
Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος Έλλειψη

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ελλείψεων, με:

- i. Κέντρο το $(0, 0)$, μεγάλο άξονα στον άξονα των τετμημένων μήκους 6 μονάδων και μικρό άξονα στον άξονα των τεταγμένων μήκους 4 μονάδων.
- ii. Κέντρο το $(0, 0)$, μεγάλο άξονα στον άξονα των τεταγμένων μήκους 10 μονάδων και μικρό άξονα στον άξονα των τετμημένων μήκους 8 μονάδων.
- iii. Εστίες τα σημεία $(-2, 0)$ και $(2, 0)$ και δύο κορυφές στα σημεία $(0, 1)$, $(0, -1)$.
- iv. Κέντρο το $(0, 0)$, λόγο των μηκών του μεγάλου άξονα προς τον μικρό άξονα ίσο με 2 μονάδες και να διέρχεται από το σημείο $(6, 4)$.

Λύση:

(Ασκ. 1/112)

- i. Εφόσον ο μεγάλος άξονας βρίσκεται στον άξονα $x'x$, έχουμε τύπο:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $2a = 6 \Rightarrow a = 3$, και του μικρού άξονα $2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- ii. Τώρα ο μεγάλος άξονας είναι στον άξονα $y'y$, άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Έχουμε $2a = 10 \Rightarrow a = 5$, $2b = 8 \Rightarrow b = 4$:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

iii. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες $E(-2, 0)$ και $E'(2, 0)$, άρα $\gamma = 2$. Οι κορυφές είναι $(0, 1)$ και $(0, -1)$, επομένως ο μικρός άξονας βρίσκεται στον άξονα $y'y$ και $b = 1$. Από τη σχέση $a^2 = b^2 + \gamma^2$ προκύπτει:

$$a^2 = 1 + 4 = 5.$$

$$\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$$

iv. Η έλλειψη έχει κέντρο $(0, 0)$ και λόγο αξόνων $\frac{a}{b} = 2$, άρα $a = 2b$. Εφόσον διέρχεται από το σημείο $(6, 4)$, ισχύει:

$$\frac{6^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1.$$

Αντικαθιστούμε $a = 2b$:

$$\frac{36}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9 + 16}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5, a = 10.$$

Επομένως:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

2. Δίνονται τα σημεία $E(12, 0)$ και $E'(-12, 0)$. Ένα σημείο T του επιπέδου κινείται έτσι ώστε $(TE) + (TE') = 26$. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T .

Λύση:

(Ασκ. 2/112)

Από τον ορισμό της έλλειψης, αν οι εστίες είναι $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$ και το σταθερό άθροισμα αποστάσεων είναι $2a$ με $a > \gamma$, τότε η εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta^2 = a^2 - \gamma^2.$$

Εδώ $\gamma = 12$ και $(TE) + (TE') = 26 = 2a \Rightarrow a = 13$. Άρα

$$\beta^2 = a^2 - \gamma^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow \beta = 5.$$

Επομένως η ζητούμενη καμπύλη είναι έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

3. Δίνονται οι ελλείψεις με εξισώσεις:

i. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

ii. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

iii. $x^2 + 9y^2 = 9$

Σε κάθε περίπτωση, να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών, τις συντεταγμένες των κορυφών, την εκκεντρότητα τους, καθώς και τις εξισώσεις των διευθετούσών τους.

Λύση:

(Ασκ. 3/112)

i. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Μεγάλος άξονας στον x' : $a = 5$, $b = 4$.

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{3}{5}.$$

Εστίες: $E(\pm 3, 0)$.

Κορυφές: $A(\pm 5, 0)$, $B(0, \pm 4)$.

Διευθετούσες: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{25}{3}$.

ii. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Μεγάλος άξονας στον y' : $a = 4$, $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{1}{2}.$$

Εστίες: $E(0, \pm 2)$.

Κορυφές: $A(0, \pm 4)$, $B(\pm 2\sqrt{3}, 0)$.

Διευθετούσες: $y = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm 8$.

$$\text{iii. } x^2 + 9y^2 = 9 \iff \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Μεγάλος άξονας στον x' : $a = 3$, $b = 1$.

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Εστίες: $E(\pm 2\sqrt{2}, 0)$.

Κορυφές: $A(\pm 3, 0)$, $B(0, \pm 1)$.

Διευθετούσες: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{9}{2\sqrt{2}}$ ή $x = \pm \frac{9\sqrt{2}}{4}$ με ρητοποίηση.

4. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $3x^2 + 2y^2 = 12$.

- i. Να υπολογίσετε το κ , $\kappa > 0$, ώστε το σημείο $A(\sqrt{2}, \kappa)$ να ανήκει στην έλλειψη.
- ii. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του σημείου A από τις δύο εστίες της έλλειψης.

Λύση:

(Ασκ. 4/112)

Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1,$$

άρα ο μεγάλος άξονας είναι στον $y'y$ με $a^2 = 6$, $b^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{6}$, $b = 2$.

Η εστιακή απόσταση είναι

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6 - 4} = \sqrt{2},$$

οπότε οι εστίες είναι $E(0, \sqrt{2})$ και $E'(0, -\sqrt{2})$.

- i. Το $A(\sqrt{2}, \kappa)$ ανήκει στην έλλειψη αν ικανοποιεί $3x^2 + 2y^2 = 12$:

$$3(\sqrt{2})^2 + 2\kappa^2 = 12 \Rightarrow 6 + 2\kappa^2 = 12 \Rightarrow \kappa^2 = 3 \Rightarrow \kappa = \sqrt{3}$$

- ii. Με $\kappa = \sqrt{3}$, το $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Οι αποστάσεις από τις εστίες:

$$AE = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 1$$

$$AE' = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1$$

(Πράγματι $AE + AE' = 2\sqrt{6} = 2a$.)

5. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων της, τα οποία απέχουν από την εστία E απόσταση $\frac{13}{5}$ μονάδες.

Λύση:

(Ασκ. 5/112)

Η έλλειψη έχει μεγάλο άξονα στον $y'y$, άρα $a^2 = 25$, $b^2 = 16 \Rightarrow a = 5$, $b = 4$.

Η εστιακή απόσταση είναι $\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$, οπότε οι εστίες είναι $E(0, 3)$, $E'(0, -3)$.

Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{3}{5}$.

Για σημείο $T(x, y)$ της έλλειψης και για την άνω εστία $E(0, 3)$ ισχύει (θεώρημα):

$$TE = a - \varepsilon y = 5 - \frac{3}{5}y.$$

Αν $TE = \frac{13}{5}$, τότε

$$5 - \frac{3}{5}y = \frac{13}{5} \Rightarrow 25 - 3y = 13 \Rightarrow y = 4.$$

Με $y = 4$ στην εξίσωση της έλλειψης:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{9}{25} \Rightarrow x = \pm \frac{12}{5}.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι

$$T_1\left(\frac{12}{5}, 4\right), \quad T_2\left(-\frac{12}{5}, 4\right)$$

Έλεγχος: $TE' = a + \varepsilon y = 5 + \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{37}{5}$ και $TE + TE' = 2a = 10$.

6. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του σημείου $T(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ από τις δύο εστίες της έλλειψης με εξίσωση $x^2 + 4y^2 = 4$.

Λύση:

(Ασκ. 6/112)

Γράφουμε

$$x^2 + 4y^2 = 4 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

οπότε $a^2 = 4$, $b^2 = 1 \Rightarrow a = 2$, $b = 1$. Η εστιακή απόσταση είναι

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Εστίες: $E(\pm\sqrt{3}, 0)$.

Ελέγχουμε ότι T ανήκει στην έλλειψη: $3 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 4$

Με το θεώρημα για έλλειψη με μεγάλο άξονα στον $x'x$,

$$TE = a - \varepsilon x_T, \quad TE' = a + \varepsilon x_T.$$

Άρα για $x_T = \sqrt{3}$:

$$TE = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad TE' = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

Έλεγχος: $TE + TE' = 2a = 4$.

7. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των κ, λ , ώστε το σημείο $T(\kappa, \lambda)$ να έχει αποστάσεις 3 και 5 μονάδες από τις εστίες E και E' , αντίστοιχα.

