# Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
# Εφαρμογές Διαφορικού Λογισμού

**1.** Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια. (Επανάληψη Β' Λυκείου)

i. $\lim_{x\to+\infty}(2x^4 - x^2 - 8x)$

ii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^2+8x}{-5x^4+7}$

iii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-9}{2x^4+3x^3}$

iv. $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x^6}{1-5x^3}$

v. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$

Λύση:

i.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^4 - x^2 - 8x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(2 - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x^4 = \infty$$

ii.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^2+8x}{-5x^4+7} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)}{x^4\left(-5+\frac{7}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{-5+\frac{7}{x^4}} = \frac{2+0+0}{-5+0} = \frac{-2}{5}$$

iii.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-9}{2x^4+3x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}-\frac{9}{x^4}\right)}{x^4\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}-\frac{9}{x^4}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{0}{2} = 0$$

iv.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x^6}{1-5x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{4}{x}+x^3\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}-5\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}+x^3}{\frac{1}{x^3}-5} = \frac{-\infty}{5} = -\infty$$

v.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{6}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}$$

Για $x > 0$:

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)} = \frac{\sqrt{3+0}}{0-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Για $x < 0$:

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)} = \frac{-\sqrt{3+0}}{0-2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**2.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια. (Επανάληψη Β' Λυκείου)

i. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+|x-3|}{4x-1}$

ii.$\lim_{x\to+\infty}\frac{6e^{4x}-e^{-2x}}{8e^{4x}-e^{2x}+3e^{-x}}$

iii. $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{3x^4-8}{2+x^2}\right)$.

iv. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x}$

v. $\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$

vi. $\lim_{x\to0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Λύση:

i. Για $x\to-\infty$ έχουμε $x-3<0 \implies |x-3|=-(x-3)=-x+3$.

Επομένως,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+|x-3|}{4x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+3}{4x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1+\frac{3}{x}}{4-\frac{1}{x}}=-\infty$$

ii.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6e^{4x}-e^{-2x}}{8e^{4x}-e^{2x}+3e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}\left(6-e^{-6x}\right)}{e^{4x}\left(8-e^{-2x}+3e^{-5x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-e^{-6x}}{8-e^{-2x}+3e^{-5x}}=\frac{6}{8}$$

iii.

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{3x^4-8}{2+x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2\cdot\frac{3-\frac{8}{x^4}}{1+\frac{2}{x^2}}\right)=\ln(+\infty)=+\infty$$

iv.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot3=3\cdot1=3$$

v.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{4}$$

vi.

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Εφόσον $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le1$, προκύπτει

$$-x^2\le x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2.$$

Έχουμε $\lim_{x\to0}-x^2=0$ και $\lim_{x\to0}x^2=0$. Άρα, από το θεώρημα παρεμβολής:

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

**3.** Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη συνέχεια: (Επανάληψη Β' Λυκείου)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x^3}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$$

Λύση:

- Για $x < 0$, έχουμε $f(x) = \sin x$. Η $\sin x$ είναι συνεχής παντού, άρα η $f$ είναι συνεχής για κάθε $x < 0$.
- Για $x > 0$, έχουμε
  $$f(x) = \frac{x^3}{x+1}.$$
  Είναι συνεχής σε κάθε $x > 0$ καθώς, $x + 1 \neq 0$.
- Στο $x = 0$, εξετάζουμε τα πλάγια όρια:
  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin x = \sin 0 = 0,$$
  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x+1} = \frac{0^3}{0+1} = 0.$$
  Επομένως
  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0,$$
  άρα η $f$ είναι συνεχής στο 0.

**4.** Να εξετάσετε τη συνάρτηση $g$ ως προς τη συνέχεια: (Επανάληψη Β' Λυκείου)

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 6 \\ x - 1 & \text{if } x \geq 6 \end{cases}$$

Λύση:

$$\lim_{x\to 6^-} g(x) = \lim_{x\to 6^-} (2x) = 2 \lim_{x\to 6^-} x = 2(6) = 12$$
$$\lim_{x\to 6^+} g(x) = \lim_{x\to 6^+} (x - 1) = \lim_{x\to 6^+} x - \lim_{x\to 6^+} 1 = 6 - 1 = 5$$

Επομένως η $g$ δεν είναι συνεχής στο x=6.

**5.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

i. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-9}$

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x}$

iii. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-x}{x-1}$

iv. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

Λύση:

i.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-9} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-9} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 3} \frac{2x+1}{2x} = \frac{7}{6}$$

ii.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{4\sec^2 4x} = \frac{3}{4}$$

iii.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-x}{x-1} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-x}{x-1} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2-x}}-1}{1} = -\frac{3}{2}$$

iv.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκ νέου τον κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

**6.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

i. $\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x^2-4)}$

ii. $\lim_{x\to 0} \frac{6^x-2^x}{x}$

iii. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{10} x}{\sin(x^{10})}$

iv. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$

Λύση:

i.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x^2-4)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x^2-4)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{2x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{2x^2-4x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{2x}{4x-4} = 1$$

ii.

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^x-2^x}{x} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^x-2^x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6^x(\ln 6)-2^x(\ln 2)}{1} = \ln 6 - \ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3$$

iii.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{10} x}{\sin(x^{10})} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{10} x}{\sin(x^{10})} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{10\sin^9 x\cos x}{10x^9\cos(x^{10})} = \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right]^9 \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos(x^{10})} = 1^9\cdot 1 = 1$$

iv.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to +\infty}(xe^x) = +\infty$$

**7.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Λύση:

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = (+\infty) - (+\infty)$$

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο αυτό. Θα μετατρέψουμε τη διαφορά σε πηλίκο, ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \frac{0}{0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκ νέου τον κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

**8.** Να υπολογίσετε το όριο, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

Λύση:

Το όριο είναι της απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De l'Hospital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\tan 3x)'}{(\tan 5x)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\sec^2 3x}{5\sec^2 5x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\frac{1}{\cos^2 3x}}{5\frac{1}{\cos^2 5x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}$$

Αυτή η μορφή είναι και πάλι απροσδιόριστη $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα De l'Hospital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cdot 2\cos 5x(-\sin 5x) \cdot 5}{5 \cdot 2\cos 3x(-\sin 3x) \cdot 3} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-30\cos 5x \sin 5x}{-30\cos 3x \sin 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x \sin 5x}{\cos 3x \sin 3x}$$

Η μορφή αυτή είναι και πάλι $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε ακόμη μία φορά τον κανόνα De l'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x \sin 5x}{\cos 3x \sin 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 5x \sin 5x)'}{(\cos 3x \sin 3x)'}.$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$(\cos 5x \sin 5x)' = -5\sin^2 5x + 5\cos^2 5x = 5\left(\cos^2 5x - \sin^2 5x\right)$$

$$(\cos 3x \sin 3x)' = -3\sin^2 3x + 3\cos^2 3x = 3\left(\cos^2 3x - \sin^2 3x\right)$$

Άρα,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x \sin 5x}{\cos 3x \sin 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{5(\cos^2 5x - \sin^2 5x)}{3(\cos^2 3x - \sin^2 3x)}.$$

Χρησιμοποιώντας τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, προκύπτει

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{5\cos(10x)}{3\cos(6x)}.$$

Υπολογίζοντας το όριο,

$$= \frac{5\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{3\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{5\cos(5\pi)}{3\cos(3\pi)} = \frac{5\cdot(-1)}{3\cdot(-1)} = \frac{5}{3}.$$

**9.** Να υπολογίσετε το όριο, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

Λύση:

Καταρχήν γράφουμε το όριο σε μορφή δύναμης:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Η συνάρτηση του ορίου είναι της μορφής $g(x)^{f(x)}$, οπότε τη μετατρέπουμε στη μορφή

$$g(x)^{f(x)} = e^{f(x)\ln g(x)}.$$

Έτσι το όριό μας γράφεται

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}.$$

Οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το όριο

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De l'Hospital:

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(\cos x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x/\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}.$$

Αυτό είναι και πάλι όριο της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε ξανά τον κανόνα De l'Hospital:

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^k = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

**10.** Να υπολογίσετε το όριο, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$$

Λύση:

Το όριο είναι της απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(1+x)}{\frac{d}{dx}(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x(1+x)}.$$

Υπολογίζοντας το όριο:

$$= \frac{1}{e^0(1+0)} = 1.$$

**11.** Να υπολογίσετε το όριο, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

Λύση:

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)}{1 - \cos x}.$$

Αφού το όριο παραμένει απροσδιόριστο $\frac{0}{0}$, εφαρμόζουμε ξανά τον κανόνα De l'Hospital:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})}{\sin x}.$$

Το όριο εξακολουθεί να είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε μια τρίτη φορά τον κανόνα De l'Hospital:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x})}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

**12.** Να υπολογίσετε το όριο, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} (4-3x)^{\tan x}$$

Λύση:

Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)^{g(x)}$, οπότε γράφουμε:

$$\lim_{x\to 1} (4-3x)^{\tan x} = \lim_{x\to 1} e^{\tan x \cdot \ln(4-3x)}$$

Θέτουμε:

$$k = \lim_{x\to 1} \tan x \cdot \ln(4-3x)$$

Το όριο είναι της μορφής $+\infty \cdot 0$, οπότε το γράφουμε ως:

$$k = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(4-3x)}{\cot x}$$

Για $x \to 1$, έχουμε:

$$\ln(4-3x) \to \ln(1) = 0$$

και

$$\cot x \to \cot 1$$

Άρα η μορφή του ορίου είναι $\frac{0}{\text{σταθερό}}$, οπότε:

$$k = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 1}(4-3x)^{\tan x} = e^0 = 1$$

**13.** Να αποδειχτεί ότι:

$$\lim_{n\to +\infty} n \cdot (\sqrt[a]{1} - 1) = \ln a$$

Λύση:

Θέτουμε $x = n$, και γενικεύουμε:

$$\lim_{n\to +\infty} n \cdot \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} x \cdot \left(a^{1/x} - 1\right)$$

Το όριο είναι της μορφής $\infty \cdot 0$, οπότε γράφουμε:

$$x \cdot \left(a^{1/x} - 1\right) = \frac{a^{1/x} - 1}{1/x}$$

Έχουμε τώρα το όριο της μορφής $0/0$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^{1/x} - 1}{1/x}$$

Παραγωγίζοντας αριθμητή και παρονομαστή ως προς $x$:

$$\text{Αριθμητής: } \frac{d}{dx} a^{1/x} = a^{1/x} \cdot \ln a \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{a^{1/x} \ln a}{x^2}$$

$$\text{Παρονομαστής: } \frac{d}{dx}\, 1/x = -\frac{1}{x^2}$$

Άρα:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-a^{1/x} \ln a / x^2}{-1/x^2} = \lim_{x \to +\infty} a^{1/x} \ln a$$

Για $x \to +\infty$, $a^{1/x} \to 1$, άρα το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to +\infty} a^{1/x} \ln a = \ln a$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot (a^{1/n} - 1) = \ln a$$

**14.** Να υπολογίσετε το όριο, με τη χρήση του κανόνα de l'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{[1 + \sin 2x]^3 - 1}{x}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η παράσταση είναι της μορφής $0/0$ για $x \to 0$, οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα του de l'Hôpital:

Παίρνουμε τις παραγώγους αριθμητή και παρονομαστή ως προς $x$:

$$\frac{d}{dx}([1 + \sin 2x]^3 - 1) = 3[1 + \sin 2x]^2 \cdot 2 \cos 2x = 6[1 + \sin 2x]^2 \cos 2x$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Άρα το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to 0} \frac{6[1 + \sin 2x]^2 \cos 2x}{1}$$

Όμως για $x \to 0$:

$$\sin 2x \to 0 \quad \text{και} \quad \cos 2x \to 1$$

$$[1 + \sin 2x]^2 \to 1^2 = 1$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to 0} 6[1 + \sin 2x]^2 \cos 2x = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

**15.** Δίνεται η συνάρτηση,

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 2]$$

Να εξετάσετε κατά πόσο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Αν ισχύουν, να βρείτε όλα τα $\xi \in (-2, 2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση:

Για την $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$ ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-2, 2]$,
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και
- $f(-2) = f(2) = 0$

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$. Η παράγωγος της $f$ δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Είναι $f'(\xi) = 0$ για $\xi = 0$ και αφού $0 \in (-2, 2)$, η τιμή $\xi = 0$ είναι δεκτή.

**16.** Να δείξετε ότι η ποιο κάτω εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[2, 3]$.

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

Λύση:

Υπολογίζουμε τις τιμές στα άκρα του διαστήματος:

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = 8 - 4 - 5 = -1,$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 27 - 6 - 5 = 16.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(2) \cdot f(3) = (-1) \cdot 16 = -16 < 0.$$

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής (είναι πολυωνυμική). Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, αν μια συνεχής συνάρτηση αλλάζει πρόσημο σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Συμπέρασμα:Υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $x^3 - 2x - 5 = 0$ στο διάστημα $[2, 3]$.

**17.** Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^4 + 4ax^3 - 1 = a,\ a \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Λύση:

Ο έλεγχος των προϋποθέσεων του θεωρήματος Bolzano στην f δεν αποδίδει, τότε θεωρούμε μια συνάρτηση F η οποία έχει παράγωγο την f και σε αυτήν εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle. (Την F τη λέμε αρχική ή παράγουσα της f).

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$\left[x^5 + ax^4 - (a+1)x\right]' = 0,$$

οπότε: θεωρούμε συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + ax^4 - (a+1)x, \quad \text{με } a, x \in \mathbb{R}.$$

Η $f$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με

$$f'(x) = 5x^4 + 4ax^3 - (a+1)$$

και

$$f(0) = f(1).$$

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$5\xi^4 + 4a\xi^3 - 1 = a.$$

**18.** Δείξτε ότι η $2x^3 - 3x^2 - 36x + \sin\theta = 0,\ \ \theta \in \mathbb{R}$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση:

Έστω ότι έχει δύο ρίζες $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$. Στο $[\rho_1, \rho_2]$ εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + \sin\theta$$

η οποία είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, \rho_2)$ με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Άρα έχουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

$$\rho \in (\rho_1, \rho_2) \subset (0, 1).$$

Όμως

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \quad ή \quad \text{άτοπο διότι δεν ανήκουν στο } (0,1).$$

Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, 1)$.

**19.** Να αποδείξετε ότι η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Η $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$f(-1) = -2 < 0 \quad \text{και} \quad f(1) = 4 > 0$$

Άρα, $f(-1)f(1) < 0$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει άλλη ρίζα.

Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες και $\rho_1, \rho_2$ δύο τυχαίες ρίζες με $\rho_1 < \rho_2$. Για το διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ισχύουν τα εξής:

- η $f$ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, \rho_2)$ και
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Έτσι, το θεώρημα Rolle ισχύει για την $f$ στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5$$

Επομένως,

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 15\xi^4 - 15\xi^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0.$$

Θέτουμε $\omega = \xi^2$. Η εξίσωση $3\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις, αφού η διακρίνουσα της είναι

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Επομένως, ούτε και η εξίσωση $3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0$ έχει πραγματικές λύσεις.

Έτσι, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες. Επειδή όμως αποδείξαμε προηγουμένως ότι έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, αυτή θα είναι και η μοναδική.

