Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι:

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- παραγωγίσιμη στο (α, β),
- και $f(\alpha) = f(\beta)$,

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0.$$

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Σε ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης σε διάστημα (α, β):

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Θεωρούμε το α' μέλος ίσο με μια συνάρτηση f.
- Έλεγχος των προϋποθέσεων του θεωρήματος Bolzano.

Εάν ο έλεγχος των προϋποθέσεων του θεωρήματος Bolzano στην f δεν αποδώσει,

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.
- Θεωρούμε μια συνάρτηση F η οποία έχει παράγωγο την f και σε αυτήν εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle. (Την F τη λέμε αρχική ή παράγουσα της f).

1. Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^4 + 4ax^3 - 1 = a,\ a \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Λύση:

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$\Big[x^5 + ax^4 - (a+1)x\Big]' = 0,$$

οπότε θεωρούμε συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + ax^4 - (a+1)x, \quad x, a \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$$f'(x) = 5x^4 + 4ax^3 - (a+1)$$

και $f(0) = f(1) = 0$.

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ ώστε

$$f'(\xi) = 0,$$

δηλαδή

$$5\xi^4 + 4a\xi^3 - 1 = a.$$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται το πολύ μια ρίζα σε διάστημα Δ
Δύο βασικές επιλογές:

1η: Απαγωγή σε άτοπο από το Θ. Rolle

Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες και είναι παραγωγίσιμη από το Θ. Rolle. Θα έχει η $f'(x)$ τουλάχιστον μία ρίζα που αποδεικνύεται άτοπο από τα δεδομένα:

- είτε επειδή η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$,
- είτε επειδή η ρίζα της $f'(x) = 0$ δεν ανήκει στο (α, β).

2η: Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη ή 1-1 οπότε θα έχει το πολύ μία ρίζα.

1. Δείξτε ότι η $2x^3 - 3x^2 - 36x + \sin\theta = 0,\ \ \theta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση:

Έστω ότι έχει δύο ρίζες $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$. Στο $[\rho_1, \rho_2]$ εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + \sin\theta$$

η οποία είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Άρα έχουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

$$\rho \in (\rho_1, \rho_2) \subset (0,1).$$

Όμως

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \text{άτοπο διότι δεν ανήκουν στο } (0,1).$$

Άρα η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$.

2. Δείξτε ότι η εξίσωση $a^x + b^x = \gamma^x$ με $0 < a < b < \gamma$, έχει το πολύ μία πραγματική λύση.

Λύση:

Είναι $a^x + b^x = \gamma^x \iff \left(\frac{a}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{b}{\gamma}\right)^x - 1 = 0$.

Θεωρούμε την

$$f(x) = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{b}{\gamma}\right)^x - 1,$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η παράγωγος είναι

$$f'(x) = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^x \ln\left(\frac{a}{\gamma}\right) + \left(\frac{b}{\gamma}\right)^x \ln\left(\frac{b}{\gamma}\right) < 0, \quad \text{για } x \in \mathbb{R},$$

αφού $\left(\frac{a}{\gamma}\right)^x > 0,\ \left(\frac{b}{\gamma}\right)^x > 0,\ \ln\left(\frac{a}{\gamma}\right) < 0,\ \ln\left(\frac{b}{\gamma}\right) < 0$.

Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική λύση.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει ν το πολύ ρίζες.
Δείχνουμε ότι αποκλείεται να έχει $\nu + 1$ ρίζες. Αυτό γίνεται με τους εξής τρόπους:

i. Με το θεώρημα του Rolle στα ν διαστήματα

   a. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μία παραπάνω ρίζα.

   b. Θεωρούμε συνάρτηση αφού μεταφέρουμε τους όρους της εξίσωσης σε ένα μέλος.

   c. Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στα διαστήματα που δημιουργούν οι ρίζες που υποθέσαμε και οδηγούμαστε σε άτοπο.

ii. Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα.

iii. Με τον βαθμό της συνάρτησης, αν βέβαια πρόκειται για πολυωνυμική.

