Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Παραβολή

1. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των παραβολών, γνωρίζοντας την εστία E και τη διευθετούσα (δ):

i. $E(1,1)$ και $(\delta): \ 3x+4y-5=0$

ii. $E(2,0)$ και $(\delta): \ x=-2$

iii. $E(0,-3)$ και $(\delta): \ y=3$

iv. $E(-5,0)$ και $(\delta): \ x-5=0$

Λύση: (Ασκ. 1/81)

i. Από τον *ορισμό* της παραβολής:

$$PE = \text{απόσταση του σημείου } P(x,y) \text{ από τη διευθετούσα } (\delta),$$

δηλαδή:

$$\sqrt{(x-x_E)^2+(y-y_E)^2} = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Για $E(1,1)$ και $(\delta): 3x+4y-5=0$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{|3x+4y-5|}{5}.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και αναπτύσσουμε:

$$25\big((x-1)^2+(y-1)^2\big) = (3x+4y-5)^2.$$

Μετά την ανάπτυξη και απλοποίηση προκύπτει:

$$16x^2+9y^2-24xy-20x-10y+25=0$$

ii. Γενική εξίσωση παραβολής με εστία $E(a,0)$ και διευθετούσα $x=-a$:

$$y^2 = 4ax.$$

Για $E(2,0)$ και $(\delta): x=-2$, έχουμε $a=2$:

$$y^2 = 8x$$

iii. Γενική εξίσωση παραβολής με εστία $E(0, a)$ και διευθετούσα $y = -a$:

$$x^2 = 4ay.$$

Για $E(0, -3)$ και $(\delta) : y = 3$, έχουμε $a = -3$:

$$x^2 = -12y$$

iv. Γενική εξίσωση παραβολής με εστία $E(-a, 0)$ και διευθετούσα $x = a$:

$$y^2 = -4ax.$$

Για $E(-5, 0)$ και $(\delta) : x = 5$, έχουμε $a = 5$:

$$y^2 = -20x$$

2. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των παραβολών με κορυφή το $O(0, 0)$, αν γνωρίζετε ότι:

i. έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία το σημείο $(-2, 0)$

ii. έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εστία το σημείο $E(0, 2)$

iii. έχει διευθετούσα την ευθεία $y = 4$

iv. έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$.

Λύση: (Ασκ. 2/81)

i. Κανόνας (άξονας $x'x$, κορυφή O): $y^2 = 4ax$, $E(a, 0)$, $(\delta) : x = -a$.

Για $E(-2, 0) \Rightarrow a = -2$.

$$y^2 = -8x$$

ii. Κανόνας (άξονας $y'y$, κορυφή O): $x^2 = 4ay$, $E(0, a)$, $(\delta) : y = -a$.

Για $E(0, 2) \Rightarrow a = 2$.

$$x^2 = 8y$$

iii. Κανόνας (άξονας $y'y$, κορυφή O): $x^2 = 4ay$ με διευθετούσα $y = -a$.

Δίνεται $(\delta) : y = 4 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$.

$$x^2 = -16y$$

iv. Κανόνας (άξονας $x'x$, κορυφή O): $y^2 = 4ax$.

Ανήκει το $A(-1, 2) \Rightarrow 2^2 = 4a(-1) \Rightarrow a = -1$.

$$y^2 = -4x$$

3. Δίνονται οι *παραβολές* με εξισώσεις:

i. $y^2 = 12x$

ii. $y^2 = -8x$

iii. $x^2 = 10y$

iv. $x^2 = -4y$

Να βρείτε τις *συντεταγμένες* της εστίας και την *εξίσωση* της διευθετούσας σε κάθε περίπτωση.

Λύση: (Ασκ. 3/81)

i. Αν $y^2 = 4ax$, τότε $E(a, 0)$ και $(\delta) : x = -a$. Εδώ $4a = 12 \Rightarrow a = 3$.

$$E(3, 0), \qquad (\delta) : \; x = -3$$

ii. Αν $y^2 = 4ax$, τότε $E(a, 0)$ και $(\delta) : x = -a$. Εδώ $4a = -8 \Rightarrow a = -2$.

$$E(-2, 0), \qquad (\delta) : \; x = 2$$

iii. Αν $x^2 = 4ay$, τότε $E(0, a)$ και $(\delta) : y = -a$. Εδώ $4a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

$$E\left(0, \tfrac{5}{2}\right), \qquad (\delta) : \; y = -\tfrac{5}{2}$$

iv. Αν $x^2 = 4ay$, τότε $E(0, a)$ και $(\delta) : y = -a$. Εδώ $4a = -4 \Rightarrow a = -1$.

$$E(0, -1), \qquad (\delta) : \ y = 1$$

4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$. Να βρείτε τα *σημεία* της, των οποίων η *απόσταση* από την εστία είναι ίση με 4 μονάδες.

Λύση: (Ασκ. 4/81)

Αν $y^2 = 4ax$, τότε η εστία είναι $E(a, 0)$ και η διευθετούσα $x = -a$.

Εδώ $4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow E(2, 0)$.

Θέτουμε $P(x, y)$ σημείο της παραβολής με $PE = 4$. Τότε

$$\begin{cases} y^2 = 8x, \\ (x-2)^2 + y^2 = 4^2. \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε $y^2 = 8x$:

$$(x-2)^2 + 8x = 16 \iff x^2 + 4x + 4 = 16 \iff x^2 + 4x - 12 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm 8}{2} \in \{2, -6\}.$$

Επειδή στην $y^2 = 8x$ πρέπει $x \geq 0$, κρατούμε $x = 2$. Τότε $y^2 = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$.

$$P_1(2, 4), \quad P_2(2, -4)$$

Προσοχή: Το $x = -6$ απορρίπτεται διότι θα έδινε $y^2 < 0$

5. Αν η χορδή AB της παραβολής $y^2 = 4ax$ με $a > 0$ τέμνει *κάθετα* τον άξονά της στο σημείο P, να αποδείξετε ότι $(AB)^2 = 16a\,(OP)$. Αν η AB διέρχεται και από την εστία E, να δείξετε ότι $(AB) = 4a$.

Λύση: (Ασκ. 5/81)

Γενικά στοιχεία παραβολής $y^2 = 4ax$:

$$O(0,0) \text{ (κορυφή)}, \qquad \text{άξονας } x'x, \qquad E(a, 0) \text{ (εστία)}, \qquad (\delta) : x = -a.$$

Θεωρούμε χορδή κάθετη στον άξονα. Κάθε ευθεία κάθετη στον $x'x$ έχει μορφή $x = t$ ($t \in \mathbb{R}$) και τέμνει τον άξονα στο

$$P(t, 0), \qquad OP = |t|.$$

Για να τέμνει την παραβολή $y^2 = 4ax$ απαιτείται $t \geq 0$.

Τα σημεία τομής A, B ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} y^2 = 4ax, \\ x = t, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{at}.$$

Άρα

$$A\big(t,\ 2\sqrt{at}\big), \qquad B\big(t,\ -2\sqrt{at}\big)$$

και το μήκος της χορδής είναι

$$(AB) = |\, 2\sqrt{at} - (-2\sqrt{at})\,| = 4\sqrt{at}.$$

Επομένως

$$(AB)^2 = 16at = 16a\,|t| = 16a\,(OP).$$
$$(AB)^2 = 16a\,(OP)$$

Αν επιπλέον η χορδή διέρχεται από την εστία $E(a, 0)$, τότε $t = a$ (διότι η κάθετη $x = t$ που περνά από το E έχει $t = a$). Άρα

$$(AB) = 4\sqrt{a \cdot a} = 4a \quad \Longrightarrow \quad (AB) = 4a$$

6. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ και σημεία της $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι η AB περνά από την εστία E *αν και μόνο αν* $y_1y_2 = -4a^2$ και $x_1x_2 = a^2$.

Λύση: (Ασκ. 6/81)

Κανόνες: Για την παραβολή $y^2 = 4ax$ ισχύουν

$$E(a, 0), \qquad P(t) \equiv \big(at^2,\, 2at\big) \ \ \text{(παραμετρική μορφή)}.$$

Αναγκαίο $\Rightarrow$ (αν AB διέρχεται από E): Έστω $A = P(t_1) = (at_1^2, 2at_1)$, $B = P(t_2) = (at_2^2, 2at_2)$. Η ευθεία AB περνά από το $E(a, 0)$ αν

$$\begin{vmatrix} at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ at_2^2 & 2at_2 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff a(t_1^2 - t_2^2) \cdot 0 - 2a(t_1 - t_2) \cdot a + a\big(2at_1 - 2at_2\big) = 0$$

$$\iff (t_1 - t_2)\big(-2a^2 + 2a^2 t_1 t_2\big) = 0 \iff t_1 t_2 = -1 \quad \text{(διαφορετικά σημεία } t_1 \neq t_2\text{)}.$$

Άρα

$$y_1y_2 = (2at_1)(2at_2) = 4a^2(t_1t_2) = -4a^2, \qquad x_1x_2 = \left(at_1^2\right)\left(at_2^2\right) = a^2(t_1t_2)^2 = a^2.$$

Ικανό $\Leftarrow$ (αν $y_1y_2 = -4a^2$ και $x_1x_2 = a^2$):

Από την παραμετρική μορφή θέτουμε $A = P(t_1), B = P(t_2)$. Τότε

$$y_1y_2 = 4a^2t_1t_2 = -4a^2 \;\Rightarrow\; t_1t_2 = -1,$$

και συνεπώς η ευθεία AB ικανοποιεί την προηγούμενη συνθήκη $t_1t_2 = -1$, άρα περνά από την εστία $E(a, 0)$.

Συμπέρασμα:

$$AB \text{ διέρχεται από } E \iff y_1y_2 = -4a^2 \;\text{ και }\; x_1x_2 = a^2.$$

7. Δίνεται παραβολή με *κορυφή* την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και *άξονα συμμετρίας* τον άξονα των τετμημένων. Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(16, -8)$, να βρεθούν:

i. η *εξίσωση* της παραβολής,

ii. οι *συντεταγμένες* της εστίας και η *εξίσωση* της διευθετούσας,

iii. οι *συντεταγμένες* σημείου B της παραβολής ώστε $\angle AOB = 90°$ όπου O η αρχή των αξόνων.

Λύση: (Ασκ. 7/81)

Αν $y^2 = 4ax$, τότε $E(a, 0)$ και $(\delta) : x = -a$.

i. Η παραβολή έχει μορφή $y^2 = 4ax$. Επειδή ανήκει το $A(16, -8)$:

$$(-8)^2 = 4a \cdot 16 \;\Rightarrow\; 64 = 64a \;\Rightarrow\; a = 1$$

άρα

$$y^2 = 4x$$

ii. Για $a = 1$: $E(a, 0) = (1, 0)$ και $(\delta) : x = -a \Rightarrow x = -1$.

$$E(1, 0) \qquad (\delta) : \; x = -1$$

iii. Κριτήριο καθέτων ευθειών: Αν δύο μη κατακόρυφες ευθείες έχουν κλίσεις m_1, m_2, τότε είναι κάθετες αν $m_1 m_2 = -1$.

