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 10\,\mathrm{cm}$ με θετική ταχύτητα. Άρα με τη βοήθεια του κύκλου, αφού μεταξύ Α.Α.Τ. και ομαλής κυκλικής κίνησης υπάρχει γεωμετρική σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση.

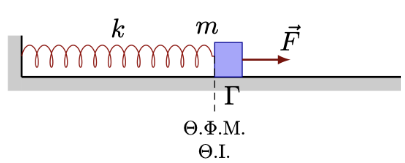
$$\sin\varphi_0 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

Άρα στο S.I.:

$$x = 0{,}20\,\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

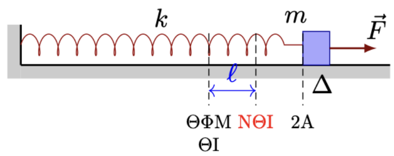


15. Στο σώμα m του σχήματος που είναι δεμένο σε ελατήριο k και ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται ξαφνικά δύναμη F μέχρι την χρονική στιγμή που το σώμα σταματάει στιγμιαία. Ποιο το μέτρο της ταχύτητας με την οποία θα περάσει το σώμα από τη θέση ισορροπίας του μετά τον μηδενισμό της δύναμης F;



Λύση:

Με την επίδραση της σταθερής δύναμης F το σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση (μόνο την μισή μέχρι να μηδενιστεί η δύναμη), ξεκινώντας από την αριστερή ακραία θέση (την ΘΦΜ και ΘΙ χωρίς τη δύναμη F).



Η θέση ισορροπίας με την δύναμη F είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά από την αρχική θέση κατά

$$\Sigma F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k\ell = F \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \frac{F}{k}.$$

Το σώμα όμως θα φτάσει στο σημείο Δ όπου μηδενίζεται η ταχύτητά του (και η εξωτερική δύναμη F), το οποίο είναι η δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης (με την F).

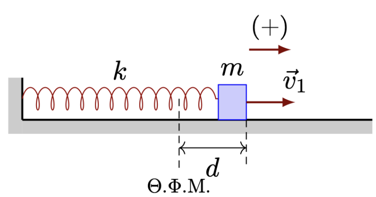
Όταν καταργηθεί η F τότε η θέση ισορροπίας γίνεται ξανά η ΘΦΜ, όμως το σώμα βρίσκεται χωρίς ταχύτητα στο Δ το οποίο απέχει από το Γ απόσταση

$$2\ell = \frac{2F}{k},$$

οπότε αυτό είναι το πλάτος της τελικής ταλάντωσης του σώματος.

$$\upsilon_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{2F}{k} = \frac{2F}{\sqrt{mk}}$$

16. Σώμα m δεμένο σε ελατήριο k κρατείται σε απομάκρυνση d και βάλλεται με ταχύτητα $\upsilon_1 = \omega d$ προς τα δεξιά όπως στο σχήμα. Ποια η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης;



Λύση:

Ενέργειες ταλάντωσης στην θέση εκτόξευσης:

$$\frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{k}{m}d^2 + kd^2 = kA^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2d^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \; A = d\sqrt{2}$$

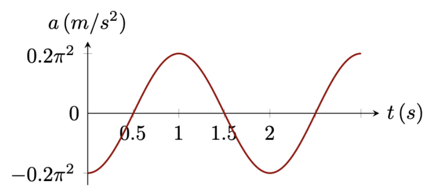
Αρχική φάση: $+d = d\sqrt{2}\,\sin(\varphi_0) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\varphi_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \; \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \frac{3\pi}{4}$$

Δεκτή η $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ επειδή $v_1 > 0$. Άρα:

$$x = \sqrt{2}d\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

17. Σύστημα ελατηρίου–σώματος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από το διάγραμμα.



Να βρείτε την εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος.

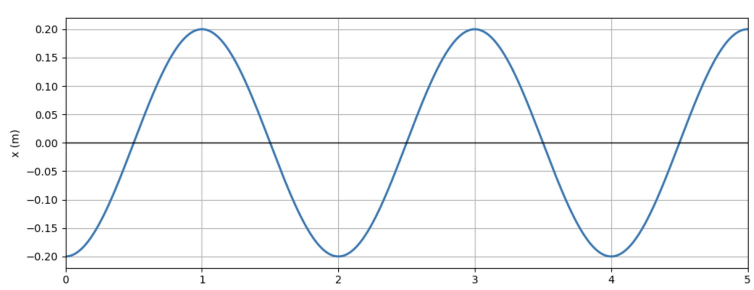
Λύση:

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε μέγιστη αρνητική επιτάχυνση, άρα το σύστημα βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση ($x = +A$). Η περίοδος φαίνεται εύκολα ότι είναι $T = 2s$ και η συχνότητα $\omega = 2\pi/T = \pi$ rad/s. Η αρχική φάση της ταλάντωσης και το πλάτος:

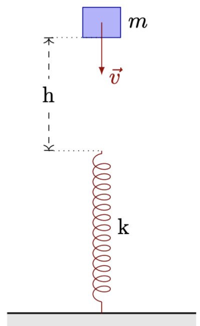
$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad -A = A\,\sin(\varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}.$$

$$a_{\max} = \omega^2 A \quad \Rightarrow \quad 0.2\pi^2 = \pi^2 A \quad \Rightarrow \quad A = 0.2\,\text{m}$$

$$x = 0.2\,\sin\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$



18. Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\,\mathrm{N/m}$ είναι σταθερά δεμένο στο έδαφος. Πάνω από την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου αφήνουμε από ύψος $h = 0{,}15\,\mathrm{m}$ ένα σώμα μάζας $m = 1\,\mathrm{kg}$. Το σώμα πέφτει ελεύθερα και χτυπώντας στην ελεύθερη άκρη του ελατηρίου, χωρίς απώλειες ενέργειας:



i. Να βρείτε την μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

ii. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του συστήματος $x = f(t)$, θεωρώντας θετική την φορά προς τα επάνω.

iii. Να βρείτε την δύναμη επαναφοράς και την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση που συμβαίνει $K = 3U$ για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

iv. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην παραπάνω θέση.

