
Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος

Σειρές

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 4^{\kappa} & \text{ii.} \quad \sum_{\kappa=1}^{+\infty} (2\kappa - 1) \quad \text{iii.} \quad \sum_{\kappa=1}^{+\infty} (-1)^{\kappa} \\ \text{iv.} & \sum_{\kappa=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa} & \text{v.} \quad \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{\kappa} \quad \text{vi.} \quad \sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{-\kappa} \end{array}$$

Λύση:

(Ασκ. 1/75)

i. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = 4$ και λόγο $r = 4$. Επομένως:

$$s_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 4^{\kappa} = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{\nu} = \frac{4(1 - 4^{\nu})}{1 - 4} = \frac{4}{3}(4^{\nu} - 1)$$

Καθώς,

$$s_{\nu} = \frac{a(1 - r^{\nu})}{1 - r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} s_{\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{4}{3}(4^{\nu} - 1) = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε $|r| > 1$

ii. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε μια αριθμητική σειρά.

$$s_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (2\kappa - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2\nu - 1) = \frac{\nu}{2}(1 + 2\nu - 1) = \nu^2$$

Καθώς,

$$s_{\nu} = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_{\nu})$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} s_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^2 = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε είναι αριθμητική σειρά με $d \neq 0$

iii. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^\kappa = (-1) + (+1) + (-1) + (+1) + \cdots + (-1)^\nu = \begin{cases} -1, & \nu \text{ περιττός} \\ 0, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Επομένως, καθώς το ν τείνει στο άπειρο, το s_ν δεν υπάρχει, γιατί η τιμή του κυμαίνεται στους δύο αριθμούς -1 και 0 . Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει.

iv. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = -\frac{1}{2}$ και λόγο $r = -\frac{1}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right), \end{aligned}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1 - r^\nu)}{1 - r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} s_\nu = - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu\right) = -\frac{1}{3}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει, άλλωστε είναι γεωμετρική με $|r| < 1$

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa = -\frac{1}{3}$$

Προσοχή, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, άμεσα από τον τύπο (γεωμετρικής σειράς)

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - r} = \frac{-1/2}{1 - (-1/2)} = -\frac{1}{3}$$

v. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με $a_1 = 3$ και $r = 3$:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 3^\kappa = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^\nu = \frac{3(1-3^\nu)}{1-3} = \frac{3^{\nu+1}-3}{2}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1-r^\nu)}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} s_\nu = +\infty$$

Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει, άλλωστε $|r| > 1$.

vi. Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με $a_1 = \frac{1}{3}$ και $r = \frac{1}{3}$:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 3^{-\kappa} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^\nu} = \frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^\nu)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-(\frac{1}{3})^\nu}{2}$$

Καθώς,

$$s_\nu = \frac{a(1-r^\nu)}{1-r}$$

Έτσι:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} s_\nu = \frac{1}{2}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει, άλλωστε $|r| < 1$, και

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} 3^{-\kappa} = \frac{1}{2}.$$

Προσοχή, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα της σειράς, άμεσα από τον τύπο (γεωμετρικής σειράς)

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1/3}{1-(1/3)} = \frac{1}{2}$$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} 2^{4n+1} & \text{ii.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}} \quad \text{iii.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} \\ \text{iv.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{3-n}}{8^{2-n}} & \text{v.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}} \quad \text{vi.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} \end{array}$$

Λύση:

i.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2} 4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-(n-2)} 4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} 4^2}{9^{n-1} 9^{-1}}$$

Μπορούμε να το φέρουμε σε τυποποιημένη μορφή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2} 4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 16 \cdot 9 \left(\frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 144 \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a = 144$ και $r = \frac{4}{9} < 1$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$ η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2} 4^{n+1} = \frac{144}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}(144) = \frac{1296}{5}$$

ii.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-4)^3)^n}{5^n 5^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \frac{(-64)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{-64}{5} \right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 5$ και $r = -\frac{64}{5}$. Δεδομένου ότι $|r| \geq 1$ η σειρά αποκλίνει.

iii.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \frac{1}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 5$ και $r = \frac{1}{6}$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \frac{5 \cdot \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

iv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{3-n}}{8^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1} 8^{-1}}{(-6)^{n-1} (-6)^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^2}{8^1} \left(\frac{8}{-6} \right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2} \left(-\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a = \frac{9}{2}$ και $r = -\frac{4}{3}$. Δεδομένου ότι $|r| > 1$, η σειρά αποκλίνει.

