Μαθηματικά Β' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Πολύγωνα και Μέτρηση Κύκλου

1. Σε εγγράψιμο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δίνεται $\angle A = 120°$ και $\angle B = 80°$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση: (Ασκ. 1/16)

Ιδιότητα εγγράψιμου τετραπλεύρου:

$$\angle A + \angle \Gamma = 180°, \quad \angle B + \angle \Delta = 180°$$

Δεδομένα:

$$\angle A = 120°, \quad \angle B = 80°$$

Υπολογισμός:

$$\angle \Gamma = 180° - \angle A = 180° - 120° = 60°$$
$$\angle \Delta = 180° - \angle B = 180° - 80° = 100°$$

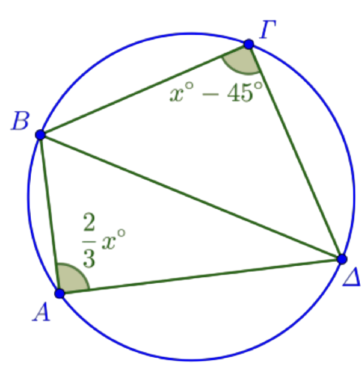
Επομένως, τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι:

$$\angle A = 120°, \quad \angle B = 80°, \quad \angle \Gamma = 60°, \quad \angle \Delta = 100°$$

2. Στο σχήμα δίνεται ότι $\angle BA\Delta = \frac{2}{3}x°$ και $\angle B\Gamma\Delta = x° - 45°$.

i. Να υπολογίσετε την τιμή του x.

ii. Αν η ακτίνα του κύκλου είναι $R = 2\,\text{cm}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση: (Ασκ. 2/16)

i. Σε κύκλο, οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο *ίδιο τόξο* είναι ίσες. Και οι δύο γωνίες $\angle BA\Delta$ και $\angle B\Gamma\Delta$ βαίνουν στο τόξο BD, άρα:

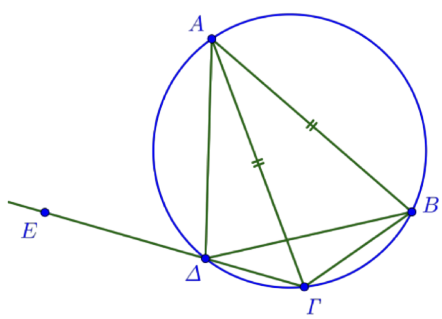
$$\tfrac{2}{3}x = x - 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{3}x = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad x = 135^\circ$$

Τότε $\angle BA\Delta = \frac{2}{3}x = 90^\circ$.

ii. Αφού $\angle BA\Delta = 90^\circ$, από το θεώρημα του Θαλή το $B\Delta$ είναι *διάμετρος* του κύκλου. Άρα το μήκος της χορδής/διαγωνίου είναι:

$$B\Delta = 2R = 2 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$$

3. Στο σχήμα δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma$ και E τυχαίο σημείο στην προέκταση της $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle B\Delta E$.



Λύση: (Ασκ. 3/16)

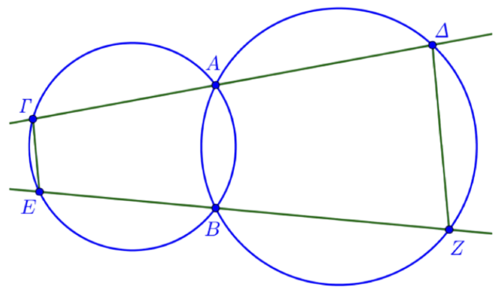
Σε κύκλο, *ίσες χορδές* υποτείνουν *ίσα τόξα* και αντιστρόφως. Από $AB = A\Gamma$ προκύπτει ότι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι ίσα. Άρα όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα αυτά είναι ίσες. Με κορυφή το Δ παίρνουμε:

$$\angle B\Delta A = \angle A\Delta\Gamma. \tag{1}$$

Η (1) δείχνει ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $\angle B\Delta\Gamma$. Επειδή το E είναι σημείο της προέκτασης της $\Gamma\Delta$, οι ημιευθείες $\Delta\Gamma$ και ΔE είναι συνευθειακές· άρα η γωνία $\angle B\Delta E$ είναι η γωνία που ορίζουν οι ευθείες ΔB και $\Delta\Gamma$ (εσωτερική ή εξωτερική). Συνεπώς, η $A\Delta$ διχοτομεί και τη $\angle B\Delta E$.

$$A\Delta \text{ είναι διχοτόμος της } \angle B\Delta E$$

4. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A, B και οι ευθείες $\Gamma A \Delta,\ EBZ$ είναι τέμνουσες των δύο κύκλων, όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma E \parallel \Delta Z$.



Λύση: (Ασκ. 4/16)

Αριστερός κύκλος.

Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο AE είναι ίσες. Με κορυφές Γ και B:

$$\angle A\Gamma E = \angle ABE. \tag{1}$$

Συνευθειακά E, B, Z.

Εφόσον E, B, Z είναι συνευθειακά (ίδια τέμνουσα EBZ):

$$\angle ABE = \angle ABZ. \tag{2}$$

Δεξιός κύκλο.

Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο AZ είναι ίσες. Με κορυφές Δ και B:

$$\angle ADZ = \angle ABZ. \tag{3}$$

Σύνδεση. Από (1), (2), (3) παίρνουμε

$$\angle A\Gamma E = \angle ADZ. \tag{4}$$

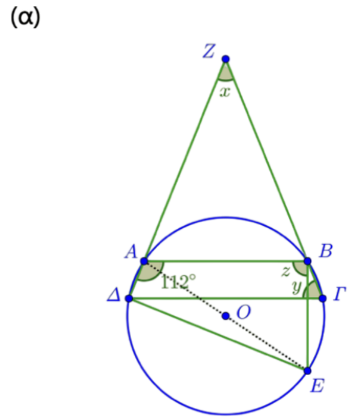
Επειδή τα σημεία Γ, A, Δ είναι συνευθειακά, οι γωνίες της (4) είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες ΓE και ΔZ με την κοινή διατέμνουσα $A\Gamma\Delta$:

$$\angle(\Gamma E, \Gamma A) = \angle(\Delta Z, \Delta A).$$

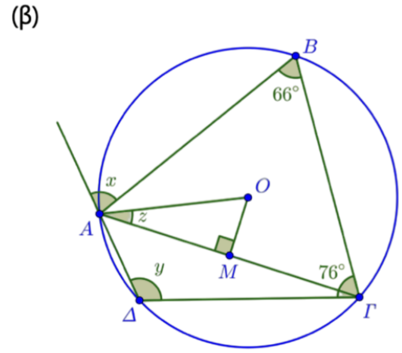
Άρα πρόκειται για *αντίστοιχες γωνίες* ως προς την ίδια διατέμνουσα, και συνεπώς

$$\Gamma E \parallel \Delta Z$$

5. Να υπολογίσετε το μέτρο των άγνωστων γωνιών στα σχήματα (α)–(β).



$AB \parallel \Delta\Gamma,\ y = \angle B\Gamma\Delta,\ \angle BA\Delta = 112°$



Λύση: (Ασκ. 5/16)

(α)

- Η $\angle BA\Delta = 112°$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $B\Gamma$. Άρα το τόξο $B\Gamma$ έχει μέτρο
$$\overset{\frown}{B\Gamma} = 2 \cdot 112° = 224°.$$
Το υπόλοιπο (μικρό) τόξο $B\Gamma$ έχει μέτρο
$$360° - 224° = 136°.$$

- Η γωνία $y = \angle B\Gamma\Delta$ βαίνει σε αυτό το μικρό τόξο $B\Gamma$. Επομένως
$$y = \tfrac{1}{2} \cdot 136° = 68°.$$

- Εφόσον $AB \parallel \Delta\Gamma$, οι γωνίες $\angle B\Gamma\Delta$ και $\angle AB\Gamma = z$ είναι εντός–εναλλάξ. Άρα
$$z = y = 68°.$$
Αλλά από τη γεωμετρία του σχήματος (διάμετρος κάθετη στη χορδή) προκύπτει ότι
$$z = 90°.$$

- Στο τρίγωνο ZAB με βάση AB και πλευρές ZA, ZB, η εξωτερική γωνία στο Z δίνεται από τον τύπο για γωνία δύο τεμνουσών:
$$x = \tfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BD}\right) = 44°.$$

$$x = 44°,\ y = 68°,\ z = 90°$$

(β)

- Δίνεται $\angle AB\Gamma = 66^\circ$. Είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $A\Delta$. Άρα

$$\widehat{A\Delta} = 2 \cdot 66^\circ = 132^\circ.$$

- Επίσης $\angle B\Gamma\Delta = 76^\circ$. Είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο BA. Άρα

$$\widehat{BA} = 2 \cdot 76^\circ = 152^\circ.$$

- Η γωνία $y = \angle A\Delta\Gamma$ βαίνει στο τόξο $A\Gamma$ που δεν περιέχει το Δ. Επομένως

$$y = \tfrac{1}{2}\big(360^\circ - 132^\circ\big) = 114^\circ.$$

- Σύμφωνα με το θεώρημα εφαπτομένης–χορδής, η γωνία x ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στην ίδια χορδή AB. Άρα

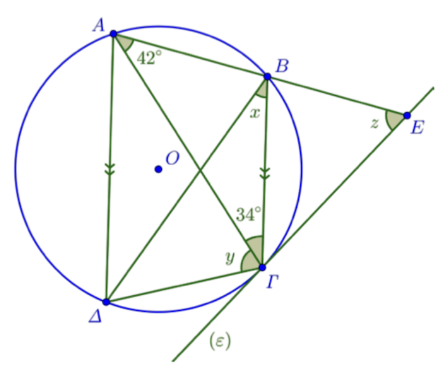
$$x = \angle A\Gamma B = 76^\circ.$$

- Τέλος, η εφαπτομένη στο A είναι κάθετη στην ακτίνα AO. Άρα

$$z = 90^\circ - x = 90^\circ - 76^\circ = 24^\circ.$$

$$x = 76^\circ,\ y = 114^\circ,\ z = 24^\circ$$

6. Να υπολογίσετε το μέτρο των άγνωστων γωνιών στο πιο κάτω σχήμα.



ΒΓ **∥** ***ΑΔ*****, (*ε*) εφαπτομένη του κύκλου**

Λύση: (Ασκ. 5γ/16)

- Δίνεται ότι $\angle A = 42°$. Επειδή $B\Gamma \parallel A\Delta$, η γωνία στο B (δηλαδή x) είναι ίση με την αντίστοιχη εναλλάξ–εντός γωνία στο τρίγωνο. Άρα

$$x = 34°$$

- Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο, ισχύει ότι οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Έτσι,

$$\angle A + \angle \Gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad 42° + y = 180° \quad \Rightarrow \quad y = 70°.$$

- Από το θεώρημα της εφαπτομένης–χορδής: η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην εφαπτομένη στο Γ και τη χορδή ΓB ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στην ίδια χορδή ΓB, δηλαδή με την $\angle \Gamma AB = 62°$. Άρα

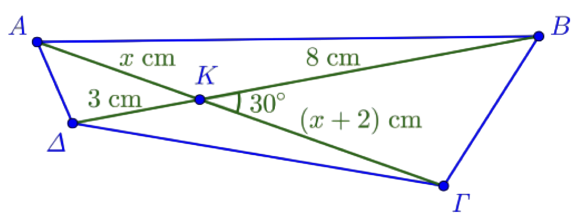
$$z = 62°$$

$$x = 34°, \quad y = 70°, \quad z = 62°$$

7. Στο σχήμα δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AK = x\,\text{cm}$, $K\Gamma = (x+2)\,\text{cm}$, $\Delta K = 3\,\text{cm}$, $KB = 8\,\text{cm}$. Το σημείο K είναι τομή των διαγωνίων $A\Gamma$ και ΔB.

i. Να υπολογίσετε την τιμή του x, ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

ii. Αν $\angle BK\Gamma = 30°$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση: (Ασκ. 6/16)

i. Κριτήριο εγγραψιμότητας μέσω τομής διαγωνίων (Θεώρημα τεμνομένων χορδών).

Σε εγγράψιμο τετράπλευρο, αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και ΔB τέμνονται στο K, τότε

$$AK \cdot K\Gamma = \Delta K \cdot KB.$$

Εδώ:

$$x(x+2) = 3 \cdot 8 = 24 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x - 24 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} \in \{4, -6\}.$$

Μήκος $x > 0 \Rightarrow x = 4\,\mathrm{cm}$

ii. Με $x = 4$ βρίσκουμε τα μήκη των διαγωνίων:

$$A\Gamma = AK + K\Gamma = 4 + 6 = 10\,\mathrm{cm}, \qquad \Delta B = \Delta K + KB = 3 + 8 = 11\,\mathrm{cm}.$$

Η γωνία των διαγωνίων στο K είναι $\theta = \angle BK\Gamma = 30^\circ$.

Εμβαδόν τετραπλεύρου μέσω διαγωνίων:

$$E = \frac{1}{2}\,(A\Gamma)\,(\Delta B)\,\sin\theta.$$

Απόδειξη τύπου (σύντομα):

$$E = \sum_{4\ \text{τρίγ.}} \frac{1}{2}\,(\text{γινόμενο πλευρών πάνω στις διαγωνίους})\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sin\theta\,(AK + K\Gamma)(\Delta K + KB) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(\Delta B)\sin\theta.$$

Επομένως,

$$E = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot \frac{1}{2} = \frac{55}{2}\,\mathrm{cm}^2 = 27{,}5\,\mathrm{cm}^2$$

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω Δ, E, Z τα ίχνη των υψών του τριγώνου από τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση: (Ασκ. 7/16)

Επειδή τα Δ, E, Z είναι ίχνη υψών:

$$BE \perp A\Gamma \quad \text{και} \quad Z\Gamma \perp AB.$$

Όμως $E \in A\Gamma$ και $Z \in AB$. Άρα οι γωνίες με κορυφές στα E και Z είναι ορθές:

$$\angle BE\Gamma = 90^\circ, \qquad \angle BZ\Gamma = 90^\circ.$$

Δηλαδή, τα σημεία E και Z «βλέπουν» το τμήμα $B\Gamma$ υπό ορθή γωνία.

Με το *Θεώρημα του Θαλή*, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που βλέπουν ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα υπό ορθή γωνία είναι ο κύκλος με διάμετρο τα άκρα του τμήματος. Επομένως τα E και Z ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο $B\Gamma$.

Τα άκρα B και Γ της διαμέτρου επίσης ανήκουν στον ίδιο κύκλο, άρα τα τέσσερα σημεία E, Z, B, Γ είναι ομοκυκλικά.

$$EZB\Gamma \text{ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο.}$$

9. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ εγγράψιμο στον κύκλο (K, ρ). Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο $B\Gamma$ εφάπτεται σε μία διάμετρο του κύκλου (K, ρ).

Λύση: (Ασκ. 1/22)

Επειδή το τραπέζιο είναι εγγράψιμο και $AB \parallel \Gamma\Delta$, είναι ισοσκελές:

$$\angle A = \angle B \quad \text{και} \quad \angle\Gamma = \angle\Delta, \qquad A\Delta = B\Gamma.$$

Σε εγγράψιμο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.

Θέτουμε $O = A\Gamma \cap B\Delta$. Τότε

$$AO \perp BO.$$

Το σημείο O ανήκει στον κύκλο με διάμετρο $B\Gamma$.

Πράγματι, στο τρίγωνο $BO\Gamma$ έχουμε

$$\angle BO\Gamma = 90^\circ,$$

άρα το O κείται στον κύκλο με διάμετρο $B\Gamma$ (Θεώρημα Θαλή).

Η διάμετρος του κύκλου (K, ρ) που περνά από το σημείο O εφάπτεται στον κύκλο με διάμετρο $B\Gamma$. Διότι η διάμετρος αυτή περνά από το κέντρο K και το σημείο O του μικρού κύκλου, άρα είναι κάθετη στην ακτίνα του μικρού κύκλου στο O. Επομένως είναι εφαπτομένη.

Ο κύκλος με διάμετρο $B\Gamma$ εφάπτεται σε μία διάμετρο του κύκλου (K, ρ).

10. Αν ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ), να αποδείξετε ότι

$$\angle AKB + \angle \Gamma K\Delta = 180^\circ.$$

Λύση: (Ασκ. 2/22)

Επειδή το τετράπλευρο είναι *περιγεγραμμένο* σε κύκλο με κέντρο K, το K είναι τομή των εσωτερικών διχοτόμων των γωνιών του τετραπλεύρου (ίση απόσταση από όλες τις πλευρές).

Θέτουμε $P = (A\Delta) \cap (B\Gamma)$ και θεωρούμε το τρίγωνο ABP. Το K απέχει ίσα από τις ευθείες AB, $B\Gamma$, $A\Delta$, άρα είναι *έγκεντρο* του τριγώνου ABP. Στο τρίγωνο, η γωνία στο έγκεντρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των δύο γωνιών A, B είναι

$$\angle AKB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle APB.$$

Όμως $\angle APB = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$. Επομένως

$$\angle AKB = 90^\circ + \frac{1}{2}\big(180^\circ - \angle A - \angle B\big) = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2}. \tag{1}$$

Ανάλογα, θέτουμε $Q = (AB) \cap (\Gamma\Delta)$ και εξετάζουμε το τρίγωνο $\Gamma\Delta Q$. Το K είναι έγκεντρο και γι' αυτό

$$\angle \Gamma K\Delta = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle \Gamma Q\Delta = 90^\circ + \frac{1}{2}\big(180^\circ - \angle\Gamma - \angle\Delta\big) = 180^\circ - \frac{\angle\Gamma + \angle\Delta}{2}. \tag{2}$$

Αθροίζοντας τις (1) και (2) και χρησιμοποιώντας ότι στο τετράπλευρο $\angle A + \angle B + \angle\Gamma + \angle\Delta = 360^\circ$, παίρνουμε

$$\angle AKB + \angle\Gamma K\Delta = 360^\circ - \frac{\angle A + \angle B + \angle\Gamma + \angle\Delta}{2} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

11. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta,\ AB < \Gamma\Delta$) και AH το ύψος του ($H \in \Gamma\Delta$). Αν ισχύει $AH^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Λύση: (Ασκ. 3/22)

Θέτουμε

$AB = a, \qquad \Gamma\Delta = b, \qquad AH = h, \qquad B\Gamma = A\Delta = \ell$ (ίσες πλευρές ισοσκελούς τραπεζίου).

Στο ισοσκελές τραπέζιο τα «πλαϊνά» ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα και καθένα έχει κάθετη h και οριζόντια προβολή $\frac{b-a}{2}$. Άρα για την πλευρά ℓ ισχύει

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Από τη δοθείσα σχέση $h^2 = ab$ και την (1) παίρνουμε

$$4\ell^2 = 4h^2 + (b-a)^2 = 4ab + (b-a)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2.$$

Επειδή $a, b, \ell > 0$, συνεπάγεται

$$a + b = 2\ell \tag{2}$$

Για να είναι ένα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο (να έχει εγγεγραμμένο κύκλο), αρκεί και είναι αναγκαίο να ισχύει (άθροισμα απέναντι πλευρών). Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η συνθήκη του Pitot γράφεται

$$AB + \Gamma\Delta = B\Gamma + A\Delta \iff a + b = 2\ell,$$

η οποία ισχύει από την (2).

