Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Κύκλος

1. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου που:

i. έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3,

ii. έχει κέντρο (-2,-2) και διάμετρο 2

iii. έχει κέντρο (1,-1) και διέρχεται από το σημείο (9,-7),

iv. έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB, A(12,4), B(6,-4).

Λύση: (Ασκ. 1/19)

i. Κέντρο $K(0,0)$, ακτίνα $R=3$. Η ειδική μορφή δίνει

$$x^2+y^2=R^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=9$$

ii. Κέντρο $K(-2,-2)$, διάμετρος $2 \Rightarrow R=1$. Άρα

$$(x+2)^2+(y+2)^2=1$$

iii. Κέντρο $K(1,-1)$. Η ακτίνα από το σημείο $(9,-7)$:

$$R^2=(9-1)^2+(-7-(-1))^2=8^2+(-6)^2=64+36=100.$$

Επομένως

$$(x-1)^2+(y+1)^2=100$$

iv. Διάμετρος AB με $A(12,4)$, $B(6,-4)$.

$$K\left(\frac{12+6}{2},\frac{4+(-4)}{2}\right)=(9,0), \qquad AB^2=(12-6)^2+(4-(-4))^2=6^2+8^2=100.$$

Άρα $R=\dfrac{AB}{2}=5$ και η εξίσωση είναι

$$(x-9)^2+y^2=25$$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο. Στην περίπτωση που παριστάνουν, να βρείτε το *κέντρο* και την *ακτίνα* του.

i. $x^2 + y^2 = 4$

ii. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36$

iii. $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$

iv. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$

Λύση: (Ασκ. 2/19)

i. Είναι η ειδική μορφή $x^2 + y^2 = R^2$. Άρα παριστάνει κύκλο με

$$K(0,0), \qquad R = 2.$$

ii. Είναι ήδη στην τυπική μορφή $(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. Επομένως

$$K(2,-1), \qquad R = 6.$$

iii. Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$x^2 - 2x + y^2 + 8y - 8 = 0 \iff (x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 - 8 = 0$$

$$\iff (x-1)^2 + (y+4)^2 = 25.$$

Άρα παριστάνει κύκλο με

$$K(1,-4), \qquad R = 5.$$

iv. Διαιρούμε με 2:

$$x^2 + y^2 - 3x + y - \tfrac{3}{2} = 0 \iff (x - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} + (y + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2} = 0$$

$$\iff (x - \tfrac{3}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2 = 4.$$

Άρα παριστάνει κύκλο με

$$K\left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right), \qquad R = 2.$$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2+y^2-6x-2y+\lambda=0$ παριστάνει κύκλο.

Λύση: (Ασκ. 3/19)

Συμπληρώνουμε τετράγωνα:

$$x^2-6x+y^2-2y+\lambda=0 \iff (x-3)^2-9+(y-1)^2-1+\lambda=0$$
$$\iff (x-3)^2+(y-1)^2=10-\lambda.$$

Για να παριστάνει κύκλο πρέπει το δεξί μέλος να είναι θετικό:

$$10-\lambda>0 \iff \lambda<10.$$

Άρα ο κύκλος υπάρχει για $\lambda<10$ και έχει

$$K(3,1), \qquad R=\sqrt{10-\lambda}.$$

Παρατήρηση: Για $\lambda=10$ παίρνουμε εκφυλισμένο "κύκλο" (σημείο) στο $(3,1)$, ενώ για $\lambda>10$ δεν υπάρχει γεωμετρικός τόπος.

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$, $B(1,-1)$ και $\Gamma(-3,-1)$.

Λύση: (Ασκ. 4/19)

Θέτουμε τη γενική μορφή $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. Επειδή τα σημεία ανήκουν στον κύκλο:

$$\begin{cases} 1+9+2g+6f+c=0 \\ 1+1+2g-2f+c=0 \\ 9+1-6g-2f+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2g+6f+c=-10 \\ 2g-2f+c=-2 \\ -6g-2f+c=-10 \end{cases}$$

Λύνοντας: $g=1,\ f=-1,\ c=-6$. Επομένως

$$x^2+y^2+2x-2y-6=0.$$

Σε κανονική μορφή:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=8,$$

άρα

$$K(-1,1), \qquad R=2\sqrt{2}.$$

5. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 3$. Να βρείτε την εξίσωση της *χορδής* του κύκλου που έχει μέσο το σημείο $M(-1, 1)$.

Λύση: (Ασκ. 5/19)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{3}$. Για χορδή με μέσο $M(x_0, y_0)$ σε κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ ισχύει

$$x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2$$

(διότι $\overrightarrow{OM} \perp$ χορδή, άρα $(x - x_0, y - y_0) \cdot (x_0, y_0) = 0$).

Για $M(-1, 1)$ έχουμε $x_0^2 + y_0^2 = 1 + 1 = 2 < 3$ (άρα πράγματι χορδή) και

$$(-1)\,x + 1 \cdot y = 2 \iff y - x = 2$$

6. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 9 = 0$. Να βρείτε το *μήκος* της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το σημείο $M(-2, -1)$.

Λύση: (Ασκ. 6/19)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y - 9 = 0 \iff (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 17.$$

Άρα $K(-2, -2)$, $R = \sqrt{17}$. Το μέσο $M(-2, -1)$ απέχει από το κέντρο

$$KM = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (-1 + 2)^2} = 1.$$

Το μήκος ℓ της χορδής με μέσο το M δίνεται από

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - KM^2} = 2\sqrt{17 - 1} = 8$$

Έλεγχος: Η χορδή είναι οριζόντια ($KM \perp$ χορδή) με $y = -1$.

Τότε $(x + 2)^2 + 1 = 17 \Rightarrow x = 2$ ή $x = -6$, άρα άκρα $(2, -1), (-6, -1)$ και μήκος 8.

7. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(3, 4)$, $(5, 0)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $x + y = 3$.

Λύση: (Ασκ. 7/19)

Έστω $K(a, b)$ το κέντρο. Αφού ο κύκλος διέρχεται από $A(3, 4)$ και $B(5, 0)$, το K ανήκει στην κάθετη μεσοκάθετο του AB.

Μέσο M του AB:
$$M\Big(\tfrac{3+5}{2},\ \tfrac{4+0}{2}\Big) = (4, 2).$$

Κλίση AB : $m_{AB} = \dfrac{0-4}{5-3} = -2 \Rightarrow$ κλίση μεσοκαθέτου $m_{\perp} = \frac{1}{2}$. Εξίσωση μεσοκαθέτου από το M:
$$y - 2 = \tfrac{1}{2}(x - 4) \implies y = \tfrac{x}{2}.$$

Επειδή το K είναι και στην $x + y = 3$, λύνοντας το σύστημα
$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1.$$

Άρα $K(2, 1)$. Η ακτίνα:
$$R^2 = KA^2 = (3-2)^2 + (4-1)^2 = 1 + 9 = 10.$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \implies x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$$

8. Δίνονται τα σημεία $A(0, 3)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(1, 0)$.

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ είναι ορθή.

ii. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ.

Λύση: (Ασκ. 8/19)

i. $\overrightarrow{AB} = (3-0,\ 4-3) = (3, 1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (1-0,\ 0-3) = (1, -3)$.
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$$

Άρα οι $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετες και η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ είναι *ορθή*.

ii. Θεωρούμε τη γενική μορφή $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. Επειδή τα τρία σημεία ανήκουν στον κύκλο:

$$\begin{cases} 0^2+3^2+0+6f+c=0 \\ 3^2+4^2+6g+8f+c=0 \\ 1^2+0^2+2g+0+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6f+c=-9 \\ 6g+8f+c=-25 \\ 2g+c=-1 \end{cases}$$

Λύνοντας, $f=-2,\ g=-2,\ c=3$. Άρα

$$x^2+y^2-4x-4y+3=0$$

ή, σε κανονική μορφή,

$$(x-2)^2+(y-2)^2=5.$$

Επομένως $K(2,2)$ και $R=\sqrt{5}$.

9. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(-2,3)$, $(-3,-4)$ και $(1,4)$.

Λύση: (Ασκ. 9/19)

Θέτουμε τη γενική μορφή $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. Επειδή τα τρία σημεία ανήκουν στον κύκλο:

$$\begin{cases} (-2)^2+3^2-4g+6f+c=0 \\ (-3)^2+(-4)^2-6g-8f+c=0 \\ 1^2+4^2+2g+8f+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4g+6f+c=-13 \\ -6g-8f+c=-25 \\ 2g+8f+c=-17 \end{cases}$$

Από το σύστημα παίρνουμε $g=-1,\ f=1,\ c=-23$. Άρα

$$x^2+y^2-2x+2y-23=0.$$

Σε κανονική μορφή:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25,$$

οπότε

$$K(1,-1), \qquad R=5.$$

10. Να βρείτε τη θέση των ευθειών

$$(\varepsilon_1) : 4x - y + 13 = 0, \qquad (\varepsilon_2) : y = 2x, \qquad (\varepsilon_3) : y = 5$$

ως προς τον κύκλο με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x - 16 = 0.$$

Λύση: (Ασκ. 1/27)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνο στην εξίσωση του κύκλου:

$$x^2 - 2x + y^2 - 16 = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 = 17.$$

Άρα το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου είναι

$$K(1,0), \qquad R = \sqrt{17}.$$

Η απόσταση του $K(1,0)$ από ευθεία $Ax + By + C = 0$ είναι

$$d = \frac{|Ax_K + By_K + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1. Για την $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$: $4x - y + 13 = 0$

$$d_1 = \frac{|4(1) - 0 + 13|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

Άρα $d_1 = R \Rightarrow$ η (ε_1) *εφάπτεται* του κύκλου.

2. Για την $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$: $y = 2x \;\Rightarrow\; 2x - y = 0$

$$d_2 = \frac{|2(1) - 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Επειδή $d_2 < R$, η (ε_2) *τέμνει* τον κύκλο.

3. Για την $(\boldsymbol{\varepsilon_3})$: $y = 5 \;\Rightarrow\; y - 5 = 0$

$$d_3 = \frac{|0 - 5|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 5.$$

Επειδή $d_3 > R$, η (ε_3) είναι *ξένη* με τον κύκλο.

11. Αν ο κύκλος
$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$
εφάπτεται στον άξονα των τετμημένων, να δείξετε ότι $g^2 - c = 0$.

Λύση: (Ασκ. 2/27)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:
$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c.$$
Άρα ο κύκλος έχει
$$K(-g, -f), \qquad R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}\,.$$

Η απόσταση του K από τον άξονα x $(y=0)$ είναι
$$d = \operatorname{dist}(K,\ y=0) = |-f| = |f|.$$

Εφόσον υπάρχει *εφαπτομένη*, ισχύει $d = R$. Υψώνοντας στο τετράγωνο:
$$f^2 = g^2 + f^2 - c \implies g^2 - c = 0.$$

Εναλλακτικά (κριτήριο διακρίνουσας): Επαφή με τον άξονα x σημαίνει ότι η εξίσωση τομής με $y = 0$
$$x^2 + 2gx + c = 0$$
έχει διπλή ρίζα. Άρα η διακρίνουσα είναι μηδέν:
$$\Delta = (2g)^2 - 4c = 0 \implies g^2 - c = 0.$$

12. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου, ο οποίος:

i. έχει κέντρο το σημείο $(1, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = 3x + 8$

ii. έχει κέντρο το σημείο $(3, 2)$ και εφάπτεται στον *άξονα των τεταγμένων*

iii. διέρχεται από το σημείο $(5, -3)$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ στο σημείο $(1, 1)$.

Λύση: (Ασκ. 3/27)

i. Κέντρο $K(1,1)$, εφαπτομένη $y = 3x + 8 \iff 3x - y + 8 = 0$. Η απόσταση του K από την ευθεία είναι

$$R = d = \frac{|3 \cdot 1 - 1 + 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10.$$

ii. Κέντρο $K(3,2)$, εφαπτομένη ο άξονας y $(x = 0)$. Άρα $R = \mathrm{dist}(K,\ x = 0) = |3| = 3$.

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

iii. Εφαπτομένη $y = x$ στο $(1,1)$. Η ακτίνα στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην $y = x$, άρα το κέντρο $K(a,b)$ ανήκει στην

$$y - 1 = -1(x-1) \iff y = -x + 2.$$

Επιπλέον ο κύκλος περνά από $(1,1)$ και $(5,-3)$, άρα

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-5)^2 + (b+3)^2.$$

Με $b = -a + 2$ γίνεται $(a-1)^2 = (a-5)^2 \Rightarrow a = 3$, οπότε $b = -1$.

$$K(3,-1), \qquad R^2 = (3-1)^2 + (-1-1)^2 = 8.$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 8.$$

13. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\lambda y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $y = x + 4$ να *εφάπτεται* στον κύκλο.

