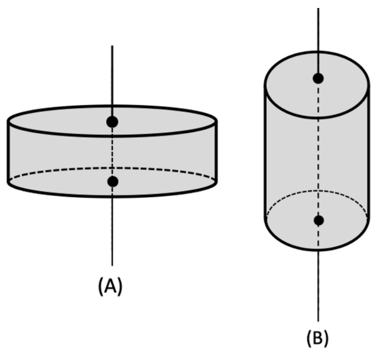
Πετρίδης Κωνσταντίνος
Μηχανική Στερεού Σώματος ΙΙ

1. Οι δύο ομογενείς κύλινδροι A και B του σχήματος έχουν την ίδια μάζα $m = 10\,\mathrm{kg}$ και ο κύλινδρος A έχει διπλάσια ακτίνα από τον B. Οι κύλινδροι περιστρέφονται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους έτσι ώστε ο κύλινδρος A να έχει διπλάσια γωνιακή ταχύτητα από τον κύλινδρο B.



i. Ποιος από τους δύο κυλίνδρους έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας;

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι δύο κύλινδροι έχουν ίσες στροφορμές αλλά η κινητική ενέργεια του A είναι διπλάσια από την κινητική ενέργεια του B. Είναι σωστοί οι ισχυρισμοί του και γιατί;

Δίνεται: Η ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως προς άξονα περιστροφής που ταυτίζεται με τον άξονά του:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Λύση:

i.
$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\frac{1}{2}m_A R_A^2}{\frac{1}{2}m_B R_B^2} = \frac{m\,(2R_B)^2}{m\,R_B^2} = \frac{4R_B^2}{R_B^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad I_A = 4I_B$$

Άρα η ροπή αδράνειας του A είναι μεγαλύτερη.

ii.
$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{I_A \cdot \omega_A}{I_B \cdot \omega_B} = \frac{4I_B \cdot 2\omega_B}{I_B \cdot \omega_B} = 8 \quad \Rightarrow \quad L_A = 8L_B$$

Επομένως ο ισχυρισμός του μαθητή ότι οι στροφορμές είναι ίσες είναι λανθασμένος.

Επίσης, αφού $K = \frac{1}{2}I\omega^2$,

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2}(4I_B)(2\omega_B)^2}{\frac{1}{2}I_B\omega_B^2} = \frac{4I_B \cdot 4\omega_B^2}{I_B\omega_B^2} = 16$$

Επομένως ο δεύτερος ισχυρισμός του μαθητή είναι επίσης λανθασμένος.

2. Να διατυπώσετε τους πιο κάτω ορισμούς.

i. Ροπή αδράνειας στερεού ως προς δεδομένο άξονα $z'z$.

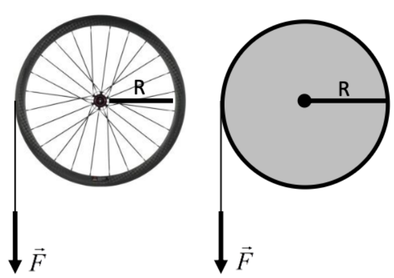
ii. Γενικευμένος δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση.

Λύση:

i. Είναι το μονόμετρο μέγεθος το μέτρο του οποίου δίνεται από το άθροισμα του γινομένου των μαζών των υλικών σημείων επί το γινόμενο των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής στο τετράγωνο.

ii. Η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής.

3. Ο τροχός και ο ομογενής δίσκος του διπλανού σχήματος έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες και είναι αρχικά ακίνητοι.



i. Αν ασκηθεί η ίδια εφαπτομενική δύναμη στα δύο σώματα, ποιο από τα δύο σώματα θα αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Αν η δύναμη του προηγούμενου ερωτήματος ασκηθεί στα δύο σώματα για τον ίδιο χρόνο t, ποιο από τα δύο σώματα θα αποκτήσει μεγαλύτερη στροφορμή και γιατί;