Λύση:

(Ασκ. 7/113)

Έχουμε $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$, $b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$ και

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{1}{2}.$$

Οι εστίες είναι $E(2, 0)$, $E'(-2, 0)$ και για σημείο $T(x_1, y_1)$ της έλλειψης ισχύει

$$(TE) = a - \varepsilon x_1, \quad (TE') = a + \varepsilon x_1.$$

Με $(TE) = 3$ και $(TE') = 5$ παίρνουμε:

$$4 - \frac{1}{2}\kappa = 3 \Rightarrow \kappa = 2, \quad 4 + \frac{1}{2}\kappa = 5 \Rightarrow \kappa = 2 \quad (\text{συμφωνεί}).$$

Το $T(\kappa, \lambda)$ ανήκει στην έλλειψη, άρα

$$\frac{\kappa^2}{16} + \frac{\lambda^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{4}{16} + \frac{\lambda^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{\lambda^2}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι

$$T_1(2, 3) \quad \text{και} \quad T_2(2, -3)$$

Έλεγχος: $TE + TE' = 3 + 5 = 8 = 2a$.

8. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

- i. Να υπολογίσετε την τιμή του λ , $\lambda > 0$, ώστε το σημείο $K(5, \lambda)$ να ανήκει στην έλλειψη.
- ii. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου KEE' .
- iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου KEE' .

Λύση:

(Ασκ. 8/113)

Η έλλειψη έχει $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$, $b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$ και

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 64} = 6, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{3}{5}.$$

Οι εστίες είναι $E(6, 0)$, $E'(-6, 0)$.

i. Το $K(5, \lambda)$ ανήκει στην έλλειψη αν

$$\frac{5^2}{100} + \frac{\lambda^2}{64} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{64} = 1 \Rightarrow \frac{\lambda^2}{64} = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = \pm 4\sqrt{3}$$

ii. Για σημείο $T(x, y)$ στην έλλειψη ισχύει $TE = a - \varepsilon x$, $TE' = a + \varepsilon x$. Άρα για $K(5, 4\sqrt{3})$:

$$KE = 10 - \frac{3}{5} \cdot 5 = 7, \quad KE' = 10 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 13, \quad EE' = 2\gamma = 12.$$

Η περίμετρος:

$$P_{KEE'} = KE + KE' + EE' = 7 + 13 + 12 = 32$$

Ισοδύναμα, $KE + KE' = 2a = 20 \Rightarrow P = 20 + 12 = 32$.

iii. Το EE' κείται στον άξονα $x'x$, άρα το ύψος από το K προς το EE' είναι $|y_K| = 4\sqrt{3}$.

Με $EE' = 12$:

$$E_{KEE'} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

9. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$, $\Gamma(1, 6)$, $\Delta(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $E(0, \sqrt{5})$ και $Z(2, \frac{5}{3})$ ως προς την έλλειψη.

Λύση:

(Ασκ. 1/121)

Η θέση ενός σημείου $T(x_1, y_1)$ ως προς την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

καθορίζεται από το πρόσημο της παράστασης

$$F(x_1, y_1) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} - 1.$$

Αν $F = 0$, το σημείο ανήκει στην έλλειψη· αν $F > 0$, βρίσκεται εκτός της έλλειψης· αν $F < 0$, βρίσκεται εντός αυτής.

Εδώ $a^2 = 9$, $\beta^2 = 5$, άρα:

$$F(x_1, y_1) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{5} - 1.$$

i. Για $A(3, 1)$:

$$F(3, 1) = \frac{3^2}{9} + \frac{1^2}{5} - 1 = 1 + \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow \text{εκτός της έλλειψης.}$$

ii. Για $B(-1, 1)$:

$$F(-1, 1) = \frac{(-1)^2}{9} + \frac{1^2}{5} - 1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{14}{45} - 1 = -\frac{31}{45} < 0 \Rightarrow \text{εντός της έλλειψης.}$$

iii. Για $\Gamma(1, 6)$:

$$F(1, 6) = \frac{1^2}{9} + \frac{6^2}{5} - 1 = \frac{1}{9} + \frac{36}{5} - 1 = \frac{1}{9} + \frac{64.8}{9} - 1 = \frac{329}{45} - 1 = \frac{284}{45} > 0 \Rightarrow \text{εκτός της έλλειψης.}$$

iv. Για $\Delta(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$:

$$F(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{(3/2)^2}{9} + \frac{(5/2)^2}{5} - 1 = \frac{9/4}{9} + \frac{25/4}{5} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{εκτός της έλλειψης.}$$

v. Για $E(0, \sqrt{5})$:

$$F(0, \sqrt{5}) = 0 + \frac{(\sqrt{5})^2}{5} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{ανήκει στην έλλειψη.}$$

vi. Για $Z(2, \frac{5}{3})$:

$$F(2, \frac{5}{3}) = \frac{2^2}{9} + \frac{(5/3)^2}{5} - 1 = \frac{4}{9} + \frac{25/9}{5} - 1 = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} - 1 = 0 \Rightarrow \text{ανήκει στην έλλειψη.}$$

10. Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

$$\text{i. } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} \leq 1 \qquad \text{ii. } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} > 1$$

Λύση:

(Ασκ. 2/121)

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο θέσης σημείου ως προς την έλλειψη:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1. \quad \begin{cases} F(x, y) \leq 0 & \text{εντός (μαζί με το σύνορο),} \\ F(x, y) > 0 & \text{εκτός (χωρίς το σύνορο).} \end{cases}$$

i. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} \leq 1$. Η ισότητα $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ είναι έλλειψη με ημιαξόνες $a = 8$ (στον x') και $b = 6$ (στον y').

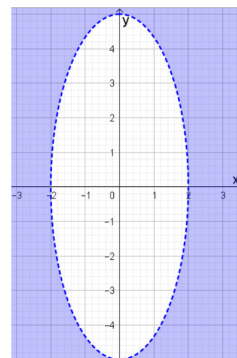
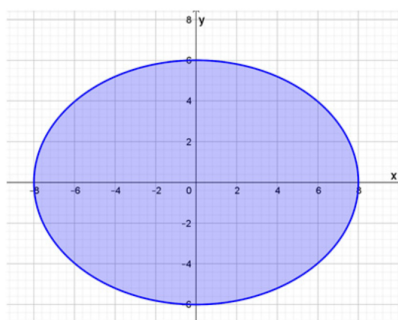
Άρα το σύνολο λύσεων είναι το εσωτερικό της έλλειψης μαζί με το σύνορο:

$$S_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} \leq 1 \right\}.$$

ii. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} > 1$. Η ισότητα $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ είναι έλλειψη με ημιαξόνες $a = 2$ και $b = 5$.

Ζητείται το εξωτερικό της έλλειψης χωρίς το σύνορο:

$$S_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} > 1 \right\}.$$



11. Να λύσετε γραφικά το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 > 0 \\ 4x^2 + y^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

Λύση:

(Ασκ. 3/121)

Η καμπύλη $x^2 + 4y^2 = 16$ είναι έλλειψη $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$$x^2 + 4y^2 - 16 > 0 \iff \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} > 1 \quad (\text{εξωτερικό της έλλειψης, χωρίς το σύνορο}).$$

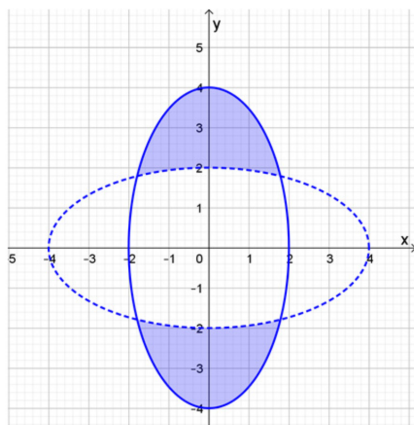
Η καμπύλη $4x^2 + y^2 = 16$ είναι έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

$$4x^2 + y^2 - 16 \leq 0 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \quad (\text{εσωτερικό της έλλειψης, μαζί με το σύνορο}).$$

Άρα ζητούμε το κοινό μέρος: έξω από την έλλειψη $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και μέσα στην έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Σε περιγραφή με ανισότητες:

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} > 1 \text{ και } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}.$$



12. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $-x + 2y = 10$ εφάπτεται της έλλειψης

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε τις *συντεταγμένες του σημείου επαφής*.