Λύση: (Ασκ. 4/27)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$x^2 + 2\lambda x + y^2 + 2\lambda y = 0 \iff (x+\lambda)^2 + (y+\lambda)^2 = 2\lambda^2.$$

Άρα

$$K(-\lambda,-\lambda), \qquad R = \sqrt{2}\,|\lambda|.$$

Η ευθεία $y = x + 4 \iff x - y + 4 = 0$. Η απόσταση του K από αυτήν είναι

$$d = \frac{|(-\lambda) - (-\lambda) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Για εφαπτομένη θέλουμε $d = R$:

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,|\lambda| \iff |\lambda| = 2 \iff \lambda = \pm 2.$$

14. Να δείξετε ότι η ευθεία

$$(x - \alpha)\,\text{ημ}(\theta) + (y - \beta)\,\text{συν}(\theta) + R = 0$$

εφάπτεται στον κύκλο

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Λύση: (Ασκ. 5/27)

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα $R > 0$. Η δοθείσα ευθεία γράφεται στη μορφή $Ax + By + C = 0$ ως

$$\text{ημ}(\theta)\,x + \text{συν}(\theta)\,y + \Big(R - \alpha\,\text{ημ}(\theta) - \beta\,\text{συν}(\theta)\Big) = 0,$$

όπου

$$A = \text{ημ}(\theta), \quad B = \text{συν}(\theta), \quad C = R - \alpha\,\text{ημ}(\theta) - \beta\,\text{συν}(\theta).$$

Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία είναι

$$d = \frac{|A\alpha + B\beta + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\alpha\,\text{ημ}(\theta) + \beta\,\text{συν}(\theta) + R - \alpha\,\text{ημ}(\theta) - \beta\,\text{συν}(\theta)|}{\sqrt{\text{ημ}^2(\theta) + \text{συν}^2(\theta)}} = \frac{|R|}{1} = R.$$

Εφόσον $d = R$, η ευθεία απέχει από το κέντρο απόσταση ίση με την ακτίνα· άρα

η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Παρατήρηση: Το διάνυσμα $(\text{ημ}(\theta), \text{συν}(\theta))$ είναι μοναδιαίο ($\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1$) και κάθετο στην εφαπτομένη· η εξίσωση $(x - \alpha)\,\text{ημ}\theta + (y - \beta)\,\text{συν}\theta = -R$ εκφράζει ότι το *κανονικό* γινόμενο με το κέντρο είναι ίσο με $-R$.

15. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι:

i. διέρχονται από το σημείο $(-4, 2)$ και εφάπτονται στους άξονες των συντεταγμένων

ii. διέρχονται από το σημείο $(2, 0)$ και εφάπτονται στις ευθείες $(\varepsilon_1) : 2x + y + 12 = 0$ και $(\varepsilon_2) : 2x + y - 8 = 0$

iii. διέρχονται από τα $A(-3, 4)$, $B(-3, -4)$ και εφάπτονται στην $(\varepsilon) : 3x + 4y - 25 = 0$

iv. εφάπτονται της ευθείας $y = 2x + 3$ στο σημείο $A(-1, 1)$ και έχουν ακτίνα $R = 2\sqrt{5}$.

Λύση: (Ασκ. 6/27)

i. Επαφή και με τους δύο άξονες $\Rightarrow$ κέντρο $K(\pm r, \pm r)$, $r > 0$. Ελέγχοντας τις περιπτώσεις, μόνο το $K(-r, r)$ δίνει λύσεις. Με $P(-4, 2)$ επάνω στον κύκλο:

$$(r-4)^2 + (2-r)^2 = r^2 \iff r^2 - 12r + 20 = 0 \implies r = 2 \text{ ή } r = 10.$$

Άρα

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4, \qquad (x+10)^2 + (y-10)^2 = 100$$

ii. Οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες· το *μεσοπαράλληλο* (γεωμετρικός τόπος ίσων αποστάσεων)

$$2x + y + \frac{12 + (-8)}{2} = 0 \implies 2x + y + 2 = 0$$

περιέχει το κέντρο $K(a, b)$. Η απόσταση από καθεμιά ευθεία είναι σταθερή και ίση με το μισό της μεταξύ τους απόστασης:

$$R = d\big(K, \varepsilon_1\big) = \frac{|(2a+b) + 12|}{\sqrt{5}} = \frac{|(-2) + 12|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Επειδή ο κύκλος περνά από $P(2, 0)$: $(a-2)^2 + b^2 = 20$ και $2a + b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2a - 2$.

$$(a-2)^2 + (-2a-2)^2 = 20 \iff 5a^2 + 4a - 12 = 0 \ \Rightarrow\ a = \frac{6}{5} \text{ ή } a = -2.$$

Άρα $K\big(\frac{6}{5}, -\frac{22}{5}\big)$ ή $K(-2, 2)$, με $R = 2\sqrt{5}$.

$$\left(x - \tfrac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \tfrac{22}{5}\right)^2 = 20, \qquad (x+2)^2 + (y-2)^2 = 20$$

iii. Τα $A(-3,4)$, $B(-3,-4)$ έχουν μέσο $(-3,0)$ και AB κατακόρυφη $\Rightarrow$ η μεσοκάθετος είναι ο άξονας x $(y=0)$.

Θέτουμε $K(a,0)$. Ακτίνα: $R=\sqrt{(a+3)^2+16}$.

Εξίσωση επαφής με (ε): $R=\dfrac{|3a-25|}{5}$.

$$\frac{(3a-25)^2}{25}=(a+3)^2+16 \iff a\,(16a+300)=0 \;\Rightarrow\; a=0 \text{ ή } a=-\frac{75}{4}.$$

Τότε

$$x^2+y^2=25, \qquad \left(x+\frac{75}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{65}{4}\right)^2$$

iv. Επαφή στο $A(-1,1)$ με $y=2x+3$. Η *κανονική* στο σημείο έχει κλίση $-\frac{1}{2}$:

$$y-1=-\tfrac{1}{2}(x+1) \iff x+2y-1=0.$$

Το κέντρο K ανήκει σε αυτήν και ικανοποιεί $(x+1)^2+(y-1)^2=20$. Με $y=\frac{1-x}{2}$:

$$(x+1)^2+\left(\frac{1-x}{2}-1\right)^2=20 \iff \frac{5}{4}(x+1)^2=20 \;\Rightarrow\; x=3 \text{ ή } x=-5.$$

Άρα $K(3,-1)$ ή $K(-5,3)$ και $R=2\sqrt{5}$.

$$(x-3)^2+(y+1)^2=20, \qquad (x+5)^2+(y-3)^2=20$$

16. Αν η ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ *τέμνει* τον κύκλο $(C): x^2+y^2=R^2$ σε δύο σημεία, να δείξετε ότι

$$\frac{\Gamma^2}{A^2+B^2}<R^2.$$

Λύση: (Ασκ. 7/27)

Το (C) έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα R. Η απόσταση του O από την (ε) είναι

$$d=\frac{|A\cdot 0+B\cdot 0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Αφού η (ε) *τέμνει* τον κύκλο σε δύο σημεία, ισχύει $d<R$. Υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$\frac{\Gamma^2}{A^2+B^2}<R^2.$$

Εναλλακτικά (μέσω διακρίνουσας): Αν $B \neq 0$, από $y = -(Ax + \Gamma)/B$ στο $x^2 + y^2 = R^2$ προκύπτει

$$\Big(1 + \frac{A^2}{B^2}\Big)x^2 + \frac{2A\Gamma}{B^2}x + \Big(\frac{\Gamma^2}{B^2} - R^2\Big) = 0.$$

Για δύο σημεία τομής θέλουμε $\Delta > 0$, όπου

$$\Delta = \frac{4}{B^2}\Big[(A^2 + B^2)R^2 - \Gamma^2\Big] > 0 \iff \frac{\Gamma^2}{A^2 + B^2} < R^2.$$

(Η περίπτωση $B = 0$ είναι ανάλογη, λύνοντας ως προς x.)

17. Να χαρακτηρίσετε *ΣΩΣΤΟ* ή *ΛΑΘΟΣ* την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Κάθε εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ σε σημείο του διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Η κλίση της κάθετης του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ στο σημείο $(0, R)$ δεν ορίζεται.

Λύση: (Ασκ. 1/33)

i. Λάθος. Η εφαπτομένη του $x^2 + y^2 = R^2$ στο (x_1, y_1) γράφεται

$$x\,x_1 + y\,y_1 = R^2.$$

Αν περνούσε από την αρχή $O(0, 0)$, τότε θα ίσχυε $0 = R^2$, άτοπο για $R > 0$. (Π.χ. στο $(R, 0)$ η εφαπτομένη είναι $x = R$, που δεν περνά από το O.)

ii. Σωστό. Η κάθετη (νορμάλ) στο $(0, R)$ είναι η ακτίνα $O(0, 0)$–$(0, R)$, δηλαδή η κατακόρυφη ευθεία $x = 0$. Η κλίση κατακόρυφης ευθείας *δεν ορίζεται.*

18. Να βρείτε την *εξίσωση* της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του $A(-1, 2)$.

Λύση: (Ασκ. 2/33)

Για κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ η εφαπτομένη στο (x_1, y_1) δίνεται από

$$x\,x_1 + y\,y_1 = R^2.$$

Με $R^2 = 5$, $x_1 = -1$, $y_1 = 2$:

$$(-1)\,x + 2y = 5 \iff -x + 2y = 5$$

(ισοδύναμα $x - 2y + 5 = 0$).

19. Να βρείτε την *εξίσωση* της εφαπτομένης και της κάθετης του κύκλου

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$$

στο σημείο του $A(0, 5)$.

Λύση: (Ασκ. 3/33)

Γράφουμε τον κύκλο στη μορφή $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ με

$$g = 2, \quad f = -3, \quad c = 5, \qquad K(-g, -f) = (-2, 3).$$

Επαλήθευση: $A(0, 5)$ ανήκει στον κύκλο, αφού $0 + 25 + 0 - 30 + 5 = 0$.

i. Εφαπτομένη στο A. Χρησιμοποιούμε τον τύπο εφαπτομένης για γενικό κύκλο:

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

Με $x_1 = 0,\ y_1 = 5$ παίρνουμε

$$0 \cdot x + 5y + 2(x + 0) - 3(y + 5) + 5 = 0 \iff 2x + 2y - 10 = 0 \iff x + y - 5 = 0$$

ii. Κάθετη, (normal) στο A. Είναι η ακτίνα KA. Η κλίση

$$m_{KA} = \frac{5 - 3}{0 - (-2)} = 1,$$

άρα από το $A(0, 5)$:

$$y - 5 = 1(x - 0) \iff y = x + 5$$

($x + y - 5 = 0$ έχει κλίση -1, οπότε είναι κάθετη στη $y = x + 5$.)

20. Να βρείτε την *εξίσωση* της εφαπτομένης του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$$

στο σημείο του $A(0, 1)$.

Λύση: (Ασκ. 4/33)

Ο κύκλος είναι της μορφής $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ με

$$g = -4, \quad f = -3, \quad c = 5.$$

Ελέγχουμε ότι $A(0, 1)$ ανήκει στον κύκλο: $0 + 1 - 0 - 6 + 5 = 0$

Ο τύπος της εφαπτομένης σε σημείο (x_1, y_1) του κύκλου $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ είναι

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

Με $x_1 = 0,\ y_1 = 1$ παίρνουμε

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - 4(x + 0) - 3(y + 1) + 5 = 0 \iff -4x - 2y + 2 = 0 \iff 2x + y - 1 = 0$$

21. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

που είναι *παράλληλες* με την ευθεία $x + 2y - 3 = 0$.

Λύση: (Ασκ. 5/33)

Ο κύκλος έχει $g = -3,\ f = -1,\ c = 5 \Rightarrow K(3,1)$ και

$$R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9 + 1 - 5} = \sqrt{5}.$$

Οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι της μορφής $x + 2y + t = 0$ (παράλληλες στο $x + 2y - 3 = 0$). Η απόσταση του $K(3,1)$ από αυτήν είναι

$$d = \frac{|3 + 2 + t|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + t|}{\sqrt{5}}.$$

Για να είναι εφαπτομένη: $d = R = \sqrt{5} \Rightarrow |5 + t| = 5 \Rightarrow t = 0$ ή $t = -10$. Άρα οι εφαπτόμενες είναι

$$x + 2y = 0 \qquad \text{και} \qquad x + 2y - 10 = 0$$

Σημεία επαφής (έλεγχος): Με $x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$ δίνει $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow A(2,-1)$.

Με $x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow y = 5 - \frac{x}{2}$ δίνει $(x-8)^2 = 0 \Rightarrow B(8,1)$.

22. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y = 0$$

που είναι *κάθετες* στην ευθεία $(\varepsilon) : x - 5y + 10 = 0$.

