Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Πιθανότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμία από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Ο δειγματικός χώρος είναι ένα αδύνατο ενδεχόμενο.

ii. Όταν δύο ενδεχόμενα πραγματοποιηθούν συγχρόνως, τότε πραγματοποιείται η τομή των δύο ενδεχομένων.

iii. Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθούν συγχρόνως το A και το συμπλήρωμα του B.

iv. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα και πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, τότε πραγματοποιείται το συμπλήρωμα του B.

v. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα είναι πάντα αντίθετα.

vi. Ισχύει ότι $A' \cup A = \emptyset$.

vii. Τα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα.

Λύση: (Ασκ. 1/ 72)

i. Λάθος.
Ο δειγματικός χώρος S είναι το βέβαιο ενδεχόμενο, δηλαδή το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντα. Το αδύνατο ενδεχόμενο συμβολίζεται με $\emptyset$.

ii. Σωστό.
Η ταυτόχρονη πραγματοποίηση δύο ενδεχομένων σημαίνει ότι συμβαίνουν και τα δύο. Αυτό είναι ο ορισμός της τομής $A \cap B$.

iii. Σωστό.
$A - B = A \cap B'$. Δηλαδή πραγματοποιείται το A χωρίς το B.

iv. Λάθος.
Αν A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \emptyset$.
Όμως, αν πραγματοποιηθεί το A, δεν σημαίνει ότι πραγματοποιείται το B'. Το B απλώς δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί, αλλά το B' περιέχει και πολλά άλλα ενδεχόμενα εκτός από το A.

v. Λάθος.
Ασυμβίβαστα σημαίνει $A \cap B = \emptyset$.
Αντίθετα είναι μόνο τα A και A'. Δηλαδή τα αντίθετα είναι πάντα συμπληρωματικά ενδεχόμενα.

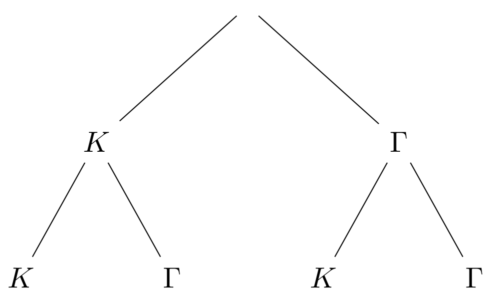
vi. Λάθος.
Ισχύει $A \cup A' = S$, δηλαδή δίνουν το βέβαιο ενδεχόμενο.
Το άδειο σύνολο προκύπτει από την τομή: $A \cap A' = \emptyset$.

vii. Σωστό.
Έχουμε: $A - B = A \cap B'$ και $B - A = B \cap A'$.
Τα ενδεχόμενα αυτά δεν έχουν κοινά στοιχεία, άρα είναι ασυμβίβαστα.

2. Ρίχνουμε δύο νομίσματα μία φορά. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης.

Λύση: (Ασκ. 2/72)

Κάθε νόμισμα μπορεί να εμφανίσει Κεφαλή (Κ) ή Γράμματα (Γ).



Άρα ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{(K, K),\ (K, \Gamma),\ (\Gamma, K),\ (\Gamma, \Gamma)\}.$$

3. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : «Το μεγαλύτερο παιδί είναι αγόρι»

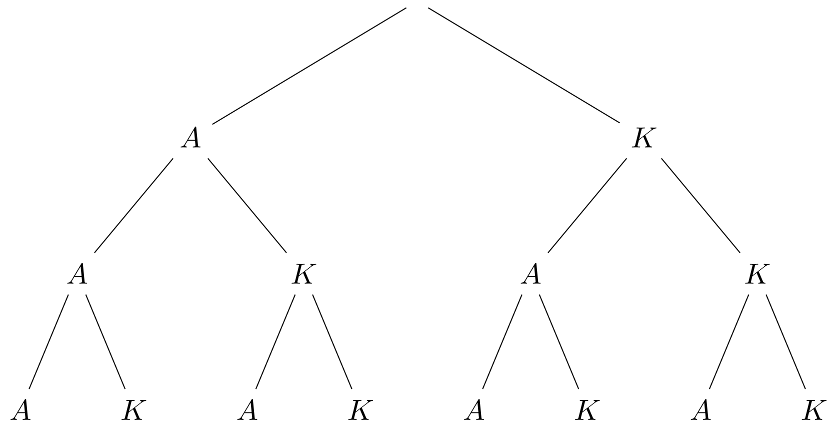
B : «Το τελευταίο παιδί είναι κορίτσι»

Γ : «Το πρώτο παιδί είναι αγόρι και το τελευταίο παιδί κορίτσι»

Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα A, B και Γ.

Λύση: (Ασκ. 3/72)

Κάθε παιδί μπορεί να είναι Αγόρι (Α) ή Κορίτσι (Κ).



Άρα όλες οι δυνατές τριάδες είναι:

$\Omega = \{(A,A,A),\ (A,A,K),\ (A,K,A),\ (A,K,K),\ (K,A,A),\ (K,A,K),\ (K,K,A),\ (K,K,K)\}.$

Το ενδεχόμενο A: «Το πρώτο παιδί είναι αγόρι»

$$A = \{(A,A,A),\ (A,A,K),\ (A,K,A),\ (A,K,K)\}.$$

Το ενδεχόμενο B: «Το τελευταίο παιδί είναι κορίτσι»

$$B = \{(A,A,K),\ (A,K,K),\ (K,A,K),\ (K,K,K)\}.$$

Το ενδεχόμενο Γ: «Το πρώτο παιδί είναι αγόρι και το τελευταίο παιδί κορίτσι»

$$\Gamma = \{(A,A,K),\ (A,K,K)\}.$$

4. Να βρείτε τον πληθικό αριθμό του δειγματικού χώρου Ω για καθένα από τα πιο κάτω πειράματα τύχης:

i. Ρίψη τριών ζαριών.

ii. Επιλογή 3 παιδιών από μία τάξη των 18 μαθητών.

iii. Επιλογή 2 μπαλών από ένα δοχείο που περιέχει 4 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες.

Λύση: (Ασκ. 4/72)

i. Κάθε ζάρι έχει 6 δυνατά αποτελέσματα.
Άρα:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216.$$

ii. Επιλέγουμε 3 μαθητές από 18, χωρίς σειρά.
Άρα:

$$|\Omega| = \binom{18}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 816.$$

iii. Το δοχείο έχει συνολικά $4 + 5 = 9$ μπάλες. Επιλέγουμε 2, χωρίς σειρά.
Άρα:

$$|\Omega| = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36.$$

5. Ένα κουτί περιέχει δύο άσπρες, τρεις κόκκινες και μία πράσινη μπάλα. Παίρνουμε τυχαία δύο μπάλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A : «Και οι δύο μπάλες είναι άσπρες»

B : «Οι δύο μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα»

Λύση: (Ασκ. 5/72)

Συνολικός αριθμός μπαλών:

$$2 + 3 + 1 = 6.$$

Επιλέγουμε 2 μπάλες χωρίς σειρά:

$$|\Omega| = \binom{6}{2} = 15.$$

Ενδεχόμενο A: «Και οι δύο μπάλες είναι άσπρες»
Υπάρχουν 2 άσπρες μπάλες, άρα:

$$|A| = \binom{2}{2} = 1.$$

Άρα η πιθανότητα:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{15}.$$

Ενδεχόμενο B: «Οι δύο μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα»
Υπολογίζουμε τις δυνατές επιλογές ανά ζεύγος χρωμάτων:

$$\text{Άσπρη – Κόκκινη} : \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$\text{Άσπρη – Πράσινη} : \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$\text{Κόκκινη – Πράσινη} : \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Άρα:

$$|B| = 6 + 2 + 3 = 11.$$

Και η πιθανότητα:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{11}{15}.$$

6. Σε μια ομάδα εργασίας για το περιβάλλον συμμετέχουν 8 Ευρωπαίοι και 3 Αμερικανοί επιστήμονες. Από αυτούς, θα επιλεγεί τυχαία μια τετραμελής επιτροπή. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A : «Η επιτροπή να αποτελείται από δύο Ευρωπαίους και δύο Αμερικανούς»

B : «Η επιτροπή να αποτελείται από τρεις τουλάχιστον Ευρωπαίους»

Γ : «Η επιτροπή να αποτελείται από επιστήμονες της ίδιας ηπείρου»

Δ : «Στην επιτροπή να αντιπροσωπεύονται και οι δύο ήπειροι»

Λύση: (Ασκ. 6/73)

Συνολικός αριθμός επιστημόνων: $8 + 3 = 11$.
Επιλέγουμε 4 χωρίς σειρά:

$$|\Omega| = \binom{11}{4} = 330.$$

Ενδεχόμενο A: 2 Ευρωπαίοι και 2 Αμερικανοί.

$$|A| = \binom{8}{2} \cdot \binom{3}{2} = 28 \cdot 3 = 84.$$

$$P(A) = \frac{84}{330} = \frac{14}{55}.$$

Ενδεχόμενο B: «Τρεις τουλάχιστον Ευρωπαίοι»

Περιλαμβάνει 3 Ευρωπαίους + 1 Αμερικανό **και** 4 Ευρωπαίους.

$$|B| = \binom{8}{3} \cdot \binom{3}{1} + \binom{8}{4} = 56 \cdot 3 + 70 = 168 + 70 = 238.$$

$$P(B) = \frac{238}{330} = \frac{119}{165}.$$

Ενδεχόμενο Γ: «Όλοι από την ίδια ήπειρο»

Όλοι Ευρωπαίοι $\Rightarrow \binom{8}{4} = 70$.
Όλοι Αμερικανοί $\Rightarrow \binom{3}{4} = 0$.

$$|\Gamma| = 70.$$

$$P(\Gamma) = \frac{70}{330} = \frac{7}{33}.$$

Ενδεχόμενο Δ: «Αντιπροσωπεύονται και οι δύο ήπειροι»

$$\Delta = \Gamma' \Rightarrow P(\Delta) = 1 - P(\Gamma) = 1 - \frac{7}{33} = \frac{26}{33}.$$

7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. Στην ε_1 ορίζουμε 10 σημεία και στην ε_2 15 σημεία.

i. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά;

ii. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην ε_2;

Λύση: (Ασκ. 7/73)

Συνολικός αριθμός σημείων:

$$10 + 15 = 25.$$

i. Για να σχηματιστεί τρίγωνο: επιλέγουμε 3 μη συνευθειακά σημεία.