Άρα το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

12. Να βρείτε την *κεντρική γωνία* και την *εσωτερική γωνία* (γωνία πολύγωνου) ενός κανονικού πενταγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.

Λύση: (Ασκ. 1/33)

Για κανονικό ν-γωνο ισχύει

$$\kappa_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}, \qquad \varphi_\nu = 180^\circ - \kappa_\nu.$$

- Κανονικό πεντάγωνο ($\nu = 5$):

$$\kappa_5 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ, \qquad \varphi_5 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

- Κανονικό δεκάγωνο ($\nu = 10$):

$$\kappa_{10} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ, \qquad \varphi_{10} = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

- Κανονικό δωδεκάγωνο ($\nu = 12$):

$$\kappa_{12} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ, \qquad \varphi_{12} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

13. Ποιου κανονικού πολυγώνου η κεντρική γωνία είναι ίση με:

i. 60°

ii. 72°

Λύση: (Ασκ. 2/33)

Για κανονικό ν-γωνο: $\kappa_\nu = \dfrac{360^\circ}{\nu}$.

i.

$$\kappa_\nu = 60^\circ \;\Rightarrow\; \frac{360^\circ}{\nu} = 60^\circ \;\Rightarrow\; \nu = 6 \;\Rightarrow\; \text{κανονικό εξάγωνο}$$

ii.

$$\kappa_\nu = 72^\circ \;\Rightarrow\; \frac{360^\circ}{\nu} = 72^\circ \;\Rightarrow\; \nu = 5 \;\Rightarrow\; \text{κανονικό πεντάγωνο}$$

14. Ποιου κανονικού πολυγώνου η *εσωτερική γωνία* είναι ίση με:

i. $144°$

ii. $135°$

Λύση: (Ασκ. 3/33)

Για κανονικό ν-γωνο: $\varphi_\nu = 180° - \dfrac{360°}{\nu}$.

i.

$$\varphi_\nu = 144° \;\Rightarrow\; 180° - \frac{360°}{\nu} = 144° \;\Rightarrow\; \frac{360°}{\nu} = 36° \;\Rightarrow\; \nu = 10 \;\Rightarrow\; \text{κανονικό δεκάγωνο}$$

ii.

$$\varphi_\nu = 135° \;\Rightarrow\; 180° - \frac{360°}{\nu} = 135° \;\Rightarrow\; \frac{360°}{\nu} = 45° \;\Rightarrow\; \nu = 8 \;\Rightarrow\; \text{κανονικό οκτάγωνο}$$

15. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με:

i. $\varphi_\nu = 144°$

ii. $\varphi_\nu = 110°$

iii. $\kappa_\nu = 25°$

iv. $\kappa_\nu = 36°$

Λύση: (Ασκ. 4/33)

Για κανονικό ν-γωνο ισχύει:

$$\kappa_\nu = \frac{360°}{\nu}, \qquad \varphi_\nu = 180° - \kappa_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}.$$

Υπάρχει τέτοιο κανονικό πολύγωνο $\iff$ $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu \geq 3$.

i. $\varphi_\nu = 144° \Rightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} = 144° \Rightarrow \frac{360°}{\nu} = 36° \Rightarrow \nu = \frac{360}{36} = 10.$

Υπάρχει: κανονικό δεκάγωνο

ii. $\varphi_\nu = 110° \Rightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} = 110° \Rightarrow \frac{360°}{\nu} = 70° \Rightarrow \nu = \frac{360}{70} = \frac{36}{7} \notin \mathbb{N}$.

Δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με αυτή την εσωτερική γωνία.

iii. $\kappa_\nu = 25° \Rightarrow \nu = \frac{360}{25} = 14.4 \notin \mathbb{N}$.

Δεν υπάρχει.

iv. $\kappa_\nu = 36° \Rightarrow \nu = \frac{360}{36} = 10$.

Υπάρχει: κανονικό δεκάγωνο.

16. Ο λόγος των εμβαδών δύο κανονικών *εξαγώνων* είναι 4. Να βρείτε τον λόγο των *ακτίνων* τους, των *πλευρών* τους, των *αποστημάτων* τους και των *περιμέτρων* τους.

Λύση: (Ασκ. 5/33)

Για κανονικό εξάγωνο ισχύει $E_6 = c\,R^2$ με σταθερά $c = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (άρα $E \propto R^2$).

Αν $\dfrac{E_1}{E_2} = 4$, τότε

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = 4 \ \Rightarrow\ \frac{R_1}{R_2} = 2.$$

Επίσης για εξάγωνο: $\lambda_6 = R$, $a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$, $\Pi_6 = 6\lambda_6 = 6R$.

Όλα τα *γραμμικά* μεγέθη είναι ανάλογα του R, άρα έχουν τον ίδιο λόγο με τις ακτίνες.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = 2$$

(Γενικότερα: για δύο όμοια κανονικά n-γωνα, $\dfrac{E_1}{E_2} = \left(\dfrac{\text{γραμμικό}}{\text{γραμμικό}}\right)^2$.)

17. Αν το $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι κανονικό εξάγωνο, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

Λύση: (Ασκ. 6/33)

Το κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) και έχει *κεντρική γωνία*

$$\kappa_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Άρα το *μικρό τόξο* ανάμεσα σε δύο μη γειτονικά (με έναν ενδιάμεσο) διαδοχικά σημεία του εξαγώνου είναι

$$2\kappa_6 = 120^\circ.$$

Ειδικότερα,

$$\widehat{\Gamma E} = \widehat{AE} = \widehat{A\Gamma} = 120^\circ.$$

Με το θεώρημα εγγεγραμμένης γωνίας:

$$\angle \Gamma AE = \tfrac{1}{2}\,\widehat{\Gamma E} = 60^\circ, \qquad \angle A\Gamma E = \tfrac{1}{2}\,\widehat{AE} = 60^\circ, \qquad \angle AE\Gamma = \tfrac{1}{2}\,\widehat{A\Gamma} = 60^\circ.$$

Επομένως το τρίγωνο $A\Gamma E$ έχει όλες τις γωνίες ίσες με 60° και είναι ισόπλευρο.

Ισοδύναμα: οι χορδές που αντιστοιχούν σε τόξα 120ο έχουν ίσα μήκη, άρα $A\Gamma = \Gamma E = EA$.

18. Σε κανονικό δεκάγωνο $AB\Gamma\Delta EZH\Theta IK$ με κέντρο O, προεκτείνουμε την πλευρά AB η οποία τέμνει την προέκταση της ακτίνας $O\Gamma$ στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι $AM = A\Delta$.

Λύση: (Ασκ. 7/33)

Η κεντρική γωνία του κανονικού δεκαγώνου είναι

$$\kappa_{10} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ.$$

Άρα

$$\angle AOB = 36^\circ, \qquad \angle AO\Gamma = 72^\circ.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο AOB έχουμε

$$\angle OAB = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Επειδή το AM είναι προέκταση του AB, προκύπτει

$$\angle MAO = 72^\circ \quad \text{και} \quad \angle AOM = \angle AO\Gamma = 72^\circ.$$

Επομένως στο τρίγωνο AOM:

$$\angle A = \angle O = 72^\circ, \quad \angle M = 36^\circ.$$

Με τον *νόμο των ημιτόνων* στο $\triangle AOM$ και $AO = R$:

$$\frac{AM}{\sin 72^\circ} = \frac{AO}{\sin 36^\circ} \Rightarrow AM = R\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = R\,\frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2R\cos 36^\circ$$

Από τον κύκλο (O, R), το μήκος της χορδής $A\Delta$ (η οποία υποτείνει κεντρική γωνία $\angle AO\Delta = 3\kappa_{10} = 108^\circ$) είναι

$$A\Delta = 2R\sin\frac{108^\circ}{2} = 2R\sin 54^\circ = 2R\cos 36^\circ.$$

Άρα

$$AM = A\Delta$$

19. Αν E_a, E_β, E_γ είναι τα εμβαδά των κανονικών ν-γώνων που έχουν πλευρές ίσεις με τις πλευρές a, β, γ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\angle A = 90^\circ$ (έστω $a = |B\Gamma|$ η υποτείνουσα, $\beta = |A\Gamma|$, $\gamma = |AB|$), να αποδείξετε ότι

$$E_a = E_\beta + E_\gamma.$$

Λύση: (Ασκ. 8/33)

Για κανονικό ν-γωνο με πλευρά μήκους λ ισχύει

$$E(\lambda) = \frac{1}{2}\,P_\nu\,a_\nu = \frac{1}{2}\,(\nu\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\cot\frac{\pi}{\nu}\right) = \underbrace{\left(\frac{\nu}{4}\cot\frac{\pi}{\nu}\right)}_{=:c_\nu}\lambda^2.$$

Δηλαδή το εμβαδόν είναι ανάλογο του τετραγώνου της πλευράς: $E(\lambda) = c_\nu\,\lambda^2$, όπου το c_ν εξαρτάται μόνο από το ν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) ισχύει Πυθαγόρας:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας με c_ν παίρνουμε

$$c_\nu a^2 = c_\nu \beta^2 + c_\nu \gamma^2 \iff E_a = E_\beta + E_\gamma.$$

$$E_a = E_\beta + E_\gamma$$

Παρατήρηση. Πρόκειται για τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος: πάνω στις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, τα εμβαδά *ομοίων* (εδώ: κανονικών ν-γώνων) σχέτιζονται όπως τα τετράγωνα των πλευρών.

20. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O, R = 4\,\mathrm{cm})$. Να υπολογίσετε τα λ_3, a_3, E_3, Π_3.

Λύση: (Ασκ. 1/37)

Για κανονικό n-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R:

$$\lambda_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}, \qquad a_n = R\cos\frac{\pi}{n}, \qquad \Pi_n = n\lambda_n, \qquad E_n = \frac{1}{2}\,\Pi_n a_n.$$

Για ισόπλευρο τρίγωνο ($n = 3$):

$$\lambda_3 = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}, \qquad a_3 = R\cos 60^\circ = \frac{R}{2},$$

$$\Pi_3 = 3\lambda_3 = 3R\sqrt{3}, \qquad E_3 = \frac{1}{2}\,\Pi_3 a_3 = \frac{1}{2}\,(3R\sqrt{3})\,\frac{R}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Με $R = 4\,\mathrm{cm}$:

$$\lambda_3 = 4\sqrt{3}\ \mathrm{cm}, \qquad a_3 = 2\ \mathrm{cm}, \qquad \Pi_3 = 12\sqrt{3}\ \mathrm{cm}, \qquad E_3 = 12\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$$

21. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R), με $\lambda_4 = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε τα a_4, E_4, Π_4.

Λύση: (Ασκ. 2/37)

Για τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R ισχύουν (βλ. τύπους):

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}, \qquad a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad E_4 = 2R^2, \qquad \Pi_4 = 4\lambda_4 = 4R\sqrt{2}.$$

Από $\lambda_4 = 3\sqrt{2}$ βρίσκουμε $R = \dfrac{\lambda_4}{\sqrt{2}} = 3\,\text{cm}$. Τότε

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}, \qquad E_4 = 2R^2 = 2\cdot 3^2 = 18\ \text{cm}^2, \qquad \Pi_4 = 4\lambda_4 = 4\cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

$$a_4 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}, \quad E_4 = 18\ \text{cm}^2, \quad \Pi_4 = 12\sqrt{2}\ \text{cm}$$

22. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με $a_6 = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε τα $\lambda_6,\ E_6,\ \Pi_6$.

Λύση: (Ασκ. 3/37)

Για κανονικό εξάγωνο ισχύουν

$$\lambda_6 = R, \qquad a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}R, \qquad \Pi_6 = 6\lambda_6, \qquad E_6 = \frac{1}{2}\Pi_6 a_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2.$$

Από $a_6 = 5\sqrt{3}$ παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = 5\sqrt{3} \ \Rightarrow\ R = 10\,\text{cm}.$$

Άρα

$$\lambda_6 = R = 10\ \text{cm}, \qquad \Pi_6 = 6\lambda_6 = 60\ \text{cm}, \qquad E_6 = \tfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2 = \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 100 = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

23. Ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο (O, R). Αν τα εμβαδά τους διαφέρουν κατά $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου και το εμβαδόν E_3 του ισόπλευρου τριγώνου.

Λύση: (Ασκ. 4/37)

Για ισόπλευρο τρίγωνο: $E_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Για κανονικό εξάγωνο: $E_6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. Άρα $E_6 = 2E_3$ και η διαφορά τους είναι

$$E_6 - E_3 = E_3.$$

Δίνεται $E_6 - E_3 = 12\sqrt{3} \Rightarrow E_3 = 12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Τότε

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 12\sqrt{3} \ \Rightarrow\ \frac{3}{4}R^2 = 12 \ \Rightarrow\ R^2 = 16 \ \Rightarrow\ R = 4\ \text{cm}$$

Και

$$E_3 = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

(Έλεγχος: $E_6 = 2E_3 = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.)

24. Αν $AB = \lambda_4,\ B\Gamma = \lambda_6,\ \Gamma\Delta = \lambda_4$ είναι τρεις διαδοχικές χορδές ενός κύκλου (O, R), να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, την *περίμετρο* και το *εμβαδόν* του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση: (Ασκ. 5/37)

Γνωστά για χορδές κανονικών πολυγώνων σε κύκλο ακτίνας R:

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \quad (\text{κεντρική } 90^\circ), \qquad \lambda_6 = R \quad (\text{κεντρική } 60^\circ).$$

Επομένως οι αντίστοιχες κεντρικές γωνίες των διαδοχικών τόξων είναι

$$\widehat{AB} = 90^\circ, \quad \widehat{B\Gamma} = 60^\circ, \quad \widehat{\Gamma\Delta} = 90^\circ.$$

Το υπόλοιπο τόξο είναι

$$\widehat{\Delta A} = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 120^\circ \ \Rightarrow\ \Delta A = 2R\sin\frac{120^\circ}{2} = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}.$$

Περίμετρος:

$$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_4 + R\sqrt{3} = 2R\sqrt{2} + R + R\sqrt{3}.$$

$$\Pi = R\big(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}\big)$$

Εμβαδόν: Διαμερίζουμε με ακτίνες $OA, OB, O\Gamma, O\Delta$. Το εμβαδόν είναι άθροισμα τεσσάρων ισοσκελών τριγώνων:

$$E = \tfrac{1}{2}R^2\big(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ + \sin 90^\circ + \sin 120^\circ\big) = \tfrac{1}{2}R^2\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{1}{2}R^2(2 + \sqrt{3}).$$

$$E = R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\,R^2$$

25. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB}=60^\circ$, $\widehat{B\Gamma}=90^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta}=120^\circ$. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, την *περίμετρο* και το *εμβαδόν* του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση: (Ασκ. 6/37)

Η τέταρτη κεντρική γωνία είναι $\widehat{\Delta A}=360^\circ-(60^\circ+90^\circ+120^\circ)=90^\circ$. Οι πλευρές είναι χορδές με μήκη

$$AB=2R\sin 30^\circ=R,\quad B\Gamma=2R\sin 45^\circ=R\sqrt{2},$$
$$\Gamma\Delta=2R\sin 60^\circ=R\sqrt{3},\quad \Delta A=2R\sin 45^\circ=R\sqrt{2}.$$

Περίμετρος:

$$\Pi=AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A=R\big(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\big).$$

Εμβαδόν: Διαμερίζουμε με τις ακτίνες $OA,OB,O\Gamma,O\Delta$.

$$E=\tfrac{1}{2}R^2\big(\sin 60^\circ+\sin 90^\circ+\sin 120^\circ+\sin 90^\circ\big)=\tfrac{1}{2}R^2\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1\Big)=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\,R^2.$$

Επομένως,

$$\Pi=R\,(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})\ ,\qquad E=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\,R^2$$

26. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε *παράλληλες* χορδές $AB=R$ και $\Gamma\Delta=R\sqrt{3}$, με το O *εντός* της ζώνης των παραλλήλων χορδών. Να βρεθούν (ως συναρτήσεις του R) τα μήκη των μη παραλλήλων πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$, το ύψος h και το εμβαδόν E του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση: (Ασκ. 7/37)

Αν d είναι η απόσταση του κέντρου από χορδή μήκους L, τότε

$$L=2\sqrt{R^2-d^2}\quad\Longleftrightarrow\quad d=\sqrt{R^2-\Big(\tfrac{L}{2}\Big)^2}.$$

Για $AB=R$: $\sqrt{R^2-d_1^2}=\frac{R}{2}\Rightarrow d_1=\frac{\sqrt{3}}{2}R.$

Για $\Gamma\Delta=R\sqrt{3}$: $\sqrt{R^2-d_2^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow d_2=\frac{1}{2}R.$

Επειδή το O είναι ανάμεσα στις χορδές, η απόστασή τους (ύψος του τραπεζίου) είναι

$$h = d_1 + d_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,R$$

Θέτουμε $x_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2} = \frac{R}{2}$, $x_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Με κατάλληλη διάταξη σημείων $(A,B) = (-x_1, x_1)$ στο ύψος d_1 και $(\Delta, \Gamma) = (-x_2, x_2)$ στο ύψος $-d_2$, οι μη παράλληλες πλευρές έχουν μήκος

$$A\Delta = B\Gamma = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (d_1 + d_2)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2}R\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}+1}{2}R\right)^2} = R\sqrt{2}$$

Το εμβαδόν τραπεζίου:

$$E = \frac{(AB + \Gamma\Delta)\,h}{2} = \frac{(R + R\sqrt{3})}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2}R = \Big(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)R^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\,R^2$$

27. Να υπολογίσετε το μέτρο ενός τόξου (σε μοίρες), το οποίο ανήκει σε κύκλο ακτίνας $R = 12\,\mathrm{cm}$ και έχει μήκος $\gamma = 3\pi\,\mathrm{cm}$.

Λύση: (Ασκ. 1/44)

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του μήκους τόξου:

$$\gamma = \frac{\mu^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R \quad \Rightarrow \quad \mu^\circ = \frac{\gamma}{2\pi R} \cdot 360^\circ.$$

Για $R = 12$ και $\gamma = 3\pi$ υπολογίζουμε:

$$\mu^\circ = \frac{3\pi}{2\pi \cdot 12} \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{24\pi} \cdot 360^\circ = \tfrac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ.$$

$$\mu^\circ = 45^\circ$$

28. Σε ευθεία παίρνουμε 3 διαδοχικά σημεία K, Λ, M. Συμβολίζουμε με $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ τα μήκη των κύκλων διαμέτρων $K\Lambda, \Lambda M, MK$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$$

Λύση: (Ασκ. 2/44)

Το μήκος ενός κύκλου με διάμετρο d είναι

$$\Gamma = \pi d.$$

Έχουμε:

$$\Gamma_1 = \pi K\Lambda, \quad \Gamma_2 = \pi \Lambda M, \quad \Gamma = \pi KM.$$

Επειδή τα σημεία K, Λ, M είναι διαδοχικά σε ευθεία, ισχύει:

$$KM = K\Lambda + \Lambda M.$$

Άρα:

$$\Gamma = \pi KM = \pi(K\Lambda + \Lambda M) = \pi K\Lambda + \pi\Lambda M = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

$$\Longrightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$$

29. Ο ένας τροχός ποδηλάτου έχει ακτίνα R και ο άλλος έχει ακτίνα $\rho < R$. Για μια απόσταση S που διανύει το ποδήλατο, ο μεγάλος τροχός κάνει ν στροφές και ο μικρός 2ν στροφές. Να δείξετε ότι $R = 2\rho$.

