Αναλυτική Γεωμετρία

Εξίσωση ευθείας

$$y = \lambda x + \beta$$

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Παράλληλες ευθείες:

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

Κάθετες ευθείες:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Απόσταση σημείου $M(x_1, y_1)$ από σημείο $N(x_2, y_2)$:

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB:

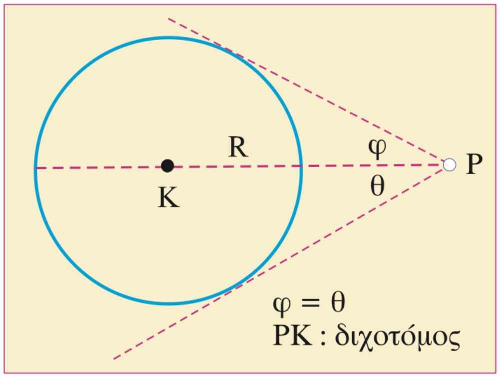
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Απόσταση σημείου $P(x_0, y_0)$ από ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$:

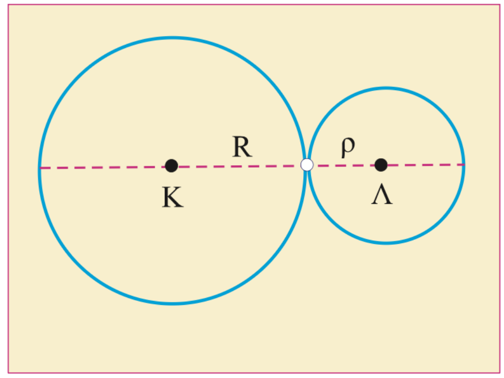
$$d(P, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών $Ax + By + \Gamma_1 = 0$ και $Ax + By + \Gamma_2 = 0$:

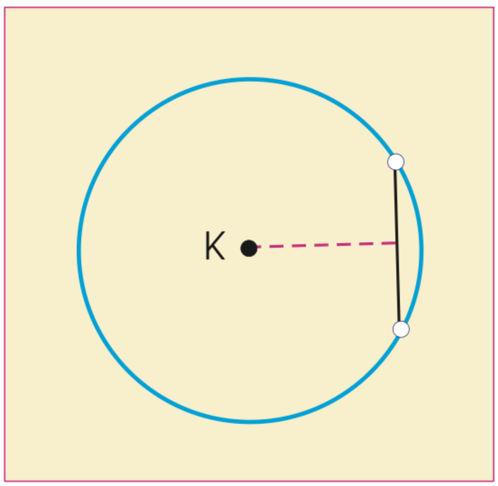
$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\Gamma_2 - \Gamma_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



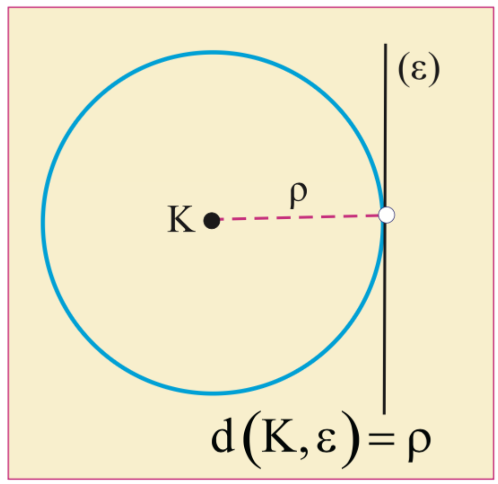
1. Τα εφαπτόμενα τμήματα από ένα σημείο P προς έναν κύκλο, είναι ίσα και η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία τους.



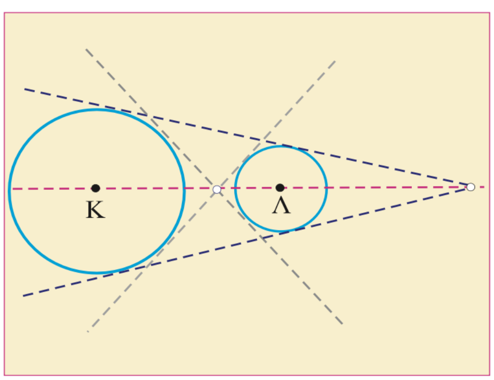
2. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται, τότε τα κέντρα τους και το σημείο επαφής τους είναι συνευθειακά σημεία.



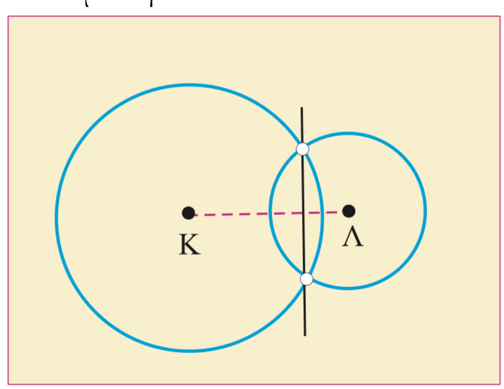
3. Το απόστημα είναι μεσοκάθετος της χορδής στην οποία αντιστοιχεί.



4. Μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο, αν και μόνο αν, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία αυτή είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.



5. Οι κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων τέμνονται πάνω στην ευθεία της διακέντρου τους.