Λύση: (Ασκ. 6/33)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 26 \quad \Rightarrow \quad K(5,-1),\ R = \sqrt{26}.$$

Οι κάθετες στην $x - 5y + 10 = 0$ έχουν κλίση -5: $y = -5x + \lambda \Leftrightarrow 5x + y - \lambda = 0$. Απόσταση του K από τη γραμμή ίση με R:

$$\frac{|5 \cdot 5 + (-1) - \lambda|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|24 - \lambda|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \ \Rightarrow\ |24 - \lambda| = 26.$$

Άρα $\lambda = -2$ ή $\lambda = 50$ και οι εφαπτόμενες είναι

$$5x + y + 2 = 0 \qquad \text{και} \qquad 5x + y - 50 = 0$$

23. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου

$$(C): \ x^2 + y^2 = 10$$

που άγονται προς αυτόν από το σημείο $A(-4, -2)$.

Λύση: (Ασκ. 1/39)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{10}$. Η γενική εξίσωση εφαπτομένης του $x^2 + y^2 = R^2$ στο σημείο (x_1, y_1) του κύκλου είναι

$$x\,x_1 + y\,y_1 = R^2.$$

Επειδή η εφαπτομένη περνά από το $A(-4, -2)$, έχουμε:

$$(-4)x_1 + (-2)y_1 = 10 \iff 2x_1 + y_1 = -5.$$

Επιπλέον, το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στον κύκλο $x_1^2 + y_1^2 = 10$.

Από το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = -5 \\ x_1^2 + y_1^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -5 - 2x_1 \Rightarrow x_1^2 + (-5 - 2x_1)^2 = 10$$

$$\iff 5x_1^2 + 20x_1 + 15 = 0 \iff x_1^2 + 4x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ή } x_1 = -3.$$

Για $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -3$, για $x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = 1$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι $T_1(-1, -3)$ και $T_2(-3, 1)$.

Οι αντίστοιχες εφαπτόμενες:

$$x\,x_1 + y\,y_1 = 10$$

δίνουν:

$$\begin{cases} -x - 3y = 10 \quad \Rightarrow \ x + 3y + 10 = 0, \\ -3x + y = 10 \quad \Rightarrow \ 3x - y + 10 = 0. \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι:

$$x + 3y + 10 = 0 \qquad \text{και} \qquad 3x - y + 10 = 0.$$

24. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου

$$(C):\ x^2+(y+1)^2=20$$

που άγονται προς αυτόν από το σημείο $A(6,1)$.

Λύση: (Ασκ. 2/39)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,-1)$ και ακτίνα $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Έστω ότι η εφαπτομένη από το $A(6,1)$ έχει κλίση m:

$$y-1=m(x-6) \iff mx-y-6m+1=0.$$

Η απόσταση του $O(0,-1)$ από την ευθεία είναι

$$d=\frac{|m\cdot 0+(-1)\cdot(-1)-6m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2-6m|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Για εφαπτομένη $d=R=2\sqrt{5}$, άρα

$$\frac{(2-6m)^2}{m^2+1}=20 \iff 36m^2-24m+4=20m^2+20 \iff 2m^2-3m-2=0.$$

Λύνουμε:

$$(2m+1)(m-2)=0 \ \Rightarrow\ m=2 \text{ ή } m=-\tfrac{1}{2}.$$

Οι αντίστοιχες εφαπτόμενες (που περνούν από το $A(6,1)$) είναι

$$y-1=2(x-6) \iff 2x-y-11=0,$$

$$y-1=-\tfrac{1}{2}(x-6) \iff x+2y-8=0.$$

Σημεία επαφής (έλεγχος):

Για $m=2$ η ακτίνα έχει κλίση $-\frac{1}{2}$: $y=-1-\frac{x}{2}$. Τομή με $y=2x-11$ δίνει $T_1(4,-3)$.

Για $m=-\frac{1}{2}$ η ακτίνα έχει κλίση 2: $y=2x-1$. Τομή με $y=-\frac{x}{2}+4$ δίνει $T_2(2,3)$.

Και τα δύο σημεία ικανοποιούν $x^2+(y+1)^2=20$.

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι:

$$2x-y-11=0 \qquad \text{και} \qquad x+2y-8=0.$$

25. Να βρείτε τη *γωνία* που σχηματίζουν οι εφαπτομένες που άγονται από το σημείο $P(-1,-12)$ προς τον κύκλο

$$(C): \ x^2+y^2+12x-6y-5=0.$$

Λύση: (Ασκ. 3/39)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$(x+6)^2+(y-3)^2=50 \quad \Rightarrow \quad K(-6,3),\ R=5\sqrt{2}.$$

Η απόσταση του P από το κέντρο είναι

$$KP=\sqrt{(-1+6)^2+(-12-3)^2}=\sqrt{5^2+(-15)^2}=5\sqrt{10}.$$

Αν α είναι η γωνία μεταξύ της KP και μίας εφαπτομένης, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο KPT (με $KT \perp PT$) ισχύει

$$\tan\alpha=\frac{KT}{PT}=\frac{R}{\sqrt{KP^2-R^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{250-50}}=\frac{1}{2}.$$

Άρα $\alpha=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ και η γωνία μεταξύ των δύο εφαπτομένων είναι

$$2\alpha=2\ \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Αριθμητικά:

$$2\alpha\approx 53{,}1^\circ$$

Παρατήρηση: Ισοδύναμα $2\alpha=2\arcsin\left(\frac{R}{KP}\right)=2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

26. Δίνεται ο κύκλος $(C): \ x^2+y^2=5$. Από το σημείο $\Sigma(0,5)$ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB του κύκλου (C) (A, B σημεία επαφής). Να βρείτε:

i. τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία A και B

ii. τις *συντεταγμένες* των σημείων A και B

iii. την *εξίσωση* της ευθείας AB

iv. τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου που είναι *παράλληλες* με την AB

v. τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου που είναι *κάθετες* στην AB.

Λύση: (Ασκ. 4/39)

Ο κύκλος έχει $O(0,0)$, $R=\sqrt{5}$. Έστω εφαπτομένη από τη $\Sigma(0,5)$ με κλίση m:

$$y-5=m(x-0) \iff mx-y+5=0.$$

Απόσταση d του O από την ευθεία: $d=\dfrac{|5|}{\sqrt{m^2+1}}$. Για εφαπτομένη $d=R=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{25}{m^2+1}=5 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$.

i. Οι εφαπτόμενες είναι

$$y=2x+5 \qquad \text{και} \qquad y=-2x+5$$

ii. Σημεία επαφής: λύνουμε με τον κύκλο.

$$\begin{aligned} y=2x+5:&\;\; x^2+(2x+5)^2=5 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2,\; y=1,\\ y=-2x+5:&\;\; x^2+(-2x+5)^2=5 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2,\; y=1. \end{aligned}$$

Άρα $A(-2,1)$, $\quad B(2,1)$.

iii. Η AB διέρχεται από $(-2,1)$ και $(2,1) \Rightarrow y=1$.

iv. Εφαπτόμενες *παράλληλες* στην AB (οριζόντιες) του κύκλου $x^2+y^2=5$:

$$y=\sqrt{5} \qquad \text{και} \qquad y=-\sqrt{5}$$

v. Εφαπτόμενες *κάθετες* στην AB (κατακόρυφες) του κύκλου:

$$x=\sqrt{5} \qquad \text{και} \qquad x=-\sqrt{5}$$

27. Να βρείτε τη *θέση* των δύο κύκλων (C_1) και (C_2) σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

i. $(C_1): x^2+y^2-4=0, \quad (C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$

ii. $(C_1): x^2+y^2+6x-6y-2=0, \quad (C_2): x^2+y^2-4x+4y-2=0$

iii. $(C_1): x^2+y^2+2x+4y-4=0, \quad (C_2): x^2+y^2+2x+4y-1=0$

Λύση: (Ασκ. 1/49)

Θέτουμε $\delta = |K_1K_2|$ το μήκος της διακέντρου.

i. (C_1): $x^2+y^2=4 \Rightarrow K_1(0,0),\ R_1=2.$

$$(C_2):\ x^2-6x+y^2+8y+16=0 \iff (x-3)^2+(y+4)^2=9 \Rightarrow K_2(3,-4),\ R_2=3.$$

$$\delta = |K_1K_2| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5 = R_1+R_2 \Rightarrow \text{εφάπτονται εξωτερικά}$$

ii.

(C_1):

$$x^2+6x+y^2-6y-2=0 \iff (x+3)^2+(y-3)^2=20 \Rightarrow K_1(-3,3),\ R_1=\sqrt{20}.$$

(C_2):

$$x^2-4x+y^2+4y-2=0 \iff (x-2)^2+(y+2)^2=10 \Rightarrow K_2(2,-2),\ R_2=\sqrt{10}$$

$$\delta = \sqrt{(2+3)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Έχουμε

$$|R_1-R_2| = \sqrt{20}-\sqrt{10}, \qquad R_1+R_2=\sqrt{20}+\sqrt{10},$$

και $(|R_1-R_2|)^2 = 30-20\sqrt{2} < 50 < 30+20\sqrt{2} = (R_1+R_2)^2.$

$$|R_1-R_2| < \delta < R_1+R_2 \ \Rightarrow\ \text{τέμνονται σε δύο σημεία.}$$

iii.

(C_1):

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow K_1(-1,-2),\ R_1 = 3.$$

(C_2):

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 1 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 6 \Rightarrow K_2(-1,-2),\ R_2 = \sqrt{6}.$$

$$\delta = |K_1K_2| = 0 < |R_1 - R_2| = 3 - \sqrt{6}.$$

$\Rightarrow$ ξένοι εσωτερικά (ομόκεντροι με διαφορετικές ακτίνες).

28. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των κύκλων, οι οποίοι *εφάπτονται* στον κύκλο

$$x^2 + y^2 = 2$$

στο σημείο $A(-1,1)$ και έχουν ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$.

Λύση: (Ασκ. 2/49)

Ο δοθείς κύκλος έχει $O(0,0)$ και $r = \sqrt{2}$. Επειδή η εφαπτομένη στο A είναι κάθετη στις ακτίνες, τα κέντρα όλων των κύκλων που εφάπτονται στο A ανήκουν στη γραμμή OA:

$$OA:\ y = -x.$$

Άρα το κέντρο K έχει μορφή $K(\lambda, -\lambda)$. Επιπλέον $KA = R = 2\sqrt{2}$, οπότε

$$(\lambda+1)^2 + (-\lambda-1)^2 = 8 \iff 2(\lambda+1)^2 = 8 \iff (\lambda+1)^2 = 4 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Έτσι

$$K_1(1,-1), \qquad K_2(-3,3),$$

και οι ζητούμενοι κύκλοι (ακτίνας $2\sqrt{2}$) είναι

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8 \qquad (x+3)^2 + (y-3)^2 = 8$$

Παρατήρηση: Ο $K_1(1,-1)$ δίνει *εσωτερική* επαφή ($|OK_1| = R - r$), ενώ ο $K_2(-3,3)$ *εξωτερική* επαφή ($|OK_2| = R + r$).

29. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου με κέντρο $K(1,-2)$, ο οποίος *εφάπτεται εξωτερικά* στον κύκλο $x^2+y^2-10x-2y+17=0$.

Λύση: (Ασκ. 3/49)

Γράφουμε τον δοθέντα κύκλο σε κανονική μορφή:

$$x^2-10x+y^2-2y+17=0 \iff (x-5)^2+(y-1)^2=9.$$

Άρα $O(5,1)$, $r=3$.

Η διακέντριος με το $K(1,-2)$ έχει μήκος

$$\delta=|OK|=\sqrt{(1-5)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5.$$

Για *εξωτερική* επαφή ισχύει $\delta=r+R \Rightarrow R=\delta-r=5-3=2$.

Επομένως ο ζητούμενος κύκλος είναι

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4 \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad x^2+y^2-2x+4y+1=0$$

30. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $(-2,5)$ και *εφάπτεται* στον κύκλο $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ στο σημείο $(0,5)$.

