Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Αόριστο Ολοκλήρωμα

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα πιο κάτω κλάσματα:

i. $\dfrac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$

ii. $\dfrac{5x+7}{2x^2+5x+2}$

iii. $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

iv. $\dfrac{3x-1}{x(x-1)^2}$

v. $\dfrac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2}$

vi. $\dfrac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$

vii. $\dfrac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$

viii. $\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-1}$

ix. $\dfrac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

x. $\dfrac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int x^4\,dx$

ii. $\displaystyle\int x^{-2}\,dx$

iii. $\displaystyle\int x^{\frac{3}{4}}\,dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{1}{u^4}\,du$

v. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

vi. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{u}}\,du$

vii. $\displaystyle\int (u^2-3u+1)\,du$

viii. $\displaystyle\int (x+2\sqrt{x}-\pi)\,dx$

ix. $\displaystyle\int \left(e^x+e\,x+\frac{e}{x}\right)dx$

x. $\displaystyle\int (u-5)^2\,du$

xi. $\displaystyle\int 2u(u^2-3)\,du$

xii. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,(x-2)\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \frac{u^4-5u^3+3u}{u^2}\,du$

xv. $\displaystyle\int \frac{3x-x^2+2x^3}{x^3}\,dx$

xvi. $\displaystyle\int (\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta)\,d\theta$

xvii. $\displaystyle\int (3\theta-\text{εφ}^2\theta)\,d\theta$

xviii. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{1+x^2}-2x\right)dx$

xix. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int \lambda x^{\kappa-2}\, dx = 3x^5 + c.$$

4. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \sqrt{6+x}\, dx$

ii. $\displaystyle\int \text{συν}(3x)\, dx$

iii. $\displaystyle\int (2x-7)^{80}\, dx$

iv. $\displaystyle\int x\, \text{συν}(x^2+1)\, dx$

v. $\displaystyle\int \text{ημ}\theta\, (1+\text{συν}\theta)^3\, d\theta$

vi. $\displaystyle\int x\, e^{1-3x^2}\, dx$

vii. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\, dx$

viii. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\, dx$

ix. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx$

x. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+2)^3}\, dx$

xi. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

xii. $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}(\ln x)}{x}\, dx$

xiii. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx$

xiv. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\, dx$

xv. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx$

5. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας την υποκατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση:

i. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx, \qquad x = 3\,\text{ημ}\theta, \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

ii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\, dx, \qquad x = 3\,\text{ημ}\theta, \quad \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

6. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \text{συν}(7x)\,dx$

ii. $\displaystyle\int \text{στεμ}^2(5x-3)\,dx$

iii. $\displaystyle\int (6x-1)^{21}\,dx$

iv. $\displaystyle\int e^{4-9x}\,dx$

v. $\displaystyle\int \left(e^{4x}-2\cdot 4^{-3x}\right)dx$

vi. $\displaystyle\int \left(\text{ημ}4x-\text{ημ}5x\right)dx$

vii. $\displaystyle\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$

viii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

ix. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$

x. $\displaystyle\int x(x^2-3)^{17}\,dx$

xi. $\displaystyle\int \frac{(\text{τοξεφ}\,x)^3}{1+x^2}\,dx$

xii. $\displaystyle\int \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \frac{2\,\text{ημ}x}{\sqrt{1-\text{συν}x}}\,dx$

xiv. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$

xv. $\displaystyle\int \frac{\text{τεμ}^2x}{2+\text{εφ}x}\,dx$

xvi. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$

xvii. $\displaystyle\int \text{σφ}\,x\,dx$

xviii. $\displaystyle\int \frac{2+2\,\text{ημ}x}{x-\text{συν}x}\,dx$

xix. $\displaystyle\int \frac{6x+15}{x^2+5x-1}\,dx$

xx. $\displaystyle\int \text{στεμ}\,x\,dx$

7. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις πιο κάτω τυποποιημένες μορφές ολοκληρωμάτων.

$$\int f(ax+\beta)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+\beta)+c$$

$$\int f^{\nu}(x)f'(x)\,dx = \int f^{\nu}(x)\,d(f(x)) = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}+c, \quad \nu \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,d(f(x)) = \ln|f(x)|+c$$

