Μαθηματικά Γ' Λυκείου (κκ) - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Εφαρμογές Διαφορικού Λογισμού

---

1. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω μαθηματικές προτάσεις είναι σωστές.

i. Μια συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, με Δ ένα διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ονομάζεται σταθερή στο Δ, αν, για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

ii. Μια συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, με $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, ονομάζεται φθίνουσα στο Δ, αν, για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

iii. Μια συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, με $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο Δ, αν, για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

iv. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν για κάθε πραγματικό αριθμό x στο Δ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0)$

v. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό μέγιστο, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Delta$

vi. Κάθε ολικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) είναι και τοπικό ακρότατο. vii. Ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) μπορεί να είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από ένα τοπικό ελάχιστο.

viii. Η συνάρτηση η οποία ορίζεται σε κλειστό διάστημα, δεν έχει πάντοτε μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

ix. Οποιαδήποτε μη σταθερή συνάρτηση παρουσιάζει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο.

Λύση: i. Σωστό, ii. Λάθος, iii. Σωστό, iv. Σωστό, v. Σωστό, vi. Σωστό, vii. Σωστό, viii. Λάθος, ix. Λάθος (μόνο αν ορίζεται σε κλειστό σύνολο)

2. Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας των πιο κάτω συναρτήσεων και να κάνετε τη γραφική τους παράσταση. Επίσης, αν σημειώσετε τα τοπικά και ολικά ακρότατα.

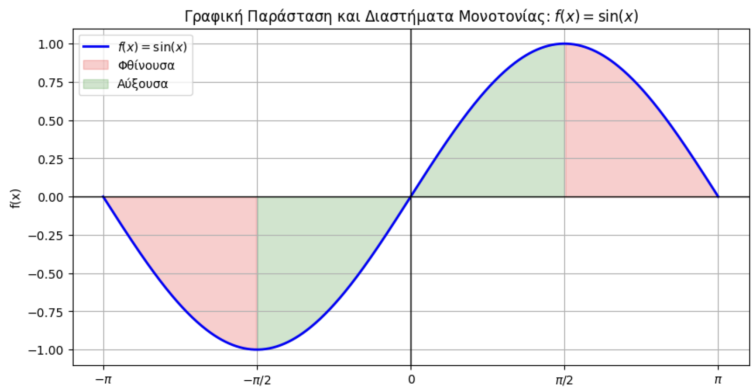
i. f(x)=sin(x) , $x \in [-\pi, \pi]$

ii. f(x)=cos(x) , $x \in [0, 2\pi)$

iii. f(x)=x^2 , $x \in \mathbb{R}$

Λύση:

i.



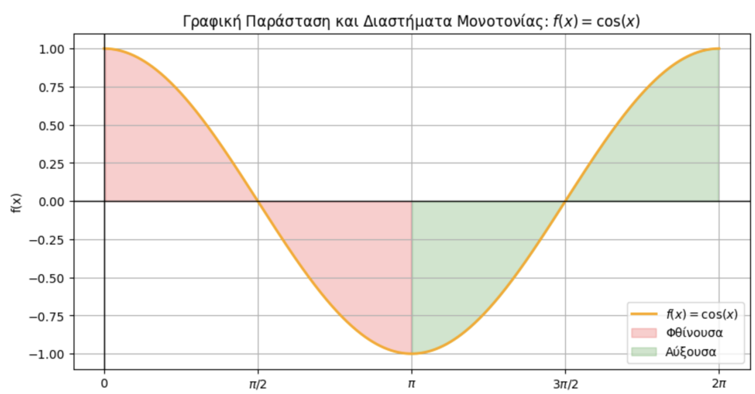
Μονοτονία:

- Γνησίως αύξουσα: $[-\pi/2, \pi/2]$
- Γνησίως φθίνουσα: $[-\pi, -\pi/2]$ και $[\pi/2, \pi]$

Ακρότατα:

- Τοπικό μέγιστο: f(-π)=0 και f(π/2)=1 με ολικό μέγιστο το f(π/2)=1
- Τοπικό ελάχιστο: f(-π/2)=-1 και f(π)=0 με ολικό ελάχιστο το f(-π/2)=-1

ii.

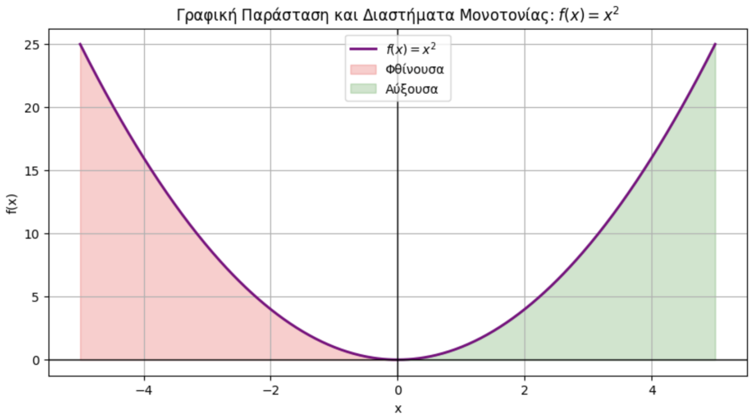


Μονοτονία:

- Γνησίως αύξουσα: $[\pi, 2\pi)$
- Γνησίως φθίνουσα: $[0, \pi]$

Ακρότατα:

- Τοπικό μέγιστο: f(0)=1 με ολικό μέγιστο το f(0)=1
- Τοπικό ελάχιστο: f(π)=-1 με ολικό ελάχιστο το f(π)=-1



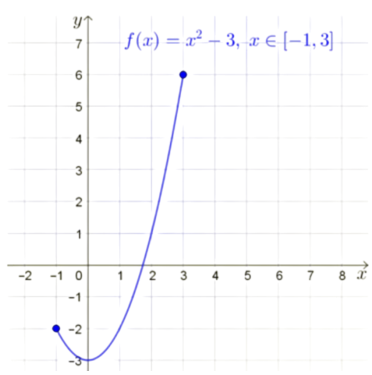
Μονοτονία:

- Γνησίως αύξουσα: $[0, \infty)$
- Γνησίως φθίνουσα: $[-\infty, 0]$

Ακρότατα:

- Ολικό μέγιστο: Δεν υπάρχει
- Ολικό ελάχιστο: f(0)=0

3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης (αν υπάρχουν) και να γράψετε, για κάθε περίπτωση, την αντίστοιχη ανισότητα.



