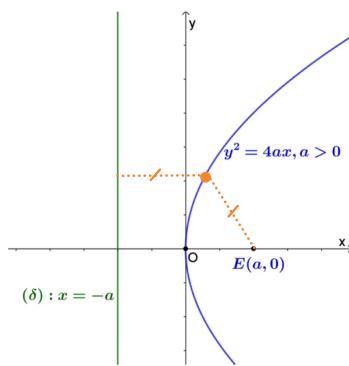
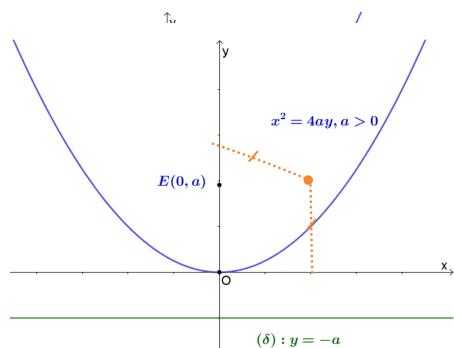


Παραβολή



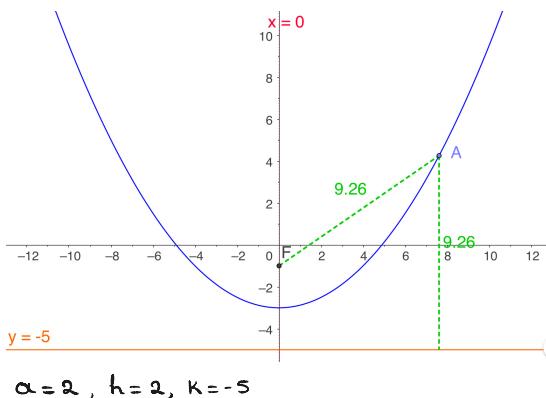
$$y^2 = 4ax \rightarrow \text{Εστία: } E(a, 0) \\ \Delta\text{ιευθετούσα: } x = -a$$



$$x^2 = 4ay \rightarrow \text{Εστία: } E(0, a) \\ \Delta\text{ιευθετούσα: } y = -a$$

Τρόπος ορίσματος: Προφανώς, οι δύο πιο πάνω περιπτώσεις είναι ειδικές περιπτώσεις Παραβολής με συμμετρία ως τόπο των άξονες ανταναγκίων.

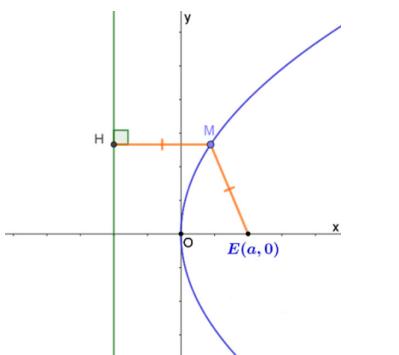
Μεταβόλιμη Παραβολή



$$(x-h)^2 = 4a(y-k) \rightarrow \text{Κορυφή: } K(h, k) \\ \Sigma\text{υμετρία: } x = +h \\ \text{Εστία: } E(h, k+a) \\ \Delta\text{ιευθετούσα: } \delta: y = k - a$$

$$(y-k)^2 = 4a(x-h) \rightarrow \text{Κορυφή: } K(h, k) \\ \Sigma\text{υμετρία: } y = +k \\ \text{Εστία: } E(h+a, k) \\ \Delta\text{ιευθετούσα: } \delta: x = h - a$$

Συδιένυμα - Απόδειξη

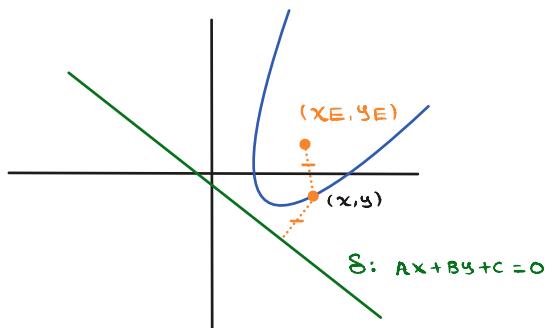


$$HE = NH \Rightarrow (HE)^2 = (NH)^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4ax$$

$$\sqrt{(x-x_E)^2 + (y-y_E)^2} = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

..... \Rightarrow Συδιένυμα ότι $(x,y) \in$ Παραβολή



$$\delta: Ax+By+C=0$$

Άσκηση: Να βρείτε τινες εξίσωσης παραβολής

a. $E(2,0)$ στις $x=-2$

b. $E(0,-3)$ στις $y=3$

γ. $E(1,1)$ και στις $3x+4y-5=0$

a. $y^2 = 4ax = 8x$, ($a=2$)

b. $x^2 = 4ay = -12y$, ($a=-3$)

