Μαθηματικά Β' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Παράγωγος

1. Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο:

i. $f(x) = -2$ στο σημείο $x_0 = 4$

ii. $f(x) = -3x + 1$ στο σημείο $x_0 = -1$

iii. $f(x) = x^2 - x + 5$ στο σημείο $x_0 = 0$

iv. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο σημείο $x_0 = 1$

Λύση: (Ασκ: 1/76)

i. $f(x) = -2$ (σταθερή συνάρτηση) $\Rightarrow\ f'(x) = 0,\ \forall x.$
Άρα, $f'(4) = 0.$

ii. $f(x) = -3x + 1 \Rightarrow f'(x) = -3.$
Στο $x_0 = -1$: $\quad f'(-1) = -3.$

iii. $f(x) = x^2 - x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1.$
Στο $x_0 = 0$: $\quad f'(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1.$

iv. $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}.$
Στο $x_0 = 1$: $\quad f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1.$

2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = |x^2 - 4|$ στο σημείο με $x_0 = 2$.

Λύση: (Ασκ: 2/76)

Επειδή $x^2-4=(x-2)(x+2)$ και για x κοντά στο 2 ισχύει $x+2>0$, γράφουμε τμηματικά:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x>2,\\ -(x^2-4), & x<2,\\ 0, & x=2. \end{cases}$$

Δεξιός παράγωγος στο $x_0=2$:

$$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)^2-4-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}(4+h)=4.$$

Αριστερός παράγωγος στο $x_0=2$:

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\big((2+h)^2-4\big)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(4h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-4-h)=-4.$$

Εφόσον $f'_+(2)=4\neq -4=f'_-(2)$, οι μονόπλευρες παράγωγοι στο 2 είναι άνισες.
Άρα η παράγωγος $f'(2)$ δεν υπάρχει.

3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0\\ x, & x\geq 0 \end{cases}$$

Τότε, $f'(0)=1$.

ii. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όπου f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2+5x,\ x\in\mathbb{R}$. Τότε, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x=1$, ισούται με 7.

iv. Αν $f'(x_0)<0$, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μεγέθους f ως προς το μέγεθος x είναι θετικός όταν $x=x_0$.

Λύση: (Ασκ: 3/76)

i. ΛΑΘΟΣ. Για $x < 0$ ισχύει $f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$. Για $x > 0$ ισχύει $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$. Όμως για $x = 0$ πρέπει να εξετάσουμε τα πλευρικά όρια:

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1,$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Όμως, $f(0^-) = 1$ και $f(0^+) = 0$, άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0. Εφόσον δεν είναι συνεχής, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη. Άρα η πρόταση είναι ΛΑΘΟΣ.

ii. ΣΩΣΤΟ. Από τον ορισμό, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x στο σημείο x_0 είναι ο παράγωγος αριθμός $f'(x_0)$.

iii. ΣΩΣΤΟ. Έχουμε $f(x) = x^2 + 5x \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x + 5$. Στο $x = 1$: $f'(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$. Άρα ο ρυθμός μεταβολής είναι 7.

iv. ΛΑΘΟΣ. Αν $f'(x_0) < 0$, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του f είναι αρνητικός στο σημείο x_0. Δεν μπορεί να είναι θετικός.

4. Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό στο σημείο $x_0 = 0$ (αν υπάρχει) της συνάρτησης f με τύπο:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \le 0 \\ x + \sin x, & x > 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$

Λύση: (Ασκ: 4/76)

i. Αρχικά $f(0) = 0$. Εξετάζουμε τους μονόπλευρους παραγώγους:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h+1) = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h + \sin h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(1 + \frac{\sin h}{h}\right) = 2.$$

Επειδή $f'_-(0) = 1 \neq 2 = f'_+(0)$, ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ δεν υπάρχει.

ii. Έχουμε $f(0) = 0$, ενώ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \neq 0$.
Η f δεν είναι συνεχής στο $0 \Rightarrow$ δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Άρα ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ δεν υπάρχει.

iii. $f(0) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο 0.
Μονόπλευροι παράγωγοι:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h - 0}{h} = 1, \qquad f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Επειδή $f'_-(0) = 1 \neq 0 = f'_+(0)$, ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ δεν υπάρχει.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a, & x < 2 \\ \dfrac{\beta}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Λύση: (Ασκ: 5/77)

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 2, πρέπει:

1. *Συνέχεια στο 2:*

$$\lim_{x\to 2^-} (-x^2 + a) = f(2) = \frac{\beta}{2} \implies -4 + a = \frac{\beta}{2}.$$

2. *Ίσοι μονόπλευροι παράγωγοι:*

$$f'_{-}(2) = \lim_{x \to 2^-} (-2x) = -4, \qquad f'_{+}(2) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{\beta}{x^2}\right) = -\frac{\beta}{4}.$$

Ισότητα: $\quad -4 = -\dfrac{\beta}{4} \;\Rightarrow\; \beta = 16.$

Από τη συνέχεια: $\quad -4 + a = \dfrac{\beta}{2} = 8 \;\Rightarrow\; a = 12.$

6. Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $S = x(t) = t^2 - 4t$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

i. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $[0, 2]$.

ii. Πόση είναι η στιγμιαία ταχύτητα του υλικού σημείου όταν $t = 2$ sec;

Λύση: (Ασκ: 6/77)

i. Μέση ταχύτητα στο $[0, 2]$:

$$v_\mu = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = \frac{(2^2 - 4 \cdot 2) - (0^2 - 4 \cdot 0)}{2} = \frac{(4 - 8) - 0}{2} = \frac{-4}{2} = -2\, m/s$$

ii. Στιγμιαία ταχύτητα: $\quad v(t) = x'(t) = 2t - 4.$
Στο $t = 2$: $\quad v(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0.\;$ (m/s)

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}, & x < 2 \\ -x^2 + \kappa, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τον *στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής* της f στο $x_0 = 4$.

Λύση: (Ασκ: 7/77)

Επειδή $4 \geq 2$, στο περιβάλλον του $x = 4$ ισχύει $f(x) = -x^2 + \kappa \;\Rightarrow\; f'(x) = -2x.$
Στο $x_0 = 4$: $\;f'(4) = -2 \cdot 4 = -8$ (ανεξάρτητα από την τιμή της κ).

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2\sqrt{x},\ x \geq 0$. Αν ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο x_0 είναι διπλάσιος από τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο 4, να βρείτε την τιμή του x_0.

Λύση: (Ασκ: 8/77)

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Στο $x = 4$: $\quad f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

Η συνθήκη δίνει:

$$f'(x_0) = 2 \cdot f'(4) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1.$$

Άρα:

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}} = 1 \implies \sqrt{x_0} = 1 \implies x_0 = 1.$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + |x|$.

i. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

iii. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει από τα (i) και (ii);

Λύση: (Ασκ: 9/77)

i. Γράφουμε τμηματικά $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, άρα

$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 3x, & x \geq 0 \end{cases}$$

και $f(0) = 0$. Ελέγχουμε συνέχεια στο 0:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x = 0 = f(0).$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

ii. Μονόπλευροι παράγωγοι στο 0:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h-0}{h} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h-0}{h} = 3.$$

Επειδή $f'_-(0) = 1 \neq 3 = f'_+(0)$, ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ δεν υπάρχει. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

iii. Συμπέρασμα: Υπάρχει συνάρτηση που είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0. Δηλαδή, η συνέχεια δεν συνεπάγεται παραγωγισιμότητα.

10. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x\,f(x_0) - x_0\,f(x)}{x-x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Λύση: (Ασκ: 10/77)

Αναπτύσσουμε αριθμητή:

$$xf(x_0) - x_0 f(x) = \big(x-x_0\big)f(x_0) - x_0\big(f(x)-f(x_0)\big).$$

Επομένως,

$$\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = f(x_0) - x_0\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Παίρνοντας όρια για $x\to x_0$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = f(x_0) - x_0 \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

11. Να απαντήσετε στα πιο κάτω,

i. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο $f(x) = 3x^2-5,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

Λύση: (Ασκ: 1/80)

i. $f(x) = 3x^2 - 5 \ \Rightarrow\ f'(x) = 6x - 0 = 6x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

ii. $f''(x) = (f')'(x) = (6x)' = 6,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

12. Να απαντήσετε στα πιο κάτω,

i. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο $f(x) = \dfrac{2}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ii. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

Λύση: (Ασκ: 2/80)

i. $f(x) = 2x^{-1} \ \Rightarrow \ f'(x) = -2x^{-2} = -\dfrac{2}{x^2}, \quad x \neq 0.$

ii. $f''(x) = (-2x^{-2})' = 4x^{-3} = \dfrac{4}{x^3}, \quad x \neq 0.$

13. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο: $f(x) = x^3,\ x \in [-1, 3)$.

Λύση: (Ασκ: 3/80)

Η f είναι πολυωνυμική, άρα παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή όμως το πεδίο ορισμού είναι $[-1, 3)$, η (διδιάστατη) παράγωγος ορίζεται μόνο στα εσωτερικά σημεία, δηλαδή για $x \in (-1, 3)$. Για τέτοια x:

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2.$$

Στο άκρο $x = -1$ η διδιάστατη παράγωγος δεν ορίζεται (υπάρχει μόνο δεξιός παράγωγος), ενώ στο $x = 3$ η f δεν ορίζεται.

14. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$.

ii. Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + t^2,\ x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = 2x + 2t$.

iii. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x\sqrt{x},\ x \geq 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

iv. Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

v. Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3e^x,\ x \in \mathbb{R}$ στο $x_0 = \ln 2$ ισούται με 2.

Λύση: (Ασκ: 1/89)

i. ΛΑΘΟΣ. Κανόνας γινομένου: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$, όχι $f'(x_0)g'(x_0)$.

ii. ΛΑΘΟΣ. Η μεταβλητή είναι το x και το t θεωρείται σταθερά ως προς x. Άρα $f'(x) = (x^2)' + (t^2)' = 2x + 0 = 2x$.

iii. ΣΩΣΤΟ. Για $x \geq 0$ έχουμε $f(x) = x^{3/2}$. Στο $(0, +\infty)$: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Στο άκρο 0 ο δεξιός παράγωγος είναι

$$f'_{+}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{h} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έχει δεξιά παράγωγο στο 0, επομένως (με τον ορισμό στα άκρα) είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

iv. ΛΑΘΟΣ. Αντιπαράδειγμα: $f(x) = |x|$ και $g(x) = -|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0, αλλά $(f + g)(x) = 0$ είναι παραγωγίσιμη (και $((f + g))'(x) = 0$).

v. ΛΑΘΟΣ. $f'(x) = 3e^x \;\Rightarrow\; f'(\ln 2) = 3e^{\ln 2} = 3 \cdot 2 = 6 \neq 2$.

15. Να βρείτε την παράγουσα συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = 9,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = x^7,\ x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = e^8,\ x \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) = \dfrac{1}{x^4},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

v. $f(x) = 5^x,\ x \in \mathbb{R}$

vi. $f(x) = -3e^x,\ x \in \mathbb{R}$

vii. $f(x) = \dfrac{7}{5x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

viii. $f(x) = \dfrac{3\sqrt[4]{x^3}}{5},\ x \in (0, +\infty)$

ix. $f(x) = 4x^2 - 6x + 7,\ x \in \mathbb{R}$

x. $f(x) = 2x^3 + \dfrac{8}{x} - \sqrt{5},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

xi. $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

xii. $f(x) = (x+3)(4-2x^3),\ x \in \mathbb{R}$

xiii. $f(x) = \dfrac{x^5}{e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}$

xiv. $f(x) = e^x(2e^x - 3),\ x \in \mathbb{R}$

xv. $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$

xvi. $f(x) = \dfrac{(x+4)^2}{x+3},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Λύση: (Ασκ: 2/89)

i. $f'(x) = 0.$

ii. $f'(x) = 7x^6.$

iii. $f'(x) = 0.$

iv. $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5},\ \ x \neq 0.$

v. $f'(x) = 5^x \ln 5.$

vi. $f'(x) = -3e^x.$

vii. $f'(x) = -\dfrac{7}{5x^2},\ \ x \neq 0.$

viii. $f'(x) = \dfrac{9}{20}\, x^{-1/4} = \dfrac{9}{20\sqrt[4]{x}},\ \ x > 0.$

ix. $f'(x) = 8x - 6.$

x. $f'(x) = 6x^2 - \dfrac{8}{x^2}, \ \ x \neq 0.$

xi. $f'(x) = e^x - \dfrac{2}{x^3}, \ \ x \neq 0.$

xii. $f'(x) = 4 - 18x^2 - 8x^3.$

xiii. $f'(x) = (x^5 e^x)' = e^x\big(5x^4 + x^5\big) = e^x x^4 (x+5).$

xiv. $f'(x) = 4e^{2x} - 3e^x.$

xv. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(x^2 - x - 1)}{(x^2+1)^2}.$

xvi. $f'(x) = \dfrac{2(x+4)(x+3) - (x+4)^2}{(x+3)^2} = \dfrac{(x+4)(x+2)}{(x+3)^2}, \ \ x \neq -3.$

16. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, με $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις συναρτήσεις f', f'' και f'''.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f, ώστε να είναι $f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 2$.

Λύση: (Ασκ: 3/89)

i. $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma, \quad f''(x) = 6ax + 2\beta, \quad f'''(x) = 6a.$

ii. Οι συνθήκες στο $x = 1$ δίνουν το σύστημα:

$$\begin{cases} a + \beta + \gamma + \delta = 2 & (1) \\ 3a + 2\beta + \gamma = 2 & (2) \\ 6a + 2\beta = 2 & (3) \\ 6a = 2 & (4) \end{cases}$$

Από (4): $a = \dfrac{1}{3}$. Από (3): $3a + \beta = 1 \Rightarrow 1 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 0.$
Από (2): $3a + 2\beta + \gamma = 2 \Rightarrow 1 + 0 + \gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 1.$
Από (1): $a + \beta + \gamma + \delta = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{3} + 0 + 1 + \delta = 2 \Rightarrow \delta = \dfrac{2}{3}.$

Επομένως, $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x + \dfrac{2}{3}.$

17. Έστω δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 1$ και ισχύει

$$g(1) \neq 0, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = 1.$$

i. Να δείξετε ότι $f'(1)\,g(1) > f(1)\,g'(1)$.

ii. Αν επιπλέον ισχύουν $f'(1) = g'(1) = 1$, να δείξετε ότι $f(1) \leq \dfrac{1}{4}$.

