Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε περίπτωση:

(α) $f'(x) = 3x - 2, \quad f(1) = 1$

Λύση:

$$f(x) = \int (3x - 2)\, dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

Από $f(1) = 1$:

$$\frac{3}{2} - 2 + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}}$$

(β) $f'(x) = 2 - 3x^2, \quad f(3) = 2$

Λύση:

$$f(x) = \int (2 - 3x^2)\, dx = 2x - x^3 + C$$

$$f(3) = 6 - 27 + C = 2 \Rightarrow C = 23$$

$$\boxed{f(x) = 2x - x^3 + 23}$$

(γ) $f''(x) = 4 - 6x, \quad f'(0) = 4,\ f(0) = 1$

Λύση:

$$f'(x) = \int (4 - 6x)\, dx = 4x - 3x^2 + C$$

$$f'(0) = 4 \Rightarrow C = 4$$

$$f'(x) = 4x - 3x^2 + 4$$

$$f(x) = 2x^2 - x^3 + 4x + D$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow D = 1$$

$$\boxed{f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 1}$$

(δ) $f''(x) = x, \quad f'(1) = 1,\ f(1) = 1$

Λύση:

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$f'(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + D$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + D = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}}$$

(ε) $f''(x) = 2, \quad f(1) = f(3) = 0$

Λύση:

$$f'(x) = 2x + C, \quad f(x) = x^2 + Cx + D$$

$$f(1) = 1 + C + D = 0$$

$$f(3) = 9 + 3C + D = 0$$

Αφαιρούμε:

$$8 + 2C = 0 \Rightarrow C = -4$$

$$D = 3$$

$$\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 3}$$

(στ) $f'''(x) = 6,\ f''(0) = -4,\ f'(0) = 0,\ f(0) = 1$

Λύση:

$$f''(x) = 6x + C, \quad C = -4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + D, \quad D = 0$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

$$\boxed{f(x) = x^3 - 2x^2 + 1}$$

2. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f''(x) = 4x - 1$, αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(-1, 1)$.

Λύση:

$$f'(x) = 2x^2 - x + C$$

Ακρότατο στο $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$$2 + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -3$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + D$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow D = \frac{11}{6}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{6}}$$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f''(x) = 6 - 12x^2$ που περνά από τα σημεία $(0, 2)$ και $(2, 0)$.
Λύση:

$$f'(x) = 6x - 4x^3 + C$$
$$f(x) = 3x^2 - x^4 + Cx + D$$
$$f(0) = 2 \Rightarrow D = 2$$
$$f(2) = 12 - 16 + 2C + 2 = 0 \Rightarrow C = 1$$
$$\boxed{f(x) = -x^4 + 3x^2 + x + 2}$$

4. Αν $f''(x) = 4x^3 + 2x$ και $f'(1) = 4$, να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
Λύση:

$$f'(x) = x^4 + x^2 + C$$
$$f'(1) = 2 + C = 4 \Rightarrow C = 2$$
$$f'(x) = x^4 + x^2 + 2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

5. Δίνεται $r(x) = 40 - 6x$ και $R(0) = 0$. Να βρεθούν τα έσοδα $R(10)$.
Λύση:

$$R(x) = \int (40 - 6x)\, dx = 40x - 3x^2 + C$$
$$R(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$
$$R(10) = 400 - 300 = 100$$
$$\boxed{R(10) = 100}$$

6. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f'''(x) = 2$, που περνά από την αρχή των αξόνων και έχει σημείο καμπής στο $(1, 2)$.
Λύση:

$$f''(x) = 2x + C, \quad f''(1) = 0 \Rightarrow C = -2$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + D$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + Dx + E$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow D = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{8}{3}x}$$