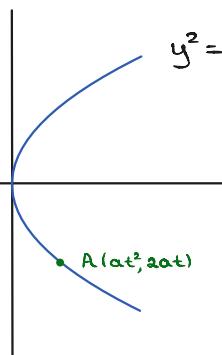
γ. $E(1,1)$ και στις $3x+4y-5=0$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|3x+4y-5|}{5} \Rightarrow 25((x-1)^2 + (y-1)^2) = (3x+4y-5)^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 50x - 50y + 50 = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 30x - 40y + 25$$

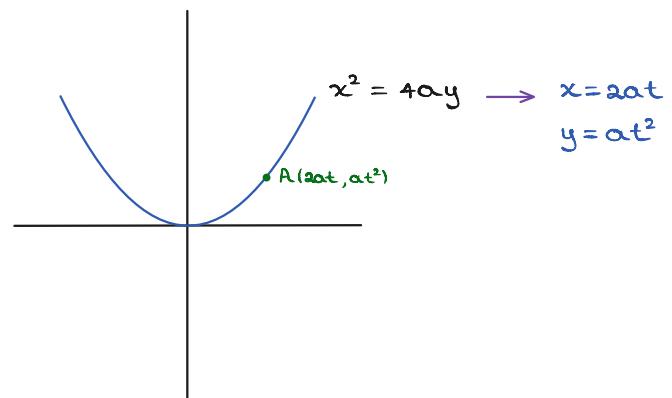
$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 20x - 10y + 25 = 0$$

Παραβολής εξίσωσης



$$y^2 = 4ax \rightarrow x = at^2$$

$$y = 2at$$



$$x^2 = 4ay \rightarrow x = 2at$$

$$y = at^2$$

Άσκηση: Να γράψετε τις παραβολής εξίσωσης της παραβολής $y^2 = 20x$

$$y^2 = 20x \rightarrow x = 5t^2$$

$$a=5 \quad y=10t$$

Άσκηση: Διεταμένη στο υπότιτλο παραβολής εξίσωσην

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

a. Δείτε στην εικόνα παραβολή

β. Βρείτε την θέση και την διεύθυνση.

a. $y = 2t - 1 \Rightarrow t = \frac{y+1}{2}$

$$x = \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$4x = y^2 + 2y + 1 - 4y - 4$$

$$y^2 - 2y - 4x - 3 = 0$$

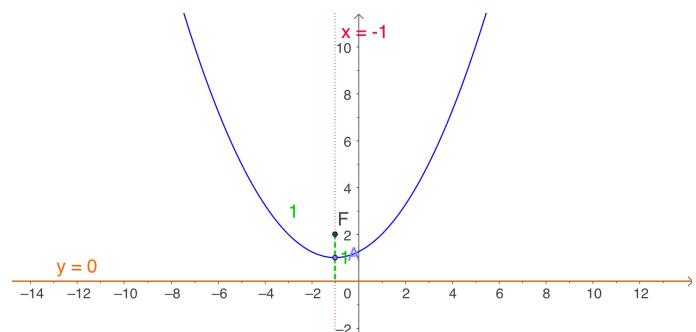
$$(y-1)^2 - 1 = 4x + 3$$

$$(y-1)^2 = 4(x+4) \rightarrow \text{παραβολή.}$$

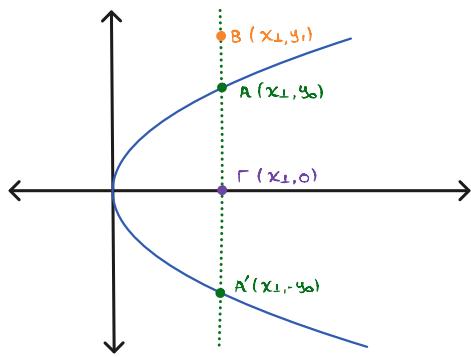
β. $a=1, h=-1, k=1$

Εστια: $E(h+a, k) = (0, 1)$

Διευθετούσα: $x = h-a = -2$



Θέση Συμβίωσης - Παραβολής

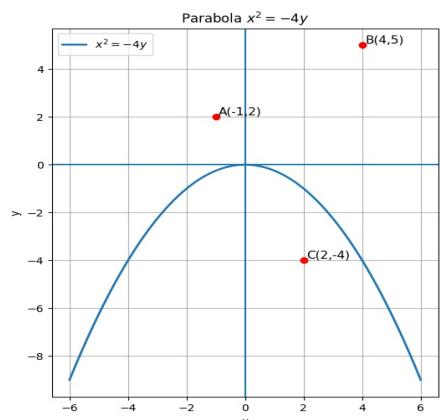


Ινθειο λύνει στην Παραβολή $\rightarrow y_1^2 - 4ax_1 = 0$
 Ινθειο Ευθ. της Παραβολής $\rightarrow y_1^2 - 4ax_1 > 0$
 Ινθειο Ευθ. της Παραβολής $\rightarrow y_1^2 - 4ax_1 < 0$

