Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Σειρές

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\text{i. } \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 4^{\kappa} \qquad \text{ii. } \sum_{\kappa=1}^{+\infty}(2\kappa-1) \qquad \text{iii. } \sum_{\kappa=1}^{+\infty}(-1)^{\kappa}$$

$$\text{iv. } \sum_{\kappa=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa} \qquad \text{v. } \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{\kappa} \qquad \text{vi. } \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{-\kappa}$$

Λύση: (Ασκ. 1/75)

i. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = 4$ και λόγο $r = 4$. Επομένως:

$$s_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 4^{\kappa} = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{\nu} = \frac{4(1-4^{\nu})}{1-4} = \frac{4}{3}(4^{\nu}-1)$$

Καθώς,

$$s_{\nu} = \frac{a(1-r^{\nu})}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_{\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{4}{3}(4^{\nu}-1) = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε $|r| > 1$

ii. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε μια αριθμητική σειρά.

$$s_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\nu-1) = \frac{\nu}{2}(1+2\nu-1) = \nu^2$$

Καθώς,

$$s_{\nu} = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_{\nu})$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \nu^2 = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε είναι αριθμητική σειρά με $d \neq 0$

iii. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^\kappa = (-1) + (+1) + (-1) + (+1) + \cdots + (-1)^\nu = \begin{cases} -1, & \nu \text{ περιττός} \\ 0, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Επομένως, καθώς το ν τείνει στο άπειρο, το s_ν δεν υπάρχει, γιατί η τιμή του κυμαίνεται στους δύο αριθμούς -1 και 0. Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει.

iv. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = -\frac{1}{2}$ και λόγο $r = -\frac{1}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right), \end{aligned}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1 - r^\nu)}{1 - r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = -\lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right) = -\frac{1}{3}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει, άλλωστε είναι γεωμετρική με $|r| < 1$

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa = -\frac{1}{3}$$

Προσοχή, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, άμεσα από τον τύπο (γεωμετρικής σειράς)

$$\lim_{\nu\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{-1/2}{1-(-1/2)} = -\frac{1}{3}$$

v. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με $a_1 = 3$ και $r = 3$:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 3^\kappa = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^\nu = \frac{3(1-3^\nu)}{1-3} = \frac{3^{\nu+1}-3}{2}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1-r^\nu)}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε $|r| > 1$.

vi. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με $a_1 = \frac{1}{3}$ και $r = \frac{1}{3}$:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 3^{-\kappa} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^\nu} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^\nu\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^\nu}{2}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1-r^\nu)}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \frac{1}{2}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει, άλλωστε $|r| < 1$, και

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{-\kappa} = \frac{1}{2}.$$

Προσοχή, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, άμεσα από τον τύπο (γεωμετρικής σειράς)

$$\lim_{\nu\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1/3}{1-(1/3)} = -\frac{1}{2}$$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n}2^{4n+1}$ ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}}$ iii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n}$

iv. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{3-n}}{8^{2-n}}$ v. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}}$ vi. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n}\,2^{1-3n}$

Λύση:

i.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-(n-2)}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}4^2}{9^{n-1}9^{-1}}$$

Μπορούμε να το φέρουμε σε τυποποιημένη μορφή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 16 \cdot 9\left(\frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 144\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a = 144$ και $r = \frac{4}{9} < 1$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$ η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \frac{144}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}(144) = \frac{1296}{5}$$

ii.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-4)^3)^n}{5^n5^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 5\frac{(-64)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{-64}{5}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 5$ και $r = -\frac{64}{5}$. Δεδομένου ότι $|r| \geq 1$ η σειρά αποκλίνει.

iii.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5\frac{1}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 5$ και $r = \frac{1}{6}$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \frac{5\cdot\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

iv.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^{3-n}}{8^{-n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{n-1}8^{-1}}{(-6)^{n-1}(-6)^{-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^2}{8^1}\left(\frac{8}{-6}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a=\frac{9}{2}$ και $r=-\frac{4}{3}$. Δεδομένου ότι $|r|>1$, η σειρά αποκλίνει.

v.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}5^2}{7^{n-1}7^{-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(25)(7)\frac{5^{n-1}}{7^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}175\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a=175$ και $r=\frac{5}{7}$. Δεδομένου ότι $|r|<1$, η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{7^{n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}175\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}=\frac{175}{1-\frac{5}{7}}=\frac{1225}{2}$$

vi.