Λύση:

(Ασκ. 4/121)

Γράφουμε την ευθεία ως $y = \frac{x}{2} + 5$ και την αντικαθιστούμε στην έλλειψη:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2}{9} = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 576 (Ε.Κ.Π. των 64, 9):

$$9x^2 + 64\left(\frac{x^2}{4} + 5x + 25\right) = 576 \implies 9x^2 + 16x^2 + 320x + 1600 = 576$$

$$\implies 25x^2 + 320x + 1024 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 320^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1024 = 102\,400 - 102\,400 = 0,$$

άρα η ευθεία είναι *εφαπτομένη* της έλλειψης.

Το x -συντεταγμένο του σημείου επαφής:

$$x_T = \frac{-320}{2 \cdot 25} = -\frac{32}{5}.$$

Με $y = \frac{x}{2} + 5$:

$$y_T = \frac{-\frac{32}{5}}{2} + 5 = -\frac{16}{5} + \frac{25}{5} = \frac{9}{5}.$$

Επομένως, το *σημείο επαφής* είναι

$$T\left(-\frac{32}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

13. Να βρείτε τη θέση των πιο κάτω ευθειών ως προς την έλλειψη $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1$:

i. $y = x + 4$

ii. $x + 2y = 20$

iii. $x = 6$

iv. $y = 6$.

Λύση:

(Ασκ. 5/121)

Εξετάζουμε κάθε ευθεία ως προς το σύστημα με την έλλειψη. Αν η εξίσωση που προκύπτει έχει $\Delta > 0 \Rightarrow$ τέμνει σε δύο σημεία, $\Delta = 0 \Rightarrow$ εφάπτεται, $\Delta < 0 \Rightarrow$ δεν τέμνει.

i. $y = x + 4$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1 \\ y = x + 4 \end{cases} \implies \frac{x^2}{36} + \frac{(x+4)^2}{81} = 1 \implies 13x^2 + 32x - 260 = 0$$

$$\Delta = 32^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-260) = 1024 + 13520 = 14544 > 0.$$

Επομένως, η ευθεία τέμνει την έλλειψη σε δύο διαφορετικά σημεία.

ii. $x + 2y = 20 \iff y = 10 - \frac{x}{2}$.

$$\frac{x^2}{36} + \frac{(10 - \frac{x}{2})^2}{81} = 1 \implies 5x^2 - 20x + 38 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 38 = 400 - 760 = -360 < 0.$$

Άρα η ευθεία δεν τέμνει την έλλειψη (είναι εξωτερική).

iii. $x = 6$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1 \\ x = 6 \end{cases} \implies 1 + \frac{y^2}{81} = 1 \implies y^2 = 0 \implies y = 0.$$

Μοναδική λύση \Rightarrow η ευθεία εφάπτεται της έλλειψης (στο $(6, 0)$).

iv. $y = 6$.

$$\frac{x^2}{36} + \frac{36}{81} = 1 \implies \frac{x^2}{36} = \frac{5}{9} \implies x^2 = 20 (\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{5}).$$

Δύο λύσεις \Rightarrow η ευθεία τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία.

14. Δίνεται η έλλειψη (E) με εξίσωση $3x^2 + y^2 = 4$. Να υπολογίσετε:

- i. τις τιμές της παραμέτρου $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = -2x + \beta$ να εφάπτεται της έλλειψης (E).
- ii. τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $ax + y = 4$ να τέμνει την έλλειψη (E).

Λύση:

(Ασκ. 6/121)

- i. Θέλουμε μοναδική λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 \\ y = -2x + \beta \end{cases} \implies 3x^2 + (-2x + \beta)^2 = 4 \implies 7x^2 - 4\beta x + (\beta^2 - 4) = 0.$$

Για εφαπτομένη: $\Delta = 0$.

$$\Delta = (-4\beta)^2 - 4 \cdot 7(\beta^2 - 4) = 16\beta^2 - 28\beta^2 + 112 = -12\beta^2 + 112 = 0$$

$$\implies \beta^2 = \frac{112}{12} = \frac{28}{3} \implies \beta = \pm \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

- ii. Γράφουμε $y = -ax + 4$ και λύνουμε

$$3x^2 + (-ax + 4)^2 = 4 \implies (a^2 + 3)x^2 - 8ax + 12 = 0.$$

Για δύο διαφορετικά σημεία τομής: $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-8a)^2 - 4(a^2 + 3) \cdot 12 = 64a^2 - 48a^2 - 144 = 16(a^2 - 9) > 0$$

$$\implies |a| > 3$$

Σημείωση: $|a| = 3 \implies$ εφαπτομένη, $|a| < 3 \implies$ δεν τέμνει.

15. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο $(3, 1)$
- ii. $4x^2 + 9y^2 = 72$ στο σημείο $(3, -2)$
- iii. $2x^2 + y^2 = 4$ στο σημείο $(-1, \kappa)$ με $\kappa < 0$.

Λύση:

(Ασκ. 1/131)

Για έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ισχύει, με παραγώγιση κατά x , ότι:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Άρα η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $T(x_1, y_1)$ είναι

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

ενώ της κάθετης

$$\lambda_{\kappa\alpha\theta} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon\varphi}}.$$

i. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1, T(3, 1)$

Έχουμε $a^2 = 12, b^2 = 4$, οπότε:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{4 \cdot 3}{12 \cdot 1} = -1, \quad \lambda_{\kappa\alpha\theta} = 1.$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y - 1 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 4.$$

Εξίσωση κάθετης:

$$y - 1 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 2.$$

ii. $4x^2 + 9y^2 = 72 \iff \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1, T(3, -2)$

Έχουμε $a^2 = 18, b^2 = 8$, άρα:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{8 \cdot 3}{18 \cdot (-2)} = \frac{2}{3}, \quad \lambda_{\kappa\alpha\theta} = -\frac{3}{2}.$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y + 2 = \frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 4.$$

Εξίσωση κάθετης:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}.$$

$$\text{iii. } 2x^2 + y^2 = 4 \iff \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad T(-1, \kappa), \quad \kappa < 0$$

Επειδή $2(-1)^2 + \kappa^2 = 4$, έχουμε $\kappa^2 = 2 \Rightarrow \kappa = -\sqrt{2}$.

Με $a^2 = 2$, $b^2 = 4$, $T(-1, -\sqrt{2})$:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{4 \cdot (-1)}{2 \cdot (-\sqrt{2})} = -\sqrt{2}, \quad \lambda_{\kappa\alpha\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y + \sqrt{2} = -\sqrt{2}(x + 1) \Rightarrow y = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}.$$

Εξίσωση κάθετης:

$$y + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad a > \beta,$$

στο τυχαίο σημείο της $P(x_1, y_1)$ (με P πάνω στην έλλειψη) είναι

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{\beta^2} = 1.$$

Λύση :

(Ασκ. 2/131)

Παραγωγίζουμε έμμεσα ως προς x :

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{\beta^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2 x}{a^2 y}.$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο $P(x_1, y_1)$ είναι

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = -\frac{\beta^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης (σημειακή μορφή) είναι

$$y - y_1 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_1) = -\frac{\beta^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

Πολλαπλασιάζουμε με $a^2 y_1$ και αναπτύσσουμε:

$$a^2 y_1(y - y_1) = -\beta^2 x_1(x - x_1) \iff a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -\beta^2 x_1 x + \beta^2 x_1^2.$$

Μεταφέρουμε όρους στο ίδιο μέλος:

$$\beta^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 y_1^2 + \beta^2 x_1^2.$$

Επειδή το $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη, ισχύει $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1 \implies a^2 y_1^2 + \beta^2 x_1^2 = a^2 \beta^2$. Άρα

$$\beta^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 \beta^2 \iff \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{\beta^2} = 1.$$

Έτσι αποδείχθηκε ότι η εφαπτομένη στο $P(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{\beta^2} = 1$$

17. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 8$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης που άγονται από το σημείο $T(0, 3)$.