Λύση:

i. Το σώμα φτάνει στο ελατήριο με ταχύτητα v_1 που βρίσκεται με ΑΔΜΕ:

$$mgh + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{3}\ \mathrm{m/s}.$$

Όταν συναντήσει το ελατήριο βρίσκεται στην ΘΦΜ αλλά η ΘΙ της ταλάντωσης είναι πιο κάτω σε τόμομες απόσταση ℓ από την ΘΦΜ, εκεί όπου ισχύει $\Sigma \mathrm{F} = 0 \implies k\ell = mg \implies \ell = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Άρα την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +\ell$ και έχει ταχύτητα

$$v_1 = -\sqrt{3}\ \mathrm{m/s} \quad (\text{θετική φορά προς τα πάνω}).$$

Η κυκλική συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\ \mathrm{rad/s}.$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3 + \tfrac{1}{2}\cdot 100\cdot (0.1)^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 100A^2$$
$$\Rightarrow \quad A = 0.2\,\mathrm{m}.$$

Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι στην κατώτερη ακραία θέση όπου

$$x_{\max} = \ell + A = 0.3\,\mathrm{m}.$$

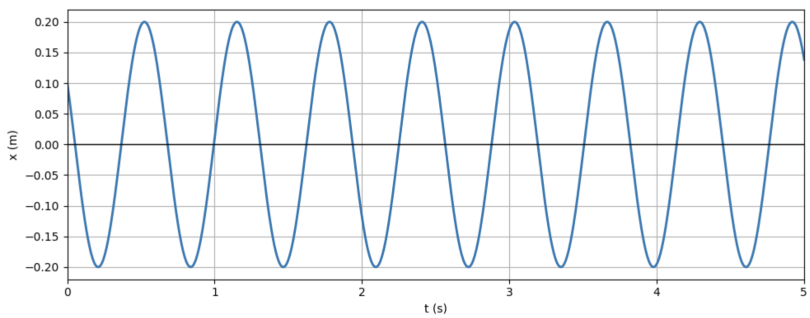
ii. Ζητάμε ουσιαστικά την αρχική φάση, γιατί πλάτος και συχνότητα είναι ήδη γνωστά.

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_1 = +0.1 = 0.2\sin(\varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \tfrac{\pi}{6} \text{ ή } \tfrac{5\pi}{6}.$$

Η ταχύτητα τότε είναι αρνητική $v_1 < 0 \implies \cos(\varphi_0) < 0$, άρα δεκτή η

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \implies x = 0.2\,\sin\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{(SI)}$$



iii. $K = 3U$. $K + U = E \implies 3U + U = E \implies 4U = E \implies \tfrac{1}{2}kA^2 = 4U$

$$U = \frac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{4}E \Rightarrow \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x = \tfrac{A}{2}.$$

Άρα θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση $x = -A/2$ κινούμενο προς τα κάτω.

$$F_{\varepsilon\pi} = -kx = -k(-0.1) = 10\,\mathrm{N}.$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σε αυτή τη θέση:

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 100\cdot(0.1)^2 = 0.5\,\mathrm{J}.$$

iv.

$$P = \frac{dK}{dt} = F_{\varepsilon\lambda}\, v = -kx\cdot v.$$

Στην θέση $x = -0.1$ m έχουμε επίσης από την σχέση $K = 3U = 1.5$ J:

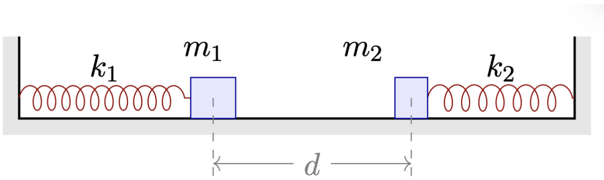
$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad 1.5 = \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{3}.$$

Άρα:

$$P = -kxv = -100(-0.1)\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\ \mathrm{J/s} \approx 10\ \mathrm{J/s}.$$

19. Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 1\,\text{kg}$ και $m_2 = 3\,\text{kg}$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο οριζοντίων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 100\,\text{N/m}$ και $k_2 = 50\,\text{N/m}$ αντίστοιχα, απέχοντας απόσταση $d = 0{,}3\,\text{m}$.

Εκτρέπουμε το σώμα m_1 προς τα αριστερά κατά $A = 0{,}5\,\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ΑΑΤ. Το σώμα m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_2.



Να βρεθούν:

i. Η ταχύτητα του m_1 πριν την κρούση και η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

ii. Η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση.

iii. Το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

Λύση:

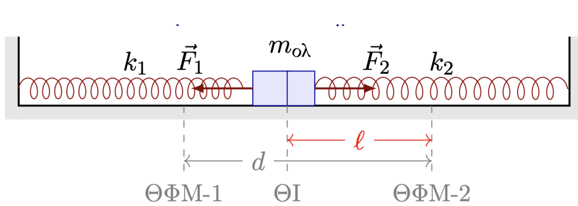
i. Το σώμα εκτρέπεται κατά A, που είναι και το πλάτος ταλάντωσης που θα κάνει αφού ξεκινάει με $v = 0$. Για να βρούμε την ταχύτητα v_1 στην απομάκρυνση $x_1 = +d$ θα χρησιμοποιήσουμε ενέργειες ταλάντωσης:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1^2 + 100(0.3)^2 = 100(0.5)^2$$
$$\Rightarrow \quad v_1 = 4\,\text{m/s}.$$

Α.Δ.Ο. για την κρούση:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_\sigma \quad \Rightarrow \quad v_\sigma = 1\,\text{m/s}.$$

ii. Ξέρουμε ότι το συσσωμάτωμα είναι στην ΘΦΜ του ελατηρίου–2. Αλλά η ΘΙ της ταλάντωσης θα είναι αριστερά, εκεί όπου οι δύο δυνάμεις των ελατηρίων γίνονται αντίθετες.