6. Η διάκεντρος δύο κύκλων, που τέμνονται, είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Εξίσωση Κύκλου

Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Γενική εξίσωση κύκλου:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

Κέντρο και ακτίνα:

$$K(-g, -f), \qquad R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}, \qquad \text{με } g^2 + f^2 - c > 0$$

2^η Γενική εξίσωση κύκλου:

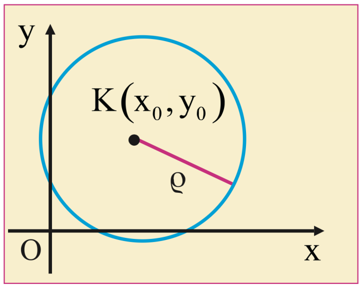
$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Κέντρο και ακτίνα:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right), \qquad \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Ελέγχος κύκλου:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Rightarrow \text{κύκλος}$$
$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0 \Rightarrow \text{σημείο}$$
$$A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0 \Rightarrow \text{αδύνατη}$$



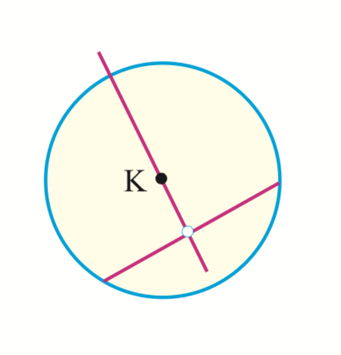
Εύρεση εξίσωσης Κύκλου

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση κύκλου πρέπει να βρούμε το κέντρο του, έστω $K(x_0, y_0)$ και την ακτίνα του έστω R. Τότε η εξίσωσή του είναι

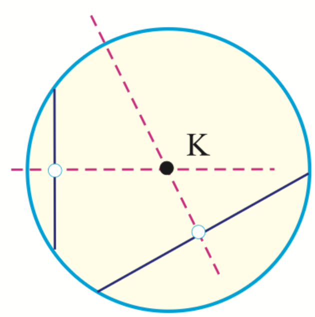
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Το κέντρο αν δεν δίνεται μπορούμε να το προσδιορίσουμε, αν αναγνωρίσουμε δύο ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκεται. Τότε το προσδιορίζουμε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων αυτών των ευθειών.

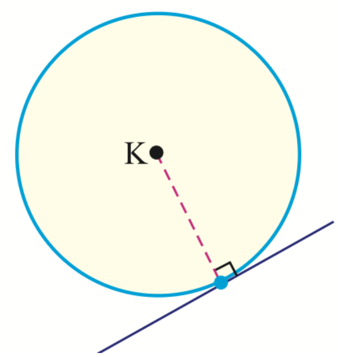
Η ακτίνα του κύκλου στη συνέχεια προσδιορίζεται ως η απόσταση του κέντρου K από ένα σημείο του κύκλου ή ως η απόσταση του K από μια ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο.



1. Η μεσοκάθετος κάθε χορδής ενός κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.



2. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο, μη παραλλήλων χορδών, είναι το κέντρο του κύκλου.



3. Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό.

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν:

α. Έχει κέντρο $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

β. Έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

γ. Έχει κέντρο $\Lambda(4,2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon):\ 3x + 4y - 1 = 0$.

δ. Διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$, $B(0,0)$, $\Gamma(3,0)$.

ε. Όταν έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon):\ y = 3x - 7$ και διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,-1)$.

Λύση:

α. Αφού έχει κέντρο $O(0,0)$ είναι της μορφής $x^2+y^2=\rho^2$. Το σημείο $A(1,2)$ επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου.

$$1^2+2^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=5 \implies C:\ x^2+y^2=5.$$

Εναλλακτικά:

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ακτίνα ως την απόσταση του κέντρου από το σημείο A:

$$KA=\sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$$

β. Αφού το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου, το μέσο του θα ταυτίζεται με το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

Έστω $K(x_0,y_0)$ το μέσο του AB, τότε:

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1-3}{2}=-1 \\ y_0=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4 \end{cases}$$

Οπότε το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(-1,4)$. Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου θα είναι το μισό της διαμέτρου, δηλαδή το μισό της απόστασης AB. Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι:

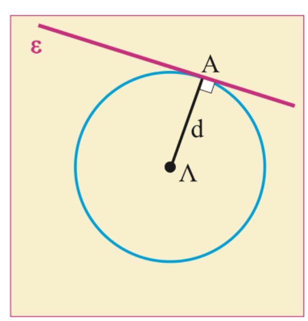
$$\rho=\frac{1}{2}(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{(1+3)^2+(5-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}.$$

Άρα, ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση

$$C:\ (x+1)^2+(y-4)^2=5.$$

γ. Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-4)^2+(y-2)^2=\rho^2$.

Επειδή εφάπτεται στην $(\varepsilon):\ 3x+4y-1=0$ πρέπει: $d(A,\varepsilon)=\rho$.

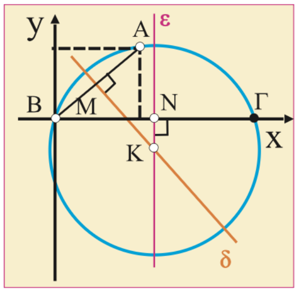


Έτσι:

$$d=\frac{|3\cdot 4+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\rho \quad \Leftrightarrow \quad \rho=\frac{19}{5}.$$

Άρα $\quad C:\ (x-4)^2+(y-2)^2=\left(\frac{19}{5}\right)^2.$

δ. Οι μεσοκάθετοι των χορδών AB και $B\Gamma$ τέμνονται στο κέντρο του κύκλου. Βρίσκουμε αυτές τις μεσοκάθετους $(\delta), (\varepsilon)$.



Έστω M μέσο του AB.

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) \implies M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Κλίση του AB.

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = 1 \implies \lambda_\delta = -1$$

Επομένως, η δ υπολογίζεται από την κλίση λ_δ και το σημείο M:

$$\delta:\ y-\frac{1}{2} = -1\left(x-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y-\frac{1}{2} = -x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y=1$$

Έστω N μέσο του $B\Gamma$.

$$N\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2}, \frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right) \implies N\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

Κλίση του $B\Gamma$.

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B} = 0$$

Επομένως, η $(\varepsilon) \perp x'x$ είναι: $x = \frac{3}{2}$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των $(\delta), (\varepsilon)$ για να βρούμε το κέντρο του κύκλου:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$$

Άρα το κέντρο είναι $K\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Για την ακτίνα, υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ του κέντρου και ενός από τα σημεία.

$$R = KB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Επομένως η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι:

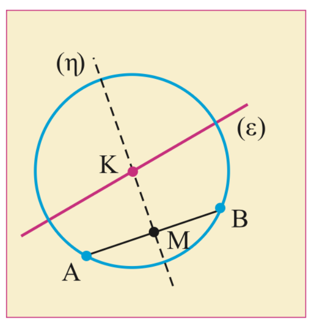
$$C: \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Εναλλακτικά: Αντικαθιστούμε διαδοχικά τις συντεταγμένες των τριών σημείων στην

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Προκύπτει έτσι ένα σύστημα 3×3 (τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x_0, y_0, R), το οπιο και λύνουμε.