Λύση: (Ασκ. 4/49)

Ο δοθείς κύκλος γράφεται

$$(x-1)^2+(y-2)^2=10 \quad \Rightarrow \quad O(1,2),\ r=\sqrt{10}.$$

Στο σημείο επαφής $T(0,5)$ η *νορμάλ* (γραμμή κέντρων) έχει κλίση

$$m_{OT}=\frac{5-2}{0-1}=-3 \ \Rightarrow \ \text{ευθεία } OT:\ y=-3x+5.$$

Ο ζητούμενος κύκλος, εφαπτόμενος στον δοθέντα στο T, έχει κέντρο $K(a,b)$ πάνω στην OT, άρα $b=-3a+5$. Επειδή διέρχεται από τα $T(0,5)$ και $P(-2,5)$, ισχύει

$$KT=KP \iff (a-0)^2+(b-5)^2=(a+2)^2+(b-5)^2 \iff a=-1.$$

Τότε $b = -3(-1) + 5 = 8$, οπότε

$$K(-1, 8), \qquad R^2 = KT^2 = (-1-0)^2 + (8-5)^2 = 10.$$

Επομένως ο κύκλος είναι

$$(x+1)^2 + (y-8)^2 = 10 \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad x^2 + y^2 + 2x - 16y + 55 = 0$$

31. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου που έχει *διάμετρο* την κοινή χορδή των κύκλων

$$(C_1): \ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \qquad \text{και} \qquad (C_2): \ (x+1)^2 + y^2 = 9.$$

Λύση: (Ασκ. 5/49)

Η κοινή χορδή είναι ο *ριζικός άξονας*, που προκύπτει αφαιρώντας τις εξισώσεις:

$$\big(x^2 + y^2 - 2x + 4y\big) - \big(x^2 + y^2 + 2x - 8\big) = 0 \implies x - y - 2 = 0 \iff y = x - 2.$$

Σημεία επαφής A, B: λύνομε με τον (C_2):

$$(x+1)^2 + (x-2)^2 = 9 \implies 2x^2 - 2x - 4 = 0 \implies x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα

$$A(2, 0), \qquad B(-1, -3).$$

Ο κύκλος με *διάμετρο* AB έχει εξίσωση

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

δηλαδή

$$(x-2)(x+1) + y(y+3) = 0 \iff x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$$

Σε κανονική μορφή:

$$\big(x - \tfrac{1}{2}\big)^2 + \big(y + \tfrac{3}{2}\big)^2 = \tfrac{9}{2} \quad \big(K\big(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}\big), \ R = \tfrac{3}{\sqrt{2}}\big).$$

Παρατήρηση: Πράγματι $|AB| = \sqrt{(3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, άρα $R = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

32. Δίνονται οι κύκλοι

$$(C_1):\ x^2+y^2+2x+4y-4=0 \qquad \text{και} \qquad (C_2):\ x^2+y^2-6x-2y+6=0.$$

Να δείξετε ότι *εφάπτονται εξωτερικά* και να βρείτε την *εξίσωση* της κοινής εφαπτομένης τους στο κοινό τους σημείο.

Λύση: (Ασκ. 6/49)

Για (C_1):

$$x^2+2x+y^2+4y-4=0 \Longleftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=9 \Rightarrow K_1(-1,-2),\ R_1=3.$$

Για (C_2):

$$x^2-6x+y^2-2y+6=0 \Longleftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow K_2(3,1),\ R_2=2.$$

Μήκος διακέντρου:

$$\delta=|K_1K_2|=\sqrt{(3+1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5=R_1+R_2.$$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Το σημείο επαφής T ανήκει στη διακέντριο K_1K_2 και απέχει $R_1=3$ από το K_1. Με $\vec{K_1K_2}=(4,3)$ και $|\vec{K_1K_2}|=5$,

$$T=K_1+\frac{R_1}{|\vec{K_1K_2}|}\,\vec{K_1K_2}=(-1,-2)+\frac{3}{5}(4,3)=\left(\tfrac{7}{5},-\tfrac{1}{5}\right).$$

Η κλίση της διακεντρίου είναι $m_{K_1K_2}=\frac{3}{4}$, άρα η κοινή εφαπτομένη στο T είναι κάθετη σε αυτήν και έχει κλίση $-\frac{4}{3}$.

Από το $T\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)$:

$$y+\tfrac{1}{5}=-\tfrac{4}{3}\left(x-\tfrac{7}{5}\right) \iff 4x+3y-5=0.$$

Κοινή εφαπτομένη: $4x+3y-5=0\,.$

33. Ο κύκλος με εξίσωση $(x-a)^2+(y-\beta)^2=R^2$ *εφάπτεται εξωτερικά* με τον κύκλο $(x-\gamma)^2+(y-\delta)^2=R^2$. Αν η εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους περνά από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $a^2+\beta^2=\gamma^2+\delta^2$.

Λύση: (Ασκ. 7/49)

Τα κέντρα είναι $K(a,\beta)$ και $\Lambda(\gamma,\delta)$ και οι ακτίνες ίσες R. Εφόσον οι κύκλοι *εφάπτονται εξωτερικά* και $R_1=R_2=R$, το σημείο επαφής T βρίσκεται στο μέσο της διακεντρίου $K\Lambda$:

$$T\Big(\tfrac{a+\gamma}{2},\,\tfrac{\beta+\delta}{2}\Big).$$

Η κοινή εφαπτομένη στο T είναι *κάθετη* στη $K\Lambda$. Αφού (κατά υπόθεση) διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, η ευθεία OT είναι η *μεσοκάθετος* του τμήματος $K\Lambda$.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα K,Λ, άρα

$$OK=O\Lambda \iff \sqrt{a^2+\beta^2}=\sqrt{\gamma^2+\delta^2} \iff a^2+\beta^2=\gamma^2+\delta^2$$

Παρατήρηση: Το συμπέρασμα είναι γεωμετρικό: το O ανήκει στη μεσοκάθετο της $K\Lambda$, επομένως ισαπέχει από τα κέντρα των δύο ίσων και εξωτερικά εφαπτόμενων κύκλων.

34. Να βρείτε τη *θέση* των σημείων $A(2,4)$, $B(3,-4)$ και $\Gamma(8,7)$ ως προς τον κύκλο

$$x^2+y^2=25.$$

Λύση: (Ασκ. 1/59)

Ο κύκλος έχει $O(0,0)$, $R=5$. Χρησιμοποιούμε τη *δύναμη σημείου*

$$\Delta_O(x_1,y_1)=x_1^2+y_1^2-R^2=x_1^2+y_1^2-25.$$

i. Για $A(2,4)$: $2^2+4^2-25=4+16-25=-5<0\Rightarrow A$ εντός.

ii. Για $B(3,-4)$: $3^2+(-4)^2-25=9+16-25=0\Rightarrow= B$ επάνω στον κύκλο.

iii. Για $\Gamma(8,7)$: $8^2+7^2-25=64+49-25=88>0\Rightarrow\Gamma$ εκτός.

Κριτήριο: $\Delta_O>0\Rightarrow$ εκτός, $\Delta_O=0\Rightarrow$ επάνω, $\Delta_O<0\Rightarrow$ εντός.

35. Να δείξετε ότι το σημείο $A(2,4)$ βρίσκεται *εκτός* του κύκλου

$$(C): \ x^2+y^2+4x-2y-11=0,$$

και να υπολογίσετε το *μήκος του εφαπτόμενου τμήματος* που άγεται από το A προς τον κύκλο (C). Ποια είναι η *μικρότερη* και ποια η *μεγαλύτερη* απόσταση του A από τον κύκλο (C);

Λύση: (Ασκ. 2/59)

Γράφουμε τον κύκλο στη μορφή $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ με

$$2g=4 \Rightarrow g=2, \qquad 2f=-2 \Rightarrow f=-1, \qquad c=-11.$$

Άρα

$$K(-g,-f)=(-2,1), \qquad R=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{4+1+11}=4.$$

Η απόσταση AK είναι

$$AK=\sqrt{(2+2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5>R.$$

Επομένως το A είναι εκτός του κύκλου.

Το μήκος της εφαπτομένης από το A είναι

$$(AT)=\sqrt{AK^2-R^2}=\sqrt{25-16}=3$$

(*Ισοδύναμα, με "δύναμη σημείου"*: $(AT)^2=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=4+16+8-8-11=9 \Rightarrow AT=3$.)

Οι αποστάσεις του A από σημεία του κύκλου παίρνουν τις τιμές

$$d_{\min}=AK-R=5-4=1 \qquad d_{\max}=AK+R=5+4=9$$

Παρατήρηση: Για σημείο εκτός κύκλου ισχύει $\Delta_K(A)=(AT)^2>0$ και $\Delta_K(A)=AK^2-R^2$.

36. Να λύσετε *γραφικά* τις πιο κάτω ανισώσεις: i. $x^2+y^2-8x<0$

ii. $x^2+y^2+4x-6y+4\geq 0$

iii. $x^2+y^2>25$

iv. $2x^2+2y^2-8x+4y-40\leq 0$

Λύση: (Ασκ. 3/59)

i. $x^2 + y^2 - 8x < 0 \iff (x-4)^2 + y^2 < 16$.
Κύκλος με $K(4,0)$, $R = 4$.

Το *εσωτερικό* του κύκλου, *χωρίς* τη περιφέρεια.

ii. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 \geq 0 \iff (x+2)^2 + (y-3)^2 \geq 9$.

Κύκλος με $K(-2,3)$, $R = 3$.

Το *εξωτερικό* του κύκλου *μαζί* με την περιφέρεια.

iii. $x^2 + y^2 > 25 \iff (x-0)^2 + (y-0)^2 > 5^2$.

Κύκλος με $K(0,0)$, $R = 5$.

Το *εξωτερικό* του κύκλου, *χωρίς* την περιφέρεια.

iv. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 40 \leq 0 \iff x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 \leq 0$

$$\iff (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 25.$$

Κύκλος με $K(2,-1)$, $R = 5$.

Το *εσωτερικό* του κύκλου *μαζί* με την περιφέρεια.

37. Να λύσετε *γραφικά* το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x > 0 \\ x^2 + y^2 + 6y \leq 0 \end{cases}$$

Λύση: (Ασκ. 4/59)

i. $x^2 + y^2 - 6x > 0 \iff (x-3)^2 + y^2 > 3^2$. *Έξω* από τον κύκλο C_1 με $K_1(3,0)$, $R_1 = 3$ (χωρίς την περιφέρεια).

ii. $x^2 + y^2 + 6y \leq 0 \iff x^2 + (y+3)^2 \leq 3^2$. *Μέσα* στον κύκλο C_2 με $K_2(0,-3)$, $R_2 = 3$ (μαζί με την περιφέρεια).

Οι δύο κύκλοι τέμνονται, επειδή $\delta = |K_1K_2| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ ικανοποιεί $0 < \delta < R_1 + R_2 = 6$. Η κοινή χορδή (ριζικός άξονας) προκύπτει αφαιρώντας τις ισότητες:

$$(x-3)^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + (y+3)^2 = 9 \implies -6x - 6y = 0 \iff x + y = 0$$

Τα σημεία τομής είναι $(0,0)$ και $(3,-3)$ (και ανήκουν στην περιφέρεια του C_2, *αλλά* αποκλείονται από την πρώτη ανίσωση).

<u>Συμπέρασμα:</u>

Το ζητούμενο σύνολο είναι το μέρος του *κύκλου* C_2 που βρίσκεται *έξω από τον κύκλο* C_1. Δηλαδή:

$$S = \Big\{(x,y) : \ x^2 + (y+3)^2 \leq 9 \text{ και } (x-3)^2 + y^2 > 9\Big\}$$

Η περιφέρεια του C_2 περιλαμβάνεται, ενώ η κοινή χορδή $x + y = 0$ και η περιφέρεια του C_1 *δεν* περιλαμβάνονται.

38. Να βρείτε τις *συντεταγμένες* του σημείου της ευθείας $(\varepsilon): \ 2x - 3y - 5 = 0$, το οποίο ανήκει στον *ριζικό άξονα* των κύκλων

$$(C_1): \ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \qquad \text{και} \qquad (C_2): \ x^2 + y^2 + 4x + 4y - 23 = 0.$$

Λύση: (Ασκ. 5/59)

Ο ριζικός άξονας προκύπτει αφαιρώντας τις εξισώσεις:

$$(C_2) - (C_1) = 0 \implies (4x - 2x) + (4y - (-4y)) + (-23 - (-10)) = 0$$
$$\implies 2x + 8y - 13 = 0.$$

Άρα ο ριζικός άξονας είναι $\rho: \ 2x + 8y - 13 = 0$. Το ζητούμενο σημείο είναι η τομή του (ε) με την ρ:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 2x + 8y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x + 8y = 13 \end{cases} \Rightarrow 11y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{11},$$

$$2x - 3 \cdot \frac{8}{11} = 5 \ \Rightarrow \ 2x = \frac{79}{11} \ \Rightarrow \ x = \frac{79}{22}.$$

Σημείο ζητούμενο:

$$\left(\frac{79}{22}, \frac{8}{11}\right)$$

39. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις

$$(C_1): \ x^2+y^2+5x-3y+2=0 \qquad \text{και} \qquad (C_2): \ x^2+y^2-2x+8y-1=0.$$

Να βρείτε το σημείο $M(\kappa,5)$, $\kappa\in\mathbb{R}$, το οποίο *ανήκει στην κοινή χορδή* των δύο κύκλων.

Λύση: (Ασκ. 6/59)

Η κοινή χορδή των δύο κύκλων βρίσκεται πάνω στον *ριζικό άξονα*. Τον βρίσκουμε αφαιρώντας τις εξισώσεις:

$(C_1)-(C_2)=0 \implies (5x-(-2x))+(-3y-8y)+(2-(-1))=0 \implies 7x-11y+3=0.$

Άρα ο ριζικός άξονας είναι $\rho: \ 7x-11y+3=0$. Για $M(\kappa,5)$ (δηλ. $y=5$) επάνω στη ρ:

$$7\kappa-11\cdot 5+3=0 \implies 7\kappa-52=0 \implies \kappa=\frac{52}{7}.$$

Ζητούμενο σημείο:

$$M\left(\frac{52}{7},\,5\right)$$

40. Να χαρακτηρίσετε *ΣΩΣΤΟ* ή *ΛΑΘΟΣ* καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις και να *δικαιολογήσετε* την απάντησή σας.

i. Οι παραμετρικές εξισώσεις, κύκλου $x^2+y^2=R^2$ είναι $x=R\,\text{ημ}\theta$, $\quad y=R\,\text{συν}\theta$ όπου $\theta\in[0,2\pi)$.

ii. Οι παραμετρικές εξισώσεις $x=R\,\text{συν}\theta$, $y=R\,\text{ημ}\theta$, $\theta\in[0,\pi]$ παριστάνουν *ημικύκλιο*.

iii. Οι εξισώσεις $x=a+\gamma\,\text{συν}\theta$, $y=\beta+\gamma\,\text{ημ}\theta$, $\theta\in[0,2\pi)$ είναι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $(x-a)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$.

iv. Το σημείο $T\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=1$.