Αν πούμε ℓ την απόσταση της ΘΙ από την ΘΦΜ–2 τότε:

$$\Sigma F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1(d - \ell) = k_2\ell \quad \Leftrightarrow \quad 30 - 100\ell = 50\ell \quad \Rightarrow \quad \ell = 0.2\,\text{m}.$$

Επομένως το συσσωμάτωμα θα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +0.2$ και θα έχει ταχύτητα v_σ και η ενέργεια ταλάντωσής του θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\sigma^2$$

$$E = 3 + 2 = 5\,\text{J}.$$

iii.

$$\left|\frac{\Delta K}{K}\right| 100\% = \left(1 - \frac{K'}{K}\right) 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\sigma^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}\right) 100\% = \left(1 - \frac{4}{16}\right) 100\% = 75\%$$

20. Η εξίσωση θέσης – χρόνου ενός σώματος μάζας $m = 0{,}100\,\text{kg}$ που εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση είναι

$$y = 0{,}40\,\eta\mu(2\pi t + \pi) \quad \text{(SI.)}$$

i. Να προσδιορίσετε την κυκλική συχνότητα και την αρχική φάση της ταλάντωσης.

ii. Να υπολογίσετε τη θέση που βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 1{,}2\,\text{s}$.

iii. Να γράψετε την εξίσωση ταχύτητας – χρόνου για το συγκεκριμένο σώμα.

Λύση:

i.

$$\omega = 2\pi \quad \text{rad/s} \qquad \varphi_0 = \pi$$

ii.

$$y(t = 1{,}2\,\text{s}) = (0{,}40\,\text{m})\,\text{ημ}[(2\pi\,\text{rad/s})(1{,}2\,\text{s}) + \pi] = -0{,}38\,\text{m}$$

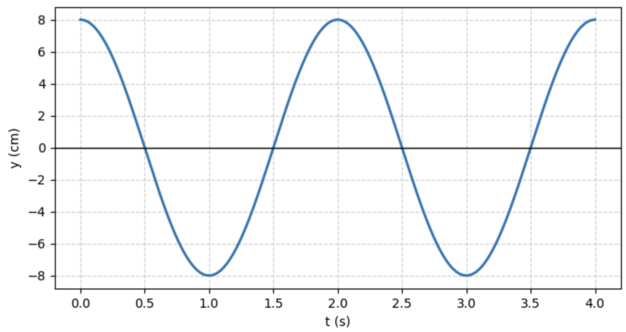
iii.

$$v_0 = \omega y_0 = (2\pi\,\text{rad/s})(0{,}40\,\text{m}) = 0{,}80\pi\,\text{m/s}$$

$$v(t) = v_0\,\text{συν}(2\pi t + \pi) = (0{,}80\pi)\,\text{συν}(2\pi t + \pi)$$

όπου η ταχύτητα είναι σε m/s και ο χρόνος σε s.

21. Η Γραφική Παράσταση δείχνει τη μετατόπιση ενός αρμονικού ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας του ως συνάρτηση του χρόνου, $y = f(t)$.



Η μάζα m του αρμονικού ταλαντωτή είναι 20 g. Να γράψετε την εξίσωση της μετατόπισης σε σχέση με τον χρόνο και να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης συνισταμένης δύναμης που ασκείται στη μάζα.

Λύση:

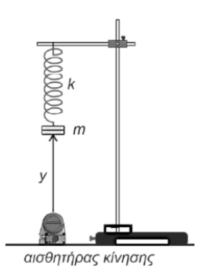
$$T = 2{,}00 \text{ s} \;\Rightarrow\; \omega = \pi \text{ rad/s}$$

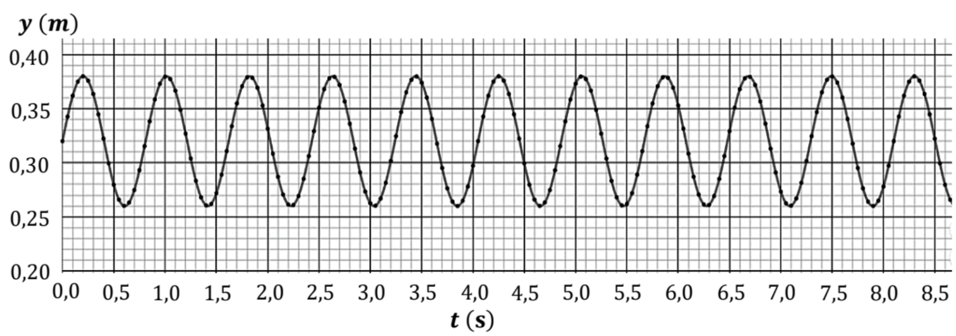
$$y = 0.08\,\text{ημ}\left[\left(\frac{\pi \text{ rad}}{\text{s}}\right)t + \frac{\pi}{2}\right] = 0.08\,\text{συν}\left[\left(\frac{\pi \text{ rad}}{\text{s}}\right)t\right] \quad \text{(SI.)}$$

$$a_0 = \omega^2 y_0 = 0{,}08\pi^2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}79 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$|\vec{F}_{\text{max}}| = m a_0 = (0{,}020 \text{ kg})(0{,}08\pi^2 \ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 0{,}0016\pi^2 \text{ N} = 0{,}0158 \text{ N}$$

22. Σε ένα πείραμα μελέτης της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης σώματος μάζας $m = 100$ g, αναρτημένου από κατακόρυφο αβαρές ελατήριο σταθεράς k, χρησιμοποιήθηκε η πιο κάτω διάταξη. Με τη χρήση αισθητήρα κίνησης καταγράφηκε η θέση y του σώματος σε σχέση με τον χρόνο t και λήφθηκε η γραφική παράσταση $y = f(t)$.





i. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

ii. Να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου.

Λύση:

i.