ε. Το κέντρο $K(\alpha, \beta)$ του ζητούμενου κύκλου είναι το σημείο τομής της (ε) και της μεσοκαθέτης (η) στο AB.



Μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \implies M\left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

Η κλίση της AB είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1 = \frac{1+1}{1-2} = -2 \implies \lambda_\eta = \frac{1}{2}$$

Από την ευθεία (η) γνωρίζουμε το σημείο M και την κίση λ_η. Οπότε η εξίσωση της (η) είναι:

$$\eta: \; y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \tag{1}$$

Η εξίσωση της (ε) είναι:

$$\varepsilon: \; y = 3x - 7 \tag{2}$$

Από τη λύση του συστήματος των (1) και (2) βρίσκουμε:

$$x = \frac{5}{2} \qquad \text{και} \qquad y = \frac{1}{2} \implies K\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

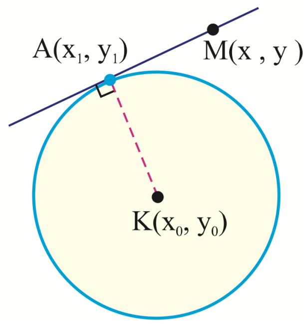
Η ακτίνα είανι η απόσταση του Κέντρου $K\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ με ένα από τα σημεία πχ.$A(1,1)$.

$$R = \sqrt{(y_K - y_A)^2 + (x_K - x_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

και η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C: \; \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Εξίσωσης Εφαπτομένης Κύκλου



Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης Κύκλου από Σημείο Αυτού

Μέθοδος 1

Γνώση του κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ενός σημείου $A(x_1, y_1)$ του κύκλου, στο οποίο φέρεται η εφαπτομένη (ϵ).

- Υπολογίζουμε την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος AK και, μέσω αυτής, υπολογίζουμε την κλίση της εφαπτομένης (ϵ), καθώς $\lambda_\epsilon \cdot \lambda_{AK} = -1$.
- Από το σημείο $A(x_1, y_1)$ και την κλίση λ_ϵ, υπολογίζουμε την εξίσωση της εφαπτομένης:

$$\epsilon : y - y_1 = \lambda_\epsilon (x - x_1)$$

Μέθοδος 2

Γνώση της εξίσωσης του Κύκλου (C) και ενός σημείου $A(x_1, y_1)$ του κύκλου, στο οποίο φέρεται η εφαπτομένη (ϵ).

- Υπολογίζουμε την κλίση της εφαπτομένης μέσο χρίση της παραγώγου,

$$\lambda_\epsilon = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1,\, y=y_1}.$$

- Από το σημείο $A(x_1, y_1)$ και την κλίση λ_ϵ, υπολογίζουμε την εξίσωση της εφαπτομένης:

$$\epsilon : y - y_1 = \lambda_\epsilon (x - x_1)$$

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ στο σημείο του $A(4,2)$

Λύση:

Μέθοδος 1:

Η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος AK είναι,

$$\lambda_{AK}=\frac{4}{3}\Rightarrow\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{4}$$

Γνωρίζουμε ένα σημείο της εφαπτομένης $A(4,2)$ και το συντελεστή διεύθυνσης αυτής, επομένως η εξίσωση της είναι:

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-4)\ \Rightarrow\ 3x+4y=20.$$

Μέθοδος 2:

Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$2(x-1)+2(y+2)\frac{dy}{dx}=0\ \Longrightarrow\ (y+2)\frac{dy}{dx}=-(x-1)$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+2}.$$

Στο σημείο $A(4,2)$ η κλίση της εφαπτομένης είναι:

$$\lambda_\epsilon=-\frac{4-1}{2+2}=-\frac{3}{4}.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης από το σημείο $A(4,2)$ είναι:

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-4)$$

$$\Rightarrow\ 3x+4y=20.$$

Μέθοδος 3

Γνώση του κέντρου $K(x_0, y_0)$, της ακτίνας R του κύκλου και μιας ευθείας (μ) παράλληλης στην εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου.

- Η κλίση της εφαπτομένης (ϵ) είναι ίση με την κλίση της (μ)

$$\lambda_\epsilon \parallel \lambda_\mu \implies \lambda_\epsilon = \lambda_\mu$$

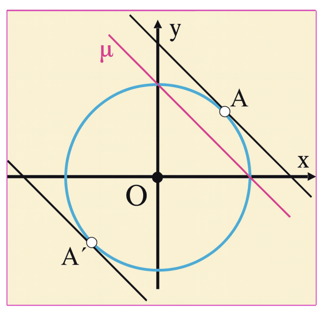
- Θέτουμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ),

$$\epsilon : \quad y = \lambda_\varepsilon x + b$$

- Υπολογίζουμε το b, δεδομένου ότι η απόσταση του Κέντρου $K(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ϵ) είναι ίση με την ακτίνα R,

$$\epsilon : \quad y = \lambda_\varepsilon x + b \quad \longrightarrow \quad Ax + By + \Gamma = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$



2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ αν είναι παράλληλη στην ευθεία $\mu : y = -x + 2$.