Λύση: (Ασκ. 1/65)

i. ΣΩΣΤΟ.

$$x^2+y^2=R^2\big(\text{ημ}^2\theta+\text{συν}^2\theta\big)=R^2.$$

ii. ΣΩΣΤΟ

$$x^2+y^2=R^2, \qquad y=R\,\text{ημ}\theta\geq 0 \ (\theta\in[0,\pi]) \ \Rightarrow \ \text{άνω ημικύκλιο}.$$

iii. ΣΩΣΤΟ

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2\big(\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta\big)=\gamma^2.$$

iv. ΣΩΣΤΟ

$$x^2+y^2=\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

Παρατήρηση: Η μορφή στο (iv) κάνει παραμετροποίηση όλον τον μοναδιαίο κύκλο εκτός από το $(0,-1)$ (που αντιστοιχεί στο όριο $t\to\pm\infty$).

41. Να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις των κύκλων με εξίσωση:

i. $x^2+y^2=16$

ii. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

iii. $x^2+y^2-4x+6y+5=0$

Λύση: (Ασκ. 2/65)

i. $R=4$. Παραμετρικές:

$$x=4\,\text{συν}(\theta),\qquad y=4\,\text{ημ}(\theta),\qquad \theta\in[0,2\pi).$$

ii. $K(3,-1)$, $R=2$. Παραμετρικές:

$$x=3+2\,\text{συν}(\theta),\qquad y=-1+2\,\text{ημ}(\theta),\qquad \theta\in[0,2\pi).$$

iii. Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$(x^2-4x)+(y^2+6y)+5=0\iff(x-2)^2+(y+3)^2=8.$$

Άρα $K(2,-3)$, $R=2\sqrt{2}$. Παραμετρικές:

$$x=2+2\sqrt{2}\,\text{συν}(\theta),\qquad y=-3+2\sqrt{2}\,\text{ημ}(\theta),\qquad \theta\in[0,2\pi).$$

42. Να γράψετε την *εξίσωση* του κύκλου με *παραμετρικές εξισώσεις*:

i. $x = 3\,\text{συν}(\theta),\ y = 3\,\text{ημ}(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi)$

ii. $x = -1 + 4\,\text{συν}(\theta),\ y = 2 + 4\,\text{ημ}(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi)$

iii. $x = 2\,\text{συν}(\theta),\ y = 2\,\text{ημ}(\theta) - 7,\ \theta \in [0, 2\pi)$

Λύση: (Ασκ. 3/65)

i. Έχουμε
$$x^2 + y^2 = 9\big(\text{συν}^2(\theta) + \text{ημ}^2(\theta)\big) = 9.$$

Άρα $x^2 + y^2 = 9$ (κέντρο $O(0,0)$, ακτίνα $R = 3$).

ii. Θέτοντας $x + 1 = 4\,\text{συν}(\theta)$ και $y - 2 = 4\,\text{ημ}(\theta)$,
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16\big(\text{συν}^2(\theta) + \text{ημ}^2(\theta)\big) = 16.$$

Άρα $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ (κέντρο $K(-1,2)$, ακτίνα $R = 4$).

iii. Θέτοντας $y + 7 = 2\,\text{ημ}(\theta)$,
$$x^2 + (y+7)^2 = 4\big(\text{συν}^2(\theta) + \text{ημ}^2(\theta)\big) = 4.$$

Άρα $x^2 + (y+7)^2 = 4$ (κέντρο $K(0,-7)$, ακτίνα $R = 2$).

43. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$, το σημείο του $T\big(3\,\text{συν}\theta,\ 3\,\text{ημ}\theta\big)$ και το σημείο $A(-3,6)$. Να βρείτε την *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του AT.

Λύση: (Ασκ. 4/65)

Θέτουμε $M(x,y)$. Ως μέσο του AT ισχύει
$$x = \frac{-3 + 3\,\text{συν}\theta}{2}, \qquad y = \frac{6 + 3\,\text{ημ}\theta}{2}.$$

Άρα
$$\text{συν}\theta = \frac{2x+3}{3}, \qquad \text{ημ}\theta = \frac{2y-6}{3}.$$

Με την ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ παίρνουμε

$$\left(\frac{2x+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y-6}{3}\right)^2 = 1 \iff (2x+3)^2 + (2y-6)^2 = 9.$$

Αναπτύσσοντας:

$$4x^2 + 4y^2 + 12x - 24y + 36 = 9 \iff x^2 + y^2 + 3x - 6y + 9 = 0.$$

Σε κανονική μορφή:

$$\left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - 3\right)^2 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2.$$

Παρατήρηση: Ο τόπος του M είναι κύκλος με κέντρο το μέσο του AO, δηλαδή $K\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, και ακτίνα $R = \frac{3}{2}$ (ομοιότητα λόγου $\frac{1}{2}$ με πόλο το A).

44. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο του $T(2\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ 2\,\eta\mu\theta)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο T τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο A και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B. Να αποδείξετε ότι η *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του AB είναι

$$x^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Λύση: (Ασκ. 5/65)

Τύπος εφαπτομένης στον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ από σημείο $T(x_1, y_1)$: $xx_1 + yy_1 = R^2$. Για $R = 2$ και $T(2\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ 2\,\eta\mu\theta)$ παίρνουμε

$$x \cdot 2\,\sigma\upsilon\nu\theta + y \cdot 2\,\eta\mu\theta = 4 \iff \sigma\upsilon\nu\theta\, x + \eta\mu\theta\, y = 2. \quad (1)$$

Τομή με x-άξονα ($y = 0$): $\sigma\upsilon\nu\theta\, x = 2 \Rightarrow A\left(\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 0\right)$.

Τομή με y-άξονα ($x = 0$): $\eta\mu\theta\, y = 2 \Rightarrow B\left(0, \dfrac{2}{\eta\mu\theta}\right)$.

Άρα το μέσο $M(x, y)$ του AB είναι

$$x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \qquad y = \frac{1}{\eta\mu\theta}. \quad (2)$$

Από την ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ και το (2) προκύπτει

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \iff \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = 1 \iff x^2y^2 = x^2 + y^2$$

Παρατήρηση: Εξαιρούνται οι τιμές $\theta = k\pi$ ή $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ ή $\eta\mu\theta = 0$), οπότε ο τόπος δεν περιέχει σημεία πάνω στους άξονες.

45. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=16$ και το σημείο του $T(4\,\text{συν}\theta,\ 4\,\text{ημ}\theta)$. Η εφαπτομένη στο T τέμνει τον x-άξονα στο A. Από το A φέρουμε την ευθεία (ε_1) παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και από το T την ακτίνα (κάθετη στον κύκλο) (ε_2). Αν $B=(\varepsilon_1)\cap(\varepsilon_2)$, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του B έχει εξίσωση

$$16\,(x^2+y^2)=x^4.$$

Λύση: (Ασκ. 6/65)

Η εφαπτομένη στον κύκλο $x^2+y^2=R^2$ από σημείο $T(x_1,y_1)$ είναι $xx_1+yy_1=R^2$. Για $R=4$ και $T(4\,\text{συν}\theta,\ 4\,\text{ημ}\theta)$ παίρνουμε

$$4\,\text{συν}\theta\ x+4\,\text{ημ}\theta\ y=16 \iff \text{συν}\theta\,x+\text{ημ}\theta\,y=4. \tag{1}$$

Τομή με x-άξονα $(y=0)$: από (1) $\text{συν}\theta\,x=4 \Rightarrow A\left(\dfrac{4}{\text{συν}\theta},\,0\right)$. Άρα (ε_1): $x=\dfrac{4}{\text{συν}\theta}$.

Η ακτίνα OT (κάθετη στην εφαπτομένη) έχει λόγο $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}$, δηλ.

$$(\varepsilon_2):\quad \text{ημ}\theta\,x-\text{συν}\theta\,y=0 \iff y=\frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}\,x. \tag{2}$$

Σημείο $B(x,y)$ ως τομή (ε_1) και (ε_2):

$$x=\frac{4}{\text{συν}\theta},\qquad y=\frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}\cdot\frac{4}{\text{συν}\theta}=\frac{4\,\text{ημ}\theta}{\text{συν}^2\theta}. \tag{3}$$

Από (3) προκύπτουν

$$\text{συν}\theta=\frac{4}{x},\qquad \text{ημ}\theta=\frac{4y}{x^2}.$$

Με την ταυτότητα $\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta=1$ έχουμε

$$\left(\frac{4}{x}\right)^2+\left(\frac{4y}{x^2}\right)^2=1 \iff \frac{16}{x^2}+\frac{16y^2}{x^4}=1 \iff 16x^2+16y^2=x^4.$$

Άρα ο τόπος του B δίνεται από

$$16\,(x^2+y^2)=x^4$$

Παρατήρηση: Εξαιρούμε $\text{συν}\theta=0$ (η εφαπτομένη είναι οριζόντια και δεν τέμνει τον x-άξονα), άρα $|x|=\left|\dfrac{4}{\text{συν}\theta}\right|\geq 4$. Η εξίσωση επιτρέπει επίσης το $(0,0)$, το οποίο *δεν* ανήκει στον τόπο (δεν αντιστοιχεί σε καμία τιμή της θ).

46. Δίνεται ο κύκλος $(C): \ x^2+y^2-6x+5=0$ και σημείο αυτού $T(3+2\,\text{συν}\theta,\ 2\,\text{ημ}\theta)$.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του (C) στο T είναι,

$$x\,\text{συν}\theta+y\,\text{ημ}\theta=2+3\,\text{συν}\theta$$

ii. Αν η εφαπτομένη στο T τέμνει τον άξονα $x'x$ στο A και την ευθεία $x=1$ στο B, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει εξίσωση

$$y^2=\frac{x-1}{x-3}.$$

Λύση: (Ασκ. 7/66)

Ο κύκλος γράφεται $(x-3)^2+y^2=4$, άρα έχει κέντρο $O(3,0)$ και ακτίνα $R=2$. Το σημείο T είναι $\big(3+2\,\text{συν}\theta,\ 2\,\text{ημ}\theta\big)$.

i. Η εφαπτομένη στον κύκλο $(x-3)^2+y^2=4$ στο σημείο $T(x_1,y_1)$ δίνεται από

$$(x-3)(x_1-3)+y\,y_1=4.$$

Για $x_1-3=2\,\text{συν}\theta,\ y_1=2\,\text{ημ}\theta$ παίρνουμε

$$(x-3)\,2\,\text{συν}\theta+y\,2\,\text{ημ}\theta=4 \iff x\,\text{συν}\theta+y\,\text{ημ}\theta=2+3\,\text{συν}\theta.$$

ii. Η εφαπτομένη είναι $x\,\text{συν}\theta+y\,\text{ημ}\theta=2+3\,\text{συν}\theta$.

$$\text{Τομή με } x\text{-άξονα } (y=0): \quad \text{συν}\theta\,x=2+3\,\text{συν}\theta \Rightarrow A\left(3+\frac{2}{\text{συν}\theta},\,0\right).$$

$$\text{Τομή με } x=1: \quad \text{συν}\theta+y\,\text{ημ}\theta=2+3\,\text{συν}\theta \Rightarrow y=\frac{2+2\,\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}.$$

Άρα, για το μέσο $M(x,y)$ του AB έχουμε

$$x=\frac{1+\big(3+\frac{2}{\text{συν}\theta}\big)}{2}=2+\frac{1}{\text{συν}\theta}, \qquad y=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+2\,\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}=\frac{1+\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}.$$

Θέτοντας $c=\text{συν}\theta,\ s=\text{ημ}\theta$ (με $s\neq 0,\ c\neq 0$ ώστε να ορίζονται τα A,B):

$$x=2+\frac{1}{c} \ \Rightarrow\ c=\frac{1}{x-2}, \qquad y=\frac{1+c}{s}.$$

Με $c^2+s^2=1$ προκύπτει

$$y^2=\frac{(1+c)^2}{1-c^2}=\frac{1+c}{1-c}.$$

Αντικαθιστώντας $c = \dfrac{1}{x-2}$:

$$y^2 = \frac{1 + \frac{1}{x-2}}{1 - \frac{1}{x-2}} = \frac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-2}} = \frac{x-1}{x-3}.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M δίνεται από

$$y^2 = \frac{x-1}{x-3}$$

Παρατήρηση: Για να υπάρχουν και τα δύο σημεία A, B απαιτούνται συν$\theta \neq 0$ και ημ$\theta \neq 0$. Στον τόπο αποκλείεται το $x = 3$ (κατακόρυφη ασύμπτωτη) και επίσης το $x = 1$ δεν αντιστοιχεί σε αποδεκτό θ (δίνει ημ$\theta = 0$). Επομένως, το πεδίο ορισμού του τόπου είναι $x > 3$ ή $x < 1$.

47. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το *κέντρο* και την *ακτίνα* του ως συναρτήσεις του λ.

ii. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το κέντρο του κύκλου να ανήκει στην ευθεία,

$$(\varepsilon):\ x + 3y - 12 = 0$$

Λύση: (Ασκ. 8/65)

i. Ομαδοποιούμε κατά y και συμπληρώνουμε τετράγωνο:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0 \iff x^2 + \big(y - \lambda\big)^2 = \lambda^2 + 1.$$

Σε *κανονική μορφή*:

$$(x - 0)^2 + \big(y - \lambda\big)^2 = \lambda^2 + 1$$

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (δεδομένου ότι $\lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε λ). Το *κέντρο* είναι

$$K(0, \lambda),$$

ενώ η *ακτίνα* είναι

$$R = \sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

ii. Θέλουμε το $K(0,\lambda)$ να ανήκει στην $(\varepsilon):\ x+3y-12=0$. Αντικαθιστούμε $x=0,\ y=\lambda$:

$$0+3\lambda-12=0 \implies \lambda=4$$

Για $\lambda=4$ ο κύκλος είναι $(x-0)^2+(y-4)^2=17$ με $K(0,4),\ R=\sqrt{17}$.

Παρατήρηση: Το κέντρο K κινείται πάνω στον άξονα $y'y$ καθώς μεταβάλλεται το λ.

48. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+4\lambda x-2y+4\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο και να βρείτε *κέντρο* και *ακτίνα*.
ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει κύκλος με την πιο πάνω εξίσωση που να έχει κέντρο το σημείο $(-1,1)$.

Λύση: (Ασκ. 1/67)

Ομαδοποιούμε κατά x και y και συμπληρώνουμε τετράγωνο:

$$x^2+4\lambda x+y^2-2y+4\lambda=0 \iff (x+2\lambda)^2-4\lambda^2+(y-1)^2-1+4\lambda=0$$
$$\iff (x+2\lambda)^2+(y-1)^2=(2\lambda-1)^2.$$

Άρα η εξίσωση είναι σε κανονική μορφή κύκλου με

$$K(-2\lambda,\,1)\,,\qquad R=\left|2\lambda-1\right|$$

i. Η εξίσωση παριστάνει *μη εκφυλισμένο* κύκλο όταν $R>0$, δηλ.

$$\lambda\neq\tfrac{1}{2}$$

Για $\lambda=\frac{1}{2}$ προκύπτει $(x+1)^2+(y-1)^2=0$, δηλ. *σημειακός κύκλος* στο $K(-1,1)$.

ii. Αν το κέντρο είναι $(-1,1)$, τότε από $K(-2\lambda,1)=(-1,1)$ παίρνουμε $\lambda=\frac{1}{2}$, οπότε $R=\left|2\cdot\frac{1}{2}-1\right|=0$. Άρα η εξίσωση δεν δίνει *κύκλο* αλλά σημειακό κύκλο.

Συνεπώς, δεν υπάρχει μη εκφυλισμένος κύκλος με κέντρο (-1,1) στην οικογένεια αυτή.

49. Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία $y = \lambda x + c$ εφάπτεται στον κύκλο

$$(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

τότε

$$(a\lambda - \beta + c)^2 = (1+\lambda^2)\, R^2$$

Λύση: (Ασκ. 2/67)

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(a, \beta)$ και ακτίνα R. Η ευθεία $y = \lambda x + c$ γράφεται σε κανονική μορφή

$$\lambda x - y + c = 0.$$

Αν είναι εφαπτομένη, η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ισούται με R:

$$\mathrm{d}(K,\ \lambda x - y + c = 0) = \frac{|\lambda a - \beta + c|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = R.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε αμέσως

$$(\lambda a - \beta + c)^2 = (\lambda^2+1)\, R^2,$$

δηλαδή

$$(a\lambda - \beta + c)^2 = R^2 + \lambda^2 R^2$$

Εναλλακτικά: Με αντικατάσταση $y = \lambda x + c$ στην εξίσωση του κύκλου προκύπτει τετραγωνική εξίσωση ως προς x. Η συνθήκη εφαπτομένης είναι $\Delta = 0$, η οποία οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

50. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου που:

i. είναι παράλληλες με την ευθεία $x + 3y = 2$

ii. είναι κάθετες με την ευθεία $x = 1$

iii. διέρχονται από το σημείο $A(0, 10)$

iv. σχηματίζουν γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$.

Λύση: (Ασκ. 3/67)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R=\sqrt{10}$.

i. Παράλληλες με $x+3y=2$ έχουν μορφή $x+3y=c$. Θέλουμε $\mathrm{d}(O,\ x+3y=c)=R$:

$$\frac{|c|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}\implies |c|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10.$$

Άρα $x+3y=10$ και $x+3y=-10$.

ii. Κάθετες στην $x=1$ είναι οριζόντιες $y=b$. Θέλουμε $|b|=R=\sqrt{10}$, άρα

$$y=\sqrt{10},\qquad y=-\sqrt{10}$$

iii. Εφαπτομένη που διέρχεται από $A(0,10)$. Γενική εφαπτομένη του $x^2+y^2=10$ με σημείο επαφής (x_1,y_1) είναι $xx_1+yy_1=10$ με $x_1^2+y_1^2=10$.

Θέτοντας $A(0,10)$ επάνω της: $0\cdot x_1+10y_1=10\Rightarrow y_1=1$.

Τότε $x_1^2+1=10\Rightarrow x_1=\pm3$. Οι εφαπτόμενες:

$$3x+y=10\,,\qquad -3x+y=10$$

iv. Γραμμή που σχηματίζει οξεία γωνία 45° με τον x-άξονα έχει $|\kappa|=1$ (κλίση $m=\pm1$). Γράφουμε $y=mx+c$ και απαιτούμε $\mathrm{d}(O,\ y=mx+c)=R$:

$$\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{10}\implies |c|=\sqrt{10}\sqrt{1+m^2}.$$

Για $m=1$: $|c|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\Rightarrow y=x+2\sqrt{5},\quad y=x-2\sqrt{5}$.

Για $m=-1$: $|c|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\Rightarrow y=-x+2\sqrt{5},\quad y=-x-2\sqrt{5}$.

51. Δίνεται ο κύκλος $(C): \; x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 1 = 0$ με κέντρο $K(1, 4)$.

i. Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) εφάπτεται του άξονα $x'x$.

ii. Αν (h, k) είναι το σημείο επαφής μιας εφαπτομένης του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(3, 0)$, να δείξετε ότι $h - 2k = 1$.

Λύση: (Ασκ. 4/67)

Από τον τύπο του κέντρου $(-g, -f) = (1, 4)$ προκύπτουν

$$g = -1, \qquad f = -4.$$

Άρα ο κύκλος είναι

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-4)^2 = 16,$$

με κέντρο $K(1, 4)$ και ακτίνα $R = 4$.

i. Η απόσταση του K από τον άξονα $y = 0$ είναι $|4| = 4 = R$. Επομένως ο κύκλος εφάπτεται του x-άξονα.

ii. Έστω $T(h, k)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης από το $P(3, 0)$. Ισχύει $PT \perp KT$, άρα

$$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{KT} = 0 \iff (3-h, \, -k) \cdot (h-1, \, k-4) = 0$$
$$\iff h^2 + k^2 - 4h - 4k + 3 = 0. \tag{1}$$

Επειδή T ανήκει στον κύκλο,

$$h^2 + k^2 - 2h - 8k + 1 = 0. \tag{2}$$

Αφαιρώντας (2) από την (1) παίρνουμε

$$(-4h - 4k + 3) - (-2h - 8k + 1) = 0 \iff -h + 2k = -1 \iff h - 2k = 1$$

52. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 80 = 0$. Να βρείτε:

i. το *κέντρο* και την *ακτίνα* του κύκλου,

ii. τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $3x - 4y = a$ να αποκόπτει στον κύκλο χορδή μήκους 16.

Λύση: (Ασκ. 5/67)

i. Συμπληρώνουμε τετράγωνα:

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y - 80 = 0 \iff (x-2)^2 + (y-4)^2 = 100.$$

Άρα

$$K(2,4), \qquad R = 10$$

ii. Η απόσταση του $K(2,4)$ από την ευθεία $3x - 4y - a = 0$ είναι

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - a|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 16 - a|}{5} = \frac{|a+10|}{5}.$$

Μήκος χορδής από ευθεία σε απόσταση d από το κέντρο:

$$L = 2\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Θέλουμε $L = 16$:

$$16 = 2\sqrt{100 - d^2} \iff 8 = \sqrt{100 - d^2} \iff d^2 = 36 \iff d = 6.$$

Άρα

$$\frac{|a+10|}{5} = 6 \iff |a+10| = 30 \iff a + 10 = \pm 30 \iff a = 20 \text{ ή } a = -40$$

53. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-6x+1=0$.

i. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(0,1)$.
ii. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των πιο πάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το *εμβαδόν* του τετραπλεύρου $AMBK$, όπου K το κέντρο του κύκλου.

Λύση: (Ασκ. 6/67)

Ο κύκλος γράφεται σε κανονική μορφή:

$$(x-3)^2+y^2=8$$

Άρα έχει *κέντρο* $K(3,0)$ και *ακτίνα* $R=2\sqrt{2}$.

i. Έστω εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το $M(0,1)$:

$$y=mx+1.$$

Η απόσταση του κέντρου $K(3,0)$ από την ευθεία $y=mx+1$ πρέπει να ισούται με την ακτίνα:

$$\frac{|3m+1|}{\sqrt{1+m^2}}=2\sqrt{2}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$(3m+1)^2=8(1+m^2) \iff m^2+6m-7=0.$$

$$\Rightarrow\ m=1 \quad ή \quad m=-7.$$

Άρα οι εφαπτόμενες είναι:

$$y=x+1 \qquad y=-7x+1$$

ii.

ii. Για $y=x+1$:

$$(x-3)^2+(x+1)^2=8 \ \Rightarrow\ 2x^2-4x+10=8 \ \Rightarrow\ x=1,\ y=2.$$

Άρα $A(1,2)$.

Για $y=-7x+1$:

$$(x-3)^2+(-7x+1)^2=8 \ \Rightarrow\ 50x^2-44x+2=0 \ \Rightarrow\ x=\tfrac{1}{5},\ y=-\tfrac{2}{5}.$$

Άρα $B\left(\tfrac{1}{5},-\tfrac{2}{5}\right)$.

Το τετράπλευρο $AMBK$ έχει κορυφές $A(1,2)$, $M(0,1)$, $B\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ και $K(3,0)$.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του $AMBK$, το χωρίζουμε σε δύο τρίγωνα:

$$E_{AMBK} = [\triangle ABK] + [\triangle AMB].$$

1. Υπολογισμός $[\triangle ABK]$:
Η βάση AK έχει μήκος

$$AK = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Η εξίσωση της AK είναι $x + y - 3 = 0$. Η απόσταση του σημείου $B\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ από αυτήν είναι:

$$d(B,AK) = \frac{\left|\frac{1}{5} - \frac{2}{5} - 3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-\frac{16}{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}.$$

Άρα:

$$[\triangle ABK] = \tfrac{1}{2}\,AK \cdot d(B,AK) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{5} = \frac{16}{5}.$$

2. Υπολογισμός $[\triangle AMB]$:
Η βάση AB έχει μήκος

$$AB = \sqrt{\left(1-\tfrac{1}{5}\right)^2 + \left(2-(-\tfrac{2}{5})\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{12}{5}\right)^2} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

Η εξίσωση της AB είναι $3x - y - 1 = 0$. Η απόσταση του σημείου $M(0,1)$ από αυτήν είναι:

$$d(M,AB) = \frac{|3\cdot 0 - 1 - 1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Άρα:

$$[\triangle AMB] = \tfrac{1}{2}\,AB \cdot d(M,AB) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5}.$$

Το συνολικό εμβαδόν είναι:

$$E_{AMBK} = [\triangle ABK] + [\triangle AMB] = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} = 4.$$

$$E_{AMBK} = 4 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

54. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Σ που βρίσκεται πάνω στην $(\varepsilon):\ x+2y=0$ και έχει *δύναμη* $\Delta_k(\Sigma)=100$ ως προς τον κύκλο $(k):\ x^2+y^2=25$.