$$\sum_{n=0}^{\infty}3^{2+n}2^{1-3n}=3^{2+0}2^{1-3\cdot 0}+\sum_{n=1}^{\infty}3^{2+n}2^{1-3n}=18+\sum_{n=1}^{\infty}3^{2+n}2^{1-3n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{2+n}2^{1-3n}=\sum_{n=1}^{\infty}3^2\cdot 3^n\cdot 2\cdot 2^{-3n}=\sum_{n=1}^{\infty}18\cdot\frac{3^n}{8^n}=\sum_{n=1}^{\infty}18\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a=18$ και $r=\frac{3}{8}<1$. Δεδομένου ότι $|r|<1$, η σειρά συγκλίνει και το άθροισμα της σειράς από $n=1$ είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}18\left(\frac{3}{8}\right)^n=18\cdot\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}}=18\cdot\frac{3/8}{5/8}=\frac{54}{5}$$

Προσθέτοντας τον πρώτο όρο $n=0$:

$$18+\frac{54}{5}=\frac{90+54}{5}=\frac{144}{5}$$

Επομένως,

$$\implies\sum_{n=0}^{\infty}3^{2+n}2^{1-3n}=\frac{144}{5}.$$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω τηλεσκοπικές σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\text{i.}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2} \qquad \text{ii.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$$

$$\text{iii.}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+7n+12} \qquad \text{iv.}\quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{10}{n^2-4n+3}$$

Λύση:

i.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i^2+3i+2}.$$

Σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{i^2+3i+2}=\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}.$$

Το μερικό άθροισμά είναι,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= 1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\\ &= 1-\frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=1.$$

ii. Το μερικό άθροισμα είναι,

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{i+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{i+3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{5}{12}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{5}{12}$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{3}{n^2+7n+12} = \frac{3}{(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+4}$$

$$\rightarrow \quad 3 = A(n+4) + B(n+3)$$

$$n = -3 \quad \Rightarrow \quad 3 = A$$

$$n = -4 \quad \Rightarrow \quad 3 = -B \quad \Rightarrow \quad B = -3$$

$$A = 3$$

$$\frac{3}{n^2+7n+12} = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+4}$$

Το μερικό άθροισμα είναι,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{i+3} - \frac{3}{i+4}\right]$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{i+3} - \frac{3}{i+4}\right] = \left[\frac{3}{4} - \cancel{\frac{3}{5}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{5}} - \cancel{\frac{3}{6}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{6}} - \cancel{\frac{3}{7}}\right] + \cdots$$

$$+ \left[\cancel{\frac{3}{n+1}} - \cancel{\frac{3}{n+2}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{n+2}} - \cancel{\frac{3}{n+3}}\right] + \left[\cancel{\frac{3}{n+3}} - \frac{3}{n+4}\right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{n+4}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{n+4}\right] = \frac{3}{4}$$

iv. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{10}{n^2-4n+3} = \frac{10}{(n-1)(n-3)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n-3}$$

$$\rightarrow \quad 10 = A(n-3) + B(n-1)$$

$$\begin{aligned} n = 1 \quad &\Rightarrow \quad 10 = -2A \quad \Rightarrow \quad A = -5 \\ n = 3 \quad &\Rightarrow \quad 10 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = 5 \end{aligned}$$

$$\frac{10}{n^2 - 4n + 3} = \frac{5}{n-3} - \frac{5}{n-1}$$

Το μερικό άθροισμα είναι,

$$s_n = \sum_{i=4}^{n} \left[\frac{5}{i-3} - \frac{5}{i-1} \right]$$

$$\begin{aligned} = & \left[\frac{5}{1} - \cancel{\frac{5}{3}}\right] + \left[\frac{5}{2} - \cancel{\frac{5}{4}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{3}} - \cancel{\frac{5}{5}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{4}} - \cancel{\frac{5}{6}}\right] \\ & + \left[\cancel{\frac{5}{5}} - \frac{5}{7}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{6}} - \cancel{\frac{5}{8}}\right] + \cdots \\ & + \left[\cancel{\frac{5}{n-7}} - \cancel{\frac{5}{n-5}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{n-6}} - \cancel{\frac{5}{n-4}}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{n-5}} - \cancel{\frac{5}{n-3}}\right] \\ & + \left[\cancel{\frac{5}{n-4}} - \frac{5}{n-2}\right] + \left[\cancel{\frac{5}{n-3}} - \frac{5}{n-1}\right] \end{aligned}$$

$$= 5 + \frac{5}{2} - \frac{5}{n-2} - \frac{5}{n-1}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{15}{2} - \frac{5}{n-2} - \frac{5}{n-1}\right] = \frac{15}{2}$$

4*. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου (Ratio Test).