v.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} 5^2}{7^{n-1} 7^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (25)(7) \frac{5^{n-1}}{7^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 175 \left(\frac{5}{7} \right)^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $a = 175$ και $r = \frac{5}{7}$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει στο,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 175 \left(\frac{5}{7} \right)^{n-1} = \frac{175}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{1225}{2}$$

vi.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = 3^{2+0} 2^{1-3 \cdot 0} + \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = 18 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 2^{-3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 18 \cdot \frac{3^n}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 18 \left(\frac{3}{8} \right)^n$$

Παρατηρούμε ότι $a = 18$ και $r = \frac{3}{8} < 1$. Δεδομένου ότι $|r| < 1$, η σειρά συγκλίνει και το άθροισμα της σειράς από $n = 1$ είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 18 \left(\frac{3}{8} \right)^n = 18 \cdot \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = 18 \cdot \frac{3/8}{5/8} = \frac{54}{5}$$

Προσθέτοντας τον πρώτο όρο $n = 0$:

$$18 + \frac{54}{5} = \frac{90 + 54}{5} = \frac{144}{5}$$

Επομένως,

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2+n} 2^{1-3n} = \frac{144}{5}.$$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω τηλεσκοπικές σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \quad \text{ii.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3} \\ \text{iii.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 7n + 12} \quad \text{iv.} \quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{10}{n^2 - 4n + 3} \end{array}$$

Λύση:

i.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2 + 3i + 2}.$$

Σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{i^2 + 3i + 2} = \frac{1}{i + 1} - \frac{1}{i + 2}.$$

Το μερικό άθροισμά είναι,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 1.$$

ii. Το μερικό άθροισμα είναι,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{5}{12}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3} = \frac{5}{12}$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{3}{n^2 + 7n + 12} = \frac{3}{(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+4}$$

$$\rightarrow 3 = A(n+4) + B(n+3)$$

$$n = -3 \Rightarrow 3 = A$$

$$n = -4 \Rightarrow 3 = -B \Rightarrow B = -3$$

$$A = 3$$

$$\frac{3}{n^2 + 7n + 12} = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+4}$$

Το μερικό άθροισμα είναι,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{i+3} - \frac{3}{i+4} \right] \\ s_n &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{i+3} - \frac{3}{i+4} \right] = \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{5} \right] + \left[\frac{3}{5} - \frac{3}{6} \right] + \left[\frac{3}{6} - \frac{3}{7} \right] + \dots \\ &\quad + \left[\frac{3}{n+1} - \frac{3}{n+2} \right] + \left[\frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3} \right] + \left[\frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+4} \right] \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{n+4} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{n+4} \right] = \frac{3}{4}$$

iv. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{10}{n^2 - 4n + 3} = \frac{10}{(n-1)(n-3)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n-3}$$

$$\rightarrow 10 = A(n-3) + B(n-1)$$

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow 10 = -2A \Rightarrow A = -5 \\ n=3 &\Rightarrow 10 = 2B \Rightarrow B = 5 \end{aligned}$$

$$\frac{10}{n^2 - 4n + 3} = \frac{5}{n-3} - \frac{5}{n-1}$$

Το μερικό άθροισμα είναι,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=4}^n \left[\frac{5}{i-3} - \frac{5}{i-1} \right] \\ &= \left[\frac{5}{1} - \frac{5}{3} \right] + \left[\frac{5}{2} - \frac{5}{4} \right] + \left[\frac{5}{3} - \frac{5}{5} \right] + \left[\frac{5}{4} - \frac{5}{6} \right] \\ &\quad + \left[\frac{5}{5} - \frac{5}{7} \right] + \left[\frac{5}{6} - \frac{5}{8} \right] + \dots \\ &\quad + \left[\frac{5}{n-7} - \frac{5}{n-5} \right] + \left[\frac{5}{n-6} - \frac{5}{n-4} \right] + \left[\frac{5}{n-5} - \frac{5}{n-3} \right] \\ &\quad + \left[\frac{5}{n-4} - \frac{5}{n-2} \right] + \left[\frac{5}{n-3} - \frac{5}{n-1} \right] \\ &= 5 + \frac{5}{2} - \frac{5}{n-2} - \frac{5}{n-1} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{15}{2} - \frac{5}{n-2} - \frac{5}{n-1} \right] = \frac{15}{2}$$

4*. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου (Ratio Test).

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)} & \text{ii.} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} & \text{iii.} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!} \\ \text{iv.} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{(-2)^{n+1}n} & \text{v.} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} & \text{vi.} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2n+7} \end{aligned}$$

Λύση:

i.

$$a_n = \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2(n+1)+1}((n+1)+1)} = \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)}$$

Επομένως,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right|$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} \cdot \frac{4^{2n+1}(n+1)}{(-10)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-10(n+1)}{4^2(n+2)} \right|$$

$$= \frac{10}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{10}{16} < 1$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

ii.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{5 n!}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) n!}{5 n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty > 1$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

iii.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n)n^2}$$

$$= 0 < 1$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

iv.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{9^{n+1}}{(-2)^{n+2}(n+1)} \cdot \frac{(-2)^{n+1}n}{9^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{9n}{(-2)(n+1)} \right| \\ &= \frac{9}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{9}{2} > 1 \end{aligned}$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

v.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} \cdot \frac{n^2 + 1}{(-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} = 1$$

Επομένως δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την σύγκλιση μέσω του κριτηρίου λόγου.