Λύση:

Ολικό μέγιστο f(3)=6

Ολικό ελάχιστο f(0)=-3

$$-3 \leq f(x) \leq 6 \ \ \forall \ \ x \ \ \in [-1, 3]$$

4. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να διατάξετε, σε αύξουσα σειρά, τις τιμές $f(2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(e)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:
Μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα αν για κάθε $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

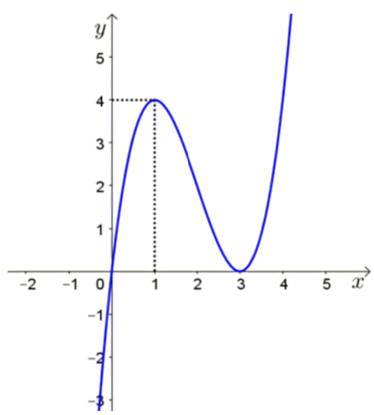
Στην περίπτωση μας, οι τιμές των x είναι:

$$-1 < 0 < 2 < e \approx 2.718.$$

Επομένως, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα:

$$f(-1) < f(0) < f(2) < f(e).$$

5. Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f(x)= $x(x-3)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης (αν υπάρχουν).



Λύση: Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$
Η συνάρτηση δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ελάχιστο. Υπάρχει τοπικό μέγιστο (f(1)=4) και τοπικό ελάχιστο (f(3)=0).

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η τιμή $f(1)$ είναι η ελάχιστη τιμή για τη συνάρτηση και να την υπολογίσετε.

Υπενθύμιση: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν για κάθε πραγματικό αριθμό x στο Δ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0)$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x-1)^2 \geq 0.$$

Επομένως,

$$f(x) = 3 + (x-1)^2 \geq 3.$$

Η ισότητα επιτυγχάνεται μόνο όταν:

$$x - 1 = 0 \implies x = 1.$$

Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι:

$$f(1) = 3 + (1-1)^2 = 3.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 7x - 4, \quad x \in [0, 5]$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x) = 7x - 4$ είναι γραμμική με θετική κλίση $(7 > 0)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 5]$.

Επομένος,

Ελάχιστη τιμή: $f(0) = 7 \cdot 0 - 4 = -4,$

Μέγιστη τιμή: $f(5) = 7 \cdot 5 - 4 = 35 - 4 = 31$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1, \;\; x \in \mathbb{R}.$. Να δείξεται ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το f(0) = 1.

Λύση:

$$-3x^4 \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$
$$-3x^4 + 1 \leq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

$$f(x) \leq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

9. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω μαθηματικές προτάσεις είναι σωστές.

i. Έστω η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β). Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.

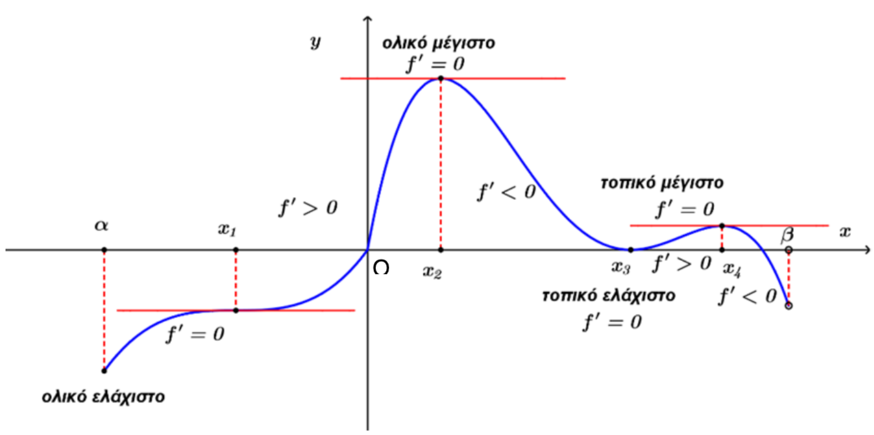
ii. Η μονοτονία μιας συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα , εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου της στο ανοικτό διάστημα.

iii. Έστω η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β). Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την μονοτονία της.

iv. Αν $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ τότε η f παρουσιάζει στο $x = x_0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(x_0)$.

Λύση: i. Σωστό, ii. Σωστό, iii. Λάθος, iv. Σωστό

10. Βάση του σχήματος, να συμπληρώσετε το πίνακα μονοτονίας.



x	a	x_1	x_2	x_3	x_4	β
$f'(x)$						
$f(x)$						

Λύση:

x	a		x_1		x_2		x_3		x_4		β
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$			$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_3)$	$\nearrow$	$f(x_4)$	$\searrow$	

11. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x,\ x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x = 4, την τιμή $f(4) = 2$. Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση:
Η παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$f'(x) = 2ax + \beta.$$

Για να υπάρχει μέγιστο στο $x = 4$, πρέπει $f'(4) = 0$ (Θεώρημα Fermat), άρα:

$$2a \cdot 4 + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -8a.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $f(4) = 2$, δηλαδή:

$$f(4) = 16a + 4\beta = 2.$$

Αντικαθιστούμε $\beta = -8a$:

$$16a + 4(-8a) = 16a - 32a = -16a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -\tfrac{1}{8}.$$

Επομένως,

$$\beta = -8a = -8\left(-\tfrac{1}{8}\right) = 1.$$

$$a = -\tfrac{1}{8}, \ \ \beta = 1$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3, \quad x \in \mathbb{R},\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή -2, να υπολογίσετε τις τιμές των κ, λ και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.