i. $\int συν\, 7x\,dx$

ii. $\int στεμ^2(5x-3)\,dx$

iii. $\int (6x-1)^{21}\,dx$

iv. $\int e^{4-9x}\,dx$

v. $\int (e^{4x} - 2\cdot 4^{-3x})\,dx$

vi. $\int (ημ\, 4x - ημ\, 5x)\,dx$

vii. $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx$

viii. $\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$

ix. $\int \frac{2\,ημ\, x}{\sqrt{1-συν\, x}}\,dx$

x. $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$

xi. $\int \frac{τεμ^2 x}{2+εφ\, x}\,dx$

xii. $\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$

xiii. $\int σφ\, x\,dx$

xiv. $\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$

xv. $\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$

xvi. $\int εφ\, x\,dx$

xvii. $\int \frac{2+2\,ημ\, x}{x-συν\, x}\,dx$

xviii. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

8. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα (μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες όπου χρειάζεται):

i. $\int x\, ημ(2x)\,dx$

ii. $\int \frac{x}{συν^2 x}\,dx$

iii. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx,\ x>0$

iv. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx,\ x>0$

v. $\int e^{x+\ln x}\,dx,\ x>0$

vi. $\int x^2 e^{-x}\,dx$

vii. $\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$

viii. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

ix. $\int x^2\, συν(3x)\,dx$

x. $\int e^x\, συν x\,dx$

xi. $\int e^{-x}\, ημ(2x)\,dx$

xii. $\int e^{2x}\, συν(3x)\,dx$

9. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}\,dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}}\,dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2}\,dw$

iv. $\displaystyle\int \frac{t-2}{t-3\sqrt{2t-4}+2}\,dt$

10. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \text{ημ}^2 x\,dx$

ii. $\displaystyle\int \text{συν}^3 x\,dx$

iii. $\displaystyle\int \text{συν}^4 x\,dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{συν} x}\,dx$

v. $\displaystyle\int \text{ημ}^4 x\,\text{συν}^3 x\,dx$

vi. $\displaystyle\int (\text{ημ}^2 x+\text{συν}^4 x)\,\text{ημ} x\,dx$

vii. $\displaystyle\int (\text{ημ}^3 x\,\text{συν} x-\text{ημ} x\,\text{συν}^3 x)\,dx$

viii. $\displaystyle\int \text{τεμ}^4 x\,dx$

ix. $\displaystyle\int \text{τεμ}^3 x\,dx$

x. $\displaystyle\int \text{εφ}^3 x\,\text{τεμ} x\,dx$

xi. $\displaystyle\int \text{ημ}2x\,\text{συν} x\,dx$

xii. $\displaystyle\int \text{ημ}5x\,\text{ημ}7x\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \sqrt{1+\text{ημ}2x}\,dx, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

xiv. $\displaystyle\int \frac{\ln(\text{τεμ} x)}{\text{συν}^2 x}\,dx, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

11. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\int \text{ημ}^5 x\, dx$	v. $\int \text{τεμ}^9 x\, \text{εφ}^5 x\, dx$	ix. $\int \text{συν}^4(2t)\, dt$
ii. $\int \text{ημ}^6 x\, \text{συν}^3 x\, dx$	vi. $\int \text{εφ}^3 x\, dx$	x. $\int \dfrac{2 + 7\,\text{ημ}^3(z)}{\text{συν}^2(z)}\, dz$
iii. $\int \text{ημ}^2 x\, \text{συν}^2 x\, dx$	vii. $\int \dfrac{\text{ημ}^7 x}{\text{συν}^4 x}\, dx$	xi. $\int \text{εφ}^3(6x)\, \text{τεμ}^{10}(6x)\, dx$
iv. $\int \text{συν}(15x)\, \text{συν}(4x)\, dx$	viii. $\int \text{ημ}^3\left(\frac{2}{3}x\right)\, \text{συν}^4\left(\frac{2}{3}x\right)\, dx$	xii. $\int \text{συν}(3t)\, \text{ημ}(8t)\, dt$

12. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx, \qquad x = 4\,\text{ημ}\theta, \quad -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

ii. $\displaystyle\int \sqrt{4 + x^2}\, dx, \qquad x = 2\,\text{εφ}\theta, \quad \tfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - 3x^2}}\, dx, \qquad x = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\text{ημ}\theta, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

iv. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + 4)^3}\, dx, \qquad x = 2\,\text{εφ}\theta, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

v. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1 + x^2)}\, dx, \qquad x = \text{εφ}\theta, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

13. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx, \qquad x + 1 = 2\,\text{ημ}\theta,\ 0 < \theta < \pi$

ii. $\displaystyle\int \sqrt{2x^2 + 12x + 8}\, dx, \qquad x + 3 = \sqrt{5}\,\text{τεμ}\theta,\ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}\, dx, \qquad x - 1 = \sqrt{2}\,\text{ημ}\theta,\ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

iv. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1 - x}}\, dx, \qquad x = \text{ημ}^2\theta,\ 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

14. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,dx$ iv. $\displaystyle\int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx$ vii. $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+5x-14}\,dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}\,dx$ v. $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx$ viii. $\displaystyle\int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3}\,dt$

iii. $\displaystyle\int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)}\,dx$ vi. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$ ix. $\displaystyle\int \frac{8}{3x^3+7x^2+4x}\,dx$

15. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2-4}\,dx$ iv. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-9}\,dx$ vii. $\displaystyle\int \frac{6x-4}{x^2-6x+13}\,dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{2x-7}{x^2-7x+3}\,dx$ v. $\displaystyle\int \frac{5x}{(x^2+4)(x+1)}\,dx$ viii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+10x+29}\,dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx$ vi. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+6}{x^2+x-2}\,dx$ ix. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$

x. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-2x+10}\,dx$ xi. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx$ xii. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \frac{8}{3+5\,\text{ημ}\,2x}\,dx,\ x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)$ xiv. $\displaystyle\int \frac{10}{3\,\text{ημ}x+4\,\text{συν}x}\,dx,\ x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)$ xv. $\displaystyle\int \frac{1}{5+3\,\text{συν}x}\,dx,$

16. Να αποδείξετε τους πιο κάτω αναγωγικούς τύπους.

i. $\displaystyle\int x^\nu e^x\,dx \;=\; x^\nu e^x \;-\; \nu\int x^{\nu-1}e^x\,dx, \qquad \nu\in\mathbb{N}$

ii. $\displaystyle I_\nu = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^\nu - \frac{\nu}{2}\,I_{\nu-1},\quad \nu>1,\quad \text{όπου } I_\nu = \int x(\ln x)^\nu\,dx,\ \nu\in\mathbb{N}$

iii. $\displaystyle I_\nu = \frac{\text{εφ}^{\nu-1}x}{\nu-1} - I_{\nu-2},\quad \nu\geq 2,\quad \text{όπου } I_\nu = \int \text{εφ}^{\nu}x\,dx,\ \nu\in\mathbb{N}_0$

17. Έστω
$$I_\nu = \int x^\nu \,\text{ημ}\, 2x\, dx, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0.$$
Να βρεθούν τα I_0, I_1 και να δειχθεί ότι
$$I_\nu = -\frac{1}{2}x^\nu \,\text{συν}\, 2x + \frac{\nu}{4}\, x^{\nu-1} \,\text{ημ}\, 2x - \frac{\nu(\nu-1)}{4}\, I_{\nu-2}, \qquad \nu \geq 2.$$
Στη συνέχεια, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int x^4 \,\text{ημ}\, 2x\, dx$.

18. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) = 3x - 2, \quad f(1) = 1$

ii. $f'(x) = \sqrt{x-2}, \quad f(3) = 2$

iii. $f''(x) = 2 - 6x, \quad f'(0) = 4, \quad f(0) = 1$

iv.$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'(1) = 1, \quad f(1) = 1$

v. $f''(x) = 2, \quad f(1) = f(3) = 0$

vi. $f'(x)e^{f(x)} = 2 + \ln x$ και η γραφική παράσταση της f να περνά από το σημείο $(e, 0)$.

19. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, της οποίας η γραφική παράσταση έχει *οριζόντια εφαπτομένη* στην αρχή των αξόνων και ισχύει
$$f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

20. Αν $f''(x) = 4x^3 + 2x,\ x \in \mathbb{R}$ και $f'(1) = 4$, να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

21. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int 9x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$ ii. $\displaystyle\int\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)dx$ iii. $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^3(x)}{\text{συν}^2(x)}\,dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ v. $\displaystyle\int \text{συν}\big(\sqrt{x}\big)\,dx$ vi. $\displaystyle\int 4x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

vii. $\displaystyle\int \text{ημ}^7(x)\,\text{συν}^3(x)\,dx$ viii. $\displaystyle\int \text{ημ}(7x)\,\text{συν}(3x)\,dx$ ix. $\displaystyle\int \text{ημ}(2x)\,\text{συν}^6(x)\,dx$

x. $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^4(x)}{\text{συν}^6(x)}\,dx$ xi. $\displaystyle\int \sqrt{1-\text{ημ}(2x)}\,dx,\quad x\in\big(0,\tfrac{\pi}{4}\big)$ xii. $\displaystyle\int (x^2+1)e^x\,dx$

xiii. $\displaystyle\int e^{ax}\text{ημ}(\beta x)\,dx$ xiv. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$ xv. $\displaystyle\int \tau\text{o}\xi\sigma\upsilon\nu(x)\,dx$

xvi. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+10}\,dx$ xvii. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\text{ημ}(x)}\,dx$ xviii. $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\text{συν}(2x)-\text{ημ}(2x)}\,dx$

xix. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$ xx. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}}\,dx$

22. Να δείξετε ότι

$$\int f''(x)\,g(x)\,dx \;=\; f'(x)g(x) \;-\; f(x)g'(x) \;+\; \int f(x)\,g''(x)\,dx.$$

Ακολούθως, να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2e^x\,dx$$

23. Να δείξετε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

i. Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

24. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x)}{\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)}\, dx$.

i. Να βρείτε τις σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\text{συν}(x) \;\equiv\; a\big(\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)\big) \;+\; \beta\big(2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x)\big).$$

ii. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{\text{συν}(x)}{\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)}\, dx$.

25. Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό.

i. $\displaystyle\int_{x\in(1,+\infty)} \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}}\, dx,$

ii. $\displaystyle\int_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^x}{(e^x+1)\,\ln(e^x+1)}\, dx,$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\, dx, \quad$ με $x = \sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta$

iv. $\displaystyle\int_{\theta\in(0,\pi/2)} \sqrt{\text{εφ}\,\theta}\; d\theta, \quad$ με $t = \sqrt{\text{εφ}\,\theta}$.

26. Να αποδείξετε ότι:

i.

$$\int x\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2\, dx = \frac{1}{2}\,(x^2+1)\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - x\,\text{τοξεφ}(x) + \ln\big(\sqrt{x^2+1}\big) + c.$$

ii.

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\, dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$$

27. Αν

$$I_\nu = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}\, dx, \qquad \nu \in \mathbb{N},\ a > 0,$$

τότε:

i. Να αποδείξετε τον αναγωγικό τύπο

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{2\nu-1}{2\nu a^2}\, I_\nu.$$

ii. Να βρείτε τα I_2 και I_3.

28. Να βρεθεί συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, η γραφική της να διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και να έχει κλίση στο σημείο A ίση με 3.

29. Αν η f είναι παραγώγιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ, να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x \big(f(x) + f'(x)\big)\, dx.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x \big(\text{ημ}(x) + \text{συν}(x)\big)\, dx.$$

30. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f^2(x)\, f'(x) = x^2 + 1$.

ii. $xf'(x) = e^x - f(x)$, $x \neq 0$, και $f(2) = 0$.

iii. $2xf'(x) + x^2 f''(x) = 2x + 1$, $x \neq 0$, και $f'(1) = f(1) = 2$.

31. Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4,4)$ και ισχύει

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}, \qquad x \neq 3.$$

32. Δίνεται ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad f'(0) = 3,\ f(0) = 2.$$

Να αποδειχθούν/βρεθούν τα παρακάτω:

i. Αν $u(x) = f'(x) - f(x)$, να δείξετε ότι $u'(x) - 2u(x) = 0$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της u.

iii. Να δείξετε ότι $\big(e^{-x} f(x)\big)' = e^x$ και να βρείτε τη f.

33. Να βρείτε μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = |3x-6|$, $x \in \mathbb{R}$.

34. Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει πάντα παράγουσα στο Δ. Να δείξετε ότι το *αντίστροφο* δεν ισχύει, χρησιμοποιώντας ως αντιπαράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \text{συν}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

35. Να δείξετε ότι οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της

$$f(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}:$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2}, & x < 0, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+5, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2}-5, & x < 0. \end{cases}$$

Γιατί είναι λάθος να γράφουμε

$$\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x^2} + c, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty)\ ?$$

Θέματα Εξετάσεων

1. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς a, β και γ, για τους οποίους να ισχύει:

$$\int (ae^x - \beta\text{ημ}2x + \gamma)\, dx = e^x + \text{συν}2x - x + c$$

Λύση: 2025

$$(e^x + \text{συν}2x - x)' = e^x - 2\text{ημ}2x - 1$$

Επομένως, $\quad a = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1.$

Εναλλακτικά:

$$\int (ae^x - \beta\etaμ2x + \gamma)\,dx = ae^x + \frac{\beta}{2}συν2x + \gamma x + c$$

Επομένως, $\quad a = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1.$

2. Έστω συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 4$ και $f(0) = 1$.

i. Αν $u(x) = f'(x) - 2f(x)$, να αποδείξετε ότι $u'(x) - 3u(x) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $u(x) = 2e^{3x}$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\big(e^{-2x}f(x)\big)' = 2e^x$.

iv. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση: 2025

i. Βρίσκουμε την παράγωγο της u:

$$u'(x) = f''(x) - 2f'(x).$$

Άρα

$$u'(x) - 3u(x) = \big(f''(x) - 2f'(x)\big) - 3\big(f'(x) - 2f(x)\big) = f''(x) - 5f'(x) + 6f(x).$$