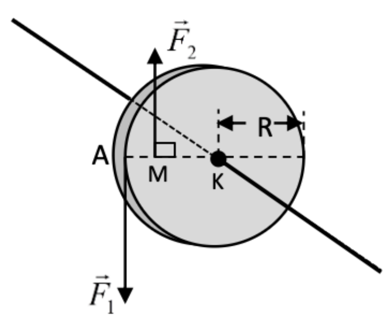
Λύση:

i. Αφού ασκείται η ίδια εφαπτομενική δύναμη, η ροπή που ασκείται στα δύο σώματα είναι η ίδια. Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι μικρότερη, επειδή η μάζα του κατανέμεται πιο κοντά στον άξονα. Επομένως η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι μεγαλύτερη:

$$\vec{a}_\gamma = \frac{\sum \vec{M}}{I}$$

ii. Από τον γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η συνισταμένη ροπή είναι ίδια και στα δύο σώματα. Άρα και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι ο ίδιος. Επομένως, για τον ίδιο χρόνο t, η μεταβολή της στροφορμής είναι ίδια και τα δύο σώματα αποκτούν ίση τελική στροφορμή.

4. Ένας ομογενής δίσκος μάζας $m = 0{,}75\,\mathrm{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$ που αρχικά είναι ακίνητος, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο δίσκο. Στο δίσκο ασκούνται δύο δυνάμεις μέτρου $|\vec{F}_1| = 6{,}28\,\mathrm{N}$ και $|\vec{F}_2| = 3{,}14\,\mathrm{N}$, κάθετες στην ίδια ακτίνα KA, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται εφαπτομενικά στο δίσκο ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ κάθετα στο μέσο της ακτίνας.



i. Αν μετά από 20 πλήρεις περιστροφές σταματά να επιδρά η δύναμη $\vec{F}_1$, να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

ii. Ακολούθως ο δίσκος περιστρέφεται μόνο υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}_2$. Να υπολογίσετε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και να βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται για να σταματήσει να περιστρέφεται ο δίσκος.

Δίνεται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου $I = \dfrac{1}{2}mR^2$.

Λύση:

i. Μετά από 20 στροφές ο δίσκος θα έχει διαγράψει γωνιακή μετατόπιση

$$\Delta\theta = \kappa \cdot 2\pi \Rightarrow \Delta\theta = 20 \cdot 2\pi = 40\pi\,\mathrm{rad}.$$

Από τον γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\sum \vec{M} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow |\vec{F}_1|R - |\vec{F}_2|\frac{R}{2} = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{2|\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|}{mR}.$$

Άρα

$$a_\gamma = \frac{2 \cdot 6{,}28\,\mathrm{N} - 3{,}14\,\mathrm{N}}{0{,}75\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m}} = 62{,}8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Από τη σχέση

$$|\omega|^2 = 2\,|a_\gamma|\,|\Delta\theta| \Rightarrow |\omega| = \sqrt{2 \cdot 62{,}8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \cdot 40\pi\,\mathrm{rad}} = 125{,}6\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

ii. Πρώτα υπολογίζουμε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση. Τώρα μόνο η $\vec{F}_2$ δρα στο δίσκο, οπότε:

$$\sum \vec{M} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow -|\vec{F}_2|\frac{R}{2} = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = -\frac{|\vec{F}_2|}{mR}.$$

Άρα

$$a_\gamma = -\frac{3{,}14\,\mathrm{N}}{0{,}75\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m}} = -20{,}9\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Η αρχική γωνιακή ταχύτητα στη φάση αυτή είναι $\omega_0 = 125{,}6\,\mathrm{rad/s}$. Από τη σχέση

$$\omega = \omega_0 + a_\gamma t \Rightarrow 0 = 125{,}6 + (-20{,}9)t \Rightarrow t = \frac{-\omega_0}{a_\gamma} = \frac{-125{,}6\,\mathrm{rad/s}}{-20{,}9\,\mathrm{rad/s}^2} = 6{,}01\,\mathrm{s}.$$

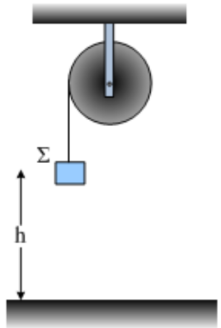
5. Να διατυπώσετε την Αρχή Διατήρηση της Στροφορμής για ένα σύστημα σωμάτων.