**20.** Βρείτε τις παραμέτρους $a, b, c$ έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$, για τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+b) + (x+c), & x \in [1, 0) \\ (a-1)x^2 + 2(x+1) - c, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Λύση:

Για να μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$, θα πρέπει κατ' αρχάς να είναι η $f$ συνεχής. Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στο μηδέν:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [x(x+b) + (x+c)] = c$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[(a-1)x^2 + 2(x+1) - c\right] = 2 - c$$

Επομένως, θα πρέπει:

$$c = 2 - c \iff c = 1$$

και

$$f(0) = 2 - c = 1.$$

Από την άλλη μεριά, θα πρέπει η συνάρτηση να είναι και παραγωγίσιμη στο μηδέν:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x+b) + (x+1) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x+b) + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (x+b+1) = b+1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(a-1)x^2 + 2(x+1) - 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(a-1)x^2 + 2x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} [(a-1)x + 2] = 2.$$

Άρα, πρέπει $b + 1 = 2$ ή, ισοδύναμα, $b = 1$. Θα πρέπει, τέλος, οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος να συμπίπτουν:

$$f(-1) = f(1) \iff -(-1+b) + (-1+c) = (a-1) + 2(1+1) - c \iff 0 = a + 2 \iff a = -2.$$

Για τις τιμές των παραμέτρων που βρήκαμε, η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & x \in [-1, 0) \\ -3x^2 + 2x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

με παράγωγο:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2, & x \in [-1,0) \\ -6x+2, & x \in [0,1] \end{cases}$$

η οποία μηδενίζεται στο $\xi = \frac{1}{3} \in (-1,1)$, γεγονός που επαληθεύει το Θεώρημα Rolle.

**21.** Να εξεταστεί η εφαρμογή του Θεωρήματος Rolle στη συνάρτηση,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3, \quad \forall x \in [0,2].$$

Λύση:

Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle απαιτούν η συνάρτησή μας να είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοικτό $(0,2)$ και επίσης να ισχύει $f(0) = f(2)$.

Όντως, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ σαν πολυωνυμική συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ επίσης σαν πολυωνυμική συνάρτηση και επιπλέον

$$f(0) = f(2) = 3.$$

Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα Rolle, θα πρέπει τότε να υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο $x \in (0,2)$ με μηδενική πρώτη παράγωγο, δηλαδή

$$f'(x) = 0.$$

Υπολογίζουμε:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x.$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 4x = 0 \implies x(3x-4) = 0 \implies x = 0 \text{ ή } x = \frac{4}{3}.$$

Υπάρχουν λοιπόν δύο σημεία με μηδενική πρώτη παράγωγο, άλλα το 0 είναι εκτός του ανοικτού διαστήματος $(0,2)$. Κατά συνέπεια, υπάρχει μόνο ένα σημείο $x_0 \in (0,2)$, δηλαδή το

$$x = \frac{4}{3},$$

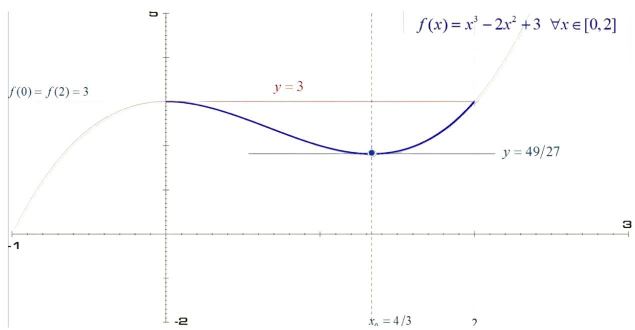
το οποίο μηδενίζει την πρώτη παράγωγο, ή γεωμετρικά, η εφαπτόμενη ευθεία σε αυτό είναι παράλληλη με τη χορδή $y = [f(0) = f(2) =]3$ και άρα με τον άξονα των $x$.

Συγκεκριμένα, η εφαπτομένη αυτή είναι της μορφής

$$y - f\left(\frac{4}{3}\right) = f'\left(\frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right) = 0 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right) = 0,$$

δηλαδή

$$y = f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 = \frac{49}{27}.$$




**22.** Δίνεται η εξίσωση:

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \quad x \in (2,3)$$

i. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano), σύμφωνα με το οποίο αν μία συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και $f(a)f(b) < 0$, τότε η $f$ έχει ρίζα στο διάστημα $(a,b)$, αποδείξτε ότι η ως άνω εξίσωση έχει ρίζες στο διάστημα $(2,3)$.

ii. Δείξτε ότι στο ίδιο διάστημα, η ρίζα της συνάρτησης είναι μοναδική.

a. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle

b. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μονοτονίας

Λύση:

i. Ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 2x - 5.$$

Η $f$ είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, και ειδικότερα στο διάστημα $[2,3]$.

Υπολογίζουμε τα άκρα του διαστήματος:

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = 8 - 4 - 5 = -1,$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 27 - 6 - 5 = 16.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(2) \cdot f(3) = (-1) \cdot 16 = -16 < 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano), υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $(2,3)$.

ii.

a. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (2,3)$ με $x_1 < x_2$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε ένα $c \in (x_1, x_2)$ με $f'(c) = 0$. Όμως, $f'(x) > 0$ σε όλο το διάστημα, άτοπο. Άρα η ρίζα είναι μοναδική.

b.
$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Στο διάστημα $(2,3)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \geq 3 \cdot 2^2 - 2 = 12 - 2 = 10 > 0.$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,3)$. . Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζα σε ένα διάστημα, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

**23.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 - \ln x = x^2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, e)$.

Λύση:

Έλεγχος τιμών στα άκρα του διαστήματος

$$f(1) = 2 - \ln 1 - 1^2 = 2 - 0 - 1 = 1 > 0,$$

$$f(e) = 2 - \ln e - e^2 = 2 - 1 - e^2 = 1 - e^2 < 0.$$

Εφαρμογή Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano)

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$. Επειδή

$$f(1) \cdot f(e) < 0,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (1, e)$.

Έλεγχος μονοτονίας για μοναδικότητα. Η παράγωγος της $f(x)$ είναι

$$f'(x) = -\frac{1}{x} - 2x.$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (1, e).$$

Άρα η ρίζα είναι μοναδική.

**24.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[1,4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(1,4)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Λύση:

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[1,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,4)$, με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \forall x\in(1,4)$$

Η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[1,4]$.

Έτσι, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,4)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1}=\frac{1}{3}$$

Άρα

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{1}{3}\implies \sqrt{\xi}=\frac{3}{2}\implies \xi=\frac{9}{4}$$

Επομένως, υπάρχει ο μοναδικός αριθμός $\frac{9}{4}\in(1,4)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

**25.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\kappa x^2$, $\kappa\neq 0$, ορισμένη στο διάστημα $[a,\beta]$. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής και αν ναι, να βρείτε για ποια τιμή του $\xi$ στο διάστημα $[a,\beta]$ ισχύει το Θεώρημα.

Λύση:

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(a,\beta)$ ως πολυωνυμική.

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}=\frac{\kappa\beta^2-\kappa a^2}{\beta-a}=\frac{\kappa(\beta^2-a^2)}{\beta-a}=\frac{\kappa(\beta+a)(\beta-a)}{\beta-a}=\kappa(a+\beta)$$

Όμως $f'(x)=2\kappa x,\ \forall x\in(a,\beta)$.

Έτσι, έχουμε:

$$f'(\xi)=2\kappa\xi\implies 2\kappa\xi=\kappa(a+\beta)\iff \xi=\frac{a+\beta}{2}$$

**26.** Με τη βοήθεια του θεωρήματος της μέσης τιμής, να δείξετε ότι:

$$1 + x < e^x < 1 + ex$$

για κάθε $x \in (0, 1)$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ και εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[0, x]$.

1. Η $f$ είναι συνεχής στο $[0, x]$
2. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $f'(x) = e^x$

Επομένως υπάρχει $\xi \in (0, x)$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \implies e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \tag{1}$$

Ισχύει:

$$\xi \in (0, x): \quad 0 < \xi < x < 1 \quad \xrightarrow{e^x \text{ αύξουσα}} \quad e^0 < e^\xi < e^x < e^1$$
$$1 < e^\xi < e$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1):

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e \implies x < e^x - 1 < xe \implies x + 1 < e^x < xe + 1$$

**27.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin(\pi x) + ax^2 + \beta x$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ με $a + \beta = 1$ (1). Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y + x = 3$.

Λύση:

Η $f$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \iff f'(x_0) = a + \beta \overset{(1)}{\iff} f'(x_0) = 1$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $\varepsilon_1$ είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$. Ισχύει $f'(x_0) \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Δηλαδή υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία $\varepsilon$ σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της $f$ που είναι κάθετη στην $\varepsilon_1$.

**28.** Δείξτε ότι

$$1 + \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

Λύση:

Είναι

$$1 + \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e} \iff \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) - 1 < \frac{1}{e}$$

$$\iff \frac{1}{e+1} < \frac{\ln(1+e) - \ln e}{(1+e) - e} < \frac{1}{e}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ με $x \in [e, 1+e]$. Για την $f$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ..

Οπότε υπάρχει $\xi \in (e, 1+e)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(1+e) - f(e)}{1+e-e} \iff f'(\xi) = \frac{\ln(1+e) - 1}{1} \iff \frac{1}{\xi} = \ln(1+e) - 1$$

Επειδή $\xi \in (e, 1+e)$ είναι $0 < e < \xi < 1+e \iff \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+e} \iff \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) - 1 < \frac{1}{e} \iff$

$$1 + \frac{1}{e+1} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}$$

**29.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \gamma, & -2 \leq x < 0 \\ \alpha x^2 + 3x + 3, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται για την $f$ το Θ. Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$.

Λύση:

Η $f$ είναι συνεχής στο $[-2, 0) \cup (0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $[-2, 0) \cup (0, 2]$.
Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle η $f$ πρέπει να είναι συνεχής και στο 0. Δηλαδή,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \iff \gamma = 3$$

και παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ δηλαδή

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Είναι

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + \beta x + \gamma - 3}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + \beta x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (x + \beta) = \beta$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x^2 + 3x + 3 - 3}{x} = \lim_{x \to 0^+} (\alpha x + 3) = 3$$

οπότε $\beta = 3$.

Ακόμη $f(-2) = (-2)^2 + \beta(-2) + \gamma = 4 - 2\beta + \gamma = 4 - 2 \cdot 3 + 3 = 4 - 6 + 3 = 1$ και $f(2) = \alpha \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 3 = 4\alpha + 6 + 3 = 4\alpha + 9$

Πρέπει $f(-2) = f(2) \iff 1 = 4\alpha + 9 \iff \alpha = -2$.

Άρα $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 3, 3)$.

**30.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$. Να βρείτε το $\xi$.

Λύση:

Η $f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης είναι

$$f(0) = 2 \quad \text{και} \quad f(1) = 2$$

από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = 0$.

Έχουμε

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα:

$$f'(\xi) = 0 \iff 3\xi^2 + 8\xi - 5 = 0 \iff \xi_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{124}}{6}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{-8-\sqrt{124}}{6} < 0, & (\text{απορρίπτεται}) \\ \xi_2 = \frac{-8+\sqrt{124}}{6}, & (\text{δεκτή}) \end{cases}$$

**31.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 + \frac{16}{3}x^3 - 10x^2 + 8x + 2003, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\xi \in (0,1)$ με $f''(\xi) = 0$.

Λύση:

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x^3 + 16x^2 - 20x + 8$. Για την συνάρτηση $f'$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$, η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$ και $f'(0) = 8$ και $f'(1) = 8$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f''(\xi) = 0$.

**32.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ στο $[0,1]$ με $f(0) = -\frac{1}{e}$ και η συνάρτηση $F(x) = f(x) + e^{-x}, \quad x \in [0,1]$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

i. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) = 0$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = \frac{1}{e^{\xi}}$.

Λύση:

i. Αφού για την $F$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle είναι:

$$F(0) = F(1) \iff f(0) + e^{-0} = f(1) + e^{-1} \iff -\frac{1}{e} + 1 = f(1) + \frac{1}{e}$$
$$\iff -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = f(1) \iff f(1) = \frac{e-2}{e} > 0.$$

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και $f(0)f(1) < 0$. Από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ii. Για την $F$ ισχύει το Θ. Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με:

$$F'(\xi) = 0 \iff f'(\xi) - e^{-\xi} = 0 \iff f'(\xi) = e^{-\xi} \iff f'(\xi) = \frac{1}{e^{\xi}}.$$

**33.** Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x - x^2 - x + 13 = 0$ έχει τρεις το πολύ πραγματικές ρίζες.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x^2 - x + 13$ οπότε

$$f'(x) = e^x - 2x - 1, \quad f''(x) = e^x - 2, \quad \text{και} \quad f'''(x) = e^x.$$

Θεωρούμε ότι η $f$ έχει τέσσερις ρίζες, έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$, οπότε από το Θ. Rolle στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], [\rho_3, \rho_4]$ υπάρχουν $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ με

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0.$$

Επίσης από το Θ. Rolle στα $[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, \xi_3]$ για την $f'$ υπάρχουν $\kappa_1 < \kappa_2$ με

$$f''(\kappa_1) = f''(\kappa_2) = 0.$$

Ομοίως από Θ. Rolle για την $f''$ υπάρχει $\lambda$ στο $[\kappa_1, \kappa_2]$ με

$$f'''(\lambda) = 0 \iff e^{\lambda} = 0 \quad (\text{άτοπο}).$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

**34.** Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω μαθηματικές προτάσεις είναι σωστές.

i. Μια συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, με $\Delta$ ένα διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ονομάζεται σταθερή στο $\Delta$, αν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2$ που ανήκουν στο $\Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

ii. Μια συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, με $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, ονομάζεται φθίνουσα στο $\Delta$, αν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2$ που ανήκουν στο $\Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

iii. Μια συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, με $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο $\Delta$, αν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2$ που ανήκουν στο $\Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

iv. Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν για κάθε πραγματικό αριθμό $x$ στο $\Delta$ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0)$

v. Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό μέγιστο, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Delta$

vi. Κάθε ολικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) είναι και τοπικό ακρότατο. vii. Ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) μπορεί να είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από ένα τοπικό ελάχιστο.

viii. Η συνάρτηση η οποία ορίζεται σε κλειστό διάστημα, δεν έχει πάντοτε μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

ix. Οποιαδήποτε μη σταθερή συνάρτηση παρουσιάζει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο.

Λύση: i. Σωστό, ii. Λάθος, iii. Σωστό, iv. Σωστό, v. Σωστό, vi. Σωστό, vii. Σωστό, viii. Λάθος, ix. Λάθος (μόνο αν ορίζεται σε κλειστό σύνολο)

**35.** Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας των πιο κάτω συναρτήσεων και να κάνετε τη γραφική τους παράσταση. Επίσης, αν σημειώσετε τα τοπικά και ολικά ακρότατα.

i. f(x)=sin(x) , $x \in [-\pi, \pi]$

ii. f(x)=cos(x) , $x \in [0, 2\pi)$

iii. f(x)=$x^2$ , $x \in \mathbb{R}$

Λύση:

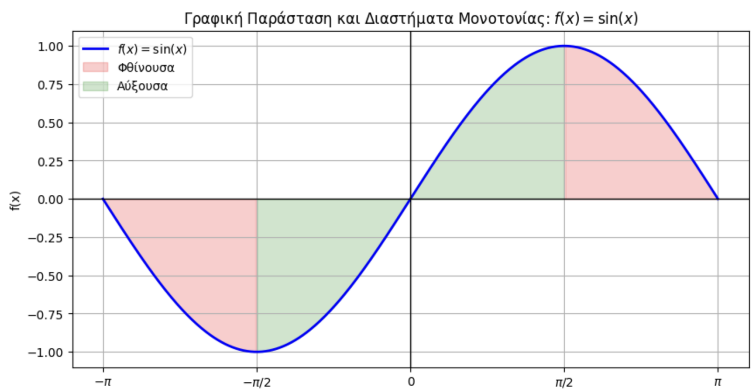
i.