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$ ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ iii. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$

iv. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{(-2)^{n+1}n}$ v. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ vi. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2n+7}$

Λύση:

i.

$$a_n = \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2(n+1)+1}((n+1)+1)} = \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)}$$

Επομένως,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right|$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} \cdot \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)} \right| \\ &= \frac{10}{16} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{10}{16} < 1 \end{aligned}$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

ii.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{5\,n!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,n!}{5\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty > 1$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

iii.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)n^2} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

iv.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{9^{n+1}}{(-2)^{n+2}(n+1)}\cdot\frac{(-2)^{n+1}n}{9^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{9n}{(-2)(n+1)}\right| \\ &= \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \\ &= \frac{9}{2} > 1 \end{aligned}$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

v.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

Επομένως δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την σύγκλιση μέσω του κριτηρίου λόγου.

Σημείωση:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}, \quad n \ge 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει (p–σειρά, με } p = 2 > 1\text{).}$$

$$\text{Άρα, } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} \text{ συγκλίνει απολύτως.}$$

vi.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+3}{2(n+1)+7}\cdot\frac{2n+7}{n+2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(2n+7)}{(2n+9)(n+2)} = 1$$

Επομένως δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την σύγκλιση μέσω του κριτηρίου λόγου.

5*. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο ρίζας(Root Test).

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$

ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$

iii. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-12)^n}{n}$

i.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n}{3^{1+2n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^{\frac{1}{n}+2}} = \frac{\infty}{3^2} = \infty > 1$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

ii.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right| = \left|\frac{-3}{7}\right| = \frac{3}{7} < 1$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

iii.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-12)^n}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^{1/n}} = \frac{12}{1} = 12 > 1$$

Η σειρά απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

6. Ο γενικός τύπος Faulhaber δίνεται πιο κάτω.

$$\sum_{n=1}^{N} n^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k \, N^{\,p+1-k}$$

όπου για $p = 1, 2, 3$ είναι,

$$\begin{aligned} p = 1: \quad & \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}, \\ p = 2: \quad & \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \\ p = 3: \quad & \sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα, χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω.

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{v}(4k^3 + 2k)$

ii. $\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + \nu(\nu+1)(\nu+2)$

iii. $\displaystyle\sum_{k=11}^{30} \left(6k^2 + 2k\right)$

i. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αθροίσματος και τα γνωστά αποτελέσματα

$$\sum_{k=1}^{\nu} k, \qquad \sum_{k=1}^{\nu} k^3$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu}(4k^3 + 2k) &= 4\sum_{k=1}^{\nu} k^3 + 2\sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= 4\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + 2\frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ &= \nu^2(\nu+1)^2 + \nu(\nu+1) \\ &= \nu(\nu+1)[\nu(\nu+1)+1] \\ &= \nu(\nu+1)(\nu^2+\nu+1) \end{aligned}$$

ii.
$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+2)$$

Κάνοντας τις πράξεις, και χρησιμοποιώντας τις σχετικές ιδιότητες των αθροισμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{\nu} k(k^2+3k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{\nu}(k^3+3k^2+2k) \\
&= \sum_{k=1}^{\nu} k^3 + 3\sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 2\sum_{k=1}^{\nu} k \\
&= \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + 3\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2\frac{\nu(\nu+1)}{2} \\
&= \frac{\nu(\nu+1)}{4}\left(\nu(\nu+1)+2(2\nu+1)+4\right) \\
&= \frac{\nu(\nu+1)}{4}(\nu^2+5\nu+6) \\
&= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}
\end{aligned}$$

iii.
$$\sum_{k=11}^{30}(6k^2+2k) = \sum_{k=1}^{30}(6k^2+2k) - \sum_{k=1}^{10}(6k^2+2k) = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το ζητούμενο άθροισμα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους:

$$\sum_{k=1}^{\nu}(6k^2+2k) = 6\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2\frac{\nu(\nu+1)}{2} = \nu(\nu+1)(2\nu+1+1) = 2\nu(\nu+1)^2$$