Η OA έχει κλίση $m_{OA} = \dfrac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$. Άρα η OB πρέπει να έχει κλίση $m_{OB} = 2$ και, επειδή διέρχεται από το O, είναι

$$OB:\ y = 2x.$$

Το B είναι η τομή της $y = 2x$ με την παραβολή $y^2 = 4x$:

$$(2x)^2 = 4x \ \Rightarrow\ 4x^2 = 4x \ \Rightarrow\ x(x-1) = 0.$$

Λύσεις $x = 0$ (δίνει το O, που απορρίπτεται ως ταυτιζόμενο με την κορυφή) ή $x = 1 \Rightarrow y = 2$.

$$B(1,2)$$

8. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2x$ και χορδή AB της, έτσι ώστε το σημείο $\Gamma(5,-1)$ να είναι το *μέσο* της. Να βρεθεί η *εξίσωση* της AB.

Λύση: (Ασκ. 8/81)

Για την παραβολή $y^2 = 4ax$, η χορδή που έχει *μέσο* το (x_1, y_1) δίνεται από

$$T = S_1 \quad\Longleftrightarrow\quad yy_1 = 2a(x + x_1) + \big(y_1^2 - 4ax_1\big).$$

Στην $y^2 = 2x$ έχουμε $4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Για $\Gamma(5,-1)$:

$$-y = 1\cdot(x+5) + \big((-1)^2 - 4\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 5\big) = x + 5 + (1 - 10) = x - 4.$$

Άρα

$$x + y - 4 = 0$$

Έλεγχος: Η τομή της $x + y - 4 = 0$ με $y^2 = 2x$ δίνει,

$$(-x+4)^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2, 8$$

Τότε $y = 2, -4$. Το μέσο είναι $\left(\frac{2+8}{2},\ \frac{2+(-4)}{2}\right) = (5,-1) = \Gamma$.

9. Να βρείτε τη *θέση* των σημείων $(-1,2)$, $(2,-1)$, $(-4,-2)$ και $(4,5)$ σε σχέση με τις παραβολές με εξίσωση:

i. $y^2 = 6x$

ii. $x^2 = -4y$

Λύση: (Ασκ. 1/87)

i. Για $y^2 = 4ax$ έχουμε $4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$. Η θέση σημείου $A(x_1, y_1)$ ως προς την παραβολή δίνεται από το πρόσημο της παράστασης

$$y_1^2 - 4ax_1 = y_1^2 - 6x_1.$$

Για καθένα από τα σημεία:

$$\begin{array}{lccl}
A_1(-1,2): & y_1^2 - 6x_1 = 4 - 6(-1) = 10 > 0 & \Rightarrow & A_1 \text{ εκτός της παραβολής,} \\
A_2(2,-1): & y_1^2 - 6x_1 = 1 - 12 = -11 < 0 & \Rightarrow & A_2 \text{ εντός της παραβολής,} \\
A_3(-4,-2): & y_1^2 - 6x_1 = 4 - 6(-4) = 28 > 0 & \Rightarrow & A_3 \text{ εκτός της παραβολής,} \\
A_4(4,5): & y_1^2 - 6x_1 = 25 - 24 = 1 > 0 & \Rightarrow & A_4 \text{ εκτός της παραβολής.}
\end{array}$$

ii. Για $x^2 = 4ay$ έχουμε $4a = -4 \Rightarrow a = -1$. Η θέση σημείου $A(x_1, y_1)$ δίνεται από

$$x_1^2 - 4ay_1 = x_1^2 + 4y_1.$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{array}{lccl}
A_1(-1,2): & x_1^2 + 4y_1 = 1 + 8 = 9 > 0 & \Rightarrow & A_1 \text{ εκτός της παραβολής,} \\
A_2(2,-1): & x_1^2 + 4y_1 = 4 - 4 = 0 & \Rightarrow & A_2 \text{ επάνω στην παραβολή,} \\
A_3(-4,-2): & x_1^2 + 4y_1 = 16 - 8 = 8 > 0 & \Rightarrow & A_3 \text{ εκτός της παραβολής,} \\
A_4(4,5): & x_1^2 + 4y_1 = 16 + 20 = 36 > 0 & \Rightarrow & A_4 \text{ εκτός της παραβολής.}
\end{array}$$

10. Να λύσετε *γραφικά* τις ανισώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $y^2 \leq 12x$

ii. $y^2 + 8x < 0$

iii. $x^2 \geq 2y$

iv. $2x^2 - 9y \leq 0$

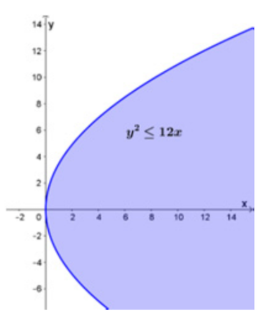
Λύση: (Ασκ. 2/87)

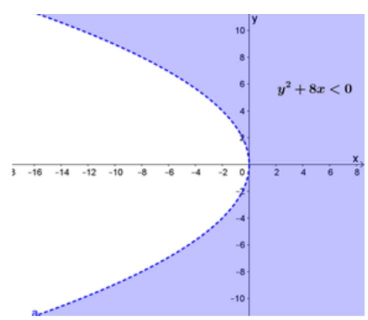
i. $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 \leq 12x\} \implies x \geq \frac{y^2}{12}$.

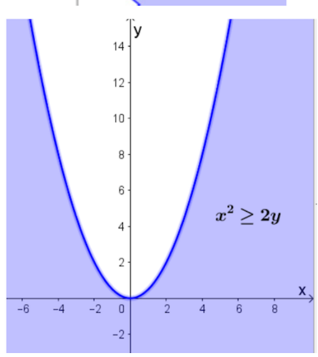
ii. $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 < -8x\} \implies x < -\frac{y^2}{8}$.

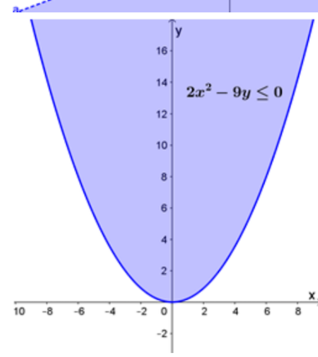
iii. $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \geq 2y\} \implies y \leq \frac{x^2}{2}$.

iv. $S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 - 9y \leq 0\} \implies y \geq \frac{2}{9}x^2$.









11. Να λύσετε *γραφικά* την ανίσωση

$$\left(y^2 - 4x\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right) \leq 0.$$

Λύση: (Ασκ. 3/87)

Θέτουμε

$$f(x,y) = y^2 - 4x, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 4.$$

Ζητούμε τα σημεία για τα οποία $f \cdot g \leq 0$, δηλαδή *αντίθετα πρόσημα ή τουλάχιστον ένα μηδενικό.* Τα σύνορα είναι:

$$\underbrace{y^2 = 4x}_{\text{παραβολή } (P)}, \qquad \underbrace{x^2 + y^2 = 4}_{\text{κύκλος } (K)}.$$

i. $f(x,y) \leq 0 \iff y^2 \leq 4x$: *εσωτερικό (με σύνορο)* της παραβολής P.

ii. $f(x,y) \geq 0 \iff y^2 \geq 4x$: *εξωτερικό* της παραβολής.

iii. $g(x,y) \leq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 4$: *εσωτερικό (με σύνορο)* του κύκλου K.

iv. $g(x,y) \geq 0 \iff x^2 + y^2 \geq 4$: *εξωτερικό* του κύκλου.

Άρα

$$(f \cdot g \leq 0) \iff \big(f \leq 0 \;\&\; g \geq 0\big) \;\cup\; \big(f \geq 0 \;\&\; g \leq 0\big).$$

Δηλαδή η ένωση δύο χωρίων:

$$S = \underbrace{\{y^2 \leq 4x\} \cap \{x^2 + y^2 \geq 4\}}_{S_1\,:\ \text{μέσα στην παραβολή \& έξω από τον κύκλο}} \quad \cup \quad \underbrace{\{y^2 \geq 4x\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 4\}}_{S_2\,:\ \text{έξω από την παραβολή \& μέσα στον κύκλο}}$$

με *ολόκληρα* τα σύνορα P και K να περιλαμβάνονται (επειδή ≤ 0).

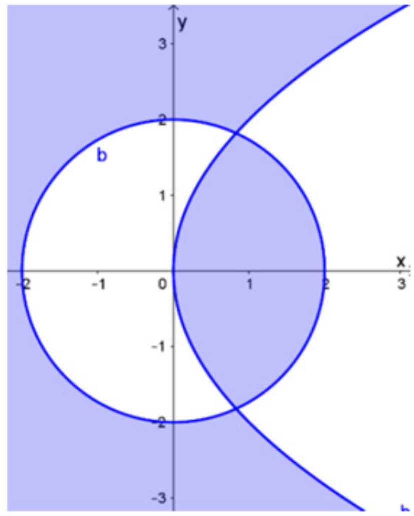
Σημεία τομής $P \cap K$ (για το σχήμα): Από $y^2 = 4x$ και $x^2 + y^2 = 4$ παίρνουμε $x = \frac{y^2}{4}$ και

$$\frac{y^4}{16} + y^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = -8 + 8\sqrt{2},$$

οπότε

$$x = -2 + 2\sqrt{2}, \qquad y = \pm\sqrt{-8 + 8\sqrt{2}}.$$

Τα σημεία αυτά χωρίζουν τα σύνορα και βοηθούν στη *γραφική* παράσταση του S.



12. Να βρείτε τη *θέση* της ευθείας:

i. $y = -x - 1$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$

ii. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ ως προς την παραβολή $y^2 = 4x$

iii. $x - y = 2$ ως προς την παραβολή $x^2 + y = 0$.

Λύση: (Ασκ. 4/87)

i. Στο $y^2 = 2x$ βάζουμε $y = -x - 1$:

$$(-x-1)^2 = 2x \iff x^2 + 1 = 0.$$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta = -4 < 0$) $\Rightarrow$ δεν τέμνει την παραβολή.

ii. Στο $y^2 = 4x$ βάζουμε $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$:

$$\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}\right)^2 = 4x \iff \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \iff (x-2)^2 = 0.$$

Μοναδική λύση $x = 2 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$. ($\Delta = 0$) $\Rightarrow$ εφαπτέται στην $A(2, 2\sqrt{2})$.

iii. Από $x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$. Στην $x^2 + y = 0$:

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2.$$

Άρα σημεία τομής $A(1, -1)$, $B(-2, -4)$. ($\Delta = 9 > 0$) $\Rightarrow$ τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

13. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 4$ *τέμνει* την παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$, υπολογίζοντας και τις *συντεταγμένες* των κοινών τους σημείων.

Λύση: (Ασκ. 5/87)

Στην $y^2 = 4x$ θέτουμε $y = 2x - 4$:

$(2x-4)^2 = 4x \iff 4x^2 - 16x + 16 = 4x \iff 4x^2 - 20x + 16 = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \implies$ η ευθεία *τέμνει* την παραβολή σε δύο σημεία.

$$x = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Για $y = 2x - 4$ παίρνουμε

$$y_1 = 2 \cdot 1 - 4 = -2, \qquad y_2 = 2 \cdot 4 - 4 = 4.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι

$$A(1,-2), \qquad B(4,4).$$

Έλεγχος: $(-2)^2 = 4 \cdot 1$ και $4^2 = 4 \cdot 4$

14. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = \lambda x + 1$:

i. εφάπτεται της παραβολής,

ii. τέμνει την παραβολή,

iii. μην τέμνει την παραβολή.