Μονοτονία:

- Γνησίως αύξουσα: $[-\pi/2, \pi/2]$
- Γνησίως φθίνουσα: $[-\pi, -\pi/2]$ και $[\pi/2, \pi]$

Ακρότατα:

- Τοπικό μέγιστο: f(-π)=0 και f(π/2)=1 με ολικό μέγιστο το f(π/2)=1
- Τοπικό ελάχιστο: f(-π/2)=-1 και f(π)=0 με ολικό ελάχιστο το f(-π/2)=-1




ii.

Μονοτονία:

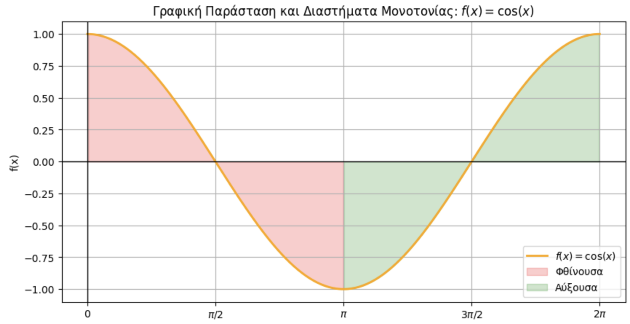
- Γνησίως αύξουσα: $[\pi, 2\pi)$
- Γνησίως φθίνουσα: $[0, \pi]$

Ακρότατα:

- Τοπικό μέγιστο: f(0)=1 με ολικό μέγιστο το f(0)=1
- Τοπικό ελάχιστο: f(π)=-1 με ολικό ελάχιστο το f(π)=-1

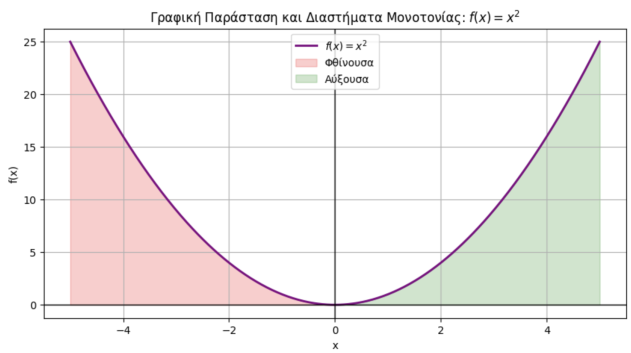
iii.
Μονοτονία:

- Γνησίως αύξουσα: $[0, \infty)$
- Γνησίως φθίνουσα: $[-\infty, 0]$

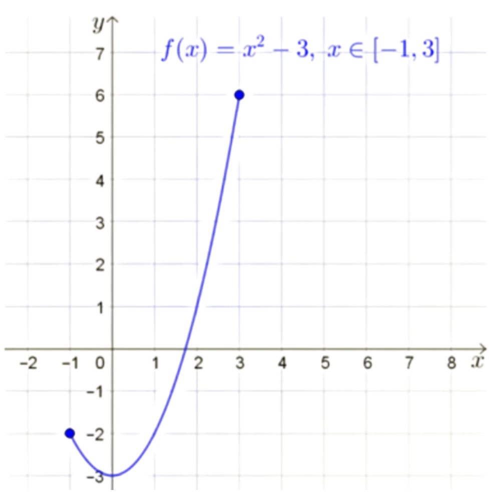



Ακρότατα:

- Ολικό μέγιστο: Δεν υπάρχει
- Ολικό ελάχιστο: f(0)=0




**36.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης (αν υπάρχουν) και να γράψετε, για κάθε περίπτωση, την αντίστοιχη ανισότητα.



Λύση:

Ολικό μέγιστο f(3)=6

Ολικό ελάχιστο f(0)=-3

$$-3 \leq f(x) \leq 6 \ \ \forall \ \ x \ \ \in [-1,3]$$

**37.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η τιμή $f(1)$ είναι η ελάχιστη τιμή για τη συνάρτηση και να την υπολογίσετε.

*Υπενθύμιση:* Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν για κάθε πραγματικό αριθμό $x$ στο $\Delta$ ισχύει: $f(x) \geq f(x_0)$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(x-1)^2 \geq 0.$$

Επομένως,

$$f(x) = 3 + (x-1)^2 \geq 3.$$

Η ισότητα επιτυγχάνεται μόνο όταν:

$$x - 1 = 0 \implies x = 1.$$

Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι:

$$f(1) = 3 + (1-1)^2 = 3.$$

**38.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 7x - 4, \quad x \in [0,5]$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x) = 7x - 4$ είναι γραμμική με θετική κλίση $(7 > 0)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,5]$.

Επομένος,

Ελάχιστη τιμή: $f(0) = 7 \cdot 0 - 4 = -4,$

Μέγιστη τιμή: $f(5) = 7 \cdot 5 - 4 = 35 - 4 = 31$

**39.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1, \;\; x \in \mathbb{R}$.. Να δείξεται ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$ , το f(0) = 1.

Λύση:

$$-3x^4 \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$
$$-3x^4 + 1 \leq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

$$f(x) \leq f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η $f$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.

**40.** Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω μαθηματικές προτάσεις είναι σωστές.

i. Έστω η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(a, \beta)$. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.

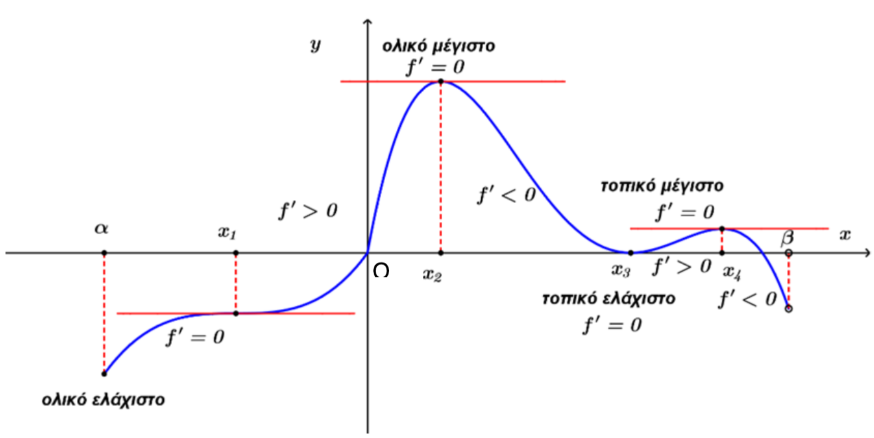
ii. Η μονοτονία μιας συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα , εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου της στο ανοικτό διάστημα.

iii. Έστω η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(a, \beta)$. Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την μονοτονία της.

iv. Αν $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ τότε η $f$ παρουσιάζει στο $x = x_0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(x_0)$.

Λύση: i. Σωστό, ii. Σωστό, iii. Λάθος, iv. Σωστό

**41.** Βάση του σχήματος, να συμπληρώσετε το πίνακα μονοτονίας.



| $x$ | $a$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | |

Λύση:

| $x$ | $a$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $x_3$ | | $x_4$ | | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $f(a)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $f(x_2)$ | $\searrow$ | $f(x_3)$ | $\nearrow$ | $f(x_4)$ | $\searrow$ | |

**42.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3, \quad x \in \mathbb{R},\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $-2$, να υπολογίσετε τις τιμές των $\kappa, \lambda$ και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.

Λύση: Η παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = 2\kappa x + \lambda.$$

Για να υπάρχει ακρότατο στο $x = 1$, πρέπει:

$$f'(1) = 2\kappa + \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2\kappa.$$

Επιπλέον δίνεται ότι $f(1) = -2$:

$$f(1) = \kappa + \lambda + 3 = \kappa - 2\kappa + 3 = -\kappa + 3 = -2 \quad \Longrightarrow \quad \kappa = 5.$$

Συνεπώς:

$$\lambda = -2 \cdot 5 = -10.$$

Η παράγωγος γίνεται:

$$f'(x) = 10x - 10 = 10(x - 1).$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο με τιμή $f(1) = -2$.

**43.** Να μελετήσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα:

i. $f(x) = 2x^2 - 8x + 9,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = -3x^2 + 9,\ x \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) = -x^3 + 12x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

v. $f(x) = x \ln x, \qquad x \in (0, \infty)$

vi. $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x,\ \ x \in \mathbb{R}$

Λύση: i. Παράγωγος:

$$f'(x) = 4x - 8.$$

Συνθήκη ακροτάτου ($f'(x) = 0$):

$$4x - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x) = 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή και το σημείο $x = 2$ είναι **τοπικό και ολικό ελάχιστο**.
Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9 = 1.$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 2$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f(2) = 1$.

ii. Παράγωγος:

$$f'(x) = 2x - 4.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$2x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 2$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f(2) = -4$.

iii. Παράγωγος:

$$f'(x) = -6x.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$-6x = 0 \implies x = 0.$$

Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(0) = -3 \cdot 0^2 + 9 = 9.$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 0$ τοπικό και ολικό μέγιστο με τιμή $f(0) = 9$.

iv. Παράγωγος:

$$f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x-2)(x+2).$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$x = -2,\ 2.$$

Τιμές της συνάρτησης στα ακρότατα:

$$f(-2) = -(-2)^3 + 12(-2) + 1 = -15,$$

$$f(2) = -(2)^3 + 12(2) + 1 = 17.$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

Συμπέρασμα:

Τοπικό ελάχιστο: $x = -2$, $f(-2) = -15$

Τοπικό μέγιστο: $x = 2$, $f(2) = 17$

v. Παράγωγος:

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$\ln x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f\left(\tfrac{1}{e}\right) = \tfrac{1}{e}\ln\left(\tfrac{1}{e}\right) = \tfrac{1}{e}\cdot(-1) = -\tfrac{1}{e}.$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $0^+$ | $\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Η συνάρτηση έχει στο $x = \frac{1}{e}$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

vi. Παράγωγος:

$$f'(x) = 6x^2 - 5x + 2.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$6x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 6\cdot 2 = 25 - 48 = -23 < 0.$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και η συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα. Ο συντελεστής του $x^2$ είναι θετικός ($6 > 0$) και $\Delta < 0$, άρα το τριώνυμο $f'(x)$ είναι πάντα θετικό. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ και δεν έχει τοπικά ή ολικά ακρότατα.

**44.** Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln\dfrac{1}{x}$

ii. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

iii. $f(x) = \tan x, \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Λύση:

i. Επειδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) = (-\ln x)' = -\frac{1}{x} < 0$, η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

ii. Η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

οπότε:

- $f'(x) > 0$ στο $(-1, 0)$ που σημαίνει ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$.
- $f'(x) < 0$ στο $(0, 1)$ που σημαίνει ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

iii. Επειδή για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$, η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**45.** Έστω συνάρτηση $f$ με τύπο

$$f(x) = 2x - \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x - \sin^2 x) = 2 - 2\sin x \cos x = 2 - \sin(2x).$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$, προκύπτει

$$1 \leq f'(x) \leq 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει τοπικά ακρότατα.

**46.** Για τους διάφορους του μηδέν αριθμούς $a, \beta, \gamma$ ισχύει: $3\beta^2 - 4a\gamma \leq 0$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 3\beta x^2 + 4\gamma x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση:

Η $f$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = 3ax^2 - 6\beta x^2 + 4\gamma.$$

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι εξίσωση β' βαθμού (ως προς $x$) και έχει:

$$\Delta = 36\beta^2 - 48a\gamma = 12(3\beta^2 - 4a\gamma) \leq 0 \text{ (από υπόθεση)}$$

Αυτό σημαίνει ότι: η εξίσωση $f'(x) = 0$ ή δεν έχει πραγματικές ρίζες $(\Delta < 0)$, ή αν έχει, τότε είναι μία διπλή $(\Delta = 0)$, οπότε εκατέρωθεν αυτής η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

Έτσι σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

**47.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = |x - 1|, x \in \mathbb{R}$

Λύση:

Ο τύπος της συνάρτησης $f$ γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [1, +\infty) \\ 1 - x, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x = 1$, και συνεπώς σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

Η συνάρτηση $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, αφού:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Επομένως, η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, με:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, +\infty) \\ -1, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Άρα, είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Συνεπώς, έχουμε κρίσιμο σημείο, το $x = 1$.

**48.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$(f(x))^2 + x^2 = 1 + 2xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η $f$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της *απαγωγής σε άτοπο.*

Έστω ότι η $f$ έχει τοπικά ακρότατα. Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, πρέπει να ισχύει το Θεώρημα Fermat, δηλαδή να υπάρχει τιμή $x_0$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_0) = 0 \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση που μας δίνεται και έχουμε:

$$2f(x)f'(x) + 2x = 2f(x) + 2xf'(x) \tag{2}$$

Λόγω της (1), η σχέση (2) μας δίνει $f(x_0) = x_0$.

Δηλαδή, στο σημείο $x_0$ το γράφημα $G_f$ της συνάρτησης $f$ τέμνει την ευθεία $y = x$. Άρα, στο σημείο αυτό έχουμε

$$(f(x_0))^2 + x_0^2 = x_0^2 + x_0^2 = 2x_0^2 = 1 + 2x_0 f(x_0) = 1 + 2x_0^2,$$

η οποία προφανώς δεν ισχύει, άτοπο.

Επομένως, η συνάρτηση $f$, αφού έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παντού παραγωγίσιμη, δεν έχει τοπικά ακρότατα.

**49.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Λύση:

Η πρώτη παράγωγος της $f$ δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = 3\cos x - 3\cos 3x = 3(\cos x - \cos 3x) = 6\sin x \sin 2x, \quad x \in (0, \pi)$$

Η $f'(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$, την $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
Η δεύτερη παράγωγος της $f$ δίνεται από τον τύπο:

$$f''(x) = 6\cos x \sin 2x + 12\sin x \cos 2x, \quad x \in (0, \pi)$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 < 0$$

Επομένως, η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \sin\frac{3\pi}{2} = 4.$$

**50.** Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και να αναφέρετε πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x - 1 - x$.

Η παράγωγος της $f$ δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την $f'$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Από τον πιο πάνω πίνακα, παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

- Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Για $x = 0$, έχουμε ολικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : f(x) > 0 \iff e^x - 1 - x > 0 \iff e^x > 1 + x$
- Για $x = 0$ ισχύει: $f(x) = 0 \iff e^x = 1 + x$

Άρα, τελικά ισχύει ότι

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $x = 0$.

**51.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f$, $g$ με $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ αντίστοιχα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και θα αποδείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα.