Δεδομένου ότι $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι

$$u'(x) - 3u(x) = 0.$$

ii. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με e^{-3x}:

$$u'(x) - 3u(x) = 0 \implies u'(x)e^{-3x} - 3e^{-3x}u(x) = 0 \implies \big(e^{-3x}u(x)\big)' = 0.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$e^{-3x}u(x) = c \implies u(x) = c\,e^{3x}.$$

Για $x = 0$:

$$u(0) = f'(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2 \ \Rightarrow\ c = 2.$$

Άρα

$$u(x) = 2e^{3x}$$

iii. Έχουμε

$$\big(e^{-2x}f(x)\big)' = (e^{-2x})'\,f(x) + e^{-2x}\,f'(x) = -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x)$$
$$= e^{-2x}\big(f'(x) - 2f(x)\big) = e^{-2x}u(x) = e^{-2x}\cdot 2e^{3x} = 2e^{x}.$$

iv. Από το προηγούμενο:

$$\big(e^{-2x}f(x)\big)' = 2e^{x} \implies \int \big(e^{-2x}f(x)\big)'\,dx = \int 2e^{x}\,dx \implies e^{-2x}f(x) = 2e^{x} + c_1.$$

Πολλαπλασιάζοντας με e^{2x}:

$$f(x) = 2e^{3x} + c_1e^{2x}.$$

Με τη συνθήκη $f(0) = 1$:

$$1 = f(0) = 2e^{0} + c_1e^{0} = 2 + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = -1.$$

Άρα ο ζητούμενος τύπος είναι

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{2x}$$

3. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$$

Λύση: 2024

Αρχικά, αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{(x-1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $x(x-1)^2$ προκύπτει:

$$1 \equiv A(x-1)^2 + Bx(x-1) + \Gamma x.$$

Δίνοντας τιμές στο x παίρνουμε:

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A \quad \text{και} \quad x = 1 \Rightarrow 1 = \Gamma.$$

Εξισώνοντας συντελεστές ίσων δυνάμεων του x:

$$0 = A + B \;\Rightarrow\; B = -A = -1.$$

Άρα το αρχικό κλάσμα γράφεται ως:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int (x-1)^{-2}\,dx.$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|, \quad \int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|, \quad \int (x-1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{x-1}.$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει κλίση

$$\lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Λύση: 2024

Από την κλίση της εφαπτομένης προκύπτει

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \implies f(x)\,f'(x) = e^{2x}.$$

Ολοκληρώνουμε και στα δύο μέλη:

$$\int f(x)f'(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx \implies \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + c \implies \big(f(x)\big)^2 = e^{2x} + c_1.$$

Από $A(0,1)$ έχουμε $f(0) = 1$, οπότε

$$1^2 = e^0 + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = 0.$$

Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε x, παίρνουμε τη θετική ρίζα:

$$f(x) = e^x.$$

5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \text{τοξημ}\, t \, dt}{\text{συν}\, x - 1}.$$

Λύση: 2024

Θέτουμε $F(x) = \displaystyle\int_0^x \text{τοξημ}\, t \, dt$. Η $\text{τοξημ}\, x$ είναι συνεχής στο $x = 0$, άρα και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = \text{τοξημ}\, x, \qquad F(0) = \int_0^0 \text{τοξημ}\, t \, dt = 0.$$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 0}(\text{συν}\, x - 1) = 1 - 1 = 0$. Άρα το αρχικό όριο έχει αόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \text{τοξημ}\, t \, dt}{\text{συν}\, x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\int_0^x \text{τοξημ}\, t \, dt)'}{(\text{συν}\, x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}\, x}{-\text{ημ}\, x}.$$

Και πάλι προκύπτει μορφή $\dfrac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε εκ νέου De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}\, x}{-\text{ημ}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\text{τοξημ}\, x)'}{(-\text{ημ}\, x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\text{συν}\, x} = \frac{1}{1} \cdot (-1) = -1.$$

6. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι:

$$\int f(x)\, \text{ημ}x \, dx = \frac{f'(x)\, \text{ημ}x - f(x)\, \text{συν}x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

ii. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\,\text{ημ}x\,dx.$$

Λύση: 2024

i.