Λύση: (Ασκ. 6/87)

Θέτοντας $y = \lambda x + 1$ στην $y^2 = 4x$ παίρνουμε εξίσωση ως προς x:

$$(\lambda x + 1)^2 = 4x \iff \lambda^2 x^2 + (2\lambda - 4)x + 1 = 0.$$

Για $\lambda \neq 0$ είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = (2\lambda - 4)^2 - 4\lambda^2 = 16(1 - \lambda).$$

i. Εφαπτομένη $\iff \Delta = 0 \iff 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

(Τότε $x = 1,\ y = 2 \Rightarrow T(1,2)$.)

ii. Τέμνει $\iff \Delta > 0 \iff 1-\lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 1$.

Παρατήρηση: Για $\lambda = 0$ η εξίσωση γίνεται γραμμική $(-4)x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ και δίνει ένα κοινό σημείο $(\frac{1}{4}, 1)$, που ανήκει επίσης στην περίπτωση (ii).

iii. Δεν τέμνει $\iff \Delta < 0 \iff 1-\lambda < 0 \Rightarrow \lambda > 1$.

15. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax$ με $a > 0$ και το σημείο $A(2a, 0)$.

Να αποδείξετε ότι:

i. η ευθεία $(\varepsilon):\ x - y + a = 0$ *εφάπτεται* στην παραβολή σε σημείο της B,

ii. αν η ευθεία AB τέμνει την παραβολή σε σημείο Γ (διαφορετικό από το B), τότε ισχύει $(A\Gamma) = 2(AB)$.

Λύση: (Ασκ. 7/87)

i. Για την παραβολή $y^2 = 4ax$ η εξίσωση εφαπτομένης με κλίση m είναι $y = mx + \dfrac{a}{m}$ $(m \neq 0)$.

Για $m = 1$ παίρνουμε $y = x + a$, δηλαδή $x - y + a = 0$, άρα (ε) είναι εφαπτομένη.

Το σημείο επαφής προκύπτει από το σύστημα

$$\begin{cases} y^2 = 4ax, \\ y = x + a \end{cases} \implies (x+a)^2 = 4ax \implies (x-a)^2 = 0 \ \Rightarrow\ x = a,\ y = 2a.$$

Άρα $B(a, 2a)$.

ii. Η ευθεία AB με $A(2a, 0)$, $B(a, 2a)$ έχει κλίση $m = \dfrac{2a - 0}{a - 2a} = -2$ και εξίσωση

$$AB:\ y = -2x + 4a.$$

Τα κοινά σημεία της AB με την παραβολή δίνονται από

$$(-2x+4a)^2 = 4ax \iff 4x^2 - 20ax + 16a^2 = 0 \iff x^2 - 5ax + 4a^2 = 0,$$

με ρίζες $x = a$ (που αντιστοιχεί στο B) και $x = 4a$.

Για $x = 4a$ βρίσκουμε $y = -2(4a) + 4a = -4a$, άρα $\Gamma(4a, -4a)$.

Τότε

$$(AB) = \sqrt{(a-2a)^2 + (2a-0)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5},$$
$$(A\Gamma) = \sqrt{(4a-2a)^2 + (-4a-0)^2} = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2a\sqrt{5} = 2(AB).$$

Επομένως $(A\Gamma) = 2(AB)$.

16. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax$ με $a > 0$ και ένα σημείο της B. Αν η ευθεία (ε) είναι η *εφαπτομένη* της παραβολής στο σημείο B και η ευθεία (ζ) είναι *κάθετη* στην (ε) στο σημείο B, να δείξετε ότι η (ζ) *διχοτομεί* τη γωνία που σχηματίζουν οι ημιευθείες Bx και BE, όπου E είναι η *εστία* της παραβολής και η Bx είναι *διάμετρος* της παραβολής (παράλληλη με τον άξονα $x'x$).

(*Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής*)

Λύση: (Ασκ. 8/87)

Θέτουμε $B(at^2, 2at)$ με $t \in \mathbb{R}$ (παραμετρικές της $y^2 = 4ax$).

Η κλίση της εφαπτομένης στο B είναι $m_\varepsilon = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_B = \dfrac{2a}{y} = \dfrac{1}{t}$, άρα η κάθετη σε αυτήν έχει κλίση $m_\zeta = -t$. Μια διάνυσή της είναι $\mathbf{n} = (1, -t)$.

Η εστία είναι $E(a, 0)$. Διάνυσμα $\overrightarrow{BE} = (a - at^2,\, -2at) = a(1-t^2,\, -2t)$. Το μήκος του (αγνοώντας το θετικό συντελεστή a) είναι

$$\|(1-t^2, -2t)\| = \sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2} = \sqrt{(1+t^2)^2} = 1 + t^2.$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα προς BE είναι

$$\widehat{\mathbf{u}}_{BE} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}\right).$$

Η Bx είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα το μοναδιαίο διάνυσμα προς Bx είναι $\widehat{\mathbf{u}}_{Bx} = (1,0)$.

Το διάνυσμα του *εσωτερικού διχοτόμου* της γωνίας των $\widehat{\mathbf{u}}_{Bx}$ και $\widehat{\mathbf{u}}_{BE}$ είναι ανάλογο του αθροίσματός τους:

$$\widehat{\mathbf{u}}_{Bx} + \widehat{\mathbf{u}}_{BE} = \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}\right) = \frac{2}{1+t^2}\,(1,-t).$$

Το παραπάνω είναι *παράλληλο* προς το $\mathbf{n} = (1,-t)$, δηλαδή έχει την ίδια διεύθυνση με την ευθεία (ζ).

Συνεπώς η (ζ) είναι ο διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι ημιευθείες Bx και BE.

17. Να βρείτε την *εξίσωση της εφαπτομένης* και της *κάθετης* στο σημείο A κάθε παραβολής με εξίσωση:

i. $y^2 = x$ στο $A(1,1)$

ii. $y^2 = 32x$ στο $A(2,8)$

iii. $x^2 = 16y$ στο $A(-16,16)$

iv. $y = 4(x+1)^2$ στο $A(-3,16)$

Λύση: (Ασκ. 1/94)

i. Για $y^2 = x$, παραγωγίζουμε ως προς x:

$$2y\,y' = 1 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{2y}.$$

Στο $A(1,1)$: $y' = \frac{1}{2}$. Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 1 = \tfrac{1}{2}(x-1) \;\Rightarrow\; x - 2y + 1 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση -2 και εξίσωση:

$$y - 1 = -2(x-1) \;\Rightarrow\; 2x + y - 3 = 0.$$

ii. Για $y^2 = 32x$:

$$2y\,y' = 32 \;\Rightarrow\; y' = \frac{16}{y}.$$

Στο $A(2,8)$: $y' = 2$. Επομένως η εφαπτομένη είναι:

$$y - 8 = 2(x-2) \;\Rightarrow\; 2x - y + 4 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$:

$$y - 8 = -\tfrac{1}{2}(x-2) \;\Rightarrow\; x + 2y - 18 = 0.$$

iii. Για $x^2 = 16y$:

$$2x = 16y' \;\Rightarrow\; y' = \frac{x}{8}.$$

Στο $A(-16,16)$: $y' = -2$. Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 16 = -2(x+16) \;\Rightarrow\; 2x + y + 16 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση $\frac{1}{2}$:

$$y - 16 = \tfrac{1}{2}(x+16) \;\Rightarrow\; x - 2y + 48 = 0.$$

iv. Για $y = 4(x+1)^2$:

$$y' = 8(x+1).$$

Στο $A(-3,16)$: $y' = -16$. Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 16 = -16(x+3) \;\Rightarrow\; 16x + y + 32 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση $\frac{1}{16}$:

$$y - 16 = \tfrac{1}{16}(x+3) \;\Rightarrow\; x - 16y + 259 = 0.$$

18. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$. Να βρείτε την *εξίσωση της εφαπτομένης*, η οποία:

i. διέρχεται από το σημείο της $(1,2)$

ii. διέρχεται από το σημείο $(-4,0)$

iii. είναι παράλληλη προς την ευθεία $x + y = -2$

iv. είναι κάθετη στην ευθεία $x + y = -4$

Λύση: (Ασκ. 2/94)

Γενική μορφή εφαπτομένης της $y^2 = 4x$ με κλίση m είναι:

$$y = mx + \frac{1}{m}, \qquad m \neq 0.$$

i. Το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στην παραβολή, άρα:

$$2^2 = 4 \cdot 1 \Rightarrow \text{ισχύει.}$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A δίνεται από:

$$2y\,y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}.$$

Για $y = 2$, έχουμε $y' = 1$. Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 2 = 1(x-1) \;\Rightarrow\; y = x + 1$$

ii. Η εφαπτομένη έχει μορφή $y = mx + \frac{1}{m}$ και διέρχεται από το σημείο $(-4,0)$:

$$0 = m(-4) + \frac{1}{m} \;\Rightarrow\; -4m^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; m = \pm\frac{1}{2}.$$

Άρα:

$$y = \tfrac{1}{2}x + 2 \qquad \text{ή} \qquad y = -\tfrac{1}{2}x - 2.$$

iii. Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι *παράλληλη* προς την $x+y=-2$, δηλαδή έχει κλίση $m=-1$:

$$y = -x + \frac{1}{m} = -x - 1.$$

$$y = -x - 1$$

iv. Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι *κάθετη* στην $x+y=-4$, που έχει κλίση -1. Η κάθετη έχει κλίση $m=1$:

$$y = x + \frac{1}{m} = x + 1.$$

$$y = x + 1$$

19. Η *εφαπτομένη* της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 20x$ στο σημείο $A(5t^2,\, 10t)$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B. Αν E είναι η *εστία* της παραβολής, να αποδείξετε ότι η γωνία ABE είναι ορθή.

Λύση: (Ασκ. 3/94)

Η $y^2 = 20x$ είναι της μορφής $y^2 = 4ax$ με $4a = 20 \Rightarrow a = 5$.

Άρα $E(a, 0) = (5, 0)$ και $A\big(5t^2,\, 10t\big)$ είναι παραμετρικό σημείο $(at^2,\, 2at)$ για $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Η εφαπτομένη στο A έχει γνωστή μορφή

$$ty = x + at^2 \quad \Longrightarrow \quad ty = x + 5t^2.$$

Θέτοντας $x = 0$ (τομής με τον άξονα Oy) βρίσκουμε

$$y_B = 5t \quad \Rightarrow \quad B(0,\, 5t).$$

Κλίσεις:

$$m_{BA} = \frac{10t - 5t}{5t^2 - 0} = \frac{1}{t}, \qquad m_{BE} = \frac{0 - 5t}{5 - 0} = -t.$$

Επομένως

$$m_{BA} \cdot m_{BE} = \frac{1}{t} \cdot (-t) = -1,$$

άρα οι ευθείες BA και BE είναι κάθετες και η γωνία ABE είναι ορθή.

20. Δίνεται η παραβολή $x^2 = 4y$ και η ευθεία $(\varepsilon):\; x + y = 8$.

i. Να βρείτε την *εστία* και τη *διευθετούσα* της παραβολής.

ii. Να αποδείξετε ότι η (ε) τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία A, B και να βρείτε τις *συντεταγμένες* τους.

iii. Να βρείτε τις *εξισώσεις των εφαπτομένων* της παραβολής στα σημεία A και B.

iv. Να βρείτε το *σημείο τομής* Γ των δύο εφαπτομένων και να υπολογίσετε το *εμβαδόν* του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση: (Ασκ. 4/94)

i. Η $x^2 = 4y$ είναι της μορφής $x^2 = 4ay$ με $4a = 4 \Rightarrow a = 1$.