Όλα τα δυνατά τρίγωνα:

$$\binom{25}{3} = 2300.$$

Αφαιρούμε τα αδύνατα (συνευθειακά):

$$\binom{10}{3} = 120 \quad (\text{στην } \varepsilon_1), \qquad \binom{15}{3} = 455 \quad (\text{στην } \varepsilon_2).$$

$$\text{Συνολικά αδύνατα} = 120 + 455 = 575.$$

$$\text{Άρα τα τρίγωνα είναι: } 2300 - 575 = 1725.$$

ii. Πιθανότητα ένα τρίγωνο να έχει πλευρά στην ε_2:

Για να έχει πλευρά στην ε_2, πρέπει *δύο σημεία* να είναι από την ε_2 και το τρίτο από την ε_1.

$$|\Delta| = \binom{15}{2} \cdot \binom{10}{1} = 105 \cdot 10 = 1050.$$

$$P(\Delta) = \frac{1050}{1725} = \frac{14}{23}.$$

8. Έστω A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της $1^{\eta\varsigma}$ στήλης με το αντίστοιχο ενδεχόμενο της $2^{\eta\varsigma}$ στήλης (πιθανόν να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα ενδεχόμενα).

	1η στήλη		2η στήλη
(α)	Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το A και το B.	1.	$A \cup B$
(β)	Δεν πραγματοποιείται το B.	2.	A
(γ)	Πραγματοποιείται το A.	3.	$A - B$
(δ)	Πραγματοποιείται μόνο το B.	4.	B'
(ε)	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.	5.	$A' \cap B'$
(στ)	Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B.	6.	$A' \cup B'$
(ζ)	Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B.	7.	$A \cap B'$
		8.	$(A - B) \cup (B - A)$
		9.	$(A \cup B)'$
		10.	$A \cap B$

Λύση: (Ασκ. 8/73)

$$
\begin{aligned}
(\alpha) &\leftrightarrow 10 \quad A \cap B, \\
(\beta) &\leftrightarrow 4 \quad B', \\
(\gamma) &\leftrightarrow 2 \quad A, \\
(\delta) &\leftrightarrow 7 \quad A' \cap B, \\
(\varepsilon) &\leftrightarrow 1 \quad A \cup B, \\
(\sigma\tau) &\leftrightarrow 5 \quad A' \cap B', \\
(\zeta) &\leftrightarrow 8 \quad (A - B) \cup (B - A)
\end{aligned}
$$

9. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μία φορά. Ορίζονται τα ενδεχόμενα:

A : «Η ένδειξη είναι άρτιος αριθμός», B : «Η ένδειξη είναι πρώτος αριθμός».

Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i. A	ii. B	iii. A'
iv. $A - B$	v. $A \cap B$	vi. $A \cup B$
vii. $A' \cup B$	viii. $A' \cap B'$	ix. $(A \cup B)'$

Λύση: (Ασκ. 9/73)

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, άρα $|\Omega| = 6$.

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{2, 3, 5\}, \quad A' = \{1, 3, 5\}, \quad B' = \{1, 4, 6\}.$$

i. Η πιθανότητα του A:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

ii. Η πιθανότητα του B:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

iii. Η πιθανότητα του A':

$$P(A') = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

iv. Το ενδεχόμενο $A - B = A \cap B' = \{4, 6\}$:

$$P(A - B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

v. Το ενδεχόμενο $A \cap B = \{2\}$:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

vi. Το ενδεχόμενο $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

vii. Το ενδεχόμενο $A' \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$:

$$P(A' \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

viii. Το ενδεχόμενο $A' \cap B' = \{1\}$:

$$P(A' \cap B') = \frac{1}{6}.$$

ix. Το ενδεχόμενο $(A \cup B)' = \{1\}$:

$$P\big((A \cup B)'\big) = \frac{1}{6}.$$

10. Σε ένα συνεργείο αυτοκινήτων γίνεται έλεγχος κατά πόσο ένα αυτοκίνητο έχει είτε μηχανική είτε ηλεκτρική βλάβη. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : ≪Το αυτοκίνητο να έχει μηχανική βλάβη≫, B : ≪Το αυτοκίνητο να έχει ηλεκτρική βλάβη≫.

i. Τι εκφράζει το ενδεχόμενο A';

ii. Τι εκφράζει το ενδεχόμενο $A \cap B'$;

iii. Τι εκφράζει το ενδεχόμενο $A \cup B$;

iv. Να συμβολίσετε το ενδεχόμενο ≪Το αυτοκίνητο δεν έχει βλάβη≫.

v. Να συμβολίσετε το ενδεχόμενο ≪Το αυτοκίνητο έχει μόνο ηλεκτρική βλάβη≫.

vi. Να συμβολίσετε το ενδεχόμενο ≪Το αυτοκίνητο έχει ακριβώς μία από τις δύο βλάβες≫.

Λύση: (Ασκ. 10/74)

i. Το A' εκφράζει:

≪Το αυτοκίνητο δεν έχει μηχανική βλάβη≫.

ii. Το $A \cap B'$ εκφράζει:

≪Το αυτοκίνητο έχει μηχανική αλλά όχι ηλεκτρική βλάβη≫ (δηλαδή μόνο μηχανική).

iii. Το $A \cup B$ εκφράζει:

≪Το αυτοκίνητο έχει τουλάχιστον μία από τις δύο βλάβες≫.

iv. «Το αυτοκίνητο δεν έχει βλάβη» συμβολίζεται με:

$$(A \cup B)'.$$

v. «Το αυτοκίνητο έχει μόνο ηλεκτρική βλάβη» συμβολίζεται με:

$$B \cap A'.$$

vi. «Το αυτοκίνητο έχει ακριβώς μία από τις δύο βλάβες» συμβολίζεται με:

$$(A - B) \ \cup \ (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

11. Σε ένα δοχείο υπάρχουν μαύρες και άσπρες μπάλες. Αν επιλέξουμε τυχαία μία μπάλα από το δοχείο, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι 0,4. Αν στο δοχείο τοποθετούσαμε ακόμα 2 άσπρες μπάλες και επιλέγαμε ξανά τυχαία μία μπάλα, η πιθανότητα να πάρουμε άσπρη μπάλα θα ήταν 0,5. Να βρείτε πόσες είναι οι μαύρες και πόσες είναι οι άσπρες μπάλες στο δοχείο.

Λύση: (Ασκ. 11/74)

Έστω ότι στο δοχείο υπάρχουν:

$$w \text{ άσπρες μπάλες} \quad \text{και} \quad b \text{ μαύρες μπάλες.}$$

i. Από την αρχική πληροφορία:

$$P(\text{άσπρη}) = \frac{w}{w+b} = 0{,}4.$$

$$\frac{w}{w+b} = \frac{4}{10} \Rightarrow 10w = 4w + 4b \Rightarrow 6w = 4b \Rightarrow b = \frac{6}{4}w = \frac{3}{2}w.$$

Άρα:

$$w = 2k, \quad b = 3k.$$

ii. Μετά την προσθήκη 2 άσπρων μπαλών:

$$\text{Άσπρες: } w + 2 = 2k + 2, \quad \text{Σύνολο: } w + b + 2 = 5k + 2.$$

$$P(\text{άσπρη}) = \frac{2k+2}{5k+2} = 0{,}5 = \frac{1}{2}.$$

$$2(2k+2) = 5k + 2 \Rightarrow 4k + 4 = 5k + 2 \Rightarrow k = 2.$$

iii. Άρα:

$$w = 2k = 4, \qquad b = 3k = 6.$$

Στο δοχείο υπάρχουν 4 άσπρες μπάλες και 6 μαύρες μπάλες.

12. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Τα ενδεχόμενα A και B είναι του ίδιου δειγματικού χώρου Ω.

i. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ii. Ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

iii. Αν $P(B) = 1 - P(A)$, τότε τα ενδεχόμενα A και B είναι αντίθετα.

iv. Αν $P(A) = P(B)$, τότε ισχύει σίγουρα $A = B$.

Λύση: (Ασκ. 1/80)

i. ΣΩΣΤΟ. Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε από την προσθετικότητα της πιθανότητας για ξένα ενδεχόμενα:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

ii. ΣΩΣΤΟ. Τύπος ένωσης δύο ενδεχομένων:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\Rightarrow\; P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

iii. ΛΑΘΟΣ. Η ισότητα πιθανοτήτων δεν αρκεί για να είναι $B = A'$. Π.χ. σε ρίψη ζαριού: $A = \{1, 2, 3\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$. Πάρε $B = \{1, 4, 5\}$ με $P(B) = \frac{1}{2} = 1 - P(A)$, αλλά $B \neq A'$ και $A \cap B \neq \emptyset$.

iv. ΛΑΘΟΣ. Ίσες πιθανότητες δεν συνεπάγονται ίσα ενδεχόμενα. Π.χ. σε ρίψη ζαριού: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ έχουν $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, όμως $A \neq B$.

13. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου με:

$$P(A) = \frac{2}{3}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \qquad 3P(B) = P(B').$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

i. $P(A')$

ii. $P(A - B)$

iii. $P(B)$

iv. $P(A \cap B')$

v. $P(A \cup B)$

vi. $P(A' \cup B)$

Λύση: (Ασκ. 2/80)

Από $3P(B) = P(B') = 1 - P(B)$ έχουμε:

$$3P(B) = 1 - P(B) \ \Rightarrow\ 4P(B) = 1 \ \Rightarrow\ P(B) = \frac{1}{4}.$$

i.

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

ii. $A - B = A \cap B'$, άρα

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

iii.

$$P(B) = \frac{1}{4}.$$

iv.

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

v.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4}.$$

vi.
$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B).$$

Επειδή $A' \cap B = B - (A \cap B)$,
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12},$$
άρα
$$P(A' \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

14. Σε ένα ταξιδιωτικό γραφείο με 72 πελάτες για τον μήνα Απρίλιο, 34 ταξίδεψαν στην Ευρώπη, 16 ταξίδεψαν στην Ασία και 6 πελάτες ταξίδεψαν και στις δύο ηπείρους. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν πελάτη, να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A : «Να έχει ταξιδέψει και στις δύο ηπείρους»
B : «Να μην έχει ταξιδέψει στην Ευρώπη»
Γ : «Να έχει ταξιδέψει μόνο στην Ασία»
Δ : «Να έχει ταξιδέψει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ηπείρους»
E : «Να μην έχει ταξιδέψει σε καμία από τις δύο ηπείρους»
Z : «Να έχει ταξιδέψει ακριβώς μία από τις δύο ηπείρους»
H : «Να έχει ταξιδέψει σε το πολύ μία από τις δύο ηπείρους»

Λύση: (Ασκ. 3/80)

Θέτουμε $E =$ «Ευρώπη», $S =$ «Ασία». Δίνονται $|E| = 34$, $|S| = 16$, $|E \cap S| = 6$, $|\Omega| = 72$.
$$|E \setminus S| = 34 - 6 = 28, \qquad |S \setminus E| = 16 - 6 = 10,$$
$$|E \cup S| = 34 + 16 - 6 = 44, \qquad |\overline{E \cup S}| = 72 - 44 = 28.$$

i. A : «και στις δύο» $\Rightarrow P(A) = \dfrac{|E \cap S|}{72} = \dfrac{6}{72} = \dfrac{1}{12}$.

ii. B : «όχι Ευρώπη» $\Rightarrow P(B) = \dfrac{72 - 34}{72} = \dfrac{38}{72} = \dfrac{19}{36}$.

iii. Γ : «μόνο Ασία» $\Rightarrow P(\Gamma) = \dfrac{|S \setminus E|}{72} = \dfrac{10}{72} = \dfrac{5}{36}$.