Λύση:

(Ασκ. 3/131)

Γράφουμε την έλλειψη σε κανονική μορφή:

$$x^2 + 2y^2 = 8 \iff \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

οπότε $a^2 = 8$, $\beta^2 = 4$.

Η εφαπτομένη στο σημείο $P(x_1, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση

$$\frac{x x_1}{8} + \frac{y y_1}{4} = 1.$$

Εφόσον διέρχεται από το $T(0, 3)$, προκύπτει

$$0 + \frac{3y_1}{4} = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{4}{3}.$$

Επειδή το $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη,

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{8} + \frac{(4/3)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{8} + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{8} = \frac{5}{9} \Rightarrow x_1^2 = \frac{40}{9} \Rightarrow x_1 = \pm \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες είναι

$$\frac{x \left(\frac{2\sqrt{10}}{3} \right)}{8} + \frac{y \left(\frac{4}{3} \right)}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{10}}{12}x + \frac{1}{3}y = 1 \iff \sqrt{10}x + 4y = 12$$

και

$$\frac{x \left(-\frac{2\sqrt{10}}{3} \right)}{8} + \frac{y \left(\frac{4}{3} \right)}{4} = 1 \iff -\frac{\sqrt{10}}{12}x + \frac{1}{3}y = 1 \iff -\sqrt{10}x + 4y = 12$$

Ισοδύναμα, σε μορφή $y = mx + b$:

$$y = 3 - \frac{\sqrt{10}}{4}x \quad \text{και} \quad y = 3 + \frac{\sqrt{10}}{4}x$$

Έλεγχος: Και οι δύο ευθείες διέρχονται από το $T(0, 3)$ και είναι εφαπτόμενες της $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

18. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad a > \beta,$$

και το σημείο της $P(a \cos \theta, \beta \eta \mu \theta)$. Η εφαπτομένη στο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Δ . Αν το σημείο Z είναι η προβολή του P πάνω στον άξονα των τετμημένων, να αποδείξετε ότι

$$(O\Delta)(OZ) = a^2$$

όπου O η αρχή των αξόνων.

Λύση:

(Ασκ. 4/131)

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο $P(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{\beta^2} = 1.$$

Για $x_1 = a \cos \theta$, $y_1 = \beta \eta \mu \theta$ παίρνουμε

$$\frac{x (a \cos \theta)}{a^2} + \frac{y (\beta \eta \mu \theta)}{\beta^2} = 1 \iff \frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\eta \mu \theta}{\beta} y = 1.$$

Θέτοντας $y = 0$ (τομή με $x'x$) βρίσκουμε την τετμημένη του Δ :

$$\frac{\cos \theta}{a} x = 1 \implies x_{\Delta} = \frac{a}{\cos \theta}, \quad (\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi).$$

Άρα

$$(O\Delta) = |x_{\Delta}| = \frac{a}{|\cos \theta|}.$$

Η ορθογώνια προβολή του P στον άξονα $x'x$ είναι

$$Z(a \cos \theta, 0) \implies (OZ) = |a \cos \theta|.$$

Επομένως,

$$(O\Delta)(OZ) = \frac{a}{|\cos \theta|} \cdot |a \cos \theta| = a^2.$$

Άρα πράγματι

$$(O\Delta)(OZ) = a^2$$

19. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 10$, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x + 2y + 7 = 0$.

Λύση:

(Ασκ. 5/131)

Παράλληλες προς την $3x + 2y + 7 = 0$ έχουν μορφή $3x + 2y = c$. Λύνουμε ως προς y : $y = \frac{-3x + c}{2}$ και την αντικαθιστούμε στην έλλειψη:

$$x^2 + 2\left(\frac{-3x + c}{2}\right)^2 = 10 \iff x^2 + \frac{(-3x + c)^2}{2} = 10.$$

Πολλαπλασιάζουμε με 2:

$$2x^2 + (-3x + c)^2 = 20 \iff 2x^2 + 9x^2 - 6cx + c^2 = 20 \iff 11x^2 - 6cx + (c^2 - 20) = 0.$$

Για εφαπτομένη η δευτεροβάθμια έχει $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-6c)^2 - 4 \cdot 11(c^2 - 20) = 36c^2 - 44c^2 + 880 = -8c^2 + 880 = 0 \\ &\Rightarrow c^2 = 110 \Rightarrow c = \pm\sqrt{110}. \end{aligned}$$

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι

$$3x + 2y = \sqrt{110} \quad \text{και} \quad 3x + 2y = -\sqrt{110}$$

20. Η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τις εφαπτόμενες στις κορυφές $A(3, 0)$ και $A'(-3, 0)$ στα σημεία Γ και Δ , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

i. $(A\Gamma)(A'\Delta) = 4$

ii. Η γωνία $\Gamma E \Delta$ είναι ορθή, όπου E η εστία της έλλειψης στον θετικό ημιάξονά της.

Λύση:

(Ασκ. 6/131)

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $P(x_1, y_1)$ της έλλειψης. Η εφαπτομένη στο P έχει εξίσωση

$$\frac{x x_1}{9} + \frac{y y_1}{4} = 1.$$

Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα $A(3, 0)$ και $A'(-3, 0)$ είναι, αντίστοιχα, οι κατακόρυφες

$$x = 3 \quad \text{και} \quad x = -3.$$

Συντεταγμένες τομών:

Για $x = 3$ στην εφαπτομένη του P :

$$\frac{3x_1}{9} + \frac{y y_1}{4} = 1 \implies \frac{x_1}{3} + \frac{y y_1}{4} = 1 \implies y_\Gamma = \frac{4}{y_1} \left(1 - \frac{x_1}{3}\right).$$

Άρα $\Gamma(3, y_\Gamma)$. Για $x = -3$:

$$-\frac{x_1}{3} + \frac{y y_1}{4} = 1 \implies y_\Delta = \frac{4}{y_1} \left(1 + \frac{x_1}{3}\right),$$

οπότε $\Delta(-3, y_\Delta)$.

i. Υπολογισμός γινομένου μηκών.

Επειδή $A(3, 0)$ και $\Gamma(3, y_\Gamma)$ έχουν ίδια τετμημένη,

$$(A\Gamma) = |y_\Gamma|, \quad (A'\Delta) = |y_\Delta|.$$

Άρα

$$(A\Gamma)(A'\Delta) = |y_\Gamma y_\Delta| = \left| \frac{16}{y_1^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{9}\right) \right|.$$

Επειδή P ανήκει στην έλλειψη, $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \implies 1 - \frac{x_1^2}{9} = \frac{y_1^2}{4}$. Άρα

$$(A\Gamma)(A'\Delta) = \left| \frac{16}{y_1^2} \cdot \frac{y_1^2}{4} \right| = 4.$$

ii. Κάθετο τρίγωνο $\Gamma E \Delta$.

Για την έλλειψη με $a = 3$, $b = 2$ έχουμε $\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, άρα $E(\sqrt{5}, 0)$. Οι κλίσεις των $E\Gamma$ και $E\Delta$ είναι

$$m_{E\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - 0}{3 - \sqrt{5}} = \frac{y_{\Gamma}}{3 - \sqrt{5}}, \quad m_{E\Delta} = \frac{y_{\Delta} - 0}{-3 - \sqrt{5}} = \frac{y_{\Delta}}{-3 - \sqrt{5}}.$$

Το γινόμενο τους:

$$m_{E\Gamma} m_{E\Delta} = \frac{y_{\Gamma} y_{\Delta}}{(3 - \sqrt{5})(-3 - \sqrt{5})}.$$

Από το (i) έχουμε $y_{\Gamma} y_{\Delta} = 4$ (χωρίς απόλυτη τιμή), ενώ $(3 - \sqrt{5})(-3 - \sqrt{5}) = -4$. Έτσι

$$m_{E\Gamma} m_{E\Delta} = \frac{4}{-4} = -1,$$

άρα οι ευθείες $E\Gamma$ και $E\Delta$ είναι κάθετες.

$$\angle \Gamma E \Delta = 90^\circ$$

21. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

i. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο $P(5 \cos \theta, 3 \eta \mu \theta)$ τέμνει τους άξονες στα Δ και Z , να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ΔZ .

ii. Αν η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τους άξονες στα H και Θ , να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου N του $H\Theta$ είναι έλλειψη με ίδια εκκεντρότητα με την αρχική.