Άρα $E(0, a) = (0, 1)$ (εστία) και $y = -a = -1$ (διευθετούσα).

ii. Από $x^2 = 4y \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$. Στην $x + y = 8$:

$$x + \frac{x^2}{4} = 8 \iff x^2 + 4x - 32 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = 16 + 128 = 144 > 0 \implies$ δύο σημεία τομής.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 12}{2} \Rightarrow x_A = 4,\ x_B = -8, \qquad y_A = \frac{4^2}{4} = 4,\quad y_B = \frac{(-8)^2}{4} = 16.$$

Άρα $A(4,4),\ B(-8,16)$.

iii. Από $x^2 = 4y$ προκύπτει με παραγώγιση $2x = 4y' \Rightarrow y' = \dfrac{x}{2}$.

$$m_A = \frac{4}{2} = 2, \quad m_B = \frac{-8}{2} = -4.$$

Εφαπτομένη στο $A(4,4)$:

$$y - 4 = 2(x - 4) \iff y = 2x - 4$$

Εφαπτομένη στο $B(-8,16)$:

$$y - 16 = -4(x + 8) \iff y = -4x - 16$$

iv. Τομή των εφαπτομένων:

$$\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = -4x - 16 \end{cases} \implies 2x - 4 = -4x - 16 \implies x = -2,\ y = -8.$$

Άρα $\Gamma(-2,-8)$.

Το εμβαδόν του $\triangle AB\Gamma$ είναι

$$E = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_\Gamma - x_A & y_\Gamma - y_A \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -12 & 12 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|\,(-12)(-12) - 12(-6)\,| = \frac{1}{2}\cdot 216 = 108.$$

Επομένως $E_{AB\Gamma} = 108$ τετρ. μον.

21. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο της A τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο B. Να βρεθεί η *εξίσωση* της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου του μέσου M του AB, όταν το A διαγράφει την παραβολή.

Λύση: (Ασκ. 5/94)

Παραμετροποιούμε την παραβολή ως

$$A\big(x_A, y_A\big) = \big(at^2,\, 2at\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Η εφαπτομένη στο A δίνεται από τον τύπο $y\,y_A = 2a(x + x_A)$:

$$(2at)\,y = 2a\,(x + at^2) \implies t\,y = x + at^2.$$

Η διευθετούσα είναι $x = -a$. Άρα το σημείο τομής B έχει

$$x_B = -a, \qquad y_B = a\left(t - \frac{1}{t}\right) \quad (t \neq 0).$$

Το μέσο M του AB είναι

$$M(x, y) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}(t^2 - 1),\, \frac{a}{2}\left(3t - \frac{1}{t}\right)\right).$$

Θέτουμε $x = \dfrac{a}{2}(t^2 - 1) \Rightarrow t^2 = 1 + \dfrac{2x}{a}$ και $\dfrac{2y}{a} = 3t - \dfrac{1}{t}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$\left(\frac{2y}{a}\right)^2 = 9t^2 - 6 + \frac{1}{t^2} = 9\left(1 + \frac{2x}{a}\right) - 6 + \frac{1}{1 + \frac{2x}{a}}.$$

Με απλοποίηση καταλήγουμε στην κομψή μορφή

$$(a + 2x)\,y^2 = a\,(3x + a)^2$$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι το τμήμα αυτής της καμπύλης με $x > -\dfrac{a}{2}$ (κάθετη ασύμπτωτη $x = -\dfrac{a}{2}$); για $t = 0$ η εφαπτομένη είναι $x = 0$ και δεν τέμνει τη διευθετούσα, οπότε το M δεν ορίζεται.

22. Αν $A(3t_1^2, 6t_1)$ και $B(3t_2^2, 6t_2)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία της παραβολής $y^2 = 12x$, να βρεθεί η *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB, αν:

i. $t_1^2 + t_2^2 = 3t_1t_2$,

ii. η χορδή AB περνά από το σημείο $(0, 6)$.

Λύση: (Ασκ. 6/94)

Η $y^2 = 12x$ έχει $a = 3$ και παραμετρικά σημεία $(3t^2,\ 6t)$. Για τα A, B θέτουμε

$$S = t_1 + t_2, \qquad P = t_1t_2.$$

Τότε το μέσο $M(x, y)$ της AB είναι

$$x = \frac{3t_1^2 + 3t_2^2}{2} = \frac{3}{2}(S^2 - 2P), \qquad y = \frac{6t_1 + 6t_2}{2} = 3S.$$

i. Από $t_1^2 + t_2^2 = 3t_1t_2$ έχουμε $S^2 - 2P = 3P \Rightarrow S^2 = 5P$. Άρα

$$x = \frac{3}{2}\big(S^2 - 2P\big) = \frac{3}{2}(5P - 2P) = \frac{9}{2}P, \qquad S = \frac{y}{3} \Rightarrow P = \frac{S^2}{5} = \frac{y^2}{45}.$$

Επομένως

$$x = \frac{9}{2} \cdot \frac{y^2}{45} = \frac{y^2}{10} \iff y^2 = 10x$$

(Για διαφορετικά σημεία απαιτείται $S \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$, άρα το $(0, 0)$ δεν ανήκει στο λοκούς.)

ii. Η κλίση της AB είναι

$$m_{AB} = \frac{6(t_2 - t_1)}{3(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2} = \frac{2}{S}.$$

Η ευθεία AB που διέρχεται από το A γράφεται

$$y - 6t_1 = \frac{2}{S}\,(x - 3t_1^2).$$

Το σημείο $(0,6)$ ανήκει στην $AB \Leftrightarrow 6-6t_1 = \frac{2}{S}\left(-3t_1^2\right) \Leftrightarrow S = t_1(S-t_1) = t_1t_2$.

Άρα $P = S$.

Με $x = \frac{3}{2}(S^2-2P)$ και $y = 3S$ παίρνουμε

$$x = \frac{3}{2}\big(S^2 - 2S\big) \;\Rightarrow\; 6x = y^2 - 6y \;\Rightarrow\; y^2 - 6y = 6x \quad \text{ή} \quad \big(y-3\big)^2 = 6\big(x + \tfrac{3}{2}\big)$$

(Για $t_1 \neq t_2$: $\Delta = S^2 - 4P = S(S-4) > 0 \Rightarrow y < 0$ ή $y > 12$, δηλ. το λοκούς είναι το παραπάνω παραβολικό τόξο.)

23. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και από το σημείο $A(-2,3)$ φέρουμε τις εφαπτόμενες προς αυτή.

i. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων.

ii. Να αποδείξετε ότι αυτές είναι *κάθετες*.

Λύση: (Ασκ. 7/95)

Η $y^2 = 8x$ είναι της μορφής $y^2 = 4ax$ με $a = 2$. Η εφαπτομένη στο παραμετρικό σημείο $(at^2,\, 2at)$ δίνεται από

$$t\,y = x + at^2.$$

Για να περνά από το $A(-2,3)$:

$$3t = -2 + 2t^2 \iff 2t^2 - 3t - 2 = 0 \implies t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{1}{2}.$$

i. Εξισώσεις εφαπτομένων:

$$t = 2: \quad 2y = x + 8 \iff y = \tfrac{1}{2}x + 4$$
$$t = -\tfrac{1}{2}: \quad -\tfrac{1}{2}y = x + \tfrac{1}{2} \iff y = -2x - 1$$

ii. Οι κλίσεις είναι $m_1 = \frac{1}{2}$ και $m_2 = -2$. Επομένως

$$m_1 m_2 = \tfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{οι δύο ευθείες είναι κάθετες.}$$

24. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda \neq 0$ τέμνει την παραβολή $y^2 = 4x$ στα σημεία A, B.

i. Να αποδείξετε ότι οι *συντεταγμένες* του μέσου M της χορδής AB είναι $\left(\dfrac{2-\lambda\beta}{\lambda^2},\ \dfrac{2}{\lambda}\right)$.

ii. Να βρείτε την *εξίσωση* της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου του M, όταν η ευθεία διέρχεται από το σταθερό σημείο $(2, 0)$.

Λύση: (Ασκ. 8/95)

i. Από $y^2 = 4x$ και $y = \lambda x + \beta$ παίρνουμε, εξαλείφοντας το x,

$$\frac{\lambda}{4}y^2 - y + \beta = 0.$$

Αυτή είναι τετραγωνική ως προς y. Ο *άξονας συμμετρίας* της είναι

$$y = \frac{-(-1)}{2\cdot(\lambda/4)} = \frac{2}{\lambda},$$

δηλαδή το *μέσο* των τεταγμένων των σημείων τομής (άρα y_M) είναι

$$y_M = \frac{2}{\lambda}$$

Επειδή το M ανήκει στην ευθεία $y = \lambda x + \beta$, έχουμε

$$y_M = \lambda x_M + \beta \implies x_M = \frac{y_M - \beta}{\lambda} = \frac{\frac{2}{\lambda} - \beta}{\lambda} = \frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}$$

ii. Αν η ευθεία περνά από $(2, 0)$, τότε $0 = \lambda \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = -2\lambda$. Άρα

$$x = \frac{2-\lambda(-2\lambda)}{\lambda^2} = 2 + \frac{2}{\lambda^2}, \qquad y = \frac{2}{\lambda}.$$

Θέτοντας $\lambda = \dfrac{2}{y}$ (οπότε $y \neq 0$) προκύπτει

$$x = 2 + \frac{2}{(2/y)^2} = 2 + \frac{y^2}{2} \iff y^2 = 2(x-2)$$

25. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και σημεία της $A(2t^2, 4t)$, $B(2\rho^2, 4\rho)$.

(α) Αν το AB περνά από το $\Gamma(5, 2)$:

i. να δείξετε ότι $2t\rho + 5 = t + \rho$.

ii. να βρείτε την *εξίσωση* του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του AB.

(β) Αν το Γ είναι το μέσο του AB, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της AB είναι $(\varepsilon): \; y = 2x - 8$.

Λύση: (Ασκ. 9/95)

Για την $y^2 = 8x$ (δηλ. $4ax$ με $a = 2$) η χορδή AB έχει κλίση

$$m_{AB} = \frac{4(\rho - t)}{2(\rho^2 - t^2)} = \frac{2}{t + \rho} \quad (t \neq \rho),$$

άρα εξίσωση (από το A):

$$y - 4t = \frac{2}{t + \rho}\left(x - 2t^2\right).$$

(α.i) Το $\Gamma(5, 2) \in AB$ δίνει

$$2 - 4t = \frac{2}{t + \rho}(5 - 2t^2) \iff t + \rho - 2t\rho = 5 \iff 2t\rho + 5 = t + \rho$$

(α.ii) Το μέσο $M(x, y)$ της AB είναι

$$x = \frac{2t^2 + 2\rho^2}{2} = t^2 + \rho^2, \qquad y = \frac{4t + 4\rho}{2} = 2(t + \rho).$$

Θέτουμε $S = t + \rho$, $P = t\rho$. Από (α.i) έχουμε $S = 2P + 5 \Rightarrow P = \dfrac{S - 5}{2}$. Τότε

$$x = S^2 - 2P = S^2 - \big(S - 5\big) = S^2 - S + 5, \qquad y = 2S \Rightarrow S = \frac{y}{2}.$$

Άρα

$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} + 5 \iff , y^2 - 2y - 4x + 20 = 0 \iff \big(y - 1\big)^2 = 4x - 19$$

(β) Αν Γ είναι το μέσο, τότε $M \equiv \Gamma(5,2)$. Άρα $y = 2S = 2 \Rightarrow S = 1$ και από $S = 2P + 5$ παίρνουμε $P = -2$.