iv. Δ : «τουλάχιστον μία» $\Rightarrow P(\Delta) = \dfrac{|E \cup S|}{72} = \dfrac{44}{72} = \dfrac{11}{18}$.

v. E : «καμία» $\Rightarrow P(E) = \dfrac{|\overline{E \cup S}|}{72} = \dfrac{28}{72} = \dfrac{7}{18}$.

vi. Z : «ακριβώς μία» $\Rightarrow P(Z) = \dfrac{|E \setminus S| + |S \setminus E|}{72} = \dfrac{28+10}{72} = \dfrac{38}{72} = \dfrac{19}{36}$.

vii. H : «το πολύ μία» $\Rightarrow$ συμπλήρωμα του «και οι δύο»:

$$P(H) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

15. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και τα απλά ενδεχόμενα $E_k = \{\omega_k\}$, $k \in \{1,2,3\}$. Αν $P(E_1) = 2P(E_2)$ και $P(E_3) = 3P(E_1)$, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Λύση: (Ασκ. 4/80)

Θέτουμε $P(E_2) = x$. Τότε

$$P(E_1) = 2x, \qquad P(E_3) = 3P(E_1) = 6x.$$

Επειδή οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων αθροίζουν στο 1,

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1 \;\Rightarrow\; 2x + x + 6x = 9x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{9}.$$

Άρα

$$P(E_1) = \frac{2}{9}, \qquad P(E_2) = \frac{1}{9}, \qquad P(E_3) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Τελικά,

$$P(A) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

16. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και τα απλά ενδεχόμενα

$$E_k = \{k\}, \quad k \in \Omega.$$

Ορίζεται η πιθανότητα κάθε απλού ενδεχομένου ως:

$$P(E_k) = \frac{k}{\lambda}, \quad k \in \Omega,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Να βρείτε την τιμή του λ, όπου λ σταθερό, και να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο πάνω απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Λύση: (Ασκ. 5/81)

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα αποτελούν διαμέριση του Ω, οι πιθανότητές τους αθροίζουν στο 1:

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) = 1.$$

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} + \frac{4}{\lambda} + \frac{5}{\lambda} = 1.$$

$$\frac{1+2+3+4+5}{\lambda} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{15}{\lambda} = 1 \ \Rightarrow\ \lambda = 15.$$

Άρα:

$$P(E_1) = \frac{1}{15}, \quad P(E_2) = \frac{2}{15}, \quad P(E_3) = \frac{3}{15}, \quad P(E_4) = \frac{4}{15}, \quad P(E_5) = \frac{5}{15}.$$

Συμπέρασμα:
Οι πιθανότητες είναι διαφορετικές (π.χ. $P(E_1) \neq P(E_5)$), άρα τα απλά ενδεχόμενα $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ *δεν είναι ισοπίθανα*.

17. Σε μία τάξη των 24 παιδιών, 9 είναι αγόρια και 15 είναι κορίτσια. Από τα αγόρια, 4 φορούν γυαλιά, και από τα κορίτσια, 6 φορούν γυαλιά. Επιλέγεται τυχαία ένα παιδί από τη συγκεκριμένη τάξη.

Να βρείτε την πιθανότητα το παιδί που επιλέχθηκε να είναι αγόρι ή να φοράει γυαλιά.

Λύση: (Ασκ. 6/81)

Θέτουμε:

$$A:\ \text{«Το παιδί είναι αγόρι»}, \qquad B:\ \text{«Το παιδί φοράει γυαλιά»}.$$

$$|A| = 9, \qquad |B| = 4 + 6 = 10.$$

Το $A \cap B$ είναι τα αγόρια που φορούν γυαλιά:

$$|A \cap B| = 4.$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ένωσης:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A) = \frac{9}{24}, \quad P(B) = \frac{10}{24}, \quad P(A \cap B) = \frac{4}{24}.$$

$$P(A \cup B) = \frac{9}{24} + \frac{10}{24} - \frac{4}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

18. Σε μια έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, το 20% δεν έχει μηχανή, το 40% δεν έχει λάστιχα και το 15% δεν έχει ούτε μηχανή ούτε λάστιχα. Έστω τα ενδεχόμενα:

$A:$ «Το αυτοκίνητο δεν έχει μηχανή», $\qquad B:$ «Το αυτοκίνητο δεν έχει λάστιχα».

Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα τυχαίως επιλεγμένο αυτοκίνητο της έκθεσης να έχει λάστιχα και μηχανή.

Λύση: (Ασκ. 7/81)

Δίνονται:

$$P(A) = 0.20, \qquad P(B) = 0.40, \qquad P(A \cap B) = 0.15.$$

Το ενδεχόμενο «έχει μηχανή και λάστιχα» είναι το συμπλήρωμα του $A \cup B$:

$$(A \cup B)' = \text{«δεν ανήκει ούτε στο } A \text{ ούτε στο } B\text{»}.$$

Υπολογίζουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.20 + 0.40 - 0.15 = 0.45.$$

Άρα:

$$P((A \cup B)') = 1 - 0.45 = 0.55.$$

$$P(\text{να έχει μηχανή και λάστιχα}) = 0.55$$

19. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(A|B) = 0{,}7, \qquad P(B|A) = 0{,}5, \qquad P(A) + P(B) = 1{,}2.$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

Λύση: (Ασκ. 1/87)

Από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}7 \cdot P(B).$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}5 \cdot P(A).$$

Άρα:

$$0{,}7P(B) = 0{,}5P(A).$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{0{,}7}{0{,}5}P(B) = 1{,}4P(B).$$

Επίσης δίνεται:

$$P(A) + P(B) = 1{,}2.$$

Αντικαθιστούμε το $P(A)$:

$$1{,}4P(B) + P(B) = 1{,}2 \Rightarrow 2{,}4P(B) = 1{,}2 \Rightarrow P(B) = 0{,}5.$$

$$P(A) = 1{,}4 \cdot P(B) = 1{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}7.$$

$$P(A) = 0{,}7 \qquad P(B) = 0{,}5$$

20. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(A) = \frac{2}{5}, \qquad P(A|B) = \frac{1}{2}, \qquad P(B|A) = \frac{2}{3}.$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

Λύση: (Ασκ. 2/87)

Από τον τύπο δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B).$$

Επίσης:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}.$$

Άρα:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \cdot P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Άρα από την πρώτη σχέση:

$$\frac{1}{2} P(B) = \frac{4}{15} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{15}.$$

Τέλος:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{8}{15} - \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{8}{15} - \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{15}, \qquad P(B) = \frac{8}{15}, \qquad P(A \cup B) = \frac{2}{3}.$$

21. Η πιθανότητα να είναι βροχερός ο καιρός αύριο είναι $\frac{2}{3}$. Αν είναι βροχερός, τότε η πιθανότητα να πάει ο κύριος Κώστας για περπάτημα είναι $\frac{1}{5}$. Αν όμως ο καιρός δεν είναι βροχερός, τότε η πιθανότητα να πάει για περπάτημα είναι $\frac{6}{7}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάει για περπάτημα ο κύριος Κώστας αύριο.

Λύση: (Ασκ. 3/87)

Θέτουμε

$A:$ «ο καιρός είναι βροχερός», $B:$ «ο κ. Κώστας πάει για περπάτημα».

Δίνονται:

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B|A) = \frac{1}{5}, \quad P(B|A') = \frac{6}{7}.$$

Υπολογίζουμε με τον νόμο ολικής πιθανότητας:

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|A')\,P(A') = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right).$$

$$P(B) = \frac{2}{15} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} + \frac{2}{7} = \frac{14}{105} + \frac{30}{105} = \frac{44}{105}.$$

$$P(\text{να πάει για περπάτημα}) = \frac{44}{105}$$

22. Σε ένα παραλιακό θέρετρο φτάνουν καθημερινά πλοία από τον Λίβανο και το Ισραήλ σε ποσοστά 30% και 70%, αντίστοιχα. Το 15% των πλοίων από τον Λίβανο και το 5% των πλοίων από το Ισραήλ φθάνουν με καθυστέρηση. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο θέρετρο, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

i. να έχει φτάσει με καθυστέρηση

ii. να έχει αναχωρήσει από τον Λίβανο, *αν γνωρίζετε ότι έφτασε με καθυστέρηση.*

Λύση: (Ασκ. 4/87)

Θέτουμε

$L:$ «αναχώρησε από Λίβανο», $I:$ «αναχώρησε από Ισραήλ», $D:$ «ήρθε με καθυστέρηση».

Δίνονται $P(L) = 0{,}3,\ P(I) = 0{,}7,\ P(D|L) = 0{,}15,\ P(D|I) = 0{,}05$.

i. Με τον νόμο ολικής πιθανότητας:

$$P(D) = P(D|L)P(L) + P(D|I)P(I) = 0{,}15 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}7 = 0{,}045 + 0{,}035 = 0{,}08.$$

Άρα $P(\text{καθυστέρηση}) = 0{,}08 = \dfrac{2}{15}$

ii. Με τον τύπο του Bayes:

$$P(L|D) = \frac{P(D|L)P(L)}{P(D)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}3}{0{,}08} = \frac{0{,}045}{0{,}08} = 0{,}5625 = \frac{9}{16}$$

23. Στις εξετάσεις του Ιουνίου, το 15% των μαθητών έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 10% στα Νέα Ελληνικά κάτω από τη βάση και το 5% και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή.

i. Αν γνωρίζουμε ότι ο μαθητής έχει αποτύχει στα Νέα Ελληνικά, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;

ii. Αν γνωρίζουμε ότι ο μαθητής έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Νέα Ελληνικά;

Λύση: (Ασκ. 5/87)

Θέτουμε

M : «Απέτυχε στα Μαθηματικά», N : «Απέτυχε στα Νέα Ελληνικά».

Δίνονται

$$P(M) = 0{,}15 = \frac{3}{20}, \quad P(N) = 0{,}10 = \frac{1}{10}, \quad P(M \cap N) = 0{,}05 = \frac{1}{20}.$$

i. Ζητείται $P(M \mid N)$:

$$P(M \mid N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{2}.$$

ii. Ζητείται $P(N \mid M)$:

$$P(N \mid M) = \frac{P(M \cap N)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{3}.$$

24. Η Μαρία έχει δύο κουτιά. Το κουτί A περιέχει 6 μαύρες και 4 λευκές σφαίρες, ενώ το κουτί B περιέχει 3 μαύρες και 7 λευκές σφαίρες. Η Μαρία ρίχνει ένα αμερόληπτο ζάρι και αν η ένδειξη είναι $1, 2, 3$ ή 4 παίρνει μια σφαίρα από το κουτί A, διαφορετικά παίρνει μια σφαίρα από το κουτί B. Την επόμενη μέρα ενημέρωσε ότι τράβηξε λευκή σφαίρα. Να βρείτε την πιθανότητα να την έχει πάρει από το κουτί A.