Λύση: (Ασκ. 3/44)

Χωρίς ολίσθηση, η απόσταση που διανύεται ισούται με «στροφές × μήκος κύκλου» για κάθε τροχό:

$$S = \nu \cdot 2\pi R \qquad \text{και} \qquad S = 2\nu \cdot 2\pi\rho.$$

Εξισώνοντας τα δύο εκφραστικά του S παίρνουμε

$$\nu \cdot 2\pi R = 2\nu \cdot 2\pi\rho \implies R = 2\rho,$$

αφού απλοποιούμε κατά $2\pi\nu \neq 0$.

$$\Longrightarrow R = 2\rho$$

30. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε τις διαδοχικές χορδές $AB = R\sqrt{2}$ και $B\Delta = R\sqrt{3}$. Να βρείτε, συναρτήσει του R, τα μήκη των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Delta}$, $\widehat{\Delta A}$.

Λύση: (Ασκ. 4/44)

Σχέση χορδής και επίκεντρης γωνίας.

Αν μία χορδή μήκους c αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία a (σε ακτίνια), τότε ισχύει:

$$c = 2R\,\sin\left(\frac{a}{2}\right).$$

Το μήκος του αντίστοιχου τόξου είναι

$$s = R \cdot a.$$

Χορδή $AB = R\sqrt{2}$.

Έχουμε:

$$R\sqrt{2} = 2R\sin\left(\frac{a_1}{2}\right).$$

Διαιρούμε με $2R$:

$$\sin\left(\frac{a_1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα

$$\frac{a_1}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Το μήκος του τόξου είναι

$$|\widehat{AB}| = R \cdot a_1 = R \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R}{2}.$$

Χορδή $B\Delta = R\sqrt{3}$.

Έχουμε:

$$R\sqrt{3} = 2R\sin\left(\frac{a_2}{2}\right).$$

Διαιρούμε με $2R$:

$$\sin\left(\frac{a_2}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα

$$\frac{a_2}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Το μήκος του τόξου είναι

$$|\widehat{B\Delta}| = R \cdot a_2 = R \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi R}{3}.$$

Τόξο $\widehat{\Delta A}$.

Το άθροισμα των τόξων ολόκληρου του κύκλου είναι

$$|\widehat{AB}| + |\widehat{B\Delta}| + |\widehat{\Delta A}| = 2\pi R.$$

Άρα

$$|\widehat{\Delta A}| = 2\pi R - \left(\frac{\pi R}{2} + \frac{2\pi R}{3}\right).$$

Υπολογίζουμε:

$$|\widehat{\Delta A}| = 2\pi R - \frac{7\pi R}{6} = \frac{12\pi R}{6} - \frac{7\pi R}{6} = \frac{5\pi R}{6}.$$

$$|\widehat{AB}| = \tfrac{\pi R}{2}, \quad |\widehat{B\Delta}| = \tfrac{2\pi R}{3}, \quad |\widehat{\Delta A}| = \tfrac{5\pi R}{6}$$

31. Με διάμετρο την ακτίνα OA κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (K). Από το O φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (O) στο E και τον κύκλο (K) στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\widehat{AE}$ και $\widehat{A\Delta}$ έχουν ίσα μήκη.

Λύση: (Ασκ. 5/44)

Το μήκος τόξου κύκλου με ακτίνα r που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία a (σε ακτίνια) είναι

$$s = r \cdot a.$$

Τόξο $\widehat{AE}$ στον κύκλο (O).

Θέτουμε $\angle AOE = \theta$. Ο κύκλος (O) έχει ακτίνα R, άρα το τόξο $\widehat{AE}$ έχει μήκος

$$|\widehat{AE}| = R \cdot \theta.$$

Σχέση του κύκλου (K) με το OA.

Ο κύκλος (K) έχει διάμετρο το τμήμα OA. Επομένως η ακτίνα του είναι

$$\frac{OA}{2} = \frac{R}{2}.$$

Επίσης, από το Θεώρημα του Θαλή, κάθε γωνία που βαίνει στη διάμετρο OA είναι ορθή. Άρα το τρίγωνο $O\Delta A$ είναι ορθογώνιο στο Δ.

Τόξο $\widehat{A\Delta}$ στον κύκλο (K)

Η ημιευθεία OE σχηματίζει με το OA τη γωνία θ. Το ίδιο κάνει και η ημιευθεία $O\Delta$, αφού είναι πάνω στην ίδια διεύθυνση με το OE. Άρα

$$\angle AOD = \angle AOE = \theta.$$

Το τόξο $\widehat{A\Delta}$ του κύκλου (K) έχει επίκεντρη γωνία $a = \theta$ και ακτίνα $\frac{R}{2}$. Επομένως:

$$|\widehat{A\Delta}| = \frac{R}{2} \cdot (2\theta) = R \cdot \theta.$$

Από τα παραπάνω:

$$|\widehat{AE}| = R\theta \quad \text{και} \quad |\widehat{A\Delta}| = R\theta.$$

Άρα

$$|\widehat{AE}| = |\widehat{A\Delta}|$$

32. Σε κύκλο (K, R) παίρνουμε τόξο $\widehat{AB} = 60^\circ$, το οποίο έχει μήκος $\gamma = 4\pi\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (K, R).

Λύση: (Ασκ. 1/49)

Για τόξο μέτρου μ° ισχύει

$$\gamma = \frac{\mu^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R.$$

Με $\mu^\circ = 60^\circ$ και $\gamma = 4\pi$ παίρνουμε

$$4\pi = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{1}{6} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{3} \;\Rightarrow\; R = 12\,\text{cm}.$$

Εμβαδόν κύκλου.

$$E = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi \ \text{cm}^2.$$

33. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου ενός κύκλου (O,ρ), που έχει μήκος Γ και διάμετρο δ, δίνεται από τους τύπους:

i. $E = \frac{\pi\delta^2}{4}$

ii. $E = \frac{\Gamma^2}{4\pi}$

Λύση: (Ασκ. 2/49)

Γνωστοί τύποι για κύκλο ακτίνας ρ:

$$E = \pi\rho^2, \qquad \Gamma = 2\pi\rho, \qquad \delta = 2\rho.$$

i. Σε συνάρτηση της διαμέτρου δ.

Από $\delta = 2\rho \Rightarrow \rho = \delta/2$. Άρα

$$E = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\pi\delta^2}{4}.$$

ii. Σε συνάρτηση του μήκους Γ.

Από $\Gamma = 2\pi\rho \Rightarrow \rho = \dfrac{\Gamma}{2\pi}$. Τότε

$$E = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 = \frac{\Gamma^2}{4\pi}.$$

Έλεγχος συνέπειας. Επειδή $\Gamma = \pi\delta$, οι δύο τύποι ταυτίζονται:

$$\frac{\Gamma^2}{4\pi} = \frac{(\pi\delta)^2}{4\pi} = \frac{\pi\delta^2}{4}.$$

$$E = \frac{\pi\delta^2}{4} = \frac{\Gamma^2}{4\pi}$$

34. Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$ ονομάζεται *κυκλικός δακτύλιος*. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν E του κυκλικού δακτυλίου είναι $E = \pi(R+\rho)(R-\rho)$.

ii. Ο κυκλικός δακτύλιος είναι ισοδύναμος με κυκλικό δίσκο διαμέτρου μιας χορδής του κύκλου (O, R) που εφάπτεται του κύκλου (O, ρ).

Λύση: (Ασκ. 3/49)

i. Εμβαδόν ως διαφορά δύο δίσκων.

Το εμβαδόν του εξωτερικού δίσκου είναι πR^2 και του εσωτερικού $\pi\rho^2$. Άρα το εμβαδόν του δακτυλίου

$$E = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\big(R^2 - \rho^2\big) = \pi(R+\rho)(R-\rho).$$

ii. Ισοδυναμία με δίσκο διαμέτρου εφαπτομένης χορδής.

Έστω χορδή του κύκλου (O, R) που είναι εφαπτόμενη στον εσωτερικό κύκλο (O, ρ). Τότε η απόστασή της από το O είναι ρ. Αν ℓ είναι το μήκος της χορδής, στο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα R και κάθετη απόσταση ρ ισχύει

$$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \rho^2 = R^2 \implies \ell = 2\sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Ο δίσκος με *διάμετρο* ℓ έχει *ακτίνα*

$$r = \frac{\ell}{2} = \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

και εμβαδόν

$$E' = \pi r^2 = \pi\big(R^2 - \rho^2\big) = \pi(R+\rho)(R-\rho).$$

Από το (i) έχουμε $E = \pi(R^2 - \rho^2)$, άρα $E' = E$. Συνεπώς ο κυκλικός δακτύλιος είναι ισοδύναμος με τον ζητούμενο δίσκο.

$$E = \pi(R+\rho)(R-\rho) = \pi(R^2 - \rho^2)$$

35. Σε τεταρτοκύκλιο KAB κέντρου K, είναι $KA = KB = \big(\sqrt{2}+1\big)\,\mathrm{cm}$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τεταρτοκύκλιο είναι $\pi\,\mathrm{cm}^2$.

Λύση: (Ασκ. 4/49)

Θέτουμε $R = KA = KB = \sqrt{2} + 1$ (ακτίνα του τεταρτοκυκλίου) και r την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου με κέντρο M. Επειδή ο κύκλος εφάπτεται στις κάθετες KA, KB, το κέντρο M απέχει από καθεμιά από αυτές r και ανήκει στη διχοτόμο της $\angle AKB = 90^\circ$. Άρα το τρίγωνο με κάθετες r, r έχει υποτείνουσα

$$KM = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}. \tag{1}$$

Επιπλέον, ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου (K, R), άρα η απόσταση των κέντρων τους είναι

$$KM = R - r. \tag{2}$$

Από (1) και (2) προκύπτει

$$r\sqrt{2} = R - r \implies r(\sqrt{2} + 1) = R \implies r = R(\sqrt{2} - 1).$$

Με $R = \sqrt{2}+1$ παίρνουμε $r = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1\,\mathrm{cm}$. Τότε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου είναι

$$E = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi\,\mathrm{cm}^2$$

36. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των δύο *κυκλικών τμημάτων* στα οποία χωρίζεται ένας κυκλικός δίσκος από χορδή του κύκλου που είναι *μεσοκάθετη* μιας ακτίνας.

Λύση: (Ασκ. 5/49)

Γεωμετρία του προβλήματος.

Θεωρούμε κύκλο (O, R) και ακτίνα OA. Η χορδή BC είναι μεσοκάθετη της OA, άρα περνά από το μέσο του OA και είναι κάθετη σ' αυτήν. Συνεπώς, η επίκεντρη γωνία $\angle BOC$ που αντιστοιχεί στη χορδή BC είναι ίση με

$$\theta = 120^\circ.$$

1. Εμβαδόν μικρού τμήματος.

Το εμβαδόν ενός κυκλικού τμήματος ισούται με

$$S = E_{\text{τομέα}} - E_{\triangle}.$$

Για το μικρό τμήμα:

$$E_{\text{τομ}} = \frac{\theta}{360^\circ}\,\pi R^2 = \frac{120^\circ}{360^\circ}\,\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{3}.$$

Το τρίγωνο BOC είναι ισοσκελές με πλευρές R, R και γωνία $120°$. Άρα

$$E_\triangle = \tfrac{1}{2}R^2 \sin 120° = \tfrac{1}{2}R^2 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Επομένως

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

2. Εμβαδόν μεγάλου τμήματος.

Το άθροισμα των δύο τμημάτων είναι ολόκληρος ο κύκλος:

$$S_1 + S_2 = \pi R^2.$$

Άρα

$$S_2 = \pi R^2 - S_1 = \pi R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{2\pi R^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

3. Λόγος εμβαδών.

Ο λόγος ζητείται:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με 12 (απλά για ομορφιά!):

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}.$$

37. Δυο ίσοι κύκλοι, ακτίνας R, έχουν διάκεντρο $d = R\sqrt{3}$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται και να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

Λύση: (Ασκ. 6/49)

i. Απόδειξη ότι τέμνονται.

Για δυο ίσους κύκλους ακτίνας R ισχύει:

$$\begin{cases} d > 0 & \Rightarrow \text{διακριτοί κύκλοι,} \\ d = 2R & \Rightarrow \text{εξωτερικά εφαπτόμενοι,} \\ 0 < d < 2R & \Rightarrow \text{τέμνονται σε δύο σημεία.} \end{cases}$$

Εδώ $d = R\sqrt{3} < 2R$ (αφού $\sqrt{3} < 2$), άρα οι κύκλοι *τέμνονται* σε δύο σημεία.

ii. Εμβαδόν του κοινού μέρους.

Το κοινό χωρίο είναι συμμετρικός «φακός» που αποτελείται από *δύο ίσα κυκλικά τμήματα* (ένα σε κάθε κύκλο). Έστω α το μισό της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί στη κοινή χορδή. Στο ισοσκελές τρίγωνο που έχει πλευρές R, R και βάση d ισχύει

$$\cos\alpha = \frac{d}{2R} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ, \quad 2\alpha = 60^\circ.$$

Για κάθε κύκλο:

$$E_{\text{τομέα}} = \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{6}, \qquad E_{\triangle} = \frac{1}{2}R^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

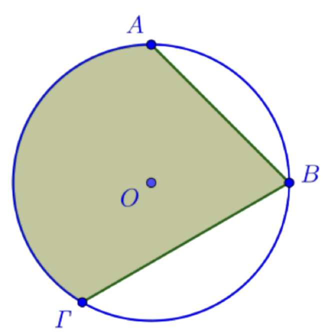
Άρα το εμβαδόν ενός τμήματος είναι

$$S_{\text{τμ}} = E_{\text{τομέα}} - E_{\triangle} = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Το κοινό εμβαδόν (δύο όμοια τμήματα):

$$E_{\cap} = 2S_{\text{τμ}} = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{(και πράγματι } d = R\sqrt{3} < 2R \Rightarrow \text{τέμνονται)}$$

38. Στο πιο κάτω σχήμα, $AB = \lambda_4$ και $B\Gamma = \lambda_3$ είναι δύο διαδοχικές χορδές ενός κύκλου (O, R). Να βρεθούν, συναρτήσει του R, η *περίμετρος* και το *εμβαδόν* του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τις χορδές $AB, B\Gamma$ και το *μικρό τόξο* $\widehat{A\Gamma}$.



Λύση: (Ασκ. 1/52)

Από τη θεωρία κανονικών ν-γώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας R γνωρίζουμε:

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}, \quad \kappa_4 = 90^\circ, \qquad \lambda_3 = R\sqrt{3}, \quad \kappa_3 = 120^\circ.$$

Άρα

$$AB = R\sqrt{2}, \quad \angle AOB = 90^\circ, \qquad B\Gamma = R\sqrt{3}, \quad \angle BO\Gamma = 120^\circ.$$

Επειδή οι χορδές είναι διαδοχικές, το *μεγάλο* τόξο $\widehat{AB\Gamma}$ έχει μέτρο $90^\circ + 120^\circ = 210^\circ$. Επομένως το *μικρό* τόξο $\widehat{A\Gamma}$ έχει

$$m(\widehat{A\Gamma}) = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}\ \text{rad}.$$

Περίμετρος. Το μήκος του μικρού τόξου $\widehat{A\Gamma}$ είναι

$$|\widehat{A\Gamma}| = R \cdot \frac{5\pi}{6}.$$

Άρα η περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου:

$$P = AB + B\Gamma + |\widehat{A\Gamma}| = R\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$$

Εμβαδόν. Υπάρχουν δύο ισοδύναμες διασπάσεις:

i. *Τομέας* $AO\Gamma$ (150°) *συν* τα τρίγωνα AOB (90°) και $BO\Gamma$ (120°):

$$E = \underbrace{\frac{150^\circ}{360^\circ}\pi R^2}_{\text{τομέας } AO\Gamma} + \underbrace{\frac{1}{2}R^2 \sin 90^\circ}_{\triangle AOB} + \underbrace{\frac{1}{2}R^2 \sin 120^\circ}_{\triangle BO\Gamma}.$$

ii. *Ολόκληρος δίσκος* μείον τα *δύο κυκλικά τμήματα* που αντιστοιχούν στις χορδές AB (90°) και $B\Gamma$ (120°):

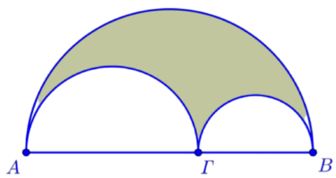
$$E = \pi R^2 - \left(\tfrac{\pi}{4}R^2 - \tfrac{1}{2}R^2\right) - \left(\tfrac{\pi}{3}R^2 - \tfrac{\sqrt{3}}{4}R^2\right).$$

Και με τις δύο μεθόδους προκύπτει

$$E = R^2\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

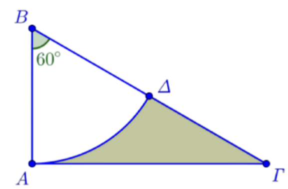
39. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου στα σχήματα (α) και (β).

(α)



$A\Gamma = 12$ cm, $\Gamma B = 8$ cm

(β)



Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\angle A = 90°$), $B\Gamma = 8$ cm.
Το τόξο $\widehat{A\Delta}$ γράφτηκε με κέντρο το σημείο B.

Λύση: (Ασκ. 2/52)

(α) Στον ευθύγραμμο τμημα $A\Gamma B$ δίνονται $A\Gamma = 12\,\text{cm}$ και $\Gamma B = 8\,\text{cm}$.

Το σκιασμένο χωρίο είναι *ημικύκλιο* διαμέτρου AB *μείον* τα δύο εσωτερικά *ημικύκλια* διαμέτρων $A\Gamma$ και ΓB.

$$AB = 12 + 8 = 20 \;\Rightarrow\; R_{AB} = 10, \quad R_{A\Gamma} = 6, \quad R_{\Gamma B} = 4.$$

Εμβαδά ημικυκλίων:

$$E_{AB} = \frac{1}{2}\pi R_{AB}^2 = \frac{1}{2}\pi 10^2 = 50\pi, \quad E_{A\Gamma} = \frac{1}{2}\pi 6^2 = 18\pi, \quad E_{\Gamma B} = \frac{1}{2}\pi 4^2 = 8\pi.$$

Άρα

$$E_{(\alpha)} = E_{AB} - \big(E_{A\Gamma} + E_{\Gamma B}\big) = 50\pi - (18\pi + 8\pi) = 24\pi\ \text{cm}^2$$

(β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle\Gamma = 30°$ και $B\Gamma = 8\,\text{cm}$. Το τόξο $\widehat{A\Delta}$ έχει κέντρο το B, άρα είναι τόξο *τομέα* ακτίνας BA και γωνίας $60°$. Το σκιασμένο χωρίο ισούται με

$$(\text{εμβαδόν } \triangle AB\Gamma) \;-\; (\text{εμβαδόν τομέα } \widehat{A\Delta}).$$

Υπολογισμοί πλευρών (τρίγωνο $30° - 60° - 90°$):

$$AB = B\Gamma \cdot \sin 30° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, \qquad A\Gamma = B\Gamma \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Επομένως

$$E_{\triangle AB\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

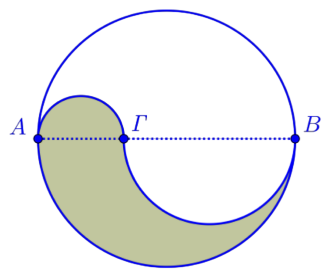
Ο τομέας έχει ακτίνα $BA = 4$ και γωνία $60°$, άρα

$$E_{\text{τομ }(B;60°,\,4)} = \frac{60°}{360°}\pi \cdot 4^2 = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}.$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$E_{(\beta)} = 8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad E_{(\beta)} = \left(8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}\right) \text{ cm}^2$$

40. Στη διάμετρο AB ενός κύκλου παίρνουμε σημείο Γ ώστε $A\Gamma = 2\,\text{cm}$ και $\Gamma B = 4\,\text{cm}$. Γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων $A\Gamma$ και ΓB, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε την *περίμετρο* και το *εμβαδόν* του σκιασμένου χωρίου.