Αν το άτοπο δεν “φαίνεται” εύκολα, εφαρμόζουμε ξανά το Θ. Rolle στα $\nu - 1$ διαστήματα ή ακόμη και στα $\nu - 2, \nu - 3$, έως ότου καταλήξουμε σε άτοπο.

1. Να αποδείξετε ότι η $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση:

Η $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$f(-1) = -2 < 0 \quad \text{και} \quad f(1) = 4 > 0$$

Άρα, $f(-1)f(1) < 0$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει άλλη ρίζα.

Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες και ρ_1, ρ_2 δύο τυχαίες ρίζες με $\rho_1 < \rho_2$. Για το διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ισχύουν τα εξής:

- η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Έτσι, το θεώρημα Rolle ισχύει για την f στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5$$

Επομένως,

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 15\xi^4 - 15\xi^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0.$$

Θέτουμε $\omega = \xi^2$. Η εξίσωση $3\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις, αφού η διακρίνουσα της είναι

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Επομένως, ούτε και η εξίσωση $3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0$ έχει πραγματικές λύσεις.

Έτσι, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες. Επειδή όμως αποδείξαμε προηγουμένως ότι έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, αυτή θα είναι και η μοναδική.

2. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \;\; x \in (2,3)$$

i. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano), σύμφωνα με το οποίο αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και $f(a)f(b) < 0$, τότε η f έχει ρίζα στο διάστημα (a,b), αποδείξτε ότι η ως άνω εξίσωση έχει ρίζες στο διάστημα $(2,3)$.

ii. Δείξτε ότι στο ίδιο διάστημα, η ρίζα της συνάρτησης είναι μοναδική.

a. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle

b. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μονοτονίας

Λύση:

i. Ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 2x - 5.$$

Η f είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, και ειδικότερα στο διάστημα $[2,3]$.

Υπολογίζουμε τα άκρα του διαστήματος:

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = 8 - 4 - 5 = -1,$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 27 - 6 - 5 = 16.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(2) \cdot f(3) = (-1) \cdot 16 = -16 < 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano), υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $(2,3)$.

ii.

a. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (2,3)$ με $x_1 < x_2$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε ένα $c \in (x_1, x_2)$ με $f'(c) = 0$. Όμως, $f'(x) > 0$ σε όλο το διάστημα, άτοπο. Άρα η ρίζα είναι μοναδική.

b.

$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Στο διάστημα $(2,3)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \geq 3 \cdot 2^2 - 2 = 12 - 2 = 10 > 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,3)$. . Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζα σε ένα διάστημα, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 - \ln x = x^2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, e)$.

Λύση:

Έλεγχος τιμών στα άκρα του διαστήματος

$$f(1) = 2 - \ln 1 - 1^2 = 2 - 0 - 1 = 1 > 0,$$

$$f(e) = 2 - \ln e - e^2 = 2 - 1 - e^2 = 1 - e^2 < 0.$$

Εφαρμογή Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής (Bolzano)

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$. Επειδή

$$f(1) \cdot f(e) < 0,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (1, e)$.

Έλεγχος μονοτονίας για μοναδικότητα. Η παράγωγος της $f(x)$ είναι

$$f'(x) = -\frac{1}{x} - 2x.$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (1, e).$$

Άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι:

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- παραγωγίσιμη στο (α, β),

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

i. Διπλή ανισοτική σχέση

a. Μετατρέπουμε την ανισότητα σε

$$K < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \Lambda$$

b. Αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση f και το διάστημα $[\alpha, \beta]$.

c. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$ οδηγούμαστε στην ύπαρξη κάποιου

$$\xi \in (\alpha, \beta) : \quad f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $K < f'(\xi) < \Lambda$.

Η ισχύς της τελευταίας ανίσωσης προκύπτει είτε από απλές πράξεις είτε με χρήση της μονοτονίας της f'.