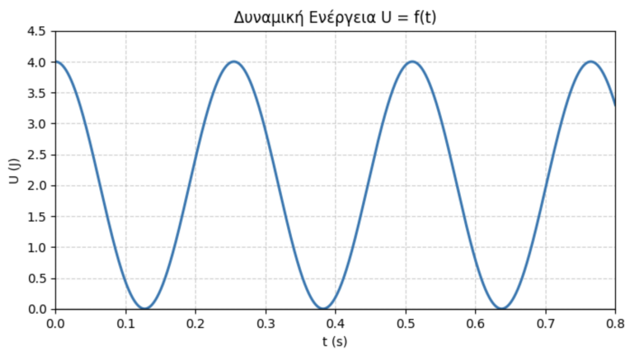
$$y_0 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{0{,}38 \; - 0{,}26}{2} = 0{,}060 \text{ m}$$

ii.

$$T = \frac{\Delta t}{\text{αρ. ταλαντώσεων}} = \frac{8{,}3 \; - 0{,}2}{10} = 0{,}81 \text{ s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \implies k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = (0{,}100 \text{ kg})\left(\frac{2\pi}{0{,}81 \text{ s}}\right)^2 = 6{,}0 \text{ N/m}$$

23. Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση δυναμικής ενέργειας - χρόνου ενός συστήματος σώματος - οριζόντιου ελατηρίου, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



i. Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε τη μηχανική ενέργεια του συστήματος και τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος.

ii. Να εξηγήσετε αν ο ταλαντωτής την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ή σε κάποια ακραία θέση.

iii. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t = 0{,}20$ s.

iv. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t = 0{,}20$ s, αν η μάζα του σώματος είναι $m = 0{,}2$ kg.

Λύση:

i. Μηχανική ενέργεια του συστήματος.

$$E_{\text{μηχ}} = 4{,}0 \text{ J} \quad \text{και} \quad T = 0{,}51 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{0{,}51} \text{ Hz} = 1{,}96 \text{ Hz (ή } 2{,}0 \text{ Hz)}$$

ii. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη, άρα ο ταλαντωτής βρίσκεται σε ακραία θέση.

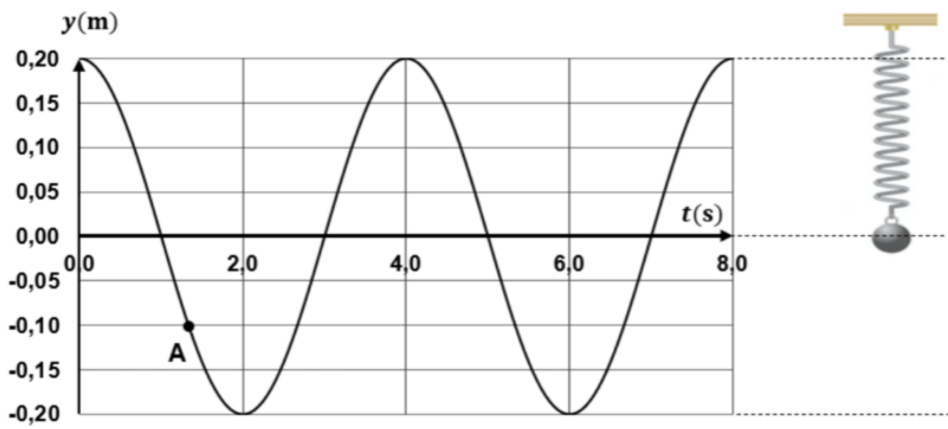
iii. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}20$ s, $U = 2{,}4$ J

$$E_k = E_{\mu\eta\chi} - U = 4 - 2{,}4 = 1{,}6 \text{ J}$$

iv.

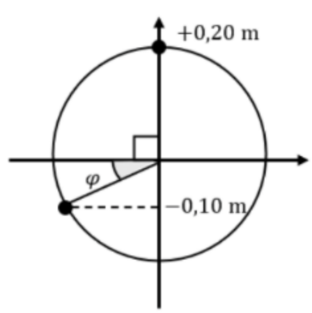
$$E_{k\,\alpha\nu} = 1{,}6 \text{ J} = \frac{1}{2}(0{,}2 \text{ kg})v^2 \Rightarrow v^2 = 16 \ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow |v| = 4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

24. Στη Γραφική Παράσταση απεικονίζεται η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας σαν συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα το οποίο εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση αναρτημένο από αβαρές κατακόρυφο ελατήριο.



Να αναφέρετε κατά πόσο η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος είναι ομόρροπες ή αντίρροπες στο σημείο Α και να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία το σώμα διέρχεται από το σημείο.

Λύση: Στο σημείο Α, η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι αντίρροπες.

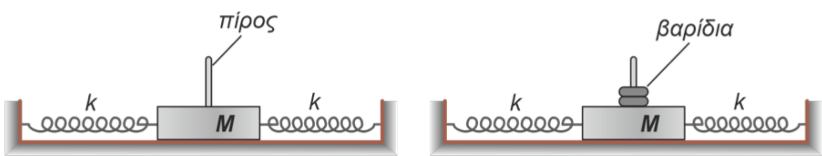


$$\eta\mu\varphi = \frac{0{,}10}{0{,}20} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \implies \Delta\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Αντικατάσταση στον τύπο της κυκλικής συχνότητας:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{3}\ \text{rad}}{\frac{\pi}{2}\ \text{rad/s}} = 1{,}3\ \text{s}$$

25. Πιο κάτω απεικονίζεται σώμα με πείρο, συνολικής μάζας M, που βρίσκεται πάνω σε οριζόντια λεία επιφάνεια, και είναι συνδεμένο με δύο ελατήρια σταθεράς k το καθένα. Το κάθε ελατήριο έχει στερεωμένο το ένα του άκρο σε ακλόνητο τοίχο.



Όταν το σώμα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Ένας μαθητής μετράει τον χρόνο δέκα ταλαντώσεων και υπολογίζει την περίοδο T της ταλάντωσης. Ακολούθως, επαναλαμβάνει τη διαδικασία προσθέτοντας στον πείρο βαρίδια μάζας m. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών του παρουσιάζονται πιο κάτω.

m (kg)	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$10T$ (s)	15,9	19,4	21,9	24,7	26,6
T	1,59	1,94	2,19	2,47	2,66
T^2	2,53	3,764	4,8	6,1	7,08

i. Να αναφέρετε δύο διαφορετικά λάθη/παραλείψεις που έχει ο πίνακας.

ii. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$. Η περίοδος T και οι μάζες συνδέονται με τη σχέση:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{2k} + \frac{4\pi^2 M}{2k}$$

iii. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να προσδιορίσετε την τιμή της σταθεράς k.