Λύση:

Η κλίση της εφαπτομένης (ϵ) είναι ίση με την κλίση της (μ)

$$\lambda_\epsilon \parallel \lambda_\mu \implies \lambda_\epsilon = \lambda_\mu = -1 \implies y = -x + b \iff x + y - b = 0 \tag{1}$$

Εφάπτεται η (1) στον κύκλο $K(0, 0)$ με $R = 2$, αν και μόνο αν:

$$d = 2 \iff \frac{|0 + 0 - b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2 \iff |b| = 2\sqrt{2} \iff b = \pm 2\sqrt{2}.$$

οπότε υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του κύκλου παράλληλες προς την (μ), οι ευθείες:

$$x + y - 2\sqrt{2} = 0 \quad \text{και} \quad x + y + 2\sqrt{2} = 0$$

Μέθοδος 4

Γνώση του κέντρου $K(x_0, y_0)$, της ακτίνας R του κύκλου και μιας ευθείας (μ) κάθετης στην εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου.

- Η κλίση της εφαπτομένης (ϵ) σχετίζεται με την κλίση της (μ),

$$\lambda_\epsilon \perp \lambda_\mu \implies \lambda_\epsilon \cdot \lambda_\mu = -1$$

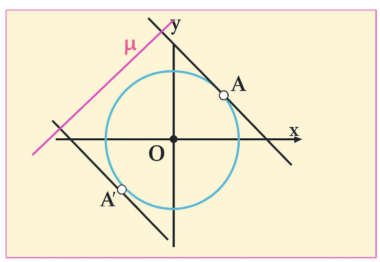
- Θέτουμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ),

$$\epsilon : \quad y = \lambda_\varepsilon x + b$$

- Υπολογίζουμε το b, δεδομένου ότι η απόσταση του Κέντρου $K(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ϵ) είναι ίση με την ακτίνα R,

$$\epsilon : \quad y = \lambda_\varepsilon x + b \quad \longrightarrow \quad Ax + By + \Gamma = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$



3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\mu : 4x - 3y + 12 = 0$.

Λύση:

$$C : x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0 \implies (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(2, 2)$ και ακτίνα $R = 5$.

Η ευθεία μ που είναι κάθετη στην εφαπτομένη ϵ του κύκλου έχει κλίση

$$4x - 3y + 12 = 0 \implies \lambda_\mu = \frac{4}{3} \iff \lambda_\epsilon = -\frac{3}{4} \qquad (\lambda_\epsilon \cdot \lambda_\mu = -1)$$

Η ϵ έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = -\frac{3}{4}x + b \;\Leftrightarrow\; 3x + 4y - 4b = 0$$

Είναι $d(K, \varepsilon_1) = R \;\Leftrightarrow$

$$\frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 2 - 4b|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \;\Leftrightarrow\; |14-4b| = 25 \;\Leftrightarrow\; 14-4b = \pm 25$$

$$14-4b = 25 \Leftrightarrow 14-25 = 4b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{4}$$

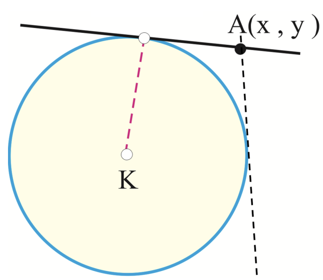
$$14-4b = -25 \Leftrightarrow 14+25 = 4b \Leftrightarrow b = \frac{39}{4}$$

Άρα

$$\epsilon : 3x+4y-4\left(-\frac{11}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x+4y+11=0$$

$$\text{ή} \quad 3x+4y-4\cdot\frac{39}{4} = 0 \Leftrightarrow 3x+4y-39=0.$$

Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης Κύκλου από Σημείο Εκτός Αυτού



Μέθοδος 1

Γνώση του κέντρου $K(x_0, y_0)$, της ακτίνας R και ενός σημείου $A(x_1, y_1)$ εκτός του κύκλου από το οποίο άγονται οι εφαπτομένες του κύκλου.

- Από την στιγμή που γνωρίζουμε το σημείο $A(x_1, y_1)$ από το οποίο διέρχετε η εφαπτωμένη. Η εξίσωση της μπωρεί αν γραφτεί ως,

$$\epsilon : \quad y - y_1 = \lambda(x - x_1)$$

- Υπολογίζουμε την κλίση λ, δεδομένου ότι η απόσταση του Κέντρου $K(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ϵ) είναι ίση με την ακτίνα R,

$$\epsilon : \quad y - y_1 = \lambda(x - x1) \quad \longrightarrow \quad Ax + By + \Gamma = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = R$$

4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2+y^2+2x+4y-11=0$ που διέρχονται από το σημείο $A(1,2)$.

Λύση:

$$C: x^2+y^2+2x+4y-11=0 \implies (x+1)^2+(y+2)^2=4^2$$

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(-1,-2)$ και ακτίνα $R=4$.

Οι ευθείες ε που διέρχονται από το A έχουν εξίσωση:

$$y-2=\lambda(x-1) \Leftrightarrow \lambda x-y+2-\lambda=0 \tag{1}$$

Αν $\varepsilon: \lambda x-y+2-\lambda=0$, τότε:

$$d=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda(-1)-(-2)+2-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |4-2\lambda|=4\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow (4-2\lambda)^2=16(\lambda^2+1)$$

$$16-16\lambda+4\lambda^2=16\lambda^2+16 \Leftrightarrow 12\lambda^2+16\lambda=0 \Leftrightarrow 4\lambda(3\lambda+4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \quad \text{ή} \quad \lambda=-\frac{4}{3}.$$

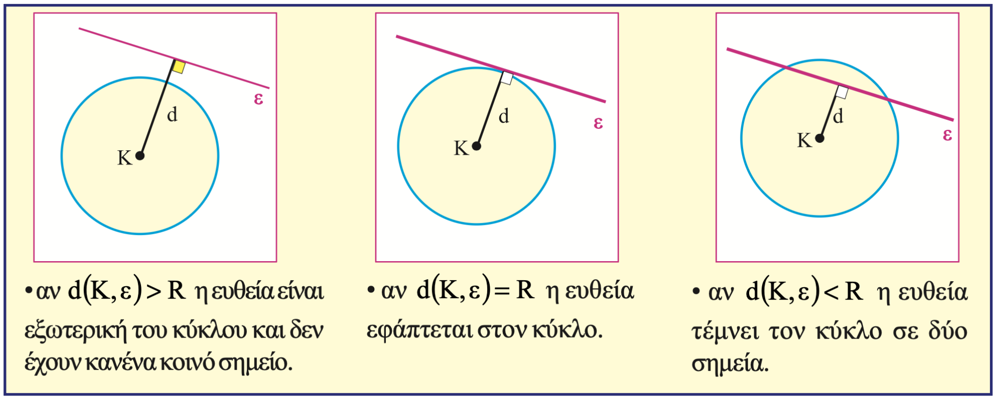
Αν $\lambda=0$ η εφαπτομένη (1) έχει εξίσωση:

$$0\cdot x-y+2=0 \implies y=2.$$

Αν $\lambda=-\frac{4}{3}$ η εφαπτομένη (1) έχει εξίσωση:

$$-\frac{4}{3}x-y+2+\frac{4}{3}=0 \implies -4x-3y+6+4=0$$

Σχετική Θέση Ευθείας και Κύκλου



Μέθοδος 1

Με τη βοήθεια της απόστασης του κέντρου $K(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\epsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ προσδιορίζουμε και τη σχετική θέση ευθείας και κύκλου.

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- $d(K, \varepsilon) > R \longrightarrow$ Ξένη ευθεία ως προς τον Κύκλο.
- $d(K, \varepsilon) = R \longrightarrow$ Εφαπτόμενη του Κύκλου.
- $d(K, \varepsilon) < R \longrightarrow$ Ευθεία τέμνει τον Κύκλο.

Μέθοδος 2

Αντικαθιστώντας την ευθεία $\epsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ στην εξίσωση του κύκλου (C), προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς μία μεταβλητή. Από το πρόσημο της διακρίνουσας Δ προσδιορίζουμε το πλήθος των κοινών σημείων και κατά συνέπεια τη σχετική θέση της ευθείας ως προς τον κύκλο.

- $\Delta < 0 \longrightarrow$ Η ευθεία είναι ξένη προς τον κύκλο.
- $\Delta = 0 \longrightarrow$ Η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου.
- $\Delta > 0 \longrightarrow$ Η ευθεία τέμνει τον κύκλο.

1. Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $(x+1)^2+y^2=9$ και της ευθείας $(\epsilon): 2x-y-3=0$.

Λύση:

Μέθοδος 1:

Το κέντρο του κύκλου είναι το $K(-1,0)$ και η ακτίνα του $R=3$. Οπότε

$$d(K,\epsilon)=\frac{|2\cdot(-1)+(-1)\cdot 0-3|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}<3=R$$

Άρα η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται σε δύο σημεία.

Μέθοδος 2:

Η ευθεία έχει εξίσωση $y=2x-3$. Την αντικαθιστούμε στην εξίσωση του κύκλου:

$$(x+1)^2+(2x-3)^2=9$$

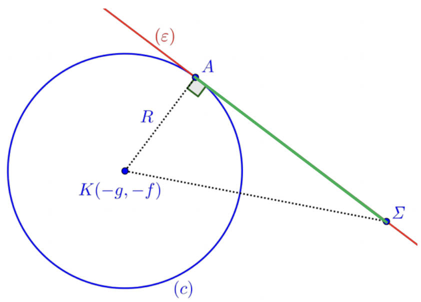
$$(x^2+2x+1)+(4x^2-12x+9)=9$$
$$5x^2-10x+1=0$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta=(-10)^2-4\cdot 5\cdot 1=100-20=80>0 \quad \Longrightarrow \text{ τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία}$$

Θέση Σημείου ως προς τον Κύκλο

Μήκος Εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από Σημείο στον Κύκλο



Μέθοδος 1

Γνώση της εξίσωσης του Κύκλου (C) και ενός σημείου $\Sigma(x_1, y_1)$ που άγεται η εφαπτομένη (ϵ).

- Υπολογίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα, μέσο του Πυθαγορείου Θεωρήματος

$$(KA)^2 + (A\Sigma)^2 = (K\Sigma)^2 \implies (A\Sigma) = \sqrt{(K\Sigma)^2 - (KA)^2}$$

Μέθοδος 2

Για το σημείο $\Sigma(x_1, y_1)$ και εξίσωση Κύκλου $(C) : x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, εφαρμόζουμε τον τύπο

$$(A\Sigma) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

1. Δίνεται το σημείο $\Sigma(-1, 4)$ και ο κύκλος $(C) : x^2 + y^2 = 5$. Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο Σ προς τον κύκλο (C).

Λύση:

Μέθοδος 1:

Ο κύκλος $(C) : x^2 + y^2 = 5$ έχει κέντρο $K(0, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{5}$. Το σημείο είναι $\Sigma(-1, 4)$.

$$K\Sigma = \sqrt{(-1-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AK\Sigma$, έχουμε:

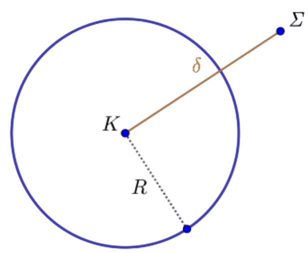
$$(A\Sigma)^2 = (K\Sigma)^2 - (KA)^2 \implies (A\Sigma)^2 = 17 - 5 = 12 \implies (A\Sigma) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Μέθοδος 2:

Έστω A το σημείο επαφής του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο Σ προς τον κύκλο (C). Δεδομένου ότι $g = f = 0$ και $c = 5$
Έχουμε:

$$(A\Sigma) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 - 5} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ μονάδες}$$

Δύναμη Σημείου ως προς Κύκλο



Μέθοδος 1

Δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (K, R) υπολογίζεται μέσο της σχέσης,

$$\Delta_K(\Sigma) = \Sigma K^2 - R^2$$

Μέθοδος 2

Η δύναμη του σημείου $\Sigma(x_1, y_1)$ ως προς τον κύκλο (K, R) με εξίσωση $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$, είναι ίση με τον πραγματικό αριθμό:

$$\Delta_K(\Sigma) = (\Sigma K)^2 - R^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

2. Δίνεται το σημείο $\Sigma(-2, 1)$. Να υπολογίσετε την Δύναμη τους σημείου Σ ως προς τον κύκλο $(C_1) : x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$.

