Μαθηματικά Β' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

---

1. Να δείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$p(\nu):\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\nu - 1) = \nu^2$$

Λύση:

Έλεγχος για $p(1)$:

$$1 = 1^2 \ \text{(ισχύει για } \nu = 1\text{)}$$

Υπόθεση επαγωγής $p(k)$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Έλεγχος για $p(k+1)$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Άρα η πρόταση ισχύει για $\nu = k + 1$. Με βάση τη μέθοδο της επαγωγής, η πρόταση ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

2. Να δείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$p(\nu): \; 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Λύση:

Έλεγχος για $p(1)$:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \;\; (\text{ισχύει για } \nu = 1)$$

Υπόθεση επαγωγής $p(k)$:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Έλεγχος για $p(k+1)$:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Άρα η πρόταση ισχύει για $\nu = k+1$. Με βάση τη μέθοδο της επαγωγής, η πρόταση ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

3. Να δειχτεί επαγωγικά ότι

$$1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Λύση:

Έλεγχος για $p(0)$:

$$1 = (0+1)^2 = 1.$$

Άρα η πρόταση ισχύει για $n = 0$.

Υπόθεση επαγωγής $p(k)$:

$$1+3+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Έλεγχος για $p(k+1)$:

$$1+3+\cdots+(2k+1)+(2(k+1)+1)=((k+1)+1)^2=(k+2)^2$$

Αντικαθιστώντας την επαγωγική υπόθεση:

$(k+1)^2+\big(2(k+1)+1\big)=(k+1)^2+(2k+3)=k^2+2k+1+2k+3=k^2+4k+4=(k+2)^2.$

Άρα η πρόταση ισχύει και για $n=k+1$. Η ισότητα ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

4. Να δειχτεί επαγωγικά ότι ο αριθμός 7^n+2 διαιρείται με το 3, $\forall n\in\mathbb{N}$

Λύση:

Έλεγχος για $p(1)$:

$$7+2=9 \implies \text{P(1):αληθής}$$

Υπόθεση επαγωγής $p(k)$:

$$7^k+2=3w,\ \ w\in\mathbb{Z}$$

Έλεγχος για $p(k+1)$:

$$\begin{aligned}7^{k+1}+2&=7\cdot 7^k+2\\&=7(3w-2)+2\\&=3\cdot(7w)-14+2\\&=3\cdot(7w)-12\\&=3\cdot(7w)-3\cdot 4=3\cdot(7w-4)\end{aligned}$$

Επειδή $7w-4\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ ο αριθμός $7^{k+1}+2$ διαιρείται με το 3.

Επομένως $P(k+1)$ ισχύει.

5. Να αποδείξετε ότι το $4^{2\nu}-1$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση:

Έλεγχος για $p(1)$:

$$16-1=15 \implies \text{P(1): αληθής}$$

Υπόθεση επαγωγής $p(k)$:

$$4^{2k}-1=5w, \;\; w\in\mathbb{Z}$$

Έλεγχος για $p(k+1)$:

$$\begin{aligned}
4^{2(k+1)}-1=4^{2k+2}-1 &= 4^2\cdot 4^{2k}-1 \\
&= 16\cdot 4^{2k}-1 \\
&= 16(5w+1)-1 \qquad \text{(από την υπόθεση επαγωγής)} \\
&= 80w+16-1 \\
&= 80w+15 \\
&= 5(16w+3)
\end{aligned}$$

Επειδή $16w+3\in\mathbb{Z}$, ο αριθμός $4^{2(k+1)}-1$ διαιρείται με το 5.

Επομένως $P(k+1)$ ισχύει, και η πρόταση ισχύει για όλα τα $\nu\in\mathbb{N}$.

6. Να δείξετε ότι $\forall\, n\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$1+3+9+\cdots+3^n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right), \;\; \forall n\in\mathbb{N}$$

Λύση:

Έλεγχος για $p(1)$:

$$1+3=\frac{1}{2}\left(3^{1+1}-1\right) \implies 4=4 \implies P(1) \text{ αληθής}$$

Υπόθεση επαγωγής $p(k)$:

$$1+3+9+\cdots+3^k=\frac{1}{2}\left(3^{k+1}-1\right)$$

Έλεγχος για $p(k+1)$:

$$1+3+9+\cdots+3^k+3^{k+1}=\frac{1}{2}(3^{k+2}-1)$$

$$\begin{aligned} 1+3+3^2+\cdots+3^k+3^{k+1} &= \left(1+3+3^2+\cdots+3^k\right)+3^{k+1} \\ &= \frac{3^{k+1}-1}{2}+3^{k+1} \\ &= \frac{3^{k+1}-1+2\cdot 3^{k+1}}{2} \\ &= \frac{3\cdot 3^{k+1}-1}{2} \\ &= \frac{3^{k+2}-1}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως $P(k+1)$ ισχύει, και η πρόταση ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