Είναι $h'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και συνεπώς έχει πεδίο τιμών το διάστημα

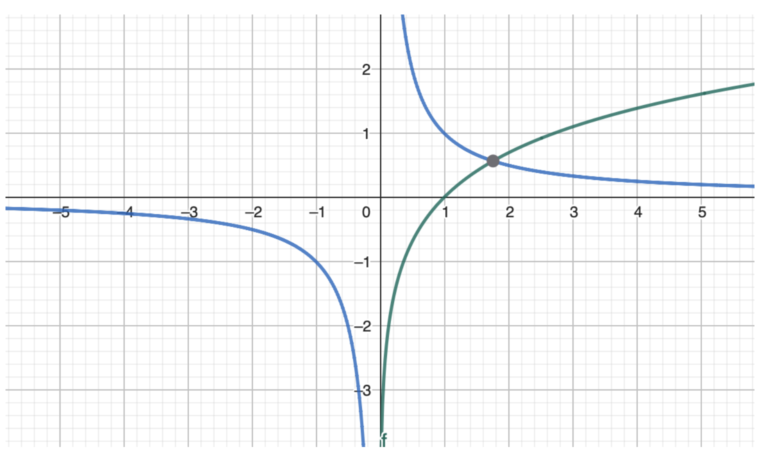
$$\left(\lim_{x\to 0^+} h(x), \lim_{x\to +\infty} h(x)\right) = (-\infty, +\infty),$$

διότι: $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = (-\infty - \infty) = -\infty$ και

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty.$$

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών που είναι το $(-\infty, +\infty)$, η $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Από τα παραπάνω λοιπόν συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi$ στο $(0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.



**52.** Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq 1 - \ln(x+1)$, για κάθε $x \geq 0$

Λύση:

Θέτουμε
$$h(x) = e^x - 1 + \ln(x+1), \quad x \geq 0.$$
Έχουμε
$$h'(x) = (e^x - 1 + \ln(x+1))' = e^x + \frac{1}{x+1} > 0, \quad x \geq 0.$$
Άρα η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Επομένως, για κάθε $x \geq 0$ ισχύει
$$h(x) \geq h(0) = 0 \iff e^x - 1 + \ln(x+1) \geq 0 \iff e^x \geq 1 - \ln(x+1).$$

**53.** Αν $a^x + 5^x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $a > 0$, να αποδείξετε ότι $a = \frac{1}{5}$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f(x) = a^x + 5^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Οι όροι $a^x$ και $5^x$ είναι συνεχείς και διαφορίσιμες σε $\mathbb{R}$, επομένως και $f$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε $\mathbb{R}$. Από την υπόθεση έχουμε

$$f(x) \geq 2 = f(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε η $f$ έχει ελάχιστο στη θέση $x = 0$. Άρα, από την απαίτηση για ακρότατο (θεώρημα Fermat), ισχύει
$$f'(0) = 0.$$
Υπολογίζουμε την παράγωγο:
$$f'(x) = a^x \ln a + 5^x \ln 5,$$
και επομένως
$$f'(0) = a^0 \ln a + 5^0 \ln 5 = \ln a + \ln 5 = 0.$$
Απ' αυτό προκύπτει
$$\ln(a5) = 0 \iff a5 = 1 \iff a = \frac{1}{5}.$$
Αυτό έπρεπε να αποδειχθεί.

**54.** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνήσια αύξουσα.

Λύση:

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Η παράγωγός της υπολογίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sec^2 x \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \tan x}{x} = \frac{2x \sec^2 x - \tan x}{2x^{3/2}}.$$

Με απλούστευση χρησιμοποιώντας $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ και $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ παίρνουμε:

$$f'(x) = \frac{2x - \sin x \cos x}{2x^{3/2} \cos^2 x} = \frac{4x - \sin 2x}{4x^{3/2} \cos^2 x}.$$

Ορίζουμε

$$g(x) = 4x - \sin 2x.$$

Η παράγωγός της είναι

$$g'(x) = 4 - 2\cos 2x.$$

Εφόσον $\cos 2x \leq 1$ για κάθε $x$, έχουμε

$$g'(x) \geq 4 - 2 = 2 > 0,$$

οπότε η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$g(0) = 4 \cdot 0 - \sin 0 = 0,$$

οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$g(x) > 0.$$

Συνεπώς, για κάθε $x > 0$ όπου ορίζεται η $f'(x)$ (δηλαδή $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$), ισχύει

$$f'(x) > 0.$$

Συμπέρασμα: Η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε υποδιάστημα του $(0, \infty)$ που δεν περιλαμβάνει σημεία όπου $\cos x = 0$.

**55.** Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω μαθηματικές προτάσεις είναι σωστές.

i. Η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα άνω στο (a,b), αν και μόνον αν η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b).

ii. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(a, \beta)$ αν $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, \beta)$.

iii. Αν ένα σημείο της γραφικής παράστασης $M(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής, αυτό σημαίνει ότι εκατέρωθεν του $\xi$ η $f''$ δεν αλλάζει πρόσημο.

iv. Αν το σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής της πολυωνυμικής συνάρτησης $f : (a, \beta) \to \mathbb{R}$, τότε το $\xi$ είναι σημείο τοπικού μέγιστου ή ελαχίστου της $f$.

v. Αν $f''(\xi) = 0$, τότε υπάρχει απαραίτητα σημείο καμπής στο σημείο ξ.

Λύση: i. Σωστό, ii. Σωστό, iii. Λάθος, iii. Λάθος (της $f'$ όχι της $f$), v. Λάθος (το θεώρημα του σημείου καμπής δεν ισχύει αντίστροφα)

**56.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10,\ x \in \mathbb{R}$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση:

Η πρώτη παράγωγος της $f$:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η δεύτερη παράγωγος της $f$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της $f''$. Για το λόγο αυτό, πρέπει να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f''(x) = 0$ και στη συνέχεια να κατασκευάσουμε πίνακα μεταβολής της $f''$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 12x(x-2) = 0$$

Συνεπώς:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \acute{\eta} \quad x_2 = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\cup$ | Σ.Κ. | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ | |

Από τον πίνακα μεταβολής της $f''$, παρατηρούμε ότι:

- Είναι Κυρτή: $f''(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$

- Είναι Κοίλη: $f''(x) < 0, \ \ \forall x \in (0, 2)$
- Σημεία Καμπής: $f''(x) = 0$, για $x = 0$ ή $x = 2$.

Τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$:

$$f(0) = 10 \implies (0, 10)$$

$$f(2) = (2)^4 - 4(2)^3 + 10 = -6 \implies (2, -6)$$

**57.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1, \ x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

Λύση:

1. Μονοτονία και ακρότατα:

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | ΟΧΙ Τ.Α | $\nearrow$ |

- Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.
- Στο $x = 0$ η παράγωγος μηδενίζεται χωρίς να αλλάζει πρόσημο, άρα δεν υπάρχει ακρότατο.

2. Κυρτότητα και σημεία καμπής:

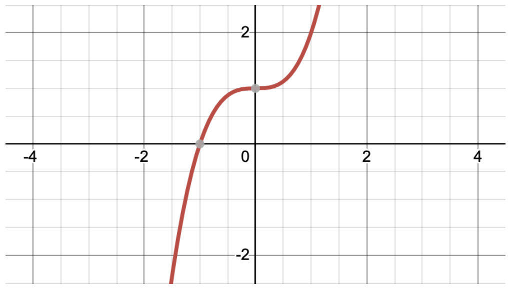
$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x.$$

Θέτουμε $f''(x) = 0 \implies x = 0$.

Μελετούμε το πρόσημο της $f''(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

- Η $f$ είναι κοίλη ($\cap$) για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.
- Η $f$ είναι κυρτή ($\cup$) για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- Υπάρχει σημείο καμπής στο $(0, f(0)) = (0, 1)$




**58.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5,\ x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

Λύση:

1. Μονοτονία και ακρότατα:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

Θέτουμε $f'(x) = 0 \implies x = 0$ ή $x = 2$.

Μελέτη πρόσημου $f'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | Τ.Ε. | $\nearrow$ | Τ.Μ. | $\searrow$ |

- Η $f$ είναι φθίνουσα για $x < 0$ και $x > 2$, αύξουσα για $0 < x < 2$.
- Τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$, $f(0) = -5$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$, $f(2) = -1$.

2. Κυρτότητα και σημεία καμπής

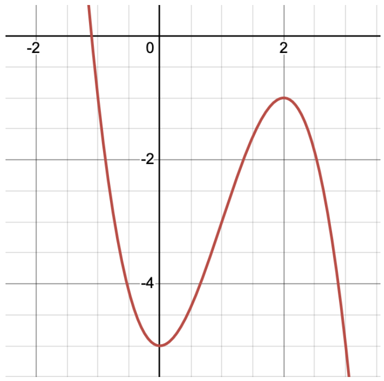
Δεύτερη παράγωγος:

$$f''(x) = -6x + 6 = 6(1-x)$$

Θέτουμε $f''(x) = 0 \implies x = 1$.
Μελέτη πρόσημου $f''(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | Σ.Κ. | $\cap$ |

Η $f$ είναι κυρτή ($\cup$) για $(-\infty, 1]$ και κοίλη ($\cap$) για $[1, +\infty)$ με σημείο καμπής το $(1, -3)$.




**59.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:$f''(x) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς την κυρτότητα και να βρείτε για ποιες τιμές του $x$ η γραφική παράσταση της $f$ παρουσιάζει σημεία καμπής.

Λύση:

Αρχικά θα βρούμε τα πιθανά σημεία καμπής ($f''(x) = 0$),

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3.$$

Έλεγχος αλλαγής πρόσημου της $f''(x)$

- $x = 0$: $x^1 \to$ περιττή δύναμη $\to$ το πρόσημο αλλάζει γύρω από $0 \to$ σημείο καμπής.
- $x = 1$: $(x-1)^1 \to$ περιττή δύναμη $\to$ αλλαγή πρόσημου $\to$ σημείο καμπής.
- $x = 2$: $(x-2)^2 \to$ ζυγή δύναμη $\to$ δεν αλλάζει πρόσημο $\to$ όχι σημείο καμπής.
- $x = 3$: $(x-3)^3 \to$ περιττή δύναμη $\to$ αλλαγή πρόσημου $\to$ σημείο καμπής.

Πίνακας κυρτότητας:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ | Σ.Κ. | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

**60.** Να βρεθούν οι τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $A(1,2)$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^3 + 3x^2 - \beta x + 6, \quad x \in \mathbb{R}.$.

Λύση:

Συνθήκη για σημείο καμπής:

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x - \beta, \quad f''(x) = 6ax + 6$$

Στο σημείο $x = 1$:

$$f''(1) = 6a + 6 = 0 \implies a = -1.$$

Συνθήκη για το σημείο να ανήκει στη γραφική:

$$f(1) = a + 3 - \beta + 6 = -1 + 3 - \beta + 6 = 8 - \beta$$

$$f(1) = 2 \implies 8 - \beta = 2 \implies \beta = 6.$$

Έλεγχος αλλαγής πρόσημου της δεύτερης παραγώγου:

$$f''(x) = 6ax + 6 = -6x + 6 = 6(1 - x)$$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{αν } x < 1 \text{ (κυρτή)} \\ f''(x) < 0 & \text{αν } x > 1 \text{ (κοίλη)} \end{cases}$$

Επομένως η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο γύρω από το $x = 1$ και το σημείο είναι σημείο καμπής.

**61.** Η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + 3x^2 + 2\lambda, \quad x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -2$, με $f(-2) = 0$. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\kappa$ και $\lambda$ και να χαρακτηρίσετε το είδος του ακρότατου στο $x = -2$.

Λύση:

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$f'(x) = 3\kappa x^2 + 6x$$

Για τοπικό ακρότατο στο $x = -2$:

$$f'(-2) = 0 \implies 3\kappa(-2)^2 + 6(-2) = 0$$

$$12\kappa - 12 = 0 \implies \kappa = 1$$

Χρησιμοποιούμε την τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(-2) = \kappa(-2)^3 + 3(-2)^2 + 2\lambda = 0$$

$$-8 + 12 + 2\lambda = 0 \implies 2\lambda = -4 \implies \lambda = -2$$

Ελέγχουμε το είδος του ακρότατου χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = 6\kappa x + 6 = 6x + 6$$

$$f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$$

Πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $TM$ | $\searrow$ | $TE$ | $\nearrow$ | |

Στο $x = -2$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

**62.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = x(x+3)^2$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$ και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$ και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

iii. Να βρείτε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

iv. Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

v. Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

vi. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$.

Λύση:

i. $x \in \mathbb{R}$

ii. Για $x = 0 \implies (0,0)$ και για $y = 0 \implies : (-3,0)$ και $(0,0)$

iii.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 + 12x + 9 = 0 \implies 3(x+1)(x+3) = 0 \implies x = -1 \text{ ή } x = -3$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $TM$ | $\searrow$ | $TE$ | $\nearrow$ | |

Τοπικό μέγιστο στο $(-3,0)$ και τοπικό ελάχιστο $(-1,-4)$.

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-3]$ και $[-1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-3,-1]$.

iv. Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f''(x) = 0 \implies 6x + 12 = 0 \implies 6x = -12 \implies x = -2$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\cap$ | $\Sigma K$ | $\cup$ | |

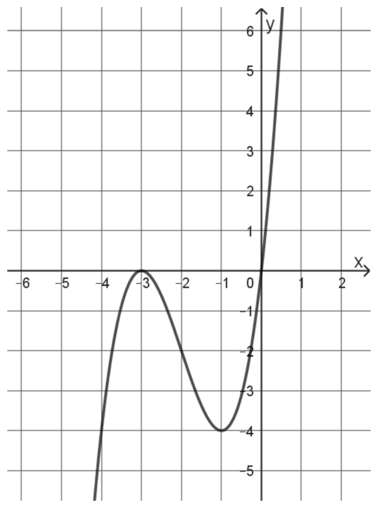
Η $f$ είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και κυρτή στο διάστημα $[-2,+\infty)$ Στο $x = -2$ παρουσιάζει σημείο καμπής το $(-2,-2)$.

v.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3+6x^2+9x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3+6x^2+9x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = +\infty$$

vi.



**63.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -4x^3 + 6x^2$. Να κάνετε την γραφική της παράσταση αφού πρώτα βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής καθώς και τη συμπεριφορά στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Λύση:

Πεδίο Ορισμού $x \in \mathbb{R}$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Για $x = 0$ τότε $f(0) = 0$

Για $y = 0$ τότε $-4x^3 + 6x^2 = 0 \implies -2x^2(2x-3) = 0 \implies x = 0$ ή $x = \frac{3}{2}$

Επομένως, $(0,0)$ και $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Διαστήματα μονοτονίας:

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2 \implies f'(x) = -12x^2 + 12x = 0 \implies -12x(x-1) = 0$$

$$\implies x = 0 \quad ή \quad x = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | ΤΕ | $\nearrow$ | ΤΜ | $\searrow$ |

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$. Με τοπικό ελάχιστο το (0,0) και τοπικό μέγιστο το (1,2).

Κυρτότητα - Σημεία καμπής:

$$f''(x)=0 \implies -24x+12=0 \implies x=\frac{1}{2}$$

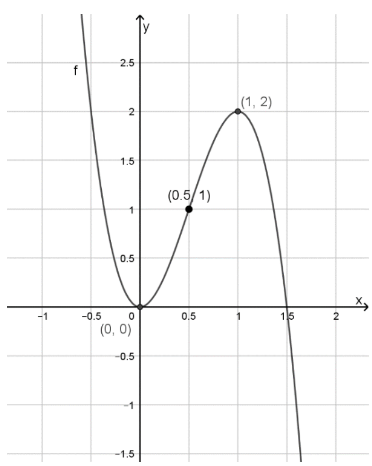
| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | Σ.Κ. | $\cap$ |

Είναι κυρτή στο $(-\infty,\frac{1}{2}]$ και κοίλη στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, με σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Συμπεριφορά στα άκρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -4x^3=-4(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -4x^3=-4(-\infty)=+\infty$$



**64.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - 8\ln x, \quad x > 0$$

Να προσδιοριστούν τα τοπικά ακρότατα και η κυρτότητα του γραφήματος της συνάρτησης $f$.