Λύση: (Ασκ. 3/52)

Θέτουμε

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ cm}, \qquad r_1 = \frac{A\Gamma}{2} = 1 \text{ cm}, \qquad r_2 = \frac{\Gamma B}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Περίμετρος.

Το σύνορο του σκιασμένου χωρίου αποτελείται από *τρεις* ημικυκλικές καμπύλες: το κάτω ημικύκλιο του μεγάλου κύκλου (ακτίνα $R = 3$), το ημικύκλιο διαμέτρου $A\Gamma$ (ακτίνα $r_1 = 1$) και το ημικύκλιο διαμέτρου ΓB (ακτίνα $r_2 = 2$). Άρα

$$P = \pi R + \pi r_1 + \pi r_2 = \pi(3 + 1 + 2) = 6\pi \text{ cm}$$

Εμβαδόν.

Το σκιασμένο χωρίο είναι

$$(\text{κάτω ημιδίσκος ακτ. } R) \; - \; (\text{ημιδίσκος ακτ. } r_2) \; + \; (\text{ημιδίσκος ακτ. } r_1).$$

Επομένως

$$E = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_1^2}{2} = \frac{\pi}{2}\big(9 - 4 + 1\big) = 3\pi \text{ cm}^2$$

41. Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε την ακτίνα OA και στην προέκτασή της, προς το μέρος του A, παίρνουμε σημείο B με $OA = AB$. Αν $B\Gamma$ είναι το εφαπτόμενο τμήμα από το B προς τον κύκλο, να βρεθούν, συναρτήσει του R, η *περίμετρος* και το *εμβαδόν* του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση: (Ασκ. 4/53)

Έχουμε $OA = R,\ AB = R \Rightarrow OB = 2R$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Gamma B$ ισχύει

$$BG = \sqrt{OB^2 - O\Gamma^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$$

Επίσης,

$$\cos\angle BO\Gamma = \tfrac{R}{2R} = \tfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ \angle BO\Gamma = 60^\circ,$$

άρα

$$\angle AO\Gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι

$$\overset{\frown}{A\Gamma} = R \cdot \frac{120^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi R}{3}.$$

1. Περίμετρος.

$$\Pi = AB + BG + \overset{\frown}{A\Gamma} = R + R\sqrt{3} + \frac{2\pi R}{3} = \frac{R}{3}\,(3\sqrt{3} + 3 + \pi).$$

2. Εμβαδόν. Το μικτόγραμμο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν

$$E = E_{\triangle AB\Gamma} - \big(E_{\text{τομ}(AO\Gamma)} - E_{\triangle AO\Gamma}\big).$$

Υπολογίζουμε

$$E_{\triangle AB\Gamma} = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BG \cdot \sin 150^\circ = \tfrac{1}{2} \cdot R \cdot R\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2,$$

$$E_{\text{τομ}(AO\Gamma)} = \frac{120^\circ}{360^\circ}\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{3}, \qquad E_{\triangle AO\Gamma} = \tfrac{1}{2}R^2 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Επομένως

$$E = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi).$$

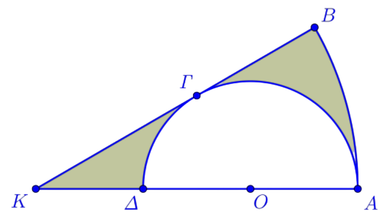
3. Απάντηση.

$$\Pi = \tfrac{R}{3}(3\sqrt{3} + 3 + \pi) \qquad E = \tfrac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$$

42. Στον κυκλικό τομέα KAB με $\angle K = 30°$ και ακτίνα $KA = KB = 6a$ θεωρούμε ημικύκλιο με κέντρο O πάνω στην KA, το οποίο εφάπτεται της KB στο σημείο Γ.

i. Να βρεθεί η ακτίνα r του ημικυκλίου.

ii. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



Λύση: (Ασκ. 5/53)

i. Επειδή $AO = r$ και $KA = 6a$, έχουμε $KO = KA - AO = 6a - r$. Η ευθεία KB σχηματίζει γωνία 30° με την KA, άρα η απόσταση του O από την KB είναι

$$d(O, KB) = KO \sin 30° = (6a - r) \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{6a - r}{2}.$$

Η KB είναι εφαπτομένη στο ημικύκλιο κέντρου O, επομένως $d(O, KB) = r$. Έτσι

$$r = \frac{6a - r}{2} \implies 2r = 6a - r \implies r = 2a$$

ii. Εμβαδόν σκιασμένου χωρίου.

Ολόκληρο το ημικύκλιο βρίσκεται μέσα στον τομέα KAB (η KB το εφάπτεται *άνωθεν*), άρα

$$E_{\text{σκιασμ.}} = E_{\text{τομ}(KAB)} - E_{\text{ημικ.}(O,r)}.$$

Με $KA = 6a$ και $\angle K = 30° = \frac{\pi}{6}$ (σε rad) προκύπτει

$$E_{\text{τομ}(KAB)} = \frac{\pi(6a)^2}{360°} \cdot 30° = \frac{1}{2}(6a)^2 \cdot \frac{\pi}{6} = 3\pi a^2,$$

και

$$E_{\text{ημικ.}(O,r)} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(2a)^2 = 2\pi a^2.$$

Άρα

$$E_{\text{σκιασμ.}} = 3\pi a^2 - 2\pi a^2 = \pi a^2$$

43. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του $AB=\lambda_3$. Με διάμετρο την AB γράφουμε ημικύκλιο έξω από τον κύκλο (O,R). Να βρεθεί, συναρτήσει του R, το *εμβαδόν* του μηνίσκου που ορίζεται από το μικρότερο τόξο $\widehat{AB}$ του κύκλου και το ημικύκλιο διαμέτρου AB.

Λύση: (Ασκ. 6/53)

Από τα στοιχεία του ισόπλευρου (ή του κανονικού 3-γώνου) εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R έχουμε $\lambda_3=R\sqrt{3}$. Άρα

$$AB=R\sqrt{3},\qquad r=\frac{AB}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Η χορδή AB βαίνει σε κεντρική γωνία $\widehat{AOB}=\theta$ με

$$AB=2R\sin\frac{\theta}{2}\implies R\sqrt{3}=2R\sin\frac{\theta}{2}\implies \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\implies \theta=120^\circ.$$

Το ζητούμενο μηνίσκο είναι «ημικύκλιο − κυκλικό τμήμα» του κύκλου (O,R) που αντιστοιχεί στη γωνία 120°. Επομένως

$$E=E_{\text{ημικ.}(r)}-\big(E_{\text{τομ}(120^\circ)}-E_{\triangle AOB}\big).$$

Υπολογίζουμε:

$$E_{\text{ημικ.}(r)}=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3\pi R^2}{8},$$

$$E_{\text{τομ}(120^\circ)}=\frac{120^\circ}{360^\circ}\pi R^2=\frac{\pi R^2}{3},\qquad E_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin 120^\circ=\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Άρα

$$E=\frac{3\pi R^2}{8}-\left(\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right)=\frac{\pi R^2}{24}+\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=\frac{R^2}{24}\left(\pi+6\sqrt{3}\right).$$

Απάντηση.

$$E=\frac{R^2}{24}\big(\pi+6\sqrt{3}\big)$$

44. Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία A,B,Γ. Να βρεθεί, συναρτήσει του ρ, το *εμβαδόν* του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση: (Ασκ. 7/53)

Έστω O_1, O_2, O_3 τα κέντρα των κύκλων. Εφόσον οι κύκλοι είναι ίσοι και εφάπτονται ανά δύο,

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2\rho,$$

άρα το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ισόπλευρο πλευράς 2ρ.

Υπολογίζουμε το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου:

$$E_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\rho)^2 = \sqrt{3}\,\rho^2.$$

Σε κάθε κορυφή αντιστοιχεί τομέας κύκλου ακτίνας ρ και γωνίας $60°$. Το εμβαδόν ενός τέτοιου τομέα είναι

$$E_{\text{τομ}(60^\circ)} = \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\rho^2 = \frac{\pi\rho^2}{6}.$$

Υπάρχουν τρεις ίδιοι τομείς, άρα το συνολικό εμβαδόν τους είναι

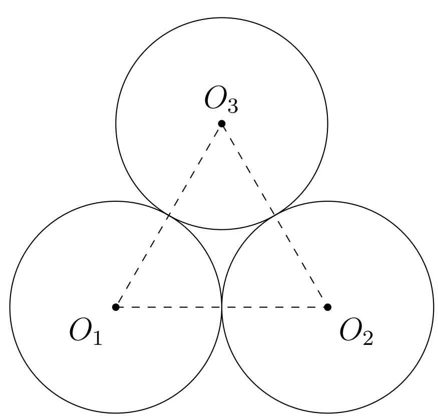
$$3 \cdot \frac{\pi\rho^2}{6} = \frac{\pi\rho^2}{2}.$$

Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου είναι

$$E = E_{\triangle O_1O_2O_3} - 3 \cdot E_{\text{τομ}(60^\circ)} = \sqrt{3}\,\rho^2 - \frac{\pi\rho^2}{2} = \frac{\rho^2}{2}\,(2\sqrt{3} - \pi).$$

Απάντηση.

$$E = \frac{\rho^2}{2}\,(2\sqrt{3} - \pi)$$



45. Οι κύκλοι (K,ρ) και $(\Lambda,3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Η $B\Gamma$ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους (αγγίζει τον μικρό κύκλο στο B και τον μεγάλο στο Γ). Να βρεθούν, συναρτήσει του ρ, η *περίμετρος* και το *εμβαδόν* του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση: (Ασκ. 8/53)

Οι ακτίνες είναι $r_1=\rho,\ r_2=3\rho$ και η απόσταση των κέντρων $K\Lambda = r_1+r_2 = 4\rho$. Θέτουμε α τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $K\Lambda$ με την KB (ή ισοδύναμα με την $\Lambda\Gamma$).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $K\Lambda$ και κάθετο $|r_2-r_1|=2\rho$ έχουμε

$$\sin\alpha = \frac{r_2-r_1}{K\Lambda} = \frac{2\rho}{4\rho} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \alpha = 30^\circ.$$

Οι κεντρικές γωνίες που αντιστοιχούν στα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$ είναι 150°, άρα

$$\widehat{AB} = r_1\cdot\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi\rho}{6}, \qquad \widehat{A\Gamma} = r_2\cdot\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi\cdot 3\rho}{6} = \frac{5\pi\rho}{2}.$$

Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα της κοινής εφαπτομένης έχει μήκος

$$B\Gamma = \sqrt{K\Lambda^2-(r_2-r_1)^2} = \sqrt{(4\rho)^2-(2\rho)^2} = 2\sqrt{3}\,\rho.$$

1. Περίμετρος.

$$\Pi = \widehat{AB}+\widehat{A\Gamma}+B\Gamma = \frac{5\pi\rho}{6}+\frac{5\pi\rho}{2}+2\sqrt{3}\rho = \frac{\rho}{3}\big(6\sqrt{3}+5\pi\big).$$

2. Εμβαδόν. Αφαιρούμε από το κατάλληλο ευθύγραμμο χωρίο τα δύο κυκλικά τμήματα που αντιστοιχούν στις γωνίες 150°, καταλήγοντας

$$E = \frac{\rho^2}{6}\big(24\sqrt{3}-11\pi\big).$$

46. Δίνεται κύκλος (O, R) και μία διάμετρός του AB. Στο μέσο του ενός ημικυκλίου παίρνουμε σημείο Γ και με κέντρο Γ και ακτίνα ΓA γράφουμε κύκλο, ο οποίος μαζί με το άλλο ημικύκλιο ορίζει μηνίσκο. Να αποδειχθεί ότι

$$E_{\text{μηνίσκου}} = E_{\triangle AB\Gamma}.$$

Λύση: (Ασκ. 9/53)

Επειδή Γ είναι το μέσο του ημικυκλίου, έχουμε $O\Gamma \perp AB$ και το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Γ (Θαλής). Επίσης $\Gamma A = \Gamma B$ (η Γ ανήκει στην μεσοκάθετο της AB).

1. Μήκος ΓA. Στο ορθογώνιο $\triangle AO\Gamma$ ισχύει

$$\Gamma A^2 = OA^2 + O\Gamma^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma A = \sqrt{2}\,R.$$

2. Ανάλυση εμβαδών ως «τομέας − τρίγωνο». Ο μηνίσκος που ορίζεται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB (κέντρο O) και από το τόξο AB του κύκλου κέντρου Γ και ακτίνας ΓA ισούται με

$$E_{\text{μηνίσκου}} = \underbrace{E_{\text{τομ}(O,180^\circ)}}_{\text{ημιδίσκος } (O,R)} - \underbrace{E_{\text{τμήμ}(\,\Gamma;\,AB\,)}}_{\text{κυκλικό τμήμα του κύκλου } (\Gamma,\Gamma A)}.$$

Για το δεύτερο, $E_{\text{τμήμ}(\Gamma;AB)} = E_{\text{τομ}(\Gamma,90^\circ)} - E_{\triangle AB\Gamma}$ (ο τμηματικός τύπος «τμήμα = τομέας − τρίγωνο»).

Άρα

$$E_{\text{μηνίσκου}} = E_{\text{τομ}(O,180^\circ)} - E_{\text{τομ}(\Gamma,90^\circ)} + E_{\triangle AB\Gamma}.$$

3. Ισότητα τομέων.

$$E_{\text{τομ}(O,180^\circ)} = \frac{\pi R^2}{2}, \qquad E_{\text{τομ}(\Gamma,90^\circ)} = \frac{\pi(\Gamma A)^2}{4} = \frac{\pi\,(2R^2)}{4} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Άρα οι δύο τομείς είναι ίσοι και απαλείφονται:

$$E_{\text{μηνίσκου}} = E_{\triangle AB\Gamma}.$$

Σημείωση. Επειδή το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ως προς τα σκέλη $\Gamma A = \Gamma B = \sqrt{2}\,R$,

$$E_{\triangle AB\Gamma} = \tfrac{1}{2}\Gamma A \cdot \Gamma B = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}R)^2 = R^2.$$

Άρα $E_{\text{μηνίσκου}} = R^2$ (προαιρετικό συμπέρασμα).

47. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο $d = R\sqrt{2}$. Να βρεθεί, συναρτήσει του R, το *εμβαδόν* του κοινού τους μέρους.

Λύση: (Ασκ. 10/53)

Έστω O_1, O_2 τα κέντρα, $d = O_1O_2 = R\sqrt{2}$ και A, B τα σημεία τομής των κύκλων. Θέτουμε $\angle AO_1O_2 = 2\theta$. Στο τρίγωνο O_1O_2A (ισοσκελές με πλευρές R, R, d) ισχύει

$$\text{συν}\,\theta = \frac{d}{2R} = \frac{R\sqrt{2}}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad 2\theta = \frac{\pi}{2}.$$

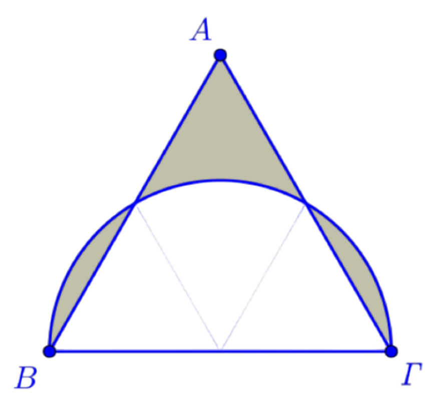
Το κοινό χωρίο είναι άθροισμα δύο ίσων κυκλικών *τμημάτων* (ένα σε κάθε κύκλο):

$$E = 2\Big(\underbrace{E_{\text{τομ}}(2\theta)}_{\text{τομέας}} - \underbrace{E_{\triangle}}_{\text{ισοσκελές}}\Big) = 2\Big(\tfrac{1}{2}R^2 \cdot 2\theta - \tfrac{1}{2}R^2\,\text{ημ}(2\theta)\Big) = 2\Big(R^2\theta - \tfrac{1}{2}R^2\,\text{ημ}\tfrac{\pi}{2}\Big).$$

Με $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ και $\text{ημ}\dfrac{\pi}{2} = 1$ παίρνουμε

$$E = 2\left(R^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{R^2}{2}(\pi - 2).$$

48. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο με πλευρά a και το ημικύκλιο έχει διάμετρο τη $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το *εμβαδόν* της σκιασμένης περιοχής.



Λύση: (Ασκ. 1/58)

Θέτουμε O το μέσο της $B\Gamma$ (κέντρο του ημικυκλίου) και $r = \dfrac{a}{2}$. Οι πλευρές $AB,\ A\Gamma$ τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία $E,\ Z$ αντίστοιχα.

Με απλή επίλυση του συστήματος $x^2 + y^2 = r^2,\ y = \sqrt{3}\,(x + \frac{a}{2})$ (ή με συμμετρία) βρίσκουμε

$$E\left(-\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}\,a}{4}\right), \quad Z\left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}\,a}{4}\right)$$

άρα το χορδή EZ έχει μήκος $|EZ| = \dfrac{a}{2}$.

Για το κεντρικό τόξο $\widehat{EZ}$ ισχύει $|EZ| = 2r\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$.

Η σκιασμένη περιοχή είναι ακριβώς το κοινό μέρος (ημικύκλιο) $\cap$ (τρίγωνο $AB\Gamma$), το οποίο αποτελείται από:

$$\underbrace{\text{τομέα } (O,\ \theta = 60°)}_{\text{ανάμεσα στα } OE, OZ} \quad + \quad \underbrace{\triangle OBE \text{ και } \triangle OZ\Gamma}_{\text{δύο ίσα ισοσκελή τρίγωνα}}.$$

Επομένως

$$E = E_{\text{τομ}(60°)} + 2 \cdot E_{\triangle OBE}.$$

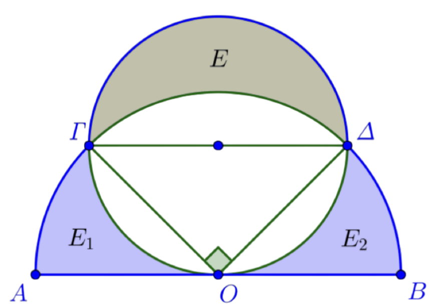
Υπολογίζουμε:

$$E_{\text{τομ}(60°)} = \frac{60°}{360°}\,\pi r^2 = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{24}, \qquad E_{\triangle OBE} = \tfrac{1}{2}r^2\sin 60° = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{16}.$$

Άρα

$$E = \frac{\pi a^2}{24} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}\,a^2}{16} = \frac{a^2}{24}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right).$$

49. Στο πιο κάτω σχήμα, η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη με την AB και $\angle\Gamma O\Delta = 90°$, όπου O είναι το κέντρο του ημικυκλίου διαμέτρου AB. Να αποδείξετε ότι $E = E_1 + E_2$.