Η κλίση της AB είναι $m = \dfrac{2}{S} = 2$, και επειδή περνά από $(5,2)$:

$$y - 2 = 2(x-5) \iff y = 2x - 8$$

26. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ με εστία $E(1,0)$ και τυχαίο σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t \neq 0$. Από την εστία E φέρουμε ευθεία κάθετη στην AE, η οποία τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο B.

i. Να δείξετε ότι η BA είναι η *εφαπτομένη* της παραβολής στο A.

ii. Να βρείτε την *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AEB\Gamma$, καθώς το A κινείται πάνω στην παραβολή.

Λύση: (Ασκ. 10/95)

Η διευθετούσα είναι $x = -1$.

Συντεταγμένες του B. Κλίση της AE:

$$m_{AE} = \frac{0-2t}{1-t^2} = -\frac{2t}{1-t^2} \quad \Rightarrow \quad m_\perp = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Η ευθεία από $E(1,0)$ με κλίση $m_\perp$ τέμνει τη διευθετούσα $x = -1$ στο

$$B(-1,\ -2\,m_\perp) = \left(-1,\ \frac{t^2-1}{t}\right).$$

i. Κλίση της AB:

$$m_{AB} = \frac{\frac{t^2-1}{t} - 2t}{-1-t^2} = \frac{-\frac{t^2+1}{t}}{-(t^2+1)} = \frac{1}{t}.$$

Η εφαπτομένη της $y^2 = 4x$ στο $A(t^2, 2t)$ έχει τύπο $t\,y = x + t^2$ (ή $y = \frac{1}{t}x + t$), που είναι ακριβώς η ευθεία από το A με κλίση $1/t$.

Άρα $BA:\ t\,y = x + t^2$ και επομένως η BA είναι η εφαπτομένη στο A.

ii. Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AEB\Gamma$ ισχύει $\Gamma = A + B - E$. Άρα

$$\Gamma(x,y) = \left(t^2-2,\ 2t+\tfrac{t^2-1}{t}\right) = \left(t^2-2,\ 3t-\tfrac{1}{t}\right).$$

Θέτουμε $x = t^2 - 2 \Rightarrow t^2 = x + 2$ και από $y = 3t - \frac{1}{t}$ παίρνουμε

$$y\,t = 3t^2 - 1 = 3(x+2) - 1 = 3x + 5.$$

Με $t^2 = x + 2$ προκύπτει

$$(x+2)\,y^2 = (3x+5)^2 \qquad x > -2$$

(κάθετη ασύμπτωτη $x = -2$).

Αυτός είναι ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ.

27. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 16x$.

i. Να βρείτε τις *συντεταγμένες* της εστίας και την *εξίσωση* της διευθετούσας της.

ii. Να βρείτε την *εξίσωση της εφαπτομένης* στο σημείο της $A(1,4)$.

iii. Αν η εφαπτομένη στο A τέμνει τη *διευθετούσα* της παραβολής στο σημείο B, να βρείτε την *εξίσωση της άλλης εφαπτομένης* που άγεται από το B προς την παραβολή.

Λύση: (Ασκ. 1/96)

i. Η εξίσωση $y^2 = 4ax$ δίνει $4a = 16 \Rightarrow a = 4$.

$$E(4,0), \qquad (\delta):\ x = -4$$

ii. Για $y^2 = 4ax$ η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_1, y_1)$ δίνεται από

$$y\,y_1 = 2a(x + x_1).$$

Για $a = 4,\ A(1,4)$:

$$4y = 8(x+1) \iff y = 2x + 2.$$

$$(\varepsilon_A):\ y = 2x + 2$$

iii. Η (ε_A) τέμνει τη διευθετούσα $x = -4$:

$$y = 2(-4) + 2 = -6 \quad \Rightarrow \quad B(-4, -6).$$

Θεωρούμε ότι η άλλη εφαπτομένη της $y^2 = 16x$ έχει κλίση m και διέρχεται από το $B(-4, -6)$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο της εφαπτομένης:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad \text{με} \quad (x_1, y_1) = (-4, -6).$$

Άρα:

$$y + 6 = m(x + 4).$$

Επειδή η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 16x$, αντικαθιστούμε το y από την παραπάνω εξίσωση:

$$y = m(x + 4) - 6,$$

στην $y^2 = 16x$:

$$\left[m(x + 4) - 6\right]^2 = 16x.$$

Αναπτύσσουμε:

$$m^2(x + 4)^2 - 12m(x + 4) + 36 - 16x = 0.$$

Για να είναι εφαπτομένη, η εξίσωση ως προς x πρέπει να έχει *μία μόνο λύση*, δηλαδή $\Delta = 0$. Υπολογίζοντας, παίρνουμε (μετά από πράξεις):

$$4m^2 - 6m - 4 = 0,$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Η $m_1 = 2$ αντιστοιχεί στην εφαπτομένη του A. Η άλλη, με $m = -\frac{1}{2}$, δίνει:

$$y + 6 = -\tfrac{1}{2}(x + 4) \iff y = -\tfrac{1}{2}x - 8.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 2:

$$x + 2y + 16 = 0.$$

28. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax$, $a > 0$, και η *εφαπτομένη* σε σημείο της A. Αν $\Gamma\Delta$ είναι *εστιακή χορδή* (διέρχεται από την εστία) που είναι *παράλληλη* στην εφαπτομένη, να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta) = 4(AE)$, όπου E η *εστία* της παραβολής.

Λύση: (Ασκ. 2/96)

Η παραβολή είναι $y^2 = 4ax \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{4a}$. Παράγωγος:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}.$$

Θεωρούμε σημείο $A(x_1, y_1)$ της παραβολής. Από $y_1^2 = 4ax_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{4a}$.

Η εφαπτομένη στο A έχει κλίση

$$m_A = \frac{dy}{dx}\Big|_A = \frac{2a}{y_1}.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(y - y_1) = m_A(x - x_1) \iff y - y_1 = \frac{2a}{y_1}\left(x - \frac{y_1^2}{4a}\right).$$

Αναπτύσσοντας:

$$y = \frac{2a}{y_1}x - \frac{y_1}{2}.$$

Η εστία της παραβολής είναι $E(a, 0)$. Θέλουμε τώρα την *εστιακή χορδή* $\Gamma\Delta$, δηλαδή τη χορδή που περνά από το $E(a, 0)$, και είναι *παράλληλη* με την εφαπτομένη, άρα έχει την ίδια κλίση:

$$m_{\Gamma\Delta} = m_A = \frac{2a}{y_1}.$$

Η γενική εξίσωση ευθείας που περνά από $E(a, 0)$ με αυτή την κλίση είναι:

$$y = m_A(x - a) \iff y = \frac{2a}{y_1}(x - a).$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής Γ, Δ της με την παραβολή $y^2 = 4ax$, αντικαθιστούμε το y στην εξίσωση της παραβολής:

$$\left(\frac{2a}{y_1}(x - a)\right)^2 = 4ax \iff \frac{4a^2}{y_1^2}(x - a)^2 = 4ax.$$

Απλοποιούμε με $4a$:

$$\frac{a}{y_1^2}(x - a)^2 = x \iff a(x^2 - 2ax + a^2) = xy_1^2.$$

Μεταφέρουμε τα πάντα στο ένα μέλος:

$$ax^2 - (2a^2 + y_1^2)x + a^3 = 0.$$

Αυτή είναι δευτεροβάθμια ως προς x, οι δύο ρίζες της x_Γ, x_Δ αντιστοιχούν στα σημεία Γ, Δ όπου η χορδή τέμνει την παραβολή.

Από τύπους Viète:

$$x_\Gamma + x_\Delta = \frac{2a^2 + y_1^2}{a}, \qquad x_\Gamma x_\Delta = a^2.$$

Από τις αντίστοιχες τιμές $y = \dfrac{2a}{y_1}(x - a)$, παίρνουμε:

$$y_\Gamma = \frac{2a}{y_1}(x_\Gamma - a), \quad y_\Delta = \frac{2a}{y_1}(x_\Delta - a).$$

Το τετράγωνο του μήκους της χορδής είναι:

$$(\Gamma\Delta)^2 = (x_\Gamma - x_\Delta)^2 + (y_\Gamma - y_\Delta)^2.$$

Αντικαθιστούμε:

$$y_\Gamma - y_\Delta = \frac{2a}{y_1}(x_\Gamma - x_\Delta),$$

οπότε:

$$(\Gamma\Delta)^2 = (x_\Gamma - x_\Delta)^2\left(1 + \frac{4a^2}{y_1^2}\right) = (x_\Gamma - x_\Delta)^2\frac{(y_1^2 + 4a^2)}{y_1^2}.$$

Από την εξίσωση $ax^2 - (2a^2 + y_1^2)x + a^3 = 0$, το

$$x_\Gamma - x_\Delta = \sqrt{(x_\Gamma + x_\Delta)^2 - 4x_\Gamma x_\Delta} = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + y_1^2}{a}\right)^2 - 4a^2} = \frac{2}{a}\sqrt{a^2(y_1^2 + a^2)}.$$

Έτσι:

$$(\Gamma\Delta)^2 = \frac{4a^2(y_1^2 + a^2)}{a^2} \cdot \frac{y_1^2 + 4a^2}{y_1^2} = 16a^2\left(1 + \frac{a^2}{y_1^2}\right)\left(1 + \frac{y_1^2}{4a^2}\right).$$

Λαμβάνοντας τετραγωνική ρίζα και απλοποιώντας:

$$(\Gamma\Delta) = 4a\left(1+\frac{y_1^2}{4a^2}\right) = 4a\left(\frac{y_1^2+4a^2}{4a^2}\right)a = 4a\left(1+\frac{y_1^2}{4a^2}\right).$$

Αλλά από $A(x_1, y_1)$ και $E(a, 0)$:

$$AE^2 = (x_1-a)^2 + y_1^2 = \left(\frac{y_1^2}{4a}-a\right)^2 + y_1^2 = a^2\left(1+\frac{y_1^2}{4a^2}\right)^2$$

οπότε $AE = a\left(1+\frac{y_1^2}{4a^2}\right)$.

Τελικά:

$$(\Gamma\Delta) = 4AE.$$

29. Έστω ότι η *εφαπτομένη* και η *κάθετη* στην παραβολή $y^2 = 4ax$ ($a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) σε σημείο της M τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία A, B, αντίστοιχα. Έστω, επίσης, Π η προβολή του M στον άξονα αυτό και H η προβολή του M στη διευθετούσα. Να αποδείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο $AEMH$ είναι *ρόμβος*,

ii. η *κορυφή* O της παραβολής είναι το *μέσο* της $A\Pi$,

iii. το *κέντρο* του ρόμβου $AEMH$ ανήκει στην *εφαπτομένη* της παραβολής στην κορυφή της,

iv. η *εστία* E είναι το *μέσο* της AB.