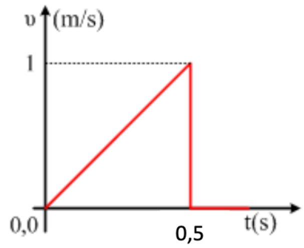
Λύση:

Όταν η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι ίση με μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{0} \implies \Delta\vec{L_f} = \Delta\vec{L_i}$$

6. Γύρω από μια τροχαλία ακτίνας $R = 0{,}2\,\mathrm{m}$ και μάζας $M = 10\,\mathrm{kg}$ έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα Σ, το οποίο συγκρατούμε σε ύψος h από το έδαφος, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή αφήνουμε το σώμα Σ μάζας $m = 1\,\mathrm{kg}$ να πέσει και παίρνουμε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σε συνάρτηση με το χρόνο, η μορφή της οποίας φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.





i. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

ii. Στη περίπτωση που στη θέση της τροχαλίας τοποθετήσουμε τροχό ίδιας μάζας και ακτίνας, η γραφική παράσταση της ταχύτητας θα είναι η ίδια, δηλαδή στο ίδιο χρόνο η ταχύτητα θα είναι και πάλι $1\,\mathrm{m/s}$; Δικαιολογήστε.

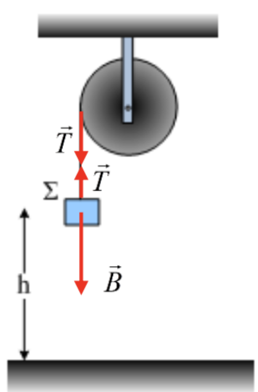
iii. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

Λύση:

i. Από την κλίση της γραφικής παράστασης υπολογίζουμε την επιτάχυνση του σώματος:

$$a = \text{κλίση} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1-0}{(0{,}5-0{,}0)\,\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Αρχικά τοποθετούμε τις δυνάμεις πάνω στα σώματα και εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα τόσο για το σώμα όσο και για την τροχαλία.



Τροχαλία

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi.} = 0 \Rightarrow |\vec{T}|R = I\,a_{\gamma} \Rightarrow |\vec{T}|R = I\,\frac{a}{R} \Rightarrow I = \frac{|\vec{T}|R^2}{a} \tag{1}$$

Σώμα

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi.} = m\vec{a} \Rightarrow |\vec{B}| - |\vec{T}| = ma \Rightarrow mg - ma = |\vec{T}| \Rightarrow |\vec{T}| = 1\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 1\,\mathrm{kg}\cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7{,}81\,\mathrm{N}.$$

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας:

$$I = \frac{|\vec{T}|R^2}{a} = \frac{7{,}81\,\mathrm{N}\cdot(0{,}2\,\mathrm{m})^2}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}156\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}.$$

ii. Επειδή η ροπή της δύναμης που προκαλεί την περιστροφή τόσο της τροχαλίας όσο και του τροχού είναι η ίδια, η γωνιακή επιτάχυνση αυτών των δύο εξαρτάται από τη ροπή αδράνειάς τους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο τροχός έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, με αποτέλεσμα να αποκτά μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση και κατ' επέκταση μικρότερη γραμμική επιτάχυνση το σώμα. Επομένως η κλίση της γραφικής παράστασης θα πρέπει να είναι μικρότερη και, συνεπώς, στο ίδιο χρονικό διάστημα η ταχύτητα θα είναι μικρότερη.

iii. Η κινητική ενέργεια του συστήματος (τροχαλία + σώμα) είναι

$$E_{K,\sigma\upsilon\sigma\tau.} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2.$$

Επειδή $\upsilon = \omega R$, παίρνουμε

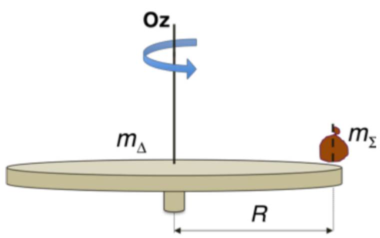
$$E_{K,\sigma\upsilon\sigma\tau.} = \frac{1}{2}I\frac{\upsilon^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2.$$