Λύση: (Ασκ. 2/58)

Θέτουμε R την ακτίνα του μεγάλου κύκλου και r την ακτίνα του μικρού (ομόκεντροι με κέντρο O).

Ο ημιδακτύλιος (μεγάλος ημιδίσκος μείον μικρός) έχει εμβαδόν

$$E_{\text{ημιδακτ.}} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\,(R^2 - r^2).$$

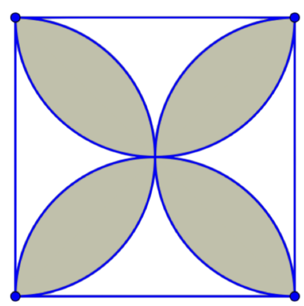
Η περιοχή E είναι *δακτυλιοειδής τομέας* με κεντρική γωνία 90°, άρα

$$E = \frac{90^\circ}{180^\circ}\,E_{\text{ημιδακτ.}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(R^2 - r^2).$$

Οι περιοχές E_1 και E_2 αποτελούν το συμπλήρωμα του E μέσα στον ίδιο ημιδακτύλιο, επομένως

$$E_1 + E_2 = E_{\text{ημιδακτ.}} - E = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) - \frac{\pi}{4}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(R^2 - r^2) = E.$$

50. Δίνεται τετράγωνο πλευράς $2a$. Με *διαμέτρους* τις πλευρές του τετραγώνου γράφουμε *ημικύκλια* προς το εσωτερικό, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε, σε συνάρτηση με το a, το *εμβαδόν* E των τεσσάρων φύλλων που σχηματίζονται.



Λύση: (Ασκ. 3/58)

Θέτουμε $AB\Gamma\Delta$ το τετράγωνο, O το κέντρο του και M, N, P, Q τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα

$$r = a \qquad (\text{αφού } AB = 2a \text{ κ.ο.κ.})$$

και όλα περνούν από το O (το κέντρο του τετραγώνου).

Τα τέσσερα φύλλα είναι ίσα. Υπολογίζουμε το άνω–αριστερό φύλλο F, που είναι το κοινό μέρος των δύο ημικυκλίων με κέντρα M και Q. Τα σημεία τομής τους είναι A και O. Στα τρίγωνα

$$\angle AMO = \angle AQO = 90^\circ \;\Rightarrow\; \text{σε καθένα από τα } M, Q \text{ αντιστοιχεί τομέας } 90^\circ.$$

Άρα το F είναι «φακός» που ισούται με άθροισμα δύο *τεταρτοκυκλικών* τομέων ακτίνας a μείον τα δύο ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα $\triangle AMO,\ \triangle AQO$.

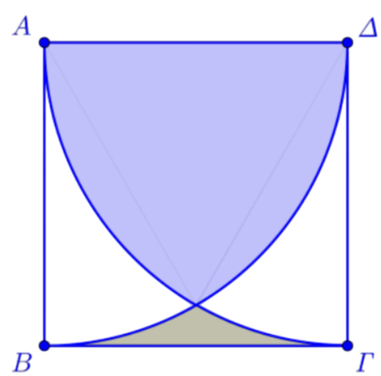
Επομένως

$$E_F = 2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ}\pi a^2 - \Big(E_{\triangle AMO} + E_{\triangle AQO}\Big) = \frac{\pi a^2}{2} - \Big(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a^2\Big) = a^2\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big).$$

Τα φύλλα είναι τέσσερα, άρα

$$E = 4E_F = 4 \cdot a^2\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big) = 2a^2(\pi - 2).$$

51. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a. Στο εσωτερικό του τετραγώνου, γράφουμε τα τόξα $\widehat{B\Delta}$ και $\widehat{A\Gamma}$ των κύκλων (A, a) και (Δ, a) αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε, σε συνάρτηση με το a, το *εμβαδόν* E του σκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



Λύση: (Ασκ. 4/59)

Το σκιασμένο μέρος είναι το *τετράγωνο* μείον την *ένωση* των δύο τεταρτοκυκλίων ακτίνας a με κέντρα A και Δ. Άρα

$$E = E_{\text{τετρ.}} - E_{\text{ένωσης}} = a^2 - \Big(E_{Q_A} + E_{Q_\Delta} - E_\cap\Big),$$

όπου $E_{Q_A} = E_{Q_\Delta} = \dfrac{\pi a^2}{4}$ (τεταρτοκυκλικοί τομείς) και $E_\cap$ είναι το εμβαδόν της *τομής* των δύο κύκλων (φακός).

Υπολογισμός του $E_\cap$: Τα κέντρα A, Δ απέχουν $AD = a$ και οι κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα a. Στον κάθε κύκλο, η γωνία που αντιστοιχεί στη χορδή της τομής είναι

$$2\arccos\Big(\frac{AD}{2a}\Big) = 2\arccos\Big(\frac{1}{2}\Big) = 120^\circ.$$

Επομένως ο φακός ισούται με *δύο* κυκλικά τμήματα γωνίας $120°$:

$$E_\cap = 2\left(\underbrace{\frac{120°}{360°}\pi a^2}_{\text{τομέας } 120°} - \underbrace{\frac{1}{2}a^2\sin 120°}_{\text{τρίγωνο ισοσκελές}}\right) = 2\left(\frac{\pi a^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} E &= a^2 - \left(\frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{4} - E_\cap\right) = a^2 - \frac{\pi a^2}{2} + E_\cap \\ &= a^2 - \frac{\pi a^2}{2} + \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2 = a^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{6}\big(6 - 3\sqrt{3} + \pi\big). \end{aligned}$$

52. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και έστω Γ τυχαίο σημείο της διαμέτρου. Στο εσωτερικό του ημικυκλίου γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων $A\Gamma$ και ΓB. Η κάθετος στη διάμετρο στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων (*άρβηλος του Αρχιμήδη*) είναι ισοδύναμο με τον κυκλικό δίσκο διαμέτρου $\Gamma\Delta$.

Λύση: (Ασκ. 5/59)

Θέτουμε $AG = x$, $\Gamma B = y$ (ώστε $AB = x + y$) και O το μέσο της AB (κέντρο του μεγάλου κύκλου). Τότε η ακτίνα του μεγάλου κύκλου είναι

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{x+y}{2}, \qquad r_1 = \frac{x}{2}, \qquad r_2 = \frac{y}{2}$$

για τα δύο μικρά ημικύκλια.

Εμβαδόν άρβηλου. Το εμβαδόν $E_{\text{αρβ}}$ είναι το εμβαδόν του μεγάλου ημικυκλίου μείον τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων:

$$\begin{aligned} E_{\text{αρβ}} &= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r_1^2}{2} - \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi}{2}\big(R^2 - r_1^2 - r_2^2\big) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\big(2xy\big) = \frac{\pi}{4}\,xy. \end{aligned}$$

Μήκος $\Gamma\Delta$. Το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο στο Γ, με $O\Delta = R$ και

$$O\Gamma = \left|x - \tfrac{x+y}{2}\right| = \frac{|x-y|}{2}.$$

Άρα, από Πυθαγόρειο,

$$\Gamma\Delta^2 = R^2 - O\Gamma^2 = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = \frac{4xy}{4} = xy. \tag{2}$$

<u>Σύγκριση εμβαδών.</u> Ο δίσκος διαμέτρου ΓΔ έχει ακτίνα $\frac{\Gamma\Delta}{2}$, άρα εμβαδόν

$$E_{\text{δίσκ}} = \pi \left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,\Gamma\Delta^2.$$

Με βάση το (2) και το (1),

$$E_{\text{δίσκ}} = \frac{\pi}{4}\,xy = E_{\text{αρβ}}.$$

Παρατήρηση. Η ισοδυναμία είναι ανεξάρτητη της θέσης του Γ πάνω στη διάμετρο.

53. Ισόπλευρο τρίγωνο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ). Θεωρούμε τους τρεις κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά του (O, ρ) και ταυτόχρονα εφάπτονται σε *δύο* πλευρές του τριγώνου (ένας σε καθεμία γωνία του τριγώνου). Να αποδείξετε ότι:

i. το άθροισμα των μηκών αυτών των τριών κύκλων ισούται με το μήκος του κύκλου (O, ρ)

ii. το άθροισμα των εμβαδών των δίσκων αυτών των τριών κύκλων ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του δίσκου του κύκλου (O, ρ).

Λύση: (Ασκ. 6/59)

Λόγω συμμετρίας 120° του ισόπλευρου, οι τρεις ζητούμενοι κύκλοι είναι *ίδιοι*. Αρκεί να υπολογίσουμε την ακτίνα r του κύκλου που εφάπτεται στις πλευρές που άγονται από την κορυφή A και στον περιγεγραμμένο κύκλο (O, ρ).

Θέτουμε C το κέντρο του μικρού κύκλου στη γωνία A, και P, Q τα σημεία επαφής του με τις πλευρές AB, $A\Gamma$ αντίστοιχα. Τότε $CP \perp AB$, $CQ \perp A\Gamma$ και το C ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας A, η οποία στο ισόπλευρο συμπίπτει με την AO. Επομένως το τρίγωνο APC είναι ορθογώνιο και

$$\angle PAC = 30^\circ, \qquad CP = r$$

οπότε από $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$r = AC \sin 30^\circ = \frac{AC}{2} \;\Rightarrow\; AC = 2r. \tag{1}$$

Ακόμη, επειδή ο μικρός κύκλος εφάπτεται *εσωτερικά* του (O, ρ), το ευθύγραμμο τμήμα AO είναι κοινή διχοτόμος και των δύο κύκλων και τα κέντρα A, C, O είναι συνευθειακά. Αν T είναι το σημείο επαφής των δύο κύκλων, τότε $CT \perp OT$ και

$$OC = OT - CT = \rho - r. \tag{2}$$

Στο ισόπλευρο $AO = \rho$. Από τη συνευθειακότητα στο $A{-}C{-}O$ έχουμε

$$AO = AC + CO \overset{(1),(2)}{=} 2r + (\rho - r) = \rho \;\Rightarrow\; r = \frac{\rho}{3}. \tag{3}$$

Άρα οι τρεις κύκλοι έχουν ακτίνα $r = \dfrac{\rho}{3}$.

i.

Κάθε μικρός κύκλος έχει μήκος $2\pi r = 2\pi\dfrac{\rho}{3}$. Με τρεις ίδιους κύκλους:

$$L_{\text{σύνολο}} = 3 \cdot 2\pi r = 3 \cdot 2\pi\frac{\rho}{3} = 2\pi\rho$$

που είναι το μήκος του (O, ρ).

ii. Κάθε μικρός δίσκος έχει εμβαδόν $\pi r^2 = \pi\dfrac{\rho^2}{9}$, άρα

$$E_{\text{σύνολο}} = 3 \cdot \pi r^2 = 3 \cdot \pi\frac{\rho^2}{9} = \frac{\pi\rho^2}{3} = \frac{1}{3}\,(\pi\rho^2),$$

δηλαδή το $\dfrac{1}{3}$ του εμβαδού του δίσκου του (O, ρ).

54. Δύο παράλληλες χορδές κύκλου ακτίνας R έχουν μήκη R και $R\sqrt{3}$. Αν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται *εκτός* της ζώνης των παραλλήλων χορδών, να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του μέρους του κυκλικού δίσκου *μεταξύ* των χορδών προς το εμβαδόν του δίσκου.

Λύση: (Ασκ. 7/59)

Αν d είναι η απόσταση χορδής μήκους l από το κέντρο, τότε

$$l = 2\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Άρα, για τις δύο χορδές (με αποστάσεις d_1, d_2) παίρνουμε

$$l_1 = R \;\Rightarrow\; 2\sqrt{R^2 - d_1^2} = R \;\Rightarrow\; d_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}R,$$
$$l_2 = R\sqrt{3} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{R^2 - d_2^2} = R\sqrt{3} \;\Rightarrow\; d_2 = \frac{1}{2}R.$$

Θέτουμε $\cos\theta_i = \dfrac{d_i}{R}$ (θ_i είναι το ημιάθροισμα της επίκεντρης γωνίας της χορδής). Τότε

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = 30^\circ, \qquad \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ.$$

Επειδή το κέντρο είναι *εκτός* της ζώνης των χορδών, το ζητούμενο εμβαδόν είναι η διαφορά των *εξωτερικών* κυκλικών τμημάτων των δύο χορδών:

$$E = E_{\text{τμήμ}}(2\theta_2) - E_{\text{τμήμ}}(2\theta_1).$$

Με τον τύπο «τμήμα = τομέας − τρίγωνο» (θεωρία 26–28) έχουμε

$$E = \left(\frac{2\theta_2}{360^\circ}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta_2\right) - \left(\frac{2\theta_1}{360^\circ}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin 2\theta_1\right).$$

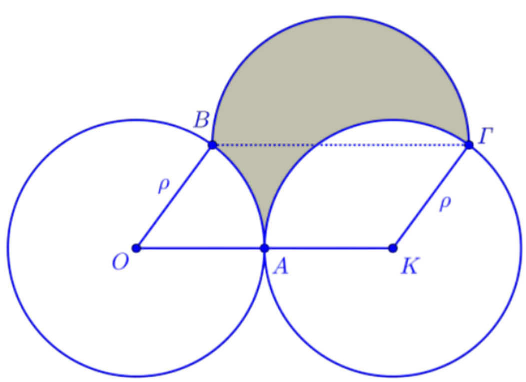
Για $\theta_2 = 60^\circ,\ \theta_1 = 30^\circ$ ισχύει $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε τα τριγωνικά μέρη *ακυρώνονται*:

$$E = \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{60^\circ}{360^\circ}\right)\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi R^2.$$

Άρα το ζητούμενο *ποσοστό* ως προς το εμβαδόν του δίσκου πR^2 είναι

$$\frac{E}{\pi R^2} = \frac{1}{6}$$

55. Δύο ίσοι κύκλοι (O,ρ) και (K,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Φέρουμε δυο ακτίνες OB και $K\Gamma$ *παράλληλες* και προς το ίδιο μέρος της διακέντρου OK. Γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου $B\Gamma$, που βρίσκεται εκτός των δύο κύκλων. Να αποδείξετε ότι το σκιασμένο χωρίο είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμο $OB\Gamma K$.



Λύση: (Ασκ. 8/59)

Θέτουμε $\angle BOA = \angle \Gamma KA = \theta$ (με $0 < \theta < 90^\circ$). Από την παραλληλία $OB \parallel K\Gamma$ και το ότι OK είναι διάκεντρος, προκύπτει ότι η ευθεία $B\Gamma$ είναι παράλληλη προς το OK και

$$|B\Gamma| = |OK| = 2\rho. \tag{1}$$

Άρα το ημικύκλιο διαμέτρου $B\Gamma$ έχει ακτίνα ρ και εμβαδόν

$$E_{\text{ημικ}} = \frac{\pi\rho^2}{2}. \tag{2}$$

Το σκιασμένο χωρίο S είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου μείον τα τμήματα του που καλύπτονται από τους δύο κύκλους (O, ρ), (K, ρ). Στον κάθε κύκλο, το κομμάτι που βρίσκεται *εντός* του ημικυκλίου αντιστοιχεί στο τόξο από τη διεύθυνση θ μέχρι τη συμμετρική της, δηλ. κεντρική γωνία $180^\circ - 2\theta$. Επομένως, το μέρος του ημικυκλίου που αφαιρείται είναι το άθροισμα δύο ίσων *κυκλικών τμημάτων* με ακτίνα ρ και κεντρική γωνία $180^\circ - 2\theta$.

Με τον γνωστό τύπο «τμήμα = τομέας − τρίγωνο» (Θεωρία 26–28) παίρνουμε

$$E_{\text{τμ}}(180^\circ - 2\theta) = \frac{180^\circ - 2\theta}{360^\circ}\,\pi\rho^2 - \frac{1}{2}\,\rho^2\sin(180^\circ - 2\theta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{180^\circ}\right)\pi\rho^2 - \frac{1}{2}\,\rho^2\sin 2\theta,$$

άρα για τα δύο τμήματα

$$E_{\text{αφαιρ.}} = 2E_{\text{τμ}}(180^\circ - 2\theta) = \left(1 - \frac{2\theta}{180^\circ}\right)\pi\rho^2 - \rho^2\sin 2\theta. \tag{3}$$

Συνεπώς, από (2) και (3),

$$\begin{aligned} S = E_{\text{ημικ}} - E_{\text{αφαιρ.}} &= \frac{\pi\rho^2}{2} - \left(1 - \frac{2\theta}{180^\circ}\right)\pi\rho^2 + \rho^2\sin 2\theta \\ &= \pi\rho^2\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{\theta}{90^\circ}\right) + \rho^2\sin 2\theta = \rho^2(\sin 2\theta) = 2\rho^2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

Από την άλλη, το τετράπλευρο $OB\Gamma K$ είναι παραλληλόγραμμο, διότι $OB \parallel K\Gamma$ (κατασκευή) και $B\Gamma \parallel OK$ (βλ. (1)). Η *βάση* του είναι $|OK| = 2\rho$ και το *ύψος* του ως προς τη βάση αυτή είναι η απόσταση της $B\Gamma$ από το OK, δηλαδή $OB\sin\theta = \rho\sin\theta$. Άρα

$$E_{OB\Gamma K} = 2\rho \cdot (\rho\sin\theta) = 2\rho^2\sin\theta. \tag{5}$$

Τέλος, επειδή $\cos\theta = \dfrac{|OA|}{\rho} = 1$ ως προς τη διεύθυνση του ύψους, από (4)–(5) προκύπτει

$$S = E_{OB\Gamma K}.$$

Το σκιασμένο χωρίο είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμο $OB\Gamma K$

56. Αν $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι κανονικό εξάγωνο, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$, ΓE, ΔZ, EA, ZB σχηματίζουν *κανονικό εξάγωνο* (στο κέντρο του σχήματος) και να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των δύο αυτών εξαγώνων.

Λύση: (Ασκ. 9/60)

Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (O,R) του $AB\Gamma\Delta EZ$. Σε κανονικό εξάγωνο ισχύει $\lambda_6 = R$ (πλευρά = ακτίνα) και οι διαγώνιοι που ενώνουν κορυφές με *ένα* ενδιάμεσο σημείο (π.χ. $A\Gamma$) βαίνουν σε *κεντρική γωνία* 120°. Άρα τα τρίγωνα

$$A\Gamma E \quad \text{και} \quad B\Delta Z$$

είναι *ισόπλευρα* (πλευρά ίση με τη χορδή 120°).