Σημείωση:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right| &= \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1. \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &\text{ συγχλίνει (p-σειρά, με } p = 2 > 1). \\ \text{Άρα, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} &\text{ συγχλίνει απολύτως.} \end{aligned}$$

vi.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+3}{2(n+1)+7} \cdot \frac{2n+7}{n+2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(2n+7)}{(2n+9)(n+2)} = 1$$

Επομένως δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την σύγκλιση μέσω του κριτηρίου λόγου.

5*. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν χρησιμοποιώντας το κριτήριο ρίζας (Root Test).

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2} \right)^n$

iii. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-12)^n}{n}$

i.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^n}{3^{1+2n}} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^{\frac{1}{n}+2}} = \frac{\infty}{3^2} = \infty > 1$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

ii.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2} \right)^n \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5n - 3n^3}{7n^3 + 2} \right| = \left| \frac{-3}{7} \right| = \frac{3}{7} < 1$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα θα συγκλίνει.

iii.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-12)^n}{n} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n^{1/n}} = \frac{12}{1} = 12 > 1$$

Η σειρά αποκλίνει απολύτως και άρα θα αποκλίνει.

6. Ο γενικός τύπος Faulhaber δίνεται πιο κάτω.

$$\sum_{n=1}^N n^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} B_k N^{p+1-k}$$

όπου για $p = 1, 2, 3$ είναι,

$$p = 1 : \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2},$$

$$p = 2 : \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$p = 3 : \sum_{n=1}^N n^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2} \right)^2.$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα, χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω.

i. $\sum_{k=1}^v (4k^3 + 2k)$

ii. $\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + \nu(\nu+1)(\nu+2)$

iii. $\sum_{k=11}^{30} (6k^2 + 2k)$

i. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αθροίσματος και τα γνωστά αποτελέσματα

$$\sum_{k=1}^{\nu} k, \quad \sum_{k=1}^{\nu} k^3$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} (4k^3 + 2k) &= 4 \sum_{k=1}^{\nu} k^3 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= 4 \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + 2 \frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ &= \nu^2(\nu+1)^2 + \nu(\nu+1) \\ &= \nu(\nu+1)[\nu(\nu+1) + 1] \\ &= \nu(\nu+1)(\nu^2 + \nu + 1) \end{aligned}$$

ii.

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+2)$$

Κάνοντας τις πράξεις, και χρησιμοποιώντας τις σχετικές ιδιότητες των αθροισμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{\nu} k(k^2 + 3k + 2) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} (k^3 + 3k^2 + 2k) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} k^3 + 3 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + 3 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2 \frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ &= \frac{\nu(\nu+1)}{4} (\nu(\nu+1) + 2(2\nu+1) + 4) \\ &= \frac{\nu(\nu+1)}{4} (\nu^2 + 5\nu + 6) \\ &= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4} \end{aligned}$$

iii.

$$\sum_{k=11}^{30} (6k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^{30} (6k^2 + 2k) - \sum_{k=1}^{10} (6k^2 + 2k) = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το ζητούμενο άθροισμα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους:

$$\sum_{k=1}^{\nu} (6k^2 + 2k) = 6 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2 \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \nu(\nu+1)(2\nu+1+1) = 2\nu(\nu+1)^2$$

- Για $\nu = 30$, έχουμε: $\Sigma_1 = 2 \cdot 30 \cdot 31^2 = 57660$
- Για $\nu = 10$, έχουμε: $\Sigma_2 = 2 \cdot 10 \cdot 11^2 = 2420$

Επομένως:

$$\sum_{k=11}^{30} (6k^2 + 2k) = \Sigma_1 - \Sigma_2 = 57660 - 2420 = 55240$$

7. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{k=1}^{10} (3k + \lambda) = 245.$$

Λύση:

(Ασκ. 3/67)

$$\sum_{k=1}^{10} (3k + \lambda) = 3 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} \lambda = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 10\lambda = 165 + 10\lambda.$$