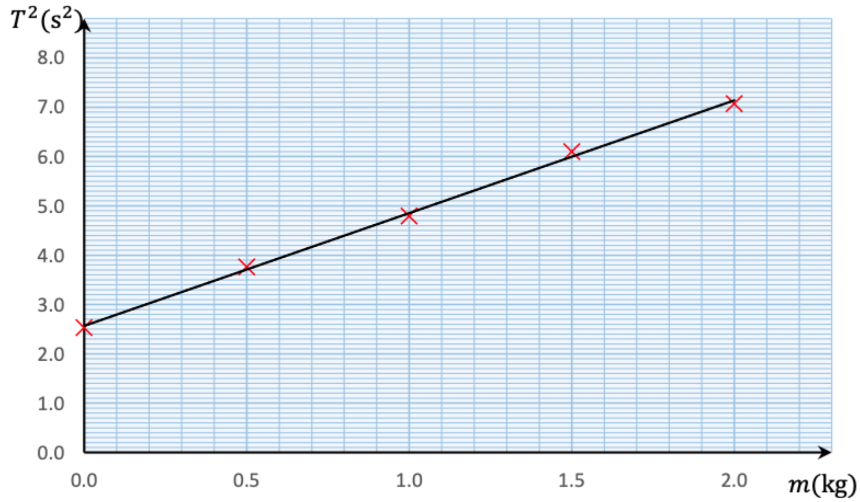
iv. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να προσδιορίσετε τη μάζα M.

Λύση:

i.

- Απουσία μονάδων μέτρησης στην 1η στήλη του Πίνακα.
- Ασυνέπεια στο πλήθος των σημαντικών ψηφίων στις διαφορετικές μετρήσεις του φυσικού μεγέθους T^2.
- Ασυνέπεια στο πλήθος των σημαντικών ψηφίων μεταξύ των φυσικών μεγεθών T και T^2

ii.



iii. Υπολογισμός της κλίσης της «ιδανικής» ευθείας,

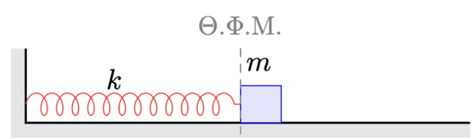
$$\lambda \simeq 2,29\ \frac{s^2}{kg}$$

$$k = \frac{2\pi^2}{\lambda} \simeq 8,60\ \frac{N}{m}$$

iv. Σχέση υπολογισμού της μάζας M, για $m = 0$:

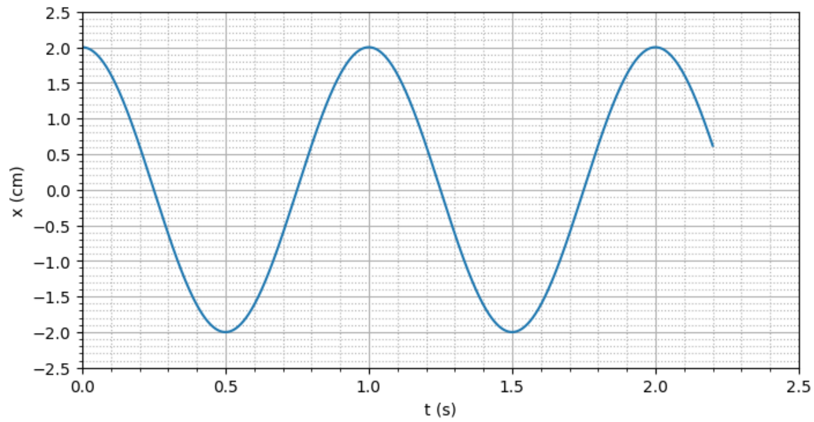
$$M = \frac{T^2}{\lambda} = \frac{(2,57\ s^2)}{2,29\ s^2/kg} \simeq 1,12\ kg$$

26. Ένα σώμα μικρών διαστάσεων, μάζας m, είναι στερεωμένο στην ελεύθερη άκρη ενός αβαρούς οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k και κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι στερεωμένη σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αρχικά το σώμα ισορροπεί και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Το σώμα εκτρέπεται από την



αρχική του θέση και αφήνεται να κινηθεί. Η γραφική παράσταση της μετατόπισης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σαν συνάρτηση του χρόνου, απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα δίνεται από τη σχέση

$$\sum \vec{F} = -k\vec{x}.$$



i. Να εξηγήσετε πώς από τη σχέση της συνισταμένης δύναμης συμπεραίνουμε ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

ii. Να χρησιμοποιήσετε δεδομένα από τη γραφική παράσταση για να υπολογίσετε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

iii. Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος είναι $E_{\text{κιν(μεγ.)}}$. Στο τετραγωνισμένο χαρτί του τετραδίου σας, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας του σώματος σε σχέση με τον χρόνο $E_{\text{κιν}} = f(t)$ για το πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησης.

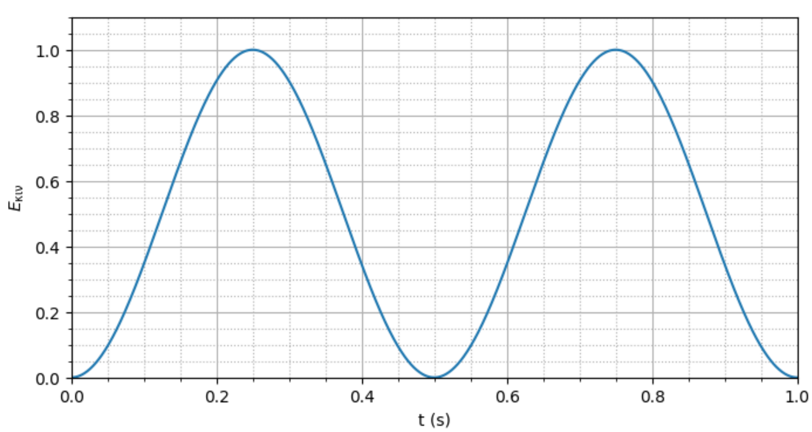
Λύση:

i. Η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη και αντίρροπη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας.

ii.

$$a_0 = \omega^2 x_0 = \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) x_0 = \left(\frac{4\pi^2}{(1,0\,s)^2}\right) \times (2,0\,\text{cm})$$
$$\Rightarrow a_0 = 79\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0,79\,\text{m/s}^2$$

iii.