Α Τρόπος:

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \int f(x)\,d(-\text{συν}x) = f(x)\,(-\text{συν}x) - \int f'(x)\,(-\text{συν}x)\,dx$$

$$= -\,f(x)\,\text{συν}x + \int f'(x)\,\text{συν}x\,dx = -\,f(x)\,\text{συν}x + \int f'(x)\,d(\text{ημ}x)$$

$$= -\,f(x)\,\text{συν}x + f'(x)\,\text{ημ}x - \int f''(x)\,\text{ημ}x\,dx.$$

Άρα,

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x - \int f(x)\,\text{ημ}x\,dx$$

(επειδή $f'' = f$).

$$\Rightarrow \quad 2\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \frac{f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x}{2} + c.$$

Β Τρόπος:

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \int f''(x)\,\text{ημ}x\,dx = \int \text{ημ}x\,d\big(f'(x)\big)$$

$$= f'(x)\,\text{ημ}x - \int f'(x)\,\text{συν}x\,dx = f'(x)\,\text{ημ}x - \int \text{συν}x\,d\big(f(x)\big)$$

$$= f'(x)\,\text{ημ}x - \left[f(x)\,\text{συν}x - \int f(x)\,(-\text{ημ}x)\,dx\right]$$

$$= f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x - \int f(x)\,\text{ημ}x\,dx,$$

οπότε όπως πριν

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \frac{f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x}{2} + c.$$

Γ Τρόπος :

$$\left(\frac{f'(x)\,\eta\mu x - f(x)\,\sigma\upsilon\nu x}{2} + c\right)' = \frac{1}{2}\big[f''(x)\,\eta\mu x + f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x - f(x)\,(-\eta\mu x)\big]$$

$$= \frac{1}{2}\big[f''(x)\,\eta\mu x + f(x)\,\eta\mu x\big] = \frac{1}{2}\big[f(x)\,\eta\mu x + f(x)\,\eta\mu x\big] = f(x)\,\eta\mu x.$$

Άρα ο τύπος του (i.) ισχύει.

ii. Θέτουμε $f(x) = e^{-x}$. Τότε

$$f'(x) = -e^{-x}, \qquad f''(x) = e^{-x} = f(x),$$

άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις και με χρήση του (i.) έχουμε:

$$\int e^{-x}\,\eta\mu x\,dx = \int f(x)\,\eta\mu x\,dx = \frac{f'(x)\,\eta\mu x - f(x)\,\sigma\upsilon\nu x}{2} + c = \frac{-e^{-x}\,\eta\mu x - e^{-x}\,\sigma\upsilon\nu x}{2} + c.$$

Δηλαδή

$$\int e^{-x}\,\eta\mu x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\,\big(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\big) + c$$

7. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^{x}\,\left(1+e^{x}\right)^{4}\,dx$$

Λύση: 2023

A' τρόπος

$$\int e^{x}\,(1+e^{x})^{4}\,dx = \int (1+e^{x})^{4}\,d(1+e^{x}) = \frac{(1+e^{x})^{5}}{5} + c.$$

B' τρόπος

$$u = 1+e^{x} \;\Rightarrow\; du = e^{x}\,dx$$

$$\int e^{x}\,(1+e^{x})^{4}\,dx = \int u^{4}\,du = \frac{u^{5}}{5} + c = \frac{(1+e^{x})^{5}}{5} + c.$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ}\, x,\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \text{τοξεφ}\, x\, dx$.

Λύση: 2023

i. Θέτουμε $y = \text{τοξεφ}\, x$. Τότε $x = \text{εφ}\, y$ με $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$1 = \text{τεμ}^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y}.$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\text{τεμ}^2 y = 1 + \text{εφ}^2 y$ προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

ii. Με ολοκλήρωση κατά μέρη, θέτουμε

$$u = \text{τοξεφ}\, x, \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\, dx,\ v = x.$$

Τότε

$$\int \text{τοξεφ}\, x\, dx = x \cdot \text{τοξεφ}\, x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \cdot \text{τοξεφ}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \cdot \text{τοξεφ}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

9. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx$

ii. $\displaystyle\int \left(\text{εφ}^5 x + \text{εφ}^7 x\right) dx, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση: 2022

i. Γράφουμε

$$\int\left(e^{2x}+4x-\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx=\int e^{2x}\,dx+\int 4x\,dx-\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\frac{e^{2x}}{2}+2x^2-\int 1\,dx-\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{e^{2x}}{2}+2x^2-x-\text{τοξεφ}\,x+c.$$

ii. Παραγοντοποιούμε:

$$\int\left(\text{εφ}^5x+\text{εφ}^7x\right)dx=\int\text{εφ}^5x\,(1+\text{εφ}^2x)\,dx.$$

Επειδή $1+\text{εφ}^2x=\text{τεμ}^2x$, θέτουμε

$$u=\text{εφ}\,x\quad\Rightarrow\quad du=\text{τεμ}^2x\,dx.$$

Τότε

$$\int\text{εφ}^5x\,(1+\text{εφ}^2x)\,dx=\int\text{εφ}^5x\,\text{τεμ}^2x\,dx=\int u^5\,du=\frac{u^6}{6}+c=\frac{\text{εφ}^6x}{6}+c.$$

10. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int(3x^2-e^x+\text{συν}\,x-\pi)\,dx$$

Λύση: 2021

$$\int(3x^2-e^x+\text{συν}\,x-\pi)\,dx=\int 3x^2\,dx-\int e^x\,dx+\int\text{συν}\,x\,dx-\int\pi\,dx$$
$$=\frac{3x^3}{3}-e^x+\text{ημ}\,x-\pi x+c\;=\;x^3-e^x+\text{ημ}\,x-\pi x+c$$

11. Με την υπόθεση ότι $1 - \text{ημ}\, 2x + 2\text{συν}\, 2x \neq 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, και χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{1 - \text{ημ}\, 2x + 2\text{συν}\, 2x}, \qquad t = \text{εφ}\, x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Λύση: 2021

Αν $t = \text{εφ}\, x$, τότε

$$\text{ημ}\, 2x = \frac{2t}{t^2+1}, \qquad \text{συν}\, 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Επομένως:

$$I = \int \frac{dx}{1 - \text{ημ}\, 2x + 2\text{συν}\, 2x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{t^2+1} + 2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}.$$

Ενοποιούμε τους παρονομαστές:

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2-2t+2(1-t^2)} = \int \frac{dt}{-t^2-2t+3}.$$

Άρα

$$I = -\int \frac{dt}{(t+3)(t-1)}.$$

Γράφουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{(t+3)(t-1)} \equiv \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(t+3)(t-1)$:

$$1 = A(t-1) + B(t+3) \Rightarrow 1 = (A+B)t + (-A+3B).$$

Συγκρίνοντας συντελεστές:

$$A + B = 0, \qquad -A + 3B = 1.$$

Από το πρώτο $A = -B$. Το αντικαθιστούμε στο δεύτερο:

$$-(-B) + 3B = 1 \Rightarrow 4B = 1 \Rightarrow B = \tfrac{1}{4},\ A = -\tfrac{1}{4}.$$

Άρα

$$I = -\int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{t+3} + \frac{\frac{1}{4}}{t-1} \right) dt = \tfrac{1}{4}\int \frac{dt}{t+3} - \tfrac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1}.$$

Ολοκληρώνουμε:
$$I = \tfrac{1}{4}\ln|t+3| - \tfrac{1}{4}\ln|t-1| + c = \tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{t+3}{t-1}\right| + c.$$
Επαναφέρουμε $t = \text{εφ}\, x$:
$$I = \tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{\text{εφ}\, x+3}{\text{εφ}\, x-1}\right| + c.$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι:

i) $g''(x)e^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^2 e^{g(x)} = 2$

ii) $g(1) = 0$ και $g'(1) = 1$

(α) Να δείξετε ότι: $g'(x)e^{g(x)} = 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(β) Να βρείτε συνάρτηση g που να ικανοποιεί τις συνθήκες i) και ii)

Λύση: 2021

(α)
$$g''(x)e^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^2 e^{g(x)} = 2 \ \Rightarrow\ \int \Big(g''(x)e^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^2 e^{g(x)}\Big)\, dx = \int 2\, dx$$
$$\int \big(g'(x)e^{g(x)}\big)'\, dx = \int 2\, dx \ \Rightarrow\ g'(x)e^{g(x)} = 2x + c_1$$
Για $x = 1 \Rightarrow g'(1)e^{g(1)} = 2 + c_1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1$
$$\Rightarrow \quad g'(x)e^{g(x)} = 2x - 1$$

(β)
$$\int g'(x)e^{g(x)}\, dx = \int (2x-1)\, dx \Rightarrow \int (e^{g(x)})'\, dx = \int (2x-1)\, dx \Rightarrow e^{g(x)} = x^2 - x + c_2$$
Για $x = 1 \Rightarrow e^{g(1)} = 1 - 1 + c_2 \Rightarrow 1 = c_2 \Rightarrow e^{g(x)} = x^2 - x + 1$

$x^2 - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα:
$$g(x) = \ln(x^2 - x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

13. Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = 3x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση περνά από το σημείο $A(2, 6)$.