- Για $\nu = 30$, έχουμε: $\Sigma_1 = 2\cdot 30\cdot 31^2 = 57660$
- Για $\nu = 10$, έχουμε: $\Sigma_2 = 2\cdot 10\cdot 11^2 = 2420$

Επομένως:
$$\sum_{k=11}^{30}(6k^2+2k) = \Sigma_1 - \Sigma_2 = 57660 - 2420 = 55240$$

7. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{k=1}^{10}(3k+\lambda) = 245.$$

Λύση: (Ασκ. 3/67)

$$\sum_{k=1}^{10}(3k+\lambda) = 3\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}\lambda = 3\cdot\frac{10\cdot 11}{2} + 10\lambda = 165 + 10\lambda.$$

Θέλουμε

$$165 + 10\lambda = 245 \quad \Rightarrow \quad 10\lambda = 80 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 8.$$

Έλεγχος:

$$\sum_{k=1}^{10}(3k+8) = 165 + 80 = 245.$$

8. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω μερικά αθροίσματα:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu}(2\cdot 4^{k-1})$

ii. $\displaystyle\sum_{k=11}^{\nu} 5$

iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu} 2^{-k}$

Λύση: (Ασκ. 4/67)

i.

$$\sum_{k=1}^{\nu}(2\cdot 4^{k-1}) = 2\sum_{k=1}^{\nu}4^{k-1} = 2\cdot\frac{4^{\nu}-1}{4-1} = \frac{2}{3}(4^{\nu}-1).$$

ii.

$$\sum_{k=11}^{\nu} 5 = 5(\nu - 10), \qquad (\nu \geq 11).$$

iii.
$$\sum_{k=1}^{\nu} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}\left(1-(\frac{1}{2})^{\nu}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - 2^{-\nu}.$$

9. Δίνεται ότι το μερικό άθροισμα μιας σειράς είναι ίσο με $s_\nu = \nu^2+4\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Να σχηματίσετε τη σειρά.

Λύση: (Ασκ. 5/67)

Το ν-οστό μερικό άθροισμα είναι $s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k$. Άρα
$$a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1} = (\nu^2+4\nu) - \big((\nu-1)^2 + 4(\nu-1)\big).$$
Υπολογίζουμε
$$(\nu-1)^2 + 4(\nu-1) = \nu^2 - 2\nu + 1 + 4\nu - 4 = \nu^2 + 2\nu - 3,$$
οπότε
$$a_\nu = 2\nu + 3.$$
Επομένως η ζητούμενη σειρά είναι
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+3) = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots$$

Παρατήρηση: $a_n \not\to 0$ (μάλιστα $a_n \sim 2n$), άρα η σειρά αποκλίνει.

10. Δίνεται ότι:
$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 300, \qquad \sum_{k=1}^{30} \beta_k = -50.$$
Να υπολογίσετε το άθροισμα:
$$\sum_{k=1}^{30}(4a_k - 3\beta_k).$$

Λύση: (Ασκ. 6/67)

Με γραμμικότητα των αθροισμάτων,
$$\sum_{k=1}^{30}(4a_k - 3\beta_k) = 4\sum_{k=1}^{30} a_k \; - \; 3\sum_{k=1}^{30}\beta_k = 4\cdot 300 \; - \; 3\cdot(-50) = 1200 + 150 = 1350.$$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(12k+8) \ = \ 2\nu(\nu+1)(2\nu+3).$$

Λύση: (Ασκ. 2/75)

Χρησιμοποιούμε τους γνωστούς τύπους

$$\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\nu} k(12k+8) &= 12\sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 8\sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= 12 \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 8 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ &= 2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + 4\nu(\nu+1) \\ &= 2\nu(\nu+1)\big[(2\nu+1)+2\big] \\ &= 2\nu(\nu+1)(2\nu+3),\end{aligned}$$

12. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu}(k+2)(k+6)$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu}(4k^3+6k^2+2k)$

iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+3)$

Λύση: (Ασκ. 3/75)

i.