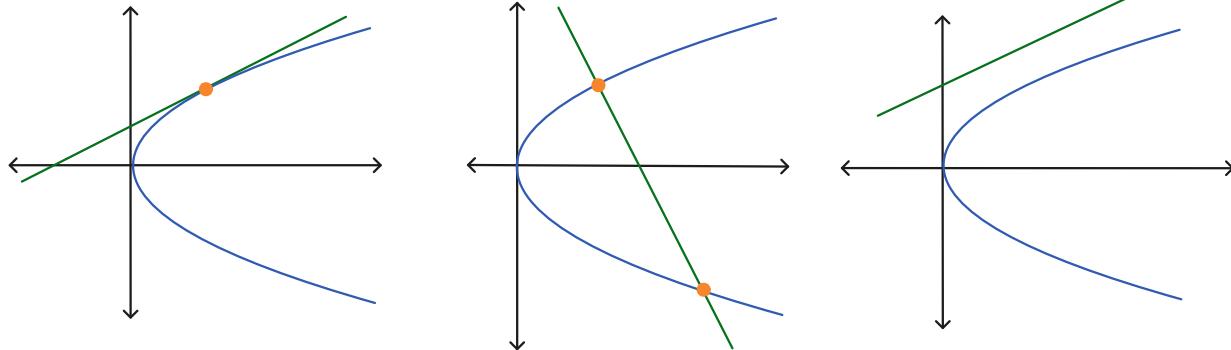
Άσκηση: Να βρείτε την θέση των συμβίωσης σε σχέση με την $x^2 = -4y$

- a. A(-1, 2)
- b. B(4, 5)
- γ. Γ(2, -4)

$$\begin{aligned} \text{a. } x_1^2 + 4y_1 &= 1 + 8 = 9 > 0 \quad \rightarrow \text{Ευθ.} \\ \text{b. } x_1^2 + 4y_1 &= 16 + 20 = 36 > 0 \quad \rightarrow \text{Ευθ.} \\ \text{γ. } x_1^2 + 4y_1 &= 4 - 16 = -12 < 0 \quad \rightarrow \text{Ευθ.} \end{aligned}$$



Θέση Ευθείας - Παραβολής



Παραβολή: $y^2 = 4ax$

Ευθεία: $Ax + By + Γ = 0$

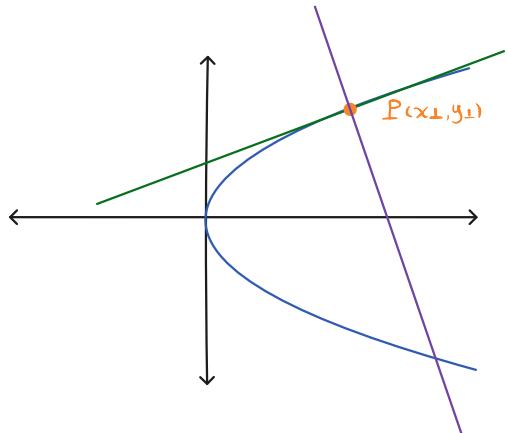
$$\left| \begin{array}{l} y^2 = 4ax \\ Ax + By + Γ = 0 \end{array} \right| \text{ λύση Συστήματος} \rightarrow \begin{array}{ll} Δ = 0 & \rightarrow \text{Εφάπτεται} \\ Δ > 0 & \rightarrow \text{Tέμνεται} \\ Δ < 0 & \rightarrow \text{Ζέυν} \end{array}$$

Άσκηση: Να βρείτε την θέση της ευθείας $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$ ως προς την $y^2 = 4x$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\right)^2 = (4x)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \quad (\Delta=0)$$

Εφάπτεται στο $x=2, y=2\sqrt{2}$

Εφαπτόμενο - Κάρδετη σε σημείο Παραβολής



$$\lambda_{\text{εφ}} \Big|_P = \frac{2a}{y}$$

$$\lambda_{\text{καρ}} \Big|_P = -\frac{y_1}{2a}$$

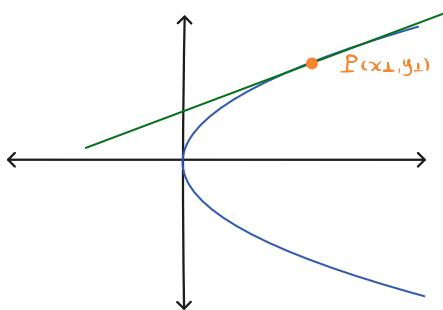
$$y^2 = 4ax$$

$$y_1 \cdot y = 2a(x + x_1)$$

$$y_1 \cdot x + 2ay = y_1(x_1 + 2a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\parallel \lambda_2 & \lambda_1 &= \lambda_2 \\ \lambda_1 &\perp \lambda_2 & \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