Λύση: (Ασκ. 6/88)

Θέτουμε

A : «επιλέχθηκε το κουτί A», B : «επιλέχθηκε το κουτί B», W : «λήφθηκε λευκή σφαίρα».

i. Πιθανότητες επιλογής κουτιού από το ζάρι:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

ii. Πιθανότητες λευκής σφαίρας από κάθε κουτί:

$$P(W|A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \qquad P(W|B) = \frac{7}{10}.$$

iii. Ολική πιθανότητα λευκής σφαίρας:

$$P(W) = P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15} + \frac{7}{30} = \frac{1}{2}.$$

iv. Με Bayes:

$$P(A|W) = \frac{P(W|A)P(A)}{P(W)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4/15}{1/2} = \frac{8}{15}.$$

$$P(\text{η λευκή να ήταν από το κουτί } A) = \frac{8}{15}.$$

25. Για την πλήρωση μιας θέσης εργασίας, ένας υποψήφιος πρέπει να περάσει ένα συγκεκριμένο τεστ. Ο υποψήφιος A έχει πιθανότητα 0,75 να περάσει το πρώτο τεστ. Αν δεν το περάσει, του δίνεται μία δεύτερη ευκαιρία σε δεύτερο τεστ, στο οποίο έχει πιθανότητα επιτυχίας 0,9. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο υποψήφιος A να πάρει τη θέση.

Λύση: (Ασκ. 7/88)

Θέτουμε:

$$P(\text{πρώτη επιτυχία}) = 0{,}75, \qquad P(\text{πρώτη αποτυχία}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

Αν αποτύχει στο πρώτο τεστ, η πιθανότητα να περάσει το δεύτερο είναι:

$$P(\text{επιτυχία στο δεύτερο}) = 0{,}9.$$

Η συνολική πιθανότητα να πάρει τη θέση είναι:

$$P(\text{παίρνει θέση}) = P(\text{επιτυχία στο πρώτο}) + P(\text{αποτυχία στο πρώτο}) \cdot P(\text{επιτυχία στο δεύτερο}).$$

$$P(\text{παίρνει θέση}) = 0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}9 = 0{,}75 + 0{,}225 = 0{,}975.$$

$$P(\text{ο υποψήφιος } A \text{ να πάρει τη θέση}) = 0{,}975$$

26. Μια εταιρεία πουλάει λαμπτήρες υψηλής απόδοσης. Μόνο το 0,4% των λαμπτήρων είναι ελαττωματικοί. Αν κάποιος αγοράσει 2 λαμπτήρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

i. να είναι και οι δύο ελαττωματικοί

ii. να είναι μόνο ο ένας ελαττωματικός

iii. να μην είναι κανένας ελαττωματικός

Λύση: (Ασκ. 1/91)

Έχουμε:

$$P(\mathrm{E}) = 0{,}004, \qquad P(\mathrm{M}) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996.$$

Οι δύο επιλογές είναι ανεξάρτητες.

i.

$$P(\text{και οι δύο ελαττωματικοί}) = P(\mathrm{E}) \cdot P(\mathrm{E}) = 0{,}004 \cdot 0{,}004 = 0{,}000016.$$

ii.

$$P(\text{μόνο ο ένας}) = P(\text{E}) \cdot P(\text{M}) + P(\text{M}) \cdot P(\text{E}) = 2 \cdot (0{,}004 \cdot 0{,}996) = 0{,}007968.$$

iii.

$$P(\text{κανένας ελαττωματικός}) = P(\text{M}) \cdot P(\text{M}) = 0{,}996^2 = 0{,}992016.$$

27. Η πιθανότητα να παρουσιάσει πρόβλημα μέσα στον χρόνο εγγύησης μιας μηχανής συγκεκριμένου τύπου είναι 5%. Ένα εργοστάσιο έχει δύο τέτοιες μηχανές, οι οποίες λειτουργούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η μία μόνο να πάθει βλάβη μέσα στον χρόνο εγγύησής της.

Λύση: (Ασκ. 2/91)

Θέτουμε:

A : «Η πρώτη μηχανή να πάθει βλάβη», B : «Η δεύτερη μηχανή να πάθει βλάβη».

Δίνεται:

$$P(A) = P(B) = 0.05 \qquad \text{και} \qquad P(A') = P(B') = 1 - 0.05 = 0.95.$$

Οι μηχανές λειτουργούν ανεξάρτητα, άρα τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Ζητούμενο: η μία μόνο από τις δύο να πάθει βλάβη:

$$P(\text{μία μόνο}) = P(A \cap B') + P(A' \cap B).$$

Υπολογίζουμε:

$$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = 0.05 \cdot 0.95 = 0.0475,$$
$$P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B) = 0.95 \cdot 0.05 = 0.0475.$$

Άρα:

$$P(\text{μία μόνο}) = 0.0475 + 0.0475 = 0.095.$$

$$P(\text{η μία μόνο να πάθει βλάβη}) = 0.095$$

28. Ένα σακουλάκι περιέχει σπόρους λουλουδιών. Αναγράφεται ότι η πιθανότητα να φυτρώσει ο κάθε σπόρος, αν ακολουθήσουμε τις οδηγίες, είναι 65%. Αν φυτέψουμε 3 σπόρους σε ξεχωριστές γλάστρες, σύμφωνα με τις οδηγίες, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

i. να φύτρωσαν και οι τρεις σπόροι

ii. να φύτρωσαν μόνο οι δύο σπόροι

iii. να φυτρώσει τουλάχιστον ένας σπόρος.

Λύση: (Ασκ. 3/91)

Θέτουμε για κάθε σπόρο τα ενδεχόμενα:

$$G: \text{ «ο σπόρος φυτρώνει»}, \qquad \overline{G}: \text{ «ο σπόρος } \textit{δεν} \text{ φυτρώνει»}.$$

Δίνεται $P(G) = 0.65 =: p$ και $P(\overline{G}) = 1 - p = 0.35 =: q$. Οι 3 σπόροι φυτεύονται σε ξεχωριστές γλάστρες και θεωρούνται ανεξάρτητοι (διωνυμικό μοντέλο με $n = 3$, $p = 0.65$).

i. «και οι τρεις»:

$$P(3) = p^3 = 0.65^3 = 0.274625 \ (\approx 27.4625\%).$$

ii. «μόνο οι δύο»:

$$P(2) = \binom{3}{2} p^2 q = 3 \cdot 0.65^2 \cdot 0.35 = 3 \cdot 0.4225 \cdot 0.35 = 0.443625 \ (\approx 44.3625\%).$$

iii. «τουλάχιστον ένας» (συμπλήρωμα του «κανένας»):

$$P(\geq 1) = 1 - q^3 = 1 - 0.35^3 = 1 - 0.042875 = 0.957125 \ (\approx 95.7125\%).$$

29. Ο Κώστας και ο Γιάννης ρίχνουν ένα νόμισμα, ο ένας μετά τον άλλον. Κερδίζει ο πρώτος που θα φέρει «Κεφαλή». Ο Κώστας παίζει πρώτος. Ποιος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;

Λύση: (Ασκ. 4/91)

Θέτουμε $p = P(\text{«κερδίζει ο Κώστας»})$. Σε κάθε «γύρο» (δύο ρίψεις) συμβαίνει:

i. Ο Κώστας φέρνει «Κ» στην πρώτη ρίψη ⇒ κερδίζει με πιθανότητα $\frac{1}{2}$.

ii. Αν πέσουν δύο «Γ» (πιθανότητα $\frac{1}{4}$), τότε η διαδικασία ξεκινά πάλι από την αρχή, οπότε η πιθανότητα να κερδίσει ο Κώστας παραμένει p.

Άρα:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p \quad \Longrightarrow \quad \Big(1 - \frac{1}{4}\Big)p = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{4}p = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{2}{3}.$$

Επομένως $P(\text{«κερδίζει ο Γιάννης»}) = 1 - p = \frac{1}{3}$.

Πλεονέκτημα έχει ο Κώστας, με πιθανότητα νίκης $\frac{2}{3}$.

30. Αν για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A) = 0{,}7 \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = 0{,}8,$$

να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B)$, όταν:

i. τα A, B είναι ασυμβίβαστα

ii. τα A, B είναι ανεξάρτητα

iii. ισχύει $P(A|B) = 0{,}6$.

Λύση: (Ασκ. 5/91)

Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ένωσης:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Άρα:

$$0{,}8 = 0{,}7 + P(B) - P(A \cap B) \quad \Longrightarrow \quad P(B) = 0{,}1 + P(A \cap B).$$

i. Ασυμβίβαστα: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$.

$$P(B) = 0{,}1 + 0 = 0{,}1.$$

ii. Ανεξάρτητα: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7P(B)$.

$$0{,}8 = 0{,}7 + P(B) - 0{,}7P(B) = 0{,}7 + 0{,}3P(B)$$

$$0{,}1 = 0{,}3P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}.$$

iii. Δίνεται $P(A|B) = 0{,}6$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}6 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}6P(B).$$

$$0{,}8 = 0{,}7 + P(B) - 0{,}6P(B) = 0{,}7 + 0{,}4P(B)$$

$$0{,}1 = 0{,}4P(B) \Rightarrow P(B) = 0{,}25.$$

31. Η πιθανότητα να αργήσει ένα συγκεκριμένο άτομο να πάει στην εργασία του είναι 0,15. Να υπολογίσετε την πιθανότητα σε δύο διαδοχικές μέρες:

i. να αργήσει και τις δύο μέρες

ii. να αργήσει μόνο τη μία από τις δύο μέρες

iii. να μην αργήσει σε καμία μέρα.

Λύση: (Ασκ. 6/91)

Θέτουμε:

$$A: \text{ «Αργεί μία μέρα»}, \qquad P(A) = 0{,}15, \qquad P(A') = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Οι δύο μέρες θεωρούνται ανεξάρτητες.

i. «να αργήσει και τις δύο μέρες»:

$$P(A \cap A) = 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225.$$

ii. «να αργήσει μόνο τη μία από τις δύο μέρες»:

$$P(\text{μόνο μία}) = P(A \cap A') + P(A' \cap A) = 0{,}15 \cdot 0{,}85 + 0{,}85 \cdot 0{,}15 = 2 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}255.$$

iii. «να μην αργήσει σε καμία μέρα»:

$$P(A' \cap A') = 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}7225.$$

32. Σε ένα τεστ πολλαπλής επιλογής υπάρχουν 10 ερωτήσεις με 4 επιλογές στην κάθε ερώτηση. Κάποιος απαντάει στην τύχη σε όλες τις ερωτήσεις. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

i. να απαντήσει ορθά σε 4 ακριβώς ερωτήσεις

ii. να μην απαντήσει ορθά σε καμία ερώτηση

iii. να απαντήσει ορθά σε τουλάχιστον 2 ερωτήσεις.