Λύση:

(Ασκ. 7/132)

Η εφαπτομένη της $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ στο $P(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x x_1}{25} + \frac{y y_1}{9} = 1.$$

Στο $P(5 \cos \theta, 3 \eta \mu \theta)$ γίνεται

$$\frac{\cos \theta}{5} x + \frac{\eta \mu \theta}{3} y = 1.$$

i. Τόπος του μέσου M της ΔZ .

Για τομή με $x'x$ θέτουμε $y = 0$: $x_{\Delta} = \frac{5}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

Για τομή με $y'y$ θέτουμε $x = 0$: $y_Z = \frac{3}{\eta\mu\theta}$.

Άρα

$$M\left(\frac{x_{\Delta}}{2}, \frac{y_Z}{2}\right) = \left(\frac{5}{2\sigma\upsilon\nu\theta}, \frac{3}{2\eta\mu\theta}\right).$$

Θέτοντας $x = \frac{5}{2\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{5}{2x}$ και $y = \frac{3}{2\eta\mu\theta} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{3}{2y}$, χρησιμοποιούμε $(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\theta)^2 = 1$:

$$\left(\frac{5}{2x}\right)^2 + \left(\frac{3}{2y}\right)^2 = 1 \iff \frac{25}{x^2} + \frac{9}{y^2} = 4.$$

Επομένως, ο τόπος του M δίνεται από

$$\frac{25}{x^2} + \frac{9}{y^2} = 4$$

ii. Τόπος του μέσου N του $H\Theta$ για την κάθετη στο P .

Η κλίση της εφαπτομένης στο $P(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$ είναι

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{b\sigma\upsilon\nu\theta}{a\eta\mu\theta} = -\frac{3\sigma\upsilon\nu\theta}{5\eta\mu\theta},$$

άρα της κάθετης:

$$\lambda_{\chi\alpha\theta} = \frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

Εξίσωση κάθετης στο P :

$$y - 3\eta\mu\theta = \frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\nu\theta}(x - 5\sigma\upsilon\nu\theta).$$

Για $y = 0$ (τομή με $x'x$):

$$x_H = 5\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{3\sigma\upsilon\nu\theta}{5\eta\mu\theta}(3\eta\mu\theta) = \left(5 - \frac{9}{5}\right)\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta.$$

Για $x = 0$ (τομή με $y'y$):

$$y_{\Theta} = 3\eta\mu\theta - \frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\nu\theta}(5\sigma\upsilon\nu\theta) = \left(3 - \frac{25}{3}\right)\eta\mu\theta = -\frac{16}{3}\eta\mu\theta.$$

Το μέσο N του $H\Theta$ έχει

$$N\left(\frac{x_H}{2}, \frac{y_\Theta}{2}\right) = \left(\frac{8}{5} \sigma\upsilon\nu\theta, -\frac{8}{3} \eta\mu\theta\right).$$

Θέτοντας $x = \frac{8}{5} \sigma\upsilon\nu\theta$, $y = -\frac{8}{3} \eta\mu\theta$ και χρησιμοποιώντας ξανά $(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\theta)^2 = 1$, προκύπτει

$$\frac{x^2}{(8/5)^2} + \frac{y^2}{(8/3)^2} = 1 \iff \frac{x^2}{64/25} + \frac{y^2}{64/9} = 1$$

Πρόκειται για έλλειψη με ημιαξόνες

$$a' = \frac{8}{3}, \quad b' = \frac{8}{5}.$$

Η εκκεντρότητά της είναι

$$\varepsilon' = \sqrt{1 - \frac{(b')^2}{(a')^2}} = \sqrt{1 - \frac{64/25}{64/9}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Για την αρχική έλλειψη $a = 5$, $b = 3$ έχουμε

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Άρα $\varepsilon' = \varepsilon$.

Ο τόπος του N είναι έλλειψη με ίδια εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$ όπως η αρχική.

22. Δίνονται τα σημεία $K(1,0)$ και $\Lambda(-1,0)$. Ένα σημείο T του επιπέδου των K και Λ κινείται, έτσι ώστε να ισχύει $(TK) + (T\Lambda) = \sqrt{8}$. Να δείξετε ότι το σημείο T κινείται πάνω σε έλλειψη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Λύση:

(Ασκ. 1/133)

Θέτουμε $T(x, y)$. Τότε, σύμφωνα με την υπόθεση:

$$(TK) + (T\Lambda) = \sqrt{8}.$$

Οι αποστάσεις των σημείων είναι:

$$TK = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad T\Lambda = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

Άρα:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{8}.$$

Το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία K και Λ (τα οποία απέχουν 2 μονάδες) είναι σταθερό και ίσο με $\sqrt{8}$.

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης, το σημείο $T(x, y)$ κινείται πάνω σε έλλειψη με εστίες $K(1, 0)$, $\Lambda(-1, 0)$ και σταθερό άθροισμα αποστάσεων $2a = \sqrt{8}$.

Άρα $a = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. Η εστιακή απόσταση είναι $\gamma = 1$.

Από τη σχέση $b^2 = a^2 - \gamma^2$ προκύπτει:

$$b^2 = 2 - 1 = 1.$$

Η εξίσωση της έλλειψης είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

23. Αν P είναι τυχαίο σημείο στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

όπου οι εστίες είναι $E(8, 0)$ και $E'(-8, 0)$:

i. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου PEE' .

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P της έλλειψης, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου PEE' να είναι 24 τετραγωνικές μονάδες.

Λύση:

(Ασκ. 2/133)

Η έλλειψη έχει $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$, $b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$.

Η εστιακή απόσταση είναι

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = 8,$$

άρα οι εστίες είναι $E(8, 0)$ και $E'(-8, 0)$.

i. Το τυχαίο σημείο P της έλλειψης γράφεται παραμετρικά:

$$P(10 \cos \theta, 6 \sin \theta).$$

Οι αποστάσεις του P από τις εστίες E και E' είναι:

$$PE = a(1 - \varepsilon \csc \theta), \quad PE' = a(1 + \varepsilon \csc \theta),$$

$$\text{όπου } \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Άρα

$$PE + PE' = a(1 - \varepsilon \csc \theta) + a(1 + \varepsilon \csc \theta) = 2a = 20.$$

Το τρίγωνο PEE' έχει βάση $EE' = 16$ και πλευρές PE, PE' , οπότε η περίμετρος του είναι:

$$\Pi = EE' + PE + PE' = 16 + 20 = 36.$$

ii. Το τρίγωνο PEE' είναι ισοσκελές ως προς τον άξονα $x'x$, και το ύψος του είναι η τεταγμένη του σημείου P , δηλαδή $y_P = 6 \eta\mu\theta$. Η βάση του είναι $EE' = 16$.

Άρα το εμβαδόν του είναι:

$$E_{\triangle PEE'} = \frac{1}{2} \cdot EE' \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 |\eta\mu\theta| = 48 |\eta\mu\theta|.$$

Αν $E_{\triangle PEE'} = 24$, τότε

$$48 |\eta\mu\theta| = 24 \Rightarrow |\eta\mu\theta| = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, $\eta\mu\theta = \pm \frac{1}{2}$.

Για $\eta\mu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \csc \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, έχουμε:

$$P_1(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 6 \cdot \frac{1}{2}) \Rightarrow P_1(5\sqrt{3}, 3).$$

Για $\eta\mu\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \csc \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, έχουμε:

$$P_2(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 6 \cdot (-\frac{1}{2})) \Rightarrow P_2(5\sqrt{3}, -3).$$

24. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

οι οποίες σχηματίζουν γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων.

Λύση:

(Ασκ. 3/133)

Η κλίση λ της ευθείας που σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των x είναι:

$$\lambda = \varepsilon\varphi(135^\circ) = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi(45^\circ) = -1.$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = -x + c.$$

Για να εφάπτεται της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, θα πρέπει το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = -x + c \end{cases}$$

να έχει μία μόνο λύση.