27. Μια ομάδα μαθητών στο εργαστήριο Φυσικής μελετά το απλό εκκρεμές. Να περιγράψετε πώς θα εργαστούν πειραματικά για να ελέγξουν αν η περίοδος του εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του εκκρεμούς.

i. Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τις μετρήσεις της περιόδου Τ, που πήρε η ομάδα των μαθητών, σε σχέση με το μήκος l του εκκρεμούς.

ℓ (m)	T (s)
0,20	1,00
0,40	1,34
0,60	1,63
0,80	1,85
1,00	2,07
1,20	2,23

Η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη T και ℓ είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

όπου g είναι σταθερά. Να σχεδιάσετε, κατάλληλη γραφική παράσταση για να εξετάσετε κατά πόσο τα δεδομένα του πίνακα ικανοποιούν την πιο πάνω σχέση.

ii. Να εξηγήσετε κατά πόσο η γραφική παράσταση που σχεδιάσατε επιβεβαιώνει τη σχέση αναλογίας $T \propto \sqrt{\ell}$.

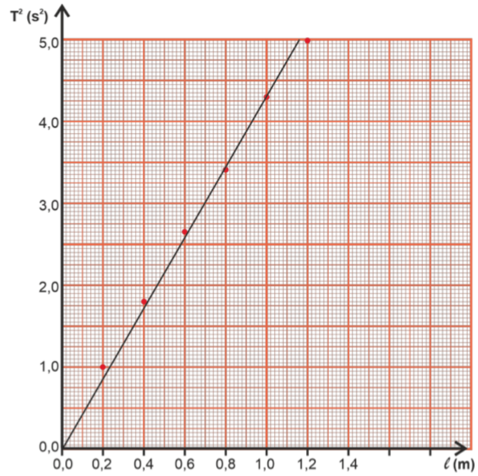
iii. Να αναφέρετε πώς από τη γραφική παράσταση θα υπολογίζατε τη σταθερά g.

Λύση:

Μέτρηση της περιόδου της ΑΑΤ του εκκρεμούς για μία τιμή της μάζας, διατηρώντας σταθερές τις υπόλοιπες εμπλεκόμενες ποσότητες (l, g). Επανάληψη της διαδικασίας για διάφορες τιμές της μάζας και έλεγχος κατά πόσον η περίοδος παραμένει σταθερή.

i.

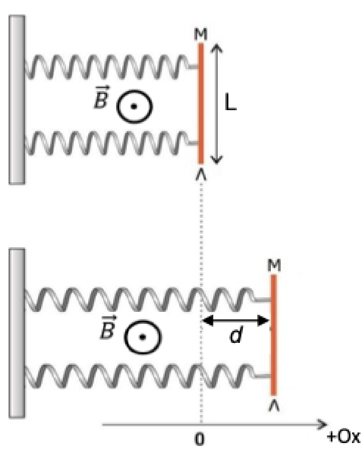
ℓ (m)	T (s)	$\sqrt{\ell}$ ($\sqrt{\text{m}}$)
0,20	1,00	0,45
0,40	1,34	0,63
0,60	1,63	0,77
0,80	1,85	0,89
1,00	2,07	1,00
1,20	2,23	1,10



ii. Η σχέση αναλογίας επιβεβαιώνεται, γιατί προκύπτει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Υπολογίζουμε την κλίση της $T^2 = f(\ell)$ και εφαρμόζουμε τη σχέση $g = \frac{4\pi^2}{\text{κλίση}}$

28. Στο σχήμα φαίνεται μια ομογενής, λεπτή, αγώγιμη ράβδος ΑΜ, που καλύπτεται από μονωτικό υλικό, με μάζα $m = 400\,\text{g}$ και μήκος $L = 30\,\text{cm}$. Η ράβδος βρίσκεται πάνω σε λείο, οριζόντιο, επίπεδο και συνδέεται με δύο όμοια, οριζόντια ελατήρια σταθεράς $k = 20\,\text{N/m}$. Τα ελατήρια είναι συνδεδεμένα σε σημεία που ισαπέχουν από το κέντρο της ράβδου. Το σύστημα ράβδος – ελατήρια βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με κατακόρυφες δυναμικές γραμμές, οι οποίες έχουν τη φορά που φαίνεται στο σχήμα . Η ένταση B του μαγνητικού πεδίου έχει μέτρο 0,10 T. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί. Απομακρύνουμε τη ράβδο, προς τα δεξιά, κατά $d = 8\,\text{cm}$ και την αφήνουμε ελεύθερη τη χρονική στιγμή $t = 0$, οπότε η ράβδος αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα Ox.



Θεωρούμε αμελητέες όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο κατά μήκος του άξονα Ox εκτός από τις δυνάμεις των ελατηρίων. Να θεωρήσετε ως θετική, τη φορά προς τα δεξιά και ως $x = 0$ την αρχική θέση ισορροπίας της ράβδου.

i. Να υπολογίσετε την περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

ii. Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει την ταχύτητα της ράβδου σε συνάρτηση με τον χρόνο.

iii. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της ΗΕΔ που επάγεται στα άκρα της ράβδου τη χρονική στιγμή που η ράβδος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της για πρώτη φορά.

iv. Να αναφέρετε την πολικότητα της ΗΕΔ τη χρονική στιγμή που η ράβδος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της για πρώτη φορά.

v. Να εξηγήσετε πώς θα μεταβληθεί η απόλυτη τιμή της ΗΕΔ τη χρονική στιγμή που η ράβδος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της για πρώτη φορά, αν διπλασιαστεί η σταθερά των δύο ελατηρίων και επαναληφθεί η πιο πάνω κίνηση.