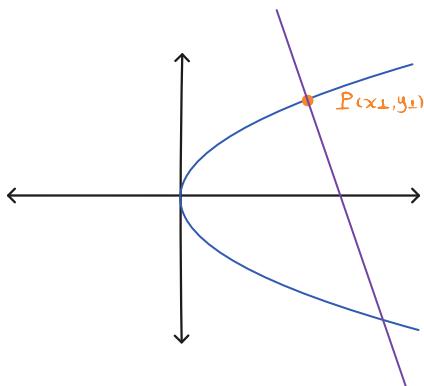
Εξίσων Εφαπτόμενος



$$y^2 = 4ax \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_P = \frac{2a}{y_1} \rightarrow y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

$$x^2 = 4ay \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_P = \frac{x_1}{2a} \rightarrow y - y_1 = \frac{x_1}{2a}(x - x_1)$$

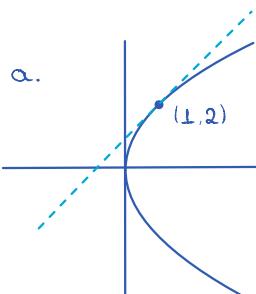
Εξίσων Κάρδετης



$$y^2 = 4ax \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_P = \frac{2a}{y_1} \rightarrow y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

$$x^2 = 4ay \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_P = \frac{x_1}{2a} \rightarrow y - y_1 = -\frac{2a}{x_1}(x - x_1)$$

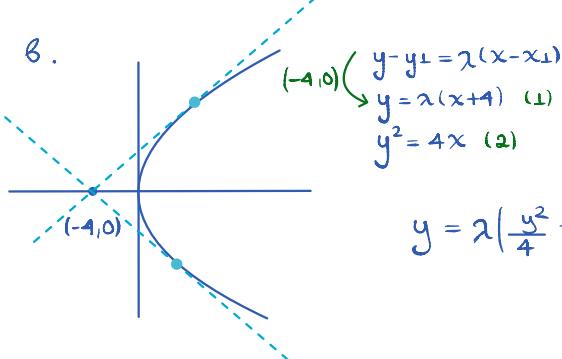
- Άσκηση:** Διέταξε Παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε την εξίσων καρδεία στην οποία
- Διέρχεται από το σημείο της $(1, 2)$
 - Διέρχεται από το σημείο $(-4, 0)$
 - Είναι Παράγανης τύπου την ευθεία $x + y = -2$
 - Είναι Κάρδετης τύπου ευθεία $x + y = -4$



$$y^2 = 4x \rightarrow \lambda_{\text{εφ}} = \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,2)} = \frac{y}{2} \Big|_{(1,2)} = 1 \quad , \quad y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$



Εφάπτονται ($\Delta=0$)

$$\begin{aligned} &(-4, 0) \quad y - y_1 = \lambda(x - x_1) \\ &y = \lambda(x + 4) \quad (1) \\ &y^2 = 4x \quad (2) \end{aligned}$$

$$y = \lambda \left(\frac{y^2}{4} + 4 \right) \Rightarrow 4y = \lambda(y^2 + 16)$$

$$\lambda y^2 - 4y + 16\lambda = 0$$

$$16 - 4\lambda \cdot 16\lambda = 0$$

$$64\lambda^2 = 16$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} &\epsilon_1: y = \frac{1}{2}(x + 4) \\ &\epsilon_2: y = -\frac{1}{2}(x + 4) \end{aligned}$$

γ. $\lambda \epsilon \varphi = -1 \rightarrow y = -x + b \quad (1)$ $y = -\frac{y^2}{4} + b \Rightarrow y^2 + 4y - 4b = 0 \quad \text{Εφάπτονται } (\Delta=0)$

$$y^2 = 4x \quad (2)$$

$$16 + 16b = 0$$

$$\Rightarrow b = -1$$

Συνεπώς: $\epsilon: y = -x - 1$

δ. $\lambda \varphi \omega = -1 \Rightarrow \lambda = 1 \rightarrow y = x + b \quad (1)$ $y = \frac{y^2}{4} + b \Rightarrow y^2 - 4y + 4b = 0 \quad \text{Εφάπτονται } (\Delta=0)$

$$y^2 = 4x \quad (2)$$

$$16 - 16b = 0$$

$$\Rightarrow b = +1$$

Συνεπώς: $\epsilon: y = x + 1$