Λύση: (Ασκ. 3/96)

Θέτουμε $M(x_0, y_0)$ σημείο της $y^2 = 4ax$ με $y_0 \neq 0$. Τότε

$$y_0^2 = 4ax_0 \qquad \text{και} \qquad \frac{d}{dx}(y^2) = 2y\,y' = 4a \;\Rightarrow\; y' = \frac{2a}{y}.$$

Στο M η *εφαπτομένη* έχει κλίση $m_T = \dfrac{2a}{y_0}$ και, με τύπο σημείου–κλίσης,

$$y - y_0 = m_T(x-x_0) = \frac{2a}{y_0}(x-x_0). \tag{$*$}$$

Η *κάθετη* (κανονική) έχει κλίση $m_N = -\dfrac{1}{m_T} = -\dfrac{y_0}{2a}$ και

$$y - y_0 = m_N(x-x_0) = -\frac{y_0}{2a}(x-x_0). \tag{$**$}$$

Εστία $E(a, 0)$, διευθετούσα $x = -a$. Προβολές:

$$\Pi(x_0, 0), \qquad H(-a,\, y_0).$$

i. *(Ο $AEMH$ είναι ρόμβος).* Τα σημεία τομής με τον άξονα $y = 0$ προκύπτουν από $(*)$, $(**)$:

στην $(*)$: $-y_0 = \dfrac{2a}{y_0}(x_A - x_0) \Rightarrow x_A = -x_0$, στην $(**)$: $-y_0 = -\dfrac{y_0}{2a}(x_B - x_0) \Rightarrow x_B = x_0 + 2a$.

Άρα $A(-x_0, 0)$, $B(x_0 + 2a, 0)$.

Μήκη πλευρών του $AEMH$:

$$AE = |a - (-x_0)| = a + x_0, \qquad MH = |x_0 - (-a)| = a + x_0,$$

$$EM = \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - a)^2 + 4ax_0} = \sqrt{(x_0 + a)^2} = a + x_0,$$

$$HA = \sqrt{(a - x_0)^2 + y_0^2} = \sqrt{(a - x_0)^2 + 4ax_0} = \sqrt{(a + x_0)^2} = a + x_0.$$

Άρα $AE = EM = MH = HA \implies$ το τετράπλευρο $AEMH$ είναι *ρόμβος*.

ii. *(Το O είναι μέσο της $A\Pi$).*

$$A(-x_0, 0), \quad \Pi(x_0, 0) \;\Rightarrow\; \text{μέσο} = \left(\tfrac{-x_0 + x_0}{2},\, 0\right) = (0, 0) = O.$$

iii. *(Το κέντρο του ρόμβου ανήκει στην εφαπτομένη της κορυφής).* Το κέντρο K του ρόμβου είναι το μέσο διαγωνίων, π.χ. της AM:

$$K = \left(\tfrac{-x_0 + x_0}{2},\, \tfrac{0 + y_0}{2}\right) = (0, \tfrac{y_0}{2}).$$

Η εφαπτομένη στην κορυφή O της $y^2 = 4ax$ είναι η $x = 0$ (κατακόρυφη). Το K έχει $x = 0$ $\implies$ K ανήκει στην εφαπτομένη της κορυφής.

iv. *(Η εστία είναι μέσο της AB).*

$$A(-x_0, 0),\; B(x_0 + 2a, 0) \;\Rightarrow\; \text{μέσο}(AB) = \left(\tfrac{-x_0 + x_0 + 2a}{2},\, 0\right) = (a, 0) = E.$$

30. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax$ με $a > 0$ και σημείο της $A(4a, -4a)$. Να βρείτε τις *συντεταγμένες* του σημείου της παραβολής στο οποίο η *εφαπτομένη* είναι *παράλληλη* προς την *κάθετη* της παραβολής στο σημείο A.

Λύση: (Ασκ. 4/96)

Για την $y^2 = 4ax$ έχουμε

$$2y\,y' = 4a \;\Rightarrow\; y' = \frac{2a}{y}.$$

Στο $A(4a, -4a)$ η κλίση της *εφαπτομένης* είναι

$$m_A = y'(A) = \frac{2a}{-4a} = -\frac{1}{2},$$

άρα η κλίση της *κάθετης* (κανονικής) στο A είναι

$$m_{\perp A} = +\,2.$$

Ζητούμε σημείο $P(x_1, y_1)$ της παραβολής ώστε η *εφαπτομένη* στο P να είναι *παράλληλη* προς την κάθετη στο A, δηλ.

$$y'(P) = \frac{2a}{y_1} = m_{\perp A} = 2 \implies y_1 = a.$$

Επειδή το P ανήκει στην παραβολή, $y_1^2 = 4ax_1 \Rightarrow a^2 = 4ax_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{a}{4}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι

$$P\Big(\frac{a}{4},\, a\Big)$$

Η εφαπτομένη στο P με εξίσωση $(y - a) = 2\Big(x - \dfrac{a}{4}\Big)$ είναι παράλληλη στην κάθετη του A.

31. Έστω AB *εστιακή χορδή* και $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ οι *εφαπτόμενες* της παραβολής $y^2 = 4ax$ στα A, B, αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Αν οι (ε_1) και (ε_2) τέμνουν την εφαπτομένη στην *κορυφή* στα σημεία K και Λ, να αποδείξετε ότι το *εμβαδόν του τριγώνου* OAB είναι *διπλάσιο* από το εμβαδόν του τριγώνου $K\Lambda\Gamma$.

Λύση: (Ασκ. 5/96)

Θέτουμε τα σημεία A και B της παραβολής $y^2 = 4ax$ ως:

$$A(at_1^2,\, 2at_1), \qquad B(at_2^2,\, 2at_2).$$

Επειδή η AB είναι *εστιακή χορδή*, ισχύει

$$t_1 t_2 = -1. \tag{1}$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στα σημεία A, B είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1):&\ t_1 y = x + a t_1^2, \\ (\varepsilon_2):&\ t_2 y = x + a t_2^2. \end{aligned}$$

Το σημείο Γ τομής τους προκύπτει λύνοντας το σύστημα:

$$t_1 y - x - a t_1^2 = 0, \qquad t_2 y - x - a t_2^2 = 0.$$

Αφαιρούμε κατά μέλη:

$$(t_1 - t_2) y - a(t_1^2 - t_2^2) = 0 \implies y_\Gamma = a(t_1 + t_2).$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση:

$$x_\Gamma = t_1 y_\Gamma - a t_1^2 = a t_1 (t_1 + t_2) - a t_1^2 = a t_1 t_2.$$

Άρα:

$$\Gamma(a t_1 t_2,\ a(t_1 + t_2)). \tag{2}$$

Η *εφαπτομένη στην κορυφή* $O(0,0)$ είναι ο άξονας $x = 0$. Οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνουν την $x = 0$ στα σημεία K και Λ. Από $x = 0$:

$$t_1 y = a t_1^2 \ \Rightarrow\ y = a t_1, \quad \Rightarrow K(0,\, a t_1),$$

$$t_2 y = a t_2^2 \ \Rightarrow\ y = a t_2, \quad \Rightarrow \Lambda(0,\, a t_2).$$

Υπολογίζουμε τα εμβαδά:

Το τρίγωνο OAB έχει κορυφές $O(0,0)$, $A(a t_1^2, 2 a t_1)$, $B(a t_2^2, 2 a t_2)$, οπότε το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:

$$E_{OAB} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_O & y_O & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2}\, a^2 |t_1 t_2|\, |2(t_1 - t_2)|.$$

Από (1), $t_1 t_2 = -1$, άρα

$$E_{OAB} = a^2 |t_1 - t_2|. \tag{3}$$

Για το τρίγωνο $K\Lambda\Gamma$:

$$K(0, at_1), \quad \Lambda(0, at_2), \quad \Gamma(at_1t_2, a(t_1+t_2)).$$

Το εμβαδόν είναι:

$$E_{K\Lambda\Gamma} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_K & y_K & 1 \\ x_\Lambda & y_\Lambda & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|x_\Gamma| \cdot |y_\Lambda - y_K| = \frac{1}{2}|at_1t_2| \cdot a|t_2 - t_1| = \frac{1}{2}a^2|t_1 - t_2|. \tag{4}$$

Από (3) και (4):

$$E_{OAB} = 2\,E_{K\Lambda\Gamma}.$$

32. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ με κορυφή O. Έστω A, B σημεία της παραβολής έτσι ώστε οι χορδές OA και OB να είναι *κάθετες*. Να αποδείξετε ότι ο *γεωμετρικός τόπος* του σημείου τομής των εφαπτομένων στα A και B είναι η ευθεία $x = -4a$.

Λύση: (Ασκ. 6/96)

Παραμετροποιούμε την $y^2 = 4ax$ ως

$$A\big(at_1^2,\, 2at_1\big), \qquad B\big(at_2^2,\, 2at_2\big), \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Κλίση εφαπτομένης:</u> Για $y^2 = 4ax$ ισχύει $2y\,y' = 4a \Rightarrow y' = \dfrac{2a}{y}$. Στο σημείο $P(at^2, 2at)$ παίρνουμε

$$m_T(t) = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad y - 2at = \frac{1}{t}\big(x - at^2\big) \iff ty = x + at^2. \tag{1}$$

Άρα οι εφαπτόμενες στα A, B είναι

$$t_1y = x + at_1^2, \qquad t_2y = x + at_2^2.$$

Λύνοντας το σύστημα, το σημείο τομής Γ ικανοποιεί

$$(t_1 - t_2)y = a(t_1^2 - t_2^2) \;\Rightarrow\; y_\Gamma = a(t_1 + t_2),$$

και από (1) (π.χ. για t_1):

$$x_\Gamma = t_1y_\Gamma - at_1^2 = at_1(t_1 + t_2) - at_1^2 = at_1t_2. \tag{2}$$

Κάθετες OA και OB:

$$\text{κλίση } OA = \frac{2at_1}{at_1^2} = \frac{2}{t_1}, \qquad \text{κλίση } OB = \frac{2}{t_2}.$$

Κάθετες $\iff \dfrac{2}{t_1} \cdot \dfrac{2}{t_2} = -1 \ \Rightarrow\ t_1 t_2 = -4.$

$$t_1 t_2 = -4. \tag{3}$$

Από (2) και (3) προκύπτει

$$x_\Gamma = a\, t_1 t_2 = a(-4) = -4a,$$

δηλαδή το x-συντεταγμένο του Γ είναι *σταθερό* και ανεξάρτητο των t_1, t_2.

Συμπέρασμα: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των εφαπτομένων στα A, B είναι η κατακόρυφη ευθεία

$$x = -4a$$

33. Να βρείτε την *εξίσωση* της χορδής της παραβολής $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$, της οποίας το *μέσο* είναι το σημείο $A(x_1, y_1)$, σε συνάρτηση των x_1, y_1.