$$\sum_{k=1}^{\nu}(k+2)(k+6) = \sum_{k=1}^{\nu}(k^2+8k+12) = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 4\nu(\nu+1) + 12\nu = \frac{\nu\left(2\nu^2+27\nu+97\right)}{6}.$$

ii.
$$\sum_{k=1}^{\nu}(4k^3+6k^2+2k)=4\sum_{k=1}^{\nu}k^3+6\sum_{k=1}^{\nu}k^2+2\sum_{k=1}^{\nu}k=\nu(\nu+1)^2(\nu+2).$$

iii.
$$\sum_{k=1}^{\nu}k(k+1)(k+3)=\sum_{k=1}^{\nu}(k^3+4k^2+3k)=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$$
$$+4\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+3\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+13)}{12}.$$

13. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των ν πρώτων όρων των πιο κάτω σειρών ($\nu \in \mathbb{N}$):

i. $2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots$

ii. $1\cdot 1^2+2\cdot 4^2+3\cdot 7^2+4\cdot 10^2+\cdots$

iii. $2\cdot 4+5\cdot 7+8\cdot 10+11\cdot 13+\cdots$

Λύση: (Ασκ. 4/75)

i. Οι όροι είναι $(2k)^3$. Άρα
$$\sum_{k=1}^{\nu}(2k)^3=8\sum_{k=1}^{\nu}k^3=8\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2=2\nu^2(\nu+1)^2.$$

ii. Ο k-οστός όρος είναι $a_k=k(3k-2)^2=9k^3-12k^2+4k$. Επομένως
$$\sum_{k=1}^{\nu}a_k=9\sum_{k=1}^{\nu}k^3-12\sum_{k=1}^{\nu}k^2+4\sum_{k=1}^{\nu}k$$
$$=9\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2-12\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+4\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu^2(\nu+1)(9\nu-7)}{4}.$$

iii. Οι όροι είναι $(3k-1)(3k+1)=9k^2-1$. Άρα
$$\sum_{k=1}^{\nu}\big(9k^2-1\big)=9\sum_{k=1}^{\nu}k^2-\nu=9\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-\nu=\frac{\nu}{2}\big(6\nu^2+9\nu+1\big).$$

14. Να δείξετε ότι το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\nu}(6k^2+4k-1)$$

μπορεί να πάρει τη μορφή $\nu(\nu+a)(\beta\nu+\gamma)$, με $a,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=21}^{40}(6k^2+4k-1).$$

Λύση: (Ασκ. 5/75)

Για το γενικό μερικό άθροισμα:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\nu}(6k^2+4k-1) &= 6\sum_{k=1}^{\nu}k^2+4\sum_{k=1}^{\nu}k-\sum_{k=1}^{\nu}1\\ &= 6\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+4\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}-\nu\\ &= \nu(\nu+1)(2\nu+1)+2\nu(\nu+1)-\nu\\ &= \nu\big[(\nu+1)(2\nu+3)-1\big]=\nu\,(2\nu^2+5\nu+2)=\nu(\nu+2)(2\nu+1).\end{aligned}$$

Άρα παίρνει τη μορφή $\nu(\nu+a)(\beta\nu+\gamma)$ με $a=2$, $\beta=2$, $\gamma=1$.

Για το ζητούμενο:

$$\sum_{k=21}^{40}(6k^2+4k-1)=S_{40}-S_{20},\quad \text{όπου } S_n=n(n+2)(2n+1).$$

$$S_{40}=40\cdot 42\cdot 81=136080,\qquad S_{20}=20\cdot 22\cdot 41=18040.$$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=21}^{40}(6k^2+4k-1)=136080-18040=118040.$$

15. Να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων των πιο κάτω σειρών ($\nu \in \mathbb{N}$):

i. $1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + \cdots$

ii. $2 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 10 \cdot 11 + 14 \cdot 14 + \cdots$

iii. $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots$

iv. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + \nu(\nu+1)(\nu+2)$

Λύση: (Ασκ. 1/80)

i.