Λύση:

$$f'(x) = (x^2 - 8\ln x)' = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x}$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \implies \frac{2x^2 - 8}{x} = 0 \iff 2x^2 - 8 = 0 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$$

Ακόμη έχουμε:

$$f''(x) = \left(2x - \frac{8}{x}\right)' = 2 + \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 + 8}{x^2} > 0$$

Επομένως η $f$ στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

| $x$ | $0^+$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Η $f$ παρουσιάζει στο $(2, f(2)) = (2, 4 - 8\ln 2)$ τοπικό ελάχιστο. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

**65.** Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Λύση:

Πρέπει $x^2 + 1 > 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f'(x) = \big(\ln(x^2 + 1)\big)' = \frac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

και

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f''(x) = 0$.

Έχουμε $\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \iff 2(1-x^2) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff 1 = x^2 \iff x = \pm 1.$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | ΣΚ | $\cup$ | ΣΚ | $\cap$ |

Άρα η $f$ είναι κοίλη στο $(-\infty, -1]$, κυρτή στο $[-1, 1]$ και κοίλη στο $[1, +\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα: $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$, δηλαδή τα $(-1, \ln 2)$ και $(1, \ln 2)$.

**66.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 - 2, & x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 13, & x > 1 \end{cases}$$

Να μελετήσετε την $f$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση:

Για $x < 1$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 12x$

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 18x$

Έλεγχος ύπαρξης παραγώγου στη θέση $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 2 - 5}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3 + 6x^2 - 7}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + 7x + 7)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + 7x + 7) = 15$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 13 - 5}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - 9x^2 + 8}{x - 1} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2 - 8x - 8)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} (x^2 - 8x - 8) = -15$$

Άρα η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 1$ και η παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 12x, & x < 1 \\ 3x^2 - 18x, & x > 1 \end{cases}$$

Για την $f''(x)$ έχουμε:

Για $x < 1$ είναι $f''(x) = (3x^2 + 12x)' = 6x + 12$

Για $x > 1$ είναι $f''(x) = (3x^2 - 18x)' = 6x - 18$

Άρα

$$f''(x) = \begin{cases} 6x + 12, & x < 1 \\ 6x - 18, & x > 1 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\cap$ | ΣΚ | $\cup$ | | $\cap$ | ΣΚ | $\cup$ | |

Άρα η $f$ είναι κοίλη στο $(-\infty, -2]$, είναι κυρτή στο $[-2, 1]$, είναι κοίλη στο $[1, 3]$ και κυρτή στο $[3, +\infty)$. Σημεία καμπής έχει τα: $(-2, f(-2))$ ή $(-2, 14)$ και στο $(3, f(3))$ ή $(3, -41)$.

Προσοχή!
Στο $x_0 = 1$ δεν έχει σημείο καμπής γιατί δεν υπάρχει η $f'(1)$ οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη.

**67.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

i. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να τέμνει μία πλάγια ασύμπτωτη της.

ii. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f$, έχει πλάγια ασύμπτωτη, τότε η συνάρτηση $f$ είναι είτε κυρτή είτε κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

iii. Αν μία συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε η γραφική της παράσταση, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. Αν μία συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε η γραφική παράσταση της δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

v. Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f$ είναι το κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, $a, \beta \in \mathbb{R}$, τότε η γραφική της παράσταση, δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Λύση: i. Λάθος, ii. Λάθος, iii. Λάθος, iv. Λάθος, v. Σωστό

**68.** Έστω $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$. Να προσδιορίσετε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f$.

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της $f$ είναι $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Άρα τις κατακόρυφες ασύμπτωτες θα τις αναζητήσουμε στις θέσεις $x_0 = -1$ και $x_0 = 1$.

Για $x_0 = -1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

οπότε η $C_f$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = -1$.

Για $x_0 = 1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$$

με

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

οπότε η $C_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 1$, την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

**69.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

ii. $f(x) = \ln(x-1)$

iii. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln x$

iv. $f(x) = \dfrac{x-5}{|x-3|}$

Λύση:

i. Η συνάρτηση δεν ορίζεται στο $x = 1$. Εξετάζουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$

Η γραφική παράσταση της $f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

ii. Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \leq 1$. Εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{x \to 1^+} \ln(x-1) = -\infty.$$

Η γραφική παράσταση της $f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

iii. Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \leq 0$. Εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \ln x = -\infty.$$

Η γραφική παράσταση της $f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

iv. Η συνάρτηση δεν ορίζεται στο $x = 3$. Εξετάζουμε τα όρια:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x-5}{|x-3|} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x-5}{3-x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{x-5}{|x-3|} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-5}{x-3} = -\infty.$$

Η γραφική παράσταση της $f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 3$.

**70.** Να προσδιορίσετε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων με τύπους:

i. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$

ii. $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 1}$

Λύση:

i. Επειδή το

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2,$$

η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

ii.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x + 2)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1,$$

οπότε η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$.

Επίσης είναι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{0+2}{0+1} = 2,$$

αφού $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, οπότε η $C_f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 2$.

**71.** Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ με $x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$. Να εξετάσετε αν η $f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Λύση:

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2}\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{25}{x^2}} = 1 = \lambda$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-25} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-25}-x\right)\left(\sqrt{x^2-25}+x\right)}{\sqrt{x^2-25}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-25-x^2}{\sqrt{x^2-25}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-25}{x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{25}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+1}\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = 1 \cdot x + 0 = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

Επίσης έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[-\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}\right] = -1 = \lambda$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-25} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-25}+x\right)\left(\sqrt{x^2-25}-x\right)}{\sqrt{x^2-25}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-25-x^2}{-x\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-25}{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{x^2}}+1}\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

**72.** Έστω
$$f(x)=\frac{2x^2-5x+7}{x-1}$$
Δείξτε ότι η $y=2x-3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-3)]=0.$$
Πράγματι είναι
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-5x+7}{x-1}-(2x-3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5x+7}{x-1}-2x+3\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+7-2x^2+5x-3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

Άρα η $C_f$ έχει την $y=2x-3$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

**73.** Έστω $f(x)=\dfrac{ax^2-13x+6}{3x-1}$ με $a\neq 0$. Να βρεθούν τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $C_f$ να έχει την $y=\beta x-4$ με $\beta\neq 13$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Λύση:

Ξέρουμε ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\beta \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\beta x)=-4.$$
Άρα
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-13x+6}{3x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{3x^2}=\frac{a}{3}.$$
Έχουμε $\frac{a}{3}=\beta \iff a=3\beta \quad (1)$ και
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2-13x+6}{3x-1}-\beta x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\beta x^2-13x+6}{3x-1}-\beta x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\beta x^2-13x+6-3\beta x^2+\beta x}{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\beta-13)+6}{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\beta-13)}{3x}=\frac{\beta-13}{3}$$
έχουμε $\dfrac{\beta-13}{3}=-4 \iff \beta-13=-12 \iff \beta=1$ και λόγω της (1) $a=3$.

**74.** Να μελετηθεί η συνάρτηση $f$, με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Λύση:

Η $f$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$, και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 3x^2 - 3, \ \forall \ x \in A$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | TM | $\searrow$ | TE | $\nearrow$ |

Επίσης $f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$, για κάθε $x \in A$ με $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

Μονοτονία της $f$:

- Γνησίως αύξουσα $(f'(x) > 0)$ $\forall \ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Γνησίως φθίνουσα $(f'(x) < 0)$ $\forall \ x \in [-1, 1]$

Ακρότατα της $f$:

Στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$ η $f$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατες τιμές. Ειδικότερα στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 4$ και στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Κυρτότητα της $f$:

- Τα κοίλα κάτω $(f''(x) < 0)$ στο $(-\infty, 0]$
- Τα κοίλα άνω $(f''(x) > 0)$ στο $[0, +\infty)$

Σημεία καμπής:

Στο $x_0 = 0$ η $f$ παρουσιάζει καμπή με Σ.Κ. το $A(0, f(0))$ δηλαδή το $A(0, 2)$.

Ασύμπτωτες: Δεν υπάρχουν αφού η f είναι πολυωνυμική.

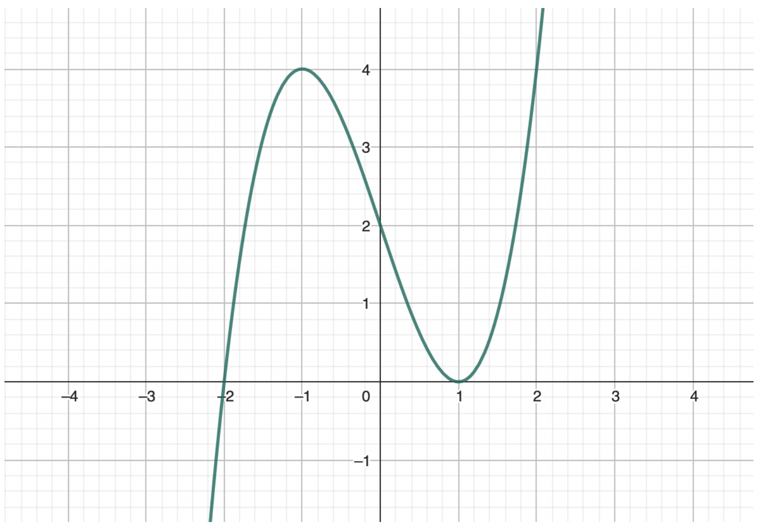
Σημεία τομής με τους άξονες:

- Για $x = 0$ είναι $f(0) = 2$ οπότε η $C_f$ τέμνει τον $yy'$ στο $A(0, 2)$.
- Για $y = 0$ είναι $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

  $x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[x(x+1) - 2] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow$

  $x = 1$ ή $x = 1$ ή $x = -2$ οπότε η $C_f$ εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $B(1, 0)$ και τον τέμνει στο $\Gamma(-2, 0)$.

Επίσης είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.




**75.** Να μελετηθεί η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Λύση:

Η $f$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : x - 1 = 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ |

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in A$ και

$$f''(x) = \left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)' = \frac{3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3} \text{ για κάθε } x \in A.$$

Επίσης έχουμε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$ και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-1)^3 > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | | $\cup$ |

Μονοτονία της $f$:

- Γνησίως φθίνουσα $(f'(x) < 0)\ \forall\ \ x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Ακρότατα: Δεν υπάρχουν αφού η $f'$ δεν έχει κρίσιμα σημεία.

Κυρτότητα της $f$:

- Τα κοίλα κάτω $(f''(x) < 0)$ στο $(-\infty, 1)$
- Τα κοίλα άνω $(f''(x) > 0)$ στο $(1, +\infty)$

Σημεία καμπής: Δεν υπάρχουν αφού στο $x_0 = 1$ εκατέρωθεν του οποίου αλλάζει πρόσημο η δεύτερη παράγωγος, η συνάρτηση $f$ δεν ορίζεται.

Ασύμπτωτες:

$$\text{α. } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$$

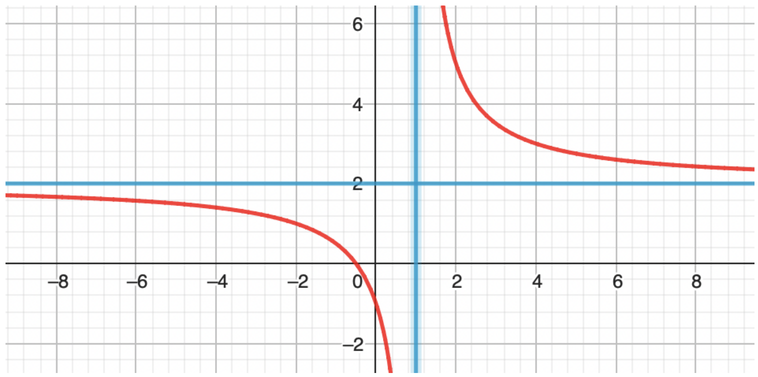
Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του διαγράμματος της $f$.

$$\text{b. } \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$, στα $+\infty$ και $-\infty$.

Σημεία τομής με τους άξονες:

- Για $x = 0$ είναι $f(0) = -1$ οπότε η $C_f$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -1)$.
- Για $y = 0$ είναι $\dfrac{2x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ οπότε η $C_f$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $B\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.




**76.** Να μελετηθεί η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-2}$ .

Λύση:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3}{x-2}\right)' = \frac{2x(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}-\{2\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x-3 \Leftrightarrow x_1 = 2-\sqrt{7} \text{ ή } x_2 = 2+\sqrt{7}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{7}$ | | $2$ | | $2-\sqrt{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | ΤΜ | $\searrow$ | | $\searrow$ | ΤΕ | $\nearrow$ | |

$$f''(x) = \left[\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}\right]' = \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-3)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{14}{(x-2)^3} \quad \forall x \in A = \mathbb{R}-\{2\}$$

Είναι φανερό ότι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | | $\cup$ |

Μονοτονία της $f$:

- Γνησίως αύξουσα ($f'(x) > 0$) στο $(-\infty, 2-\sqrt{7}] \cup [2+\sqrt{7}, +\infty)$.
- Γνησίως φθίνουσα ($f'(x) < 0$) στο $[2-\sqrt{7}, 2) \cup (2, 2+\sqrt{7}]$

Ακρότατα της $f$:

Επειδή για κάθε $x \in (-\infty, 2-\sqrt{7})$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (2-\sqrt{7}, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ έπεται ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0 = 2-\sqrt{7}$ τοπικό μέγιστο το $f(2-\sqrt{7}) = 4-2\sqrt{7}$.

Επίσης για κάθε $x \in (2, 2+\sqrt{7})$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (2+\sqrt{7}, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η $f$ παρουσιάζει στο $x_0 = 2+\sqrt{7}$ τοπικό ελάχιστο το $f(2+\sqrt{7}) = 4+2\sqrt{7}$.

Κυρτότητα της $f$:

- Τα κοίλα κάτω ($f''(x) < 0$) στο $(-\infty, 2)$
- Τα κοίλα άνω ($f''(x) > 0$) στο $(2, +\infty)$

Σημεία καμπής: Εκατέρωθεν του $x_0 = 2$ αλλάζει πρόσημο η $f''$ αλλά στο σημείο αυτό η $f$ δεν παρουσιάζει καμπή αφού $2 \notin A$.

Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3}{x-2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3}{x-2} = +\infty$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$.

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x^2-2x} = 1$$

και $$\beta = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-2} = 2$$

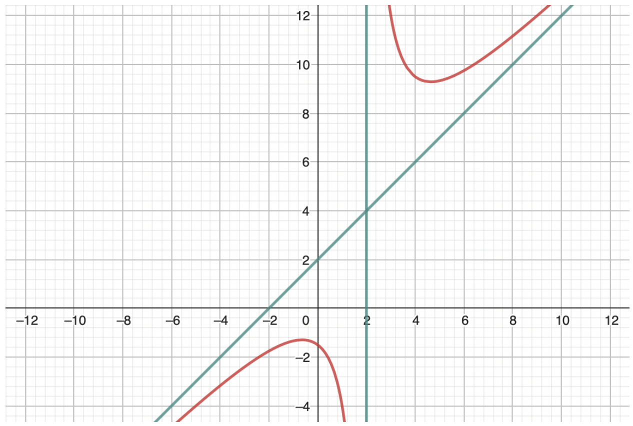
Επομένως, η ευθεία με εξίσωση $y = x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στα $+\infty$ και $-\infty$.