Λύση:

Μέθοδος 1:

Για τον κύκλο $(C_1) : x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$: Κέντρο $K_1(-2, 0)$, ακτίνα $R_1 = \sqrt{4 + (-1)} = \sqrt{3}$.

$$\Sigma K_1^2 = (\,-2 - (-2)\,)^2 + (\,1 - 0\,)^2 = 1 \implies \Delta_{C_1}(\Sigma) = 1 - 3 = -2$$

Μέθοδος 2:

Για τον κύκλο $(C_1): x^2+y^2+4x-1=0$: Από $2g=4 \Rightarrow g=2$, $2f=0 \Rightarrow f=0$, $c=-1$.

$$\begin{aligned}\Delta_{C_1}(\Sigma) &= (-2)^2+1^2+2\cdot 2\cdot(-2)+2\cdot 0\cdot 1-1\\ &= 4+1-8-1=-4\end{aligned}$$

Σχετική Θέση Σημείου ως προς τον Κύκλο

Μέθοδος 1

Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου $K(x_0, y_0)$ και του σημείου $A(x_1, y_1)$.

$$KA=\sqrt{(x_A-x_K)^2+(y_A-y_K)^2}$$

- $KA > R \longrightarrow$ Σημείο εξωτερικά του Κύκλου.
- $KA = R \longrightarrow$ Σημείο ανήκει στον Κύκλο.
- $KA < R \longrightarrow$ Σημείο στο εσωτερικό του Κύκλου.

3. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-4y-21=0$ και το σημείο $M(1,4)$.

α. Να αποδείξετε ότι το M είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

β. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το M.

Λύση:

α. Είναι $x^2+y^2-4y-21=0 \iff x^2+y^2-4y+4=25 \iff x^2+(y-2)^2=5^2$.
Η απόσταση του M από το $K(0,2)$ είναι:

$$(KM)=\sqrt{(1-0)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}<5=\rho,$$

οπότε το M βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

β. Έστω AB η χορδή του κύκλου που έχει μέσο το M. Τότε το KM είναι απόστημα της χορδής, οπότε $KM \perp AB$.
Είναι $\lambda_{KM}=\dfrac{4-2}{1-0}=2$ και $\lambda_{KM}\lambda_{AB}=-1 \iff \lambda_{AB}=-\dfrac{1}{2}$.

Η ευθεία AB έχει εξίσωση:

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-1) \iff 2y-8=-x+1 \iff x+2y-9=0$$

Μήκος εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από σημείο προς κύκλο

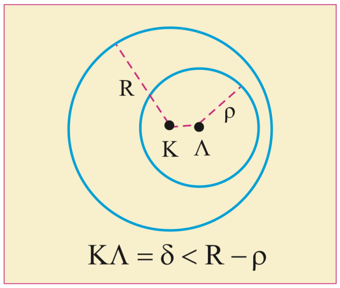
Μέθοδος 2

Υπολογίζουμε την Δύναμη του σημείου του σημείου $A(x_1, y_1)$ από τον Κύκλο.

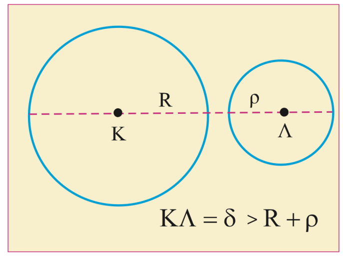
$$\Delta_K(\Sigma) = \Sigma K^2 - R^2$$

- $\Delta_K > 0 \longrightarrow$ Σημείο εξωτερικά του Κύκλου.
- $\Delta_K = 0 \longrightarrow$ Σημείο ανήκει στον Κύκλο.
- $\Delta_K < 0 \longrightarrow$ Σημείο στο εσωτερικό του Κύκλου.

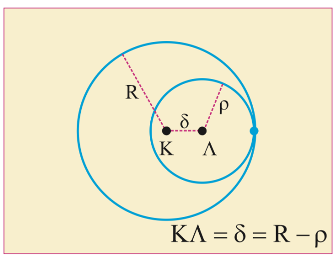
Σχετική Θέση δυο Κύκλων



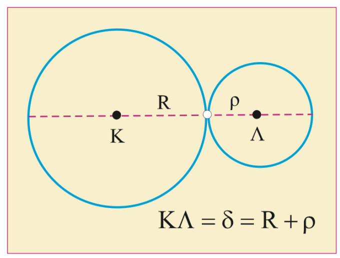
1. Ξένοι Εσωτερικά



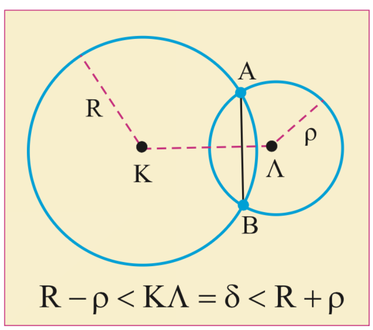
2. Ξένοι Εξωτερικά



3. Εφάπτονται Εσωτερικά



4. Εφάπτονται Εξωτερικά



5. Τέμνονται

Μέθοδος 1

Για να βρούμε τη σχετική θέση δύο κύκλων (K, R_1) και (Λ, R_2) συγκρίνουμε το μήκος της διακέντρου KA με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτινών τους .

$$\delta = K\Lambda = \sqrt{(x_\Lambda - x_K)^2 + (y_\Lambda - y_K)^2}$$

- $\delta < |R_1 - R_2| \longrightarrow$ Ξένοι Εσωτερικά.
- $\delta > |R_1 + R_2| \longrightarrow$ Ξένοι Εξωτερικά.
- $\delta = |R_1 - R_2| \longrightarrow$ Εφάπτονται Εσωτερικά.
- $\delta = |R_1 + R_2| \longrightarrow$ Εφάπτονται Εξωτερικά.
- $|R_1 - R_2| < \delta < |R_1 + R_2| \longrightarrow$ Τέμνονται.