Θέλουμε

$$165 + 10\lambda = 245 \Rightarrow 10\lambda = 80 \Rightarrow \lambda = 8.$$

Έλεγχος:

$$\sum_{k=1}^{10} (3k + 8) = 165 + 80 = 245.$$

8. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω μερικά αθροίσματα:

i. $\sum_{k=1}^{\nu} (2 \cdot 4^{k-1})$

ii. $\sum_{k=11}^{\nu} 5$

iii. $\sum_{k=1}^{\nu} 2^{-k}$

Λύση:

(Ασκ. 4/67)

i.

$$\sum_{k=1}^{\nu} (2 \cdot 4^{k-1}) = 2 \sum_{k=1}^{\nu} 4^{k-1} = 2 \cdot \frac{4^{\nu} - 1}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^{\nu} - 1).$$

ii.

$$\sum_{k=11}^{\nu} 5 = 5(\nu - 10), \quad (\nu \geq 11).$$

iii.

$$\sum_{k=1}^{\nu} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^{\nu})}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - 2^{-\nu}.$$

9. Δίνεται ότι το μερικό άθροισμα μιας σειράς είναι ίσο με $s_{\nu} = \nu^2 + 4\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Να σχηματίσετε τη σειρά.

Λύση:

(Ασκ. 5/67)

Το ν -οστό μερικό άθροισμα είναι $s_{\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} a_k$. Άρα

$$a_{\nu} = s_{\nu} - s_{\nu-1} = (\nu^2 + 4\nu) - ((\nu-1)^2 + 4(\nu-1)).$$

Υπολογίζουμε

$$(\nu-1)^2 + 4(\nu-1) = \nu^2 - 2\nu + 1 + 4\nu - 4 = \nu^2 + 2\nu - 3,$$

οπότε

$$a_{\nu} = 2\nu + 3.$$

Επομένως η ζητούμενη σειρά είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 3) = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots$$

Παρατήρηση: $a_n \not\rightarrow 0$ (μάλιστα $a_n \sim 2n$), άρα η σειρά αποκλίνει.

10. Δίνεται ότι:

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 300, \quad \sum_{k=1}^{30} \beta_k = -50.$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=1}^{30} (4a_k - 3\beta_k).$$

Λύση:

(Ασκ. 6/67)

Με γραμμικότητα των αθροισμάτων,

$$\sum_{k=1}^{30} (4a_k - 3\beta_k) = 4 \sum_{k=1}^{30} a_k - 3 \sum_{k=1}^{30} \beta_k = 4 \cdot 300 - 3 \cdot (-50) = 1200 + 150 = 1350.$$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(12k+8) = 2\nu(\nu+1)(2\nu+3).$$

Λύση:

(Ασκ. 2/75)

Χρησιμοποιούμε τους γνωστούς τύπους

$$\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} k(12k+8) &= 12 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 8 \sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= 12 \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 8 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ &= 2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + 4\nu(\nu+1) \\ &= 2\nu(\nu+1)[(2\nu+1)+2] \\ &= 2\nu(\nu+1)(2\nu+3), \end{aligned}$$

12. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

i. $\sum_{k=1}^{\nu} (k+2)(k+6)$

ii. $\sum_{k=1}^{\nu} (4k^3 + 6k^2 + 2k)$

iii. $\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+3)$

Λύση:

(Ασκ. 3/75)

i.

$$\sum_{k=1}^{\nu} (k+2)(k+6) = \sum_{k=1}^{\nu} (k^2+8k+12) = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 4\nu(\nu+1) + 12\nu = \frac{\nu(2\nu^2+27\nu+97)}{6}.$$

ii.

$$\sum_{k=1}^{\nu} (4k^3 + 6k^2 + 2k) = 4 \sum_{k=1}^{\nu} k^3 + 6 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} k = \nu(\nu+1)^2(\nu+2).$$

iii.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+3) &= \sum_{k=1}^{\nu} (k^3 + 4k^2 + 3k) = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} \\ &+ 4 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 3 \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+13)}{12}. \end{aligned}$$

13. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των ν πρώτων όρων των πιο κάτω σειρών ($\nu \in \mathbb{N}$):

i. $2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \dots$

ii. $1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 10^2 + \dots$

iii. $2 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 10 + 11 \cdot 13 + \dots$

Λύση:

(Ασχ. 4/75)

i. Οι όροι είναι $(2k)^3$. Άρα

$$\sum_{k=1}^{\nu} (2k)^3 = 8 \sum_{k=1}^{\nu} k^3 = 8 \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2} \right)^2 = 2\nu^2(\nu+1)^2.$$

ii. Ο k -οστός όρος είναι $a_k = k(3k-2)^2 = 9k^3 - 12k^2 + 4k$. Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} a_k &= 9 \sum_{k=1}^{\nu} k^3 - 12 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{\nu} k \\ &= 9 \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2} \right)^2 - 12 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 4 \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{\nu^2(\nu+1)(9\nu-7)}{4}. \end{aligned}$$

iii. Οι όροι είναι $(3k-1)(3k+1) = 9k^2 - 1$. Άρα

$$\sum_{k=1}^{\nu} (9k^2 - 1) = 9 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 - \nu = 9 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - \nu = \frac{\nu}{2} (6\nu^2 + 9\nu + 1).$$