1. Δείξτε ότι $1+\dfrac{1}{e+1}<\ln(1+e)<1+\dfrac{1}{e}$.

Λύση:

Είναι

$$1+\frac{1}{e+1}<\ln(1+e)<1+\frac{1}{e} \iff \frac{1}{e+1}<\ln(1+e)-1<\frac{1}{e} \iff \frac{1}{e+1}<\frac{\ln(1+e)-\ln e}{(1+e)-e}<\frac{1}{e}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x\in[e,1+e]$. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Οπότε υπάρχει $\xi\in(e,1+e)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(1+e)-f(e)}{1+e-e} \iff f'(\xi)=\frac{\ln(1+e)-1}{1} \iff \frac{1}{\xi}=\ln(1+e)-1.$$

Επειδή $\xi\in(e,1+e)$ είναι $0<e<\xi<1+e \iff \frac{1}{e}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+e}$

$$\iff \frac{1}{1+e}<\ln(1+e)-1<\frac{1}{e} \iff 1+\frac{1}{1+e}<\ln(1+e)<1+\frac{1}{e}.$$

2. Για κάθε $\kappa>0$ δείξτε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}+\sqrt[5]{\kappa}>\sqrt[5]{4\kappa}$$

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}+\sqrt[5]{\kappa}>\sqrt[5]{4\kappa} \iff \frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa} \iff \frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\frac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{3\kappa} \iff \frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}}>\frac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}.$$

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[5]{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\kappa,4\kappa]$ με $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Επομένως, από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(\kappa,4\kappa)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(4\kappa)-f(\kappa)}{4\kappa-\kappa} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}}=\frac{\sqrt[5]{4\kappa}-\sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa-\kappa}. \tag{1}$$

Όμως, αφού $0 < \kappa < \xi < 4\kappa$, θα έχουμε:

$$\kappa^4 < \xi^4 \iff \sqrt[5]{\kappa^4} < \sqrt[5]{\xi^4} \iff \frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} > \frac{1}{5\sqrt[5]{\xi^4}}.$$

Και από την (1) είναι:

$$\frac{1}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} > \frac{\sqrt[5]{4\kappa} - \sqrt[5]{\kappa}}{4\kappa - \kappa}.$$

Άρα αποδείξαμε ότι

$$\frac{3\kappa}{5\sqrt[5]{\kappa^4}} + \sqrt[5]{\kappa} > \sqrt[5]{4\kappa}.$$

3. Με τη βοήθεια του θεωρήματος της μέσης τιμής, να δείξετε ότι:

$$1 + x < e^x < 1 + ex$$

για κάθε $x \in (0, 1)$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ και εξετάζουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[0, x]$.

1. Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$
2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $f'(x) = e^x$

Επομένως υπάρχει $\xi \in (0, x)$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \implies e^{\xi} = \frac{e^x - 1}{x} \tag{1}$$

Ισχύει:

$$\xi \in (0, x): \quad 0 < \xi < x < 1 \quad \xrightarrow{e^x \text{ αύξουσα}} \quad e^0 < e^{\xi} < e^x < e^1$$
$$1 < e^{\xi} < e$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1):

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e \implies x < e^x - 1 < xe \implies x + 1 < e^x < xe + 1$$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, σ' ένα διάστημα Δ. Δείχνουμε ότι είναι συνεχής σε διάστημα και για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος η παράγωγος υπάρχει και είναι μηδέν.

1. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)(x+10) = f(x), \quad x > 0.$$

a. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+10}$ είναι σταθερή στο $[0, +\infty)$.

b. Βρείτε τη συνάρτηση f εάν $f(1) = 1$.