Λύση: (Ασκ. 7/67)

Για κύκλο με κέντρο την αρχή και ακτίνα $R=5$, η *δύναμη* σημείου (x,y) είναι

$$\Delta_k(x,y)=x^2+y^2-R^2=x^2+y^2-25.$$

Δίνεται $\Delta_k(\Sigma)=100$, άρα

$$x^2+y^2-25=100 \iff x^2+y^2=125. \quad (1)$$

Επειδή $\Sigma\in(\varepsilon)$, έχουμε $x=-2y$. Αντικαθιστούμε στο (1):

$$(-2y)^2+y^2=125 \iff 5y^2=125 \iff y^2=25 \;\Rightarrow\; y=\pm 5.$$

Τότε $x=-2y\Rightarrow x=-10$ για $y=5$ και $x=10$ για $y=-5$. Άρα

$$\Sigma_1(-10,\,5)\ , \qquad \Sigma_2(10,\,-5)$$

55. Να βρείτε την *εξίσωση* του κύκλου που περνά από την αρχή των αξόνων, το κέντρο του βρίσκεται στο α′ τεταρτημόριο των αξόνων, αποκόπτει χορδή μήκους 4 από τον άξονα $x'x$ και υπάρχει σημείο $\Sigma(-1,2)$ με *δύναμη* μιας μονάδας ως προς αυτόν.

Λύση: (Ασκ. 8/67)

Έστω ο κύκλος (K,R) με κέντρο $K(a,b)$ και ακτίνα R. Επειδή το κέντρο βρίσκεται στο α′ τεταρτημόριο, έχουμε $a>0,\ b>0$.

Ο κύκλος περνά από την αρχή $O(0,0)$, οπότε:

$$R^2=a^2+b^2. \quad (1)$$

Η χορδή που αποκόπτεται από τον άξονα $x'x$ έχει μήκος 4. Η απόσταση του κέντρου από τον άξονα είναι b, άρα:

$$2\sqrt{R^2-b^2}=4 \iff R^2-b^2=4. \quad (2)$$

Για το σημείο $\Sigma(-1,2)$, η *δύναμη* ως προς τον κύκλο είναι:

$$\Delta_k(\Sigma)=(-1-a)^2+(2-b)^2-R^2=1. \quad (3)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$a^2 = 4 \;\Rightarrow\; a = 2 \quad (\text{επειδή } a > 0).$$

Αντικαθιστούμε στο (3):

$(-1-2)^2+(2-b)^2-(4+b^2) = 1 \iff 9+(b^2-4b+4)-4-b^2 = 1 \iff 9-4b = 1 \;\Rightarrow\; b = 2.$

Άρα $K(2,2)$ και από (1):

$$R^2 = a^2 + b^2 = 8.$$

Επομένως:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

ή ισοδύναμα

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0.$$

Έλεγχος: Το σημείο $O(0,0)$ ικανοποιεί την εξίσωση, η χορδή στον άξονα έχει μήκος 4, και η δύναμη του σημείου $\Sigma(-1,2)$ είναι $\Delta_k(\Sigma) = 1$.

56. Δίνεται ο κύκλος $(C): \; (x+2)^2 + (y-2)^2 = 18$ και το σημείο $A(2,1)$. Να δείξετε ότι το σημείο A βρίσκεται *εντός* του κύκλου (C) και να βρείτε την *εξίσωση* της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το σημείο A.

Λύση: (Ασκ. 9/68)

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(-2,2)$ και ακτίνα $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Η απόσταση

$$KA = \sqrt{(2+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} < 3\sqrt{2} = R,$$

άρα το A είναι *εντός* του κύκλου.

Η χορδή με *μέσο* το A είναι κάθετη στο KA και διέρχεται από το A. Η κλίση του KA είναι

$$m_{KA} = \frac{1-2}{2-(-2)} = -\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; m_{\text{χορδής}} = -\frac{1}{m_{KA}} = 4.$$

Επομένως η εξίσωση της χορδής είναι

$$y - 1 = 4(x-2) \iff y = 4x - 7$$

57. Δίνεται T τυχαίο σημείο του κύκλου $x^2+y^2=R^2$ και το σημείο $A(a,\beta)$. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M των ευθύγραμμων τμημάτων AT είναι ο κύκλος,

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{R^2}{4}$$

Λύση: (Ασκ. 10/68)

Θέτουμε $T(R\,\text{συν}\theta,\ R\,\text{ημ}\theta)$. Το μέσο $M(x,y)$ του AT είναι

$$M\left(\frac{a+R\,\text{συν}\theta}{2},\ \frac{\beta+R\,\text{ημ}\theta}{2}\right).$$

Άρα

$$\text{συν}\theta=\frac{2x-a}{R},\qquad \text{ημ}\theta=\frac{2y-\beta}{R}.$$

Με την ταυτότητα $\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta=1$ παίρνουμε

$$\left(\frac{2x-a}{R}\right)^2+\left(\frac{2y-\beta}{R}\right)^2=1 \iff \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{R^2}{4}$$

58. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=R^2$ και τυχαίο σημείο P πάνω σε αυτόν. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ. Να βρεθεί η *εξίσωση της καμπύλης* στην οποία ανήκει το μέσο M του τμήματος $A\Gamma$, όπου $A(0,R)$.

Λύση: (Ασκ. 11/68)

Θέτουμε $P(R\,\text{συν}\theta,\ R\,\text{ημ}\theta)$. Η εφαπτομένη στον κύκλο $x^2+y^2=R^2$ έχει εξίσωση

$$\text{συν}\theta\,x+\text{ημ}\theta\,y=R.$$

Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ $(y=0)$ στο σημείο

$$\text{συν}\theta\,x=R\ \Rightarrow\ x_\Gamma=\frac{R}{\text{συν}\theta}\quad\Rightarrow\quad \Gamma\left(\frac{R}{\text{συν}\theta},\,0\right).$$

Το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(0,R)$. Το μέσο $M(x,y)$ του $A\Gamma$ είναι:

$$x=\frac{0+\frac{R}{\text{συν}\theta}}{2}=\frac{R}{2\,\text{συν}\theta},\qquad y=\frac{R+0}{2}=\frac{R}{2}.$$

Άρα το M έχει σταθερή τεταγμένη $y = \frac{R}{2}$ και μεταβλητή τετμημένη

$$x = \frac{R}{2\,\text{συν}\theta}.$$

Επειδή $|\text{συν}\theta| \leq 1$, η ποσότητα $\frac{1}{\text{συν}\theta}$ παίρνει τιμές

$$\frac{1}{\text{συν}\theta} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$

οπότε

$$x \in (-\infty, -\tfrac{R}{2}] \cup [\tfrac{R}{2}, +\infty).$$

59. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι κορυφές B, Γ είναι σταθερές και η κορυφή A κινείται έτσι ώστε η διάμεσος BM να έχει σταθερό μήκος $\lambda > 0$ (M: μέσο του $A\Gamma$). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A είναι *κύκλος* και να βρείτε την *εξίσωσή* του.

Λύση: (Ασκ. 1/69)

Θέτουμε $B(b_1, b_2)$, $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ σταθερά και $A(x, y)$ μεταβλητό. Το μέσο M του $A\Gamma$ είναι

$$M\left(\frac{x+\gamma_1}{2}, \frac{y+\gamma_2}{2}\right).$$

Η συνθήκη $BM = \lambda$ γράφεται

$$\left(\frac{x+\gamma_1}{2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{y+\gamma_2}{2} - b_2\right)^2 = \lambda^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 4:

$$(x+\gamma_1-2b_1)^2 + (y+\gamma_2-2b_2)^2 = (2\lambda)^2$$

$$\iff \quad (x-(2b_1-\gamma_1))^2 + (y-(2b_2-\gamma_2))^2 = (2\lambda)^2$$

Άρα ο τόπος της A είναι *κύκλος* με *κέντρο*

$$K_A(2b_1-\gamma_1,\ 2b_2-\gamma_2)$$

(ανταναклάται το Γ ως προς το B) και *ακτίνα*

$$R_A = 2\lambda$$

c**60.** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$. Φέρουμε τρεις εφαπτόμενες στον κύκλο, έτσι ώστε η μία να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ και τα σημεία τομής των τριών εφαπτομένων να σχηματίζουν *ισόπλευρο* τρίγωνο. Να βρεθεί το *εμβαδόν* του τριγώνου.

Λύση: (Ασκ. 2/69)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R = 3$. Παίρνουμε ως οριζόντια εφαπτομένη την $y = 3$. Για να είναι το τρίγωνο ισόπλευρο, οι άλλες δύο εφαπτόμενες σχηματίζουν γωνία 60° με την $y = 3$, άρα έχουν κλίσεις $\pm\sqrt{3}$. Επειδή είναι εφαπτόμενες του $x^2 + y^2 = 9$, για ευθεία $y = mx + c$ ισχύει $\dfrac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = R$. Με $m = \pm\sqrt{3}$ παίρνουμε $|c|/2 = 3 \Rightarrow c = \pm 6$. Επιλέγουμε το $c = 6$ ώστε να σχηματίζεται τρίγωνο με βάση την $y = 3$. Έτσι οι τρεις εφαπτόμενες είναι

$$y = 3, \qquad y = \sqrt{3}\,x + 6, \qquad y = -\sqrt{3}\,x + 6.$$

Σημεία τομής (κορυφές του τριγώνου):

$$A = (-\sqrt{3},\, 3), \qquad B = (\sqrt{3},\, 3), \qquad C = (0,\, 6).$$

Μήκη πλευρών:

$$AB = 2\sqrt{3}, \qquad AC = BC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Άρα το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο με πλευρά $a = 2\sqrt{3}$. Το εμβαδόν του είναι

$$E = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

Παρατήρηση: Για κύκλο ακτίνας R γενικά, με μία εφαπτομένη οριζόντια και οι άλλες δύο σε γωνίες $\pm 60^\circ$, οι ευθείες είναι $y = R,\; y = \pm\sqrt{3}\,x + 2R$ και προκύπτει

$$E = \frac{\sqrt{3}}{3}\,R^2.$$

Για $R = 3$ δίνει $E = 3\sqrt{3}$.

61. Δίνονται οι κύκλοι

$$(C_1):\ x^2+y^2+2gx+2fy+c=0, \qquad (C_2):\ x^2+y^2+2fx+2gy+c=0.$$

i. Να βρείτε τη συνθήκη που συνδέει τα g,f,c ώστε οι δύο κύκλοι να τέμνονται σε δύο *διαφορετικά* σημεία.

ii. Να δείξετε ότι, για $g\neq f$, το μήκος της κοινής χορδής τους είναι $d=\sqrt{2(g+f)^2-4c}$.

Λύση: (Ασκ. 3/69)

Τα κέντρα είναι

$$O_1(-g,-f), \qquad O_2(-f,-g), \qquad R_1=R_2=\sqrt{g^2+f^2-c}=R.$$

Αφαιρούμε τις εξισώσεις των κύκλων:

$$\big(2g-2f\big)x+\big(2f-2g\big)y=0 \iff (g-f)(x-y)=0.$$

Για $g\neq f$ η κοινή χορδή (ριζική άξονας) είναι η ευθεία

$$x=y$$

i. Απόσταση του O_1 από τον $(*)$:

$$\mathrm{d}\big(O_1, x-y=0\big)=\frac{|-g-(-f)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|g-f|}{\sqrt{2}}.$$

Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία iff η απόσταση του κέντρου από τον ριζικό άξονα είναι *μικρότερη* της ακτίνας:

$$\frac{|g-f|}{\sqrt{2}}<R=\sqrt{g^2+f^2-c} \iff (g+f)^2-2c>0.$$

Με $g\neq f$ (αλλιώς οι κύκλοι συμπίπτουν), η ζητούμενη συνθήκη είναι

$$(g+f)^2-2c>0 \quad \text{και} \quad g\neq f$$

ii. Για ίσες ακτίνες, η κοινή χορδή είναι κάθετη στο O_1O_2 και η απόσταση της από κάθε κέντρο είναι $p=\dfrac{|g-f|}{\sqrt{2}}$. Άρα, με τον τύπο χορδής $d=2\sqrt{R^2-p^2}$,

$$d=2\sqrt{\big(g^2+f^2-c\big)-\frac{(g-f)^2}{2}}=2\sqrt{\frac{(g+f)^2-2c}{2}}=\sqrt{2(g+f)^2-4c}$$

Θέματα Εξετάσεων

1. Δίνεται ο κύκλος (K) με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$ και $A(R\text{συν}\theta,\, R\text{ημ}\theta)$, $\theta\in(0,\pi)$ τυχαίο σημείο του. Φέρουμε ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία $B(-R\text{ημ}\theta,\, R\text{συν}\theta)$ και $\Gamma(R\text{ημ}\theta,\, -R\text{συν}\theta)$.

ii. Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Λύση: 2025

i. Είναι:

$$x^2+y^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad 2x+2yy'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{x}{y}$$

Άρα η εφαπτομένη στο $A(R\text{συν}\theta,\, R\text{ημ}\theta)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\varepsilon_A}=-\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta},\quad \theta\in(0,\pi)$$