14. Να δείξετε ότι το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\nu} (6k^2 + 4k - 1)$$

μπορεί να πάρει τη μορφή $\nu(\nu + a)(\beta\nu + \gamma)$, με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=21}^{40} (6k^2 + 4k - 1).$$

Λύση:

(Ασκ. 5/75)

Για το γενικό μερικό άθροισμα:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} (6k^2 + 4k - 1) &= 6 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{\nu} k - \sum_{k=1}^{\nu} 1 \\ &= 6 \cdot \frac{\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6} + 4 \cdot \frac{\nu(\nu + 1)}{2} - \nu \\ &= \nu(\nu + 1)(2\nu + 1) + 2\nu(\nu + 1) - \nu \\ &= \nu[(\nu + 1)(2\nu + 3) - 1] = \nu(2\nu^2 + 5\nu + 2) = \nu(\nu + 2)(2\nu + 1). \end{aligned}$$

Άρα παίρνει τη μορφή $\nu(\nu + a)(\beta\nu + \gamma)$ με $a = 2, \beta = 2, \gamma = 1$.

Για το ζητούμενο:

$$\sum_{k=21}^{40} (6k^2 + 4k - 1) = S_{40} - S_{20}, \quad \text{όπου } S_n = n(n + 2)(2n + 1).$$

$$S_{40} = 40 \cdot 42 \cdot 81 = 136080, \quad S_{20} = 20 \cdot 22 \cdot 41 = 18040.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=21}^{40} (6k^2 + 4k - 1) = 136080 - 18040 = 118040.$$

15. Να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων των πιο κάτω σειρών ($\nu \in \mathbb{N}$):

i. $1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + \dots$

ii. $2 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 10 \cdot 11 + 14 \cdot 14 + \dots$

iii. $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots$

iv. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + \nu(\nu + 1)(\nu + 2)$

Λύση:

(Ασκ. 1/80)

i.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} [(2k-1)(2k)^2] &= \sum_{k=1}^{\nu} (8k^3 - 4k^2) = 8 \sum_{k=1}^{\nu} k^3 - 4 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 = 8 \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2} \right)^2 - 4 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}. \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{2}{3} \nu(\nu+1)(3\nu^2 + \nu - 1). \end{aligned}$$

ii. Ο k -οστός όρος είναι $(4k-2)(3k+2) = 12k^2 + 2k - 4$. Άρα

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} (12k^2 + 2k - 4) &= 12 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} k - 4 \sum_{k=1}^{\nu} 1 = 2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + \nu(\nu+1) - 4\nu. \\ \Rightarrow S_2 &= \nu(4\nu^2 + 7\nu - 1). \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} (2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{\nu} (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1) = 8 \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2} \right)^2 - 12 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 6 \frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu. \\ \Rightarrow S_3 &= \nu^2(2\nu^2 - 1). \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{\nu} (k^3 + 3k^2 + 2k) = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2} \right)^2 + 3 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2 \frac{\nu(\nu+1)}{2}. \\ \Rightarrow S_4 &= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}. \end{aligned}$$

16. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k(6k-2).$$

Λύση:

(Ασκ. 2/80)

Θέτουμε

$$S = \sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k(6k-2) = 6 \sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k^2 - 2 \sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k.$$

Με τους τύπους $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ και $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, έχουμε

$$\sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k^2 = \frac{(3\nu)(3\nu+1)(6\nu+1)}{6} - \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}, \quad \sum_{k=\nu+1}^{3\nu} k = \frac{3\nu(3\nu+1)}{2} - \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} S &= 6 \left[\frac{(3\nu)(3\nu+1)(6\nu+1)}{6} - \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} \right] - 2 \left[\frac{3\nu(3\nu+1)}{2} - \frac{\nu(\nu+1)}{2} \right] \\ &= (3\nu)(3\nu+1)(6\nu+1) - \nu(\nu+1)(2\nu+1) - [3\nu(3\nu+1) - \nu(\nu+1)] \\ &= 52\nu^3 + 16\nu^2 = 4\nu^2(13\nu+4). \end{aligned}$$

17. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των πιο κάτω σειρών:

i. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

ii. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9k^2-1}$

Λύση:

(Ασκ. 3/80)

i.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right]. \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ii.

$$\frac{1}{9k^2 - 1} = \frac{1}{(3k - 1)(3k + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3k - 1} - \frac{1}{3k + 1} \right).$$

Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \cot(\pi a) \quad (a \notin \mathbb{Z}),$$

οπότε, με $a = \frac{1}{3}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9k^2 - 1} = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2 \left(\frac{1}{9}\right)} - \frac{\pi}{2 \left(\frac{1}{3}\right)} \cot \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

18. Δίνεται ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της σειράς

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

είναι ίσο με $\frac{\nu}{3(2\nu + 3)}$.

i. Να βρείτε τον γενικό όρο της σειράς.

ii. Να βρείτε τον 10^ο όρο της σειράς.

iii. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της σειράς.