Λύση:

a. Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{(x+10)f'(x) - f(x)}{(x+10)^2}.$$

Από την υπόθεση $f'(x)(x+10) = f(x)$ προκύπτει $g'(x) = 0$. Άρα $g(x) = c, \ c \in \mathbb{R}$.

b. Είναι $g(x) = c \iff \dfrac{f(x)}{x+10} = c \iff f(x) = c(x+10)$. Με $f(1) = 1$ προκύπτει

$$1 = c(1+10) \ \Rightarrow \ c = \frac{1}{11}.$$

Άρα

$$f(x) = \frac{1}{11}(x+10), \quad x > 0.$$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f.

a. Οριζόντιας εφαπτομένης της f σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.

b. Εφαπτομένης που πληροί ορισμένες (γεωμετρικές) προϋποθέσεις.

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin(\pi x) + ax^2 + \beta x$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ με $a + \beta = 1$ (1). Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y + x = 3$.

Λύση:

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \iff f'(x_0) = a + \beta \overset{(1)}{\iff} f'(x_0) = 1$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$. Ισχύει $f'(x_0) \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Δηλαδή υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία ε σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη στην ε_1.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Εύρεση του τύπου συνάρτησης $f(x)$ με την επίλυση εξίσωσης στην οποία υπάρχουν και η $f(x)$

1. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)(\kappa - x) = f(x),\ x \neq \kappa$.

Λύση:

Είναι:

$$f'(x)(\kappa - x) - f(x) = 0 \ \text{ή}\ f'(x)(\kappa - x) + (\kappa - x)' f(x) = 0 \ \text{ή}\ \left[f(x)(\kappa - x) \right]' = 0.$$

Άρα η $g(x) = f(x)(\kappa - x) = c \iff f(x) = \dfrac{c}{\kappa - x}$, για κάθε $x \neq \kappa,\ c \in \mathbb{R}$.

Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, τότε:

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.
Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Ορισμοί.

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) < f(x_2).$$

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) > f(x_2).$$

Θεώρημα (Fermat)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ, στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

$$f'(x_0) = 0.$$

Ορισμός.

- Το x_0 λέγεται **σημείο τοπικού μέγιστου** της f αν υπάρχει διάστημα γύρω από το x_0 τέτοιο ώστε
$$f(x) \leq f(x_0).$$

- Το x_0 λέγεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** της f αν υπάρχει διάστημα γύρω από το x_0 τέτοιο ώστε
$$f(x) \geq f(x_0).$$

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης f.

- Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$.
- Θέτουμε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$=0 (Θεώρημα Fermat).
- Κατασκευάζουμε το Πινακάκι Μονοτονίας.

1. Να μελετήσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα:

i. $f(x) = -x^3 + 12x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = x \ln x, \qquad x \in (0, \infty)$

Λύση:

i. Παράγωγος:

$$f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x-2)(x+2).$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$x = -2,\ 2.$$

Τιμές της συνάρτησης στα ακρότατα:

$$f(-2) = -(-2)^3 + 12(-2) + 1 = -15,$$

$$f(2) = -(2)^3 + 12(2) + 1 = 17.$$

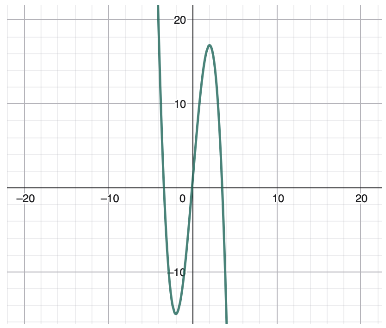
Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Συμπέρασμα:

Τοπικό ελάχιστο: $x = -2,\ f(-2) = -15$

Τοπικό μέγιστο: $x = 2,\ f(2) = 17$



ii. Παράγωγος:

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

Συνθήκη ακρότατου ($f'(x) = 0$):

$$\ln x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

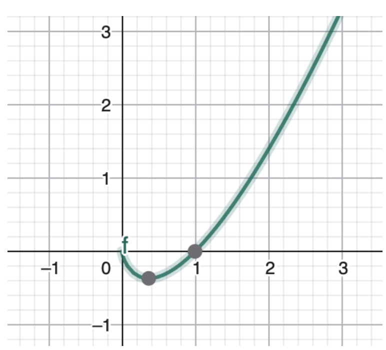
Τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f\left(\tfrac{1}{e}\right) = \tfrac{1}{e}\ln\left(\tfrac{1}{e}\right) = \tfrac{1}{e}\cdot(-1) = -\tfrac{1}{e}.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	0^+	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Η συνάρτηση έχει στο $x = \frac{1}{e}$ τοπικό και ολικό ελάχιστο με τιμή $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:



2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = |x-1|, x \in \mathbb{R}$

Λύση:

Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1,+\infty) \\ 1-x, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 1$, και συνεπώς σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, αφού:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, με:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1,+\infty) \\ -1, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Άρα, είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Συνεπώς, έχουμε κρίσιμο σημείο, το $x = 1$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής:

$$f(x) \geq g(x) \quad ή \quad f(x) \leq g(x)$$

θέτουμε

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

και από τη μονοτονία και τα ακρότατα της h προκύπτει η ισχύς της προς απόδειξη ανισότητας.

1. Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και να αναφέρετε πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x - 1 - x$.

Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Από τον πιο πάνω πίνακα, παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Για $x = 0$, έχουμε ολικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : f(x) > 0 \iff e^x - 1 - x > 0 \iff e^x > 1 + x$
- Για $x = 0$ ισχύει: $f(x) = 0 \iff e^x = 1 + x$

Άρα, τελικά ισχύει ότι

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $x = 0$.

2. Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq 1 - \ln(x+1)$, για κάθε $x \geq 0$

Λύση:

Θέτουμε

$$h(x) = e^x - 1 + \ln(x+1), \quad x \geq 0.$$

Έχουμε

$$h'(x) = (e^x - 1 + \ln(x+1))' = e^x + \frac{1}{x+1} > 0, \quad x \geq 0.$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Επομένως, για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$h(x) \geq h(0) = 0 \iff e^x - 1 + \ln(x+1) \geq 0 \iff e^x \geq 1 - \ln(x+1).$$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Αν έχουμε ως προϋπόθεση ότι ισχύει μια ανισοτική σχέση όπως για παράδειγμα

$$f(x) \geq a \quad \text{ή} \quad f(x) \leq a$$

και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια παράμετρο, βρίσκουμε x_0 τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = a,$$

οπότε από τη σχέση $f(x) \geq a = f(x_0)$ ή $f(x) \leq a = f(x_0)$ και σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, προκύπτει

$$f'(x_0) = 0.$$

Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη παράμετρο.

1. Αν $a^x + 5^x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $a > 0$, να αποδείξετε ότι $a = \frac{1}{5}$.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = a^x + 5^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Οι όροι a^x και 5^x είναι συνεχείς και διαφορίσιμες σε $\mathbb{R}$, επομένως και f είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε $\mathbb{R}$.

Από την υπόθεση έχουμε

$$f(x) \geq 2 = f(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε η f έχει ελάχιστο στη θέση $x = 0$. Άρα, από την απαίτηση για ακρότατο (θεώρημα Fermat), ισχύει

$$f'(0) = 0.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = a^x \ln a + 5^x \ln 5,$$

και επομένως

$$f'(0) = a^0 \ln a + 5^0 \ln 5 = \ln a + \ln 5 = 0.$$

Απ' αυτό προκύπτει

$$\ln(a5) = 0 \iff a5 = 1 \iff a = \frac{1}{5}.$$

Αυτό έπρεπε να αποδειχθεί.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Όταν ζητείται τιμή μιας παραμέτρου ώστε μία συνάρτηση να παρουσιάζει f ακρότατο σε μια θέση, έστω x_0, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat πρέπει

$$f'(x_0) = 0.$$

Από τη συνθήκη αυτή και από τα υπόλοιπα δεδομένα προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου, λύνοντας το σύστημα εξισώσεων.