Σημεία τομής της $C_f$ με τους άξονες

- Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = -\dfrac{3}{2}$ οπότε η $C_f$ τέμνει τον $y'y$ στο $A\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$.
- Για $y = 0$ έχουμε $\dfrac{x^2+3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2+3 = 0$, (αδύνατη). Άρα η $C_f$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{x-2} = -\infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x-2} = +\infty$$




**77.** Να μελετηθεί η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

Λύση:

Η $f$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2-x}\right)' = -\frac{(x^2-x)'}{(x^2-x)^2} = -\frac{2x-1}{(x^2-x)^2} \quad \forall x \in A = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | ΤΜ | $\searrow$ | | $\searrow$ | |

$$f''(x) = \left[\frac{1-2x}{(x^2-x)^2}\right]' = \frac{2(3x^2-3x+1)}{(x^2-x)^3}, \quad \forall x \in A = \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$ που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R} - \{0,1\}$ οπότε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$.

Για το πρόσημο της $f''$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 2(3x^2 - 3x + 2)(x^2 - x)^3 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{aligned}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |

Μονοτονία της $f$:

- Γνησίως αύξουσα ($f'(x) > 0$) στο $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$.
- Γνησίως φθίνουσα ($f'(x) < 0$) στο $[\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$

Ακρότατα της $f$: Επειδή για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ είναι $f'(x) < 0$ η $f$ παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2} \in A$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.

Κυρτότητα της $f$:

- Τα κοίλα κάτω ($f''(x) < 0$) στο $(0, 1)$
- Τα κοίλα άνω ($f''(x) > 0$) στο $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Σημεία καμπής:

Εκατέρωθεν των σημείων $x = 0$ και $x = 1$ αλλάζει πρόσημο η $f''$. Επειδή όμως τα σημεία 0 και 1 δεν ανήκουν στο $A$ η $f$ δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x(x-1)} = +\infty$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$.

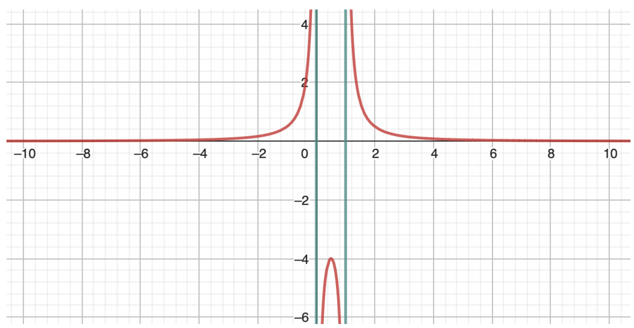
Επίσης,

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 0$$

Η ευθεία με εξίσωση $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$, στα $+\infty$ και $-\infty$.

Σημεία τομής με τους άξονες:

Δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η $C_f$ τέμνει τους άξονες αφού στο $x_0 = 0$ η $f$ δεν ορίζεται ενώ για $y = 0$ προκύπτει αδύνατη εξίσωση.




**78.** Να μελετηθεί η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = x^x$.

Λύση:

Η $f$ έχει πεδίο ορισμού $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left[(x)'\ln x + x(\ln x)'\right] = x^x\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Η $f'(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff \ln x = \ln\frac{1}{e} \iff x = \frac{1}{e}$

$$f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff \ln x > \ln\frac{1}{e} \iff x > \frac{1}{e}$$

| $x$ | $0^+$ | $1/e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$$f''(x) = [x^x(\ln x+1)]' = \left[e^{x\ln x}(\ln x+1)\right]' = (e^{x\ln x})'(\ln x+1) + e^{x\ln x}(\ln x+1)'$$

$$= e^{x\ln x}(x\ln x)'(\ln x+1) + e^{x\ln x}\frac{1}{x} = e^{x\ln x}(\ln x+1)(\ln x+1) + e^{x\ln x}\frac{1}{x}$$

$$= e^{x\ln x}\left[(\ln x+1)^2 + \frac{1}{x}\right] = e^{x\ln x}\frac{x(\ln x+1)^2+1}{x} = x^x\frac{x(\ln x+1)^2+1}{x}, \quad \text{για κάθε } x \in A$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A = (0, +\infty)$ είναι $f''(x) \neq 0$ και μάλιστα $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in A$.

Μονοτονία της $f$:

- Γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$
- Γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$.

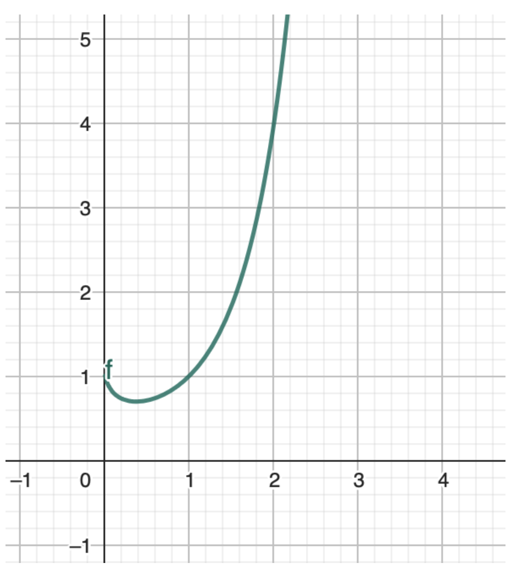
Ακρότατα της $f$: Επειδή για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) > 0$ η $f$ παρουσιάζει στο $x_0 = \frac{1}{e} \in A$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

Κυρτότητα της $f$:

- Τα κοίλα άνω στο $(0, +\infty)$.

Σημεία καμπής: Δεν υπάρχουν διότι η $f''$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Ασύμπτωτες: Δεν υπάρχουν.



**79.** Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f$ με $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες.

Λύση:

Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Προφανώς κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν διότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας γνωστό κριτήριο εξετάζουμε την ύπαρξη πλαγίων ή οριζοντίων ασύμπτωτων:

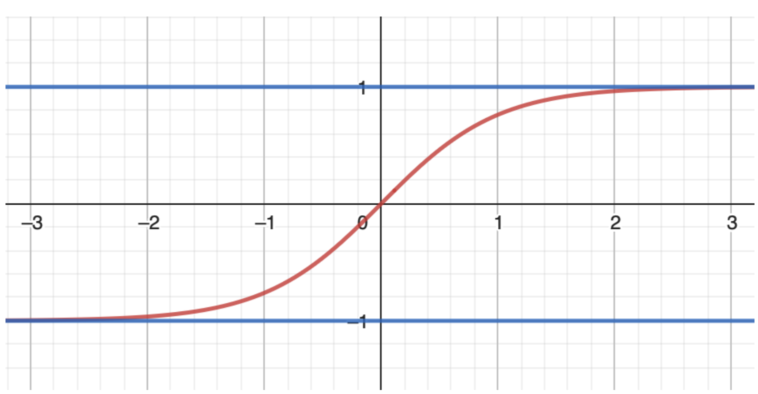
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{xe^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{x(1 + e^{-2x})} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

Ομοίως βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Συνεπώς οι ευθείες $y = 1$ και $y = -1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αντίστοιχα.



**80.** Να μελετήσετε ως προς την *κυρτότητα* τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

ii. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

iii. $f(x) = ημ\, x,\ x \in [0, 2\pi]$

iv. $f(x) = \ln\big(x^2 + 4\big)$

Λύση: 2/72

i. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, \qquad f''(x) = 6x - 2.$$

$$f''(x) = 0 \iff x = \tfrac{1}{3}.$$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

Η $f$ είναι *κοίλη* στο $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και *κυρτή* στο $[\frac{1}{3}, +\infty)$. Σημείο καμπής: $\big(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})\big) = \big(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\big)$.

ii. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, Π.Ο.: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x\big((x-1)^2 + 1\big)}{x^3}.$$

Εφόσον $e^x > 0$ και $(x-1)^2 + 1 > 0$, το πρόσημο του $f''$ είναι το πρόσημο του $x^3$:

$$f''(x) \begin{cases} < 0, & x < 0, \\ > 0, & x > 0. \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | | $\cup$ |

Κοίλη στο $(-\infty, 0)$, κυρτή στο $(0, +\infty)$. Στο $x = 0$ δεν ορίζεται $\Rightarrow$ δεν υπάρχει σημείο καμπής.

iii. $f(x) = ημ\, x$, Π.Ο.: $[0, 2\pi]$.

$$f'(x) = συν\, x, \qquad f''(x) = -ημ\, x.$$

$$f''(x) = 0 \iff ημ\, x = 0 \iff x = 0,\ \pi,\ 2\pi.$$

| $x$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ | |

Η $f$ είναι *κοίλη* στο $[0, \pi]$ και *κυρτή* στο $[\pi, 2\pi]$. Σημείο καμπής στο εσωτερικό: $(\pi, 0)$. (Στα άκρα $0, 2\pi$ δεν θεωρούμε Σ.Κ.)

iv. $f(x) = \ln\big(x^2 + 4\big)$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad f''(x) = \frac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}.$$

$$f''(x) = 0 \iff 4 - x^2 = 0 \iff x = \pm 2.$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ | Σ.Κ. | $\cap$ |

Κοίλη στα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, κυρτή στο $[-2, 2]$. Σημεία καμπής: $(-2, \ln 8)$ και $(2, \ln 8)$.

**81.** Να μελετήσετε ως προς την *κυρτότητα* και τα *σημεία καμπής* τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

ii. $f(x) = xe^x$

iii. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

iv. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Λύση: 3/72

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \qquad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

$$f''(x) = 0 \iff x = \tfrac{1}{3}.$$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

Η $f$ είναι *κοίλη* στο $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και *κυρτή* στο $[\frac{1}{3}, +\infty)$.

Σημείο καμπής: $\big(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})\big) = \big(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\big)$.

ii. $f(x) = xe^x$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x(x+1), \qquad f''(x) = e^x(x+2).$$

$$f''(x) = 0 \iff x = -2.$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

Κοίλη στο $(-\infty, -2]$, κυρτή στο $[-2, +\infty)$.

Σημείο καμπής: $\big(-2, f(-2)\big) = \big(-2, -2e^{-2}\big)$.

iii. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, Π.Ο.: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | | $\cup$ |

Κοίλη στο $(-\infty, -1)$, κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

Στο $x = -1$ δεν ορίζεται $\Rightarrow$ δεν υπάρχει σημείο καμπής.

iv. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, Π.Ο.: $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

$$f''(x) = 0 \iff 2\ln x - 3 = 0 \iff x = e^{3/2}.$$

| $x$ | $0^+$ | $e^{3/2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | Σ.Κ. | $\cup$ |

Κοίλη στο $(0, e^{3/2}]$, κυρτή στο $[e^{3/2}, +\infty)$.

Σημείο καμπής: $\big(e^{3/2},\ f(e^{3/2})\big) = \left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right)$.

# Θέματα Εξετάσεων

**1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^5 - 3x^3 + 4x + 7 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (λύση) στο $\mathbb{R}$.

Λύση: 2025

1. Ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας (λύσης)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$f(-2) = -41 < 0 \quad \text{και} \quad f(0) = 7 > 0.$$

Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, τότε είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και ισχύει ότι $f(-2)\,f(0) < 0$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$.

Εναλλακτικά:
Αφού η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^5 - 3x^3 + 4x + 7) = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^5 - 3x^3 + 4x + 7) = -\infty,$$

επομένως η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

2. Μοναδικότητα της ρίζας (λύσης)

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα. Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, \rho_2)$, οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Είναι:

$$f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 4.$$

Άρα,
$$f'(\xi) = 0 \iff 10\xi^4 - 9\xi^2 + 4 = 0.$$
Θέτουμε $y = \xi^2$, οπότε η εξίσωση γίνεται $10y^2 - 9y + 4 = 0$. Ο διακρίνων είναι:
$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 4 = 81 - 160 = -79 < 0.$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις. Επομένως, η $f'(x) = 0$ δεν μηδενίζεται για καμία πραγματική τιμή του $x$.

Άρα, η $f(x)$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες. Εφόσον έχουμε ήδη αποδείξει ότι έχει τουλάχιστον μία, αυτή είναι και μοναδική.

Εναλλακτικά (χρήση της μονοτονίας):

Η παράγωγος της $f$ είναι:
$$f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 4.$$
Το πρόσημο της διακρίνουσας της διτετράγωνης εξίσωσης:
$$10x^4 - 9x^2 + 4 = 0$$
είναι αρνητικό ($\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 4 = 81 - 160 = -79 < 0$), επομένως το πρόσημο του τριωνύμου είναι πάντοτε θετικό (καθώς $10 > 0$) και
$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς η λύση που βρέθηκε από το θεώρημα Bolzano είναι μοναδική.

**2.** Να αποδείξετε τα ποιο κάτω, i. Έστω ότι η συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$ και ισχύει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξημ}(\text{συν}x) + x$ είναι σταθερή στο $[0, \pi]$.

Λύση: 2025

i. Παίρνουμε δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε $x_1 < x_2$.
Τότε, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2)$, διότι $[x_1, x_2] \subseteq [\alpha, \beta]$ και $(x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$.

Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Όμως, $f'(\xi) = 0$ από την υπόθεση. Άρα, $f(x_2) = f(x_1)$.

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι σταθερή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Άρα,

$$f(x) = c, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

ii. Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$. Ισχύει ότι:

$$f'(x) = \frac{(\text{συν}x)'}{\sqrt{1-(\text{συν}x)^2}} + 1 = \frac{-\text{ημ}x}{|\text{ημ}x|} + 1.$$

Για $x \in (0, \pi)$ έχουμε $\text{ημ}x > 0$, οπότε $|\text{ημ}x| = \text{ημ}x$. Επομένως:

$$f'(x) = -1 + 1 = 0, \quad x \in (0, \pi).$$

Άρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του (α), η $f$ είναι σταθερή στο $[0, \pi]$.

**3.** Έστω ότι η συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ είναι η $y = -x + \alpha + \beta$.

ii. Αν η $f'$ είναι φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + x \geq \alpha + \beta, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Λύση: 2025

i. Προκύπτει ότι η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ και $B(\beta, \alpha)$ είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = -1.$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι:

$$y - \beta = -1(x - \alpha) \implies y = -x + \alpha + \beta.$$

ii. Η $f'$ είναι φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, άρα η $f$ είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$.