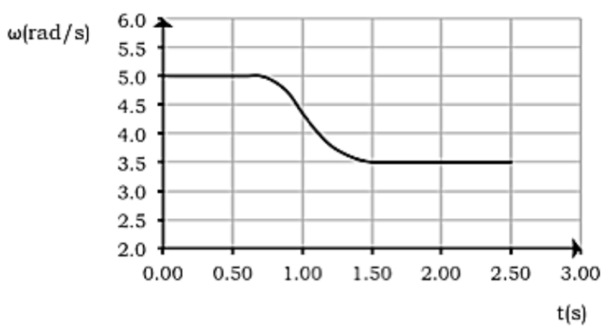
Για $I = 0{,}156\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$, $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$ και $\upsilon = 1\,\mathrm{m/s}$,

$$E_{K,\sigma\upsilon\sigma\tau.} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}156\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\cdot\frac{(1\,\mathrm{m/s})^2}{(0{,}20\,\mathrm{m})^2} + \frac{1}{2}\cdot 1\,\mathrm{kg}\cdot(1\,\mathrm{m/s})^2 = 2{,}45\,\mathrm{J}.$$

7. Ένας μαθητής διερευνά την Αρχή της Διατήρησης της Στροφορμής με τη βοήθεια ενός δίσκου μάζας $m_\Delta = 0{,}500\,\mathrm{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Ο δίσκος είναι οριζόντιος και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα Oz, που διέρχεται από το κέντρο του. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}00\,\mathrm{s}$ ο μαθητής θέτει τον δίσκο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\text{αρχ}} = 5{,}0\,\mathrm{rad/s}$ και κατόπιν τον αφήνει ελεύθερο. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου απεικονίζεται σαν συνάρτηση του χρόνου στην πιο κάτω γραφική παράσταση.

$$I_{\text{δίσκου}} = \frac{1}{2}MR^2$$





i. Να εξηγήσετε εάν ο δίσκος υφίσταται τριβή από τον άξονα περιστροφής στο χρονικό διάστημα $0{,}00\,\mathrm{s} - 0{,}75\,\mathrm{s}$.

ii. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}75\,\mathrm{s}$ ο μαθητής τοποθετεί πάνω στον δίσκο έναν σάκο μάζας m_Σ με άμμο. Ο σάκος αρχίζει να περιστρέφεται από ηρεμία και τη χρονική στιγμή $t = 1{,}50\,\mathrm{s}$ αποκτά την ίδια τελική γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\text{τελ}} = 3{,}5\,\mathrm{rad/s}$ με τον δίσκο.

Στο χρονικό διάστημα $1{,}50 - 2{,}50\,\mathrm{s}$ ο δίσκος και ο σάκος περιστρέφονται με σταθερή κοινή γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\text{τελ}} = 3{,}5\,\mathrm{rad/s}$. Να εξηγήσετε γιατί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ελαττώνεται όταν τοποθετείται ο σάκος.

iii. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή που ασκείται στο δίσκο κατά την τοποθέτηση του σάκου από άμμο.

iv. Να υπολογίσετε τη μάζα του σάκου.

Λύση:

i. Δεν υφίσταται τριβή, αφού από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή.

ii. Η στροφορμή διατηρείται αφού η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Επομένως δεν προκαλούν ροπή.

Αρχικά έχουμε τη στροφορμή μόνο του δίσκου, ενώ τελικά αποκτούν στροφορμή τόσο ο δίσκος όσο και ο σάκος.

Για να παραμείνει η συνολική στροφορμή σταθερή, πρέπει να μειωθεί η στροφορμή του δίσκου. Αφού η ροπή αδράνειας του δίσκου παραμένει σταθερή, η μείωση της στροφορμής του σημαίνει ότι μειώνεται η γωνιακή του ταχύτητα.

iii. Αρχικά υπολογίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση από την κλίση της γραφικής παράστασης:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(3{,}50 - 5{,}00)\,\mathrm{rad/s}}{(1{,}50 - 0{,}75)\,\mathrm{s}} = \frac{-1{,}50}{0{,}75} = -2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ακολούθως υπολογίζουμε τη μέση ροπή:

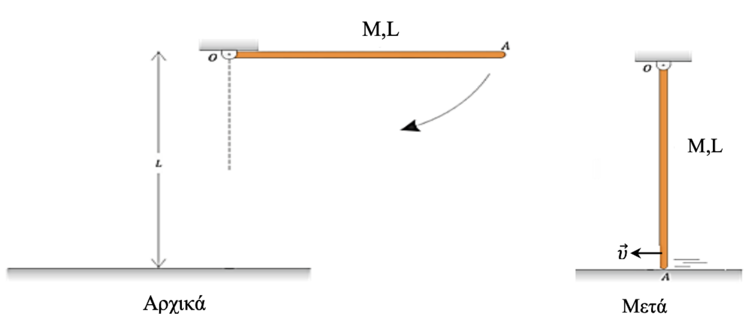
$$\bar{M}_\gamma = I\alpha_\gamma \Rightarrow \bar{M}_\gamma = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_\gamma = \frac{1}{2} \cdot 0{,}500\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}20\,\mathrm{m})^2 \cdot (-2\,\mathrm{rad/s}^2) = -0{,}02\,\mathrm{N{\cdot}m}.$$

iv. Ισχύει η διατήρηση της στροφορμής. Οπότε:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_\tau \Rightarrow I_\delta\,\omega_0 = \left(I_\delta + mR^2\right)\omega_\tau \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2(\omega_0 - \omega_\tau) = mR^2\omega_\tau \Rightarrow m = \frac{\frac{1}{2}M(\omega_0 - \omega_\tau)}{\omega_\tau}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}500\,\mathrm{kg} \cdot (5{,}00 - 3{,}50)\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{3{,}50\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} = 0{,}107\,\mathrm{kg}$$

8. Μία ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους $L = 0{,}306\,\mathrm{m}$ μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το σημείο O στο ένα άκρο της. Η ράβδος αρχικά συγκρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στην εικόνα. Όταν η ράβδος αφεθεί, αρχίζει να περιστρέφεται και τη στιγμή που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση το άκρο της A έχει γραμμική ταχύτητα υ_0.



i. Να εξηγήσετε αν διατηρείται η στροφορμή της ράβδου κατά την πτώση της.

ii. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου τη στιγμή που αυτή βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. Δίνεται: $I_{\text{ράβδου}} = \frac{1}{3}ML^2$

Λύση:

i. Η στροφορμή της ράβδου δεν διατηρείται αφού η ροπή του βάρους δεν είναι μηδέν.

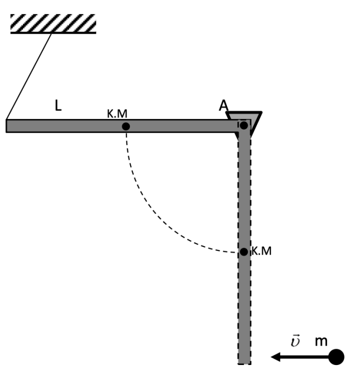
ii. Θεωρούμε σημείο αναφοράς το έδαφος για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

$$E_{M(0)} = E_{M(\tau)} \Rightarrow mgL = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{L}{2}$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}81}{0{,}306}} = 9{,}81\,\mathrm{rad/s}$$

9. Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους $L = 1{,}2\,\mathrm{m}$ και μάζας $M = 2{,}1\,\mathrm{kg}$ μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα γύρω από την άρθρωση A χωρίς τριβές. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια νήματος, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται.



i. Τη στιγμή που μόλις κόπηκε το νήμα να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ράβδο.

ii. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή γίνεται κατακόρυφη.

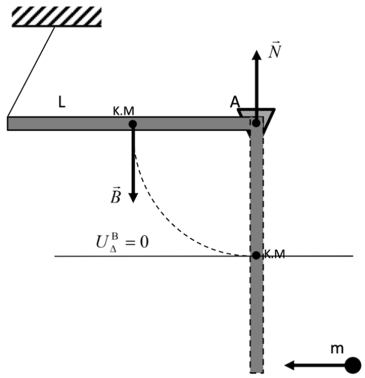
iii. Τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη τότε ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας $m = 0{,}15\,\mathrm{kg}$ που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ κτυπάει πάνω στη ράβδο, κολλάει σε αυτή και την ακινητοποιεί. Να βρείτε το μέτρο αυτής της ταχύτητας.

iv. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή που ασκείται στη ράβδο αν αυτή ακινητοποιείται σε χρόνο $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$.