Λύση:

i.

$$D = 2k$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4\,\mathrm{kg}}{2\cdot 20\,\mathrm{N/m}}} = 0{,}20\pi\,\mathrm{s}$$

ii. Για $t = 0$: $x = d = x_0 = 0{,}08\,\mathrm{m}$ άρα $\theta_0 = \pi/2\,\mathrm{rad}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

Η εξίσωση που περιγράφει την ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\upsilon = \omega x_0 \cos(\omega t + \theta_0) = (0{,}8\,\mathrm{m/s})\cos\Big[(10\,\mathrm{rad/s})t + \frac{\pi}{2}\Big]$$

iii. Όταν η ράβδος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της για πρώτη φορά:

$$|\upsilon| = \upsilon_0 = 0{,}8\,\mathrm{m/s}$$

Η ΗΕΔ που επάγεται στα άκρα της ράβδου έχει τιμή:

$$|E_{\text{επ}}| = |\vec{B}||\upsilon|\ell = (0{,}10\,\mathrm{T})\,(0{,}8\,\mathrm{m/s})\,(0{,}30\,\mathrm{m}) = 0{,}024\,\mathrm{V}$$

iv. Στο άκρο Α θα εμφανιστεί αρνητικός πόλος και στο άκρο Μ θετικός.

v. Να εξηγήσετε πώς θα μεταβληθεί η απόλυτη τιμή της ΗΕΔ τη χρονική στιγμή που η ράβδος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της για πρώτη φορά, αν διπλασιαστεί η σταθερά των δύο ελατηρίων και επαναληφθεί η πιο πάνω κίνηση.

$$k' = 2k \Rightarrow D' = 2D = 4k$$

$$|E'_{\varepsilon\pi}| = |\vec{B}|\upsilon'\ell = |\vec{B}|\omega' d\,\ell = |\vec{B}|\sqrt{\frac{D'}{m}}\,d\,\ell = \sqrt{2}\,|\vec{B}|\upsilon_0\ell \Rightarrow |E'_{\varepsilon\pi}| = \sqrt{2}\,|E_{\varepsilon\pi}|$$

29*. Ένα σώμα μάζας $m = 2kg$ εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες εξελίσσονται πάνω στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις στο S.I.

$$x_1 = 0{,}1\sqrt{3}\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right), \qquad x_2 = 0{,}1\,\eta\mu\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

i. Να υπολογίσετε το πλάτος A' της σύνθετης ταλάντωσης.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τη θέση του σώματος σε σχέση με το χρόνο, $x = f(t)$.

iii. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}\,s$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{10}\,s$.

iv. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος στη θέση όπου η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

Λύση:

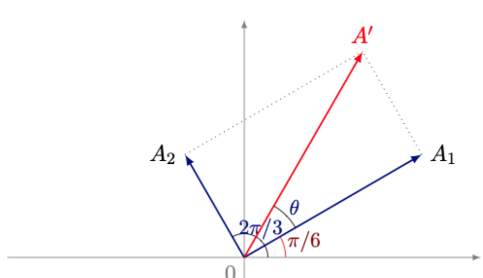
i.

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}.$$

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)} \Leftrightarrow A' = \sqrt{(0{,}1\sqrt{3})^2 + 0{,}1^2} = 0{,}2\,m$$

$$\tan\theta = \frac{A_2\sin(\Delta\varphi)}{A_1 + A_2\cos(\Delta\varphi)} = \frac{0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0{,}1\sqrt{3} + 0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

ii.



$$x = A' \sin(\omega t + \varphi_1 + \theta) \Leftrightarrow x = 0{,}2 \sin\left(10t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = 0{,}2 \sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (SI)$$

iii. Η αντίστοιχη εξίσωση ταχύτητας είναι

$$v = 2\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (SI)$$

$$v_1 = 2\cos\left(10\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1\, m/s$$

$$v_2 = 2\cos\left(10\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = +1\, m/s$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = mu_2 - mu_1 = 2 \cdot 1 - 2(-1) = 4\, kg\, m/s$$

iv.

$$K = 3U \Rightarrow K + U = E \Rightarrow 3U + U = E \Rightarrow 4U = E \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2$$

$$x = \pm\frac{A}{2} = \pm 0{,}1\, m$$

Την πρώτη φορά θα φτάσει στη θέση $x = +0{,}1\, m$ με αρνητική ταχύτητα.

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 200\, N/m$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}1^2 \Rightarrow v^2 = 3 \Rightarrow v = -\sqrt{3}\, m/s$$

$$\frac{dK}{dt} = -Dxv = -200 \cdot 0{,}1 \cdot (-\sqrt{3}) = 20\sqrt{3}\, J/s$$

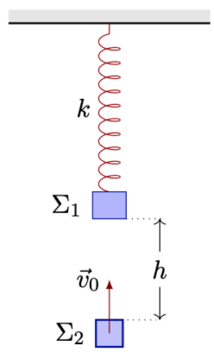
30*. Σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = m = 1kg$, ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 900N/m$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη σε οροφή. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m = 1kg$, βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα $v_0 = 6m/s$, από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $h = 1{,}35m$ κάτω από το σώμα Σ_1. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά ελαστικά την $t = 0$ και στη συνέχεια το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε:

i. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1.

ii. Την θέση του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 γίνεται για 1η φορά ελάχιστη.

iii. Την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά την ταλάντωση του σώματος.

iv. Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1, τη στιγμή που η ταχύτητά του είναι $v = -\dfrac{v_{\max}}{2}$ για πρώτη φορά.