Λύση:

(Ασχ. 4/80)

i.

$$\begin{aligned} a_n &= s_n - s_{n-1} = \frac{n}{3(2n+3)} - \frac{n-1}{3(2n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{2n+3} - \frac{n-1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n(2n+1) - (n-1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

ii.

$$a_{10} = \frac{1}{(2 \cdot 10 + 1)(2 \cdot 10 + 3)} = \frac{1}{21 \cdot 23} = \frac{1}{483}.$$

iii.

$$S_{15} = \frac{15}{3(2 \cdot 15 + 3)} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}.$$

19. Να βρείτε τον ν -οστό όρο της ακολουθίας 2, 5, 9, 14, 20, 27, ... Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

i. Ο ν -οστός όρος a_ν .

ii. Το άθροισμα $S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k$.

Λύση:

(Ασκ. 5/80)

i.

$$a_\nu = a_1 + \sum_{k=1}^{\nu-1} (a_{k+1} - a_k) = 2 + \sum_{k=1}^{\nu-1} (k+2) = 2 + \frac{(\nu-1)\nu}{2} + 2(\nu-1) = \frac{\nu(\nu+3)}{2}.$$

ii.

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} (k^2 + 3k) = \frac{1}{2} \left[\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 3 \frac{\nu(\nu+1)}{2} \right] = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+5)}{6}.$$

20. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

i. $\sum_{k=1}^{\nu} (k+3)^2 = \frac{1}{6} \nu(2\nu^2 + 21\nu + 73)$

ii. και να υπολογίσετε το άθροισμα, $\sum_{k=10}^{30} (k+3)^2$

Λύση:

(Ασκ. 1/81)

i.

$$\sum_{k=1}^{\nu} (k+3)^2 = \sum_{k=1}^{\nu} (k^2 + 6k + 9) = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + 6 \sum_{k=1}^{\nu} k + 9\nu.$$

Με τους γνωστούς τύπους $\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu} (k+3)^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 3\nu(\nu+1) + 9\nu = \frac{\nu}{6} (2\nu^2 + 21\nu + 73).$$

ii. Θέτοντας $S_n = \sum_{k=1}^n (k+3)^2 = \frac{n}{6}(2n^2 + 21n + 73)$,

$$\sum_{k=10}^{30} (k+3)^2 = S_{30} - S_9 = \frac{30}{6}(2 \cdot 30^2 + 21 \cdot 30 + 73) - \frac{9}{6}(2 \cdot 9^2 + 21 \cdot 9 + 73).$$

$$S_{30} = 5 \cdot 2503 = 12515, \quad S_9 = \frac{3}{2} \cdot 424 = 636.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=10}^{30} (k+3)^2 = 12515 - 636 = 11879$$

21. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + \nu(\nu+1) = \frac{1}{3} \nu(\nu+1)(\nu+2).$$

Λύση:

(Ασκ. 2/81)

Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1) = \sum_{k=1}^{\nu} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + \sum_{k=1}^{\nu} k.$$

Με τους γνωστούς τύπους $\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και $\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1) = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{\nu(\nu+1)}{6} [(2\nu+1) + 3] = \frac{1}{3} \nu(\nu+1)(\nu+2),$$

22. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{\nu}{2\nu+1}.$$

Λύση:

(Ασκ. 3/81)

Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

Το μερικό άθροισμα τηλεσκοπεί:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2\nu+1} \right) = \frac{(2\nu+1)-1}{2(2\nu+1)} = \frac{\nu}{2\nu+1}. \end{aligned}$$

23. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^5 \left(\sum_{j=1}^6 (2i+j) \right).$$

Λύση:

(Ασκ. 4/81)

Για σταθερό i ,

$$\sum_{j=1}^6 (2i+j) = \sum_{j=1}^6 2i + \sum_{j=1}^6 j = 6 \cdot 2i + \frac{6 \cdot 7}{2} = 12i + 21.$$

Άρα

$$\sum_{i=1}^5 \left(\sum_{j=1}^6 (2i+j) \right) = \sum_{i=1}^5 (12i+21) = 12 \sum_{i=1}^5 i + 21 \cdot 5 = 12 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 105 = 12 \cdot 15 + 105 = 285$$

24. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω σειρές:

$$\text{i. } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)} \quad \text{ii. } \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)(k+2)}$$

$$\text{iii. } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{7^k} \quad \text{iv. } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$$

Λύση:

(Ασκ. 5/81)

i.