Δίνεται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα στο ένα άκρο της $I = \dfrac{1}{3}mL^2$.

Λύση:

i. Τη στιγμή που κόβεται το νήμα στη ράβδο ασκούνται: η δύναμη του βάρους της $\vec{B}$ από το κέντρο μάζας της και η δύναμη της άρθρωσης $\vec{N}$ στο σημείο A.



ii. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη ράβδο. Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση του κέντρου μάζας όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη.

$$E_{M(\text{αρχ})} = E_{M(\text{τελ})} \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1{,}2\,\mathrm{m}}} = 4{,}95\,\mathrm{rad/s}$$

iii. Η στροφορμή στο σύστημά μας διατηρείται, επειδή η κρούση με την πλαστελίνη είναι ακαριαία και οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων στο μικρό αυτό χρονικό διάστημα μπορούν να θεωρηθούν μηδενικές. Εφαρμόζουμε, λοιπόν, την αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής στο A.

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow I_\rho|\vec{\omega}| = m|\vec{v}|L \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{I_\rho|\vec{\omega}|}{mL} = \frac{\frac{1}{3}ML^2\,|\vec{\omega}|}{mL} = \frac{ML|\vec{\omega}|}{3m}$$

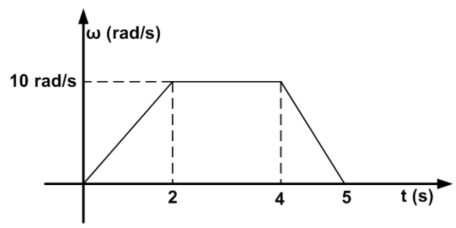
$$|\vec{v}| = \frac{2{,}1\,\mathrm{kg}\cdot 1{,}2\,\mathrm{m}\cdot 4{,}95\,\mathrm{rad/s}}{3\cdot 0{,}15\,\mathrm{kg}} = 27{,}7\,\mathrm{m/s}$$

iv. Από τον γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\sum \vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \frac{\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{L}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{0 - I_\rho|\vec{\omega}|}{\Delta t} = -\frac{I_\rho|\vec{\omega}|}{\Delta t}$$

$$\sum M = -\frac{\frac{1}{3}ML^2 \cdot 4{,}95\,\mathrm{rad/s}}{0{,}01\,\mathrm{s}} = -499\,\mathrm{N{\cdot}m}$$

10. Στο σχήμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ενός δίσκου που εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Δίνεται ακτίνα δίσκου $r = 0{,}5\,\mathrm{m}$.



i. Να βρεθούν οι γωνιακές επιταχύνσεις που έχει το κινητό σε κάθε κίνηση.

ii. Να γίνει το διάγραμμα επιτάχυνσης–χρόνου για όλη την κίνηση.

iii. Να βρεθεί η συνολική γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος.

iv. Ένα σημείο A απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση $r = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα του A τη χρονική στιγμή $t = 1\,\mathrm{s}$ καθώς και τη χρονική στιγμή $t = 4{,}5\,\mathrm{s}$.

Λύση:

i. Από τη σχέση

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$$

υπολογίζουμε την κλίση της καμπύλης στο διάγραμμα $\omega - t$:

- για το χρονικό διάστημα $0 - 2\,\mathrm{s}$:

$$a_\gamma = \frac{10 - 0}{2 - 0} = 5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

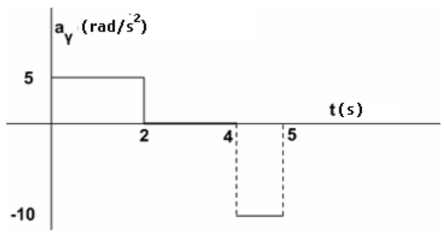
- για το χρονικό διάστημα $2 - 4\,\mathrm{s}$:

$$a_\gamma = \frac{10 - 10}{4 - 2} = 0\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

- για το χρονικό διάστημα $4-5\,\mathrm{s}$:

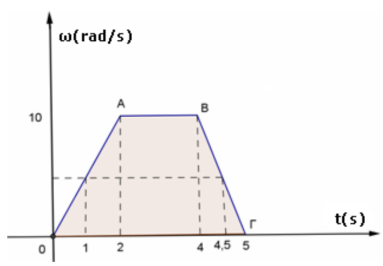
$$a_\gamma = \frac{0-10}{5-4} = -10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

ii. Το ζητούμενο διάγραμμα επιτάχυνσης–χρόνου φαίνεται παρακάτω (στις επιμέρους κινήσεις η γωνιακή επιτάχυνση a_γ είναι σταθερή):



iii. Η συνολική γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος δίνεται από το εμβαδόν της περιοχής $(OAB\Gamma O)$ στο διάγραμμα $\omega - t$. Το σχήμα είναι τραπέζιο:

$$\theta = \frac{1}{2}(5+2)\cdot 10 \Rightarrow \theta = 35\,\mathrm{rad}$$



iv. Η ταχύτητα του A δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \omega r$$

Στιγμή $t = 1\,\mathrm{s}$: Για το διάστημα $0-2\,\mathrm{s}$:

$$a_\gamma = 5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \omega = a_\gamma t = 5\,\mathrm{rad/s}$$

Άρα:

$$\upsilon = \omega r = 5\cdot 0{,}2 = 1\,\mathrm{m/s}$$

Στιγμή $t = 4{,}5\,\mathrm{s}$: Για το διάστημα $4 - 5\,\mathrm{s}$ ισχύει:

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} = -10 \Rightarrow -10 = \frac{\omega - 10}{4{,}5 - 4} \Rightarrow \omega = 5\,\mathrm{rad/s}$$

Άρα:

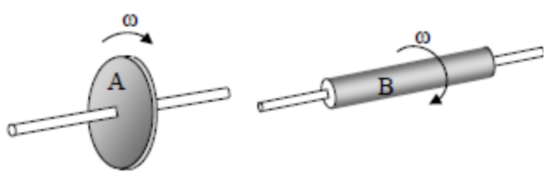
$$\upsilon = \omega r = 5 \cdot 0{,}2 = 1\,\mathrm{m/s}$$

11. Ο κύλινδρος και ο δίσκος του σχήματος, έχουν την ίδια μάζα και περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. Ποιο σώμα θα σταματήσει πιο δύσκολα;

α) Το A.

β) Το B.

γ) Και τα δύο το ίδιο.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση:

Σωστή απάντηση είναι η α.

Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού εκφράζει την αδράνεια - αντίδραση στη στροφική του κίνηση, δηλαδή πόσο δύσκολα μεταβάλλεται η στροφική του κατάσταση κίνησης.

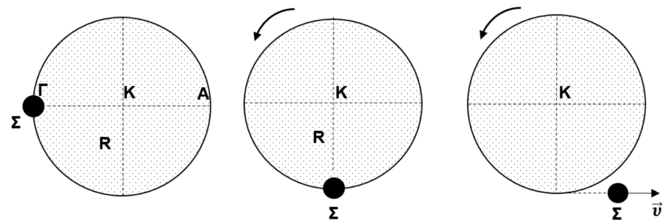
Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I = \sum mr^2,$$

όπου r είναι η απόσταση των στοιχειωδών μαζών του από τον άξονα περιστροφής.

Έτσι, η ροπή αδράνειας ενός στερεού εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα περιστροφής και συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένα είναι τα υλικά σημεία του από τον άξονα περιστροφής τόσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδράνειάς του.