Λύση: (Ασκ. 7/92)

Δειγματικός χώρος. Κάθε ερώτηση έχει 4 δυνατές απαντήσεις. Για 10 ερωτήσεις:

$$|\Omega| = 4^{10}.$$

Μια απάντηση είναι σωστή με 1 τρόπο και λανθασμένη με 3 τρόπους.

i. «4 ακριβώς ορθές»
Επιλέγουμε *σε ποιες* 4 θέσεις είναι οι σωστές ($\binom{10}{4}$ τρόποι), στις σωστές θέσεις υπάρχει 1 τρόπος, στις υπόλοιπες 6 θέσεις υπάρχουν 3 τρόποι (λάθος επιλογή):

$$N_{4 \text{ ορθ.}} = \binom{10}{4} \cdot 1^4 \cdot 3^6.$$

Άρα

$$P(4) = \frac{N_{4 \text{ ορθ.}}}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{4} 3^6}{4^{10}} = 0.146$$

ii. «καμία ορθή»
Κάθε ερώτηση απαντιέται λάθος με 3 τρόπους, άρα

$$N_{0 \text{ ορθ.}} = 3^{10} \quad \Rightarrow \quad P(0) = \frac{3^{10}}{4^{10}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0.056$$

iii. «τουλάχιστον 2 ορθές»
Συμπληρωματικό του «0 ή 1 ορθή». Ήδη έχουμε το $P(0)$. Για «1 ορθή»: επιλέγουμε *σε ποια* θέση είναι η σωστή ($\binom{10}{1}$ τρόποι), εκεί 1 τρόπος, στις άλλες 9 θέσεις 3 τρόποι:

$$N_{1 \text{ ορθ.}} = \binom{10}{1} \cdot 1 \cdot 3^9 \quad \Rightarrow \quad P(1) = \frac{\binom{10}{1} 3^9}{4^{10}}.$$

Άρα

$$P(\geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{3^{10}}{4^{10}} - \frac{\binom{10}{1} 3^9}{4^{10}} = 0,756$$

33. Τρία αγόρια και τρία κορίτσια θα τοποθετηθούν τυχαία σε κυκλικό τραπέζι.

i. Με πόσους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η τοποθέτηση;

ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα αγόρια να καθίσουν σε συνεχόμενες θέσεις.

Λύση: (Ασκ. 1/93)

i. Σύνολο διατάξεων γύρω από κύκλο: Για 6 διακριτά άτομα, οι κυκλικές διατάξεις είναι

$$|\Omega| = (6-1)! = 5! = 120.$$

ii. Ευνοϊκές: «τα τρία αγόρια διαδοχικά»
Θεωρούμε τα 3 αγόρια ως *ένα μπλοκ*. Τότε έχουμε το μπλοκ AAA και τα 3 κορίτσια (K, K, K): συνολικά 4 «αντικείμενα» σε κύκλο, άρα

$$(4-1)! = 3! = 6 \text{ διατάξεις.}$$

Μέσα στο μπλοκ τα 3 αγόρια εναλλάσσονται με $3! = 6$ τρόπους.
Άρα οι ευνοϊκές διατάξεις:

$$N_{\text{ευν.}} = 6 \cdot 6 = 36.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα:

$$P(\text{τα αγόρια συνεχόμενα}) = \frac{N_{\text{ευν.}}}{|\Omega|} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

34. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί *ακριβώς ένα* από τα A και B είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν *και τα δύο* συγχρόνως είναι $\frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να *μην πραγματοποιηθεί κανένα* από τα δύο ενδεχόμενα A και B.

Λύση: (Ασκ. 2/93)

«Ακριβώς ένα»:

$$P\big((A-B) \cup (B-A)\big) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

Με $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$:

$$P(A) + P(B) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; P(A) + P(B) = \frac{5}{6}.$$

Τότε
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$
Άρα η πιθανότητα *κανένα* (δηλ. $A'\cap B'$):
$$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}.$$
$$P(\text{κανένα από τα } A,B)=\frac{5}{12}$$

35. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα:
$$A=\{\omega_1,\omega_2\},\qquad B=\{\omega_1,\omega_3\},\qquad \Gamma=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},$$
με:
$$P(A)=\frac{1}{3},\qquad P(B)=\frac{3}{4},\qquad P(\Gamma)=\frac{5}{6}.$$
Να υπολογίσετε την πιθανότητα των απλών ενδεχομένων του Ω και των ενδεχομένων $A\cap B,\ A\cup B,\ \Gamma-B,\ A\cap B\cap\Gamma,\ A\cap B\cap\Gamma'$ και $A\cup B\cup\Gamma'$.

Λύση: (Ασκ. 3/93)

Θέτουμε:
$$P(\omega_1)=a,\quad P(\omega_2)=b,\quad P(\omega_3)=c,\quad P(\omega_4)=d.$$
Από τα δεδομένα:
$$a+b=P(A)=\frac{1}{3},\qquad a+c=P(B)=\frac{3}{4},\qquad a+b+c=P(\Gamma)=\frac{5}{6}.$$
Από $a+b=\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{3}-a$.
Από $a+c=\frac{3}{4}\Rightarrow c=\frac{3}{4}-a$.

Αντικαθιστούμε στο $a+b+c=\frac{5}{6}$:
$$a+\left(\frac{1}{3}-a\right)+\left(\frac{3}{4}-a\right)=\frac{5}{6}.$$
$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-a=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{13}{12}-a=\frac{10}{12}\Rightarrow a=\frac{1}{4}.$$
$$b=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\qquad c=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$
Άρα:
$$a+b+c=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\Rightarrow d=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}.$$

$$P(\omega_1) = \frac{1}{4}, \quad P(\omega_2) = \frac{1}{12}, \quad P(\omega_3) = \frac{1}{2}, \quad P(\omega_4) = \frac{1}{6}$$

Υπολογισμός των ζητουμένων ενδεχομένων:

$$A \cap B = \{\omega_1\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

$$A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$\Gamma - B = \{\omega_2\} \Rightarrow P(\Gamma - B) = P(\omega_2) = \frac{1}{12}.$$

$$A \cap B \cap \Gamma = A \cap B = \{\omega_1\} \Rightarrow P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{4}.$$

$$\Gamma' = \{\omega_4\}, \quad A \cap B \cap \Gamma' = \{\omega_1\} \cap \{\omega_4\} = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B \cap \Gamma') = 0.$$

$$A \cup B \cup \Gamma' = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \Omega \Rightarrow P(A \cup B \cup \Gamma') = 1.$$

36. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει:

$$P(A) = P(A \cap B') \qquad \text{και} \qquad P(B) = P(A' \cup B).$$

Να αποδείξετε ότι:

$$P(A) + P(B) = P(\Omega).$$

Λύση: (Ασκ. 4/93)

Ισχύει:

$$P(A) = P(A \cap B').$$

Επίσης:

$$P(B) = P(A' \cup B).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(A \cap B') \cup (A' \cup B) = \Omega.$$

Πράγματι, για κάθε στοιχείο $\omega \in \Omega$:

1. είτε $\omega \in A$ και αν παράλληλα $\omega \notin B$, τότε $\omega \in A \cap B'$,
2. είτε $\omega \notin A$, οπότε $\omega \in A' \subseteq A' \cup B$,
3. είτε $\omega \in B$, οπότε $\omega \in B \subseteq A' \cup B$.

Άρα τα ενδεχόμενα $(A \cap B')$ και $(A' \cup B)$ καλύπτουν όλο το Ω.

Επιπλέον, τα δύο ενδεχόμενα είναι ξένα:

$$(A \cap B') \cap (A' \cup B) = \emptyset.$$

(διότι δεν μπορεί ένα στοιχείο να ανήκει και στο A και στο A' ή και στο B και στο B' ταυτόχρονα.)

Επομένως, λόγω προσθετικότητας:

$$P(\Omega) = P\big((A \cap B') \cup (A' \cup B)\big) = P(A \cap B') + P(A' \cup B).$$

Αντικαθιστούμε από τις δεδομένες σχέσεις:

$$P(\Omega) = P(A) + P(B).$$

37. Ένας βοηθός διευθυντής πρόκειται να καλέσει στο γραφείο του δύο μαθήτριες και τρεις μαθητές με την σειρά, τον έναν μετά τον άλλον. Αν η επιλογή της σειράς πραγματοποιηθεί τυχαία, να υπολογίσετε την πιθανότητα η μία μαθήτρια να πάει πρώτη και η άλλη τελευταία.

Λύση: (Ασκ. 5/93)

Σύνολο δυνατών σειρών για 5 άτομα:

$$|\Omega| = 5! = 120.$$

Για να είναι η μία πρώτη και η άλλη τελευταία: διαλέγουμε ποια μαθήτρια είναι πρώτη και ποια τελευταία (2! τρόποι) και τοποθετούμε τους 3 μαθητές στις ενδιάμεσες θέσεις (3! τρόποι).

$$N_{\text{ευν.}} = 2! \cdot 3! = 12.$$

Άρα

$$P = \frac{N_{\text{ευν.}}}{|\Omega|} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}.$$

38. Ένα εξεταστικό δοκίμιο περιέχει 10 ερωτήσεις. Σε κάθε ερώτηση δίνονται 3 απαντήσεις και ανάλογα με την απάντηση ο μαθητής παίρνει $1, 2$ ή 3 μονάδες. Αν ο μαθητής απαντήσει τυχαία όλες τις ερωτήσεις, να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρει συνολικά 27 μονάδες.

Λύση: (Ασκ. 6/93)

Για κάθε ερώτηση υπάρχουν 3 δυνατές μονάδες: $1, 2, 3$.
Ο συνολικός αριθμός δυνατών τρόπων απάντησης είναι:

$$|\Omega| = 3^{10} = 59049.$$

Θέλουμε το άθροισμα των 10 μονάδων να γίνει 27.

Ένας τρόπος να ικανοποιείται αυτό είναι να επιλεγούν:

$$4 \text{ φορές το } 1, \quad 3 \text{ φορές το } 2, \quad \text{και} \quad 3 \text{ φορές το } 3.$$

Ελέγχουμε:

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 + 6 + 9 = 19 \quad (\text{όχι σωστό}).$$

Ο σωστός συνδυασμός είναι:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10, \qquad 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 27.$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 3.$$

Άρα:

1 σωστή απάντηση δίνει 1 μονάδα, 6 δίνουν 2 μονάδες, 3 δίνουν 3 μονάδες.

Ο αριθμός των ευνοϊκών διατάξεων είναι:

$$N = \frac{10!}{1! \cdot 6! \cdot 3!} = \frac{10!}{6! \cdot 6} = 210.$$

$$P(\text{σύνολο } 27) = \frac{210}{59049} = \frac{70}{19683}.$$

39. Μια αίθουσα έχει 13 διθέσια θρανία. Αν 25 μαθητές τοποθετηθούν τυχαία στα θρανία της αίθουσας, να υπολογίσετε την πιθανότητα 2 συγκεκριμένοι μαθητές να καθίσουν στο ίδιο θρανίο.

Λύση: (Ασκ. 7/93)

Ονομάζουμε τους δύο συγκεκριμένους μαθητές A και B.
Κάθε θρανίο έχει 2 θέσεις, άρα συνολικά υπάρχουν 26 θέσεις.