Από τον ορισμό της κοίλης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$f(x) \geq y, \quad \forall x \in [\alpha, \beta],$$

όπου $y$ η τιμή της ευθείας που ενώνει τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Άρα:

$$f(x) \geq -x + \alpha + \beta \quad \Longrightarrow \quad f(x) + x \geq \alpha + \beta, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

**4.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}.$$

Να βρείτε το *πεδίο ορισμού* της, τα *σημεία τομής* της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα *διαστήματα μονοτονίας* της, τα *τοπικά της ακρότατα*, τις *ασύμπτωτες* της γραφικής παράστασης της και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση: 2025

Πεδίο ορισμού:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Σημεία τομής με άξονες:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x - 2 + \frac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{(x-1)^2}{x} = 0 \;\Rightarrow\; x = 1.$$

Άρα το σημείο τομής με τον άξονα των τετμημένων είναι $(1, 0)$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1.$$

Πίνακας Μονοτονίας:

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -\infty & & -1 & & 0 & & 1 & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & + & 0 & - & || & - & 0 & + & \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow &
\end{array}$$

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

Τοπικά ακρότατα:

$$f(-1) = -1 - 2 + \frac{1}{-1} = -4 \quad (\text{τοπικό μέγιστο})$$
$$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0 \quad (\text{τοπικό ελάχιστο})$$

Ασύμπτωτες:

Αφού:

$$\lim_{x \to 0^+} \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \left( x - 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty,$$

η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Ακόμη,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

οπότε η $f$ δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Για πλάγιες ασύμπτωτες:

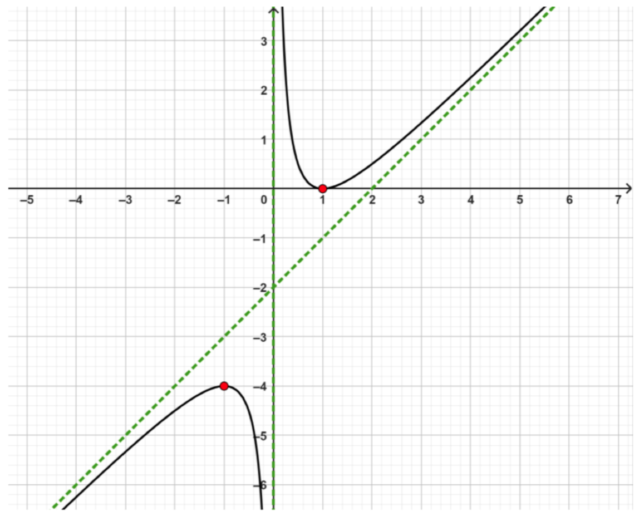
$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1,$$

$$\beta = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \to +\infty} \left( x - 2 + \frac{1}{x} - x \right) = -2.$$

Άρα η εξίσωση της πλάγιας ασύμπτωτης είναι $y = x - 2$.

**Συνοπτικά:**

- Πεδίο ορισμού: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Τομή με άξονα $x'$: $(1, 0)$
- Τοπικό μέγιστο: $x = -1,\ f(-1) = -4$
- Τοπικό ελάχιστο: $x = 1,\ f(1) = 0$
- Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $x = 0$
- Πλάγια ασύμπτωτη: $y = x - 2$




**5.** Να χαρακτηριστεί ο πιο κάτω ισχυρισμός ως ΟΡΘΟΣ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

*«Αν μια συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta$»*

Λύση: 2024

Ο ισχυρισμός αυτός είναι ΛΑΘΟΣ.

Αντιπαράδειγμα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Παρατηρούμε όμως ότι:

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει για $x = 0$:

$$f'(0) = 0.$$

Επομένως, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, χωρίς όμως να ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

**6.** Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\alpha, \beta)$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha),$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Λύση: 2024

i. Προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle:

1. Η $g$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξη συνεχών,
2. Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$ ως πράξη παραγωγίσιμων.

Επιπλέον,

$$g(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\alpha - \alpha) = 0,$$

και

$$\begin{aligned} g(\beta) &= f(\beta) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(\beta - \alpha) \\ &= f(\beta) - f(\alpha) - \big(f(\beta) - f(\alpha)\big) = 0. \end{aligned}$$

Άρα $g$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$ και $g(\alpha) = g(\beta) = 0$. Συνεπώς, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Από το (i.) και το συμπέρασμα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0.$$

Παραγωγίζοντας,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \Rightarrow \quad g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0.$$

Επομένως,

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

**7.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f$ και $g$ με τύπους:

$$f(x) = \text{ημ}x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad g(x) = x - \text{ημ}x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g$ ως προς τα ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς την κυρτότητα.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0, f(0))$ και $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

iv. Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\frac{2x}{\pi} \leq \text{ημ}x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Λύση: 2024

i. Έχουμε:

$$g(x) = x - \text{ημ}x.$$

Παραγωγίζουμε:

$$g'(x) = 1 - \text{συν}x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \text{συν}x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Πίνακας Μονοτονίας:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | 0.Ε. | $\nearrow$ | 0.Μ. |

Η $g$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$:

$$g(0) = 0 - \text{ημ}0 = 0,$$

και ολικό μέγιστο στο $x = \frac{\pi}{2}$:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

ii. Έχουμε:

$$f(x) = \eta\mu x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sigma\upsilon\nu x.$$

Παραγωγίζοντας ξανά:

$$f''(x) = -\eta\mu x \leq 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Άρα η $f$ είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

iii.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f(0) = \eta\mu 0 = 0.$$

Τα σημεία είναι:

$$A(0,0), \quad B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

Κλίση:

$$\lambda_{AB} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}.$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας $AB$ είναι:

$$y = \frac{2}{\pi}x.$$

iv. Επειδή η $f$ είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, από τον ορισμό της κυρτότητας ισχύει:

$$f(x) \geq y_{AB}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

δηλαδή:

$$\eta\mu x \geq \frac{2x}{\pi}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Αφού η $g(x) = x - \eta\mu x$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, με $g(0) = 0$, έχουμε:

$$g(x) \geq 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

δηλαδή:

$$x - \eta\mu x \geq 0 \ \Rightarrow \ \eta\mu x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει:

$$\frac{2x}{\pi} \leq \eta\mu x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

**8.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

i. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$

ii. $f(-2) = -4\sqrt{e}, \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}, \quad f(1) = -\frac{1}{e}, \quad f(2) = 0$

iii. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

iv. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

v. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$

vi. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$

Δίνεται επίσης ο πίνακας προσήμων των $f, f', f''$:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $\frac{2}{5}$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $\|$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | | |

Λύση: 2024

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτουν τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ διέρχεται από τα σημεία:

$$(-2, -4\sqrt{e}), \quad \left(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right), \quad (1, -\tfrac{1}{e}), \quad (2, 0).$$

- Εφόσον:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,$$

η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ (μόνο από αριστερά).

- Από τα όρια:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0,$$

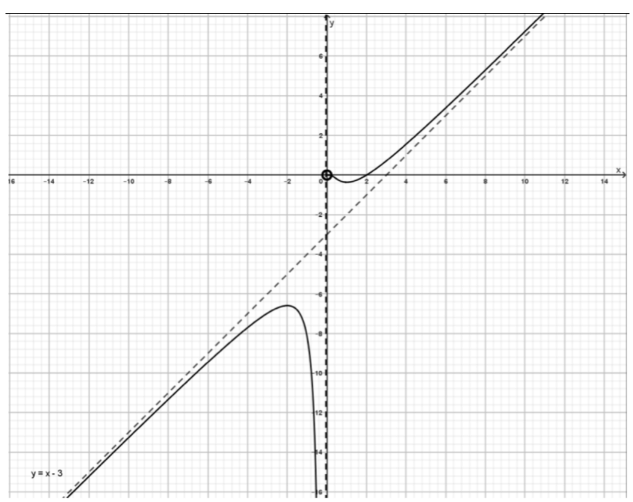
προκύπτει ότι η ευθεία $y = x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ και στις δύο περιοχές $x \to \pm\infty$.

- Από τον πίνακα προσήμων της πρώτης παραγώγου: η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$ με τιμή
$$f(-2) = -4\sqrt{e},$$
και τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ με τιμή
$$f(1) = -\frac{1}{e}.$$

- Από τον πίνακα προσήμων της δεύτερης παραγώγου: η $f$ παρουσιάζει σημείο καμπής στο
$$x = \frac{2}{5}, \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}.$$

Συνοψίζοντας, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$:

- έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$,
- έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x - 3$,
- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(-2, -4\sqrt{e})$,
- παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(1, -\frac{1}{e})$,
- παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $\left(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.



**9.** Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$
i. Να βρείτε το *πεδίο ορισμού* της και τα *σημεία τομής* της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.

ii. Να μελετήσετε τη $f$ ως προς *μονοτονία* και *τοπικά ακρότατα* και να βρείτε τις *ασύμπτωτες*.

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη $f$.

Λύση: 2023

i. Πεδίο ορισμού και τομές με άξονες.

$$x^2+1>0 \ \text{ και } \ x^2+1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad D_f = \mathbb{R}.$$

*Τομές.*

Για $x=0$: $f(0) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0 \Rightarrow (0,0)$.

Για $y=0$: $\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \ln(x^2+1) = 0 \Rightarrow x=0$. Άρα μοναδική τομή με άξονες το $(0,0)$.

ii. Μονοτονία, ακρότατα, ασύμπτωτες.

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2+1) - \ln(x^2+1)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\,[\,1-\ln(x^2+1)\,]}{(x^2+1)^2}.$$

Σημεία όπου $f'(x)=0$: (i) $x=0$, (ii) $1-\ln(x^2+1)=0 \Rightarrow x^2+1=e \Rightarrow x = \pm\sqrt{e-1}$.

Πίνακας Μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{e-1}$ | | $0$ | | $\sqrt{e-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | Τ.Μ. | $\searrow$ | Τ.Ε. | $\nearrow$ | Τ.Μ. | $\searrow$ | |

Άρα:

$$f(-\sqrt{e-1}) = f(\sqrt{e-1}) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{(τοπικά μέγιστα)}, \qquad f(0)=0 \quad \text{(τοπικό ελάχιστο)}.$$

Ασύμπτωτες.

Ο παρονομαστής $x^2+1$ δεν μηδενίζεται, άρα η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών. Επομένως δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για οριζόντιες ασύμπτωτες εξετάζουμε τα όρια στο $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty$, άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big[\ln(x^2+1)\big]'}{\big[x^2+1\big]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

— (ανάλογα για $x\to-\infty$) —

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1},$$

με $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$, άρα πάλι $\frac{\infty}{\infty}$ και

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\big[\ln(x^2+1)\big]'}{\big[x^2+1\big]'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

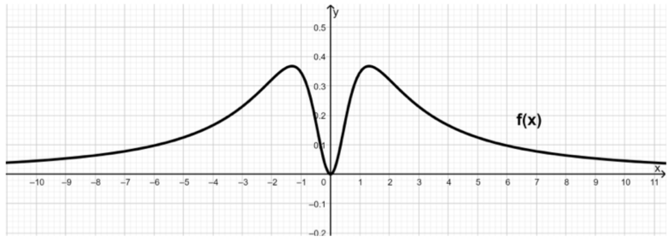
Συνεπώς $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη και για $x\to+\infty$ και για $x\to-\infty$.

*Έλεγχος για πλάγια ασύμπτωτη.*

Θέτουμε $\lambda = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x(x^2+1)} = 0$ (διότι $\ln(x^2+1) = O(\ln|x|)$ ενώ $x(x^2+1) = \Theta(x^3)$).

Με $\lambda=0$, $\beta = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-\lambda x\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη (καλύπτεται από την οριζόντια $y=0$).




**10.** Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - 2\tan^{-1} x,$$

όπου $\tan^{-1} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη *μονοτονία* και τα *ακρότατα*.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 1]$ ισχύει $2x - 4\tan^{-1} x \leq \pi - 2$.

Λύση: 2022

i. Έχουμε:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Άρα $f'(x) = 0$ για $x = \pm 1$.

Πίνακας Μεταβολών:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | Τ.Μ. | $\searrow$ | Τ.Ε. | $\nearrow$ | |

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

Η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -1$:

$$f(-1) = -1 - 2\tan^{-1}(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

Η $f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$:

$$f(1) = 1 - 2\tan^{-1}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

ii. Για κάθε $x \in (-\infty, 1]$, από τον πίνακα μεταβολών έχουμε $f(x) \leq f(-1)$.

$$\Rightarrow x - 2\tan^{-1} x \leq -1 + \frac{\pi}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 2:

$$2x - 4\tan^{-1} x \leq \pi - 2.$$

**11.** Έστω η πραγματική συνάρτηση $f$ με τύπο

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}.$$

Να βρεθούν: το *πεδίο ορισμού*, τα *σημεία τομής* με τους άξονες, τα *διαστήματα μονοτονίας*, τα *τοπικά ακρότατα*, οι *ασύμπτωτες* (αν υπάρχουν) και να παρασταθεί γραφικά.

Λύση: 2022

Πεδίο ορισμού. Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται:

$$x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Σημεία τομής με άξονες.

- Με $x'$: $f(x) = 0 \iff x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \iff x^3 - 4 = 0 \iff x = \sqrt[3]{4}$. Άρα σημείο $\big(\sqrt[3]{4}, 0\big)$.
- Με $y'$: δεν υπάρχει, διότι $x = 0 \notin D_f$.

Μονοτονία.

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}.$$

Κρίσιμο σημείο: $f'(x) = 0 \iff x^3 + 8 = 0 \iff x = -2$.

Πίνακας Μεταβολών:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Συμπέρασμα: η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$.

Ακρότατα. Στο $x=-2$:

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3 \quad \text{(τοπικό μέγιστο)}.$$

Ασύμπτωτες.

- *Κατακόρυφη:*
$$\lim_{x\to 0^-}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty.$$
Άρα $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

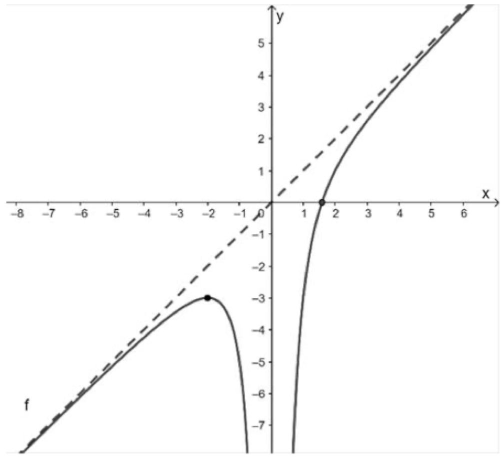
- *Οριζόντιες:*
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty,$$
άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες.

- *Πλάγιες (1ος τρόπος):*
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$
Επομένως η ευθεία $y=x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** και για $x\to-\infty$ και για $x\to+\infty$.

- *Πλάγιες (2ος τρόπος):*
$$\lim_{x\to -\infty}\big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x \text{ πλάγια για } x\to-\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty}\big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x \text{ πλάγια για } x\to+\infty.$$

Συνοψίζοντας:

- $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Τομή με $x'$: $\big(\sqrt[3]{4},\, 0\big)$. Τομή με $y'$: *καμία*.
- Μονοτονία: $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ αύξουσα, $[-2,0)$ φθίνουσα.
- Τοπικό μέγιστο: $(-2,-3)$.
- Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $x=0$. Πλάγια ασύμπτωτη: $y=x$ (και στα δύο άκρα). Οριζόντια: *καμία*.




**12.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$.

i. Να μελετήσετε την $f$ ως προς την *κυρτότητα* και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα *σημεία καμπής*.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο με τετμημένη $x = 1$ είναι $x - 2y - 3 = 0$.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 16)$ ισχύει $x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln x^2$.