$$\sum_{k=1}^{\nu}\big[(2k-1)(2k)^2\big] = \sum_{k=1}^{\nu}(8k^3-4k^2) = 8\sum_{k=1}^{\nu}k^3 - 4\sum_{k=1}^{\nu}k^2 = 8\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 - 4\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = \frac{2}{3}\,\nu(\nu+1)\big(3\nu^2+\nu-1\big).$$

ii. Ο k-οστός όρος είναι $(4k-2)(3k+2) = 12k^2 + 2k - 4$. Άρα

$$\sum_{k=1}^{\nu}(12k^2+2k-4) = 12\sum_{k=1}^{\nu}k^2 + 2\sum_{k=1}^{\nu}k - 4\sum_{k=1}^{\nu}1 = 2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + \nu(\nu+1) - 4\nu.$$

$$\Rightarrow \quad S_2 = \nu\big(4\nu^2+7\nu-1\big).$$

iii.

$$\sum_{k=1}^{\nu}(2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{\nu}\big(8k^3-12k^2+6k-1\big) = 8\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 - 12\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 6\frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu.$$

$$\Rightarrow \quad S_3 = \nu^2\big(2\nu^2-1\big).$$

iv.

$$\sum_{k=1}^{\nu}k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{\nu}\big(k^3+3k^2+2k\big) = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 + 3\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2\frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad S_4 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}.$$

16. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k(6k-2).$$

Λύση: (Ασκ. 2/80)

Θέτουμε

$$S=\sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k(6k-2)=6\sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k^2-2\sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k.$$

Με τους τύπους $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ και $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, έχουμε

$$\sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k^2=\frac{(3\nu)(3\nu+1)(6\nu+1)}{6}-\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6},\qquad \sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k=\frac{3\nu(3\nu+1)}{2}-\frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}S&=6\left[\frac{(3\nu)(3\nu+1)(6\nu+1)}{6}-\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\right]-2\left[\frac{3\nu(3\nu+1)}{2}-\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]\\&=(3\nu)(3\nu+1)(6\nu+1)-\nu(\nu+1)(2\nu+1)-\big[3\nu(3\nu+1)-\nu(\nu+1)\big]\\&=52\nu^3+16\nu^2=4\nu^2(13\nu+4).\end{aligned}$$

17. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των πιο κάτω σειρών:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+2)}$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{9k^2-1}$

Λύση: (Ασκ. 3/80)

i.

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right].$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\tfrac{3}{4}$$

ii.
$$\frac{1}{9k^2-1}=\frac{1}{(3k-1)(3k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+1}\right).$$
Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a}\cot(\pi a)\qquad (a\notin\mathbb{Z}),$$
οπότε, με $a=\frac{1}{3}$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{9k^2-1}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{9}\right)}-\frac{\pi}{2\left(\frac{1}{3}\right)}\cot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

18. Δίνεται ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της σειράς
$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$$
είναι ίσο με $\dfrac{\nu}{3(2\nu+3)}$.

i. Να βρείτε τον γενικό όρο της σειράς.

ii. Να βρείτε τον 10^{o} όρο της σειράς.

iii. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της σειράς.

Λύση: (Ασκ. 4/80)

i.
$$a_n=s_n-s_{n-1}=\frac{n}{3(2n+3)}-\frac{n-1}{3(2n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2n+3}-\frac{n-1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(2n+1)-(n-1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

ii.
$$a_{10}=\frac{1}{(2\cdot 10+1)(2\cdot 10+3)}=\frac{1}{21\cdot 23}=\frac{1}{483}.$$

iii.
$$S_{15}=\frac{15}{3(2\cdot 15+3)}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}.$$

19. Να βρείτε τον ν-οστό όρο της ακολουθίας $2, 5, 9, 14, 20, 27, \ldots$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

i. Ο ν-οστός όρος a_ν.

ii. Το άθροισμα $S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k$.

Λύση: (Ασκ. 5/80)

i.

$$a_\nu = a_1 + \sum_{k=1}^{\nu-1}(a_{k+1} - a_k) = 2 + \sum_{k=1}^{\nu-1}(k+2) = 2 + \frac{(\nu-1)\nu}{2} + 2(\nu-1) = \frac{\nu(\nu+3)}{2}.$$

ii.