Λύση: Η παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = 2\kappa x + \lambda.$$

Για να υπάρχει ακρότατο στο $x = 1$, πρέπει:

$$f'(1) = 2\kappa + \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2\kappa.$$

Επιπλέον δίνεται ότι $f(1) = -2$:

$$f(1) = \kappa + \lambda + 3 = \kappa - 2\kappa + 3 = -\kappa + 3 = -2 \quad \Longrightarrow \quad \kappa = 5.$$

Συνεπώς:

$$\lambda = -2 \cdot 5 = -10.$$

Η παράγωγος γίνεται:

$$f'(x) = 10x - 10 = 10(x - 1).$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο με τιμή $f(1) = -2$.

13. Να μελετήσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα:

i. $f(x) = 2x^2 - 8x + 9,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = -3x^2 + 9,\ x \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) = -x^3 + 12x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

v. $f(x) = x \ln x, \qquad x \in (0, \infty)$

vi. $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x,\ \ x \in \mathbb{R}$

Λύση: i. Παράγωγος:

$$f'(x) = 4x - 8.$$

Συνθήκη ακροτάτου ($f'(x) = 0$):

$$4x - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x) = 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή και το σημείο $x = 2$ είναι **τοπικό και ολικό ελάχιστο**.
Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9 = 1.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 2$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f(2) = 1$.

ii. Παράγωγος:

$$f'(x) = 2x - 4.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$2x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 2$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f(2) = -4$.

iii. Παράγωγος:

$$f'(x) = -6x.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$-6x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(0) = -3 \cdot 0^2 + 9 = 9.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 0$ τοπικό και ολικό μέγιστο με τιμή $f(0) = 9$.

iv. Παράγωγος:

$$f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x-2)(x+2).$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$x = -2,\ 2.$$

Τιμές της συνάρτησης στα ακρότατα:

$$f(-2) = -(-2)^3 + 12(-2) + 1 = -15,$$

$$f(2) = -(2)^3 + 12(2) + 1 = 17.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Συμπέρασμα:

Τοπικό ελάχιστο: $x = -2$, $f(-2) = -15$

Τοπικό μέγιστο: $x = 2$, $f(2) = 17$

v. Παράγωγος:

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$\ln x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f\left(\tfrac{1}{e}\right) = \tfrac{1}{e}\ln\left(\tfrac{1}{e}\right) = \tfrac{1}{e} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{e}.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	0^+	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Η συνάρτηση έχει στο $x = \frac{1}{e}$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

vi. Παράγωγος:

$$f'(x) = 6x^2 - 5x + 2.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$6x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0.$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και η συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα. Ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός ($6 > 0$) και $\Delta < 0$, άρα το τριώνυμο $f'(x)$ είναι πάντα θετικό. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ και δεν έχει τοπικά ή ολικά ακρότατα.

14. Να δείξετε ότι η $f(x) = -3x^2 - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Η παράγωγος της συνάρτηση είναι:

$$f'(x) = \left(-x^3 - 2x\right)' = -\left(x^3\right)' - 2(x)' \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 2$$

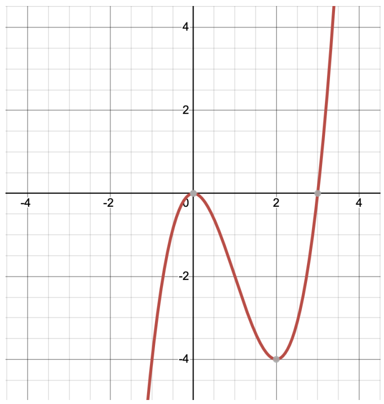
Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη. Επομένως η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$

15. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες:

i. $f'(x) = 0$

ii. $f'(x) < 0$

iii. $f'(x) > 0$



Λύση:

i. $x = 0, \ 2$

ii. $x \in (0, 2)$

iii. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

16. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω μαθηματικές προτάσεις είναι σωστές.

i. Η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα άνω στο (a,b), αν και μόνον αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b).

ii. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο (a, β) αν $f''(x) \geq 0, \ \forall x \in (a, \beta)$.

iii. Αν ένα σημείο της γραφικής παράστασης $M(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής, αυτό σημαίνει ότι εκατέρωθεν του ξ η f'' δεν αλλάζει πρόσημο.

iv. Αν το σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής της πολυωνυμικής συνάρτησης $f : (a, \beta) \to \mathbb{R}$, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μέγιστου ή ελαχίστου της f.

v. Αν $f''(\xi) = 0$, τότε υπάρχει απαραίτητα σημείο καμπής στο σημείο ξ.

Λύση: i. Σωστό, ii. Σωστό, iii. Λάθος, iii. Λάθος (της f' όχι της f), v. Λάθος (το θεώρημα του σημείου καμπής δεν ισχύει αντίστροφα)

17. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση:

Η πρώτη παράγωγος της f:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η δεύτερη παράγωγος της f:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της f''. Για το λόγο αυτό, πρέπει να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f''(x) = 0$ και στη συνέχεια να κατασκευάσουμε πίνακα μεταβολής της f''.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 12x(x-2) = 0$$

Συνεπώς:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{ή} \quad x_2 = 2$$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Από τον πίνακα μεταβολής της f'', παρατηρούμε ότι:

- Είναι Κυρτή: $f''(x) > 0, \ \ \forall x \in (-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$
- Είναι Κοίλη: $f''(x) < 0, \ \ \forall x \in (0, 2)$
- Σημεία Καμπής: $f''(x) = 0$, για $x = 0$ ή $x = 2$.

Τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f:

$$f(0) = 10 \implies (0, 10)$$

$$f(2) = (2)^4 - 4(2)^3 + 10 = -6 \implies (2, -6)$$

18. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις πιο κάτω συναρτήσεις.

i. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$

	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

Λύση:

i. Παράγωγος:

$$f'(x) = 2x - 6.$$

Συνθήκη ακροτάτου ($f'(x) = 0$):

$$2x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3.$$

Το σημείο $x = 3$ είναι τοπικό και ολικό ελάχιστο.
Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 3$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f(3) = -8$.

$$f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty, 3) \ \Rightarrow \ \text{η } f(x) \text{ γνησίως φθίνουσα για κάθε } x \in (-\infty, 3]$$

$$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (3, +\infty) \ \Rightarrow \ \text{η } f(x) \text{ γνησίως αύξουσα για κάθε } x \in [3, +\infty)$$

Σημείωση:

Δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση είναι πάντα κυρτή. Το σημείο $x = 3$ ΔΕΝ είναι σημείο καμπής, καθώς η δεύτερη παράγωγος δεν αλλάζει πρόσημο.

ii. Παράγωγος:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+3)(x-1) = 0$$

$$x = -3,\ 1.$$

Τιμές της συνάρτησης στα ακρότατα:

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 7 = -27 + 27 + 27 + 7 = 34$$

$$f(1) = 1 + 3 - 9 + 7 = 2$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \ \Rightarrow$ η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

$f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (-3, 1) \ \Rightarrow$ η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-3, 1]$

Τοπικό μέγιστο: $x = -3,\ f(-3) = 34$ Τοπικό ελάχιστο: $x = 1,\ f(1) = 2$

Σημείωση:

Δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x) = 6x + 6$$

- Κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) όταν $x > -1$
- Κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω)) όταν $x < -1$

Άρα η συνάρτηση έχει σημείο καμπής στο $x = -1$, όπου αλλάζει η κυρτότητα.

19. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Η πρώτη και δεύτερη παράγωγο της f είναι:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3 \ \ \text{και} f''(x) = 6x - 2a, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$, ισχύει ότι:

$$f''(1) = 0 \iff 6 - 2a = 0 \iff a = 3$$

20. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

Λύση:

1. Μονοτονία και ακρότατα:

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ΟΧΙ Τ.Α	$\nearrow$

- Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.
- Στο $x = 0$ η παράγωγος μηδενίζεται χωρίς να αλλάζει πρόσημο, άρα δεν υπάρχει ακρότατο.

2. Κυρτότητα και σημεία καμπής:

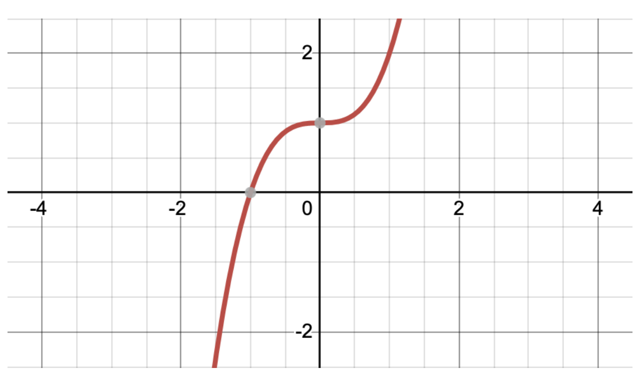
$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x.$$

Θέτουμε $f''(x) = 0 \implies x = 0$.

Μελετούμε το πρόσημο της $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

- Η f είναι κοίλη ($\cap$) για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.
- Η f είναι κυρτή ($\cup$) για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- Υπάρχει σημείο καμπής στο $(0, f(0)) = (0, 1)$



21. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5,\ x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

Λύση:

1. Μονοτονία και ακρότατα:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

Θέτουμε $f'(x) = 0 \implies x = 0$ ή $x = 2$.

Μελέτη πρόσημου $f'(x)$:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$

- Η f είναι φθίνουσα για $x < 0$ και $x > 2$, αύξουσα για $0 < x < 2$.
- Τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$, $f(0) = -5$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$, $f(2) = -1$.

2. Κυρτότητα και σημεία καμπής

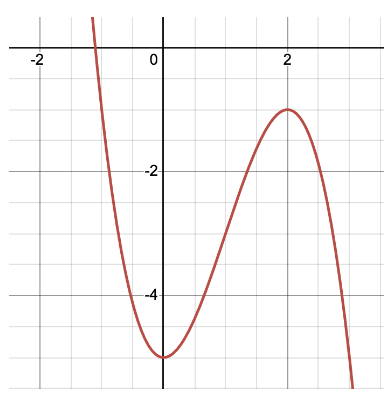
Δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x) = -6x + 6 = 6(1-x)$$

Θέτουμε $f''(x) = 0 \implies x = 1$.
Μελέτη πρόσημου $f''(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Η f είναι κυρτή ($\cup$) για $(-\infty, 1]$ και κοίλη ($\cap$) για $[1, +\infty)$ με σημείο καμπής το $(1, -3)$.



22. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:$f''(x) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημεία καμπής.