Λύση: 2022

i. Παράγωγοι:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^{3/2}}.$$

Θέτουμε $f''(x) = 0$:

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^{3/2}} = 0 \iff \frac{1}{4x^{3/2}} = \frac{1}{x^2} \iff \sqrt{x} = 4 \iff x = 16.$$

Πίνακας κυρτότητας:

| $x$ | $0$ | | $16$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\cap$ | ΣΚ | $\cup$ | |

Άρα η $f$ είναι κοίλη στο $(0, 16)$ και κυρτή στο $[16, +\infty)$. Σημείο καμπής: $x = 16$, $f(16) = \ln 16 - \sqrt{16} = 4\ln 2 - 4$. Επομένως $M(16,\ 4\ln 2 - 4)$ είναι σημείο καμπής.

ii.
$$f'(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$
Με $f(1) = \ln 1 - \sqrt{1} = 0 - 1 = -1$, η εφαπτομένη στο $x = 1$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \implies y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \implies x - 2y - 3 = 0.$$

iii. Εφόσον στο $(0, 16)$ η $f$ είναι κοίλη, ισχύει ότι η εφαπτομένη της βρίσκεται *πάνω* από τη γραφική της:
$$y_{\varepsilon\varphi}(x) \ \geq \ f(x), \qquad \forall x \in (0, 16).$$

Για την εφαπτομένη του (ii): $y_{\varepsilon\varphi}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Άρα
$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \ \geq \ \ln x - \sqrt{x} \iff x - 3 \ \geq \ 2\ln x - 2\sqrt{x} \iff x + 2\sqrt{x} \ \geq \ 3 + 2\ln x$$
$$\implies x + 2\sqrt{x} \ \geq \ 3 + \ln x^2, \ \forall x \in (0, 16)$$

**13.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2+1) - x^2, \ x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τη $f$ ως προς τη *μονοτονία* και τα *τοπικά ακρότατα*.

ii. Να αποδείξετε ότι $\ln(x^2+1) \leq x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση: 2022

i. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2x = \frac{2x - 2x(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-2x^3}{x^2+1}.$$

Θέτοντας $f'(x) = 0$ παίρνουμε $x = 0$ (ο παρονομαστής είναι $> 0$). Σημειολογικός πίνακας:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

Άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως στο $x = 0$ η $f$ έχει τοπικό (και ολικό) μέγιστο $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$.

ii. Από το (i.) το ολικό μέγιστο της $f$ είναι 0, άρα

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff \ln(x^2+1) - x^2 \leq 0 \iff \ln(x^2+1) \leq x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

**14.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \dfrac{1}{x}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Λύση: 2021

Υπαρξη Ρίζας:

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$ στο $[1, 2]$.
Η $f$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $f(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = \ln 2 - \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0.$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(1, 2)$.

Μοναδικότητα Ρίζας:

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες στο $(1, 2)$, τις $\rho_1$ και $\rho_2$ με $\rho_1 < \rho_2$.

- Η $f$ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, \rho_2)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ αφού $\rho_1, \rho_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}.$$

Αλλά $f'(x) = 0 \iff \frac{x+1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -1$, το οποίο δεν ανήκει στο $(1, 2)$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες στο $(1, 2)$. Επειδή όμως αποδείξαμε προηγουμένως ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα, αυτό σημαίνει ότι αυτή θα είναι και μοναδική.

Άρα η εξίσωση $\ln x = \dfrac{1}{x}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Εναλλακτικά:

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$ στο $[1, 2]$.
Η $f$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $f(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = \ln 2 - \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0.$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, δηλαδή το $\xi$ είναι τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x \in (1, 2),$$

άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, 2)$.

Επομένως, αφού υπάρχει μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(1, 2)$, τότε αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή η εξίσωση

$$\ln x = \frac{1}{x}$$

έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

**15.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}.$$

Να βρείτε το *πεδίο ορισμού* της, τα *σημεία τομής* της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα *διαστήματα μονοτονίας*, τα *τοπικά ακρότατα*, τις *ασύμπτωτες* της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση: 2021

Πεδίο ορισμού:

$$x - 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 2 \;\Rightarrow\; D_f = \mathbb{R} - \{2\}.$$

Σημεία τομής με τους άξονες:

Με $x'$: $\quad y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2,\; x = 1.$
$\Rightarrow$ σημεία $(-2, 0),\; (1, 0)$.

Με $y'$: $\quad x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow (0, 1)$.

Μονοτονία / Ακρότατα:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x+2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}, \quad x \neq 2.$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \iff x=0,\ x=4 \quad (x \neq 2 \text{ διπλή απαγόρευση}).$$

Πίνακας Μεταβολών:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2''$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Η $f$ είναι γνησίως *αύξουσα* στα $(-\infty, 0]$ και $[4, +\infty)$ και γνησίως *φθίνουσα* στα $[0, 2)$ και $(2, 4]$.

Στο $x = 0$: $f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ *τοπικό μέγιστο.*
Στο $x = 4$: $f(4) = \dfrac{16+4-2}{4-2} = \dfrac{18}{2} = 9 \Rightarrow (4, 9)$ *τοπικό ελάχιστο.*

Ασύμπτωτες:

*Κατακόρυφη.* Για $x \to 2^-$: $x-2 \to 0^-$ και $x^2+x-2 \to 4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+x-2}{x-2} = -\infty$.
Για $x \to 2^+$: $x-2 \to 0^+$ και $x^2+x-2 \to 4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+x-2}{x-2} = +\infty$.
$\Rightarrow x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

*Πλάγια.*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda.$$

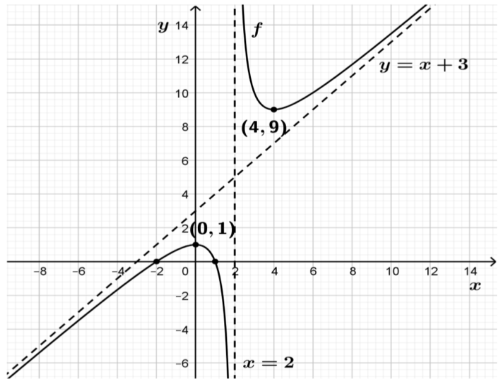
$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x)-x\big) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{x-2} = 3 = \beta,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-x\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x-2} = 3 = \beta.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη (και στα δύο άκρα) είναι $y = \lambda x + \beta = x + 3$.

Συνοψίζοντας:

- $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.
- Τομές με άξονες: $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.
- Μονοτονία: $(-\infty, 0]$ και $[4, +\infty)$ αύξουσα, $[0, 2)$ και $(2, 4]$ φθίνουσα.
- Τοπικό μέγιστο: $(0, 1)$. Τοπικό ελάχιστο: $(4, 9)$.
- Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $x = 2$. Πλάγια ασύμπτωτη: $y = x + 3$.




**16.** Η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία

$$y = 2x + \ln 2, \quad \text{στο } -\infty.$$

Να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)+3x}{x}$

ii. $\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - 2x\big)$

Λύση: 2020

Η ευθεία $y = 2x + \ln 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$, οπότε:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - \lambda x\big) = \ln 2 \qquad \big[1\text{η σχέση}\big].$$

i. Από τα πιο πάνω,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)+3x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + 3\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + 3 = 2 + 3 = 5.$$

ii. Από την [1η σχέση] προκύπτει

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \ln 2.$$

**17.** Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$ και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

Λύση: 2020

i. Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ισχύει

$$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0 \qquad \text{και} \qquad g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = 0.$$

Επομένως, η συνάρτηση $g$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$. Όμως

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \implies g'(\xi) = 0 \iff \frac{f'(\xi) \cdot \xi - f(\xi)}{\xi^2} = 0$$

$$\iff f'(\xi) \cdot \xi - f(\xi) = 0 \iff \xi f'(\xi) = f(\xi)$$

**18.** Να αποδείξετε την ανισότητα $2 - \dfrac{e}{\pi} < \ln \pi < \dfrac{\pi}{e}$.

Λύση: 2020

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x \in [e, \pi]$.

- Η $f$ είναι *συνεχής* στο $[e, \pi]$,
- και *παραγωγίσιμη* στο $(e, \pi)$.

Ισχύει για την $f$ το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[e, \pi]$. Δηλαδή, υπάρχει $\xi \in (e, \pi)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e}.$$

Όμως $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (e, \pi)$. Άρα

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e} = \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e}. \tag{1}$$

Εφόσον $0 < e < \xi < \pi$, έχουμε
$$\frac{1}{\pi} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{e}.$$
Από την (1) προκύπτει
$$\frac{1}{\pi} < \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e} < \frac{1}{e}.$$
Πολλαπλασιάζοντας με το $\pi - e > 0$:
$$\frac{\pi - e}{\pi} < \ln \pi - 1 < \frac{\pi - e}{e}.$$
Προσθέτοντας 1:
$$1 + \frac{\pi - e}{\pi} < \ln \pi < 1 + \frac{\pi - e}{e} \iff 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}.$$

**19.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\,\text{τοξ εφ}x,\ x \in \mathbb{R}$.

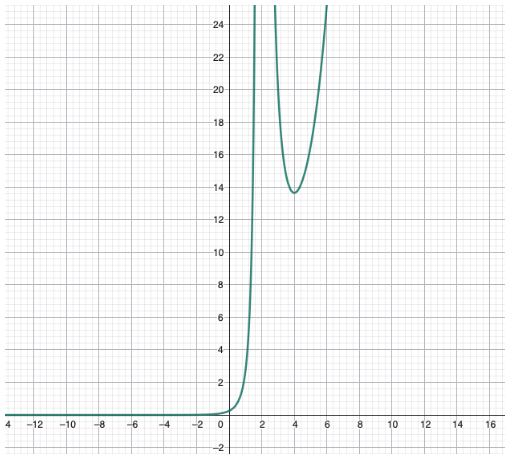
i. Να δείξετε ότι η $f$ είναι *κυρτή* στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι ισχύει
$$\text{τοξ εφ}\,\alpha - \text{τοξ εφ}\,\beta > \frac{\beta}{1+\beta^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Λύση: 2020

i. Παράγωγοι:
$$f'(x) = \text{τοξ εφ}x + \frac{x}{1+x^2},$$
$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Άρα η $f$ είναι *κυρτή* στο $\mathbb{R}$.

ii. Εφόσον $f''(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$, η $f'$ είναι *γνησίως αύξουσα* στο $\mathbb{R}$. Για $\alpha > \beta$ ισχύει
$$f'(\alpha) > f'(\beta) \implies \text{τοξ εφ}\,\alpha + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} > \text{τοξ εφ}\,\beta + \frac{\beta}{1+\beta^2}$$
$$\implies \text{τοξ εφ}\,\alpha - \text{τοξ εφ}\,\beta > \frac{\beta}{1+\beta^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$



**20.** Να βρείτε τις *ασύμπτωτες* της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x+\frac{\ln x}{x+1}.$$

Λύση: 2019

Κατακόρυφες:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{\ln x}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0^+}x+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x+1}=0+(-\infty)=-\infty.$$

Άρα $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f$.

Πλάγια (στο $+\infty$):

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x(x+1)}\right)=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x(x+1)}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x(x+1)=+\infty$, άρα $\frac{\infty}{\infty}$ (απροσδιόριστη μορφή).

Με De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(2x+1)}=0.$$

Άρα $\lambda=1$.

Για την τεταγμένη:

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-\lambda x\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\ln x}{x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}.$$

Πάλι $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Με De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Επομένως $\beta = 0$.

Συμπέρασμα: Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ για $x \to +\infty$, και $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

**21.** Να απαντήσετε τα πιο κάτω,

i. Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$. Αν $f'(x) > 0,\ x \in (\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln\left(e^x + \frac{x^3}{3}\right).$$

Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Λύση: 2019

i. Έστω τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $\alpha \le x_1 < x_2 \le \beta$. Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Εφόσον $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, προκύπτει

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \iff f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, για κάθε $x_1 < x_2$ στο $[\alpha,\beta]$, η $f$ είναι *γνησίως αύξουσα* στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Για $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = \ln\left(e^x + \frac{x^3}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x + x^2}{e^x + \dfrac{x^3}{3}} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Άρα η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Επιπλέον, η $f$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Σύμφωνα με το (i.) (Θεώρημα για $[\alpha, \beta]$ με $\alpha = 0$, $\beta > 0$), έπεται ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

**22.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + x + 1}.$$

Αφού βρείτε το *πεδίο ορισμού*, τα *σημεία τομής* της γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα *τοπικά ακρότατα*, τα *διαστήματα μονοτονίας* και τις *ασύμπτωτες* της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση: 2019

Πεδίο ορισμού:

$$x^2 + x + 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \;\Rightarrow\; \text{Π.Ο.} = \mathbb{R}.$$

Σημεία τομής:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \implies (0, 0) \qquad \text{και} \qquad y = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Άρα η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονοτονία – Ακρότατα:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + x + 1) - 6x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-6x^2 + 6}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \iff -6x^2 + 6 = 0 \iff x = \pm 1.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | τοπ. ελάχιστο | $\nearrow$ | τοπ. μέγιστο | $\searrow$ | |

Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

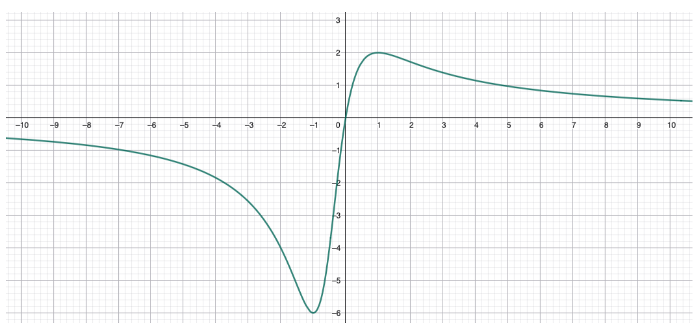
Τοπικόελάχιστο: $f(-1) = \dfrac{6(-1)}{1-1+1} = -6.$

Τοπικό μέγιστο: $f(1) = \dfrac{6(1)}{1+1+1} = 2.$

Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1+\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x+1+\frac{1}{x}} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ για $x \to \pm\infty$.



**23.** Δίνεται η συνάρτηση $g$ με τύπο $g(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g$ ως προς την κυρτότητα.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $g$ στο σημείο $A(0, g(0))$.

iii. Να αποδείξετε ότι $e^{-x} \geq 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$.

Λύση: 2019

i. Κυρτότητα:

$$g(x) = e^{-x}, \quad g'(x) = -e^{-x}, \quad g''(x) = e^{-x} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Εξίσωση εφαπτομένης:

$$A(0, g(0)) = (0, 1).$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $A$ είναι

$$\lambda_\varepsilon = g'(0) = -1.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0, 1)$ είναι:

$$(\varepsilon):\ y - 1 = -x \quad \text{ή} \quad y = 1 - x.$$

iii. Απόδειξη της ανισότητας $e^{-x} \geq 1 - x$:

1ος τρόπος:

Αφού η συνάρτηση $g$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, το διάγραμμα της βρίσκεται *πάνω από την εφαπτομένη* της στο σημείο επαφής $A(0, 1)$, εκτός από το ίδιο το σημείο.

$$(\varepsilon):\ y = 1 - x.$$

Άρα

$$g(x) \geq y_\varepsilon \iff e^{-x} \geq 1 - x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2ος τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x} - 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η παράγωγός της είναι:

$$f'(x) = -e^{-x} + 1.$$

Θέτουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | Ο.Ε. | $\nearrow$ |

Η $f$ είναι γνησίως *φθίνουσα* στο $(-\infty, 0]$ και *αύξουσα* στο $[0, +\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, όπου

$$f(0) = e^0 - 1 + 0 = 0.$$

Επομένως,

$$f(x) \geq f(0) \iff e^{-x} - 1 + x \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1 - x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

με ισότητα μόνο για $x = 0$.