12. Ο ομογενής δίσκος έχει ακτίνα $R = 0.20$ m, ροπή αδράνειας $I_\delta = 0{,}048$ kgm^2 και το επίπεδό του είναι κατακόρυφο. Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από ακλόνητο, οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του K. Στο άκρο Γ της οριζόντιας διαμέτρου $A\Gamma$ είναι στερεωμένο μικρό σώμα Σ, μάζας $m = 0{,}300\,\text{kg}$. Το σώμα Σ μπορεί να προσεγγιστεί ως υλικό σημείο της περιφέρειας του δίσκου. Το σύστημα δίσκος–σώμα Σ είναι αρχικά ακίνητο. Αν το αφήσουμε ελεύθερο, περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα που περνά από το K.



i. Να αποδείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο κατώτατο σημείο της τροχιάς του (Σχήμα 2) είναι $\omega_\delta = 4{,}4\,\text{rad/s}$.

ii. Τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο κατώτατο σημείο της τροχιάς του, εκτοξεύεται οριζόντια προς τα δεξιά (Σχήμα 3). Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ ως προς το έδαφος μετά την εκτόξευση είναι $|\vec{v}| = 3{,}6\,\text{m/s}$. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αμέσως μετά την εκτόξευση.

Λύση:

i. Θεωρούμε $h = 0$ το κατώτατο σημείο της τροχιάς του σώματος Σ.

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \quad \Rightarrow \quad mgR = \frac{1}{2}\left(I_\delta + mR^2\right)\omega_\delta^2$$

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{2mgR}{I_\delta + mR^2}}$$

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{2(0.300)(9.81)(0.20)}{0.048 + 0.300(0.20)^2}} = 4.4\,\text{rad/s}$$

ii. Στο κατώτατο σημείο ισχύει η διατήρηση της στροφορμής ως προς το σημείο K:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}}$$

$$\left(I_\delta + mR^2\right)\omega_{\text{αρχ}} = I_\delta\,\omega_{\text{τελ}} + m|\vec{v}|R$$

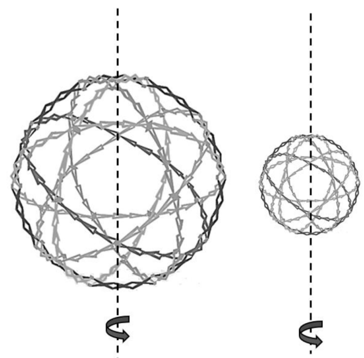
$$\omega_{\text{τελ}} = \frac{(I_\delta + mR^2)\,\omega_{\text{αρχ}} - m|\vec{v}|R}{I_\delta}$$

$$\omega_{\text{τελ}} = \frac{\left[0.048 + 0.300(0.20)^2\right](4.4) - (0.300)(3.6)(0.20)}{0.048}$$

$$\omega_{\text{τελ}} = 1.0\,\text{rad/s}$$

13. Η σφαίρα του Hoberman είναι μια γεωμετρική κατασκευή, η οποία μπορεί να αυξομειώνει τις διαστάσεις της. Η σφαίρα του Σχήματος 5.1 έχει ακτίνα $R_1 = 0{,}80\,\mathrm{m}$ και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 3{,}0\,\mathrm{rad/s}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Καθώς η σφαίρα περιστρέφεται, μειώνουμε την ακτίνα της σε R_2 ασκώντας δυνάμεις κατά μήκος του άξονα περιστροφής της.

Η σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί ως λεπτός σφαιρικός φλοιός με ροπή αδράνειας $I = \frac{2}{3}mR^2$.



i. Να εξηγήσετε γιατί διατηρείται η στροφορμή της σφαίρας.

ii. Εάν η νέα γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι $\omega_2 = 12{,}0\,\mathrm{rad/s}$, να υπολογίσετε τη νέα ακτίνα R_2.

Λύση:

i. Η στροφορμή διατηρείται διότι οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι κατά μήκος του άξονα περιστροφής της και η ροπή τους είναι μηδενική.

ii. Κατά μήκος του άξονα περιστροφής ισχύει

$$\sum M_{\text{εξωτερικών}} = 0 \;\Rightarrow\; L_{\text{αρχική}} = L_{\text{τελική}} \;\Rightarrow\; I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Επομένως:

$$\frac{2}{3}mR_1^2\omega_1 = \frac{2}{3}mR_2^2\omega_2$$

$$R_2^2 = \frac{\omega_1}{\omega_2}R_1^2 \;\Rightarrow\; R_2 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\,R_1.$$

Άρα

$$R_2 = \sqrt{\frac{3{,}0\,\mathrm{rad/s}}{12{,}0\,\mathrm{rad/s}}}\cdot 0{,}80\,\mathrm{m} = 0{,}40\,\mathrm{m}.$$