Λύση: (Ασκ: 4/90)

i. Κανόνας πηλίκου στο $x = 1$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)\,g(1) - f(1)\,g'(1)}{(g(1))^2} = 1,$$

εφόσον $g(1) \neq 0$. Άρα

$$f'(1)\,g(1) - f(1)\,g'(1) = (g(1))^2 > 0 \implies f'(1)\,g(1) > f(1)\,g'(1).$$

ii. Με $f'(1) = g'(1) = 1$ η προηγούμενη ισότητα δίνει

$$g(1) - f(1) = (g(1))^2 \iff f(1) = g(1) - (g(1))^2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(y) = y - y^2 = \dfrac{1}{4} - \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Με $y = g(1)$ παίρνουμε $f(1) = h(g(1)) \leq \dfrac{1}{4}$, με ισότητα όταν $g(1) = \dfrac{1}{2}$.

18. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τεμ}(x)$, με $x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}(x) = 0\}$, είναι παραγωγίσιμη και ότι $f'(x) = \text{τεμ}(x)\,\text{εφ}(x)$, για κάθε $x \in A$.

Λύση: (Ασκ: 1/96)

Για $x \in A$ ισχύει $\text{συν}(x) \neq 0$, άρα

$$f(x) = \text{τεμ}(x) = \frac{1}{\text{συν}(x)} = (\text{συν}(x))^{-1}.$$

Με κανόνα αλυσίδας:

$$f'(x) = \left((\text{συν}(x))^{-1}\right)' = -(\text{συν}(x))^{-2} \cdot (\text{συν}(x))' = -(\text{συν}(x))^{-2} \cdot (-\text{ημ}(x)) = \frac{\text{ημ}(x)}{(\text{συν}(x))^2}.$$

Εφόσον $\varepsilon\varphi(x) = \dfrac{\eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x)}$ και $\tau\varepsilon\mu(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(x)}$, παίρνουμε

$$f'(x) = \frac{\eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x)} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(x)} = \varepsilon\varphi(x) \cdot \tau\varepsilon\mu(x) = \tau\varepsilon\mu(x)\,\varepsilon\varphi(x),$$

για κάθε $x \in A$.

19. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2\,\eta\mu(x) - \sigma\upsilon\nu(x),\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = x\,\varepsilon\varphi(x),\ x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$

iii. $f(x) = e^x\eta\mu(x),\ x \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) = \dfrac{x^4}{4}\,\tau\varepsilon\mu(x),\ x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$

v. $y = \dfrac{\sigma\tau\varepsilon\mu(x)}{1 + \sigma\varphi(x)},\ x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi - \frac{\pi}{4}\}$

vi. $y = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu(x)}{1 + \eta\mu(x)},\ x \in \mathbb{R} - \{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}\}$

vii. $y = \dfrac{x\,\eta\mu(x)}{x + 1},\ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

viii. $y = \dfrac{1}{\eta\mu(x)\,\sigma\upsilon\nu(x)},\ x \in \mathbb{R} - \{\frac{\kappa\pi}{2}\}$

ix. $y = x^2 e^x \sigma\upsilon\nu(x),\ x \in \mathbb{R}$

x. $y = \dfrac{x\,\eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x)}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$

Λύση: (Ασκ: 2/96)

i. $f'(x) = 2\,\sigma\upsilon\nu(x) + \eta\mu(x)$.

ii. $f'(x) = \varepsilon\varphi(x) + x\,\tau\varepsilon\mu^2(x)$.

iii. $f'(x) = e^x\big(\text{ημ}(x) + \text{συν}(x)\big)$.

iv. $f'(x) = x^3\text{τεμ}(x) + \dfrac{x^4}{4}\,\text{τεμ}(x)\,\text{εφ}(x)$.

v. Με κανόνα πηλίκου,

$$y' = \frac{\big(-\text{στεμ}(x)\,\text{σφ}(x)\big)\big(1+\text{σφ}(x)\big) - \text{στεμ}(x)\big(-\text{στεμ}^2(x)\big)}{\big(1+\text{σφ}(x)\big)^2} = \frac{\text{στεμ}(x)\big(\text{στεμ}^2(x) - \text{σφ}(x) - \text{σφ}^2(x)\big)}{\big(1+\text{σφ}(x)\big)^2}.$$

vi. $y' = \dfrac{\text{ημ}(x)\big(1+\text{ημ}(x)\big) - \big(1-\text{συν}(x)\big)\text{συν}(x)}{\big(1+\text{ημ}(x)\big)^2}$.

vii. $y' = \dfrac{\big(\text{ημ}(x) + x\,\text{συν}(x)\big)(x+1) - x\,\text{ημ}(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{\text{ημ}(x) + x(x+1)\text{συν}(x)}{(x+1)^2}$.

viii. $y' = -\dfrac{\big(\text{ημ}(x)\,\text{συν}(x)\big)'}{\big(\text{ημ}(x)\,\text{συν}(x)\big)^2} = -\dfrac{\text{συν}^2(x) - \text{ημ}^2(x)}{\big(\text{ημ}(x)\,\text{συν}(x)\big)^2} = -\dfrac{\text{συν}(2x)}{\big(\text{ημ}(x)\,\text{συν}(x)\big)^2}$.

ix. $y' = e^x\Big((2x + x^2)\,\text{συν}(x) - x^2\,\text{ημ}(x)\Big)$.

x. Με κανόνα πηλίκου (ή γινόμενο με e^{-x}),

$$y' = \frac{\big(x\,\text{συν}(x)\big)e^x - \big(x\,\text{ημ}(x) + \text{συν}(x)\big)e^x}{e^{2x}} = \frac{x\,\text{συν}(x) - x\,\text{ημ}(x) - \text{συν}(x)}{e^x}.$$

20. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{συν}(x) + \text{ημ}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lambda f'\big(\frac{\pi}{2}\big) - 2f\big(\frac{\pi}{2}\big) = 2$.

Λύση: (Ασκ: 3/96)

i. $f'(x) = -\,\text{ημ}(x) + \text{συν}(x), \quad f''(x) = -\,\text{συν}(x) - \text{ημ}(x) = -f(x).$

Άρα $f(x) + f''(x) = f(x) - f(x) = 0.$

ii. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1.$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{συν}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1.$

Η σχέση δίνει $\lambda(-1) - 2(1) = 2 \implies -\lambda - 2 = 2 \implies \lambda = -4.$

21. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ \text{ημ}(x), & x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

Λύση: (Ασκ: 4/96)

Για $x < 0$: $\quad f(x) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1.$

Για $x > 0$: $\quad f(x) = \text{ημ}(x) \Rightarrow f'(x) = \text{συν}(x).$

Στο $x = 0$ ελέγχουμε παραγωγισιμότητα: $\quad f(0^-) = 0$, $f(0^+) = \text{ημ}(0) = 0$ (συνέχεια).
Μονόπλευροι παράγωγοι:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{(h^2 + h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} (h+1) = 1, \qquad f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\text{ημ}(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\text{ημ}(h)}{h} = 1.$$

Άρα f' υπάρχει στο 0 και $f'(0) = 1.$

Επομένως,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ 1 & x = 0 \\ \text{συν}(x), & x > 0 \end{cases}$$

22. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\text{ημ}(x) + \text{συν}(x), & x < 0 \\ x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Λύση: (Ασκ: 5/96)

Για $x < 0$:

$f'(x) = \big(x^2\,\text{ημ}(x)\big)' + \big(\text{συν}(x)\big)' = 2x\,\text{ημ}(x) + x^2\,\text{συν}(x) - \text{ημ}(x) = (2x-1)\,\text{ημ}(x) + x^2\,\text{συν}(x).$

Για $x > 0$:

$$f'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1.$$

Στο $x = 0$ ελέγχουμε παραγωγισιμότητα. $f(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\big(x^2\text{ημ}x + \text{συν}x\big) = 1 = f(0)$ (συνέχεια).
Μονόπλευροι παράγωγοι:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2\text{ημ}h + \text{συν}h - 1}{h} = 0, \qquad f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{(h^2+h+1)-1}{h} = 1.$$

Επειδή $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, ο παράγωγος στο $x = 0$ δεν υπάρχει.

Επομένως,

$$f'(x) = \begin{cases} (2x-1)\,\text{ημ}(x) + x^2\,\text{συν}(x), & x < 0, \\ 2x + 1, & x > 0, \end{cases} \qquad \text{και } f'(0) \text{ δεν υπάρχει.}$$

23. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x\big(\text{συν}(x) + \text{ημ}(x)\big),\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty} f'(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)}{x}$.

Λύση: (Ασκ: 6/96)

Υπολογίζουμε παράγωγες:

$$f'(x) = e^x\big(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\big) + e^x\big(- \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\big) = 2e^x\sigma\upsilon\nu x,$$
$$f''(x) = (2e^x\sigma\upsilon\nu x)' = 2e^x\sigma\upsilon\nu x + 2e^x(-\eta\mu x) = 2e^x\big(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\big),$$
$$f'''(x) = \big(2e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)\big)' = 2e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) + 2e^x(-\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) = -4e^x\eta\mu x.$$

i.
$$\begin{aligned} f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) &= 2e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - 2\cdot(2e^x\sigma\upsilon\nu x) + 2e^x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) \\ &= 2e^x\big[\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\big] = 0. \end{aligned}$$

Άρα $f'' - 2f' + 2f = 0$ για κάθε x.

ii. $f'(x) = 2e^x\sigma\upsilon\nu x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 2\cdot 0\cdot(\varphi\rho\alpha\gamma\mu.) = 0.$

iii. $f'''(x) = -4e^x\eta\mu x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f'''(x)}{x} = -4\lim\limits_{x\to0} e^x\,\dfrac{\eta\mu x}{x} = -4\cdot1\cdot1 = -4.$

24. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Ισχύει $(\eta\mu(2x))' = \sigma\upsilon\nu(2x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f'(0) = 0$.

iii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε $(f(\eta\mu\, x))' = f'(\eta\mu\, x)\cdot(\eta\mu\, x)'$.

iv. Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2 x,\ x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) = \eta\mu(2x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

v. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς a ως προς την πλευρά του ισούται με $2a$.

vi. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, $\qquad f(x) > 0$.

vii. Ο τύπος $(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$ ισχύει όταν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$.

Λύση: (Ασκ: 1/102)

i. ΛΑΘΟΣ. Με κανόνα αλυσίδας: $(\eta\mu(2x))' = 2\sigma\upsilon\nu(2x)$, όχι $\sigma\upsilon\nu(2x)$.

ii. ΣΩΣΤΟ. $f'(x) = 2x\,e^{x^2} \;\Rightarrow\; f'(0) = 0$.

iii. ΣΩΣΤΟ. Κανόνας αλυσίδας: $(f(\eta\mu\,x))' = f'(\eta\mu\,x)\cdot(\eta\mu\,x)' = f'(\eta\mu\,x)\,\sigma\upsilon\nu\,x$.

iv. ΣΩΣΤΟ. $f'(x) = 2\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(2x)$.

v. ΣΩΣΤΟ. $E(a) = a^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{dE}{da} = 2a$.

vi. ΣΩΣΤΟ. Θέτοντας $h(u) = \sqrt{u}$, $(h\circ f)' = h'(f)\,f'$ με $h'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ για $u > 0$, δίνει $(\sqrt{f(x)})' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ όπου $f(x) > 0$.

vii. ΛΑΘΟΣ. Απαιτείται g *παραγωγίσιμη στο* x_0 και f *παραγωγίσιμη στο* $g(x_0)$. Η διατύπωση «g παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$» είναι εσφαλμένη.

25. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $y = \eta\mu(3x)$

ii. $y = \sigma\upsilon\nu(x^2+1)$

iii. $y = e^{-x}$

iv. $y = \sigma\upsilon\nu^2(4x)$

v. $y = e^{x^3}$

vi. $y = e^{\eta\mu\,x}$

vii. $y = (x^3 - 2x + 6)^5$

viii. $y = \sqrt{x^2+1}$

ix. $y = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$

x. $y = \eta\mu\big(e^x + \sigma\upsilon\nu\,x\big)$

xi. $y = \sigma\tau\epsilon\mu\Big(\sqrt{x^3-5}\,\Big)$

xii. $y = \etaμ(5x) + e^{-4x}$

xiii. $y = 5^{\,2x}$

xiv. $y = 4^{-x}\,τεμ(7x)$

xv. $y = \big(σφ(x^2+1)\big)^5$

xvi. $y = \big(x\,σφ\,x\big)^4$

xvii. $y = x^4\,τεμ^2(3x)$

xviii. $y = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

xix. $y = εφ\big(e^{3x^2}\big)$

xx. $y = \sqrt[7]{(x-2)^5}$

Λύση: (Ασκ: 2/102)

i. *Κανόνας αλυσίδας:* $(ημ\,u)' = u'\,συν\,u$. $u = 3x \Rightarrow u' = 3$.
$y' = 3\,συν(3x)$.

ii. $(συν\,u)' = -u'\,ημ\,u$, $u = x^2+1$, $u' = 2x$.
$y' = -2x\,ημ(x^2+1)$.

iii. $(e^u)' = u'\,e^u$, $u = -x$, $u' = -1$. $y' = -e^{-x}$.

iv. Θέτουμε $g(x) = συν(4x)$, $y = g^2$.
$y' = 2g\cdot g' = 2συν(4x)\cdot(-4\,ημ(4x)) = -8\,συν(4x)ημ(4x) = -4\,ημ(8x)$.

v. $y' = (x^3)'e^{x^3} = 3x^2e^{x^3}$.

vi. $y' = e^{ημx}\cdot(ημx)' = e^{ημx}\,συνx$.

vii. $y' = 5(x^3 - 2x + 6)^4 \cdot (3x^2 - 2)$.

viii. $y = (x^2+1)^{1/2} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

ix. $y = 2(3x+1)^{-2} \Rightarrow y' = 2(-2)(3x+1)^{-3} \cdot 3 = -\dfrac{12}{(3x+1)^3}$.

x. $u = e^x + \text{συν}x \Rightarrow u' = e^x - \text{ημ}x$.
$y' = \text{συν}(u) \cdot u' = \big(e^x - \text{ημ}x\big)\,\text{συν}\big(e^x + \text{συν}x\big)$.

xi. $u = \sqrt{x^3-5}$, $u' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-5}}$.
$(\text{στεμ}\,u)' = -\,\text{στεμ}\,u \cdot \text{σφ}\,u \cdot u' \Rightarrow$
$y' = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-5}}\ \text{στεμ}\Big(\sqrt{x^3-5}\Big)\,\text{σφ}\Big(\sqrt{x^3-5}\Big)$.

xii. $y' = 5\,\text{συν}(5x) - 4e^{-4x}$.

xiii. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $u = 2x$.
$y' = 5^{\,2x}\ \ln 5 \cdot 2 = 2\ln 5\ 5^{\,2x}$.

xiv. $y = u \cdot v$ με $u = 4^{-x}$, $u' = -\ln 4\ 4^{-x}$, $\quad v = \text{τεμ}(7x)$, $v' = \text{τεμ}(7x)\,\text{εφ}(7x) \cdot 7$.
$y' = 4^{-x}\,\text{τεμ}(7x)\,\big[-\ln 4 + 7\,\text{εφ}(7x)\big]$.

xv. $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$.
$y = [\text{σφ}(u)]^5 \Rightarrow y' = 5\,\text{σφ}^4(u) \cdot (\text{σφ}(u))'$
$\quad = 5\,\text{σφ}^4(u) \cdot \big(-\ \text{στεμ}^2(u) \cdot u'\big) = -10x\,\text{σφ}^4(x^2+1)\,\text{στεμ}^2(x^2+1)$.

xvi. $w = x\,\text{σφ}x \Rightarrow w' = \text{σφ}x + x(\text{σφ}x)' = \text{σφ}x - x\,\text{στεμ}^2 x$.
$y = w^4 \Rightarrow y' = 4w^3 w' = 4\big(x\,\text{σφ}x\big)^3\big(\text{σφ}x - x\,\text{στεμ}^2 x\big)$.

xvii. $y = x^4\,[\text{τεμ}(3x)]^2$.
$y' = 4x^3\text{τεμ}^2(3x) + x^4 \cdot 2\text{τεμ}(3x) \cdot \big(\text{τεμ}(3x)\,\text{εφ}(3x) \cdot 3\big)$

$= \text{τεμ}^2(3x)\,(4x^3 + 6x^4\,\text{εφ}(3x))$.

xviii. Κανόνας πηλίκου:

$$y' = \frac{e^x(e^x + e^{-x}) - e^x(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

xix. $u = e^{3x^2}$, $u' = 6x\,e^{3x^2}$, $(\text{εφ}\,u)' = \text{τεμ}^2 u \cdot u'$.
$y' = 6x\,e^{3x^2}\ \text{τεμ}^2\big(e^{3x^2}\big)$.

xx. $y = (x-2)^{5/7} \Rightarrow y' = \dfrac{5}{7}(x-2)^{5/7-1} = \dfrac{5}{7}(x-2)^{-2/7}$.

26. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f'(3) = 5$.

Λύση: (Ασκ: 3/103)

Θέτουμε $u(x) = x^3 + x + 1$. Τότε $f(u(x)) = 7x^3 - x$. Παραγωγίζοντας και εφαρμόζοντας κανόνα αλυσίδας,

$$f'(u(x)) \cdot u'(x) = 21x^2 - 1.$$

Επειδή $u'(x) = 3x^2 + 1$, παίρνουμε

$$f'(u(x)) = \frac{21x^2 - 1}{3x^2 + 1}.$$

Για να βρούμε $f'(3)$ λύνουμε $u(x) = 3$:

$$x^3 + x + 1 = 3 \iff x^3 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \implies x = 1.$$

Άρα

$$f'(3) = f'(u(1)) = \frac{21 \cdot 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{20}{4} = 5.$$

27. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(\text{ημ}\, x)+f(\text{συν}\, x)=1+\text{ημ}\, x+\text{συν}\, x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

Λύση: (Ασκ: 4/103)

Παραγωγίζουμε ως προς x και στις δύο πλευρές. Χρησιμοποιούμε ότι

$$(\text{ημ}\, x)'=\text{συν}\, x,\qquad (\text{συν}\, x)'=-\,\text{ημ}\, x,$$

και τον κανόνα αλυσίδας:

$$f'(\text{ημ}\, x)\cdot\text{συν}\, x\ +\ f'(\text{συν}\, x)\cdot(-\text{ημ}\, x)=\text{συν}\, x-\text{ημ}\, x.$$

Θέτουμε $x=0$ (όπου $\text{ημ}\, 0=0$, $\text{συν}\, 0=1$):

$$f'(0)\cdot 1\ +\ f'(1)\cdot 0=1-0\ \Longrightarrow\ f'(0)=1.$$

28. Η πλευρά a (σε cm) ενός τετραγώνου δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τη σχέση $a(t)=t^2+1$, $t>0$.

i. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t το εμβαδόν $E(t)$ του τετραγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(t)=4t\,(t^2+1)$.

ii. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εμβαδόν του τετραγώνου τη στιγμή $t_0=1$ sec.

Λύση: (Ασκ: 5/103)

i. Για τετράγωνο με πλευρά $a(t)$, το εμβαδόν είναι

$$E(t)=a(t)^2=(t^2+1)^2.$$

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$E'(t)=2\,(t^2+1)\cdot(2t)=4t\,(t^2+1).$$

Άρα ο ζητούμενος ρυθμός είναι $E'(t)=4t(t^2+1)$ (cm^2/sec).

ii. Στο $t_0=1$:

$$E'(1)=4\cdot 1\cdot(1^2+1)=4\cdot 2=8\ \text{cm}^2/\text{sec}.$$

29. Ο όγκος ενός κύβου πλευράς a αυξάνεται με ρυθμό 7 cm^3/min. Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν την επιφάνεια και τον όγκο του κύβου ως συνάρτηση της πλευράς του a και να βρείτε:

i. τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου ως προς τον χρόνο,

ii. τον ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κύβου ως προς τον χρόνο,

iii. τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η επιφάνεια του κύβου, όταν ο όγκος είναι 8 cm^3.

Λύση: (Ασκ: 6/103)

Οι βασικές σχέσεις (ως συναρτήσεις της πλευράς a) είναι:

$$V(a) = a^3 \quad (\text{cm}^3), \qquad S(a) = 6a^2 \quad (\text{cm}^2).$$

Δίνεται $\dfrac{dV}{dt} = 7 \text{ cm}^3/\text{min}$.

i. Από $V = a^3$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dt} = 3a^2 \frac{da}{dt} \implies \frac{da}{dt} = \frac{1}{3a^2}\frac{dV}{dt} = \frac{7}{3a^2} \text{ cm/min}.$$

ii. Από $S = 6a^2$:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{da} \cdot \frac{da}{dt} = 12a \frac{da}{dt} = 12a \cdot \frac{7}{3a^2} = \frac{28}{a} \text{ cm}^2/\text{min}.$$

iii. Όταν $V = 8 \text{ cm}^3$, από $V = a^3$ προκύπτει $a = \sqrt[3]{8} = 2$ cm.
Άρα

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{V=8} = \frac{28}{a} = \frac{28}{2} = 14 \text{ cm}^2/\text{min}.$$

30. Σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, και η τετμημένη του κάθε χρονική στιγμή t (σε λεπτά) δίνεται από τον τύπο $x(t) = 2t^2 - t$, $t \in [0, 10]$ (με $x(t)$ σε μέτρα). Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή, πριν συμπληρωθεί το πρώτο λεπτό της κίνησης, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M γίνεται ίσος με 5 m/min.

Λύση: (Ασκ: 7/103)

Η τεταγμένη του σημείου είναι $y(t) = f(x(t)) = e^{x(t)} = e^{2t^2-t}$. Άρα, με κανόνα αλυσίδας,

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = e^{2t^2-t} \cdot x'(t) = e^{2t^2-t}(4t-1).$$

Θέλουμε $y'(t) = 5$. Θέτουμε τη συνεχόμενη συνάρτηση

$$\Phi(t) = e^{2t^2-t}(4t-1) - 5, \qquad t \in [0, 1].$$

Υπολογισμοί στα άκρα:

$$\Phi(0) = e^0 \cdot (-1) - 5 = -6 < 0, \qquad \Phi(1) = e^1 \cdot 3 - 5 = 3e - 5 > 0.$$

Εφόσον η Φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και αλλάζει πρόσημο, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ με $\Phi(t_0) = 0$, δηλ.

$$e^{2t_0^2-t_0}(4t_0-1) = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t_0) = 5 \text{ m/min}.$$

Άρα πριν συμπληρωθεί το πρώτο λεπτό υπάρχει χρονική στιγμή όπου ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης γίνεται 5 m/min.

31. Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t (σε sec) δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5, \qquad t \in [0, 6].$$

Να βρείτε:

i. τον ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης του σώματος (την ταχύτητα) τη στιγμή $t_1 = 5$ sec.

ii. τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος (την επιτάχυνση) τη στιγμή $t_2 = 4$ sec.

iii. ποιες χρονικές στιγμές το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο.

Λύση: (Ασκ: 8/103)

Η ταχύτητα είναι $v(t) = x'(t)$ και η επιτάχυνση $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

$$x'(t) = 3t^2 - 18t + 24, \qquad x''(t) = 6t - 18.$$

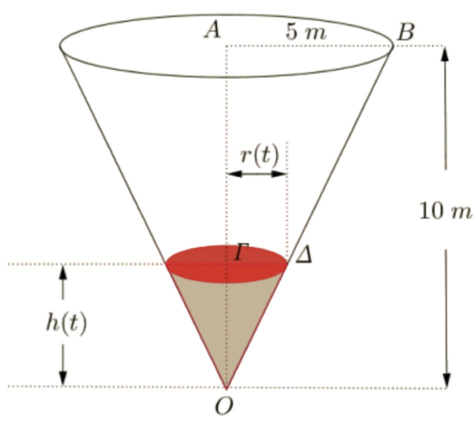
i. $v(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 75 - 90 + 24 = 9 \quad (\text{μον./sec})$.

ii. $a(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 24 - 18 = 6 \quad (\text{μον./sec}^2)$.

iii. Στιγμιαία ακίνητο $\Leftrightarrow v(t) = 0$:

$$3t^2 - 18t + 24 = 0 \iff t^2 - 6t + 8 = 0 \iff (t-2)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 2,\ 4 \ (\text{στο } [0,6]).$$

32. Στο σχήμα φαίνεται κωνική δεξαμενή ύψους 10 m με ακτίνα βάσης 5 m. Η δεξαμενή γεμίζει με νερό με ρυθμό $2\,\text{m}^3/\text{min}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η στάθμη του νερού τη χρονική στιγμή που βρίσκεται σε ύψος 4 m.



Λύση: (Ασκ: 9/103)

Αν $h(t)$ είναι το ύψος της στάθμης και $r(t)$ η ακτίνα της ελεύθερης επιφάνειας, από ομοιότητα τριγώνων στο μεγάλο και στο μικρό κώνο:

$$\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \implies r = \frac{h}{2}.$$

Ο όγκος του νερού (κώνος) είναι

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3.$$

Παραγωγίζουμε ως προς t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}.$$

Δίνεται $\frac{dV}{dt} = 2$ και στο ζητούμενο χρόνο $h = 4$. Άρα

$$2 = \frac{\pi}{4}\cdot 4^2\,\frac{dh}{dt} = 4\pi\,\frac{dh}{dt} \implies \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ \mathrm{m/min}.$$

Η στάθμη ανεβαίνει με ρυθμό $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}$ m/min (≈ 0.159 m/min) όταν $h = 4\,$m.

33. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

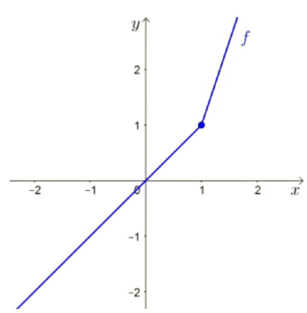
i. Η παράσταση $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$, εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

ii. Έστω $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 0$. Τότε η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο $x_0 = 2$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

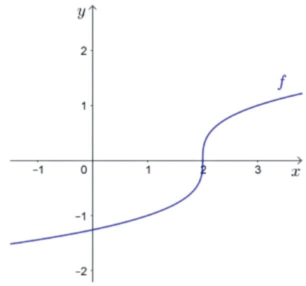
iii. Αν για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 2$, τότε $f'(2) = 0$.

iv. Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}+1, & x < 0 \end{cases}$. Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη την ευθεία $x = 0$.

v. Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(1, 1)$.



vi. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(2, 0)$.



Λύση: (Ασκ: 1/110)

i. ΛΑΘΟΣ. Η ποσότητα $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι η *κλίση της τέμνουσας* (secant). Η κλίση της εφαπτομένης δίνεται από το *όριο* όταν $h \to 0$: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

ii. ΣΩΣΤΟ. Η ισότητα δίνει ότι υπάρχει $f'(2)$ και $f'(2) = 0$. Άρα η εφαπτομένη στο $x = 2$ έχει κλίση 0, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iii. ΛΑΘΟΣ. Η συνθήκη σημαίνει $f'(0) = 2$ και δεν συνεπάγεται κάτι για το $f'(2)$. Π.χ. για $f(x) = x^2 + 2x$ έχουμε $f'(0) = 2$, αλλά $f'(2) = 6 \neq 0$.

iv. ΛΑΘΟΣ. Για $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to +\infty$ καθώς $x \to 0^+$. Για $x < 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} \to -\infty$ καθώς $x \to 0^-$. Οι μονόπλευρες παράγωγοι δεν τείνουν στο ίδιο όριο, άρα δεν υπάρχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x = 0$.

v. ΛΑΘΟΣ. Από το σχήμα η γραφική παράσταση παρουσιάζει *γωνιακό σημείο* στο $(1, 1)$, συνεπώς δεν υπάρχει μοναδική εφαπτομένη.

vi. ΛΑΘΟΣ. Στο σημείο $(2, 0)$ η γραφική παράσταση (σύμφωνα με το σχήμα) παρουσιάζει *οριζόντια γωνία* και όχι ομαλή συνέχεια, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη εκεί.

34. Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^2+4$ στο σημείο της $A(2,8)$.

Λύση: (Ασκ: 2/110)

Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι $f'(x_0)$.
$f(x)=x^2+4 \;\Rightarrow\; f'(x)=2x$.
Στο $x_0=2$ προκύπτει
$$f'(2)=2\cdot 2=4.$$
Η κλίση της εφαπτομένης στο $A(2,8)$ είναι 4.

35. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f (αν ορίζεται) στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

i. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ στο $A\big(1,f(1)\big)$

ii. $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+3, & x<0 \\ 3x+3, & x\geq 0 \end{cases}$ στο $A\big(0,f(0)\big)$

iii. $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x-1}\,, & x\geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}\,, & x<1 \end{cases}$ στο $A(1,0)$

Λύση: (Ασκ: 3/111)

i. $f(x)=x^{-3} \;\Rightarrow\; f'(x)=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$.
Στο $x_0=1$: $m=f'(1)=-3$ και $A(1,1)$.
Εξίσωση εφαπτομένης: $y-1=-3(x-1) \;\Rightarrow\; y=-3x+4$.

ii. Ελέγχουμε στο $x_0=0$:
$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+3x+3)=3=f(0^+)=3$ (συνέχεια).
$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(2x+3)=3, \quad f'_+(0)=(3)=3$.
Άρα $f'(0)=3$ και $A(0,3)$.
Εφαπτομένη: $y-3=3(x-0) \;\Rightarrow\; y=3x+3$.

iii. Για $x>1$: $f(x)=\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^{-2/3}>0$ και $f'_+(1)=+\infty$.
Για $x<1$: $f(x)=-\sqrt[3]{1-x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}(1-x)^{-2/3}>0$ και $f'_-(1)=+\infty$.
Επομένως στο $x=1$ υπάρχει κατακόρυφη εφαπτομένη $x=1$.

36. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$.

Λύση: (Ασκ: 4/111)

Συνέχεια στο $x=1$. $f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ και $f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1$. Άρα f είναι συνεχής στο $x=1$ και $A(1,1) \in \Gamma_f$.

Μονοπλευρές παράγωγοι στο $x=1$ Για $x<1$: $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$, οπότε $f'_-(1)=2$. Για $x>1$: $f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, οπότε $f'_+(1)=-1$.

Εφόσον $f'_-(1)=2$ και $f'_+(1)=-1$, οι μονοπλευρές παράγωγοι δεν είναι ίσες, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$. Συνεπώς η γραφική της παράσταση δεν δέχεται (μοναδική) εφαπτομένη στο $A(1,1)$.

Παρατήρηση: Οι δύο μονοπλευρές «εφαπτομένες» θα είχαν εξισώσεις $y-1=2(x-1)$ και $y-1=-(x-1)$, σχηματίζοντας γωνιακό σημείο στο $x=1$.

37. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x > -1$$

στο σημείο της A σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία $\dfrac{3\pi}{4}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και την εξίσωση της κάθετης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό.

Λύση: (Ασκ: 5/111)

Παράγωγος: $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Η γωνία της εφαπτομένης είναι $\theta = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow m_\tau = \tan\theta = -1$.
Θέτουμε $f'(x_0) = m_\tau$:

$$-\frac{1}{(x_0+1)^2} = -1 \quad\Rightarrow\quad (x_0+1)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad x_0+1 = \pm 1.$$

Με τον περιορισμό $x>-1$ παίρνουμε $x_0=0$ (η λύση $x_0=-2$ απορρίπτεται).
Τότε $y_0 = f(0) = 1$, άρα $A(0,1)$.

Κλίση κάθετης: $m_\kappa = -\dfrac{1}{m_\tau} = 1.$
Εξίσωση κάθετης στο $A(0,1)$: $y-1 = 1(x-0) \;\Rightarrow\; y = x+1.$

38. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2ax + \beta + a, & x \geq 2 \\ \dfrac{\gamma}{x+1}, & x < 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A\big(2, f(2)\big)$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $2x+y-1=0$.

Λύση: (Ασκ: 6/111)

Η ευθεία $2x+y-1=0 \Rightarrow y=-2x+1$ έχει κλίση $m=-2$. Για να υπάρχει εφαπτομένη στο $x=2$ και να είναι παράλληλη με αυτήν την ευθεία, απαιτούνται:

(i) Συνέχεια στο $x=2)$: $f(2^-) = f(2^+)$
(ii) Παραγωγισιμότητα στο $x=2)$: $f'_-(2) = f'_+(2) = m = -2.$

Συνέχεια. $f(2^+) = a\cdot 4 + 2a\cdot 2 + \beta + a = 9a + \beta,$ $f(2^-) = \dfrac{\gamma}{2+1} = \dfrac{\gamma}{3}.$
Άρα $9a+\beta = \dfrac{\gamma}{3}.$
Παράγωγοι. Για $x>2$: $f'(x) = 2ax + 2a = 2a(x+1) \Rightarrow f'_+(2) = 6a.$
Για $x<2$: $f'(x) = -\dfrac{\gamma}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_-(2) = -\dfrac{\gamma}{9}.$
Θέλουμε $f'_+(2) = f'_-(2) = -2$, οπότε

$$6a = -2 \;\Rightarrow\; a = -\tfrac{1}{3}, \qquad -\frac{\gamma}{9} = -2 \;\Rightarrow\; \gamma = 18.$$

Με αυτά, από τη συνέχεια:

$$9\big(-\tfrac{1}{3}\big) + \beta = \frac{18}{3} = 6 \;\Rightarrow\; -3+\beta = 6 \;\Rightarrow\; \beta = 9$$

Έλεγχος: $f(2) = 9a+\beta = -3+9 = 6$ και $f'_+(2) = f'_-(2) = -2$. (Η εφαπτομένη στο $A(2,6)$ είναι $y-6 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x+10$, άρα παράλληλη στην $2x+y-1=0$.)

39. Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω εξισώσεις:

i. $x^2 + 2yx - y^2 = 0$

ii. $yx^2 = 3x + y$

iii. $y = x + x\, e^y$

iv. $y^2 - 2y\sqrt{1+x^2} + x^2 = 0$

v. $\eta\mu(x) + \eta\mu(y) = 1$

Λύση: (Ασκ: 1/119)

i. Παραγώγιση κατά x: $2x + 2(x\,y' + y) - 2yy' = 0$.
$\Rightarrow (2x-2y)y' + 2(x+y) = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{x+y}{x-y}\,.$

ii. $x^2y' + 2xy = 3 + y' \;\Rightarrow\; (x^2-1)y' = 3 - 2xy \;\Rightarrow , y' = \dfrac{3-2xy}{x^2-1}.$

iii. $y' = 1 + e^y + xe^y y' \;\Rightarrow\; (1-xe^y)y' = 1 + e^y \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1+e^y}{1-xe^y}.$

iv. ; $2yy' - 2\Big(y'\sqrt{1+x^2} + y\,\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big) + 2x = 0.$

$$\Rightarrow\; (2y - 2\sqrt{1+x^2})y' + 2x\left(1 - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; y' = \frac{-2x\left(1-\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{2\left(y-\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{-x\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-y}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{y-\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

v. $\sigma\upsilon\nu(x) + \sigma\upsilon\nu(y)\,y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(y)}\,.$

40. Αν $x^2 y = \text{συν}(ax)$, να δείξετε ότι

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + \big(a^2x^2 + 2\big)y = 0.$$

Λύση: (Ασκ: 2/119)

Από το $x^2 y = \text{συν}(ax)$ παραγώγιση ως προς x:

$$2xy + x^2 y' = -a\,\text{ημ}(ax).$$

Παραγώγιση δεύτερη:

$$2y + 4xy' + x^2 y'' = -a^2 \text{συν}(ax).$$

Αντικαθιστούμε $\text{συν}(ax) = x^2 y$:

$$2y + 4xy' + x^2 y'' = -a^2 x^2 y \;\Rightarrow\; x^2 y'' + 4xy' + (a^2x^2 + 2)y = 0.$$

41. Αν $e^y = e^x + e^{-x}$, να δείξετε ότι

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Λύση: (Ασκ: 3/119)

Παραγώγιση της $e^y = e^x + e^{-x}$:

$$e^y y' = e^x - e^{-x}.$$

Θέτουμε $A = e^x$, $B = e^{-x}$,

42. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $xy = 2^x$ στο σημείο της με $x = 1$.

Λύση: (Ασκ: 4/119)

Στο $x = 1$: $\quad 1 \cdot y = 2^1 \Rightarrow y = 2$, άρα το σημείο είναι $A(1, 2)$.
Παραγώγιση της $xy = 2^x$: $\quad y + x\,y' = 2^x \ln 2$.
Στο $A(1, 2)$: $\quad m_\tau = y'(1) = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1)$.

Εφαπτομένη στο A: $\;y - 2 = m_\tau(x - 1) \Rightarrow, y - 2 = 2(\ln 2 - 1)(x - 1)$.

Κάθετη στο A: $m_\kappa = -\dfrac{1}{m_\tau} = -\dfrac{1}{2(\ln 2 - 1)} = \dfrac{1}{2(1-\ln 2)}$.
Άρα $y - 2 = \dfrac{1}{2(1-\ln 2)}(x-1)$.

43. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $y^2 = 4x$ στο σημείο της με $x = 4$ και τεταγμένη θετική.

Λύση: (Ασκ: 5/119)

Από $y^2 = 4x$ με παραγώγιση κατά x: $2y\,y' = 4 \Rightarrow y' = \dfrac{2}{y}$.
Στο $x = 4$: $y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$ (θετική τεταγμένη), άρα $A(4,4)$ και

$$m_\tau = y'(4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Εφαπτομένη στο A: $y - 4 = \frac{1}{2}(x-4) \ \Rightarrow ,y = \frac{1}{2}x + 2$.

Κάθετη στο A: $m_\kappa = -\dfrac{1}{m_\tau} = -2, \quad y - 4 = -2(x-4) \ \Rightarrow ,y = -2x + 12$.

44. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

στο σημείο $A\big(3\,\text{συν}\,\theta,\ 2\,\text{ημ}\,\theta\big)$.

Λύση: (Ασκ: 6/119)

Παραγώγιση κατά x: $\dfrac{2x}{9} + \dfrac{y\,y'}{2} = 0 \Rightarrow 9y\,y' = -4x \Rightarrow y' = -\dfrac{4x}{9y}$.
Στο A: $m_\tau = y'(A) = -\dfrac{2\,\text{συν}\,\theta}{3\,\text{ημ}\,\theta}$.

Εφαπτομένη στο A:

$$y - 2\,\text{ημ}\,\theta = -\frac{2\,\text{συν}\,\theta}{3\,\text{ημ}\,\theta}\,\big(x - 3\,\text{συν}\,\theta\big) \iff \frac{x\,\text{συν}\,\theta}{3} + \frac{y\,\text{ημ}\,\theta}{2} = 1$$

(ισοδύναμη, απλοποιημένη μορφή).

Κάθετη στο A: η κλίση είναι ο αρνητικός αντίστροφος, $m_\kappa = \dfrac{3\,\text{ημ}\,\theta}{2\,\text{συν}\,\theta}$.

$$y - 2\,\text{ημ}\,\theta = \frac{3\,\text{ημ}\,\theta}{2\,\text{συν}\,\theta}\,\big(x - 3\,\text{συν}\,\theta\big)$$

45. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2+y^2-2y=1$, στα οποία η κλίση της γραφικής παράστασης είναι ίση με -1.

Λύση: (Ασκ: 7/119)

Παραγώγιση κατά x: $\quad 2x+2y\,y'-2y'=0 \;\Rightarrow\; (2y-2)y'=-2x$

$$\Rightarrow\; y'=-\frac{x}{y-1}.$$

Ζητούμε $y'=-1$, άρα

$$-\frac{x}{y-1}=-1 \;\Rightarrow\; x=y-1 \;\Rightarrow\; y=x+1.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της καμπύλης:

$$x^2+(x+1)^2-2(x+1)=1 \;\Rightarrow\; 2x^2-1=1 \;\Rightarrow\; x^2=1 \;\Rightarrow\; x=\pm 1.$$

Έτσι $y=x+1$ δίνει $y=2$ για $x=1$ και $y=0$ για $x=-1$.

Άρα τα σημεία είναι $(1,\,2)$ και $(-1,\,0)$.

46. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $x\,y^5+x^5y=1$ δεν δέχεται οριζόντιες εφαπτομένες.

Λύση: (Ασκ: 8/119)

Θέτουμε $F(x,y)=x\,y^5+x^5y-1=0$. Παραγώγιση κατά x:

$$\frac{d}{dx}(x\,y^5)+\frac{d}{dx}(x^5y)=0 \;\Rightarrow\; y^5+5xy^4y'+5x^4y+x^5y'=0.$$

Ομαδοποιώντας:

$$(5xy^4+x^5)\,y'=-(y^5+5x^4y) \;\Rightarrow\; y'=-\frac{y^5+5x^4y}{5xy^4+x^5}=-\frac{y\,(y^4+5x^4)}{x\,(5y^4+x^4)}.$$

Στα σημεία της καμπύλης ισχύει $x\neq 0$ και $y\neq 0$ (αλλιώς το xy^5+x^5y θα ήταν $0\neq 1$). Επίσης $y^4+5x^4>0$ και $5y^4+x^4>0$ για κάθε πραγματικά x,y. Άρα ο παρονομαστής και ο αριθμητής είναι μη μηδενικοί, συνεπώς $y'\neq 0$ σε κάθε σημείο της καμπύλης.
Επομένως δεν υπάρχουν οριζόντιες εφαπτομένες.

47. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$, στα οποία η εφαπτομένη ευθεία είναι κατακόρυφη.

Λύση: (Ασκ: 9/119)

Παραγώγιση (έμμεση) ως προς x:

$$2x - \left(y + x\,y'\right) + 2y\,y' = 0 \;\Rightarrow\; (-x + 2y)\,y' + (2x - y) = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{2x - y}{x - 2y}.$$

Κατακόρυφη εφαπτομένη όταν ο παρονομαστής μηδενίζεται και ο αριθμητής *δεν* μηδενίζεται:

$$x - 2y = 0 \;\Rightarrow\; x = 2y.$$

Βάζουμε στην καμπύλη:

$$(2y)^2 - (2y)y + y^2 = 9 \;\Rightarrow\; 4y^2 - 2y^2 + y^2 = 9 \;\Rightarrow\; 3y^2 = 9 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{3}.$$

Τότε $x = 2y \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ ή $x = -2\sqrt{3}$. Ελέγχουμε τον αριθμητή: $2x - y = 3\sqrt{3}$ ή $-3\sqrt{3} \neq 0$, άρα πράγματι κατακόρυφες.

Σημεία: $(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ και $(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$.

48. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των καμπυλών:

i.

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t}, \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

ii.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

iii.

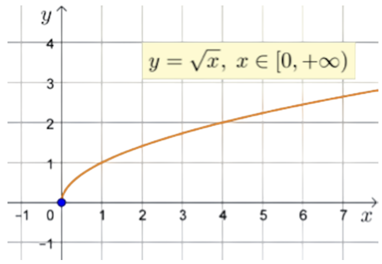
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

iv.

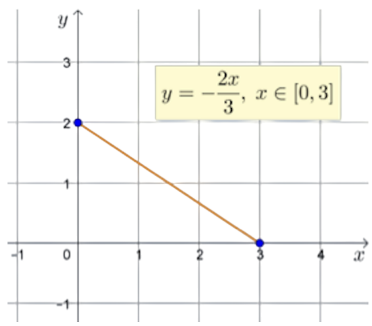
$$\begin{cases} x = \text{τεμ}^2 t - 1 \\ y = \text{εφ} t, \qquad\qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

v.
$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7, \quad t \in [-3, 10] \end{cases}$$

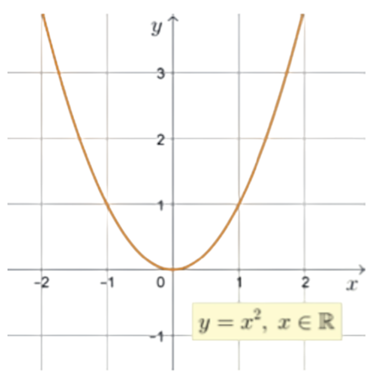
Λύση: (Ασκ: 1/126)



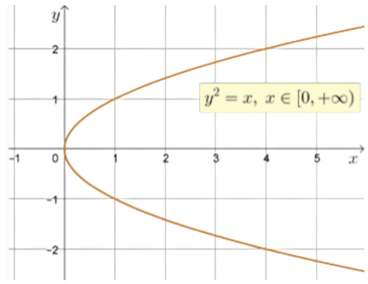
i.