Αντικαθιστούμε το y στην εξίσωση της έλλειψης:

$$\frac{x^2}{4} + (-x + c)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 - 2cx + c^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} - 2cx + (c^2 - 1) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να έχει μία μόνο λύση \implies η διακρίνουσα είναι μηδέν:

$$\Delta = (-2c)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot (c^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4c^2 - 5(c^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4c^2 - 5c^2 + 5 = 0 \Rightarrow -c^2 + 5 = 0 \Rightarrow c^2 = 5.$$

Άρα $c = \pm\sqrt{5}$.

Επομένως, οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$$y = -x + \sqrt{5}, \quad y = -x - \sqrt{5}.$$

25. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Αν A και A' είναι οι κορυφές της έλλειψης στον άξονα των τετμημένων και το $P(2 \cos \theta, \sqrt{3} \eta \mu \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης, να δείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του ορθοκέντρου του τριγώνου APA' ανήκει στην έλλειψη με εξίσωση:

$$4x^2 + 3y^2 = 16.$$

Λύση:

(Ασκ. 4/133)

Η δεδομένη έλλειψη έχει $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, άρα:

$$A(2, 0), \quad A'(-2, 0).$$

Το τυχαίο σημείο της έλλειψης είναι:

$$P(2 \cos \theta, \sqrt{3} \eta \mu \theta).$$

Το τρίγωνο APA' έχει κορυφές:

$$A(2, 0), \quad A'(-2, 0), \quad P(2 \cos \theta, \sqrt{3} \eta \mu \theta).$$

Επειδή η βάση AA' βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$, το ύψος του τριγώνου από την κορυφή P είναι κάθετο στον άξονα $x'x$, επομένως η εξίσωσή του είναι:

$$x = 2 \cos \theta.$$

Η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην PA έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{\lambda_{PA}}$. Αρχικά βρίσκουμε την κλίση της PA :

$$\lambda_{PA} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\sqrt{3} \eta \mu \theta - 0}{2 \cos \theta - 2} = \frac{\sqrt{3} \eta \mu \theta}{2(\cos \theta - 1)}.$$

Άρα η εξίσωση της κάθετης από το A είναι:

$$y = m(x - 2) \quad \text{όπου} \quad m = -\frac{1}{\lambda_{PA}} = -\frac{2(\cos \theta - 1)}{\sqrt{3} \eta \mu \theta}$$

Το ορθόκεντρο H του τριγώνου APA' είναι το σημείο τομής των δύο υψών, δηλαδή των ευθειών:

$$\begin{cases} x = 2 \sigma\upsilon\nu\theta, \\ y = -\frac{2(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)}{\sqrt{3}\eta\mu\theta}(x - 2) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε το $x = 2 \sigma\upsilon\nu\theta$:

$$y = -\frac{2(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)}{\sqrt{3}\eta\mu\theta}(2 \sigma\upsilon\nu\theta - 2) = \frac{4(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)^2}{\sqrt{3}\eta\mu\theta}.$$

Έτσι, το ορθόκεντρο $H(x, y)$ έχει συντεταγμένες:

$$H\left(2 \sigma\upsilon\nu\theta, \frac{4(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)^2}{\sqrt{3}\eta\mu\theta}\right).$$

Με πράξεις (εξάλειψη της θ) αποδεικνύεται ότι τα σημεία H ικανοποιούν τη σχέση:

$$4x^2 + 3y^2 = 16.$$

26. Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x - 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τέμνει την έλλειψη με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

στα σημεία K και Λ .

i. Να δείξετε ότι το σημείο με συντεταγμένες (x, y) του μέσου M του $K\Lambda$ είναι

$$x = \frac{8\lambda}{4\lambda^2 + 1}, \quad y = -\frac{2}{4\lambda^2 + 1}.$$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M , όταν μεταβάλλεται το λ .

Λύση:

(Ασκ. 5/133)

i. Αντικαθιστούμε $y = \lambda x - 2$ στην $x^2 + 4y^2 = 16$:

$$x^2 + 4(\lambda x - 2)^2 = 16 \Rightarrow (1 + 4\lambda^2)x^2 - 16\lambda x = 0.$$

Άρα οι τετμημένες των K, Λ είναι $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{16\lambda}{4\lambda^2 + 1}$. Το μέσο $M(x, y)$ έχει

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8\lambda}{4\lambda^2 + 1}, \quad y = \lambda x - 2 = -\frac{2}{4\lambda^2 + 1}.$$

ii. Από $x = \frac{8\lambda}{4\lambda^2 + 1}$ παίρνουμε $4\lambda^2 + 1 = \frac{8\lambda}{x}$. Με $y = -\frac{2}{4\lambda^2 + 1} \Rightarrow \lambda = -\frac{x}{4y}$. Αντικαθιστούμε:

$$4 \left(\frac{x^2}{16y^2} \right) + 1 = \frac{8(-x)}{x \cdot 4y} \Rightarrow \frac{x^2}{4y^2} + 1 = -\frac{2}{y}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί y^2 :

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + (y + 1)^2 = 1.$$

27. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

i. Να δείξετε ότι το σχήμα στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της έλλειψης με κλίση λ , $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = -\frac{9}{25\lambda}x.$$

ii. Αν η ευθεία (ε) τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης σε οποιοδήποτε από αυτά τα σημεία έχει κλίση λ .

Λύση:

(Ασκ. 6/133)

Η εξίσωση της έλλειψης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

i. Θεωρούμε μια χορδή της έλλειψης με κλίση λ , δηλαδή ευθεία της μορφής:

$$y = \lambda x + c.$$

Η χορδή αυτή τέμνει την έλλειψη, άρα το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = \lambda x + c \end{cases}$$

έχει δύο κοινά σημεία.

Αντικαθιστούμε το y και πολλαπλασιάζουμε με 225:

$$9x^2 + 25(\lambda x + c)^2 = 225 \Rightarrow (9 + 25\lambda^2)x^2 + 50\lambda cx + (25c^2 - 225) = 0.$$

Αν τα σημεία τομής είναι $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_2, y_2)$, το x του μέσου M είναι:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{B}{2A} = -\frac{50\lambda c}{2(9 + 25\lambda^2)} = -\frac{25\lambda c}{9 + 25\lambda^2}.$$

Αντίστοιχα:

$$y_M = \lambda x_M + c = \lambda \left(-\frac{25\lambda c}{9 + 25\lambda^2} \right) + c = c \left(1 - \frac{25\lambda^2}{9 + 25\lambda^2} \right) = \frac{9c}{9 + 25\lambda^2}.$$

Απαλείφουμε το c :

$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{\frac{9c}{9 + 25\lambda^2}}{-\frac{25\lambda c}{9 + 25\lambda^2}} = -\frac{9}{25\lambda}.$$

Άρα τα σημεία $M(x_M, y_M)$ ανήκουν στην ευθεία:

$$y = -\frac{9}{25\lambda}x.$$

ii. Η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Παραγωγίζοντας ως προς x :

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{9} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{25y}.$$

Η κλίση της εφαπτομένης είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{9x}{25y}$.

Για σημείο (x, y) της ευθείας (ε) : $y = -\frac{9}{25\lambda}x$:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{9x}{25(-\frac{9}{25\lambda}x)} = \lambda.$$

28. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης με εξίσωση

$$9x^2 + 25y^2 = 225,$$

οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(5, 6)$.

Λύση:

(Ασκ. 7/134)

Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται στη μορφή:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Η γενική εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης είναι:

$$\frac{xx_1}{25} + \frac{yy_1}{9} = 1,$$

όπου το σημείο $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη:

$$\frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1.$$

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(5, 6)$, ικανοποιεί:

$$\frac{5x_1}{25} + \frac{6y_1}{9} = 1.$$

Το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1, \\ \frac{5x_1}{25} + \frac{6y_1}{9} = 1 \end{cases}$$

πρέπει να λυθεί ως προς x_1, y_1 .