Προσοχή: Θα πρέπει με πινακάκι να επαληθευτεί !

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3, \quad x \in \mathbb{R},\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή -2, να υπολογίσετε τις τιμές των κ, λ και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.

Λύση: Η παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = 2\kappa x + \lambda.$$

Για να υπάρχει ακρότατο στο $x = 1$, πρέπει:

$$f'(1) = 2\kappa + \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2\kappa.$$

Επιπλέον δίνεται ότι $f(1) = -2$:

$$f(1) = \kappa + \lambda + 3 = \kappa - 2\kappa + 3 = -\kappa + 3 = -2 \quad \Longrightarrow \quad \kappa = 5.$$

Συνεπώς:

$$\lambda = -2 \cdot 5 = -10.$$

Η παράγωγος γίνεται:

$$f'(x) = 10x - 10 = 10(x - 1).$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο με τιμή $f(1) = -2$.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 + 3x^2 + 2\lambda, \quad x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -2$, με $f(-2) = 0$. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ και να χαρακτηρίσετε το είδος του ακρότατου στο $x = -2$.

Λύση:

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$f'(x) = 3\kappa x^2 + 6x$$

Για τοπικό ακρότατο στο $x = -2$:

$$f'(-2) = 0 \implies 3\kappa(-2)^2 + 6(-2) = 0$$

$$12\kappa - 12 = 0 \implies \kappa = 1$$

Χρησιμοποιούμε την τιμή της συνάρτησης στο ακρότατο:

$$f(-2) = \kappa(-2)^3 + 3(-2)^2 + 2\lambda = 0$$

$$-8 + 12 + 2\lambda = 0 \implies 2\lambda = -4 \implies \lambda = -2$$

Ελέγχουμε το είδος του ακρότατου χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = 6\kappa x + 6 = 6x + 6$$

$$f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Στο $x = -2$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, τότε:

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **κοίλη προς τα άνω)** στο Δ.
Αν $f''(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **κοίλη προς τα κάτω)** στο Δ.

Θεώρημα (Σημεία Καμπής)

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ.
Αν η $f''(x)$ μεταβάλλει πρόσημο σε ένα σημείο $x_0 \in \Delta$, τότε το x_0 είναι **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Ορισμός.

- Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f, όταν η f μεταβαίνει από κυρτή σε κοίλη ή αντίστροφα στο σημείο αυτό.

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f.

- Βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο $f''(x)$.
- Θέτουμε την δεύτερη παράγωγο $f''(x)$=0 (Θεώρημα Fermat).
- Κατασκευάζουμε το Πινακάκι Κυρτότητας.

1. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \ln(x^2+1)$$

Λύση:

Πρέπει $x^2+1>0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f'(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)' = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$$

και

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Θα προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f''(x)=0$.

Έχουμε $\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \iff 2(1-x^2)=0 \iff 1-x^2=0 \iff 1=x^2 \iff x=\pm 1.$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$	ΣΚ	$\cup$	ΣΚ	$\cap$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$, κυρτή στο $[-1,1]$ και κοίλη στο $[1,+\infty)$.

Σημεία καμπής είναι τα: $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$, δηλαδή τα $(-1,\ln 2)$ και $(1,\ln 2)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3+6x^2-2, & x \le 1 \\ x^3-9x^2+13, & x>1 \end{cases}$$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση:

Για $x<1$ είναι $f'(x) = 3x^2+12x$

Για $x>1$ είναι $f'(x) = 3x^2-18x$

Έλεγχος ύπαρξης παραγώγου στη θέση $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+6x^2-2-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+6x^2-7}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+7x+7)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x^2+7x+7) = 15$$

και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-9x^2+13-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-9x^2+8}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2-8x-8)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x^2-8x-8) = -15$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 1$ και η παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+12x, & x<1 \\ 3x^2-18x, & x>1 \end{cases}$$