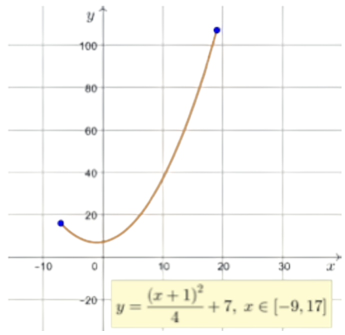
ii.



iii.



iv.



v.

49. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t - \eta\mu(t) \\ y = 2 + \sigma\upsilon\nu(t) \end{cases} \quad , \qquad t \in [0, \pi].$$

i. Να υπολογίσετε την τιμή της $\dfrac{dy}{dx}$ για $t = \dfrac{\pi}{3}$.

ii. Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Λύση: (Ασκ: 2/126)

i. Παράγωγοι ως προς t: $\quad x'(t) = 1 - \sigma\upsilon\nu(t), \quad y'(t) = -\eta\mu(t).$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\eta\mu(t)}{1 - \sigma\upsilon\nu(t)}.$$

Στο $t = \dfrac{\pi}{3}$: $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

ii. Για τη δεύτερη παράγωγο (παραμετρικός τύπος):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)\,x'(t) - y'(t)\,x''(t)}{\big(x'(t)\big)^3}.$$

Έχουμε $x''(t) = \text{ημ}(t)$, $y''(t) = -\text{συν}(t)$. Άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\text{συν}(t)\big(1 - \text{συν}(t)\big) + \text{ημ}^2(t)}{\big(1 - \text{συν}(t)\big)^3} = \frac{1 - \text{συν}(t)}{\big(1 - \text{συν}(t)\big)^3} = \frac{1}{\big(1 - \text{συν}(t)\big)^2}$$

(ορισμένη όταν $x'(t) = 1 - \text{συν}(t) \neq 0$; στο $[0, \pi]$ αποκλείεται μόνο $t = 0$).

50. Η καμπύλη (C) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-2t} \end{cases} , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

i. Να εξετάσετε αν το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην καμπύλη.

ii. Να δείξετε ότι

$$y^{-2}\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\,\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

Λύση: (Ασκ: 3/126)

i. Αν $x = 1 \Rightarrow e^t = 1 \Rightarrow t = 0$. Τότε $y = e^{-2\cdot 0} = 1$. Άρα $A(1, 1) \in (C)$ (αντιστοιχεί στο $t = 0$).

ii. Παράγωγοι ως προς t: $x'(t) = e^t = x$, $x''(t) = e^t = x$, $y'(t) = -2e^{-2t} = -2y$, $y''(t) = 4e^{-2t} = 4y$.
Παραμετρικός τύπος:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{-2y}{x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^3} = \frac{(4y)x - (-2y)x}{x^3} = \frac{6xy}{x^3} = \frac{6y}{x^2}.$$

Επί της καμπύλης $x = e^t$, $y = e^{-2t}$ ισχύει $x^2y = e^{2t}e^{-2t} = 1$. Άρα

$$y^{-2}\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - 2 = \; y^{-2}\left(\frac{6y}{x^2}\right) + 2x^3\left(\frac{-2y}{x}\right) - 2 = \frac{6}{x^2y} - 4x^2y - 2 = 6 - 4 - 2 = 0.$$

51. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2+t}{1+2t} \\ y = \dfrac{3+2t}{t} \end{cases}, \qquad t \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right).$$

i. Να δείξετε ότι $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+2t)^2}{t^2}$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ για $x = 0$.

Λύση: (Ασκ: 4/126)

i. Παράγωγοι ως προς t:

$$x'(t) = \frac{(1)(1+2t) - (2+t)\cdot 2}{(1+2t)^2} = -\frac{3}{(1+2t)^2}, \qquad y'(t) = \frac{(2)t - (3+2t)\cdot 1}{t^2} = -\frac{3}{t^2}.$$

Άρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{-\frac{3}{t^2}}{-\frac{3}{(1+2t)^2}} = \frac{(1+2t)^2}{t^2}$$

ii. Για τη δεύτερη παράγωγο (παραμετρικός τύπος)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''\,x' - y'\,x''}{(x')^3}, \qquad x''(t) = \frac{12}{(1+2t)^3}, \quad y''(t) = \frac{6}{t^3}.$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{6}{t^3}\left(-\frac{3}{(1+2t)^2}\right) - \left(-\frac{3}{t^2}\right)\left(\frac{12}{(1+2t)^3}\right)}{\left(-\frac{3}{(1+2t)^2}\right)^3} = \frac{2}{3}\,\frac{(1+2t)^3}{t^3}.$$

Για $x = 0$ βρίσκουμε το αντίστοιχο t:

$$0 = \frac{2+t}{1+2t} \;\Rightarrow\; t = -2 \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right).$$

Άρα

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{2}{3}\,\frac{(1+2(-2))^3}{(-2)^3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-3)^3}{-8} = \frac{9}{4}$$

52. Η καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t^2 - 2 \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t \end{cases} \quad , \qquad t \in (0, +\infty).$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $t = 3$.

Λύση: (Ασκ: 5/127)

Στο $t = 3$: $\quad x(3) = 3^2 - 2 = 7, \quad y(3) = \dfrac{3^3}{3} - 3 = 6 \Rightarrow A(7, 6)$.
Παράγωγοι ως προς t: $\quad x'(t) = 2t, \quad y'(t) = t^2 - 1$.
Κλίση εφαπτομένης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2-1}{2t} \;\Rightarrow\; m_\tau = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=3} = \frac{9-1}{6} = \frac{4}{3}.$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(7, 6)$:

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x - 7) \iff y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$

53. Η καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 2\,\text{ημ}(2t) \\ y = 2\,\text{ημ}(t) \end{cases} \quad , \qquad t \in [0, \pi].$$

Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης (K) στα οποία έχει οριζόντιες και κατακόρυφες εφαπτομένες.

Λύση: (Ασκ: 6/127)

Παράγωγοι ως προς t: $\quad x'(t) = 4\,\text{συν}(2t), \quad y'(t) = 2\,\text{συν}(t)$.
Άρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\text{συν}(t)}{2\,\text{συν}(2t)}.$$

Οριζόντιες εφαπτομένες: $\dfrac{dy}{dx} = 0 \iff \text{συν}(t) = 0$ και $\text{συν}(2t) \neq 0$.
Στο $[0, \pi]$: $t = \dfrac{\pi}{2}$.
Σημείο:

$$A\big(2\,\text{ημ}(\pi)\,,\, 2\,\text{ημ}\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\big) = (0,\, 2).$$

Κατακόρυφες εφαπτομένες: $x'(t) = 0 \iff$ συν$(2t) = 0$ και $y'(t) \neq 0$.
Στο $[0, \pi]$: $t = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ (και συν$(t) \neq 0$).
Σημεία:

$$B\big(2\,\text{ημ}\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\,,\,2\,\text{ημ}\big(\tfrac{\pi}{4}\big)\big) = (2,\,\sqrt{2}), \qquad C\big(2\,\text{ημ}\big(\tfrac{3\pi}{2}\big)\,,\,2\,\text{ημ}\big(\tfrac{3\pi}{4}\big)\big) = (-2,\,\sqrt{2}).$$

54. Η καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 1 + \text{ημ}\,t \\ y = \text{συν}^2 t \end{cases} \quad , \qquad t \in (0, \pi).$$

Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = \dfrac{5}{4}$.

Λύση: (Ασκ: 7/127)

Από $x = 1 + \text{ημ}\,t = \dfrac{5}{4}$ προκύπτει ημ$\,t = \dfrac{1}{4}$. Στο $(0, \pi)$ αυτό συμβαίνει για $t = \arcsin\big(\frac{1}{4}\big)$ ή $t = \pi - \arcsin\big(\frac{1}{4}\big)$.

$$y = \text{συν}^2 t = 1 - \text{ημ}^2 t = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$

άρα το σημείο είναι $A\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{15}{16}\right)$.

Παράγωγοι: $x'(t) = \text{συν}\,t$, $y'(t) = -2\,\text{ημ}\,t\,\text{συν}\,t$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -2\,\text{ημ}\,t \;\Rightarrow\; m_\tau = -2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Κλίση κάθετης: $m_\kappa = -\dfrac{1}{m_\tau} = 2$.

Εξίσωση κάθετης στο A:

$$y - \frac{15}{16} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right) \iff y = 2x - \frac{25}{16}$$

55. Με τη χρήση του θεωρήματος της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης, να αποδείξετε ότι

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Λύση: (Ασκ: 1/133)

Η e^x είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα αντιστρέψιμη με αντίστροφη $\ln x$ στο $(0, +\infty)$. Από το θεώρημα παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης:

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^x)'}\bigg|_{x=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

Θέτουμε τώρα $y = a^x$ με $a > 0,\ a \neq 1$. Λαμβάνοντας λογάριθμο και παραγωγίζοντας:

$$\ln y = x \ln a \ \Rightarrow\ \frac{y'}{y} = \ln a \ \Rightarrow\ y' = y\ \ln a = a^x \ln a.$$

56. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και η κλίση της στο A ισούται με $-\frac{1}{4}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x = 3$.

Λύση: (Ασκ: 2/133)

Από $A(-1, 3)$ έχουμε $f(-1) = 3$ και $f'(-1) = -\frac{1}{4}$. Για την αντίστροφη,

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4.$$

Το αντίστοιχο σημείο της f^{-1} είναι $B(3, -1)$. Εφαπτομένη στο B:

$$y - (-1) = -4(x - 3) \iff y = -4x + 11$$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με τύπο

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Λύση: (Ασκ: 3/133)

Βρίσκουμε x_0 ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}$:

$$\frac{x_0^2}{x_0+1}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 2x_0^2=x_0+1\ \Rightarrow\ 2x_0^2-x_0-1=0\ \Rightarrow\ x_0\in\left\{1,-\tfrac{1}{2}\right\}.$$

Επειδή $x>0,\ \ x_0=1$.

Παράγωγος:

$$f'(x)=\frac{(2x)(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\ \Rightarrow\ f'(1)=\frac{1\cdot 3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Άρα, με τον τύπο της παραγώγου αντίστροφης,

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{4}{3}$$

58. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x)=\ln(3x),\ x\in(0,+\infty)$

ii. $f(x)=\ln^4 x,\ x\in(0,+\infty)$

iii. $f(x)=\ln(x^2-5x),\ x\in(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$

iv. $f(x)=\ln(\text{ημ}x),\ x\in A=\{x\mid \text{ημ}x>0\}$

v. $f(x)=\ln(x^3\text{συν}x),\ x\in A=\{x\mid x^3\text{συν}x>0\}$

vi. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right),\ x>1$

vii. $f(x)=x^2\ln(x+8),\ x>-8$

viii. $f(x)=\ln(e^x+e^{-x}),\ x\in\mathbb{R}$

ix. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x > 0$

x. $y = \log\left(\sqrt{4-x^2}\right),\ x \in (-2,2)$ (βάση 10)

xi. $y = \log_5\left(3\sqrt{5}\,x + 8\right),\ x \in \left(-\frac{8}{5}, +\infty\right)$

xii. $y = \dfrac{1+\ln x}{x^2},\ x > 0$

xiii. $y = 2^{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$

xiv. $y = x^{\eta\mu x},\ x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Λύση: (Ασκ: 4/133)

i. $f(x) = \ln(3x)$.
Παράγωγος: $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$.

ii. $f(x) = (\ln x)^4$.
Παράγωγος: $f'(x) = 4(\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4\ln^3 x}{x}$.

iii. $f(x) = \ln(x^2 - 5x)$.
Παράγωγος: $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x} = \frac{2x-5}{x(x-5)}$.

iv. $f(x) = \ln(\eta\mu x)$.
Παράγωγος: $f'(x) = \frac{1}{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$.

v. $f(x) = \ln(x^3 \sigma\upsilon\nu x)$.
Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \sigma\upsilon\nu x - x^3 \eta\mu x}{x^3 \sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{x} - \varepsilon\varphi x.$$

vi. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$.
Με χρήση κανόνα:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x-1}.$$

vii. $f(x) = x^2 \ln(x+8)$.
Κανόνας γινομένου:

$$f'(x) = 2x\ln(x+8) + x^2 \cdot \frac{1}{x+8}.$$

viii. $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.
Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

ix. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
Με κανόνα αλυσίδας:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

x. $y = \log(\sqrt{4-x^2})$.
Παράγωγος:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\ln 10} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) = -\frac{x}{(4-x^2)\ln 10}.$$

xi. $y = \log_5(3\sqrt{5}\,x+8)$.
Παράγωγος:

$$y' = \frac{3\sqrt{5}}{(3\sqrt{5}\,x+8)\ln 5}.$$

xii. $y = \frac{1+\ln x}{x^2} = (1+\ln x)x^{-2}$.
Με κανόνα γινομένου:

$$y' = (1+\ln x)(-2x^{-3}) + x^{-3} = -\frac{1+2\ln x}{x^3}.$$

xiii. $y = 2^{x^2+1}$.
Με κανόνα αλυσίδας:

$$y' = 2^{x^2+1}\ln 2 \cdot 2x = 2^{x^2+1}(2x\ln 2).$$

xiv. $y = x^{\text{ημ}x} = e^{(\text{ημ}x)\ln x}$.
Παράγωγος:

$$y' = x^{\text{ημ}x}\left(\text{συν}x \cdot \ln x + \frac{\text{ημ}x}{x}\right).$$

59. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση

$$ax^2 + \beta xy^2 = \ln(x^2-3)+1, \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty),\ a, \beta \in \mathbb{R}.$$

Αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της $A(2,1)$ είναι παράλληλη με την ευθεία $x+y=5$, να υπολογίσετε τις τιμές των a και β.