Από τη δεύτερη εξίσωση:

$$\frac{x_1}{5} + \frac{2y_1}{3} = 1 \Rightarrow x_1 = 5 - \frac{10y_1}{3}.$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη:

$$\frac{(5 - \frac{10y_1}{3})^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1.$$

Πολλαπλασιάζουμε επί 225:

$$9(5 - \frac{10y_1}{3})^2 + 25y_1^2 = 225.$$

Αναπτύσσουμε:

$$9(25 - \frac{100y_1}{3} + \frac{100y_1^2}{9}) + 25y_1^2 = 225 \Rightarrow 225 - 300y_1 + 100y_1^2 + 25y_1^2 = 225.$$

Απλοποιούμε:

$$125y_1^2 - 300y_1 = 0 \Rightarrow 25y_1(5y_1 - 12) = 0.$$

$$\text{Άρα } y_1 = 0 \text{ ή } y_1 = \frac{12}{5} = 2.4.$$

$$\text{Για } y_1 = 0: \quad x_1 = 5. \text{ Για } y_1 = 2.4: \quad x_1 = 5 - \frac{10(2.4)}{3} = 5 - 8 = -3.$$

Επομένως τα σημεία επαφής είναι:

$$P_1(5, 0), \quad P_2(-3, \frac{12}{5}).$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $P(x_1, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση:

$$\frac{xx_1}{25} + \frac{yy_1}{9} = 1.$$

Για $P_1(5, 0)$:

$$\frac{5x}{25} = 1 \Rightarrow x = 5.$$

Για $P_2(-3, \frac{12}{5})$:

$$\frac{-3x}{25} + \frac{y(\frac{12}{5})}{9} = 1 \Rightarrow -\frac{3x}{25} + \frac{4y}{15} = 1 \Rightarrow 9x - 20y + 75 = 0.$$

29. Να βρείτε τις εξισώσεις των ελλείψεων που διέρχονται από το σημείο $A(4, -1)$ και εφάπτονται της ευθείας $x + 4y - 10 = 0$.

Λύση:

(Ασκ. 8/134)

Θεωρούμε έλλειψη με κέντρο την αρχή και άξονες στους $x'x$, $y'y$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0).$$

Το σημείο $A(4, -1)$ ανήκει στην έλλειψη, άρα:

$$\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Η ευθεία $x + 4y - 10 = 0 \iff x + 4y = 10$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης, οπότε έχει μορφή:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

όπου το σημείο $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Ταυτίζοντας τους συντελεστές με την $x + 4y = 10$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a^2} &= \frac{1}{10}, & \frac{y_1}{b^2} &= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}. \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{a^2}{10}, & y_1 &= \frac{2b^2}{5}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της έλλειψης:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{100} + \frac{4b^2}{25} = 1 \Rightarrow a^2 + 16b^2 = 100. \quad (2)$$

Από (1) και (2):

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ a^2 + 16b^2 = 100. \end{cases}$$

Θέτουμε $a^2 = A$, $b^2 = B$:

$$\frac{16}{A} + \frac{1}{B} = 1 \Rightarrow AB - A - 16B = 0.$$

Αντικαθιστούμε $A = 100 - 16B$:

$$(100 - 16B)B - (100 - 16B) - 16B = 0 \Rightarrow 16B^2 - 100B + 100 = 0 \Rightarrow 4B^2 - 25B + 25 = 0.$$

$$B = \frac{25 \pm 15}{8} \Rightarrow B_1 = 5, \quad B_2 = \frac{5}{4}.$$

Για $B_1 = 5 \Rightarrow A = 20$, για $B_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow A = 80$.

Άρα οι ζητούμενες ελλείψεις είναι:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1.$$

Και οι δύο ικανοποιούν το $A(4, -1)$ και εφάπτονται της ευθείας $x + 4y - 10 = 0$.

30. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

και τυχαίο σημείο της $T(a \sin \theta, \beta \eta \mu \theta)$, με $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Από την κορυφή της $A(a, 0)$ φέρουμε παράλληλη προς την εφαπτομένη στο T , η οποία τέμνει την OT στο σημείο Σ (O η αρχή των αξόνων). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι:

$$\frac{x}{a} + \frac{ay^2}{\beta^2 x} = 1.$$

Λύση:

(Ασκ. 9/134)

Το σημείο $T(a \sin \theta, \beta \eta \mu \theta)$ ανήκει στην έλλειψη:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Η εφαπτομένη της στο σημείο T έχει εξίσωση:

$$\frac{x a \sin \theta}{a^2} + \frac{y \beta \eta \mu \theta}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{x \sin \theta}{a} + \frac{y \eta \mu \theta}{\beta} = 1.$$

Η παράλληλη από την κορυφή $A(a, 0)$ έχει την ίδια κλίση, δηλαδή την ίδια μορφή:

$$\frac{x \sin \theta}{a} + \frac{y \eta \mu \theta}{\beta} = k.$$

Επειδή διέρχεται από το $A(a, 0)$:

$$\frac{a \sin \theta}{a} + \frac{0}{\beta} = k \Rightarrow k = \sin \theta.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι:

$$\frac{x \sigma\upsilon\nu\theta}{a} + \frac{y \eta\mu\theta}{\beta} = \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Η OT (διάμετρος) έχει εξίσωση:

$$y = \frac{\beta \eta\mu\theta}{a \sigma\upsilon\nu\theta} x.$$

Για το σημείο τομής $\Sigma(x, y)$, αντικαθιστούμε την y της OT στην ευθεία της AS :

$$\frac{x \sigma\upsilon\nu\theta}{a} + \frac{(\frac{\beta \eta\mu\theta}{a \sigma\upsilon\nu\theta} x) \eta\mu\theta}{\beta} = \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Απλοποιούμε:

$$\frac{x \sigma\upsilon\nu\theta}{a} + \frac{x \eta\mu^2\theta}{a \sigma\upsilon\nu\theta} = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x \left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta}{a \sigma\upsilon\nu\theta} \right) = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x = a \sigma\upsilon\nu^2\theta.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της OT :

$$y = \frac{\beta \eta\mu\theta}{a \sigma\upsilon\nu\theta} x = \frac{\beta \eta\mu\theta}{a \sigma\upsilon\nu\theta} a \sigma\upsilon\nu^2\theta = \beta \eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Έτσι, το σημείο Σ έχει συντεταγμένες:

$$\Sigma(a \sigma\upsilon\nu^2\theta, \beta \eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta).$$

Για να βρούμε την εξίσωση της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου του Σ :

$$x = a \sigma\upsilon\nu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{x}{a}.$$

Και επειδή $\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{a-x}{a}$, έχουμε:

$$y = \beta \eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta = \beta \sqrt{\frac{x}{a} \cdot \frac{a-x}{a}} \Rightarrow \frac{\beta^2 y^2}{x^2} = \frac{a-x}{a}.$$

Μετά από πράξεις:

$$\frac{x}{a} + \frac{ay^2}{\beta^2 x} = 1.$$

31. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $x^2 + 4y^2 = 1$ και τυχαίο σημείο της P . Από το σημείο P φέρουμε κάθετη προς την ευθεία $x = 2$ και έστω N το ίχνος της κάθετης. Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του PN , όταν το P κινείται πάνω στην έλλειψη, είναι κύκλος.

Λύση:

(Ασκ. 10/134)

Θέτουμε $P(x, y)$ σημείο της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 1$. Η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη, άρα η κάθετη σε αυτή είναι οριζόντια. Επομένως η κάθετη από το P έχει εξίσωση $y = y_P = y$ και τέμνει την $x = 2$ στο

$$N(2, y).$$

Το μέσο M του PN έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x+2}{2}, y\right).$$

Θέτοντας

$$X = \frac{x+2}{2}, \quad Y = y \quad \implies \quad x = 2X - 2, \quad y = Y,$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση της έλλειψης παίρνουμε:

$$(2X - 2)^2 + 4Y^2 = 1 \iff 4X^2 - 8X + 4 + 4Y^2 = 1 \iff 4[(X - 1)^2 + Y^2] - 1 = 0.$$

Άρα

$$(X - 1)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του M είναι κύκλος με κέντρο $(1, 0)$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$:

$$(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

32. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης

$$\beta^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 \beta^2$$

η οποία αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες ίσα τμήματα.