Τοποθετούμε πρώτα τον A σε οποιαδήποτε από τις 26 θέσεις. Απομένουν 25 κενές θέσεις για τον B. Για να καθίσουν στο *ίδιο* θρανίο, ο B πρέπει να επιλέξει *τη μοναδική* θέση που βρίσκεται στο ίδιο θρανίο με τον A.

$$P = \frac{1}{25}.$$

Εναλλακτικός (με μέτρηση): Οι δυνατοί *διατεταγμένοι* τρόποι να τοποθετηθούν οι A, B σε θέσεις είναι $26 \cdot 25$. Ευνοϊκοί: επιλέγουμε θρανίο (13 τρόποι) και διάταξη A, B στις δύο θέσεις του (2 τρόποι), σύνολο $13 \cdot 2 = 26$.

$$P = \frac{26}{26 \cdot 25} = \frac{1}{25}.$$

40. Ένα δοχείο περιέχει 5 μαύρες και 3 λευκές μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μία μπάλα από το δοχείο. Αν η μπάλα είναι μαύρη, την επανατοποθετούμε στο δοχείο και προσθέτουμε ακόμη 2 λευκές μπάλες. Αν η μπάλα είναι λευκή, την επανατοποθετούμε στο δοχείο και προσθέτουμε ακόμη 1 μαύρη και 1 λευκή μπάλα.

Στη συνέχεια παίρνουμε τυχαία μία δεύτερη μπάλα από το δοχείο.

i. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήρα να είναι λευκή.

ii. Αν η δεύτερη μπάλα είναι λευκή, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη να ήταν μαύρη;

iii. Αν τη δεύτερη φορά παίρνουμε ταυτόχρονα δύο μπάλες, να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχουν το ίδιο χρώμα.

Λύση: (Ασκ. 8/94)

i.

$$P(1\text{η } M) = \frac{5}{8}, \qquad P(1\text{η } L) = \frac{3}{8}.$$

Αν η 1η ήταν μαύρη: το δοχείο γίνεται $5M, 5L$, άρα

$$P(2\text{η } L \,|\, 1\text{η } M) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Αν η 1η ήταν λευκή: το δοχείο γίνεται $6M, 4L$, άρα

$$P(2\eta\ L \,|\, 1\eta\ L) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$P(2\eta\ L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{16} + \frac{3}{20} = \frac{37}{80}.$$

ii. Με Bayes:

$$P(1\eta\ M \,|\, 2\eta\ L) = \frac{P(2\eta\ L \,|\, 1\eta\ M) \cdot P(1\eta\ M)}{P(2\eta\ L)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{37}{80}} = \frac{25}{37}.$$

$$P(1\eta\ M \,|\, 2\eta\ L) = \frac{25}{37}$$

iii. Αν η 1η ήταν μαύρη: $5M, 5L$

$$P(\text{ίδιου χρώματος} | \, 1\eta\ M) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{10+10}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Συνεισφορά: } \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{18}.$$

Αν η 1η ήταν λευκή: $6M, 4L$

$$P(\text{ίδιου χρώματος} | \, 1\eta\ L) = \frac{\binom{6}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15+6}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

$$\text{Συνεισφορά: } \frac{7}{15} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{40}.$$

$$P(\text{ίδιου χρώματος}) = \frac{5}{18} + \frac{7}{40} = \frac{163}{360}.$$

41. Ένα κτήριο έχει ισόγειο και άλλους 3 ορόφους. Μπαίνουν στον ανελκυστήρα που βρίσκεται στο ισόγειο 6 άτομα. Τα άτομα κατεβαίνουν τυχαία σε οποιονδήποτε από τους 3 ορόφους. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

i. να κατέβουν όλοι σε *έναν* όροφο

ii. να κατέβουν όλοι στον *δεύτερο* ή όλοι στον *τρίτο* όροφο

iii. να κατέβουν *δύο* άτομα σε κάθε όροφο.

Λύση: (Ασκ. 9/94)

Κάθε άτομο έχει 3 ισοπίθανες, ανεξάρτητες επιλογές (όροφοι $1, 2, 3$). Άρα

$$|\Omega| = 3^6 = 729.$$

i. «όλοι στον ίδιο όροφο»
Επιλογή ορόφου: 3 τρόποι. Για τον επιλεγμένο όροφο όλοι οι 6 επιλέγουν εκεί (μοναδικός τρόπος).

$$N_i = 3 \quad \Rightarrow \quad P_i = \frac{3}{3^6} = \frac{1}{243}.$$

ii. «όλοι στον 2ο *ή* όλοι στον 3ο»
Ευνοϊκά αποτελέσματα: 2 (όλοι-2ος, όλοι-3ος).

$$P_{ii} = \frac{2}{3^6} = \frac{2}{729}.$$

iii. «δύο σε κάθε όροφο»
Κατανομή $2, 2, 2$ στους 3 ορόφους για 6 διακεκριμένα άτομα:

$$N_{iii} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90 \quad \Rightarrow \quad P_{iii} = \frac{90}{3^6} = \frac{90}{729} = \frac{10}{81}.$$

42. Δεκαέξι μαθητές θα χωριστούν ισάριθμα σε 4 *διαφορετικές* ομάδες (κάθε ομάδα με 4 μέλη). Να υπολογίσετε την πιθανότητα 4 *συγκεκριμένοι* μαθητές να ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες.

Λύση: (Ασκ. 10/94)

Θεωρούμε ότι οι ομάδες είναι διακεκριμένες (Α, Β, Γ, Δ).

Σύνολο τρόπων κατανομής των 16 μαθητών σε 4 ομάδες των 4 (χωρίς τάξη μέσα στην ομάδα):

$$|\Omega| = \frac{16!}{(4!)^4}.$$

Βάζουμε τους 4 συγκεκριμένους μαθητές σε *διαφορετικές* ομάδες: $4!$ αντιστοιχίσεις.
Οι υπόλοιποι 12 μαθητές μοιράζονται στις 4 ομάδες από 3 σε καθεμιά:

$$N_{\text{ευν.}} = 4! \cdot \frac{12!}{(3!)^4}.$$

Άρα

$$P = \frac{N_{\text{ευν.}}}{|\Omega|} = \frac{4! \cdot \dfrac{12!}{(3!)^4}}{\dfrac{16!}{(4!)^4}} = \frac{(4!)^5\, 12!}{(3!)^4\, 16!} = \frac{64}{455}.$$

43. Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

ii. Για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει $P(A) \leq 1$.

iii. Για ενδεχόμενα A, B ισχύει $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.

Λύση: (Ασκ. 11/94)

i. Από $A \subseteq B$ έχουμε τη διάσπαση $B = A \cup (B \setminus A)$ με ξένα σύνολα. Άρα, από προσθετικότητα:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \;\Rightarrow\; P(B) \geq P(A).$$

ii. Εφόσον $A \subseteq \Omega$ και $P(\Omega) = 1$, από (i) (μονοτονία) έπεται

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$

iii. Ισχύουν οι συνεπαγωγές συνόλων

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

Με τη μονοτονία της πιθανότητας (i) παίρνουμε

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B).$$

44. Δίνονται δύο κύβοι K_1 και K_2. Οι έδρες του K_1 είναι αριθμημένες με $1, 1, 2, 3, 4, 4$ και του K_2 με $1, 1, 1, 2, 2, 3$. Ρίχνουμε τους δύο κύβους μία φορά τον καθένα και παρατηρούμε την ένδειξη της πάνω έδρας. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : «Ο K_1 φέρνει ένδειξη περιττή», B : «Ο K_2 φέρνει ένδειξη περιττή»,

Γ : «Τουλάχιστον ένας κύβος φέρνει περιττή ένδειξη», Δ : «Μόνο ο K_1 φέρνει περιττή»,

E : «Μόνο ο ένας από τους δύο φέρνει περιττή».

i. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(\Gamma), P(\Delta), P(E)$.

ii. Δοθέντος ότι παρουσιάστηκε *μόνο μία* περιττή ένδειξη, να βρείτε την πιθανότητα να ήταν του K_1.

Λύση: (Ασκ. 12/94)

Στον K_1: περιττές οι $1, 1, 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A') = \frac{1}{2}$.

Στον K_2: περιττές οι $1, 1, 1, 3 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(B') = \frac{1}{3}$.

Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες.

i.
$$P(\Gamma) = P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A')P(B') = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$P(\Delta) = P(A \cap B') = P(A)\,P(B') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P(E) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Άρα:
$$P(A) = \tfrac{1}{2}, \quad P(B) = \tfrac{2}{3}, \quad P(\Gamma) = \tfrac{5}{6}, \quad P(\Delta) = \tfrac{1}{6}, \quad P(E) = \tfrac{1}{2}$$

ii. Ζητείται $P(\Delta \,|\, E) = \dfrac{P(\Delta)}{P(E)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

$$P(\text{η περιττή να είναι του } K_1 \mid \text{μόνο μία περιττή}) = \tfrac{1}{3}$$

45. Ένας παίκτης στον ποιο κάτω τροχό της τύχης πρέπει να περιστρέψει το βέλος 4 φορές. Κάθε φορά το βέλος δείχνει μία από 8 ίσους τομείς: 4 γράφουν «Χρεοκοπία» και οι άλλοι 4 είναι αριθμοί $50, 100, 100, 50$. Αν δείξει αριθμό, κερδίζει το ποσό αυτό *αθροιστικά*. Αν δείξει «Χρεοκοπία», το παιχνίδι τελειώνει αμέσως και το συνολικό κέρδος είναι 0.

Να υπολογίσετε:

i. το μέγιστο ποσό που μπορεί να κερδίσει και την πιθανότητα να το κερδίσει

ii. την πιθανότητα να μην κερδίσει τίποτα

iii. την πιθανότητα να κερδίσει 150 ευρώ

iv. την πιθανότητα να κερδίσει κάποιο *θετικό* ποσό

v. θέτοντας P_ν την πιθανότητα να κερδίσει όταν περιστρέφει ν φορές, να δείξετε ότι,

$$\lim_{\nu\to\infty} P_\nu = 0$$

.

Λύση: (Ασκ. 13/95)

Κάθε περιστροφή:

$$P(\text{Χρεοκοπία}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \qquad P(50) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \qquad P(100) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Οι περιστροφές είναι ανεξάρτητες.

i. Μέγιστο ποσό όταν και οι 4 φορές βγει 100: $100 + 100 + 100 + 100 = 400$ ευρώ.

$$P(400) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}.$$

ii. «Δεν κερδίζει τίποτα» $\Leftrightarrow$ εμφανίζεται τουλάχιστον μία «Χρεοκοπία» στις 4 περιστροφές.

$$P(0) = 1 - P(\text{καμία χρεοκοπία}) = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

iii. Αν δεν εμφανιστεί «Χρεοκοπία», τα ποσά ανά φορά είναι 50 ή 100, άρα τα δυνατά αθροίσματα είναι

$$200,\ 250,\ 300,\ 350,\ 400.$$

Το 150 *δεν* είναι δυνατό.

$$P(150) = 0.$$

iv. «Κερδίζει κάποιο θετικό ποσό» $\Leftrightarrow$ δεν εμφανίζεται «Χρεοκοπία» σε καμία από τις 4 φορές:

$$P(\text{κερδίζει } {>}0) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

v. Για ν περιστροφές, πρέπει να μην εμφανιστεί «Χρεοκοπία» ποτέ:

$$P_\nu = \left(\tfrac{1}{2}\right)^\nu \implies \lim_{\nu\to\infty} P_\nu = \lim_{\nu\to\infty} 2^{-\nu} = 0.$$

46. Κατά τη διάρκεια ενός τηλεπαιχνιδιού ο διαγωνιζόμενος επιλέγει αρχικά την κουρτίνα 1. Ο παρουσιαστής ανοίγει την κουρτίνα 3 και είναι άδεια. Προσφέρεται επιλογή αλλαγής από την 1 στη 2. Τι είναι προτιμότερο; Να μείνει στην 1 ή να αλλάξει στην 2; Να δικαιολογήσετε πλήρως.