7. Να δείξετε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$$

Λύση:

Έλεγχος για $p(1)$:

$$1=1 \implies \text{P(1): αληθής}$$

Υπόθεση επαγωγής $p(k)$:

$$1+5+5^2+\cdots 5^{k-1}=\frac{5^k-1}{4},$$

Έλεγχος για $p(k+1)$:

$$\begin{aligned} 1+5+5^2+\cdots+5^{k-1}+5^k &= \underbrace{1+5+5^2+\cdots+5^{k-1}}_{\text{χρήση υπόθεσης επαγωγής}}+5^k \\ &= \frac{5^k-1}{4}+5^k=\frac{5^k-1+4\cdot 5^k}{4} \\ &= \frac{5^k(1+4)-1}{4}=\frac{5^{k+1}-1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως $P(k+1)$ ισχύει, και η πρόταση ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

8. Να αποδείξετε ότι αν ο $\nu \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος αριθμός, τότε ο $7\nu + 11$ είναι περιττός.

Λύση:

Αμεση απόδειξη:

Έστω ότι ν είναι άρτιος αριθμός. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε:

$$\nu = 2k.$$

Αντικαθιστούμε στην παράσταση $7\nu + 11$:

$$7\nu + 11 = 7(2k) + 11 = 14k + 11.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$14k + 11 = 2(7k + 5) + 1.$$

Αφού $7k + 5 \in \mathbb{N}$, η μορφή $2(\text{κάποιος φυσικός}) + 1$ δείχνει ότι ο αριθμός είναι περιττός.

$$7\nu + 11 \text{ είναι περιττός.}$$

Εις Άτοπον Απαγωγής:

Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι $7\nu + 11$ είναι άρτιος ενώ ν είναι άρτιος.

Αφού ν είναι άρτιος, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\nu = 2k.$$

Τότε:

$$7\nu + 11 = 7(2k) + 11 = 14k + 11.$$

Αν $7\nu + 11$ ήταν άρτιος, θα έπρεπε να είναι πολλαπλάσιο του 2, δηλαδή:

$$14k + 11 = 2m \quad \text{για κάποιο } m \in \mathbb{N}.$$

Αλλά:

$$14k + 11 = 2(7k) + 11 = 2(7k) + 10 + 1 = 2(7k + 5) + 1,$$

που είναι αριθμός της μορφής $2(\text{κάποιος}) + 1$, δηλαδή περιττός.

Αυτό είναι αντίφαση με την υπόθεση ότι είναι άρτιος.

$$\text{Άτοπο: } \implies 7\nu + 11 \text{ είναι περιττός.}$$

9. Να αποδείξετε ότι αν υ^2 είναι περιττός ακέραιος αριθμός, τότε και ο υ είναι περιττός.

Λύση:

Εις Άτοπον Απαγωγής:

Υποθέτουμε ότι ο ν^2 είναι περιττός ακέραιος αριθμός και ο ν δεν είναι περιττός.
Τότε, ο ν θα είναι άρτιος, δηλαδή:

$$\begin{gathered}
\nu = 2\rho,\ \ \rho \in \mathbb{Z} \implies \nu^2 = (2\rho)^2 \implies \nu^2 = 4\rho^2 \\
\implies \nu^2 = 2(2\rho^2) \implies \nu^2 = 2\kappa,\ \text{όπου } \kappa = 2\rho^2,\ \ \kappa \in \mathbb{Z} \\
\implies \nu^2 \text{ άρτιος, που είναι άτοπο} \qquad \text{(Αντίφαση με την υπόθεση)}
\end{gathered}$$

Στο άτοπο οδηγηθήκαμε με την παραδοχή ότι αν ο ν^2 είναι περιττός ακέραιος αριθμός, τότε ο ν δεν είναι περιττός. Άρα, ο ν είναι περιττός αριθμός.

10. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\left(\frac{\eta\mu x + 1}{2}\right)^2 \geq \eta\mu x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Λύση:

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε:

$$\left(\frac{\eta\mu x + 1}{2}\right)^2 < \eta\mu x \tag{*}$$

$$\begin{gathered}
\implies \frac{\eta\mu^2(x^2) + 2\eta\mu(x) + 1}{4} < \eta\mu x \\
\implies \eta\mu^2(x^2) + 2\eta\mu(x) + 1 < 4\eta\mu(x) \\
\implies \eta\mu^2(x^2) - 2\eta\mu(x) + 1 < 0 \\
\implies (\eta\mu(x) - 1)^2 < 0,
\end{gathered}$$

Άτοπο, γιατί η ανισότητα είναι ψευδής.