Οι ευθείες $A\Gamma$, ΓE, EA και $B\Delta$, ΔZ, ZB σχηματίζουν δύο ίσα ισόπλευρα τρίγωνα με σχετική περιστροφή 60° η τομή τους είναι κυρτό εξάγωνο $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$. Λόγω συμμετρίας τάξης 6 (περιστροφή 60° γύρω από το O), όλες οι γωνίες και όλες οι πλευρές του $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ είναι ίσες άρα το εξάγωνο αυτό είναι *κανονικό*.

Εύρεση του λόγου εμβαδών. Αρκεί να βρούμε την απόσταση των κορυφών H_i από το O. Έστω $P = A\Gamma \cap B\Delta$ (μία κορυφή του εσωτερικού εξαγώνου). Θέτουμε καρτεσιανό σύστημα με

$$A(R,0),\ B\left(\tfrac{R}{2}, \tfrac{\sqrt{3}R}{2}\right),\ \Gamma\left(-\tfrac{R}{2}, \tfrac{\sqrt{3}R}{2}\right),\ \Delta(-R,0),\ \ldots$$

Οι εξισώσεις των ευθειών είναι

$$A\Gamma:\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-R), \qquad B\Delta:\ y - \frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{R}{2}\right).$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$P(0, \tfrac{R}{\sqrt{3}}) \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Με τη συμμετρία, όλα τα H_i απέχουν $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ από το O, δηλ. το εσωτερικό εξάγωνο έχει *περιγεγραμμένο* κύκλο ακτίνας $r = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$. Σε κανονικό εξάγωνο ισχύει $\lambda_6 =$ ακτίνα περιγεγραμμένου, άρα η πλευρά του εσωτερικού εξαγώνου είναι $r = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$, ενώ του αρχικού είναι R.

Το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου με πλευρά s είναι

$$E = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, s^2.$$

Άρα

$$\frac{E_{\text{εσ.}}}{E_{\text{αφ.}}} = \frac{(\frac{R}{\sqrt{3}})^2}{R^2} = \frac{1}{3}.$$

57. Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο *ομόκεντρους* κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι *κανονικό*.

Λύση: (Ασκ. 10/60)

Έστω το πολύγωνο $A_1A_2\dots A_n$ εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R) και ταυτόχρονα περιγεγραμμένο στον κύκλο (O,r) με $r<R$ (οι δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι).

Κάθε πλευρά A_iA_{i+1} είναι *χορδή* του (O,R) και εφάπτεται στον (O,r).

Στο σημείο επαφής T_i ισχύει $OT_i \perp A_iA_{i+1}$, άρα η απόσταση του O από την πλευρά A_iA_{i+1} ισούται με $OT_i = r$. Επομένως όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι *χορδές* του (O,R) σε *σταθερή απόσταση* r από το κέντρο.

Σε κύκλο, όλες οι χορδές που απέχουν την ίδια απόσταση d από το κέντρο είναι *ίσες* και βαίνουν στην ίδια κεντρική γωνία. Πράγματι, αν d είναι η απόσταση και φ η κεντρική γωνία της χορδής, τότε

$$d = R\cos\frac{\varphi}{2} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 2\arccos\frac{d}{R} \quad \text{και} \quad |\,\text{χορδής}\,| = 2\sqrt{R^2-d^2},$$

που εξαρτώνται μόνο από το d. Με $d=r$ προκύπτει ότι *όλες οι πλευρές* A_iA_{i+1} έχουν το ίδιο μήκος και βαίνουν στην ίδια κεντρική γωνία φ.

Άρα τα τόξα $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ του (O,R) είναι ίσα για όλα τα i, οπότε τα σημεία $A_1,\dots,A_n$ είναι *ισαπέχοντα* πάνω στον κύκλο. Συνεπώς:

όλες οι πλευρές είναι ίσες (ισοπλεύρο) και όλες οι γωνίες είναι ίσες (ίσα τόξα $\Rightarrow$ ίδιες εγγεγραμμένες).

Το πολύγωνο είναι λοιπόν *εξίσου* ισοπλεύρο και ισογώνιο, δηλαδή *κανονικό*.

58. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου. Στην προέκταση της AB παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $A\Gamma = 2R$. Να αποδείξετε ότι το *εφαπτόμενο τμήμα* από το Γ προς τον κύκλο είναι ίσο με την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R).

Λύση: (Ασκ. 11/60)

Επειδή η AB είναι ίση με πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον (O,R), ισχύει

$$AB = R \quad \text{και} \quad \widehat{AOB} = 60^\circ.$$

Θέτουμε M το μέσο της AB. Τότε $OM \perp AB$ και, στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM,

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}, \qquad OA = R \;\Rightarrow\; OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R. \tag{1}$$

Από $A\Gamma = 2R$ και $AB = R$ προκύπτει

$$B\Gamma = A\Gamma - AB = R \;\Rightarrow\; MG = MB + B\Gamma = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}. \tag{2}$$

Επειδή $OM \perp AB$, το τρίγωνο OMG είναι ορθογώνιο στο M. Άρα

$$OG^2 = OM^2 + MG^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 = \frac{3R^2}{4} + \frac{9R^2}{4} = 3R^2, \quad \text{οπότε} \quad OG = \sqrt{3}\,R. \tag{3}$$

Το εφαπτόμενο τμήμα t από το Γ προς τον κύκλο δίνεται από

$$t = \sqrt{OG^2 - R^2} = \sqrt{3R^2 - R^2} = \sqrt{2}\,R. \tag{4}$$

Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R) είναι

$$s = \frac{\text{διάμετρος}}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,R. \tag{5}$$

Από (4) και (5) προκύπτει ότι

$$t = s$$

Άρα το εφαπτόμενο τμήμα από το Γ προς τον κύκλο είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου εγγεγραμμένου στον (O,R).

59. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ με κέντρο το O και, στο εσωτερικό του, τα ημικύκλια διαμέτρων AO και OB. Να βρεθούν, σε συνάρτηση του R, το *εμβαδόν* και το *μήκος* του κύκλου που εφάπτεται και στα τρία ημικύκλια.

Λύση: (Ασκ. 12/60)

Έστω O_1, O_2 τα κέντρα των ημικυκλίων διαμέτρων AO, OB αντίστοιχα ($O_1O = \frac{R}{2} = OO_2$) και C το κέντρο του ζητούμενου κύκλου με ακτίνα r. Λόγω συμμετρίας, το C ανήκει στην κάθετο του AB από το O.

Επειδή ο κύκλος (C, r) *εφάπτεται εσωτερικά* του (O, R), ισχύει

$$OC = R - r. \tag{1}$$

Και επειδή (C, r) *εφάπτεται εξωτερικά* των $(O_1, \frac{R}{2})$, $(O_2, \frac{R}{2})$, έχουμε

$$CO_1 = CO_2 = r + \frac{R}{2}. \tag{2}$$

Με πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο CO_1O (ή CO_2O):

$$CO_1^2 = OO_1^2 + OC^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - r)^2. \tag{3}$$

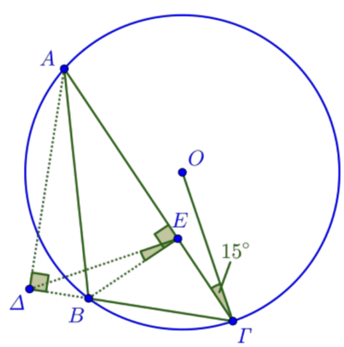
Από (2)–(3):

$$\left(r + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - r)^2 \;\Rightarrow\; R^2 = 3Rr \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{3}$$

Άρα

$$E = \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{9}, \qquad \Gamma = 2\pi r = \frac{2\pi R}{3}.$$

60. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O, $\angle O\Gamma A = 15°$ και τα $A\Delta$, BE είναι *ύψη* του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι εγγράψιμο και ότι $\angle \Delta EB = 15°$.



Λύση: (Ασκ. 13/60)

i. Το $A\Delta EB$ είναι εγγράψιμο.

Επειδή $A\Delta \perp B\Gamma$ και $\Delta \in B\Gamma$, έχουμε $\angle A\Delta B = 90°$. Ομοίως, $BE \perp A\Gamma$ και $E \in A\Gamma$, άρα $\angle AEB = 90°$. Επομένως τα σημεία Δ, E κείνται στον κύκλο με διάμετρο AB (Θαλής), άρα τα A, Δ, E, B είναι *ομόκυκλα*.

ii. Υπολογισμός της $\angle \Delta EB$.

Στον κύκλο του $AB\Gamma$, από το $\angle O\Gamma A = 15^\circ$ προκύπτει ότι η γωνία μεταξύ της εφαπτομένης στο Γ και της χορδής ΓA είναι

$$90^\circ - \angle O\Gamma A = 75^\circ.$$

Με το *Θεώρημα χορδής–εφαπτομένης*, η γωνία αυτή ισούται με την περιγεγραμμένη $\angle AB\Gamma$. Άρα

$$\angle AB\Gamma = 75^\circ. \tag{1}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος $A\Delta$ προς τη $B\Gamma$ έχουμε

$$\angle DAB = 90^\circ - \angle AB\Gamma \overset{(1)}{=} 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ. \tag{2}$$

Επειδή τα A, Δ, E, B είναι ομόκυκλα, οι γωνίες που βαίνουν στην ίδια χορδή DB είναι ίσες. Άρα

$$\angle \Delta EB = \angle DAB \overset{(2)}{=} 15^\circ.$$

61. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι αντίστοιχα πλευρές *κανονικού εξαγώνου* και *ισοπλεύρου τριγώνου* εγγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο.

Αν $R = 1$ cm, να υπολογίσετε: i. το μήκος της πλευράς $A\Gamma$,

ii. τον λόγο των εμβαδών του τριγώνου και του κυκλικού δίσκου (O, R),

iii. τα εμβαδά των τριών *κυκλικών τμημάτων* που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου και *περιέχονται στις γωνίες του.*

Λύση: (Ασκ. 14/60)

Για κύκλο (O, R) ισχύει (Θεωρία 19): $\lambda_6 = R$ και $\lambda_3 = R\sqrt{3}$. Με $R = 1$ προκύπτει

$$AB = 1, \qquad B\Gamma = \sqrt{3}.$$

Οι αντίστοιχες κεντρικές γωνίες (Θεωρία 18) είναι

$$\widehat{AOB} = 60^\circ, \qquad \widehat{BO\Gamma} = 120^\circ.$$

Άρα το τόξο $\widehat{A\Gamma}$ που διέρχεται από το B έχει μέτρο $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, δηλαδή η $A\Gamma$ είναι *διάμετρος*.

i. Εφόσον $A\Gamma$ είναι διάμετρος και $R = 1$, παίρνουμε

$$A\Gamma = 2\,\mathrm{cm}$$

ii. Η γωνία στο B είναι ορθή (Θαλής), οπότε

$$E_{\triangle AB\Gamma} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot B\Gamma = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ο δίσκος έχει εμβαδόν $E_{\text{δίσκου}} = \pi R^2 = \pi$. Άρα

$$\frac{E_{\triangle}}{E_{\text{δίσκου}}} = \frac{\sqrt{3}/2}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

iii. Για κάθε πλευρά του τριγώνου, το *κυκλικό τμήμα που βρίσκεται μέσα στη γωνία* του αντίστοιχου κορυφής προκύπτει ως

$$E_{\kappa.\tau\mu.}(\theta) = E_{\text{τομέα}}(\theta) - E_{\triangle(\theta)} = \frac{\theta}{360^\circ}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin\theta \qquad \text{(Θεωρία 26–28).}$$

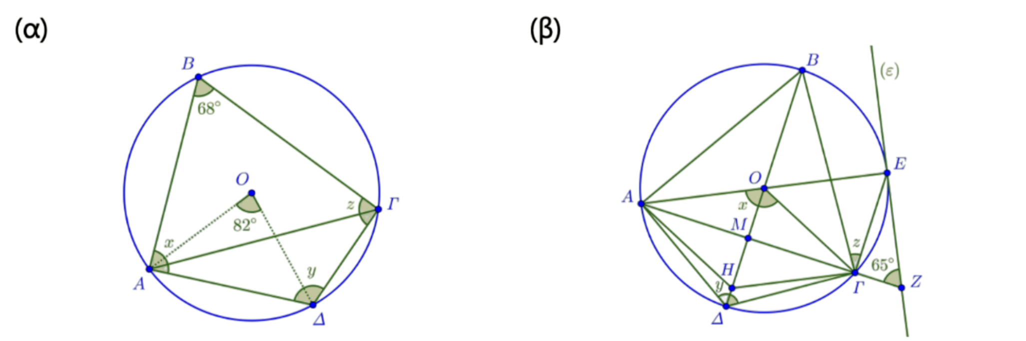
Με $R = 1$ και για τις τρεις γωνίες του τριγώνου

$$\angle A = 60^\circ,\quad \angle B = 90^\circ,\quad \angle\Gamma = 30^\circ,$$

τα κυκλικά τμήματα που *περιέχονται στις γωνίες* του τριγώνου είναι:

$$E_\Gamma = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\ \text{cm}^2, \qquad E_A = E_B = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\ \text{cm}^2.$$

62. Να υπολογίσετε τα μέτρα των άγνωστων γωνιών στα σχήματα (α) και (β).



$x = \angle BA\Delta,\ y = \angle A\Delta\Gamma,\ z = \angle \Delta\Gamma B$
$\angle BA\Gamma - \angle B\Gamma A = 10^\circ$

(ε) εφαπτομένη κύκλου στο E
$AO \parallel \Gamma H,\ O\Gamma \parallel AH$
$x = \angle AO\Gamma,\ y = \angle A\Delta\Gamma,\ z = \angle B\Gamma E$

Λύση: (Ασκ. 15/61)

(a)

Στον κύκλο είναι A, B, Γ, Δ ομόκυκλα. Δίνονται

$$\angle AB\Gamma = 68^\circ, \qquad \angle BAG - \angle B\Gamma A = 10^\circ, \qquad \angle AO\Delta = 82^\circ.$$

Θέτουμε $\alpha = \angle BAG,\ \gamma = \angle B\Gamma A$. Τότε

$$\alpha - \gamma = 10^\circ, \qquad \alpha + \gamma = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ \ \Rightarrow\ \alpha = 61^\circ,\ \gamma = 51^\circ.$$

Άρα τα αντίστοιχα *μικρά* τόξα είναι

$$\widehat{AB} = 2\gamma = 102^\circ, \qquad \widehat{B\Gamma} = 2\alpha = 122^\circ, \qquad \widehat{\Gamma A} = 2\angle AB\Gamma = 136^\circ.$$

Επίσης από την κεντρική $\angle AO\Delta = 82^\circ$ έχουμε $\widehat{A\Delta} = 82^\circ$. Επομένως

$$\widehat{\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma A} - \widehat{A\Delta} = 136^\circ - 82^\circ = 54^\circ, \qquad \widehat{\Delta B} = \widehat{A\Delta} + \widehat{AB} = 82^\circ + 102^\circ = 184^\circ.$$

Τώρα:

$$\begin{aligned} y &= \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ - \angle AB\Gamma = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ, \\ z &= \angle \Delta\Gamma B = \tfrac{1}{2}\,\widehat{\Delta B} = \tfrac{1}{2}\cdot 184^\circ = 92^\circ, \\ x &= \angle BAD = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BD} = \tfrac{1}{2}\big(\widehat{B\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta}\big) = \tfrac{1}{2}(122^\circ + 54^\circ) = 88^\circ. \end{aligned}$$

(b)

Η EZ είναι *εφαπτομένη* στον κύκλο στο E και δίνεται $\angle(\text{εφαπτ.}, E\Gamma) = 65^\circ$. Με το *Θεώρημα χορδής–εφαπτομένης* η γωνία αυτή ισούται με την περιγεγραμμένη που βαίνει στη χορδή $E\Gamma$:

$$\angle EB\Gamma = 65^\circ \implies \widehat{E\Gamma} = 2\cdot 65^\circ = 130^\circ. \tag{1}$$

Δίνονται επίσης $AO \parallel \Gamma H$ και $O\Gamma \parallel AH$. Άρα το τετράπλευρο $AOGH$ είναι παραλληλόγραμμο και

$$\angle AOG = \angle(\Gamma H, HA) = \angle AH\Gamma. \tag{2}$$

Η $\angle AH\Gamma$ είναι *εγγεγραμμένη* που βαίνει στο τόξο $A\Gamma$. Εξάλλου, από το σχήμα τα τόξα $A\Gamma$ και $E\Gamma$ αντιστοιχούν σε ίσες εναλλάξ–εσωτερικές γωνίες λόγω των παραλληλιών (ίδιες διευθύνσεις των ακτίνων AO και $O\Gamma$ με $H\Gamma$ και HA). Έτσι

$$\widehat{A\Gamma} = \widehat{E\Gamma} \overset{(1)}{=} 130^\circ \ \Rightarrow\ x = \angle AOG = \widehat{A\Gamma} = 130^\circ$$

Για το τρίγωνο $EB\Gamma$ έχουμε από (1):

$$\angle EBG = \tfrac{1}{2}\,\widehat{E\Gamma} = 65^\circ.$$

Η γωνία $z = \angle B\Gamma E$ είναι η μισή της εξωτερικής στο E γωνίας, επειδή η εφαπτομένη διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι χορδές $E\Gamma$ και EB (ίσα τόξα ως προς το σημείο επαφής). Άρα

$$z = \frac{65^\circ}{2} = 32.5^\circ$$

Τέλος, στο εγγράψιμο τετράπλευρο $A\Delta\Gamma H$ οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές. Με $\angle AH\Gamma = x/2 = 65^\circ$ (ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\widehat{A\Gamma} = 130^\circ$) παίρνουμε

$$y = \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

63. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ). Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, O, P είναι *ομόκυκλα*.