Λύση: (Ασκ. 7/97)

Θέτουμε τα άκρα της χορδής

$$P(at_1^2,\, 2at_1), \qquad Q(at_2^2,\, 2at_2).$$

Εφόσον το μέσο είναι $A(x_1, y_1)$,

$$x_1 = \frac{a(t_1^2 + t_2^2)}{2}, \qquad y_1 = \frac{2a(t_1 + t_2)}{2} = a(t_1 + t_2). \tag{1}$$

Από (1) παίρνουμε

$$t_1 + t_2 = \frac{y_1}{a}, \qquad t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = \frac{y_1^2}{a^2} - 2t_1 t_2,$$

και άρα

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(\frac{y_1^2}{a^2} - 2t_1 t_2\right) \implies t_1 t_2 = \frac{y_1^2}{2a^2} - \frac{x_1}{a}. \tag{2}$$

Η εξίσωση της ευθείας PQ γράφεται $y = mx + c$. Για κάθε σημείο της παραβολής $(x, y) = (at^2, 2at)$ που ανήκει στην ευθεία ισχύει

$$2at = m(at^2) + c \iff ma\,t^2 - 2a\,t + c = 0,$$

της οποίας ρίζες είναι t_1, t_2. Άρα Vieta,

$$t_1 + t_2 = \frac{2}{m}, \qquad t_1 t_2 = \frac{c}{ma}. \tag{3}$$

Από (1) και (3) παίρνουμε

$$m = \frac{2}{t_1 + t_2} = \frac{2}{y_1/a} = \frac{2a}{y_1},$$

και από (2),(3)

$$c = ma\, t_1 t_2 = \frac{2a}{y_1} \cdot a\left(\frac{y_1^2}{2a^2} - \frac{x_1}{a}\right) = y_1 - \frac{2ax_1}{y_1}.$$

Επομένως η ζητούμενη χορδή είναι

$$y = \frac{2a}{y_1} x + \left(y_1 - \frac{2ax_1}{y_1}\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας επί y_1:

$$y\, y_1 = 2a\, x + y_1^2 - 2a\, x_1 \iff y\, y_1 = 2a(x + x_1) + \big(y_1^2 - 4ax_1\big).$$

(Η σχέση ισχύει για κάθε $A(x_1, y_1)$; αν $y_1 = 0$, η χορδή είναι ο άξονας $y = 0$.)

34. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και τα σημεία της $P(\rho^2, 2\rho)$ και $T(t^2, 2t)$.

i. Να βρείτε τις *εξισώσεις των εφαπτομένων* στα P, T.

ii. Να βρείτε τις *συντεταγμένες* του σημείου τομής M των εφαπτομένων.

iii. Αν η χορδή PT διέρχεται από το σταθερό σημείο $A(2, 0)$, να δείξετε ότι $\rho t = -2$.

iv. Να βρείτε την *εξίσωση της καμπύλης* στην οποία ανήκει ο *γεωμετρικός τόπος* του M.

v. Να βρείτε την τιμή του $\rho > 0$ για την οποία το *εμβαδόν* του τριγώνου PMT είναι *ελάχιστο* και να υπολογίσετε το εμβαδόν αυτό.

Λύση: (Ασκ. 8/97)

Παράγωγος και τύπος σημείου–κλίσης. Από $y^2 = 4x$ παίρνουμε $2y\, y' = 4 \Rightarrow y' = \dfrac{2}{y}$. Στο σημείο $(s^2, 2s)$ η κλίση της εφαπτομένης είναι $m = \dfrac{2}{2s} = \dfrac{1}{s}$ και

$$y - 2s = \frac{1}{s}(x - s^2) \iff s\, y = x + s^2. \tag{$\star$}$$

i. Για τα σημεία $P(\rho^2, 2\rho)$ και $T(t^2, 2t)$, από $(\star)$:

$$(\varepsilon_P):\ \rho\, y = x + \rho^2, \qquad (\varepsilon_T):\ t\, y = x + t^2.$$

ii. Για το σημείο τομής M των εφαπτομένων λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \rho\, y = x + \rho^2 \\ t\, y = x + t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow\ (\rho - t)y = \rho^2 - t^2 = (\rho - t)(\rho + t) \Rightarrow y_M = \rho + t,$$

$$x_M = \rho\, y_M - \rho^2 = \rho(\rho + t) - \rho^2 = \rho t.$$
$$M(\rho t,\ \rho + t)$$

iii. Η χορδή PT περνά από το σταθερό σημείο $A(2, 0)$. Η κλίση της PT είναι

$$m_{PT} = \frac{2t - 2\rho}{t^2 - \rho^2} = \frac{2}{t + \rho}.$$

Για να ανήκει το A στην PT, πρέπει να ισχύει:

$$\frac{0 - 2\rho}{2 - \rho^2} = \frac{2}{t + \rho} \iff -2\rho(t + \rho) = 2(2 - \rho^2) \iff -\rho t - \rho^2 = 2 - \rho^2 \ \Rightarrow\ \rho t = -2$$

iv. Από (ii) και (iii): $x_M = \rho t = -2$, $y_M = \rho + t$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M έχει εξίσωση

$$x = -2$$

v. Από $\rho t = -2$ έχουμε $t = -\dfrac{2}{\rho}$ με $\rho > 0$. Τότε:

$$P(\rho^2, 2\rho), \quad T\left(\frac{4}{\rho^2}, -\frac{4}{\rho}\right), \quad M(-2,\ \rho - \tfrac{2}{\rho}).$$

Το εμβαδόν $E(\rho)$ του τριγώνου PMT (τύπος ορίζοντα):

$$E(\rho) = \frac{1}{2}\,|\,x_P(y_T - y_M) + x_T(y_M - y_P) + x_M(y_P - y_T)| = \frac{\rho^3}{2} + 3\rho + \frac{6}{\rho} + \frac{4}{\rho^3}.$$

Παράγωγος:

$$E'(\rho) = \frac{3}{2}\rho^2 + 3 - \frac{6}{\rho^2} - \frac{12}{\rho^4} = \frac{3(\rho^2 - 2)(\rho^2 + 2)^2}{2\rho^4}.$$

Για $\rho > 0$, ελάχιστο όταν $\rho = \sqrt{2}$.

$$\rho_{\min} = \sqrt{2}, \quad t_{\min} = -\sqrt{2}, \quad E_{\min} = 8\sqrt{2}$$

35. Να δείξετε ότι η *εφαπτομένη* της παραβολής $y^2 = 4x$ στο σημείο της $P(\rho^2, 2\rho)$ είναι η $\rho y = x + \rho^2$. Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των x στο σημείο A και O είναι η *κορυφή* της παραβολής, να δείξετε ότι ισχύει:

$$(PA)^2 - (PO)^2 = 3\rho^4.$$

Λύση: (Ασκ. 9/96)

Για την παραβολή $y^2 = 4x$ έχουμε $2y\,y' = 4 \Rightarrow y' = \dfrac{2}{y}$.

Στο σημείο $P(\rho^2, 2\rho)$ η κλίση της εφαπτομένης είναι

$$m_P = \frac{2}{2\rho} = \frac{1}{\rho}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης με τύπο σημείου–κλίσης είναι:

$$y - 2\rho = \frac{1}{\rho}(x - \rho^2) \iff \rho y = x + \rho^2.$$

Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των x (όπου $y = 0$):

$$0 = \frac{1}{\rho}(x - \rho^2) + 2\rho \iff x = \rho^2 - 2\rho^2 = -\rho^2.$$

Άρα:

$$A(-\rho^2, 0).$$

Η κορυφή είναι $O(0, 0)$ και $P(\rho^2, 2\rho)$.

Υπολογίζουμε:

$$PA^2 = (\rho^2 - (-\rho^2))^2 + (2\rho - 0)^2 = (2\rho^2)^2 + (2\rho)^2 = 4\rho^4 + 4\rho^2.$$

$$PO^2 = (\rho^2 - 0)^2 + (2\rho - 0)^2 = \rho^4 + 4\rho^2.$$

Άρα:

$$(PA)^2 - (PO)^2 = (4\rho^4 + 4\rho^2) - (\rho^4 + 4\rho^2) = 3\rho^4.$$

36. Έστω η παραβολή $y^2 = 4ax$ με $a > 0$ και μια *εστιακή χορδή* της PQ. Να δείξετε ότι:

i. οι *εφαπτόμενες* στα άκρα P, Q τέμνονται *υπό ορθή γωνία* πάνω στη *διευθετούσα* της παραβολής,

ii. ο *κύκλος* με *διάμετρο* την PQ *εφάπτεται* της διευθετούσας.

Λύση: (Ασκ. 10/97)

Θέτουμε
$$P\big(at_1^2,\,2at_1\big), \qquad Q\big(at_2^2,\,2at_2\big)$$
(παραμετρικά σημεία της $y^2 = 4ax$). Εφόσον η PQ είναι *εστιακή* χορδή,
$$t_1t_2 = -1. \tag{1}$$

Η παράγωγος της $y^2 = 4ax$ δίνει $2y\,y' = 4a \Rightarrow y' = \dfrac{2a}{y}$. Στο σημείο $(at^2, 2at)$ η κλίση της εφαπτομένης είναι $m = \dfrac{1}{t}$ και η εξίσωσή της (τύπος σημείου–κλίσης) ισοδυναμεί με
$$y - 2at = \frac{1}{t}\,(x - at^2) \iff t\,y = x + at^2. \tag{2}$$

i. *Κάθετες εφαπτόμενες που τέμνουν στη διευθετούσα.* Οι εφαπτόμενες στα P, Q από (2) είναι
$$t_1y = x + at_1^2, \qquad t_2y = x + at_2^2.$$

Τομή τους Γ: αφαιρούμε κατά μέλη
$$(t_1 - t_2)y = a(t_1^2 - t_2^2) \;\Rightarrow\; y_\Gamma = a(t_1 + t_2),$$
και π.χ. στην πρώτη
$$x_\Gamma = t_1y_\Gamma - at_1^2 = at_1t_2.$$

Με (1): $x_\Gamma = a(-1) = -a$. Άρα Γ ανήκει στη διευθετούσα $x = -a$. Επιπλέον οι κλίσεις είναι $m_P = \dfrac{1}{t_1}$, $m_Q = \dfrac{1}{t_2}$ οπότε
$$m_Pm_Q = \frac{1}{t_1t_2} = -1,$$

δηλαδή οι δύο εφαπτόμενες είναι *κάθετες*. Το (i) αποδείχθηκε.

ii. *Ο κύκλος με διάμετρο PQ εφάπτεται της διευθετούσας.* Κέντρο M του κύκλου: μέσο του PQ,

$$M\left(\frac{a(t_1^2+t_2^2)}{2},\ \frac{2a(t_1+t_2)}{2}\right)=\Big(\frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2),\ a(t_1+t_2)\Big).$$

Ακτίνα $r=\dfrac{PQ}{2}$. Από

$$\Delta x=a(t_1^2-t_2^2)=a(t_1-t_2)(t_1+t_2),\qquad \Delta y=2a(t_1-t_2),$$

παίρνουμε

$$r^2=\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{4}=\frac{a^2(t_1-t_2)^2\big[(t_1+t_2)^2+4\big]}{4}. \tag{3}$$

Από $t_1t_2=-1$ ισχύει

$$(t_1-t_2)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=(t_1+t_2)^2+4. \tag{4}$$

Με (4) η (3) δίνει

$$r^2=\frac{a^2}{4}\,(t_1-t_2)^4\quad\Rightarrow\quad r=\frac{a}{2}\,|t_1-t_2|^2. \tag{5}$$

Η απόσταση του κέντρου M από τη διευθετούσα $x=-a$ είναι

$$d(M,\ x=-a)=|x_M+a|=\left|\frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2)+a\right|=\frac{a}{2}\big((t_1+t_2)^2+4\big)=\frac{a}{2}\,|t_1-t_2|^2. \tag{6}$$

Από (5) και (6) προκύπτει $d(M,\ x=-a)=r$. Άρα η διευθετούσα είναι *εφαπτομένη* του κύκλου με διάμετρο PQ.

$$\text{Ο κύκλος με διάμετρο } PQ \text{ εφάπτεται της διευθετούσας } x=-a.$$

37. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$, μια *χορδή* της AB και η *εφαπτομένη* (ε) που είναι *παράλληλη* προς την AB. Να αποδείξετε ότι, αν M είναι το *μέσο* της AB και Γ το *σημείο επαφής* της (ε) με την παραβολή, τότε η $M\Gamma$ είναι *παράλληλη* προς τον άξονα της παραβολής (τον $x'x$).