Λύση:

i. Βρίσκουμε την ταχύτητα v_2 με την οποία φτάνει το σώμα-2 στο σώμα-1. Με διατήρηση μηχανικής ενέργειας για το σώμα-2:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2 v_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_2 g h \Leftrightarrow v_2^2 = v_0^2 - 2gh$$

$$\Leftrightarrow v_2^2 = 36 - 27 = 9 \Leftrightarrow v_2 = 3\,m/s.$$

Έχουμε ελαστική κρούση με $v_1 = 0$ άρα από τους μεγάλους τύπους θα έχουμε:

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \Leftrightarrow v_1' = \frac{2}{2} \cdot 3 \Leftrightarrow v_1' = 3\,m/s$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \Leftrightarrow v_2' = 0\,m/s \quad \text{(ανταλλάσσουν ταχύτητες).}$$

Το σώμα-1 μετά την κρούση είναι στη ΘΙ άρα θα κάνει ταλάντωση με

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 30\,rad/s \implies v_1' = v_{\max} = \omega A \Leftrightarrow A = 0{,}1\,m.$$

ii. Η κινητική ενέργεια γίνεται μηδέν για πρώτη φορά στην ακραία ($x = +A$) στην οποία το σώμα φτάσει σε χρόνο

$$\Delta t = \frac{T}{4}, \quad \text{όπου} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15} s$$

Τελικά

$$\Delta t = \frac{\pi}{60} s.$$

Το σώμα-2 κάνει ελεύθερη πτώση μετά την κρούση και σε χρόνο Δt θα έχει πέσει κατά

$$y = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \Leftrightarrow y = 0{,}014\, m.$$

iii. Πρέπει να βρούμε τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αυτή είναι κατά ℓ πάνω από τη ΘΙ, όπου

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow k\ell = m_1 g \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{90}\, m.$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι στην κάτω ακραία θέση όπου έχουμε τη μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου,

$$U_{\text{ελ,max}} = \frac{1}{2} k (A + \ell)^2 \Leftrightarrow U_{\text{ελ,max}} = 6{,}125\, J.$$

iv. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η συνισταμένη δύναμη

$$\frac{dp}{dt} = \sum F = -k x_1.$$

Αρκεί να βρούμε την θέση x_1 όπου

$$v_1 = -\frac{v_{\max}}{2} = -\frac{3}{2}\, m/s$$

για πρώτη φορά.
Αυτό γίνεται στο πρώτο μισό της περιόδου της ταλάντωσης, όταν το σώμα επιστρέφει από την θετική ακραία θέση, άρα $x_1 > 0$.
Με ενέργειες ταλάντωσης:

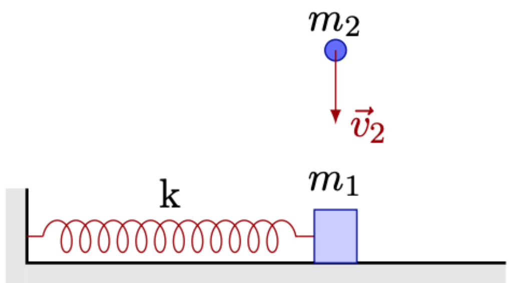
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$900 x^2 + 1 \cdot (1{,}5)^2 = 900 (0{,}1)^2 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{9 - 2{,}25}{900} \Leftrightarrow x_1 = +\frac{\sqrt{3}}{20}\, m.$$

Τελικά:

$$\frac{dp}{dt} = -k x_1 = -45\sqrt{3}\, N.$$

31*. Οριζόντιο ελατήριο, σταθεράς $k = 100\,N/m$, είναι δεμένο από σταθερό σημείο ενώ στην άλλη άκρη του είναι δεμένο σώμα μάζας $m_1 = 1kg$. Το ελατήριο εκτρέπεται συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $d = 20cm$ και αφήνεται ελεύθερο. Την ίδια στιγμή αφήνεται από κατάλληλο ύψος ένα σώμα $m_2 = 3kg$ που συναντά και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1 όταν αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.



i. Να βρεθεί το ύψος h.

ii. Να βρεθεί το νέο πλάτος και η εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

iii. Να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση, και το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης.

iv. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

για δεύτερη φορά.

Λύση:

i. Το σώμα m_1 αφήνεται να κάνει ταλάντωση από παραμόρφωση d άρα αυτή είναι το πλάτος της ταλάντωσης,

$$A = 0{,}2m.$$

Από την αριστερή ακραία θέση (που αφήνεται) μέχρι τη ΘΙ (ΘΦΜ) όπου συγκρούεται με το m_2, το σώμα χρειάζεται χρόνο

$$t = \frac{T}{4}$$

και φτάνει με τη μέγιστη ταχύτητα

$$v_{\max} = \omega A.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\,rad/s \quad \text{και} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}2\pi s.$$

Το σώμα m_2 πρέπει να πέσει για χρόνο

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{20}s,$$

άρα το ύψος θα είναι

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{\pi^2}{400} = \frac{1}{8}m \quad (\pi^2 = 10).$$

ii. Α.Δ.Ο. στον x άξονα:

$$m_1 v_1 = (m_1+m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 1\cdot 2 = 4v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = 0{,}5 m/s.$$

Αυτή είναι η

$$v'_{\max} = \omega' A'$$

της νέας ταλάντωσης.

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5\,rad/s$$

επομένως

$$A' = 0{,}1m.$$

Με θετική φορά δεξιά δεν έχουμε αρχική φάση και η εξίσωση είναι

$$x = 0{,}1\sin(5t) \quad (SI).$$

iii. Απώλεια ενέργειας:

$$|\Delta K| = K - K' = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\sigma^2 = 2 - 0{,}5 = 1{,}5J$$

(και η ίδια είναι η απώλεια ενέργειας της ταλάντωσης, αφού οι κινητικές είναι στη ΘΙ).

Το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης είναι:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta K}{E} = \frac{-1{,}5}{2} = -0{,}75 \text{ ή } -75\%.$$

iv.

$$K + U = E \Leftrightarrow dK + dU = dE \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -(-kx_1v_1) \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = kx_1v_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2$$

$$4v_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 100(0{,}1)^2 = \frac{1}{2}\cdot 100(0{,}1)^2 \Leftrightarrow v_1^2 = 5 \Rightarrow v_1 = \pm\sqrt{5}\,m/s.$$

Τη δεύτερη φορά

$$v_1 = -\sqrt{5}\,m/s.$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 100\cdot 0{,}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{5}) = -5\sqrt{15}\,J/s.$$