Για την $f''(x)$ έχουμε:

Για $x<1$ είναι $f''(x) = (3x^2+12x)' = 6x+12$

Για $x>1$ είναι $f''(x) = (3x^2-18x)' = 6x-18$

Άρα

$$f''(x) = \begin{cases} 6x+12, & x<1 \\ 6x-18, & x>1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	ΣΚ	$\cup$		$\cap$	ΣΚ	$\cup$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$, είναι κυρτή στο $[-2,1]$, είναι κοίλη στο $[1,3]$ και κυρτή στο $[3,+\infty)$. Σημεία καμπής έχει τα: $(-2, f(-2))$ ή $(-2,14)$ και στο $(3, f(3))$ ή $(3,-41)$.

Προσοχή!
Στο $x_0 = 1$ δεν έχει σημείο καμπής γιατί δεν υπάρχει η $f'(1)$ οπότε δεν ορίζεται εφαπτομένη.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε τις τιμές μιας παραμέτρου a ώστε η f να είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα, τότε ΑΠΑΙΤΟΥΜΕ:

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{ή} \quad f''(x) \leq 0 \quad \text{αντίστοιχα.}$$

1. Έστω $f(x) = 2x^4 + 4ax^3 + 3(4a-3)x^2 + 1$. Να βρεθεί ο πραγματικός a ώστε η f να στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η $f(x)$, ως πολυωνυμική, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f'(x) = 8x^3+12ax^2+6(4a-3)x$ και $f''(x) = 24x^2+24ax+6(4a-3) \;\Rightarrow\; f''(x) = 6\big(4x^2+4ax+4a-3\big)$.

Για να είναι η f κυρτή στο $\mathbb{R}$, πρέπει:

$$f''(x) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή:

$$4x^2 + 4ax + 4a - 3 \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή είναι τριώνυμο, αρκεί να έχει διακρίνουσα $\Delta_x \leq 0$, δηλαδή:

$$16a^2 - 16(4a-3) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 - 4a + 3 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq a \leq 3.$$

Άρα πρέπει $a \in [1,3]$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση δεν έχει σημεία καμπής, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

1. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2ax^3}{3} + \left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x^2 + (a^3+7)x - 5a^2.$$

Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Η $f(x)$ είναι πολυωνυμική, άρα δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2ax^2 + 2\left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x + a^3 + 7$$

και

$$f''(x) = 4x^2 + 4ax + 2\left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right) \;\Leftrightarrow\; f''(x) = 4x^2 + 4ax + 2a^2 - 4a + 5.$$

Επειδή η $f''(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το πρόσημό της εξαρτάται από τη διακρίνουσα:

$$\Delta_x = (4a)^2 - 16(2a^2 - 4a + 5) \;\Leftrightarrow\; \Delta_x = 16a^2 - 16(2a^2 - 4a + 5) \;\Leftrightarrow\; \Delta_x = -16(a^2 - 4a + 5).$$

Το τριώνυμο $a^2 - 4a + 5$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta_a = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0,$$

οπότε είναι πάντοτε θετικό, δηλαδή $a^2 - 4a + 5 > 0$. Άρα $\Delta_x < 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι

$$f''(x) > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η f δεν έχει σημεία καμπής.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε μία συνάρτηση να έχει σημείο καμπής στο x_0.

1. Έστω $f(x) = 2x^2 + a\ln x + \beta$ με $x > 0$. Να υπολογίσετε τα a, β ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1, 5)$.

Λύση

Είναι

$$f'(x) = 4x + \frac{a}{x} \quad \text{και} \quad f''(x) = 4 - \frac{a}{x^2}.$$

Επειδή η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, θα ισχύει:

$$f''(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 - \frac{a}{1} = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 4$$

Επίσης είναι

$$f(1) = 5 \;\Leftrightarrow\; 2 + \beta = 5 \;\Leftrightarrow\; \beta = 3$$