Λύση:

Αρχικά θα βρούμε τα πιθανά σημεία καμπής ($f''(x) = 0$),

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3.$$

Έλεγχος αλλαγής πρόσημου της $f''(x)$

- $x = 0$: $x^1 \to$ περιττή δύναμη $\to$ το πρόσημο αλλάζει γύρω από 0 $\to$ σημείο καμπής.
- $x = 1$: $(x-1)^1 \to$ περιττή δύναμη $\to$ αλλαγή πρόσημου $\to$ σημείο καμπής.
- $x = 2$: $(x-2)^2 \to$ ζυγή δύναμη $\to$ δεν αλλάζει πρόσημο $\to$ όχι σημείο καμπής.
- $x = 3$: $(x-3)^3 \to$ περιττή δύναμη $\to$ αλλαγή πρόσημου $\to$ σημείο καμπής.

Πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

23. Να βρεθούν οι τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $A(1,2)$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^3 + 3x^2 - \beta x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$..

Λύση:

Συνθήκη για σημείο καμπής:

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x - \beta, \quad f''(x) = 6ax + 6$$

Στο σημείο $x = 1$:

$$f''(1) = 6a + 6 = 0 \implies a = -1.$$

Συνθήκη για το σημείο να ανήκει στη γραφική:

$$f(1) = a + 3 - \beta + 6 = -1 + 3 - \beta + 6 = 8 - \beta$$

$$f(1) = 2 \implies 8 - \beta = 2 \implies \beta = 6.$$

Έλεγχος αλλαγής πρόσημου της δεύτερης παραγώγου:

$$f''(x) = 6ax + 6 = -6x + 6 = 6(1 - x)$$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{αν } x < 1 \text{ (κυρτή)} \\ f''(x) < 0 & \text{αν } x > 1 \text{ (κοίλη)} \end{cases}$$

Επομένως η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο γύρω από το $x = 1$ και το σημείο είναι σημείο καμπής.

24. Η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + 3x^2 + 2\lambda, \quad x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -2$, με $f(-2) = 0$. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ και να χαρακτηρίσετε το είδος του ακρότατου στο $x = -2$.

Λύση:

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$f'(x) = 3\kappa x^2 + 6x$$

Για τοπικό ακρότατο στο $x = -2$:

$$f'(-2) = 0 \implies 3\kappa(-2)^2 + 6(-2) = 0$$

$$12\kappa - 12 = 0 \implies \kappa = 1$$

Χρησιμοποιούμε την τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(-2) = \kappa(-2)^3 + 3(-2)^2 + 2\lambda = 0$$

$$-8 + 12 + 2\lambda = 0 \implies 2\lambda = -4 \implies \lambda = -2$$

Ελέγχουμε το είδος του ακρότατου χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = 6\kappa x + 6 = 6x + 6$$

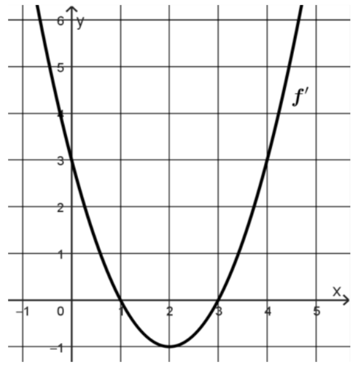
$$f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Στο $x = -2$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

25. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της f.



i. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει σημείο καμπής.

Λύση:

i. Από την γραφική παράσταση κατασκευάζουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

- Γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$
- Γνησίως φθίνουσα σοτ $[1, 3]$

ii.

- Τοπικό μέγιστο στο $x = 1$
- Τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$

iii. Σημείο καμπής στο $x = 2$

26. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x(x+3)^2$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

iii. Να βρείτε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

iv. Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

v. Να μελετήσετε την f ως προς τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

vi. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση:

i. $x \in \mathbb{R}$

ii. Για $x = 0 \implies (0,0)$ και για $y = 0 \implies : (-3,0)$ και $(0,0)$

iii.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 + 12x + 9 = 0 \implies 3(x+1)(x+3) = 0 \implies x = -1 \text{ ή } x = -3$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Τοπικό μέγιστο στο $(-3,0)$ και τοπικό ελάχιστο $(-1,-4)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-3]$ και $[-1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-3,-1]$.

iv. Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f''(x) = 0 \implies 6x + 12 = 0 \implies 6x = -12 \implies x = -2$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	ΣK	$\cup$	

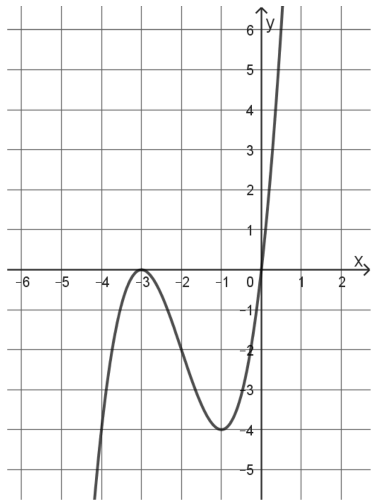
Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και κυρτή στο διάστημα $[-2,+\infty)$ Στο $x = -2$ παρουσιάζει σημείο καμπής το $(-2,-2)$.

v.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+6x^2+9x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3+6x^2+9x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = +\infty$$

vi.



27. Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης, να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = -2x + 7$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Μία συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, με Δ ένα διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ, αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

Παίρνουμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow \quad -2x_1 + 7 > -2x_2 + 7$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}$$

28. Για την πολυωνυμική συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f''(x) = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητά της.

ii. Αν ισχύει ότι $f'(1) = 8$, να βρείτε την τετμημένη του σημείου στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Λύση:

i. $f''(x) = 3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii.

$$f''(x) = 3 \implies f'(x) = \int 3\,dx \implies f'(x) = 3x + c$$

$$f'(1) = 8 \implies 8 = 3 + c \implies c = 5 \implies f'(x) = 3x + 5$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \implies 3x + 5 = 0 \implies x = -\frac{5}{3}$$

t	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο με τετμημένη $x = -\frac{5}{3}$

29. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

iv. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση:

i. ΠΟ: $x \in \mathbb{R}$

Για $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ και $x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow (0,0), \quad (2\sqrt{3},0), \quad (-2\sqrt{3},0)$$

Για $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

ii. Μονοτονία και Τοπικά Ακρότατα

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=x^2-4 \quad\Rightarrow\quad x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,2]$.