Λύση: (Ασκ. 1/96)

Ιδιότητα παρουσιαστή:

Ανοίγει *πάντα* μια άδεια κουρτίνα· αν ο διαγωνιζόμενος έχει ήδη τη σωστή, επιλέγει τυχαία μία από τις δύο άδειες.

Αρχικά:

$$P(\text{δώρο πίσω από } 1) = P(\text{δώρο πίσω από } 2) = P(\text{δώρο πίσω από } 3) = \frac{1}{3}.$$

Έστω H το ενδεχόμενο «ο παρουσιαστής ανοίγει την 3 και είναι άδεια». Τότε

$$P(H \mid \text{δώρο } = 1) = \frac{1}{2}, \qquad P(H \mid \text{δώρο } = 2) = 1, \qquad P(H \mid \text{δώρο } = 3) = 0.$$

Με Bayes:

$$P(\text{δώρο } = 1 \mid H) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

$$P(\text{δώρο } = 2 \mid H) = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Άρα:

$$P(\text{κερδίζει αν } \mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\iota \text{ στην } 1) = \frac{1}{3}, \qquad P(\text{κερδίζει αν } \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi\varepsilon\iota \text{ στην } 2) = \frac{2}{3}.$$

Συμπέρασμα: Είναι προτιμότερο να αλλάξει στην κουρτίνα 2 (πιθανότητα νίκης 2/3 έναντι 1/3).

Σημείωση: Υπολογιστική λύση (Python) του Monty Hall problem, υπάρχει εδώ!

47. Η ανάθεση του έργου γίνεται με πλειοψηφία από μια τριμελή επιτροπή. Τα δύο από τα μέλη ψηφίζουν υπέρ της εταιρείας A με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ το καθένα, ανεξάρτητα. Το τρίτο μέλος ψηφίζει τυχαία, δηλαδή υπέρ της A με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Να βρείτε την πιθανότητα να ανατεθεί το έργο στην A.

Λύση: (Ασκ. 2/96)

Για να ανατεθεί το έργο στην A, πρέπει τουλάχιστον 2 από τα 3 μέλη να ψηφίσουν υπέρ της A.

Περίπτωση 1: Και τα 3 μέλη ψηφίζουν υπέρ της A.

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}.$$

Περίπτωση 2: Ακριβώς 2 μέλη ψηφίζουν υπέρ της A.

$$\text{(α) Τα δύο πρώτα ναι και το τρίτο όχι: } \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}.$$

$$\text{(β) Το ένα από τα δύο πρώτα όχι, το άλλο ναι και το τρίτο ναι: } 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}.$$

Άρα

$$P(\text{ακριβώς 2 υπέρ}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Συνολική πιθανότητα ανάθεσης στην A:

$$P = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Θέματα Εξετάσεων

1. Δίνονται τέσσερα δοχεία, A, B, Γ, Δ, και εννέα διαφορετικά μολύβια.
(Δεν υπάρχει περιορισμός στη χωρητικότητα των δοχείων.)

α) i. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά;

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «το δοχείο A να περιέχει ακριβώς πέντε μολύβια».

β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά, ώστε κάθε δοχείο να περιέχει τουλάχιστον ένα μολύβι;

Λύση: 2025

α)

i) Το κάθε μολύβι έχει τέσσερεις δυνατές επιλογές (δοχεία), επομένως, έχουμε ότι:

$$4^9 = 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 4^9 = 262144$$

όλες οι δυνατές θέσεις.

ii) Το ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι να μπουν ακριβώς 5 μολύβια στο πρώτο δοχείο και τα υπόλοιπα 4 μολύβια στα υπόλοιπα 3 δοχεία (2^o, 3^o και 4^o δοχείο).

Η επιλογή των 5 μολυβιών για το 1^o δοχείο μπορεί να γίνει με:

$$\binom{9}{5}$$

Το καθένα από τα υπόλοιπα 4 μολύβια μπορεί να τοποθετηθεί σε 3 δοχεία (2^o, 3^o και 4^o) ως εξής:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

Επομένως, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{9}{5} \cdot 3^4 = \frac{9!}{5!(9-5)!} \cdot 3^4 = 126 \cdot 81 = 10206$$

Έτσι, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{\text{Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Όλες οι δυνατές περιπτώσεις}} = \frac{\binom{9}{5} 3^4}{4^9} = \frac{10206}{262144} \approx 0{,}0389 \text{ ή } 3{,}89\%.$$

β)

(Α′ Τρόπος)

Οι τρόποι να είναι γεμάτα τα δοχεία με τουλάχιστον ένα μολύβι είναι οι πιο κάτω:

$$(1,1,1,6) \text{ μολύβια με } \binom{9}{6}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\frac{4!}{3!} = 2016 \text{ τρόποι}$$

$$(1,1,2,5) \text{ μολύβια με } \binom{9}{5}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\frac{4!}{2!} = 18144 \text{ τρόποι}$$

$$(1,1,3,4) \text{ μολύβια με } \binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{1}\frac{4!}{2!} = 30240 \text{ τρόποι}$$

$$(1,2,2,4) \text{ μολύβια με } \binom{9}{4}\binom{5}{2}\binom{3}{1}\frac{4!}{2!} = 45360 \text{ τρόποι}$$

$$(1,2,3,3) \text{ μολύβια με } \binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{1}\frac{4!}{2!} = 60480 \text{ τρόποι}$$

$$(2,2,2,3) \text{ μολύβια με } \binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{4!}{3!} = 30240 \text{ τρόποι}$$

Άρα συνολικά 186480 περιπτώσεις.

(Β′ Τρόπος)

$$262144 - \binom{4}{3}\cdot 3^9 + \binom{4}{2}\cdot 2^9 - \binom{4}{1}\cdot 1^9 = 186480$$

(Γ′ Τρόπος)

- Να μπουν όλα στο ίδιο δοχείο (3 κενά) είναι 4 περιπτώσεις: $\binom{4}{1}\cdot 1^9$
- Να μπουν όλα σε δύο δοχεία (2 κενά):

$$\binom{4}{2}\cdot(2^9-2) = 3060$$

- Να μπουν όλα σε 3 δοχεία (1 κενό):

$$\binom{4}{3}\left(3^9 - \left(\binom{3}{2}(2^9-2)\right) - 3\right) = 72600$$

Συνολικά:

$$262144 - 4 - 3060 - 72600 = 186480$$

2. Τέσσερεις αθλητές της καλαθόσφαιρας, ο Ανδρέας, ο Βασίλης, ο Γιάννης και ο Δημήτρης, ρίχνουν με τη σειρά μια βολή στο ίδιο καλάθι με ποσοστό ευστοχίας 5%, 15%, 30% και 40%, αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι εύστοχες και οι τέσσερεις βολές.

β) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι άστοχες και οι τέσσερεις βολές.

γ) Αν οι τρεις βολές από τις τέσσερεις είναι εύστοχες, να βρείτε την πιθανότητα αυτές να είναι οι βολές του Ανδρέα, του Βασίλη και του Γιάννη.

Λύση: 2025

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$A : \text{«Ο Ανδρέας εύστοχος»},$$
$$B : \text{«Ο Βασίλης εύστοχος»},$$
$$\Gamma : \text{«Ο Γιάννης εύστοχος»},$$
$$\Delta : \text{«Ο Δημήτρης εύστοχος»}.$$

Τα πιο πάνω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Οι πιθανότητες ευστοχίας των τεσσάρων παικτών είναι:

$$P(A) = 0{,}05, \quad P(B) = 0{,}15, \quad P(\Gamma) = 0{,}30, \quad P(\Delta) = 0{,}40.$$

$$P(\text{όλοι εύστοχοι}) = P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta)$$
$$= 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}0009 \Rightarrow 0{,}09\%.$$

β) Τα αντίθετα ενδεχόμενα ανεξάρτητων ενδεχομένων είναι επίσης ανεξάρτητα.

$$P(\text{όλοι άστοχοι}) = P(A' \cap B' \cap \Gamma' \cap \Delta') = P(A') \cdot P(B') \cdot P(\Gamma') \cdot P(\Delta')$$

$$= (1 - 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}3) \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}339 \Rightarrow 33{,}9\%.$$

γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$E : \text{ «Οι τρεις βολές από τις τέσσερεις είναι εύστοχες»},$$

$$Z : \text{ «Μόνο ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γιάννης εύστοχοι»}.$$

$P(E) = P(A' \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) + P(A \cap B' \cap \Gamma \cap \Delta) + P(A \cap B \cap \Gamma' \cap \Delta) + P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta')$
$= P(A') \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta) + P(A) \cdot P(B') \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma') \cdot P(\Delta) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta')$
$= 0{,}95 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = \frac{513}{20000}.$

$$P(Z) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta') = 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6.$$

$$P(Z|E) = \frac{P(Z \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6}{\frac{513}{20000}} = \frac{1}{19}.$$

3. Σε ένα Λύκειο επτά (7) τελειόφοιτοι μαθητές/τριες ενοικίασαν τέσσερα (4) δίθεσια μηχανάκια.

α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στα μηχανάκια αν:

i. σε κάθε θέση οδηγού πρέπει απαραίτητα να υπάρχει μαθητής/τρια

ii. η Αργυρώ και ο Δημήτρης ξέχασαν να φέρουν το δίπλωμα οδήγησής τους, άρα δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού.

β) Δεδομένου ότι η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού, να βρείτε την πιθανότητα η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι.

Λύση: 2024

α)

Α' Τρόπος:

i) Η τοποθέτηση των μαθητών/τριών στα μηχανάκια γίνεται σε δύο φάσεις.

Στην $1^η$ φάση από τους 7 μαθητές/τριες επιλέγουμε τους 4 για να τους τοποθετήσουμε στις θέσεις των οδηγών με Δ_4^7 τρόπους.

Στη $2^η$ φάση από τις 4 άδειες θέσεις επιλέγουμε τις 3 για να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους μαθητές. Αυτό γίνεται με Δ_3^4 τρόπους. Από την αρχή της απαρίθμησης ολόκληρη η διαδικασία μπορεί να γίνει με

$$\Delta_4^7 \cdot \Delta_3^4 = \frac{7!}{(7-4)!} \cdot \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{7!}{3!} \cdot 4! = 20160$$

τρόπους.