Λύση: (Ασκ: 5/133)

Το σημείο ανήκει στην καμπύλη.

$$4a + 2\beta = \ln(4-3)+1 = 1 \ \Rightarrow\ 4a+2\beta = 1 \ \Rightarrow\ \beta = \frac{1-4a}{2}.$$

Κλίση εφαπτομένης στο (x,y). Παραγώγιση έμμεσα:

$$\frac{d}{dx}\big(ax^2 + \beta xy^2\big) = \frac{d}{dx}\big(\ln(x^2-3)+1\big)$$

$$2ax + \beta\big(y^2 + 2xy\,y'\big) = \frac{2x}{x^2-3}.$$

Λύνουμε ως προς y':

$$2\beta xy\,y' = \frac{2x}{x^2-3} - 2ax - \beta y^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{2x}{x^2-3} - 2ax - \beta y^2}{2\beta xy}.$$

Στο $A(2,1)$:

$$y'(2,1) = \frac{4-4a-\beta}{4\beta}.$$

Η εφαπτομένη είναι παράλληλη με $x+y=5 \Rightarrow m=-1$, άρα

$$\frac{4-4a-\beta}{4\beta} = -1 \;\Rightarrow\; 4-4a = -3\beta \;\Rightarrow\; \beta = \frac{4a-4}{3}.$$

Επίλυση του συστήματος.

$$\beta = \frac{1-4a}{2} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{4a-4}{3} \;\Rightarrow\; 2(4a-4) = 3(1-4a) \;\Rightarrow\; 20a = 11 \;\Rightarrow\; a = \frac{11}{20}.$$

Τότε

$$\beta = \frac{1-4a}{2} = \frac{1-\frac{44}{20}}{2} = \frac{-\frac{24}{20}}{2} = -\frac{3}{5}.$$

60. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

Λύση: (Ασκ: 6/134)

Γράφουμε $f(x) = (\ln x)^2\, x^{-1}$. Με κανόνα γινομένου:

$$f'(x) = \left(2\ln x \cdot \tfrac{1}{x}\right) x^{-1} + (\ln x)^2 \left(-x^{-2}\right) = \frac{2\ln x}{x^2} - \frac{\ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x\,(2-\ln x)}{x^2}.$$

Οριζόντια εφαπτομένη όταν $f'(x)=0$. Επειδή $x^2>0$ για $x>0$, αρκεί

$$\ln x\,(2-\ln x) = 0 \iff \ln x = 0 \text{ ή } \ln x = 2 \iff x = 1 \text{ ή } x = e^2.$$

Υπολογίζουμε τεταγμένες:

$$f(1) = \frac{\ln^2 1}{1} = 0, \qquad f(e^2) = \frac{\ln^2(e^2)}{e^2} = \frac{4}{e^2}.$$

Άρα τα σημεία με οριζόντιες εφαπτομένες είναι $(1,\,0)$ και $\left(e^2,\, \dfrac{4}{e^2}\right)$.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^{1/x}.$$

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Λύση: (Ασκ: 7/134)

Θέλουμε $f'(x) = 0$ (οριζόντιες εφαπτομένες). Γράφουμε

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Με κανόνα αλυσίδας:

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{1/x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Επειδή $x^{1/x} > 0$ για $x > 0$, έχουμε $f'(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$. Τότε

$$y = f(e) = e^{1/e}.$$

Άρα το μοναδικό σημείο με οριζόντια εφαπτομένη είναι $\big(e,\ e^{1/e}\big)$.

62. Η καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = \ln(1 - t) \end{cases}, \qquad t \in [0, 1).$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = 0$.

Λύση: (Ασκ: 8/134)

Από $x = e^t - 1 = 0 \Rightarrow e^t = 1 \Rightarrow t = 0$. Τότε $A\big(x(0), y(0)\big) = (0, \ln 1) = (0, 0)$.

Παράγωγοι ως προς t: $\quad x'(t) = e^t, \quad y'(t) = \dfrac{d}{dt}\ln(1 - t) = -\dfrac{1}{1 - t}$.
Κλίση εφαπτομένης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\frac{1}{1-t}}{e^t} = -\frac{1}{(1 - t)e^t} \ \Rightarrow\ m_\tau = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = -1.$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(0, 0)$:

$$y - 0 = -1(x - 0) \iff y = -x$$

63. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\bigl(2x + e^{3g(x)}\bigr), \qquad x \in (0, +\infty).$$

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $g(0) = 0$, να δείξετε ότι

$$f'(0) - 3g'(0) = 2.$$

Λύση: (Ασκ: 9/134)

Θέτουμε $u(x) = 2x + e^{3g(x)}$. Τότε

$$f(x) = \ln u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Υπολογίζουμε

$$u'(x) = 2 + \frac{d}{dx}\bigl(e^{3g(x)}\bigr) = 2 + e^{3g(x)} \cdot 3g'(x).$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{2 + 3e^{3g(x)}g'(x)}{2x + e^{3g(x)}}.$$

Στο $x = 0$ (με $g(0) = 0 \Rightarrow e^{3g(0)} = 1$):

$$f'(0) = \frac{2 + 3 \cdot 1 \cdot g'(0)}{0 + 1} = 2 + 3g'(0).$$

Επομένως

$$f'(0) - 3g'(0) = \bigl(2 + 3g'(0)\bigr) - 3g'(0) = 2.$$

64. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ii. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$, είναι παραγωγίσιμη στο 0.

iii. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

iv. Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(0) = 0$.

v. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A, τότε και η παράγωγος f' έχει πεδίο ορισμού το A.

vi. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3+x,\ x \in \mathbb{R}$. Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x = 1$, ισούται με 3.

vii. Ο αριθμός $f'(x_0)$ εκφράζει γεωμετρικά την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

viii. Αν μια συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η παράγωγος f' είναι συνεχής στο x_0.

ix. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f(f(x)))' = (f'(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

x. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η παράγωγος f' είναι περιττή.

xi. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

xii. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \ln x,\ x > 0$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + 5$, τότε $x_0 = 2$.

xiii. Οι καμπύλες δύο συναρτήσεων f και g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη x_0. Αν $f'(x_0) = g'(x_0)$, τότε οι εφαπτόμενες στο σημείο αυτό έχουν τις ίδιες εξισώσεις.

Λύση: (Ασκ: 1/139)

i. ΣΩΣΤΟ. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ υπάρχει $\Rightarrow$

ο αριθμητής $\to 0$ όταν $x \to x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0.

ii. ΛΑΘΟΣ. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Για $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ και $f'(0^+) = +\infty \Rightarrow$ όχι παραγωγίσιμη στο 0.

iii. ΛΑΘΟΣ. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$. Στο $x = 1$: $f(1^-) = 1$, $f(1^+) = 2 \Rightarrow$ ασυνέχεια $\Rightarrow$ όχι παραγωγίσιμη.

iv. ΛΑΘΟΣ. Για $f(x) = \cos x$ ισχύει $f''(x) = -\cos x$, άρα $f''(0) = -1 \neq 0$.

v. ΛΑΘΟΣ. Γενικά $D_{f'} \subseteq D_f$ και μπορεί να είναι αυστηρά μικρότερο. Π.χ. $f(x) = |x|$: $D_f = \mathbb{R}$, αλλά $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

vi. ΛΑΘΟΣ. $f(x) = x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$. Στο $x = 1$: $f'(1) = 4 \neq 3$.

vii. ΣΩΣΤΟ. Ο αριθμός $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο $M(x_0, f(x_0))$.

viii. ΣΩΣΤΟ. Αν υπάρχει $f''(x_0)$, τότε η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow$ συνεχής στο x_0. ̌espace1em

ix. ΛΑΘΟΣ. $(f \circ f)'(x) = f'(f(x))\, f'(x)$, που δεν ισούται γενικά με $(f'(x))^2$ (π.χ. $f(x) = x^2$: $(f \circ f)' = 4x^3$ ενώ $(f')^2 = 4x^2$).

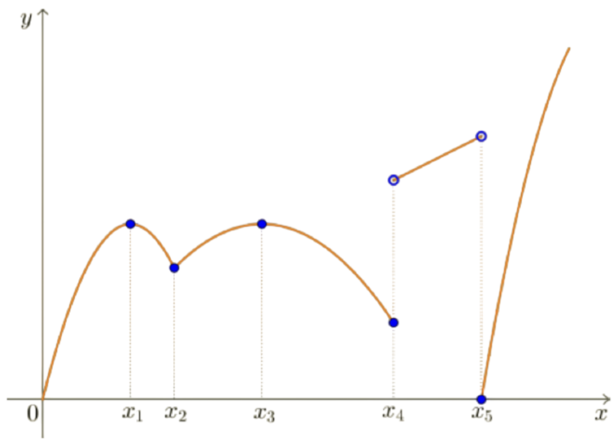
x. ΣΩΣΤΟ. Αν f είναι άρτια, $f(-x) = f(x)$. Παραγωγίζοντας: $-f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$ (περιττή).

xi. ΣΩΣΤΟ. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε x σ' ένα διάστημα Δ, δεν υπάρχει σημείο με οριζόντια εφαπτομένη στη Δ.

xii. ΛΑΘΟΣ. Για $f(x) = \ln x$ στο $x_0 > 0$, $m_\tau = f'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$. Κάθετη στην $y = -\frac{1}{2}x + 5$ (κλίση $-\frac{1}{2}$) σημαίνει $\dfrac{1}{x_0} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_0} = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ (όχι 2).

xiii. ΣΩΣΤΟ. Αν $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$, τότε οι εφαπτομένες στο κοινό σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχουν ίδια κλίση και περνούν από το ίδιο σημείο $\Rightarrow$ ίδια εξίσωση.

65. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βάλετε σε κύκλο τη λανθασμένη πρόταση.



i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1.

ii. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2.

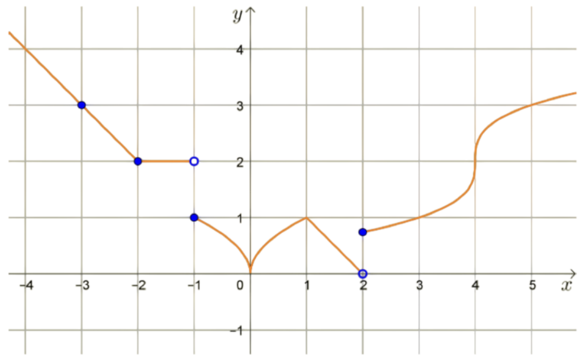
iii. Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο x_3.

iv. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4.

v. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5.

Λύση: iv. (Ασκ: 2/140)

66. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες:



i. η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη.

ii. η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν δέχεται εφαπτομένη.

iii. η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη.

Λύση: (Ασκ: 3/140)

i. $x = -2,\ x = -1,\ x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 4$

ii. $x = -2,\ x = -1,\ x = 1,\ x = 2$

iii. $x = 0,\ x = 4$

67. Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα.

i. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0;

ii. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\text{συν}|x| - x$. Με τη βοήθεια του ορισμού, να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση: (Ασκ: 4/140)

i. Ορισμός. Η f λέγεται *παραγωγίσιμη* στο x_0 αν υπάρχει πεπερασμένο το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(ισοδύναμα, $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$). Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *παράγωγος* της f στο x_0.

ii. Με $x_0 = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\text{συν}|h| - h}{h} = \lim_{h \to 0} \big(\text{συν}|h| - 1\big) = 0,$$

εφόσον συν$|h| \to 0$ όταν $h \to 0$. Άρα $f'(0) = 0$.

68. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \text{ημ}\, x, & x \le 0, \\ xe^x, & x > 0. \end{cases}$$

Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Λύση: (Ασκ: 5/141)

i. Συνέχεια στο 0:

$$\lim_{x \to 0^-} \text{ημ}\, x = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} xe^x = 0, \qquad f(0) = \text{ημ}\, 0 = 0.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0. Μονόπλευρες παράγωγοι:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\text{ημ}\, h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{ημ}\, h}{h} = 1, \qquad f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{he^h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} e^h = 1.$$

Εφόσον $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 1$.

ii. Στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ η κλίση είναι $f'(0) = 1$. Επομένως η εφαπτομένη είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \implies y = x.$$

69. Αν $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 4$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση: (Ασκ: 6/141)

Από την υπόθεση $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 4$ προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left[(x-1)\cdot \tfrac{f(x)}{x-1}\right] = 0 \cdot 4 = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 1, έχουμε $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Τότε, με τον ορισμό της παραγώγου,

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και $f'(1) = 4$.

70. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2, & x < 1, \\ \beta\sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση: (Ασκ: 7/141)

Συνέχεια στο 1: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 - a\cdot 1 + 2 = 3 - a$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \beta\sqrt{1} = \beta$. Άρα για συνέχεια:

$$3 - a = \beta. \quad (1)$$

Ισότητα μονόπλευρων παραγώγων στο 1: $f'_-(1) = \big(2x - a\big)\big|_{x=1} = 2 - a$, $f'_+(1) = \dfrac{\beta}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1} = \dfrac{\beta}{2}$. Για παραγωγισιμότητα:

$$2 - a = \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Από (1) $\beta = 3 - a$. Στο (2): $2 - a = \dfrac{3-a}{2} \Rightarrow 4 - 2a = 3 - a \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$. Τότε $\beta = 3 - a = 2$.

71. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=xe^x$.

i. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f' και f''.

ii. Να βρείτε τις τιμές των $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε

$$af(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x)=f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Λύση: (Ασκ: 9/141)

i. Με $f(x)=xe^x$ προκύπτει

$$f'(x)=(x+1)e^x,\qquad f''(x)=(x+2)e^x.$$

ii. Θέλουμε

$$a\,xe^x+\beta(x+1)e^x+\gamma(x+2)e^x=xe^x,\ \forall x.$$

Διαιρούμε με $e^x\neq 0$ και ταυτίζουμε συντελεστές:

$$(a+\beta+\gamma)x+(\beta+2\gamma)=x.$$

Άρα

$$\begin{cases} a+\beta+\gamma=1,\\ \beta+2\gamma=0. \end{cases}$$

Θ θέσεων: $\gamma=t\in\mathbb{R}$, $\beta=-2t$, $a=1-\beta-\gamma=1+t$.

$$a=1+t,\ \beta=-2t,\ \gamma=t\,(t\in\mathbb{R})$$

(π.χ. για $t=0$: $a=1,\ \beta=\gamma=0$.)

72. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=x^3-2x^2+x+6$

ii. $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{8}{x^2}-\ln 3$

iii. $f(x)=3\sqrt{x}-\text{ημ}\,x+5\,\text{τεμ}\,x$

iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\, 5x - \ln(5x) - e^5$

v. $f(x) = (x+2)\ln x$

vi. $f(x) = x^4\, \varepsilon\varphi\, x$

vii. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

viii. $y = \dfrac{x\, \eta\mu\, x}{e^x+1}$

ix. $y = \varepsilon\varphi\, x^2 + \sigma\varphi\, 2^x + (\ln x)^3$

x. $y = \ln(x^3-1)$

xi. $y = \sqrt{\eta\mu^3 x}$

xii. $y = \eta\mu(\sqrt{x}+1)$

xiii. $y = \sigma\varphi(\sigma\upsilon\nu\, x)$

xiv. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

xv. $y = \dfrac{\ln \sqrt[3]{x^3+8}}{3}$

xvi. $y = x^{e^x},\ x > 0$

Λύση: (Ασκ: 10/142)

i. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ii. $f'(x) = x^4 + \dfrac{16}{x^3}$

iii. $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \sigma\upsilon\nu\, x + 5\, \tau\varepsilon\mu\, x\, \varepsilon\varphi\, x$

iv. $f'(x) = -5\, \eta\mu\, 5x - \dfrac{1}{x}$

v. $f'(x) = \ln x + \dfrac{x+2}{x}$ (κανόνας γινομένου)

vi. $f'(x) = x^3\big(4\, \varepsilon\varphi\, x + x\, \tau\varepsilon\mu^2 x\big)$ (γινόμενο & αλυσίδα)

vii. $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ (κανόνας πηλίκου)

viii.

$$y' = \frac{(\eta\mu x + x\, \sigma\upsilon\nu x)(e^x+1) - x\, \eta\mu x\, e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x\eta\mu x + \eta\mu x + xe^x\sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu x - xe^x\eta\mu x}{(e^x+1)^2}$$

ix.

$$y' = 2x\,\text{τεμ}^2(x^2)\ +\ (\text{σφ}\,2^x)'\ +\ \frac{3\ln^2 x}{x}.$$

($Aν$ σφ ≡ συν, τότε $(\text{σφ}\,2^x)' = -\,2^x \ln 2\,\text{ημ}(2^x)$.)

x. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3-1}$

xi. $y' = \dfrac{3\,\text{συν}x\,\sqrt{\text{ημ}\,x}}{2}$ (αλυσίδα σε $(\text{ημ}x)^{3/2}$)

xii. $y' = \dfrac{\text{συν}(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}$ (αλυσίδα)

xiii. $y' = \text{ημ}\,x\ \text{στεμ}^2(\text{συν}\,x)$ (αλυσίδα)

xiv. $y' = \dfrac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$

xv. $y' = \dfrac{x^2}{3\,(x^3+8)}$ $\left(\ln\sqrt[3]{x^3+8} = \frac{1}{3}\ln(x^3+8)\right)$

xvi. $y' = e^x\,x^{e^x}\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$ (λογαριθμική παραγώγιση)

73. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2-4x+11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία:

i. είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

ii. είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 4x+2017$.

iii. είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x+8y+1=0$.

iv. έχει σημείο επαφής το σημείο $A(6,-2)$.

Λύση: (Ασκ: 11/142)

Παράγωγος: $f'(x) = 2x-4$.

i. Παράλληλη στον $x'x \Rightarrow$ κλίση $0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$. Σημείο: $f(2)=7$. Εφαπτομένη: $y=7$.

ii. Παράλληλη στο $y=4x+2017 \Rightarrow$ κλίση $4 \Rightarrow 2x-4=4 \Rightarrow x=4$. Σημείο: $f(4)=11$. Εφαπτομένη: $y-11=4(x-4) \Rightarrow y=4x-5$.

iii. Η $x+8y+1=0$ έχει κλίση $-\frac{1}{8}$. Κάθετη $\Rightarrow$ κλίση 8. $2x-4=8 \Rightarrow x=6$, $f(6)=23$. Εφαπτομένη: $y-23=8(x-6) \Rightarrow y=8x-25$.

iv. Για να είναι σημείο επαφής το $A(6,-2)$, πρέπει A να ανήκει στη γραφική: $f(6)=23 \neq -2$. Άρα *δεν υπάρχει* εφαπτομένη με σημείο επαφής το $A(6,-2)$.

74. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x\ln x-ax, \quad a\in\mathbb{R},$$

στο σημείο της $A\big(1,f(1)\big)$, διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε τιμή του a.

Λύση: (Ασκ: 12/142)

$f(1)=1\cdot\ln 1-a=-a$, $\quad f'(x)=\ln x+1-a \Rightarrow f'(1)=1-a$. Η εφαπτομένη στο $x_0=1$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \implies y+a=(1-a)(x-1) \implies y=(1-a)x-1.$$

Η ευθεία $y=(1-a)x-1$ περνά από το σημείο $(0,-1)$ ανεξάρτητα από το a. Άρα όλες οι σχετικές εφαπτομένες διέρχονται από το σταθερό σημείο $(0,-1)$.

75. Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν ισχύει

$$g^2(x)+\big(g'(x)\big)^2=1, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

και αν $M(a,\beta)$ είναι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h, όπου $h(x)=f(x)\,g'(x)$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $g'(a)=1$ και $g(a)+g''(a)=0$.

ii. $g(a)=0$.

Λύση: (Ασκ: 13/142)

Επειδή το $M(a,\beta)$ είναι κοινό σημείο των f και h, ισχύει

$$f(a)=\beta=h(a)=f(a)\,g'(a).$$

Αφού $f(a)\neq 0$ (εφόσον $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$), διαιρούμε και παίρνουμε

$$g'(a)=1.$$

Παραγωγίζουμε την ταυτότητα $g^2(x)+\big(g'(x)\big)^2=1$:

$$2g(x)g'(x)+2g'(x)g''(x)=2g'(x)\big(g(x)+g''(x)\big)=0,\quad \forall x.$$

Θέτοντας $x=a$ και χρησιμοποιώντας $g'(a)=1$, προκύπτει

$$g(a)+g''(a)=0,$$

που αποδεικνύει το (i). Τέλος, στην αρχική ταυτότητα για $x=a$:

$$g^2(a)+\big(g'(a)\big)^2=1\implies g^2(a)+1=1\implies g(a)=0,$$

και ολοκληρώνεται και το (ii).

76. Το ύψος x της στάθμης του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης $2\,\text{cm}$ ανεβαίνει με ρυθμό $2/\pi\,\text{cm/sec}$.

i. Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο V του νερού με το ύψος της στάθμης του x.

ii. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού μέσα στο κυλινδρικό δοχείο.

Λύση: (Ασκ: 14/143)

i. Για κύλινδρο με ακτίνα $r=2\,\text{cm}$ και ύψος x, ο όγκος είναι

$$V=\pi r^2x=\pi\cdot 2^2\,x=4\pi x.$$

ii. Παραγώγιση ως προς τον χρόνο t:

$$\frac{dV}{dt}=4\pi\,\frac{dx}{dt}=4\pi\cdot\frac{2}{\pi}=8\ \text{cm}^3/\text{sec}.$$

Άρα ο όγκος αυξάνεται με ρυθμό $8\,\text{cm}^3/\text{sec}$.

77. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ η περίμετρος αυξάνεται με ρυθμό $3\,\mathrm{cm/sec}$. Να βρείτε:

i. τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του τριγώνου.

ii. τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν αυτό είναι ίσο με $\sqrt{3}$ cm^2.

Λύση: (Ασκ: 15/143)

Θέτουμε $s = s(t)$ το μήκος πλευράς και $P = 3s$ την περίμετρο. Δίνεται $\dfrac{dP}{dt} = 3$ cm/sec.

i. $\dfrac{dP}{dt} = 3\dfrac{ds}{dt} \;\Rightarrow\; 3 = 3\dfrac{ds}{dt} \;\Rightarrow\; \dfrac{ds}{dt} = 1$ cm/sec.

ii. Εμβαδό ισοπλεύρου: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Άρα

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s\,\frac{ds}{dt}.$$

Όταν $A = \sqrt{3}$ cm^2:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; s^2 = 4 \;\Rightarrow\; s = 2.$$

Με $\dfrac{ds}{dt} = 1$ από το (i), προκύπτει

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot 1 = \sqrt{3}\ \mathrm{cm^2/sec}.$$

78. Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω εξισώσεις.

i. $x^2 + y^2 = 9$

ii. $x^3 - xy + y^2 = 7$

iii. $x^3y^3 - y = x$

iv. $\sqrt{xy} = x^2y + 1$

v. $y = \text{ημ}(xy)$

vi. $\big(\text{ημ}(\pi x) + \text{συν}(\pi y)\big)^2 = 2$

Λύση: (Ασκ: 16/143)

i. $2x + 2y\,y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{x}{y}$.

ii. $3x^2 - (y + x\,y') + 2y\,y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{3x^2 - y}{x - 2y}$.

iii. $3x^2y^3 + 3x^3y^2y' - y' = 1 \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1 - 3x^2y^3}{3x^3y^2 - 1}$.

iv. $\dfrac{y + x\,y'}{2\sqrt{xy}} = 2xy + x^2y' \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{y\big(4x\sqrt{xy} - 1\big)}{x\big(1 - 2x\sqrt{xy}\big)}$.

v. $y' = \text{συν}(xy)\,(y + x\,y') \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{\text{συν}(xy)\,y}{1 - x\,\text{συν}(xy)}$.

vi. $2\big(\text{ημ}(\pi x) + \text{συν}(\pi y)\big)\big(\pi\text{συν}(\pi x) - \pi\text{ημ}(\pi y)\,y'\big) = 0$. Επειδή $\text{ημ}(\pi x) + \text{συν}(\pi y) = \pm\sqrt{2} \neq 0$, $\pi\text{συν}(\pi x) - \pi\text{ημ}(\pi y)\,y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{\text{συν}(\pi x)}{\text{ημ}(\pi y)}$.

79. Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = a + \text{συν}(\pi x)$ και $g(x) = x^2 + 3\beta x + 1$, αντίστοιχα, να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση: (Ασκ: 17/143)

Για κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ απαιτείται:

$$f(1) = g(1) \quad \text{και} \quad f'(1) = g'(1).$$

Υπολογίζουμε:

$$f(1) = a + \text{συν}(\pi) = a - 1, \qquad g(1) = 1 + 3\beta + 1 = 2 + 3\beta.$$

Άρα $a - 1 = 2 + 3\beta \Rightarrow a = 3 + 3\beta$. Επίσης,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\text{συν}(\pi x) = -\pi\,\text{ημ}(\pi x) \;\Rightarrow\; f'(1) = -\pi\,\text{ημ}(\pi) = 0,$$

$$g'(x) = 2x + 3\beta \;\Rightarrow\; g'(1) = 2 + 3\beta.$$

Από $f'(1) = g'(1)$ παίρνουμε $0 = 2 + 3\beta \Rightarrow \beta = -\dfrac{2}{3}$. Τότε

$$a = 3 + 3\beta = 3 + 3\left(-\frac{2}{3}\right) = 1.$$

$$a = 1,\ \beta = -\frac{2}{3}$$

80. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε

$$f(x) + f(-x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι $f''(0) = 1$.

Λύση: (Ασκ: 18/143)

Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$f'(x) - f'(-x) = 2x.$$

Παραγωγίζουμε ξανά:

$$f''(x) + f''(-x) = 2.$$

Θέτοντας $x = 0$:

$$2f''(0) = 2 \implies f''(0) = 1.$$

81. Να δείξετε ότι η κάθετη ευθεία της καμπύλης με εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, σε οποιοδήποτε σημείο της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση: (Ασκ: 19/143)

Έστω σημείο $P(x_0, y_0)$ της καμπύλης ($x_0^2 + y_0^2 = r^2$). Παραγώγιση της σχέσης

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\Rightarrow\; 2x + 2y\,y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{x}{y}.$$

Στο P η κλίση της εφαπτομένης είναι $k_\tau = -\dfrac{x_0}{y_0}$ (όταν $y_0 \neq 0$), άρα η κλίση της κάθετης είναι

$$k_\nu = \frac{1}{-k_\tau} = \frac{y_0}{x_0} \quad (x_0 \neq 0).$$

Η εξίσωση της κάθετης στο P είναι

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}\,(x - x_0) \implies y = \frac{y_0}{x_0}\,x.$$

Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε $y = 0$· άρα η κάθετη διέρχεται από το $(0, 0)$.

Για τις οριακές περιπτώσεις:

- Αν $x_0 = 0$ (σημεία $(0, \pm r)$), τότε η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη, η κάθετη είναι οριζόντια $y = 0$, που περνά από $(0,0)$.

- Αν $y_0 = 0$ (σημεία $(\pm r, 0)$), τότε η εφαπτομένη είναι οριζόντια, η κάθετη είναι κατακόρυφη $x = 0$, που περνά από $(0,0)$.

Συνεπώς, σε κάθε σημείο της κύκλου η κάθετη ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

82. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $y^4 = y^2 - x^2$, στα οποία η εφαπτομένη ευθεία είναι οριζόντια.

Λύση: (Ασκ: 20/143)

Παραγωγίζουμε σιωπηρά:

$$4y^3y' \;=\; 2yy' - 2x \quad\Rightarrow\quad (4y^3 - 2y)\,y' \;=\; -2x \quad\Rightarrow\quad y' \;=\; \frac{-2x}{4y^3 - 2y} \;=\; \frac{-x}{2y^3 - y}.$$

Οριζόντια εφαπτομένη $\Leftrightarrow y' = 0$ και παρονομαστής $\neq 0$.

Άρα $x = 0$ και $2y^3 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0,\ y^2 \neq \frac{1}{2}$.