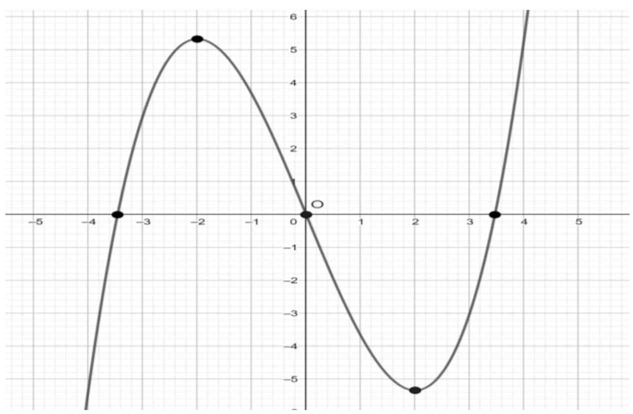
Για $x=-2 \quad\Rightarrow\quad f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-4(-2)=\frac{16}{3} \quad\Rightarrow\quad (-2,\frac{16}{3}) \quad T.M.$

Για $x=2 \quad\Rightarrow\quad f(2)=\frac{1}{3}(2)^3-4(2)=-\frac{16}{3} \quad\Rightarrow\quad (2,-\frac{16}{3}) \quad T.E.$

iii.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^3=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3=+\infty$$

iv.



30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^3+\beta x^2-9x+1$, $a,\beta\in\mathbb{R}$ με $a\neq 0$.
Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β, αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=3$ και σημείο καμπής στο $x=1$.

Λύση:

$$f'(x)=3ax^2+2\beta x-9, \quad f''(x)=6ax+2\beta$$
$$f''(1)=0 \implies 6a+2\beta=0 \implies \beta=-3a$$
$$f'(3)=0 \implies 27a+6\beta-9=0 \implies 27a-18a-9=0 \implies a=1 \implies \beta=-3$$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 20,\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f και να τα χαρακτηρίσετε.
ii. Να βρείτε την ολική μέγιστη και ολική ελάχιστη τιμή της f στο διάστημα $[-2, 3]$.

Λύση:

i.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x \text{ και } f'(x) = 0 \implies -3x(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	TE	$\nearrow$	TM	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ **και** στο $[2, +\infty)$.

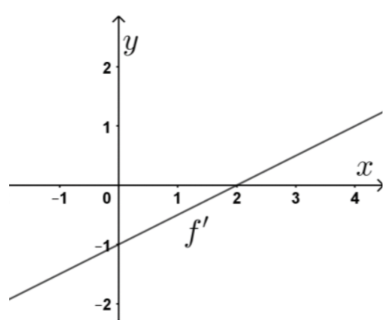
Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$, $f(0) = 20$, $(0, 20)$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$, $f(2) = 24$, $(2, 24)$.

ii.

$$f(-2) = 40, \quad f(0) = 20, \quad f(2) = 24, \quad f(3) = 20$$

Άρα ολικά μέγιστη τιμή στο διάστημα $[-2, 3]$ είναι 40 και ολικά ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[-2, 3]$ είναι 20.

32. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται μια ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μιας συνάρτησης f.



i. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

ii. Να βρείτε τη θέση του τοπικού ακροτάτου της f και να το χαρακτηρίσετε.

Λύση:

i.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Παρουσιάζει τοπικό - ολικό ελάχιστο στο $x = 2$.

33. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να μελετήσετε τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

v. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση:

i. ΠΟ: $x \in \mathbb{R}$

Για $y = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0$ και $x = -3 \Rightarrow (-3, 0),\ (0, 0)$

Για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$.

ii.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

Θέτω $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = -2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ **και** $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$. Παρουσιάζει ΤΕ στο $(0, 0)$ και ΤΜ στο $(-2, 4)$.

iii. Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$$f''(x) = 6x + 6$$

Θέτω $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	

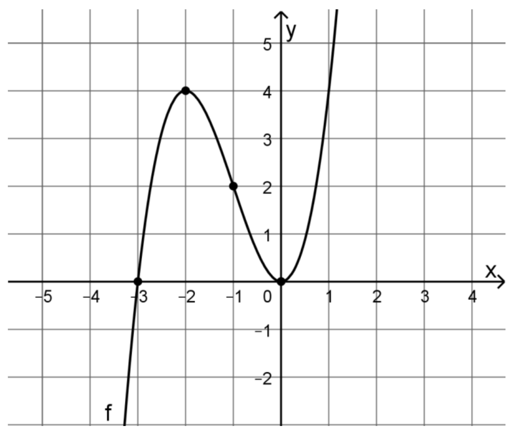
Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο διάστημα $[-1, +\infty)$ με Σ.Κ το $(-1, 2)$.

iv.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + 3x^2\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \tfrac{3}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 + 3x^2\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \tfrac{3}{x}\right) = +\infty$$

v.



34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 3x + 2$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με $x = 1$ και σημείο καμπής για $x = 0$. Να βρείτε τις τιμές των a και β.