Λύση: 2020

Η αρχική συνθήκη είναι $f(2) = 6$. Έχουμε ότι:

$$f(x) = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + c.$$

Από την αρχική συνθήκη:

$$6 = \frac{3 \cdot 2^2}{2} + c \;\Rightarrow\; 6 = \frac{12}{2} + c \;\Rightarrow\; 6 = 6 + c \;\Rightarrow\; c = 0.$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2}$$

14. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (\text{ημ}x + \text{συν}x)^2\,dx.$$

Λύση: 2020

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

$$\int (\text{ημ}x + \text{συν}x)^2\,dx = \int \left(\text{ημ}^2 x + 2\,\text{ημ}x\,\text{συν}x + \text{συν}^2 x\right) dx = \int (1 + \text{ημ}\,2x)\,dx = x - \frac{\text{συν}\,2x}{2} + c.$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

$$\int (\text{ημ}x + \text{συν}x)^2\,dx = \int \left(\text{ημ}^2 x + 2\,\text{ημ}x\,\text{συν}x + \text{συν}^2 x\right) dx = \int (1 + 2\,\text{ημ}x\,\text{συν}x)\,dx$$

$$= x + 2\int \text{ημ}x\,d(\text{ημ}x) = x + 2 \cdot \frac{\text{ημ}^2 x}{2} + c = x + \text{ημ}^2 x + c.$$

15. Δίνεται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο ανοικτό διάστημα A.

i. Να αποδείξετε ότι στο A ισχύει

$$\int \big[f(x) + f''(x)\big]\,\etaμx\,dx = f'(x)\,\etaμx - f(x)\,συνx + c.$$

ii. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $(0, +\infty)$,

$$\int \left(\ln x - \frac{1}{x^2}\right) ημx\,dx.$$

Λύση: 2020

i.

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

$$\int \big[f(x) + f''(x)\big]\,ημx\,dx = \int f(x)ημx\,dx + \int f''(x)ημx\,dx = \int f(x)ημx\,dx + \int ημx\,d\big(f'(x)\big)$$

$$= \int f(x)ημx\,dx + ημx\,f'(x) - \int f'(x)συνx\,dx = \int f(x)ημx\,dx + ημx\,f'(x) - \int συνx\,d\big(f(x)\big)$$

$$= \int f(x)ημx\,dx + ημx\,f'(x) - \left(συνx\,f(x) - \int f(x)\,(-ημx)\,dx\right)$$

$$= f'(x)\,ημx - f(x)\,συνx + c.$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

$$\big[f'(x)ημx - f(x)συνx + c\big]' = f''(x)ημx + f'(x)συνx - f'(x)συνx + f(x)ημx = \big[f(x) + f''(x)\big]ημx.$$

Άρα ισχύει ο ζητούμενος τύπος.

ii. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x$ έχει

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

και f'' συνεχής στο $(0, +\infty)$. Επομένως, από το (α) για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$,

$$\int \left(\ln x - \frac{1}{x^2}\right) ημx\,dx = \int \big[f(x) + f''(x)\big]\,ημx\,dx = f'(x)ημx - f(x)συνx + c = \frac{ημx}{x} - \ln x\,συνx + c.$$

16. Να απαντήσετε τα πιο κάτω,

i. Να δείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ γράφεται ως άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}, \quad x \in (0, +\infty), \qquad \text{και} \qquad f(1) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}.$$

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση: 2020

i.

$$\frac{1}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $x(x+1)^2$:

$$1 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1) + \Gamma x.$$

Για $x = 0 \Rightarrow 1 = A$. Για $x = -1 \Rightarrow 1 = \Gamma(-1) \Rightarrow \Gamma = -1$.

$$0 = A + B \Rightarrow B = -1.$$

Άρα:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

ii. Δίνεται $f'(x) = \dfrac{\ln x}{(x+1)^3}$. Ολοκληρώνουμε:

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{(x+1)^3}\, dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη: $u = \ln x,\ dv = \frac{dx}{(x+1)^3} \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = -\frac{1}{2(x+1)^2}$.

$$f(x) = u\,v - \int v\, du = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

Από το (i) έχουμε:

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$$

Για $x > 0$: $|x| = x,\ |x+1| = x+1$.

$$f(x) = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right) + c.$$

Από $f(1) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}$:

$$f(1) = -\frac{\ln 1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}\right) + c = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} + c \Rightarrow c = 0.$$

Άρα:

$$f(x) = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)$$

iii. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)}\right).$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+1} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(x+1)} = 0.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

17. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int\left(6x^2 + \etaμx + \frac{4}{x} - 2\right)dx.$$

Λύση: 2019

$$\int\left(6x^2 + \etaμx + \frac{4}{x} - 2\right)dx = \int 6x^2\,dx + \int \etaμx\,dx + \int\frac{4}{x}\,dx - \int 2\,dx$$
$$= 2x^3 - συνx + 4\ln|x| - 2x + c.$$
$$f(x) = 2x^3 - συνx + 4\ln|x| - 2x + c.$$