Στην καμπύλη με $x = 0$: $y^4 = y^2 \Rightarrow y^2(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ ή $y = \pm 1$. Απορρίπτεται $y = 0$ (μηδενίζει τον παρονομαστή). Συνεπώς

$$(0,1) \text{ και } (0,-1)$$

83. Αν $e^{5y} = e^x + e^{-x}$, να δείξετε ότι

$$5\,\frac{d^2y}{dx^2} + 25\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Λύση: (Ασκ: 21/143)

Παραγωγίζουμε σιωπηρά τη σχέση $e^{5y} = e^x + e^{-x}$:

$$5e^{5y}y' = e^x - e^{-x} \;\Rightarrow\; y' = \frac{e^x - e^{-x}}{5\,(e^x + e^{-x})}.$$

Θέτουμε $N = e^x - e^{-x}$, $D = e^x + e^{-x}$. Τότε $y' = \dfrac{1}{5}\dfrac{N}{D}$ και

$$y'' = \frac{1}{5}\frac{N'D - ND'}{D^2} = \frac{1}{5}\frac{D^2 - N^2}{D^2} = \frac{1}{5}\frac{4}{D^2} = \frac{4}{5D^2},$$

επειδή $N' = D$, $D' = N$ και $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

Επιπλέον,

$$(y')^2 = \frac{1}{25}\frac{N^2}{D^2}.$$

Άρα

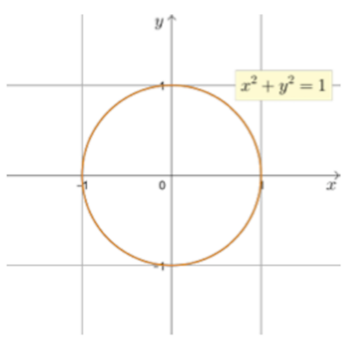
$$5y'' + 25(y')^2 - 1 = \frac{4}{D^2} + \frac{N^2}{D^2} - 1 = \frac{N^2 + 4}{D^2} - 1 = \frac{D^2}{D^2} - 1 = 0.$$

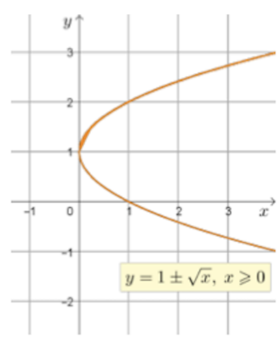
84. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των παραμετρικών καμπυλών:

i. $\begin{cases} x = \text{συν}\, t \\ y = \text{ημ}\, t \end{cases} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$

ii. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

Λύση: (Ασκ: 22/144)





85. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} \qquad t \neq \frac{1}{2}.$$

Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Λύση: (Ασκ: 23/144)

$x(t) = t - t^2 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 1 - 2t, \quad y(t) = t - t^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$. Άρα

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}.$$

Παράγωγος ως προς t:

$$\frac{d}{dt}(y') = \frac{(-6t)(1-2t) - (1-3t^2)(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}.$$

Τότε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{dx/dt} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3} = \frac{2\,(3t^2-3t+1)}{(1-2t)^3}, \qquad t \neq \frac{1}{2}.$$

86. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{3t}, \\ y = \sigma\upsilon\nu\, t, \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

i. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης δεν δέχεται κατακόρυφες εφαπτομένες.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης στα οποία δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

iii. Να δείξετε ότι:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{9}y = 0.$$

Λύση: (Ασκ: 24/144)

Παράγωγοι ως προς t:

$$\frac{dx}{dt} = 3\,\mathrm{e}^{3t}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\,\text{ημ}\,t.$$

Άρα

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\,\text{ημ}\,t}{3\,\mathrm{e}^{3t}} = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\,\text{ημ}\,t.$$

i. Κατακόρυφη εφαπτομένη υπάρχει όταν $\frac{dx}{dt} = 0$. Όμως $\frac{dx}{dt} = 3\,\mathrm{e}^{3t} \neq 0$ για κάθε t.
$\Rightarrow$ Η καμπύλη δεν δέχεται κατακόρυφες εφαπτομένες.

ii. Οριζόντια εφαπτομένη όταν $\frac{dy}{dt} = 0$ και $\frac{dx}{dt} \neq 0$.

$$-\,\text{ημ}\,t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \quad (\text{στο } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]).$$

Στο $t = 0$: $x = \mathrm{e}^0 = 1$, $\quad y = \text{συν}\,0 = 1$. Άρα το σημείο είναι $(1, 1)$.

iii. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d}{dt}(y') = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\,\text{ημ}\,t\right) = -\frac{1}{3}\Big((-3)\mathrm{e}^{-3t}\,\text{ημ}\,t + \mathrm{e}^{-3t}\,\text{συν}\,t\Big) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\big(3\,\text{ημ}\,t - \text{συν}\,t\big).$$

Άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}(3\,\text{ημ}\,t - \text{συν}\,t)}{3\,\mathrm{e}^{3t}} = \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-6t}\big(3\,\text{ημ}\,t - \text{συν}\,t\big).$$

Επειδή $x = \mathrm{e}^{3t} \Rightarrow x^{-1} = \mathrm{e}^{-3t}$, $x^{-2} = \mathrm{e}^{-6t}$, έχουμε

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{9}\big(3\,\text{ημ}\,t - \text{συν}\,t\big), \qquad x\,\frac{dy}{dx} = x\left(-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t}\,\text{ημ}\,t\right) = -\frac{1}{3}\,\text{ημ}\,t, \qquad \frac{1}{9}y = \frac{1}{9}\,\text{συν}\,t.$$

Άθροισμα:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{9}y = \left(\frac{1}{3}\,\text{ημ}\,t - \frac{1}{9}\,\text{συν}\,t\right) - \frac{1}{3}\,\text{ημ}\,t + \frac{1}{9}\,\text{συν}\,t = 0.$$

Όθεν αποδείχθηκε η σχέση $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{9}y = 0$.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f:(2,+\infty)\to(-9,+\infty)$ με τύπο $f(x)=x^2-4x-5$. Να βρείτε την τιμή $(f^{-1})'(0)$.

Λύση: (Ασκ: 25/144)

$f'(x)=2x-4>0$ για κάθε $x>2 \Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$ και αντιστρέψιμη με πεδίο τιμών $(-9,+\infty)$.
Για να βρούμε $(f^{-1})'(0)$ βρίσκουμε x_0 με $f(x_0)=0$ και $x_0>2$:

$$x^2-4x-5=0 \implies (x-5)(x+1)=0 \implies x_0=5 \text{ (δεκτό)}.$$

Τότε, από τον τύπο της παραγώγου της αντίστροφης,

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(5)}=\frac{1}{2\cdot 5-4}=\frac{1}{6}.$$

88. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $y=f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,0)$ και η κλίση της στο A ισούται με 2, να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x=0$.

Λύση: (Ασκ: 26/144)

Από $A(0,0)$ έχουμε $f(0)=0$. Θέτουμε $x_0=0$, $y_0=f(x_0)=0$. Για την αντίστροφη συνάρτηση ισχύει ο τύπος

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad \big(f'(x_0)\neq 0\big).$$

Εδώ $f'(0)=2$, άρα

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}.$$

89. Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy, \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $a\in\mathbb{R}$ με $f'(a)=1+a$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: (Ασκ: 27/144)

Ορίζουμε $g(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$. Τότε

$$g(x+y) = f(x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} = f(x) + f(y) + xy - \frac{x^2+y^2}{2} - xy = g(x) + g(y),$$

άρα η g είναι προσθετική.

Παράγωγος στο a:

$$g'(a) = f'(a) - a = (1+a) - a = 1.$$

Επειδή η g είναι προσθετική, για κάθε h ισχύει

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{g(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} g'(a) = 1,$$

δηλαδή $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{g(u)}{u} = 1$.

Για κάθε $x \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, από την προσθετικότητα: $g(x) = n\, g\big(\frac{x}{n}\big)$, οπότε

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{g\big(\frac{x}{n}\big)}{\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{u\to 0} \frac{g(u)}{u} = 1.$$

Άρα $g(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (και προφανώς $g(0) = 0$). Συνεπώς

$$f(x) = g(x) + \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2},$$

που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$f'(x) = 1 + x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

90. Η μια διάσταση $x(t)$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αυξάνεται με ρυθμό 3 m/s και η άλλη $y(t)$ μειώνεται με ρυθμό 2 m/s. Όταν $x = 24\,\text{m}$ και $y = 10\,\text{m}$, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής:

i. του εμβαδού του

ii. της περιμέτρου του

iii. του μήκους της διαγωνίου του

Λύση: (Ασκ: 1/145)

Θεωρούμε $x = x(t),\ y = y(t)$ με $\dfrac{dx}{dt} = 3$ και $\dfrac{dy}{dt} = -2$ (μονάδες S.I.).

i. Εμβαδόν $A = xy$:

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 24(-2) + 10(3) = -48 + 30 = -18 \text{ m}^2/\text{s}.$$

ii. Περίμετρος $P = 2(x + y)$:

$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(3 - 2) = 2 \text{ m/s}.$$

iii. Διαγώνιος $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ορθογώνιο $\Rightarrow$ γωνία 90°):

$$\frac{dd}{dt} = \frac{x\,\dfrac{dx}{dt} + y\,\dfrac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{24 \cdot 3 + 10 \cdot (-2)}{\sqrt{24^2 + 10^2}} = \frac{72 - 20}{\sqrt{576 + 100}} = \frac{52}{26} = 2 \text{ m/s}.$$

Σημείωση: $d = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$ m.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) + f(x^2) = 3 \ln x + 4, \qquad x > 0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Λύση: (Ασκ: 2/145)

Θέτοντας $x = 1$:

$$f(1) + f(1) = 3 \ln 1 + 4 = 4 \;\Rightarrow\; 2f(1) = 4 \;\Rightarrow\; f(1) = 2.$$

Παραγωγίζουμε ως προς x (για $x > 0$):

$$f'(x) + \big(f'(x^2)\big) \cdot 2x = \frac{3}{x}.$$

Θέτοντας $x = 1$:

$$f'(1) + 2\,f'(1) = 3 \;\Rightarrow\; 3f'(1) = 3 \;\Rightarrow\; f'(1) = 1.$$

Η εφαπτομένη στο $A(1, 2)$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \implies y - 2 = 1\,(x - 1) \implies y = x + 1.$$

92. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: (Ασκ: 3/145)

Θέτουμε $u(x) = e^{2x} - 1$, $v(x) = e^{2x} + 1$. Τότε $u'(x) = 2e^{2x}$, $v'(x) = 2e^{2x}$ και

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - (e^{2x}-1)\,2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Επίσης

$$f^2(x) = \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2 = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Άρα

$$f'(x) + f^2(x) = \frac{4e^{2x} + e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = 1.$$

Οπότε $f'(x) + f^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

93. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$f^{(\nu)}(x) = (x + \nu)\,\mathrm{e}^x, \qquad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

Λύση: (Ασκ: 4/145)

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως προς ν.

Βάση: Για $\nu = 1$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(x\,\mathrm{e}^x\big) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x.$$

Ισχύει ο ζητούμενος τύπος.

Βήμα επαγωγής: Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Τότε

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\big((x+n)\,\mathrm{e}^x\big) = \mathrm{e}^x + (x+n)\,\mathrm{e}^x = (x+n+1)\,\mathrm{e}^x.$$

Άρα ο τύπος ισχύει και για $n+1$.

Με επαγωγή προκύπτει ότι $f^{(\nu)}(x) = (x+\nu)\,\mathrm{e}^x$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. (*Σχόλιο:* Για $\nu = 0$ επίσης ισχύει $f^{(0)}(x) = f(x) = x\,\mathrm{e}^x = (x+0)\,\mathrm{e}^x$.)

94. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(x^3) = 5x^4, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

να υπολογίσετε το $f''(27)$.

Λύση: (Ασκ: 5/145)

Θέτουμε $F(x) = f(x^3)$. Δίνεται $F(x) = 5x^4$.
Παράγωγος:

$$F'(x) = f'(x^3) \cdot 3x^2 = 20x^3 \;\Rightarrow\; f'(x^3) = \frac{20}{3}x.$$

Δεύτερη παράγωγος:

$$F''(x) = f''(x^3)\,(3x^2)^2 + f'(x^3) \cdot 6x = 60x^2.$$

Θέτουμε $x = 3$ ($\Rightarrow x^3 = 27$):

$$60 \cdot 9 = 9 \cdot 81\, f''(27) + 6 \cdot 3\, f'(27).$$

Από $f'(x^3) = \dfrac{20}{3}x$ με $x = 3$ έχουμε $f'(27) = 20$. Άρα

$$540 = 729\, f''(27) + 360 \;\Rightarrow\; 729\, f''(27) = 180 \;\Rightarrow\; f''(27) = \frac{20}{81}$$

95. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι οριζόντια.

ii. Να υπολογίσετε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_1 = 3$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(3, f(3))$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(3, 1)$ έχει κλίση ίση με $\dfrac{4}{9}$.

Λύση: (Ασκ: 6/145)

Θέτουμε $u(x) = x^2 + x + 1$. Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$f'(u(x))\,(2x+1) = 3x^2 \tag{1}$$

i. Επειδή $u(0) = 1$, από (1) με $x = 0$ προκύπτει

$$f'(1) \cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; f'(1) = 0,$$

άρα η εφαπτομένη στο $x = 1$ είναι οριζόντια.

ii. Θέλουμε $f'(3)$. Εφόσον $u(1) = 3$, από (1) με $x = 1$ παίρνουμε

$$f'(3) \cdot 3 = 3 \;\Rightarrow\; f'(3) = 1$$

iii. Από τη δοσμένη σχέση με $x = 1$: $f(3) = 1$. Με το (ii) $f'(3) = 1$. Η εφαπτομένη στο $A(3, f(3)) = (3, 1)$ είναι

$$y - f(3) = f'(3)(x-3) \;\Rightarrow\; y - 1 = 1(x-3) \;\Rightarrow\; y = x - 2$$

iv. Παραγωγίζουμε τη (1):

$$\big[f''(u(x))\,u'(x)\big](2x+1) + f'(u(x)) \cdot 2 = 6x.$$

Επειδή $u'(x) = 2x + 1$, γράφουμε

$$f''(u(x))\,(2x+1)^2 + 2f'(u(x)) = 6x \tag{2}$$

Θέτοντας $x = 1$ (οπότε $u(1) = 3$, $f'(3) = 1$):

$$9\,f''(3) + 2 \cdot 1 = 6 \;\Rightarrow\; 9\,f''(3) = 4 \;\Rightarrow\; f''(3) = \frac{4}{9}$$

Άρα η κλίση της εφαπτομένης της f' στο $(3, 1)$ είναι $\frac{4}{9}$.

96. Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ικανοποιεί

$$2x \cdot \text{ημ}\, x \;\leq\; x\, f(x) \;\leq\; \text{ημ}^2 x + x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$ ii. $f'(0) = 2$

Λύση: (Ασκ: 7/146)

i. Για $x > 0$ διαιρούμε την ανισότητα με x και παίρνουμε

$$2\, \text{ημ}\, x \;\leq\; f(x) \;\leq\; \frac{\text{ημ}^2 x}{x} + x.$$

Για $x < 0$ η διαίρεση με το αρνητικό x αντιστρέφει τα σύμβολα:

$$\frac{\text{ημ}^2 x}{x} + x \;\leq\; f(x) \;\leq\; 2\, \text{ημ}\, x.$$

Και στις δύο περιπτώσεις, όταν $x \to 0$ έχουμε $\text{ημ}\, x \to 0$ και $\dfrac{\text{ημ}^2 x}{x} \sim x \to 0$. Άρα, με Θ. Παρεμβολής,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, προκύπτει $f(0) = 0$.

ii. Από τον ορισμό της παραγώγου και το (i),

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Διαιρώντας την αρχική ανισότητα με $x^2 > 0$ (για $x \neq 0$),

$$2\, \frac{\text{ημ}\, x}{x} \;\leq\; \frac{f(x)}{x} \;\leq\; \frac{\text{ημ}^2 x}{x^2} + 1.$$

Καθώς $x \to 0$, $\dfrac{\text{ημ}\, x}{x} \to 1$ και $\dfrac{\text{ημ}^2 x}{x^2} \to 1$. Επομένως, με Θ. Παρεμβολής,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \;\Rightarrow\; f'(0) = 2.$$