Λύση:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x - 3, \quad f''(x) = 6ax + 2\beta$$

Στο Τ.Ε. $x = 1$:

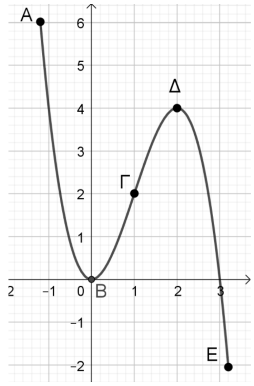
$$f'(1) = 0 \implies 3a - 3 = 0 \implies a = 1$$

Στο Σ.Κ. $x = 0$:

$$f''(0) = 0 \implies \beta = 0$$

$$a = 1, \ \ \beta = 0$$

35. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : [-1,2\ ,\ 3,2] \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής στο Γ.



Από την γραφική παράσταση να βρείτε:

i. Τα ακρότατα της συνάρτησης (τοπικά και ολικά) και να τα χαρακτηρίσετε.

ii. Το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι κυρτή.

iii. Το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

iv. Την τιμή της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο Γ.

Λύση:

i.

$$\text{A:}\quad f(-1,2) = 6 \quad \underline{\text{Ολικό μέγιστο}}$$

$$\text{B:}\quad f(0) = 0 \quad \underline{\text{Τοπικό ελάχιστο}}$$

$$\Delta\text{:}\quad f(2) = 4 \quad \underline{\text{Τοπικό μέγιστο}}$$

$$\text{E:}\quad f(3,2) = -2 \quad \underline{\text{Ολικό ελάχιστο}}$$

ii. f κυρτή στο $[-1,2\ ,\ 1]$

iii. f γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $[1,2]$

iv. $f''(1) = 0$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -4x^3 + 6x^2$. Να κάνετε την γραφική της παράσταση αφού πρώτα βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής καθώς και τη συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Λύση:

Πεδίο Ορισμού $x \in \mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Για $x = 0$ τότε $f(0) = 0$

Για $y = 0$ τότε $-4x^3 + 6x^2 = 0 \implies -2x^2(2x-3) = 0 \implies x = 0$ ή $x = \frac{3}{2}$

Επομένως, $(0,0)$ και $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Διαστήματα μονοτονίας:

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2 \implies f'(x) = -12x^2 + 12x = 0 \implies -12x(x-1) = 0$$

$$\implies x = 0 \quad ή \quad x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$. Με τοπικό ελάχιστο το (0,0) και τοπικό μέγιστο το (1,2).

Κυρτότητα - Σημέια καμπής:

$$f''(x) = 0 \implies -24x + 12 = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

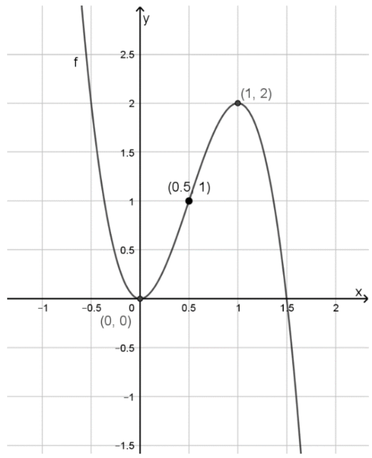
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Είναι κυρτή στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$ και κοίλη στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, με σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Συμπεριφορά στα άκρα:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -4x^3 = -4(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -4x^3 = -4(-\infty) = +\infty$$



37. Το άθροισμα δύο πραγματικών αριθμών είναι σταθερό και ίσο με 20. Να υπολογίσετε το μέγιστο δυνατό γινόμενο των δύο αυτών αριθμών.

Λύση:

Έστω x, y οι δύο πραγματικοί αριθμοί με $x + y = 20$.

Το γινόμενο Γ των δύο αριθμών δίνεται από τον τύπο: $\Gamma = xy$.

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις,

$$x + y = 20 \Rightarrow x = 20 - y \implies \Gamma(y) = (20 - y)y = 20y - y^2$$

Βρίσκουμε πρώτα το διάστημα, στο οποίο ορίζεται η μεταβλητή y. Αφού η μεταβλητή μας αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό, έχουμε ότι: $y \in \mathbb{R}$.

Για να βρούμε το μέγιστο αρκεί να υπολογίσουμε το ολικό μέγσιτο της συνάρτησης κατά τα γνωστά:

$$\Gamma'(y) = 20 - 2y, \quad y \in \mathbb{R} \implies \Gamma'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 10$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για τη συνάρτηση Γ:

y	$-\infty$		10		$+\infty$
$\Gamma'(y)$		$+$	0	$-$	
$\Gamma(y)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	

Συνεπώς, μεγιστοποιείται όταν ο αριθμός y είναι ο 10. Η μέγιστη δυνατή τιμή του γινομένου Γ είναι η:

$$\Gamma_{\text{μέγιστο}} = \Gamma(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

38. Το κέρδος P από την μηνιαία πώληση x τόνων ενός προϊόντος, σε χιλιάδες ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{8}{5}x - 3\,, \qquad 4 < x < 28$$

Να υπολογίσετε την μηνιαία πώληση σε τόνους, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό και το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Λύση:

$$P'(x) = -\tfrac{1}{10}x + \tfrac{8}{5}, \quad P''(x) = -\tfrac{1}{10}$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$P'(x) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x = 16 \text{ τόνοι}$$

Για να καθορίσουμε το είδος του ακροτάτου εξετάζουμε την καμπυλότητα μέσω της δεύτερης παραγώγου:

$P''(16) = -\tfrac{1}{10} < 0 \;\;\Rightarrow\;\;$ η γραφική στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, άρα $x = 16$ είναι μέγιστο

Τέλος, το μέγιστο κέρδος:

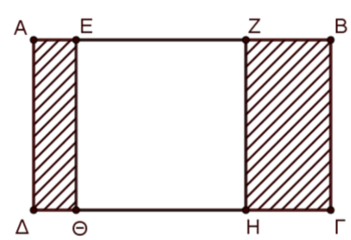
$$P(16) = -\tfrac{1}{20} \cdot 16^2 + \tfrac{8}{5} \cdot 16 - 3 = 9,8 = 9800 \text{ ευρώ}$$

39. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με πλευρές $A\Delta = x$, $AB = y$, το οποίο έχει σταθερή περίμετρο ίση με $16\ m$. Μέσα σε αυτό, βρίσκεται το τετράγωνο $EZH\Theta$ του οποίου η πλευρά EZ βρίσκεται πάνω στην πλευρά AB και η πλευρά ΘH πάνω στην πλευρά $\Delta\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -2x^2 + 8x$$

ii. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.