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu}\left(k^2 + 3k\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 3\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right] = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+5)}{6}.$$

20. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\nu}(k+3)^2 = \frac{1}{6}\,\nu(2\nu^2 + 21\nu + 73)$

ii. και να υπολογίσετε το άθροισμα, $\displaystyle\sum_{k=10}^{30}(k+3)^2$

Λύση: (Ασκ. 1/81)

i.

$$\sum_{k=1}^{\nu}(k+3)^2 = \sum_{k=1}^{\nu}(k^2 + 6k + 9) = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 6\sum_{k=1}^{\nu} k + 9\nu.$$

Με τους γνωστούς τύπους $\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu}(k+3)^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 3\nu(\nu+1) + 9\nu = \frac{\nu}{6}\left(2\nu^2 + 21\nu + 73\right).$$

ii. Θέτοντας $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+3)^2 = \frac{n}{6}(2n^2+21n+73)$,

$$\sum_{k=10}^{30}(k+3)^2 = S_{30} - S_9 = \frac{30}{6}(2\cdot 30^2 + 21\cdot 30 + 73) - \frac{9}{6}(2\cdot 9^2 + 21\cdot 9 + 73).$$

$$S_{30} = 5\cdot 2503 = 12515, \qquad S_9 = \frac{3}{2}\cdot 424 = 636.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=10}^{30}(k+3)^2 = 12515 - 636 = 11879$$

21. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + \nu(\nu+1) = \frac{1}{3}\,\nu(\nu+1)(\nu+2).$$

Λύση: (Ασκ. 2/81)

Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1) = \sum_{k=1}^{\nu}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + \sum_{k=1}^{\nu} k.$$

Με τους γνωστούς τύπους $\sum_{k=1}^{\nu} k = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ και $\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1) = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{\nu(\nu+1)}{6}\big[(2\nu+1)+3\big] = \frac{1}{3}\,\nu(\nu+1)(\nu+2),$$

22. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{\nu}{2\nu+1}.$$

Λύση: (Ασκ. 3/81)

Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Το μερικό άθροισμα τηλεσκοπεί:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\nu+1}\right) = \frac{(2\nu+1)-1}{2(2\nu+1)} = \frac{\nu}{2\nu+1}. \end{aligned}$$

23. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{6}(2i+j)\right).$$

Λύση: (Ασκ. 4/81)

Για σταθερό i,

$$\sum_{j=1}^{6}(2i+j) = \sum_{j=1}^{6} 2i + \sum_{j=1}^{6} j = 6 \cdot 2i + \frac{6 \cdot 7}{2} = 12i + 21.$$

Άρα

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{6}(2i+j)\right) = \sum_{i=1}^{5}(12i+21) = 12\sum_{i=1}^{5} i + 21 \cdot 5 = 12 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 105 = 12 \cdot 15 + 105 = 285$$

24. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω σειρές:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$ ii. $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)(k+2)}$

iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{7^k}$ iv. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

Λύση: (Ασκ. 5/81)

i.

$$\frac{1}{k(k+2)}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n+1}-\tfrac{1}{n+2}\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\tfrac{3}{4}$$

ii.

$$\frac{1}{(k-2)(k+2)}=\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\right),$$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-2)(k+2)}=\tfrac{1}{4}\left(\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m}-\sum_{m=5}^{n+4}\frac{1}{m}\right)=\tfrac{1}{4}\left(\sum_{m=1}^{4}\frac{1}{m}-\sum_{m=n-1}^{n+4}\frac{1}{m}\right)\to\tfrac{1}{4}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{25}{48}$$

iii.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^{k+1}}{7^k}=3\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^k=3\cdot\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}=3\cdot\frac{3}{4}=\tfrac{9}{4}$$

iv.

$$\frac{k^2}{k^2-1}=1+\frac{1}{k^2-1},\qquad\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{+\infty}\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\tfrac{3}{4}.$$

Όμως $\sum_{k=2}^{+\infty}1=+\infty$. Άρα

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k^2}{k^2-1}=+\infty\quad(\text{η σειρά } \textit{αποκλίνει}).$$

25. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1)=\frac{1}{3}\,\nu(\nu+1)(\nu+2).$$

Λύση: (Ασκ. 6/81)

$$\sum_{k=1}^{\nu}k(k+1)=\sum_{k=1}^{\nu}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{\nu}k^2+\sum_{k=1}^{\nu}k=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{1}{3}\,\nu(\nu+1)(\nu+2).$$

26. Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{10}{\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa\right)}.$$

Λύση: (Ασκ. 7/81)

Έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa} = \frac{10}{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} = \frac{20}{\nu(\nu+1)} = 20\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right).$$