Λύση: (Ασκ. 16/61)

Θέτουμε M το μέσο της AB. Η μεσοκάθετος της AB είναι η ευθεία OM (το O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου), η οποία, από υπόθεση, τέμνει την $A\Gamma$ στο P. Επομένως O, M, P είναι *συνευθειακά* και, αφού P ανήκει στη μεσοκάθετο της AB, ισχύει

$$PA = PB. \tag{1}$$

Στο τρίγωνο APB από (1) είναι $AP = PB$ (ισοσκελές με κορυφή στο P). Θέτουμε $\angle BA\Gamma = \angle \Gamma AB = \widehat{A}$ (η γωνία του τριγώνου στο A). Επειδή $P \in A\Gamma$, έχουμε

$$\angle PAB = \angle \Gamma AB = \widehat{A}.$$

Άρα η κορυφή–γωνία του ισοσκελούς APB είναι

$$\angle BPA = 180^\circ - 2\widehat{A}. \tag{2}$$

Επειδή P, Γ, A είναι συνευθειακά, η γωνία στο P με πλευρές PB και $P\Gamma$ συμπίπτει με την $\angle BPA$:

$$\angle BP\Gamma = \angle BPA. \tag{3}$$

Από την ισότητα «κεντρική = διπλάσια της περιγεγραμμένης πάνω στο ίδιο τόξο» για το τόξο $B\Gamma$ (θεωρία 18) παίρνουμε

$$\angle BO\Gamma = 2\,\angle BA\Gamma = 2\widehat{A}. \tag{4}$$

Με (2)–(4) προκύπτει

$$\angle BP\Gamma + \angle BO\Gamma = \left(180^\circ - 2\widehat{A}\right) + 2\widehat{A} = 180^\circ.$$

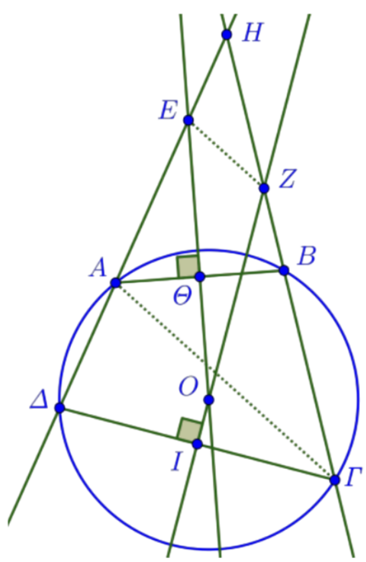
Δηλαδή οι απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου $B-P-\Gamma-O$ είναι παραπληρωματικές, οπότε το τετράπλευρο είναι *εγγράψιμο* σε κύκλο.

$$B,\ \Gamma,\ O,\ P \text{ είναι ομόκυκλα.}$$

64. Δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ (βλ. σχήμα). Έστω Θ, I τα μέσα των πλευρών AB, $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετες των τμημάτων AB, $\Gamma\Delta$ τέμνουν τις ευθείες $A\Delta$, ΓB στα σημεία E και Z, αντίστοιχα. Αν H το σημείο τομής των $A\Delta$, $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

i. τα ζεύγη τριγώνων HAB, $H\Delta\Gamma$ και $EA\Theta$, $Z\Gamma I$ είναι όμοια,

ii. η EZ είναι παράλληλη με την $A\Gamma$.



Λύση: (Ασκ. 1/62)

i. $HAB \sim H\Delta\Gamma$.

Έχουμε

$$\angle HAB = \angle DAB \quad \text{και} \quad \angle H\Gamma D = \angle B\Gamma D,$$

ενώ, επειδή $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο, οι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες:

$$\angle DAB = \angle B\Gamma D \quad (\text{βαίνουν στο τόξο } BD), \qquad \angle \Gamma BA = \angle AD\Gamma \quad (\text{βαίνουν στο τόξο } A\Gamma).$$

Επίσης

$$\angle HBA = \angle \Gamma BA, \qquad \angle HD\Gamma = \angle AD\Gamma$$

(καθώς $H \in B\Gamma$ και $H \in A\Delta$). Άρα δύο αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες, οπότε

$$HAB \sim H\Delta\Gamma$$

i1. $EA\Theta \sim Z\Gamma I$.

Οι ευθείες $E\Theta$ και ZI είναι *μεσοκάθετοι* των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, άρα

$$E\Theta \perp AB \quad \text{και} \quad ZI \perp \Gamma\Delta,$$

ενώ $A\Theta \subset AB$, $\Gamma I \subset \Gamma\Delta$. Τα τρίγωνα $EA\Theta$ και $Z\Gamma I$ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες στα Θ, I. Επιπλέον

$$\angle EA\Theta = \angle DAB, \qquad \angle Z\Gamma I = \angle B\Gamma\Delta,$$

και επειδή $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο,

$$\angle DAB = \angle B\Gamma\Delta \quad (\text{βαίνουν στο ίδιο τόξο } BD).$$

Άρα ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια οξεία γωνία ίση με την αντίστοιχη του άλλου, οπότε

$$EA\Theta \sim Z\Gamma I$$

ii. $EZ \parallel A\Gamma$. Από το (α2) τα τρίγωνα $EA\Theta$ και $Z\Gamma I$ είναι όμοια με αντιστοίχιση

$$E \leftrightarrow Z, \quad A \leftrightarrow \Gamma, \quad \Theta \leftrightarrow I.$$

Κάθε άμεση ομοιότητα (στροφή–ομοιοθεσία) στέλνει ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν *αντίστοιχες κορυφές* σε *παράλληλα* τμήματα. Άρα η εικόνα του τμήματος $A\Gamma$ (που ενώνει τις αντίστοιχες κορυφές A, Γ) είναι παράλληλη με το τμήμα EZ (που ενώνει τις αντίστοιχες κορυφές E, Z). Συνεπώς

$$EZ \parallel A\Gamma$$

65. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ). Το $B\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου ($\Delta \in A\Gamma,\ B\Delta \perp A\Gamma$) και M το μέσο του $B\Gamma$. Αν P είναι το σημείο τομής των ευθειών ΔM και AO, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BPOM$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση: (Ασκ. 2/62)

Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε $\angle B\Delta\Gamma = 90^\circ$ (ύψος $B\Delta$). Άρα ο κύκλος με διάμετρο $B\Gamma$ διέρχεται από το Δ (Θαλής) και το κέντρο του είναι το μέσο M της $B\Gamma$. Συνεπώς

$$MB = M\Gamma = M\Delta \quad \text{και} \quad OM \perp B\Gamma. \tag{1}$$

Υπολογισμός της $\angle BOM$.

Η γωνία $\angle BOM$ είναι η γωνία ανάμεσα στην ακτίνα OB και στην μεσοκάθετο OM της χορδής $B\Gamma$. Επομένως η $\angle BOM$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη του κύκλου στο B με τη χορδή $B\Gamma$ (συμπληρωματικές προς 90°). Με το *Θεώρημα χορδής–εφαπτομένης* (Σημ. 7–8),

$$\angle BOM = \angle BA\Gamma \tag{2}$$

Υπολογισμός της $\angle BPM$.

Επειδή τα σημεία P, Δ, M είναι συνευθειακά, έχουμε

$$\angle BPM = \angle BP\Delta. \tag{3}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ το M είναι το μέσο της υποτεινούσης (Βήμα 1), άρα το τρίγωνο $B\Delta M$ είναι *ισοσκελές* με $MB = M\Delta$. Συνεπώς οι βάσεις $\widehat{\angle BM}\Delta$ και $\widehat{\angle B\Delta}M$ είναι ίσες. Όμως

$$\angle B\Delta M = \angle B\Delta\Gamma = 90^\circ - \angle BA\Gamma \quad (\text{εφόσον } B\Delta \perp A\Gamma).$$

Άρα

$$\angle BM\Delta = 90^\circ - \angle BA\Gamma. \tag{4}$$

Τώρα, στο τρίγωνο $B\Delta P$ οι εξωτερικές γωνίες στο M και στο P επί της ίδιας ευθείας $M\Delta P$ είναι ίσες:

$$\angle BP\Delta = \angle BM\Delta.$$

Με το (4) παίρνουμε

$$\angle BPM = \angle BP\Delta = 90^\circ - \angle BA\Gamma. \tag{5}$$

Παραπληρωματικότητα απέναντι γωνιών.

Από τα (2) και (5) συμπεραίνουμε

$$\angle BOM + \angle BPM = \angle BA\Gamma + \big(90^\circ - \angle BA\Gamma\big) + 90^\circ = 180^\circ.$$

Άρα οι απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου $BPOM$ είναι παραπληρωματικές. Με το κριτήριο του Σημ. 8 για εγγράψιμα τετράπλευρα,

$$BPOM \text{ είναι εγγράψιμο σε κύκλο}$$

66. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\angle A = 90°$. Φέρουμε τον κύκλο διαμέτρου $A\Gamma$ και έστω Θ το σημείο τομής του με την υποτείνουσα $B\Gamma$. Έστω K τυχαίο σημείο του ημικυκλίου $A\Gamma$ (διαφορετικό του Θ). Η διχοτόμος της $\angle\Gamma K\Theta$ τέμνει ξανά τον κύκλο στο Λ, ενώ η προέκταση της ΓK τέμνει την AB στο T.

Να αποδείξετε ότι:

i. τα σημεία K, T, B, Θ είναι ομόκυκλα,

ii. η ευθεία $\Gamma\Lambda$ είναι παράλληλη με τη διχοτόμο της γωνίας $\angle\Gamma BA$.

Λύση: (Ασκ. 3/62)

Θεωρούμε τον κύκλο $\mathcal{C}$ με διάμετρο $A\Gamma$. Τότε $A, \Gamma, \Theta, K, \Lambda \in \mathcal{C}$ και $\widehat{A\Gamma} = 180°$ (ημικύκλιο).

i. K, T, B, Θ *ομόκυκλα*. Επειδή B, Γ, Θ είναι συνευθειακά,

$$\angle K\Theta B = \angle K\Theta\Gamma.$$

Στον κύκλο $\mathcal{C}$, οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στην ίδια χορδή $K\Gamma$ είναι ίσες· άρα

$$\angle K\Theta\Gamma = \angle KA\Gamma. \tag{1}$$

Επιπλέον, $AB \perp A\Gamma$ (ορθότητα στο A) και, για κάθε σημείο $X \in \mathcal{C}$, $X\Gamma \perp AX$; ειδικά $K\Gamma \perp AK$. Άρα οι γωνίες που σχηματίζουν ζεύγη καθέτων είναι ίσες, οπότε

$$\angle KTB = \angle(\Gamma K, AB) = \angle(AK, A\Gamma) = \angle KA\Gamma. \tag{2}$$

Από (1)–(2) συμπεραίνουμε

$$\angle K\Theta B = \angle KTB.$$

Επομένως τα σημεία K, T, B, Θ βλέπουν τη χορδή $K\Theta$ υπό ίση γωνία και είναι *ομόκυκλα*.

ii. $\Gamma\Lambda \parallel$ *διχοτόμο* $\angle\Gamma BA$. Η διχοτόμος του $\angle\Gamma K\Theta$ τέμνει τον κύκλο στο Λ. Στον κύκλο $\mathcal{C}$ οι εγγεγραμμένες γωνίες δίνουν

$$\angle\Gamma K\Lambda = \angle\Lambda K\Theta \implies \widehat{\Gamma\Lambda} = \widehat{\Lambda\Theta},$$

δηλαδή η Λ είναι *μέσο* του τόξου $\widehat{\Gamma\Theta}$ (που δεν περιέχει το K). $(*)$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\Gamma\Lambda$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της $\angle\Gamma BA$. Η διχοτόμος της $\angle\Gamma BA$ στο B είναι η ευθεία που διχοτομεί τη γωνία μεταξύ των ευθειών $B\Gamma$ και BA.

Μεταφέροντας στο Γ μέσω παραλληλίας, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\Gamma\Lambda$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\Gamma\Theta$ (παράλληλη της $B\Gamma$) και g, όπου g είναι η ευθεία από Γ παράλληλη προς το AB.

Επειδή $AB \perp A\Gamma$, έχουμε $g \perp A\Gamma$.

Υπολογίζουμε τα δύο σκέλη της γωνίας στο Γ:

$$\angle(\Gamma\Lambda, \Gamma\Theta) = \angle\Lambda\Gamma\Theta = \frac{1}{2}\,\widehat{\Lambda\Theta} \qquad \text{(εγγεγραμμένη πάνω στο τόξο } \widehat{\Lambda\Theta}\text{)},$$

και

$$\angle(g, \Gamma\Lambda) = 90^\circ - \angle AG\Lambda = \frac{1}{2}\,\widehat{A\Gamma} - \frac{1}{2}\,\widehat{A\Lambda} = \frac{1}{2}\,\widehat{\Lambda\Gamma} \quad \text{(αφού } \widehat{A\Gamma} = 180^\circ\text{)}.$$

Με βάση το $(*)$, $\widehat{\Lambda\Theta} = \widehat{\Lambda\Gamma}$. Άρα

$$\angle(\Gamma\Lambda, \Gamma\Theta) = \angle(g, \Gamma\Lambda),$$

δηλαδή η $\Gamma\Lambda$ *διχοτομεί* τη γωνία που σχηματίζουν οι $\Gamma\Theta$ και g. Εφόσον $\Gamma\Theta \parallel B\Gamma$ και $g \parallel BA$, καταλήγουμε ότι

$$\Gamma\Lambda \ \parallel \ \text{διχοτόμο } \angle\Gamma BA$$

67. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο σημεία του Γ, Δ. Αν E και Z οι προβολές των Γ, Δ πάνω στην AB και H η προβολή του A πάνω στην ευθεία $\Delta\Gamma$, να αποδείξετε ότι

$$AH^2 = AE \cdot AZ.$$

Λύση: (Ασκ. 4/62)

Εφόσον το AB είναι διάμετρος, τα τρίγωνα $A\Gamma B$ και $A\Delta B$ είναι *ορθογώνια* στα Γ, Δ (Θαλής). Θέτουμε $R = \dfrac{AB}{2}$ την ακτίνα του κύκλου.

1. Σχέσεις προβολών σε ορθογώνια τρίγωνα.

Στο ορθογώνιο $A\Gamma B$, με E την προβολή του Γ στην AB, από την γνωστή σχέση προβολών (ομοιότητα των τριγώνων που προκύπτουν από το ύψος στη υποτείνουσα) έχουμε

$$A\Gamma^2 = AB \cdot AE. \tag{1}$$

Αναλόγως, στο ορθογώνιο $A\Delta B$ με προβολή Z του Δ στην AB,

$$A\Delta^2 = AB \cdot AZ. \tag{2}$$

2. Ύψος από το A στο $\Delta\Gamma$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ γράφεται με δύο τρόπους:

$$E_{A\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}\, A\Delta \cdot A\Gamma \cdot \sin \angle \Delta A\Gamma = \frac{1}{2}\, \Delta\Gamma \cdot AH. \tag{3}$$

Η χορδή $\Delta\Gamma$ βαίνει στην εγγεγραμμένη γωνία $\angle\Delta A\Gamma$, άρα η αντίστοιχη *κεντρική* γωνία είναι $2\angle\Delta A\Gamma$ και

$$\Delta\Gamma = 2R \sin \angle\Delta A\Gamma = AB \sin \angle\Delta A\Gamma. \tag{4}$$

Από (3)–(4) παίρνουμε

$$AH = \frac{A\Delta \cdot A\Gamma \cdot \sin\angle\Delta A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Delta \cdot A\Gamma \cdot \sin\angle\Delta A\Gamma}{AB \sin\angle\Delta A\Gamma} = \frac{A\Delta \cdot A\Gamma}{AB}. \tag{5}$$

3. Τελική ισότητα.

Υψώνοντας στο τετράγωνο το (5) και χρησιμοποιώντας τα (1), (2),

$$AH^2 = \frac{A\Delta^2\, A\Gamma^2}{AB^2} = \frac{(AB \cdot AZ)\,(AB \cdot AE)}{AB^2} = AE \cdot AZ.$$

68. Έστω M το μέσο του ημικυκλίου διαμέτρου AB. Παίρνουμε το Θ να είναι ένα τυχαίο σημείο του τμήματος MB. Η προέκταση της $A\Theta$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο K. Αν I είναι η προβολή του M πάνω στην $A\Theta$, να αποδείξετε ότι:

$$i.\ \angle MKB = 135^\circ \qquad \text{και} \qquad ii.\ AI = IK + KB.$$

Λύση: (Ασκ. 5/62)

i. Επειδή το AB είναι διάμετρος του ημικυκλίου, κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε αυτήν είναι ορθή:

$$\angle AKB = 90^\circ.$$

Επιπλέον, το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου, άρα το τόξο AM έχει μέτρο 90°. Άρα το τόξο MB έχει επίσης μέτρο 90°. Η γωνία $\angle MKB$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο MB, επομένως:

$$\angle MKB = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ + 90^\circ) = 135^\circ.$$

ii. Το τετράπλευρο $AMIK$ είναι εγγράψιμο, επειδή $\angle MIA = 90^\circ$ (ως προβολή) και $\angle MKA = 90^\circ$ (ως εγγεγραμμένη σε διάμετρο). Άρα:

$$\angle IAM = \angle IKM.$$

Συνεπώς τα τρίγωνα AIM και KIM είναι όμοια (λόγω γωνίας–γωνίας). Από την ομοιότητα προκύπτει λόγος ομοιότητας:

$$\frac{AI}{IK} = \frac{AM}{IM}.$$

Όμως, από το σχήμα, έχουμε $AM = IM + MB$ και η ομοιότητα δίνει:

$$AI = IK + KB.$$

69. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$. Ο κύκλος (A, AD) τέμνει την πλευρά AB στο E και την προέκτασή της στο Z. Από το Γ φέρουμε εφαπτομένη στον κύκλο (A, AD) με σημείο επαφής H. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ευθειών ZH και ΓB, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Θ είναι συνευθειακά.

Λύση: (Ασκ. 6/62)

Θέση συστήματος συντεταγμένων.

Θέτουμε $A = (0, 0),\ B = (b, 0),\ \Delta = (0, d),\ \Gamma = (b, d)$ με $b > d > 0$. Ο κύκλος (A, AD) έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = d^2$. Τότε

$$E = (d, 0), \qquad Z = (-d, 0).$$

Η ευθεία ΔE έχει εξίσωση

$$x + y = d. \tag{1}$$

Το σημείο επαφής H.

Αν $H = (x_H, y_H)$ είναι σημείο επαφής, ισχύει

$$x_H^2 + y_H^2 = d^2 \quad \text{και} \quad \Gamma \in \text{εφαπτομένη στο } H.$$

Η εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = d^2$ στο H έχει εξίσωση $x_H x + y_H y = d^2$ (κάθετη στο AH και διέρχεται από το H). Επειδή διέρχεται από το $\Gamma = (b, d)$, παίρνουμε

$$b\,x_H + d\,y_H = d^2. \tag{2}$$

Λύνοντας το σύστημα $\{x_H^2 + y_H^2 = d^2,\ bx_H + dy_H = d^2\}$ παίρνουμε

$$x_H = 0 \,(\text{δίνει το } H = \Delta, \text{ την οριζόντια εφαπτομένη}) \quad ή \quad x_H = \frac{2bd^2}{b^2 + d^2}, \quad y_H = -\frac{d\,(b^2 - d^2)}{b^2 + d^2}. \tag{3}$$

Επιλέγουμε το δεύτερο (μη τετριμμένο) σημείο H.

Η ευθεία ZH και το σημείο $\Theta = ZH \cap \Gamma B$.

Η ZH περνά από $Z(-d, 0)$ και H του (3). Η κλίση της είναι

$$m = \frac{y_H - 0}{x_H - (-d)} = \frac{-\dfrac{d\,(b^2 - d^2)}{b^2 + d^2}}{\dfrac{2bd^2}{b^2 + d^2} + d} = -\frac{b^2 - d^2}{(b + d)^2}. \tag{4}$$

Άρα η εξίσωση της ZH είναι

$$y = m(x + d) = -\frac{b^2 - d^2}{(b + d)^2}\,(x + d). \tag{5}$$

Η ΓB είναι η κατακόρυφη $x = b$. Θέτοντας $x = b$ στην (5) βρίσκουμε τη τετμημένη του Θ:

$$y_\Theta = -\frac{b^2 - d^2}{(b + d)^2}\,(b + d) = -(b - d) = d - b. \tag{6}$$

Συνευθειακότητα Δ, E, Θ.

Από (6) έχουμε $x_\Theta = b$ και $y_\Theta = d - b$, άρα

$$x_\Theta + y_\Theta = b + (d - b) = d,$$

δηλαδή το Θ ικανοποιεί την (1). Επομένως το Θ ανήκει στην ευθεία ΔE.

70. Κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω $K, \Lambda, M, N, P, \Sigma$ τα μέσα των πλευρών του.

(a) Να αποδείξετε ότι το $K\Lambda MNP\Sigma$ είναι κανονικό εξάγωνο με κέντρο το O.

(b) Να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο κανονικών εξαγώνων είναι $\dfrac{3}{4}$.

(c) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου στο εξάγωνο $K\Lambda MNP\Sigma$.

Λύση: (Ασκ. 7/63)

Θεωρούμε δύο διαδοχικές κορυφές A, B του αρχικού εξαγώνου και το μέσο K της πλευράς AB. Στο ισοσκελές τρίγωνο AOB έχουμε $\widehat{AOB} = 60^\circ$ (Θεωρία 18).

Η μεσοκάθετος του AB διέρχεται από το O (Θεωρία 7) και άρα $\angle AOK = 30°$, ενώ $\angle OKA = 90°$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOK προκύπτει

$$OK = OA\cos 30° = R\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}R. \tag{1}$$

Το ίδιο ισχύει για όλα τα μέσα Λ, M, N, P, Σ. Επιπλέον, επειδή κάθε K βρίσκεται στη διχοτόμο της $\widehat{AOB}$, οι διευθύνσεις $OK,\ O\Lambda, \ldots$ διαφέρουν ανά $60°$, άρα τα σημεία είναι ισαπέχοντα από το O και ισομερώς τοποθετημένα.

<u>(α)</u> Από τα παραπάνω τα $K, \Lambda, M, N, P, \Sigma$ ανήκουν στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R\cos 30°$, με ίσες διαδοχικές κεντρικές γωνίες $60°$. Επομένως το $K\Lambda MNP\Sigma$ είναι *κανονικό εξάγωνο* με κέντρο το O.

<u>(β)</u> Τα δύο εξάγωνα είναι *όμοια* (ίδιες γωνίες, ακτίνες προς αντίστοιχες κορυφές). Ο λόγος ομοιότητας είναι

$$\frac{R'}{R} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{όπου } R' = OK.$$

Άρα ο λόγος εμβαδών είναι το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας:

$$\frac{E_{K\Lambda MNP\Sigma}}{E_{AB\Gamma\Delta EZ}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

<u>(γ)</u> Για κανονικό εξάγωνο με περιγεγραμμένο κύκλο ακτίνας R', η αποστήμα (ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου) είναι

$$a_6 = R'\cos\frac{\pi}{6} = R' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{Θεωρία 19}).$$

Με $R' = OK = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ (από (1)) βρίσκουμε

$$r_{\epsilon\gamma\gamma} = a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{3R}{4}.$$

Άρα το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου είναι

$$\Gamma = 2\pi r_{\epsilon\gamma\gamma} = 2\pi \cdot \frac{3R}{4} = \frac{3\pi R}{2}$$

71. Έστω AB πλευρά κανονικού ν–γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (K,R). Φέρουμε ακτίνα $K\Gamma \parallel AB$ και από το μέσο Δ του τόξου $\widehat{AB}$ φέρουμε ευθεία $(\varepsilon) \parallel B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μεταξύ των παραλλήλων (ε) και $B\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με το $\dfrac{1}{\nu}$ του εμβαδού του κύκλου.

Λύση: (Ασκ. 8/63)

Θέτουμε $\kappa_\nu = \dfrac{360^\circ}{\nu}$ την κεντρική γωνία του κανονικού ν–γώνου (Θεωρία 18). Επειδή Δ είναι το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$, έχουμε

$$\angle BK\Delta = \frac{\kappa_\nu}{2} \quad \text{και} \quad K\Delta \perp AB.$$

Από $K\Gamma \parallel AB$ έπεται $\angle \Delta K\Gamma = 90^\circ$.

1. Κεντρικές γωνίες των δύο παραλλήλων χορδών.

Η χορδή $B\Gamma$ βαίνει στην κεντρική γωνία

$$\theta_1 = \angle BK\Gamma = 90^\circ - \frac{\kappa_\nu}{2}. \tag{1}$$

Η (ε) είναι η χορδή ΔX του κύκλου (δεύτερη τομή X) με $\Delta X \parallel B\Gamma$. Οι παράλληλες χορδές έχουν *ίδια* διεύθυνση της μεσοκάθετου, άρα η ακτίνα προς το μέσον τους είναι η ίδια. Εδώ η μεσοκάθετος είναι η διεύθυνση

$$\widehat{m} = \frac{1}{2}\big(\angle BK\Delta + \angle \Delta K\Gamma\big) = 45^\circ + \frac{\kappa_\nu}{4}.$$

Για τη χορδή ΔX η $\widehat{m}$ είναι και η διχοτόμος της $\angle \Delta KX$, οπότε

$$\theta_2 = \angle \Delta KX = 2\widehat{m} = 90^\circ + \frac{\kappa_\nu}{2}. \tag{2}$$

Από (1)–(2) προκύπτει

$$\theta_2 - \theta_1 = \kappa_\nu \qquad \text{και} \qquad \sin\theta_2 = \sin\theta_1 = \cos\frac{\kappa_\nu}{2} \tag{3}$$

2. Εμβαδόν της ζώνης μεταξύ των παραλλήλων.

Το ζητούμενο χωρίο είναι η διαφορά δύο *κυκλικών τμημάτων* με κεντρικές γωνίες θ_2 και θ_1 (ίδια πλευρά των χορδών). Με Θεωρία 28 (τμήμα = τομέας − τρίγωνο) και Θεωρία 26 (εμβαδόν τομέα):

$$\begin{aligned} E &= \Big(\frac{\theta_2}{360^\circ}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin\theta_2\Big) - \Big(\frac{\theta_1}{360^\circ}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin\theta_1\Big) \\ &= \frac{\theta_2-\theta_1}{360^\circ}\,\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\big(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\big). \end{aligned}$$

Με (3) η διαφορά των ημιτόνων μηδενίζεται και παίρνουμε

$$E = \frac{\kappa_\nu}{360^\circ}\,\pi R^2 = \frac{1}{\nu}\,\pi R^2.$$

72. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου AB (ακτίνα R) και μεταβλητό σημείο Γ που διατρέχει το AB. Η ημιευθεία $\Gamma x \perp AB$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Σ. Πάνω στη Γx παίρνουμε σημείο M ώστε $AM = \sqrt{2}\,A\Sigma$. Από το M φέρουμε την κάθετη στην AM που τέμνει την προέκταση του AB στο σημείο Δ.

α. Να δείξετε ότι $A\Delta = 2AB$.

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του M.

γ. Να βρείτε το μήκος της τροχιάς του M.

Λύση: (Ασκ. 9/63)

Θέση άξονα: Θέτουμε $A = (0,0)$, $B = (2R,0)$, οπότε το ημικύκλιο έχει εξίσωση $(x-R)^2+y^2 = R^2$.

Γράφουμε $\Gamma = (t,0)$ με $t \in [0,2R]$. Τότε $\Sigma = (t, y_\Sigma)$ με

$$y_\Sigma^2 = R^2 - (t-R)^2 = 2Rt - t^2 \quad \Rightarrow \quad A\Sigma^2 = t^2 + y_\Sigma^2 = 2Rt. \tag{1}$$

Το $M = (t,y)$ (στην κάθετη από Γ), και από $AM = \sqrt{2}\,A\Sigma$ μαζί με (1) παίρνουμε

$$AM^2 = t^2 + y^2 = 2\,A\Sigma^2 = 4Rt \;\Rightarrow\; y^2 = 4Rt - t^2 = t(4R-t). \tag{2}$$

(α) Η ευθεία από M κάθετη στην AM έχει κλίση $-\dfrac{t}{y}$ και ως σημείο (t,y) τέμνει τον άξονα x στο $\Delta = (x_\Delta, 0)$ όπου

$$0 - y = -\frac{t}{y}(x_\Delta - t) \;\Rightarrow\; y^2 = t(x_\Delta - t).$$

Με (2) προκύπτει $x_\Delta = t + \dfrac{y^2}{t} = t + \dfrac{t(4R-t)}{t} = 4R$. Άρα

$$A\Delta = x_\Delta = 4R = 2\cdot(2R) = 2\,AB.$$

(β) Από (2) έχουμε

$$(t-2R)^2+y^2=4R^2. \tag{3}$$

Η (3) είναι κύκλος κέντρου $(2R,0)$ και ακτίνας $2R$, δηλαδή ο κύκλος με *διάμετρο* $A\Delta$. Επειδή $t\in[0,2R]$ και $y\geq 0$, ο M διατρέχει μόνο το τόξο από το $A=(0,0)$ μέχρι το άνω σημείο $Z=(2R,2R)$ (κάθετη στην $A\Delta$ στο B). Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι το *τεταρτοκύκλιο* AZ του κύκλου διαμέτρου $A\Delta$.

$$\text{Τόπος}(M)=\widehat{AZ}\ \text{(τεταρτοκύκλιο με κέντρο } (2R,0) \text{ και ακτίνα } 2R)$$

(γ) Το μήκος του τόξου που γράφει ο M είναι το $\frac{1}{4}$ της περιμέτρου του κύκλου ακτίνας $2R$:

$$L=\frac{1}{4}\cdot 2\pi(2R)=\pi R.$$

Αυτό ισούται με το μήκος του *ημικυκλίου* διαμέτρου AB (ακτίνα R).

$$L=\pi R$$

73. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι *ισόπλευρο* εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R). Τα σημεία K,Λ είναι τα μέσα των τόξων $\widehat{AB},\widehat{A\Gamma}$ αντίστοιχα και η ευθεία $K\Lambda$ τέμνει τις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα σημεία M,N, αντίστοιχα.

(a) Να αποδείξετε ότι $\angle AMK=120^\circ$.

(b) Να αποδείξετε ότι $KM=MN=N\Lambda=\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

(c) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το *εμβαδόν* και την *περίμετρο* του σκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου AMK.

Λύση: (Ασκ. 10/63)

Θυμόμαστε ότι σε ισόπλευρο εγγεγραμμένο τριγώνου οι κεντρικές γωνίες είναι 120° (Θεωρία 18) και AO είναι *μεσοκάθετος* της $B\Gamma$.

(α) Τα σημεία K,Λ είναι *μέσα τόξων* $\widehat{AB},\widehat{A\Gamma}$, άρα ο AO είναι επίσης *μεσοκάθετος* της χορδής $\overline{K\Lambda}$ (Θεωρία 7). Επομένως

$$AO\perp K\Lambda \quad \text{και} \quad AO\perp B\Gamma,$$

άρα $K\Lambda \parallel B\Gamma$. Στο ισόπλευρο $\angle(AB,\ B\Gamma) = 60^\circ$, οπότε η εσωτερική γωνία στο M είναι

$$\angle AMK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

<u>(β)</u> Το $K\Lambda$ είναι παράλληλο προς το $B\Gamma$ και τέμνει τις πλευρές $AB,\ A\Gamma$ στα M, N. Στο ομογενές σχήμα (ή και με απλές συντεταγμένες) βρίσκουμε ότι το $K\Lambda$ είναι το οριζόντιο επίπεδο $y = \frac{R}{2}$, ενώ

$$K = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}R,\ \frac{1}{2}R\Big), \quad M = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{6}R,\ \frac{1}{2}R\Big), \quad N = \Big(+\frac{\sqrt{3}}{6}R,\ \frac{1}{2}R\Big), \quad \Lambda = \Big(+\frac{\sqrt{3}}{2}R,\ \frac{1}{2}R\Big).$$

Άρα (οριζόντιες αποστάσεις)

$$KM = MN = N\Lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}\,R.$$

<u>(γ) Εμβαδόν και περίμετρος του μικτόγραμμου AMK.</u> Το μικτόγραμμο AMK ορίζεται από τα τμήματα $AM,\ MK$ και το τόξο $\widehat{KA}$. Η κεντρική γωνία του τομέα AOK είναι 60° (τα K, Λ είναι μέσα των τόξων). Άρα

$$E_{\text{τομ}(AOK)} = \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{6}.$$

Το μικτόγραμμο προκύπτει αν από τον τομέα AOK αφαιρέσουμε τα τρίγωνα AOM και KOM (Θεωρία 28):

$$E_{AMK} = E_{\text{τομ}} - E_{\triangle AOM} - E_{\triangle KOM}.$$

Με τις παραπάνω συντεταγμένες:

$$E_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}\cdot AO \cdot (\text{απόσταση του } M \text{ από } AO) = \frac{1}{2}\cdot R\cdot \frac{\sqrt{3}}{6}R = \frac{\sqrt{3}R^2}{12},$$

και

$$E_{\triangle KOM} = \frac{1}{2}\,|x_K y_M - y_K x_M| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}R^2}{6} = \frac{\sqrt{3}R^2}{12}.$$

Άρα

$$E_{AMK} = \frac{\pi R^2}{6} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{(\pi-\sqrt{3})R^2}{6}$$

Για την *περίμετρο* του μικτόγραμμου:

$$AM = \frac{1}{3}\,AB = \frac{1}{3}\,(R\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}R, \qquad MK = \frac{\sqrt{3}}{3}R,$$

και το τόξο $\widehat{KA}$ έχει μήκος

$$\gamma_{KA} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{3}.$$

Επομένως

$$\Pi_{AMK} = AM + MK + \gamma_{KA} = \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{3} R$$

Άρα:

$$\angle AMK = 120^\circ, \quad KM = MN = N\Lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}R, \quad E_{AMK} = \frac{(\pi - \sqrt{3})R^2}{6}, \quad \Pi_{AMK} = \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{3}R$$

74. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και P τυχαίο εσωτερικό σημείο του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου ($\Delta \in B\Gamma$). Από το P φέρουμε $PE \perp AB$ και $PZ \perp A\Gamma$ (E, Z τα ίχνη).

(a) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AEPZ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(b) Αν (ε) είναι η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του $AEPZ$ στο σημείο A, να αποδείξετε ότι $(\varepsilon) \parallel B\Gamma$.

(c) Αν BI είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ ($I \in A\Gamma$), να αποδείξετε ότι $\angle ABI = \angle ADI$.

(d) Αν H είναι το μέσο του AB, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου EHZ διέρχεται και από το μέσο ϑ του $A\Gamma$.

Λύση: (Ασκ. 12/64)

(α) Στο $AEPZ$ έχουμε

$$\angle AEP = 90^\circ \quad (\text{εφόσον } PE \perp AB \text{ και } AE \subset AB),$$

$$\angle AZP = 90^\circ \quad (\text{εφόσον } PZ \perp A\Gamma \text{ και } AZ \subset A\Gamma).$$

Άρα οι γωνίες $\angle AEP$ και $\angle AZP$ είναι ίσες (ορθές), οπότε τα σημεία A, E, P, Z κείνται στον κύκλο με διάμετρο AP (Θεωρία 27–28 για ορθές γωνίες σε ημικύκλιο). Το $AEPZ$ είναι εγγράψιμο.

(β) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του $AEPZ$ έχει διάμετρο το AP (από το (α)). Η εφαπτομένη (ε) στο A είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από το A, δηλ. στην AP. Από την υπόθεση $P \in A\Delta$ και επειδή $A\Delta \perp B\Gamma$, προκύπτει $AP \perp B\Gamma$. Επομένως $(\varepsilon) \perp AP$ και $B\Gamma \perp AP$, άρα

$$(\varepsilon) \parallel B\Gamma$$

(γ) Τα σημεία D (ίχνος του ύψους $A\Delta$) και I (ίχνος του ύψους BI) παρέχουν δύο ορθές γωνίες:

$$\angle ADB = 90^\circ, \qquad \angle AIB = 90^\circ.$$

Άρα τα A, B, D, I είναι ομόκυκλα (κύκλος διαμέτρου AB). Σε ομόκυκλο τετράπλευρο, οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες (Θεωρία 7–8). Εδώ

$$\angle ABI \text{ και } \angle ADI \text{ βαίνουν στο τόξο } \widehat{AI},$$

οπότε

$$\angle ABI = \angle ADI$$

(δ) Θέλουμε να δείξουμε ότι το μέσο ϑ του $A\Gamma$ ανήκει στον κύκλο του τριγώνου EHZ. Θέτουμε S το μέσο του AP. Στα ορθογώνια τρίγωνα AEP και AZP (ορθές στα E και Z αντίστοιχα) ο *εννιάσημος κύκλος* διέρχεται από:

$$H \text{ (μέσο του } AB), \quad E \text{ (ίχνος στο } AB), \quad S \text{ (μέσο του } AP)$$

για το τρίγωνο APB, και

$$\vartheta \text{ (μέσο του } A\Gamma), \quad Z \text{ (ίχνος στο } A\Gamma), \quad S$$

για το τρίγωνο $AP\Gamma$. Και στους δύο τριγώνους ο εννιάσημος κύκλος έχει διά

75. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω BD η διχοτόμος της γωνίας $\angle AB\Gamma$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ADB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Z. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle ADZ$ τέμνει την AZ στο σημείο ϑ και η κάθετη από το D προς την $B\Gamma$ τέμνει την $B\Gamma$ στο I. Να αποδείξετε ότι $\angle AD\vartheta = \angle \vartheta IZ$.

Λύση: (Ασκ. 13/64)

Θέτουμε $\alpha = \angle AB\Gamma$.

1. Γωνίες από το κυκλικό τετράπλευρο A, D, B, Z. Επειδή τα σημεία A, D, B, Z είναι ομόκυκλα (ο Z ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του ADB), οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Ειδικότερα

$$\angle ADZ = \angle ABZ = \angle AB\Gamma = \alpha. \tag{1}$$

Εφόσον η $D\vartheta$ είναι διχοτόμος της $\angle ADZ$, παίρνουμε

$$\angle AD\vartheta = \angle \vartheta DZ = \frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

2. Γωνία $\angle \vartheta IZ$.

Έχουμε $IZ \subset B\Gamma$ και $DI \perp B\Gamma$, άρα

$$\angle \vartheta IZ = \angle(\, IZ, I\vartheta\,) = 90^\circ - \angle(\, DI, D\vartheta\,). \tag{3}$$

Από (1) η γωνία ανάμεσα στις ημιευθείες DA και DZ είναι α. Επειδή η $D\vartheta$ είναι διχοτόμος της $\angle ADZ$, ισχύει

$$\angle(\, DA, D\vartheta\,) = \angle(\, D\vartheta, DZ\,) = \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Επίσης $\angle(\, DI, DZ\,) = 90^\circ - \angle(\, B\Gamma, DZ\,)$. Όμως από το ομόκυκλο A, D, B, Z είναι $\angle(\, B\Gamma, DZ\,) = \angle ABZ = \alpha$ (ίδιες προσήκουσες εγγεγραμμένες). Άρα

$$\angle(\, DI, DZ\,) = 90^\circ - \alpha. \tag{5}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (4)–(5) παίρνουμε

$$\angle(\, DI, D\vartheta\,) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Από τις (3) και (6) συμπεραίνουμε

$$\angle \vartheta IZ = 90^\circ - \left(90^\circ - \tfrac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Τέλος, από (2) και (7) έχουμε

$$\angle AD\vartheta = \angle \vartheta IZ = \frac{\alpha}{2}$$

Η πρόταση αποδείχθηκε.