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4}$$

ii.

$$\frac{1}{(k-2)(k+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+2} \right),$$

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)(k+2)} = \frac{1}{4} \left(\sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{m} - \sum_{m=5}^{n+4} \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{4} \left(\sum_{m=1}^4 \frac{1}{m} - \sum_{m=n-1}^{n+4} \frac{1}{m} \right) \rightarrow \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{25}{48}$$

iii.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{7^k} = 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{7} \right)^k = 3 \cdot \frac{\frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

iv.

$$\frac{k^2}{k^2-1} = 1 + \frac{1}{k^2-1}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{3}{4}.$$

Όμως $\sum_{k=2}^{+\infty} 1 = +\infty$. Άρα

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2}{k^2-1} = +\infty \quad (\text{η σειρά αποκλίνει}).$$

25. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + \nu(\nu+1) = \frac{1}{3} \nu(\nu+1)(\nu+2).$$

Λύση:

(Ασκ. 6/81)

$$\sum_{k=1}^{\nu} k(k+1) = \sum_{k=1}^{\nu} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + \sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{1}{3} \nu(\nu+1)(\nu+2).$$

26. Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{10}{(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa)}.$$

Λύση:

(Ασχ. 7/81)

Έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \Rightarrow \frac{10}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa} = \frac{10}{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} = \frac{20}{\nu(\nu+1)} = 20 \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right).$$

Το μερικό άθροισμα S_N είναι τηλεσκοπικό:

$$S_N = \sum_{\nu=1}^N 20 \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) = 20 \left(1 - \frac{1}{N+1} \right).$$

Άρα

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{10}{(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa)} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 20.$$

27. Να δείξετε ότι δεν ισχύουν τα πιο κάτω:

- i. $\sum_{k=1}^{\nu} (a_k \beta_k) = \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \right)$
- ii. $\sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{a_k}{\beta_k} \right) = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} a_k}{\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k}$ (με $\beta_k \neq 0$)
- iii. $\sum_{k=1}^{\nu} (a_k^2) = \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_k \right)^2$

Λύση:

(Ασχ. 1/82)

i. Πάρε $\nu = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$.

$$\sum_{k=1}^2 a_k \beta_k = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1, \quad \left(\sum_{k=1}^2 a_k \right) \left(\sum_{k=1}^2 \beta_k \right) = (1+1)(1+0) = 2.$$

$1 \neq 2 \Rightarrow$ η ισότητα δεν ισχύει γενικά.

ii. Πάρε $\nu = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2$ (όλα $\beta_k \neq 0$).

$$\sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\beta_k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\sum_{k=1}^2 a_k}{\sum_{k=1}^2 \beta_k} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow$ η ισότητα δεν ισχύει γενικά.

iii. Πάρε $\nu = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 1$.

$$\sum_{k=1}^2 a_k^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \quad \left(\sum_{k=1}^2 a_k \right)^2 = (1+1)^2 = 4.$$

$2 \neq 4 \Rightarrow$ η ισότητα δεν ισχύει γενικά.

28. Να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2\nu - 2^\nu}{3^\nu}$$

συγκλίνει στο $-\frac{1}{2}$.

Λύση:

(Ασκ. 2/82)

Γράφουμε

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2\nu - 2^\nu}{3^\nu} = 2 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu}{3^\nu} - \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^\nu.$$

Χρησιμοποιούμε τους τύπους (για $|r| < 1$):

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu r^\nu = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \sum_{\nu=1}^{+\infty} r^\nu = \frac{r}{1-r}.$$

Με $r = \frac{1}{3}$ και $r = \frac{2}{3}$ αντίστοιχα,

$$2 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\nu}{3^\nu} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2 \cdot \frac{9}{12} = \frac{3}{2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^\nu = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2.$$

Άρα

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2\nu - 2^\nu}{3^\nu} = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

29. Ένα σύστημα με ν σώματα μάζας m_1, m_2, \dots, m_ν που βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο άξονα στις θέσεις $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_\nu, 0)$ έχει κέντρο μάζας στη θέση $(\bar{x}, 0)$, όπου

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{\nu} m_k}.$$

Να υπολογίσετε τη θέση του κέντρου μάζας για τα τέσσερα σώματα στις θέσεις $(1, 0), (3, 0), (5, 0), (7, 0)$ με μάζες 5, 7, 2, 3 κιλά, αντίστοιχα.