<u>Β' Τρόπος:</u> $\binom{4}{1} \cdot 7! = 20160$

<u>Γ' Τρόπος:</u> $\Delta_7^8 - 4 \cdot 7! = 20160$

<u>Δ' Τρόπος:</u> $\binom{7}{2} \cdot 2\binom{5}{2} \cdot 2\binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 20160$

ii) Εφόσον η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέσεις οδηγού, απομένουν 5 άτομα από τα οποία μπορούμε να επιλέξουμε τους 4 για να τους τοποθετήσουμε στις θέσεις των οδηγών με Δ_4^5 τρόπους. Ακολούθως από τις 4 άδειες θέσεις επιλέγουμε τις 3 για να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους μαθητές. Αυτό γίνεται με Δ_3^4 τρόπους. Από την αρχή της απαρίθμησης ολόκληρη η διαδικασία μπορεί να γίνει με

$$\Delta_4^5 \cdot \Delta_3^4 = \frac{5!}{(5-4)!} \cdot \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{5!}{1!} \cdot 4! = 120 \cdot 24 = 2880$$

τρόπους.

β) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$A: \ll\text{η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι}\gg$$

$$B: \ll\text{η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού}\gg$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{4}{1} \cdot 2 \cdot M_3 \cdot \Delta_3^4}{2880} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6}{2880} = \frac{1}{10}.$$

Από τα 4 μηχανάκια επιλέγουμε το 1 για να τοποθετήσουμε τη Γεωργία και τον Μάριο με $\binom{4}{1}$ τρόπους.

Τους μεταθέτουμε στο συγκεκριμένο μηχανάκι με 2! τρόπους.

Εφόσον η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέσεις οδηγού, απομένουν 3 άτομα που μπορούν να καθίσουν στις θέσεις των οδηγών με $M_3 = 3!$ τρόπους.

Τέλος η Αργυρώ και ο Δημήτρης μπορούν να καθίσουν στα υπόλοιπα 3 καθίσματα με Δ_2^3 τρόπους. Άρα έχουμε συνολικά:

$$\binom{4}{1} \cdot 2 \cdot M_3 \cdot \Delta_2^3.$$

4. Το 15% του ανθρώπινου πληθυσμού έχει υψηλό δείκτη νοημοσύνης (I.Q.).

α) Επιλέγουμε στην τύχη 10 άτομα από αυτόν τον πληθυσμό. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

A: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν ακριβώς 4 με υψηλό I.Q.»

B: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με υψηλό I.Q.»

β) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, ώστε η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο με υψηλό I.Q. να είναι μεγαλύτερη του 90%.

Λύση: 2024

α) Για το ενδεχόμενο A:

Επιλέγουμε τα 4 από τα 10 άτομα με $\binom{10}{4}$ τρόπους. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$\Psi_i : \text{«να πάρω άτομο με υψηλό I.Q. στην } i\text{-επιλογή»}, \; i = 1, 2, \ldots, 10$$

Τα ενδεχόμενα Ψ_i και Ψ_i' είναι ανεξάρτητα με

$$P(\Psi_i) = 0{,}15, \quad P(\Psi_i') = 0{,}85$$

$$P(A) = \binom{10}{4}(0{,}15)^4(0{,}85)^6 = 0{,}04$$

Για το ενδεχόμενο B:

$$P(B) = P(\text{τουλάχιστον 2 άτομα με υψηλό I.Q.})$$

$$= 1 - P(\text{ακριβώς 1 άτομο με υψηλό I.Q.}) - P(\text{κανένα άτομο με υψηλό I.Q.})$$

$$= 1 - \binom{10}{1}(0{,}15)^1(0{,}85)^9 - (0{,}85)^{10} = 0{,}456$$

β) Θέλουμε

$$P(\text{τουλάχιστον 1 άτομο με υψηλό I.Q.}) > 90\%$$

$$\Rightarrow 1 - P(\text{κανένα άτομο με υψηλό I.Q.}) > 90\% \Rightarrow P(\text{κανένα άτομο με υψηλό I.Q.}) < 10\%$$

Έστω N το πλήθος των ατόμων που επιλέγουμε.

$$(0{,}85)^N < 0{,}1 \;\Leftrightarrow\; \ln(0{,}85)^N < \ln(0{,}1) \; (\ln: \text{ γνησίως αύξουσα})$$

$$\Rightarrow N\ln(0{,}85) < \ln(0{,}1) \;\Rightarrow\; N > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}85)} = 14{,}2$$

Άρα, το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε είναι 15.

5. Δίνονται τρία δοχεία με μπάλες. Το πρώτο και το δεύτερο δοχείο περιέχουν από μία κόκκινη και δύο άσπρες μπάλες το καθένα, ενώ το τρίτο δοχείο περιέχει τρεις άσπρες μπάλες. Όλες οι μπάλες του ίδιου χρώματος είναι όμοιες μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα δοχείο και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία από αυτό δύο μπάλες, χωρίς επανατοποθέτηση.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο μπάλες να είναι άσπρες.

β) Αν γνωρίζουμε ότι οι δύο μπάλες που επιλέξαμε είναι άσπρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι κόκκινη.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι από τις δύο μπάλες που επιλέξαμε, ακριβώς μία είναι άσπρη, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι άσπρη.

Λύση: 2023

Α' τρόπος

Δοχείο 1: 2Α και 1Κ, Δοχείο 2: 2Α και 1Κ, Δοχείο 3: 3Α

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$\Lambda : \ll \text{επιλέγουμε 2 άσπρες μπάλες} \gg$$

$$\Delta_i : \ll \text{επιλέγουμε το Δοχείο } i \gg, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}
P(\Lambda) &= P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2) + P(\Lambda \cap \Delta_3) \\
&= P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(\Lambda|\Delta_3) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

$$K : \ll \text{η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε είναι κόκκινη} \gg$$

$$P(K|\Lambda) = \frac{P(K \cap \Lambda)}{P(\Lambda)} = \frac{P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2)}{P(\Lambda)}$$

$$= \frac{P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2)}{P(\Lambda)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

Β' τρόπος

Δοχείο 1: 2Α και 1Κ, Δοχείο 2: 2Α και 1Κ, Δοχείο 3: 3Α

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$\Lambda : \ll \text{επιλέγουμε 2 άσπρες μπάλες} \gg$$

$$\Delta_i : \ll \text{επιλέγουμε το Δοχείο } i \gg, \quad i = 1, 2, 3$$

$$P(\Delta_1) = \frac{1}{3}, \quad P(\Lambda|\Delta_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}, \quad P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(\Delta_2) = \frac{1}{3}, \quad P(\Lambda|\Delta_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}, \quad P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(\Delta_3) = \frac{1}{3}, \quad P(\Lambda|\Delta_3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2}} = 1, \quad P(\Delta_3) \cdot P(\Lambda|\Delta_3) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(\Lambda) = P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2) + P(\Lambda \cap \Delta_3)$$

$$= P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(\Lambda|\Delta_3) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

$$K : \ll \text{η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε είναι κόκκινη} \gg$$

$$P(K|\Lambda) = \frac{P(K \cap \Lambda)}{P(\Lambda)} = \frac{P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2)}{P(\Lambda)}$$

$$= \frac{P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2)}{P(\Lambda)} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

γ) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$A_1 : \ll \text{ακριβώς μία μπάλα που επιλέξαμε είναι άσπρη} \gg$$

$$A : \ll \text{η μπάλα που έμεινε στο δοχείο είναι άσπρη} \gg$$

$$P(A_1 \cap A) = \frac{4}{9} \qquad \Rightarrow \qquad P(A|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A_1)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}} = 1$$

6. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, με

$$P(A') = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{2}{3}.$$

Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, να βρείτε τις πιθανότητες:

α) $P(A \cup B)$ β) $P(A - B)$

Λύση: 2019

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}, \quad (A, B \text{ ανεξάρτητα ενδεχόμενα})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4}.$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

7. Ένα σχολείο έχει 200 μαθητές. Για τη μετάβασή τους στο σχολείο, 120 μαθητές χρησιμοποιούν λεωφορείο, 60 μαθητές χρησιμοποιούν αυτοκίνητο και οι υπόλοιποι πηγαίνουν με τα πόδια. Αν ένας μαθητής χρησιμοποιεί για τη μετάβασή του στο σχολείο λεωφορείο, η πιθανότητα να καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο είναι $\frac{1}{3}$, αν χρησιμοποιεί αυτοκίνητο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{4}$, ενώ αν πηγαίνει με τα πόδια, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{8}$. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή του σχολείου.

α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο.

β) Αν ο μαθητής που επιλέξαμε καθυστέρησε το πρωί να έλθει στο σχολείο, να βρείτε την πιθανότητα να ήλθε στο σχολείο με λεωφορείο.

Λύση: 2019

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

$$\Lambda : \ll \text{ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με λεωφορείο} \gg$$

$$A : \ll \text{ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με αυτοκίνητο} \gg$$

$$\Pi : \ll \text{ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με τα πόδια} \gg$$

$$K : \ll \text{ο μαθητής που επιλέξαμε έρχεται με καθυστέρηση} \gg$$

Με βάση τον νόμο της ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(K) = P(\Lambda \cap K) + P(A \cap K) + P(\Pi \cap K)$$

$$= P(\Lambda) \cdot P(K|\Lambda) + P(A) \cdot P(K|A) + P(\Pi) \cdot P(K|\Pi)$$

$$= \frac{120}{200} \cdot \frac{1}{3} + \frac{60}{200} \cdot \frac{1}{4} + \frac{20}{200} \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{80}.$$

β) Από τον τύπο του Bayes έχουμε:

$$P(\Lambda|K) = \frac{P(\Lambda \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{120}{200} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{23}{80}} = \frac{16}{23}.$$

8. Σε ένα διαγωνισμό δεξιοτήτων οι διαγωνιζόμενοι θα περάσουν από 5 στάδια δοκιμασίας. Η πιθανότητα ένας διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα οποιοδήποτε στάδιο είναι $\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

α) $A = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς στάδια$\}$

β) $B = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς συνεχόμενα στάδια$\}$

γ) $\Gamma = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα τουλάχιστον στάδιο$\}$

Λύση: 2018

α)

$$P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{128}{625}$$

β)

$$P(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{3!}{2!} = \frac{192}{3125}$$

γ)

$$P(\Gamma) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{3124}{3125}$$

9. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης με

$$P(A)=\frac{3}{10},\quad P(A\cap B')=\frac{1}{5}\quad \text{και}\quad P(A\cup B)=\frac{4}{5},$$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α) $P(A\cap B)$

β) $P(A/B)$

Λύση: 2017

α)

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{3}{10}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}.$$

β)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{3}{10}+P(B)-\frac{1}{10}\Rightarrow P(B)=\frac{8}{10}-\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}.$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{6}.$$