Λύση: (Ασκ. 11/97)

Παραμετροποιούμε την $y^2 = 4ax$ ως

$$A\big(at_1^2,\, 2at_1\big), \qquad B\big(at_2^2,\, 2at_2\big) \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Τότε το *μέσο* της χορδής AB είναι

$$M\left(\frac{a(t_1^2+t_2^2)}{2},\ \frac{2a(t_1+t_2)}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2),\ a(t_1+t_2)\right). \tag{1}$$

<u>Κλίση χορδής AB.</u> Η κλίση της AB είναι

$$m_{AB} = \frac{2a(t_2-t_1)}{a(t_2^2-t_1^2)} = \frac{2}{t_1+t_2} \quad (t_1 \neq t_2). \tag{2}$$

<u>Κλίση εφαπτομένης.</u> Από $y^2 = 4ax$ προκύπτει $2y\,y' = 4a \Rightarrow y' = \dfrac{2a}{y}$. Στο σημείο $(a\tau^2, 2a\tau)$ η κλίση της εφαπτομένης είναι

$$m_{\text{εφαπτ}}(\tau) = \frac{2a}{2a\tau} = \frac{1}{\tau}. \tag{3}$$

Η (ε) είναι *παράλληλη* προς την AB $\Longrightarrow$ ίδιες κλίσεις. Από (2),(3): $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{2}{t_1+t_2} \Rightarrow \tau = \dfrac{t_1+t_2}{2}$. Άρα το σημείο επαφής είναι

$$\Gamma\big(a\tau^2,\, 2a\tau\big) = \left(a\Big(\frac{t_1+t_2}{2}\Big)^2,\ 2a\cdot\frac{t_1+t_2}{2}\right) = \left(\frac{a}{4}(t_1+t_2)^2,\ a(t_1+t_2)\right). \tag{4}$$

Από (1) και (4) παίρνουμε

$$y_M = a(t_1+t_2) = y_\Gamma.$$

Άρα η ευθεία $M\Gamma$ έχει *σταθερή τεταγμένη* και επομένως είναι *οριζόντια*, δηλαδή *παράλληλη* προς τον άξονα $x'x$.

$$M\Gamma \parallel x'x$$

38. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ και από σημείο $M(x_0, y_0)$ εκτός της παραβολής άγονται οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Αν M_1, M_2 είναι τα *σημεία επαφής* των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με την παραβολή, να αποδείξετε ότι η *χορδή επαφής* M_1M_2 έχει εξίσωση

$$y\,y_0 = 2a\,(x + x_0)$$

Λύση: (Ασκ. 12/97)

<u>Εξίσωση εφαπτομένης με παράγωγο και τύπο σημείου–κλίσης.</u>

Από $y^2 = 4ax \Rightarrow 2y\,y' = 4a$, άρα $y' = \dfrac{2a}{y}$.

Στο σημείο της παραβολής $P(at^2,\, 2at)$ η κλίση είναι $m = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$ και

$$y - 2at = \frac{1}{t}\,(x - at^2) \iff t\,y = x + at^2. \tag{1}$$

Οι δύο εφαπτόμενες από το $M(x_0, y_0)$ αντιστοιχούν σε δύο τιμές $t = t_1, t_2$ που ικανοποιούν

$$t\,y_0 = x_0 + at^2 \iff at^2 - y_0 t + x_0 = 0. \tag{2}$$

Θέτουμε

$$S = t_1 + t_2 = \frac{y_0}{a}, \qquad P = t_1 t_2 = \frac{x_0}{a}. \tag{3}$$

<u>Εξίσωση της M_1M_2.</u> Τα άκρα της είναι $M_1(at_1^2,\, 2at_1)$, $M_2(at_2^2,\, 2at_2)$.

Η κλίση της χορδής M_1M_2 (από τον τύπο δύο σημείων) είναι

$$m_{12} = \frac{2a(t_2 - t_1)}{a(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2} = \frac{2}{S}. \tag{4}$$

Με τύπο σημείου–κλίσης από το M_1:

$$y - 2at_1 = \frac{2}{S}\left(x - at_1^2\right) \iff S\,y = 2x - 2at_1^2 + 2at_1 S = 2x + 2a\,t_1 t_2.$$

Άρα

$$S\,y = 2x + 2aP.$$

Χρησιμοποιώντας το (3):

$$\frac{y_0}{a}\,y = 2x + 2a \cdot \frac{x_0}{a} \iff y\,y_0 = 2a(x + x_0).$$

39. Να εξηγήσετε γιατί ο *γεωμετρικός τόπος* των *κέντρων* των κύκλων που *εφάπτονται* σε ευθεία (δ) και *διέρχονται* από σταθερό σημείο E είναι *παραβολή* με *εστία* το E και *διευθετούσα* την (δ).

Λύση: (Ασκ. 1/98)

Έστω κύκλος που *εφάπτεται* στην (δ) και *διέρχεται* από το E. Θέτουμε C το κέντρο του και r την ακτίνα του. Η επαφή με την (δ) σημαίνει ότι η απόσταση του C από την (δ) είναι ίση με την ακτίνα:

$$d(C,\delta) = r.$$

Εφόσον το E ανήκει στον κύκλο, η απόσταση του C από το E είναι επίσης r:

$$CE = r.$$

Άρα για κάθε τέτοιο κέντρο C ισχύει

$$CE = d(C,\delta).$$

Αυτή ακριβώς είναι ο *ορισμός* της παραβολής με *εστία* το σημείο E και *διευθετούσα* την (δ): ο τόπος των σημείων που είναι *ισαπέχοντα* από ένα σταθερό σημείο (εστία) και μια σταθερή ευθεία (διευθετούσα).

Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων C όλων των ζητούμενων κύκλων είναι *παραβολή* με εστία E και διευθετούσα (δ).

$$\text{Λοκούς } C: \; CE = d(C,\delta) \iff \text{παραβολή με εστία } E \text{ και διευθετούσα } (\delta).$$

40. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$ με *εστία* το σημείο E. Το σημείο A της παραβολής είναι τέτοιο, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AH να είναι *κάθετο* στη *διευθετούσα* της παραβολής (H σημείο της διευθετούσας) και η $\widehat{AEH} = 30°$. Να υπολογίσετε το *εμβαδόν* και την *περίμετρο* του τριγώνου AEH.

Λύση: (Ασκ. 2/98)

Η παραβολή έχει τη μορφή $y^2 = 4ax$ με $4a = 8 \Rightarrow a = 2$.

Άρα:

$$E(2,0), \qquad (\delta): \; x = -2.$$

Θέτουμε $A(at^2, 2at) \Rightarrow A(2t^2, 4t)$.

Το σημείο H ανήκει στη διευθετούσα, άρα έχει συντεταγμένες $H(-2,\, y_H)$. Εφόσον το AH είναι *κάθετο στη διευθετούσα* (δηλαδή παράλληλο στον άξονα $x'x$), θα έχει σταθερή τεταγμένη $y_A = y_H = 4t$.

Άρα:

$$H(-2,\, 4t).$$

Αποστάσεις σημείων:

$$AE = \sqrt{(2t^2-2)^2+(4t-0)^2} = \sqrt{4(t^2-1)^2+16t^2} = 2\sqrt{(t^2-1)^2+4t^2} = 2\sqrt{t^4+2t^2+1} = 2(t^2+1).$$

$$EH = |x_E - x_H| = 2-(-2) = 4.$$

$$AH = |x_A - x_H| = 2t^2-(-2) = 2(t^2+1).$$

Δεδομένο: η $\widehat{AEH} = 30^\circ$. Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο AEH:

$$\cos 30^\circ = \frac{AE^2+EH^2-AH^2}{2(AE)(EH)}.$$

Αντικαθιστούμε:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(2(t^2+1))^2+4^2-(2(t^2+1))^2}{2\cdot 2(t^2+1)\cdot 4} = \frac{16}{16(t^2+1)} \Rightarrow \sqrt{3}(t^2+1) = 2 \Rightarrow t^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

Υπολογισμοί πλευρών:

$$AE = 2(t^2+1) = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad EH = 4, \qquad AH = 2(t^2+1) = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Εμβαδόν:

$$E_{\triangle AEH} = \frac{1}{2}(AE)(EH)\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Περίμετρος:

$$\Pi_{\triangle AEH} = AE+EH+AH = \frac{4}{\sqrt{3}}+4+\frac{4}{\sqrt{3}} = 4\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

41. Να βρείτε την *εξίσωση της καμπύλης* στην οποία ανήκει ο *γεωμετρικός τόπος* των *προβολών* της *εστίας* μιας παραβολής πάνω στις *εφαπτόμενές* της.

Λύση: (Ασκ. 3/98)

Έστω η παραβολή $y^2 = 4ax$ με

$$E(a, 0) \quad \text{(εστία)}.$$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $P(at^2, 2at)$ είναι

$$t\,y = x + at^2. \tag{1}$$

Θέλουμε την *προβολή* $M(x, y)$ του $E(a, 0)$ πάνω στην εφαπτομένη (1).

Απόσταση σημείου από ευθεία. Η (1) γράφεται σε κανονική μορφή:

$$x - t\,y + at^2 = 0. \tag{2}$$

Η κλίση της εφαπτομένης είναι $m = \frac{1}{t}$, άρα η κλίση της κάθετης (διεύθυνση της προβολής) είναι $-t$.

Η ευθεία κάθετη στην (1) που διέρχεται από $E(a, 0)$ έχει εξίσωση:

$$y = -t(x - a). \tag{3}$$

Το σημείο τομής της (3) με την (1) είναι η προβολή M. Από (1): $t\,y = x + at^2 \;\Rightarrow\; x = ty - at^2$. Αντικαθιστούμε στη (3):

$$y = -t(ty - at^2 - a) \;\Rightarrow\; y(1 + t^2) = at^3 + at \;\Rightarrow\; y = \frac{at(1 + t^2)}{1 + t^2} = at.$$

Άρα

$$y_M = at.$$

Αντικαθιστούμε στην (1):

$$t(at) = x + at^2 \;\Rightarrow\; x = at^2 - at^2 = 0.$$

Έτσι:

$$M(0,\ at).$$

Το σημείο M κινείται με $x = 0,\ y = at$. Εφόσον το t παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, ο τόπος των σημείων M είναι η *ευθεία*

$$x = 0$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των προβολών της εστίας πάνω στις εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 4ax$ είναι η *κάθετη διάμεσος* της παραβολής, δηλαδή ο άξονας συμμετρίας της.