Λύση:

(Ασκ. 3/82)

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{5 + 7 + 2 + 3} = \frac{5 + 21 + 10 + 21}{17} = \frac{57}{17}.$$

Επομένως, το κέντρο μάζας είναι

$$(\bar{x}, 0) = \left(\frac{57}{17}, 0 \right).$$

30. Δίνεται ότι:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Λύση:

(Ασκ. 4/82)

Θέτουμε

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad E = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Το άθροισμα των περιττών όρων είναι

$$O = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = S - E = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{4\pi^2 - \pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

31. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=5}^{40} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (k+2) \left(\frac{1}{k+3} \right)^i \right).$$

Λύση:

(Ασκ. 5/82)

Για σταθερό k , το εσωτερικό άθροισμα είναι γεωμετρικό με λόγο $r = \frac{1}{k+3}$ ($|r| < 1$):

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (k+2) \left(\frac{1}{k+3} \right)^i = (k+2) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k+3}} = (k+2) \cdot \frac{k+3}{k+2} = k+3.$$

Άρα

$$\sum_{k=5}^{40} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (k+2) \left(\frac{1}{k+3} \right)^i \right) = \sum_{k=5}^{40} (k+3).$$

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με 36 όρους, πρώτο 8 και τελευταίο 43:

$$\sum_{k=5}^{40} (k+3) = \frac{36}{2} (8 + 43) = 18 \cdot 51 = 918$$

Θέματα Εξετάσεων

1. i. Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) = \nu^3$$

ii. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=11}^{100} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1)$$

Λύση:

2025

i.

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\nu} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) &= 3 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 - 3 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa + \sum_{\kappa=1}^{\nu} 1 \\ &= 3 \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - 3 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu = \frac{\nu(2\nu^2 + 3\nu + 1 - 3\nu - 3 + 2)}{2} = \nu^3. \end{aligned}$$

ii.

$$\sum_{\kappa=11}^{100} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) = \sum_{\kappa=1}^{100} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) - \sum_{\kappa=1}^{10} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) = 100^3 - 10^3 = 999000.$$

2. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2.$$

Λύση:

2023

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2 &= \sum_{\kappa=1}^{100} \kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^6 \kappa^2. \\ &= \frac{100 \cdot (100 + 1) \cdot (2 \cdot 100 + 1)}{6} - \frac{6 \cdot (6 + 1) \cdot (2 \cdot 6 + 1)}{6} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6}. \\ &= 338\,350 - 91 = 338\,259. \end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$ για την οποία ισχύει:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (2\kappa^2 - 4\kappa) = \nu(\nu + 1).$$

Λύση:

2022

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\nu} (2\kappa^2 - 4\kappa) &= 2 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 - 4 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa = 2 \cdot \frac{\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6} - 4 \cdot \frac{\nu(\nu + 1)}{2}. \\ &= \frac{1}{3} \nu(\nu + 1)(2\nu + 1) - 2\nu(\nu + 1) = \nu(\nu + 1). \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{1}{3} \nu(\nu + 1)(2\nu + 1) - 2\nu(\nu + 1) = \nu(\nu + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \nu(\nu+1)(2\nu+1) - 3\nu(\nu+1) = 0 \Rightarrow \nu(\nu+1) \left[\frac{1}{3}(2\nu+1) - 3 \right] = 0.$$

$\nu = 0$ απορρίπτεται, $\nu = -1$ απορρίπτεται, $2\nu + 1 - 9 = 0 \Rightarrow \nu = 4$ δεκτή.

4. Να αναλύσετε το κλάσμα

$$\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων και να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}.$$

Λύση:

2019

$$\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} = \frac{A}{\kappa+1} + \frac{B}{\kappa+2}.$$

$$1 = A(\kappa+2) + B(\kappa+1) \Rightarrow (A+B)\kappa + 2A + B = 1.$$

Άρα

$$A + B = 0 \quad \text{και} \quad 2A + B = 1 \Rightarrow A = 1, B = -1.$$

Έστω

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)}.$$

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{1}{\kappa+1} - \frac{1}{\kappa+2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} \right).$$

$$\Rightarrow S_\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+2}.$$

Άρα

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+2} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

5. Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (6\kappa^2 + 2\kappa + 3) = \nu(2\nu^2 + 4\nu + 5).$$

Λύση:

A24

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\nu} (6\kappa^2 + 2\kappa + 3) &= 6 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 + 2 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa + \sum_{\kappa=1}^{\nu} 3. \\ &= 6 \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 2 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} + 3\nu. \\ &= \nu(2\nu^2 + 3\nu + 1) + \nu(\nu+1) + 3\nu = \nu(2\nu^2 + 3\nu + 1 + \nu + 1 + 3) = \nu(2\nu^2 + 4\nu + 5). \end{aligned}$$