Το μερικό άθροισμα S_N είναι τηλεσκοπικό:

$$S_N = \sum_{\nu=1}^{N} 20\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = 20\left(1 - \frac{1}{N+1}\right).$$

Άρα

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{10}{\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa\right)} = \lim_{N\to\infty} S_N = 20.$$

27. Να δείξετε ότι *δεν* ισχύουν τα πιο κάτω:

i. $\sum_{k=1}^{\nu}(a_k\beta_k) = \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k\right)$

ii. $\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{a_k}{\beta_k}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} a_k}{\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k}$ (με $\beta_k \neq 0$)

iii. $\sum_{k=1}^{\nu}(a_k^2) = \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_k\right)^2$

Λύση: (Ασκ. 1/82)

i. Πάρε $\nu = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 1$, $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$.

$$\sum_{k=1}^{2} a_k\beta_k = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1, \qquad \left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{2} \beta_k\right) = (1+1)(1+0) = 2.$$

$1 \neq 2 \Rightarrow$ η ισότητα δεν ισχύει γενικά.

ii. Πάρε $\nu = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 1$, $\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$ (όλα $\beta_k \neq 0$).

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{a_k}{\beta_k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{\sum_{k=1}^{2} a_k}{\sum_{k=1}^{2} \beta_k} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow$ η ισότητα δεν ισχύει γενικά.

iii. Πάρε $\nu = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 1$.

$$\sum_{k=1}^{2} a_k^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \qquad \left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)^2 = (1+1)^2 = 4.$$

$2 \neq 4 \Rightarrow$ η ισότητα δεν ισχύει γενικά.

28. Να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2\nu - 2^\nu}{3^\nu}$$

συγκλίνει στο $-\dfrac{1}{2}$.

Λύση: (Ασκ. 2/82)

Γράφουμε

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2\nu - 2^\nu}{3^\nu} = 2\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu}{3^\nu} - \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\nu.$$

Χρησιμοποιούμε τους τύπους (για $|r| < 1$):

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu r^\nu = \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad \sum_{\nu=1}^{+\infty} r^\nu = \frac{r}{1-r}.$$

Με $r = \frac{1}{3}$ και $r = \frac{2}{3}$ αντίστοιχα,

$$2\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu}{3^\nu} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2 \cdot \frac{9}{12} = \frac{3}{2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\nu = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2.$$

Άρα

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2\nu - 2^\nu}{3^\nu} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

29. Ένα σύστημα με ν σώματα μάζας $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ που βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο άξονα στις θέσεις $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_\nu, 0)$ έχει κέντρο μάζας στη θέση $(\bar{x}, 0)$, όπου

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{\nu} m_k}.$$

Να υπολογίσετε τη θέση του κέντρου μάζας για τα τέσσερα σώματα στις θέσεις $(1,0), (3,0), (5,0), (7,0)$ με μάζες $5, 7, 2, 3$ κιλά, αντίστοιχα.

Λύση: (Ασκ. 3/82)

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{5 + 7 + 2 + 3} = \frac{5 + 21 + 10 + 21}{17} = \frac{57}{17}.$$

Επομένως, το κέντρο μάζας είναι

$$(\bar{x}, 0) = \left(\frac{57}{17}, 0 \right).$$

30. Δίνεται ότι:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Λύση: (Ασκ. 4/82)

Θέτουμε

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad E = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Το άθροισμα των περιττών όρων είναι

$$O = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = S - E = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{4\pi^2 - \pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

31. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=5}^{40} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (k+2) \left(\frac{1}{k+3} \right)^i \right).$$

Λύση: (Ασκ. 5/82)

Για σταθερό k, το εσωτερικό άθροισμα είναι γεωμετρικό με λόγο $r = \dfrac{1}{k+3}$ $(|r| < 1)$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(k+2)\left(\frac{1}{k+3}\right)^i = (k+2)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k+3}} = (k+2)\cdot\frac{k+3}{k+2} = k+3.$$

Άρα

$$\sum_{k=5}^{40}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}(k+2)\left(\frac{1}{k+3}\right)^i\right) = \sum_{k=5}^{40}(k+3).$$

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με 36 όρους, πρώτο 8 και τελευταίο 43:

$$\sum_{k=5}^{40}(k+3) = \frac{36}{2}(8+43) = 18\cdot 51 = 918$$