Μέθοδος 2

Έστω οι εξισώσεις δύο κύκλων (C_1) και (C_2):

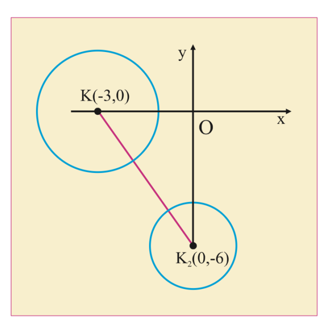
$$\begin{cases} (C_1) : x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \\ (C_2) : x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Το πλήθος των πραγματικών λύσεων του συστήματος (1) των δύο εξισώσεων καθορίζει το πλήθος των σημείων τομής των δύο κύκλων.

- Καμία πραγματική λύση $\longrightarrow$ Ξένοι Εσωτερικά ή Εξωτερικά.
- Ακριβός μια πραγματική λύση $\longrightarrow$ Εφαπτόμενοι Εσωτερικά ή Εξωτερικά.
- Δύο πραγματικές λύσεις $\longrightarrow$ Τέμνονται.

1. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων $C_1 : (x+3)^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : x^2 + (y+6)^2 = 1$.

Λύση:



Είναι $K_1(-3, 0)$, $R_1 = 2$, $K_2(0, -6)$, $R_2 = 1$

$$\delta = (K_1K_2) = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

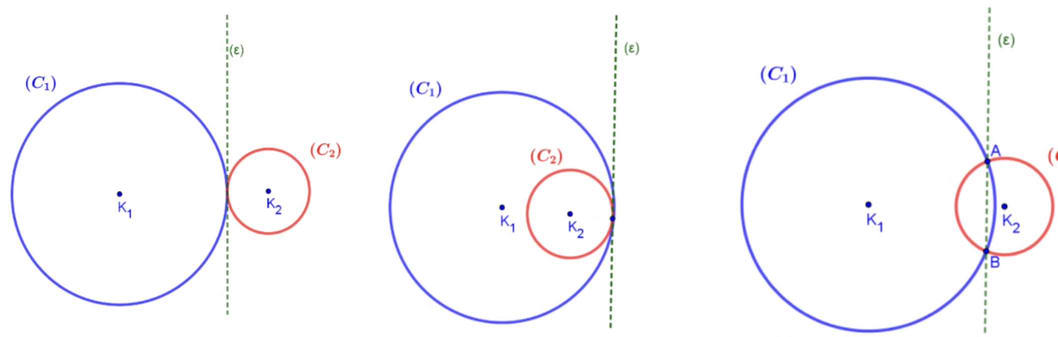
και

$$|R_1 + R_2| = 3.$$

Οπότε $\delta > |R_1 + R_2|$, οι κύκλοι είναι ξένοι εξωτερικά.

Εύρεση Εξίσωσης Κοινής Εφαπτομένης ή Χορδής των δύο Κύκλων

Μέθοδος 1



Έστω οι εξισώσεις δύο κύκλων (C_1) και (C_2):

$$\begin{cases}(C_1) : x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \\ (C_2) : x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0\end{cases} \qquad (1)$$

αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις $(C_1), (C_2)$ και παίρνουμε την γραμμική εξίσωση

$$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0, \qquad (2)$$

η οποία είναι εξίσωση ευθείας, όταν $g_1 \neq g_2$ ή $f_1 \neq f_2$ (δηλαδή όταν οι κύκλοι δεν είναι ομόκεντροι).

- Αν $(C_1), (C_2)$ Εφάπτονται $\longrightarrow$ Η (2) είναι εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.
- Αν $(C_1), (C_2)$ Τέμνονται $\longrightarrow$ Η (2) είναι εξίσωση ευθείας, η οποία είναι η κοινή χορδή.

2. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις $(C_1) : x^2 + y^2 - 8x = 0$ και $(C_2) : x^2 + y^2 - 4y = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $(C_1), (C_2)$ τέμνονται.

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.

γ. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων στα κοινά τους σημεία είναι μεταξύ τους κάθετες.

Λύση:

α. Ο κύκλος $(C_1) : x^2 + y^2 - 8x = 0$ έχει κέντρο το σημείο K_1 με συντεταγμένες $K_1(4, 0)$ και ακτίνα $R_1 = 4$ μονάδες.

Ο κύκλος $(C_2) : x^2 + y^2 - 4y = 0$ έχει κέντρο το σημείο K_2 με συντεταγμένες $K_2(0, 2)$ και ακτίνα $R_2 = 2$ μονάδες.

Το μήκος της διακέντρου είναι

$$\delta = (K_1K_2) = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ μονάδες.}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|R_1 - R_2| < \delta < R_1 + R_2.$$

Επομένως, οι κύκλοι $(C_1), (C_2)$ τέμνονται.

β. Για τα κοινά σημεία των δύο κύκλων, λύουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων των κύκλων:

$$\begin{cases} (C_1) : x^2 + y^2 - 8x = 0 \\ (C_2) : x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη:

$$-8x + 4y = 0 \;\Rightarrow\; y = 2x \;\Rightarrow\; x^2 + (2x)^2 - 8x = 0$$

$$5x^2 - 8x = 0 \;\Rightarrow\; x(5x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{8}{5}$$

Για $x_1 = 0$ έχουμε $y_1 = 0$.
Για $x_2 = \frac{8}{5}$ έχουμε $y_2 = \frac{16}{5}$.