Η παράλληλη ευθεία (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση

$$y=-\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}\,x$$

Λύνουμε το σύστημα ευθείας και κύκλου:

$$x^2+y^2=R^2\Rightarrow x^2+\left(-\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}x\right)^2=R^2\Rightarrow x^2\left(\frac{\text{ημ}^2\theta+\text{συν}^2\theta}{\text{ημ}^2\theta}\right)=R^2\Rightarrow x=\pm R\text{ημ}\theta$$

Για $x=R\text{ημ}\theta$ έχουμε $y=-\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}R\text{ημ}\theta=-R\text{συν}\theta$. Για $x=-R\text{ημ}\theta$ έχουμε $y=-\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}(-R\text{ημ}\theta)=R\text{συν}\theta$.
Συνεπώς, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία

$$B(-R\text{ημ}\theta,\, R\text{συν}\theta)\quad\text{και}\quad \Gamma(R\text{ημ}\theta,\, -R\text{συν}\theta).$$

ii. Είναι:

$$x_M=\frac{R\text{συν}\theta-R\text{ημ}\theta}{2},\qquad y_M=\frac{R\text{ημ}\theta+R\text{συν}\theta}{2}$$

Άρα

$$x_M+y_M=R\text{συν}\theta,\qquad y_M-x_M=R\text{ημ}\theta$$

και

$$\frac{x_M + y_M}{R} = \text{συν}\theta, \qquad \frac{y_M - x_M}{R} = \text{ημ}\theta$$

Αντικαθιστούμε στην ταυτότητα $\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1$:

$$\left(\frac{y_M - x_M}{R}\right)^2 + \left(\frac{x_M + y_M}{R}\right)^2 = 1 \Rightarrow 2x_M^2 + 2y_M^2 = R^2 \Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Έτσι, η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB είναι ο κύκλος

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2$$

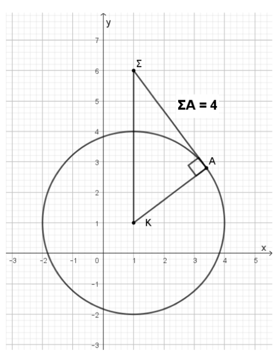
με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,1)$, αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(1,6)$ προς τον κύκλο είναι ίσο με 4 μονάδες.

Λύση: 2024

Α τρόπος: (Γεωμετρικός)



Η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου έχει τη μορφή:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Αφού το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(1,1)$, έπεται ότι:

$$\alpha = \beta = 1$$

Υπολογίζουμε την απόσταση:

$$\Sigma K = |y_\Sigma - y_K| = |6-1| = 5 \text{ μον.}$$

Εναλλακτικά, για την απόσταση:

$$\Sigma K = \sqrt{(x_\Sigma - x_K)^2 + (y_\Sigma - y_K)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (6-1)^2} = 5 \text{ μον.}$$

Το τρίγωνο $KA\Sigma$, όπου A το σημείο επαφής, είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$(\Sigma K)^2 = (\Sigma A)^2 + (KA)^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + R^2 \Rightarrow 25 = 16 + R^2 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \text{ μον.}$$

Έτσι, η ζητούμενη εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Β τρόπος: (Αλγεβρικός)

Η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου έχει τη μορφή:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

Αφού το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(1,1)$, έπεται ότι:

$$-g = 1 \Rightarrow g = -1, \quad -f = 1 \Rightarrow f = -1$$

Το μήκος (ΣA), του εφαπτόμενου προς τον κύκλο τμήματος, δίνεται από τον τύπο:

$$(\Sigma A) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

Αντικαθιστούμε:

$$4 = \sqrt{1^2 + 6^2 + 2(-1)\cdot 1 + 2(-1)\cdot 6 + c} \Rightarrow 4 = \sqrt{1 + 36 - 2 - 12 + c} \Rightarrow 4 = \sqrt{23 + c}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$16 = 23 + c \Rightarrow c = -7$$

Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

3. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=a^2$ και P τυχαίο σημείο του. Από το σημείο P φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο N. Έστω Σ σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PN τέτοιο ώστε:

$$\frac{\Sigma N}{PN}=\frac{\beta}{\alpha},\quad 0<\beta<\alpha,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ καθώς το P κινείται πάνω στον κύκλο είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

ii. Δίνεται το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{cases} x^2+y^2\leq a^2 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}\geq 1, \quad 0<\beta<\alpha \end{cases}$$

Το χωρίο που περιγράφεται από το πιο πάνω σύστημα περιστρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με:

$$V=\frac{4}{3}\pi a(\alpha^2-\beta^2) \text{ κ.μ.}$$

Λύση: 2024

i. Έχουμε ότι $P(a\text{συν}\theta,\, a\text{ημ}\theta)$, $\theta\in[0,2\pi)$, και

$$x_P=x_\Sigma=x_N=a\text{συν}\theta$$

Άρα οι συντεταγμένες των σημείων Σ και N είναι:

$$\Sigma(a\text{συν}\theta,\, y_\Sigma)\quad \text{και}\quad N(a\text{συν}\theta,0)$$

Έχουμε ότι (y_Σ, y_P) ομόσημοι αριθμοί, άρα $\dfrac{y_\Sigma}{a\text{ημ}\theta}>0$. Από τη σχέση:

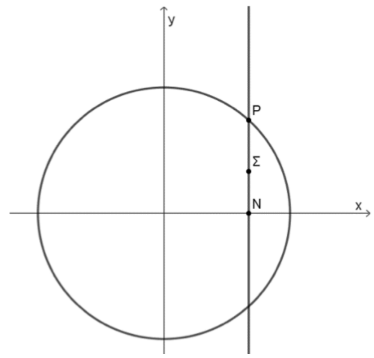
$$\frac{\Sigma N}{PN}=\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow\frac{y_\Sigma}{a\text{ημ}\theta}=\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow y_\Sigma=\beta\text{ημ}\theta$$

Επίσης:

$$x_\Sigma=a\text{συν}\theta\Rightarrow\text{συν}\theta=\frac{x_\Sigma}{a},\quad y_\Sigma=\beta\text{ημ}\theta\Rightarrow\text{ημ}\theta=\frac{y_\Sigma}{\beta}$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\text{ημ}^2\theta+\text{συν}^2\theta=1$ παίρνουμε:

$$\left(\frac{x_\Sigma}{a}\right)^2+\left(\frac{y_\Sigma}{\beta}\right)^2=1$$

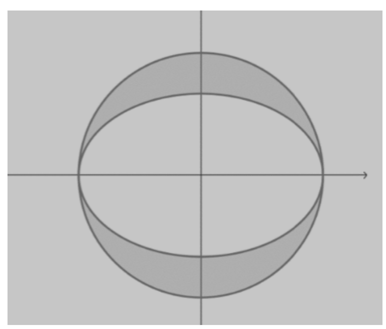


Άρα η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

ii. Λύνουμε την πιο πάνω εξίσωση ως προς y^2:

$$\beta^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 \beta^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\beta^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$



Λόγω συμμετρίας του χωρίου ως προς τους άξονες, ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = V_{\text{σφαιρικός}} = \frac{2\pi\beta^2}{a^2}\int_0^{\alpha}(a^2 - x^2)\,dx$$

Υπολογίζουμε:

$$V = \frac{2\pi\beta^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\alpha} = \frac{2\pi\beta^2}{a^2}\left(a^2\alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a(\alpha^2 - \beta^2) \text{ κ.μ.}$$

Β τρόπος (για όγκο σφαίρας):

$$V_{\text{σφαίρας}} = 2\pi\int_0^{\alpha}(a^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\alpha} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

4. Δίνεται κύκλος (C) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 μονάδων αντίστοιχα.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (C) είναι

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $T(x, y)$ του επιπέδου, του οποίου η απόσταση από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C).

Λύση: 2023

i. Αφού ο κύκλος (C) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 μονάδων αντίστοιχα, οι συντεταγμένες του κέντρου του είναι $K(3, 4)$.

$$R^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \implies (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

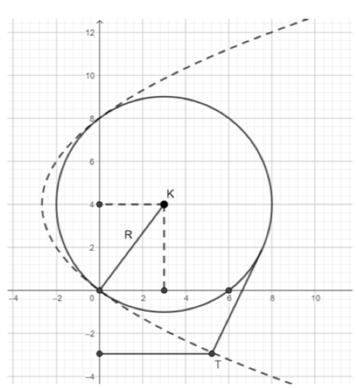
ii. Το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C) είναι ίσο με $\sqrt{\Delta_C(T)}$.

Η απόσταση του σημείου T από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με $|x_T|$. Άρα:

$$\sqrt{\Delta_C(T)} = |x_T| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 8y} = |x_T| \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = x^2$$

$$\Rightarrow y^2 - 6x - 8y = 0$$

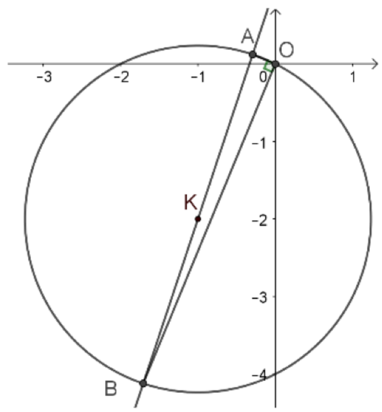
Παρατηρούμε ότι ο γεωμετρικός τόπος είναι μη κενό σύνολο, με προφανή σημεία τα $(8, 12)$ και $(8, -4)$.



5. Θεωρούμε τον κύκλο

$$x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y + \kappa - 1 = 0.$$

Να βρεθούν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $y = 3x + 1$ τέμνει τον κύκλο σε σημεία A και B έτσι ώστε η γωνία AOB να είναι ορθή, όπου O η αρχή των αξόνων.



Λύση: 2022

Α΄ Λύση:

Ο κύκλος διέρχεται από το $(0,0)$, άρα:

$$\kappa - 1 = 0 \Rightarrow \kappa = 1.$$

Η εγγεγραμμένη γωνία AOB είναι ορθή, άρα η AB είναι διάμετρος και το κέντρο του κύκλου $K\left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$ ανήκει στην ευθεία $y = 3x + 1$.

$$\lambda = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} + 1 \Rightarrow \lambda = -2$$

Β΄ Λύση:

Ο κύκλος διέρχεται από το $(0,0)$, άρα $\kappa = 1$.

Η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται. Η εξίσωση του συστήματος είναι:

$$\phi(x) = x^2 + (3x+1)^2 - \lambda x - 2\lambda(3x+1) + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x) = x^2 + 9x^2 + 6x + 1 - \lambda x - 6\lambda x - 2\lambda = 0 \Rightarrow \phi(x) = 10x^2 + (6 - 7\lambda)x + 1 - 2\lambda = 0 \quad (1)$$

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα σημεία τομής. Αφού AOB είναι ορθή, τότε AB διάμετρος του κύκλου, και επομένως το κέντρο του κύκλου είναι,

$$K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Από την (1) προκύπτει:

$$x_1 + x_2 = -\frac{6-7\lambda}{10}$$

και από την $y = 3x+1$:

$$y_1 + y_2 = 3(x_1+x_2) + 2 = \frac{21\lambda+2}{10}$$

Άρα:

$$K = \left(\frac{7\lambda-6}{20}, \frac{21\lambda+2}{20}\right)$$

Από την εξίσωση του κύκλου:

$$K = (-g, -f) = \left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$$

Συνεπώς:

$$\frac{7\lambda-6}{20} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 7\lambda - 6 = 10\lambda \Rightarrow 3\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -2$$

6. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(7,9)$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

Λύση: 2021

1ος τρόπος

Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του μέσου K:

$$x_K = \frac{1+7}{2} = 4, \qquad y_K = \frac{1+9}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad K(4,5).$$

Υπολογίζουμε το μήκος της διαμέτρου AB:

$$d_{AB} = \sqrt{(9-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \text{ μον.}$$

Άρα η ακτίνα είναι $R = \frac{d_{AB}}{2} = \frac{10}{2} = 5$ και η εξίσωση του κύκλου:

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \iff (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

2ος τρόπος

Έστω $T(x, y)$ σημείο της περιφέρειας. Επειδή AB είναι διάμετρος, η γωνία $\widehat{ATB}$ είναι ορθή, άρα οι χορδές AT και TB είναι κάθετες και το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι -1:

$$\lambda_{AT} = \frac{y-1}{x-1}, \qquad \lambda_{BT} = \frac{y-9}{x-7}, \qquad \frac{y-1}{x-1} \cdot \frac{y-9}{x-7} = -1.$$

Με ανάπτυξη:

$$(y-1)(y-9) = -(x-1)(x-7) \iff y^2 - 10y + 9 = -(x^2 - 8x + 7)$$

$$\iff x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0.$$

Η τελευταία είναι η καρτεσιανή μορφή του ίδιου κύκλου. Πράγματι, ολοκληρώνοντας τετράγωνα:

$$(x^2 - 8x) + (y^2 - 10y) + 16 = 0 \iff (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25.$$