Λύση:

i.

$$\begin{cases} E_{\text{ορθ.}} = x \cdot y \\ \Pi_{\text{ορθ.}} = 2x + 2y = 16 \end{cases} \implies y = 8 - x \implies E_{\text{ορθ.}} = x(8-x) = 8x - x^2,$$

$$E_{\text{τετρ.}} = x^2 \implies E_{\text{γραμ.}} = E_{\text{ορθ.}} - E_{\text{τετρ.}} = (8x - x^2) - x^2 = 8x - 2x^2, \qquad x \in (0,4)$$

ii.

$$E(x) = 8x - 2x^2 \implies E'(x) = 8 - 4x$$

$$E'(x) = 0 \implies 8 - 4x = 0 \implies x = 2$$

x	0		2		4
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	Μέγιστο	$\searrow$	

Η E(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,4)$ και παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο $x = 2$.

40. Το κόστος της μηνιαίας παραγωγής x τόνων φέτας ενός εργοστασίου σε ευρώ είναι:

$$K(x) = -x^2 + 2000x + 1000 \ , \qquad 1 \leq x \leq 1000$$

Η τιμή πώλησης ανά τόνο δίνεται από τη σχέση $(-5x + 6000)$ ευρώ.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση του μηνιαίου κέρδους από την πώληση x τόνων χαλουμιού δίνεται από τη σχέση,

$$P(x) = -4x^2 + 4000x - 1000$$

ii. Ποια πρέπει να είναι η μηνιαία παραγωγή ώστε το κέρδος να είναι μέγιστο;

iii. Να υπολογίσετε το μέγιστο κέρδος.

Λύση:

i. Τιμή πώλησης των x τόνων παραγωγής:

$$x(-5x + 6000) = -5x^2 + 6000x$$

Μηνιαίο κέρδος:

$$P(x) = -5x^2 + 6000x - \left(-x^2 + 2000x + 1000\right) \implies$$

$$P(x) = -4x^2 + 4000x - 1000$$

ii. Για μέγιστο κέρδος πρέπει,

$$P'(x) = 0 \implies -8x + 4000 = 0 \implies x = 500 \quad \text{τόνους / μήνα.}$$

x	1	500	1000
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$

iii.

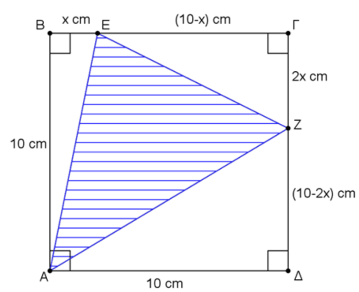
$$P(x) = -4x^2 + 4000x - 1000 \implies P(500) = 999000 \text{ ευρώ}$$

41. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 10 cm και E, Z σημεία των πλευρών $B\Gamma, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $BE = x$ cm και $\Gamma Z = 2x$ cm.

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου EAZ δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = x^2 - 5x + 50$$

ii. Να βρείτε την τιμή του x, έτσι ώστε το εμβαδόν E να ελαχιστοποιείται.



Λύση:

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν τετραγώνου δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\text{τετραγώνου}} = a^2 \implies E_{AB\Gamma\Delta} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

Το εμβαδόν τριγώνου δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{(\text{βάση})(\text{ύψος})}{2}$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$E_{BAE} = \frac{10x}{2} = 5x \text{ cm}^2$$
$$E_{EZ\Gamma} = \frac{(10-x)2x}{2} = (10x - x^2) \text{ cm}^2$$
$$E_{A\Delta Z} = \frac{(10-2x)10}{2} = (50 - 10x) \text{ cm}^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$E_{EAZ} = E_{AB\Gamma\Delta} - E_{BAE} - E_{EZ\Gamma} - E_{A\Delta Z}$$

Αντικαθιστώντας,

$$E_{EAZ} = 100 - 5x - (10x - x^2) - (50 - 10x) \implies E_{EAZ} = 100 - 5x - 10x + x^2 - 50 + 10x$$

$$\implies E(x) = x^2 - 5x + 50$$

Από τα δεδομένα, προκύπτει:

$$x \geq 0 \quad \text{και} \quad 2x \leq 10 \implies 0 \leq x \leq 5$$

Η πρώτη παράγωγος της E δίνεται από τον τύπο:

$$E'(x) = 2x - 5, \quad x \in (0, 5)$$

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, έχουμε:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Αφού $x \in [0, 5]$, το εμβαδόν E του τριγώνου EAZ θα ελαχιστοποιείται είτε για $x = \frac{5}{2}$ είτε για μία από τις τιμές των άκρων του διαστήματος $[0, 5]$. Έχουμε:

$$E(0) = 50 \text{ cm}^2, \quad E\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{175}{4} \text{ cm}^2 \quad \text{και} \quad E(5) = 50 \text{ cm}^2$$

x	0		$\frac{5}{2}$		5
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Συνεπώς, το εμβαδόν του τριγώνου ελαχιστοποιείται όταν το μήκος ισούται με $x = \frac{5}{2}$ cm.