Επομένως, τα κοινά σημεία των δύο κύκλων είναι

$$O(0, 0) \quad \text{και} \quad A\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right).$$

γ. Στο σημείο $O(0, 0)$ η εφαπτόμενη του κύκλου $(C_1) : x^2 + y^2 - 8x = 0$ είναι ο άξονας $x = 0$, και η εφαπτόμενη του κύκλου $(C_2) : x^2 + y^2 - 4y = 0$ είναι ο άξονας $y = 0$. Προφανώς, οι ευθείες $x = 0$ και $y = 0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Στο σημείο $A\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ η εφαπτόμενη έχει κλίση

$$\lambda_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{8}{5},\, y=\frac{16}{5}}.$$

Έχουμε για τον κύκλο (C_1):

$$x^2 + y^2 - 8x = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x+4}{y} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-\frac{8}{5}+4}{\frac{16}{5}} = \frac{3}{4}.$$

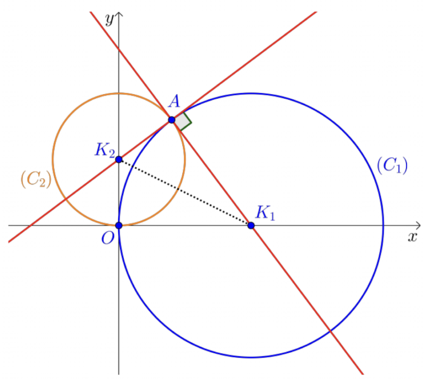
Για τον κύκλο (C_2):

$$x^2+y^2-4y=0 \Rightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}-4\frac{dy}{dx}=0$$

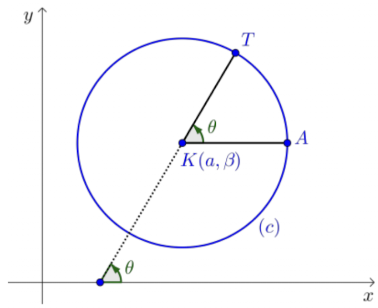
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y-2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-\frac{8}{5}}{\frac{16}{5}-2} = -\frac{4}{3}.$$

Αφού στο σημείο A η εφαπτόμενη του κύκλου (C_1) έχει κλίση $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ και η εφαπτόμενη του κύκλου (C_2) έχει κλίση $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$, τότε οι δύο εφαπτόμενες είναι κάθετες, γιατί:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = -1.$$



Παραμετρικές Εξισώσεις Κύκλου



Οι εξισώσεις

$$x = a + R\text{συν}\theta$$

$$y = \beta + R\text{ημ}\theta,$$

με $\theta \in [0, 2\pi)$ είναι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου

$$(C) : (x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

1. Να γράψετε παραμετρικές εξισώσεις για τον κύκλο με εξίσωση:

$$(C) : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$

Λύση:

Το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ είναι το σημείο $K(-g, -f)$ και η $R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου (C) είναι το σημείο $K(3, -4)$ και

$$R = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 - 9} = 4$$

μονάδες, αντίστοιχα.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου με κέντρο το $K(a, \beta)$ και ακτίνα R είναι οι $x = a + R\text{συν}\theta$, $y = \beta + R\text{ημ}\theta$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.
Επομένως, οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου (C) είναι οι:

$$x = 3 + 4\,\text{συν}\theta$$

$$y = -4 + 4\,\text{ημ}\theta,$$

όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

2. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος (C) με παραμετρικές εξισώσεις $x = 3+5\,\text{συν}\theta$ και $y = -4+5\,\text{ημ}\theta$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Η $(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου (C) είναι η

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25.$$

Παρατηρούμε ότι $(0-3)^2 + (0+4)^2 = 25$.

Συνεπώς, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C) : x^2 + y^2 = R^2$ και το σημείο του $T(R\text{συν}\theta, R\text{ημ}\theta)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο T τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο A και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B.
α. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου στο σημείο του T είναι:

$$(\varepsilon) : x\text{συν}\theta + y\text{ημ}\theta = R$$

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης, στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του AB είναι:

$$4x^2y^2 = R^2(x^2+y^2)$$

Λύση:

α. Η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ της πεπλεγμένης συνάρτησης $x^2 + y^2 = R^2$ είναι:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Συνεπώς, η κλίση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου $x^2+y^2 = R^2$ στο σημείο του $T(R\text{συν}\theta, R\text{ημ}\theta)$ είναι:

$$\lambda_{(\varepsilon)} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_T = -\frac{R\text{συν}\theta}{R\text{ημ}\theta} = -\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$(\varepsilon) : y - R\text{ημ}\theta = -\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}\,(x - R\text{συν}\theta)$$

$$\Rightarrow \; y\,\text{ημ}\theta - R\text{ημ}^2\theta = -x\,\text{συν}\theta + R\text{συν}^2\theta$$

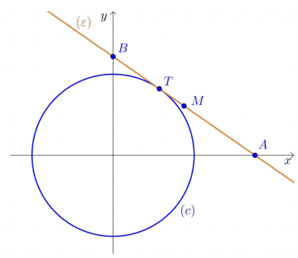
$$\Rightarrow \; x\,\text{συν}\theta + y\,\text{ημ}\theta = R(\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta) = R$$

β. Το σημείο A είναι το σημείο τομής του άξονα των τετμημένων και της ευθείας (ε). Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου A είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x\text{συν}\theta + y\text{ημ}\theta = R \end{cases}$$

Άρα:

$$y_A = 0, \qquad x_A = \frac{R}{\text{συν}\theta}$$



Το σημείο B είναι το σημείο τομής του άξονα των τεταγμένων και της ευθείας (ε). Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου B είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x\text{συν}\theta + y\text{ημ}\theta = R \end{cases}$$

Άρα:

$$x_B = 0, \qquad y_B = \frac{R}{\text{ημ}\theta}$$

Οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{R}{2\,\text{συν}\theta}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{R}{2\,\text{ημ}\theta}$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις, έχουμε ότι:

$$\text{συν}\theta = \frac{R}{2x_M} \quad \text{και} \quad \text{ημ}\theta = \frac{R}{2y_M}$$

Γνωρίζουμε ότι $\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\left(\frac{R}{2y_M}\right)^2 + \left(\frac{R}{2x_M}\right)^2 = 1 \Rightarrow R^2x_M^2 + R^2y_M^2 = 4x_M^2y_M^2$$

Έχουμε αποδείξει ότι οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν την πιο πάνω εξίσωση. Επομένως, η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του AB είναι:

$$4x^2y^2 = R^2(x^2 + y^2)$$