Λύση:

(Ασκ. 1/135)

Η έλλειψη γράφεται στη μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτομένη αποκόπτει ίσα και θετικά τμήματα p από τους άξονες. Τότε έχει εξίσωση στη μορφή διεπαφών:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p} = 1 \iff x + y = p, \quad p > 0.$$

Για να είναι εφαπτομένη, το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ y = p - x \end{cases}$$

πρέπει να έχει μία λύση. Αντικαθιστούμε $y = p - x$ στην έλλειψη:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(p-x)^2}{\beta^2} = 1 \iff (\beta^2 + a^2)x^2 - 2a^2px + a^2p^2 - a^2\beta^2 = 0.$$

Για εφαπτομένη, η διακρίνουσα μηδενίζεται:

$$\Delta = (2a^2p)^2 - 4(\beta^2 + a^2)(a^2p^2 - a^2\beta^2) = 0 \iff p^2 = a^2 + \beta^2.$$

Επειδή $p > 0$, παίρνουμε $p = \sqrt{a^2 + \beta^2}$.

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$$x + y = \sqrt{a^2 + \beta^2}.$$

33. Ο κύκλος $K_1 : (\Lambda, \rho)$ είναι εσωτερικός του κύκλου $K_2 : (K, R)$. Μεταβλητός κύκλος K_3 κέντρου M κινείται, έτσι ώστε να εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου K_2 και εξωτερικά του κύκλου K_1 . Να εξηγήσετε γιατί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου M είναι έλλειψη και να προσδιορίσετε τις δύο εστίες της.

Λύση:

(Ασκ. 2/135)

Θέτουμε ακτίνα του K_3 ίση με $r > 0$. Οι συνθήκες εφαπτομένης γράφονται:

$$(\text{εσωτερική στο } K_2) \quad KM + r = R \Rightarrow r = R - KM,$$

$$(\text{εξωτερική στο } K_1) \quad M\Lambda = r + \rho.$$

Αντικαθιστούμε το r από την πρώτη στη δεύτερη:

$$M\Lambda = (R - KM) + \rho \iff KM + M\Lambda = R + \rho = \text{σταθ.}$$

Το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου M από τα δύο σταθερά σημεία K και Λ είναι σταθερό και ίσο με $2a = R + \rho$ (και πράγματι $R + \rho \geq K\Lambda + \rho > K\Lambda$, αφού ο K_1 είναι εσωτερικός του K_2).

Άρα, από τον ορισμό της έλλειψης, ο τόπος του M είναι έλλειψη με

$$\text{εστίες τα σημεία } K \text{ και } \Lambda, \quad 2a = R + \rho.$$

Συνεπώς, οι δύο εστίες της έλλειψης είναι τα κέντρα K και Λ των δύο δοθέντων κύκλων.

34. Να δείξετε ότι η καμπύλη με εξίσωση

$$4x^2 + 9y^2 + 16x - 54y + 61 = 0$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$$

και να εξηγήσετε τι παριστάνει, κάνοντας τη γραφική της παράσταση.

Λύση:

(Ασκ. 3/135)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$\begin{aligned} 4(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 &= 0 \Rightarrow 4[(x + 2)^2 - 4] + 9[(y - 3)^2 - 9] + 61 = 0 \\ \Rightarrow 4(x + 2)^2 + 9(y - 3)^2 - 36 &= 0 \Rightarrow 4(x + 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 36. \end{aligned}$$

Διαίρεση με 36:

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Άρα πρόκειται για έλλειψη με

$$\text{κέντρο } (-2, 3), \quad a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, \quad \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2,$$

με μεγάλο ημιάξονα παράλληλο στον $x'x$.

Κορυφές: $(-2 \pm 3, 3) = (-5, 3), (1, 3)$.

Συν-κορυφές: $(-2, 3 \pm 2) = (-2, 5), (-2, 1)$.

Εστιακή απόσταση: $\gamma = \sqrt{a^2 - \beta^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, άρα εστίες $(-2 \pm \sqrt{5}, 3)$.

Γραφική παράσταση: Έλλειψη με κέντρο $(-2, 3)$, οριζόντιο μεγάλο ημιάξονα μήκους 3 και κατακόρυφο μικρό ημιάξονα μήκους 2, που διέρχεται από τα σημεία $(-5, 3)$, $(1, 3)$, $(-2, 5)$, $(-2, 1)$.



Θέματα Εξετάσεων

1. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και τυχαίο σημείο της $P(5\cos\theta, 3\eta\mu\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο P είναι

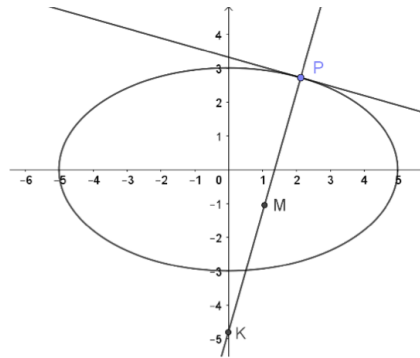
$$5\chi\mu\theta - 3\gamma\sigma\upsilon\eta\theta = 16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\eta\theta$$

ii. Η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του PK είναι έλλειψη.

iii. Αν E η εστία στον θετικό ημιάξονα και ε η εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{EK}{EP} = \varepsilon$.

Λύση:

2022



i.

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{9}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{9x}{25y}$$

Επομένως,

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{3\sigma\upsilon\eta\theta}{5\eta\mu\theta} \Rightarrow \lambda_{\kappa} = \frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\eta\theta} \quad \text{και η εξίσωση της κάθετης είναι:}$$

$$y - 3\eta\mu\theta = \frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\eta\theta}(x - 5\sigma\upsilon\eta\theta)$$

$$3\sigma\upsilon\eta\theta y - 9\eta\mu\theta\sigma\upsilon\eta\theta = 5x\eta\mu\theta - 25\eta\mu\theta\sigma\upsilon\eta\theta$$

$$\Rightarrow 5x\eta\mu\theta - 3y\sigma\upsilon\eta\theta = 16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\eta\theta$$

ii. Για $y_K = 0$:

$$5x_K \eta \mu \theta = 16 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta \Rightarrow x_K = \frac{16}{5} \sigma \nu \theta$$

$$K \left(\frac{16}{5} \sigma \nu \theta, 0 \right)$$

Επομένως,

$$x_M = \frac{\frac{16}{5} \sigma \nu \theta + 5 \sigma \nu \theta}{2} = \frac{41}{10} \sigma \nu \theta \Rightarrow \sigma \nu \theta = \frac{10}{41} x_M$$

και

$$y_M = \frac{0 + 3 \eta \mu \theta}{2} = \frac{3}{2} \eta \mu \theta \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{2}{3} y_M$$

Τότε,

$$\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3} y_M \right)^2 + \left(\frac{10}{41} x_M \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_M^2}{\left(\frac{41}{10} \right)^2} + \frac{y_M^2}{\left(\frac{3}{2} \right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{41}{10} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2} \right)^2} = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M είναι έλλειψη.

iii. Γνωρίζουμε ότι $\gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow \gamma = \frac{4}{5} \cdot 5 = 4$ και $\varepsilon = \frac{4}{5}$.

$$E(4, 0), \quad K \left(\frac{16}{5} \sigma \nu \theta, 0 \right), \quad P(5 \sigma \nu \theta, 3 \eta \mu \theta)$$

$$(EK) = \left| 4 - \frac{16}{5} \sigma \nu \theta \right| = 4 \left| 1 - \frac{4}{5} \sigma \nu \theta \right|$$

$$(EP) = 5 - \frac{4}{5} 5 \sigma \nu \theta = 5 \left(1 - \frac{4}{5} \sigma \nu \theta \right)$$

$$\Rightarrow \frac{EK}{EP} = \frac{4(1 - \frac{4}{5} \sigma \nu \theta)}{5(1 - \frac{4}{5} \sigma \nu \theta)} = \frac{4}{5} = \varepsilon.$$

2. Να διατυπώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

i. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, με εστίες τα σημεία $E(4, 0)$ και $E'(-4, 0)$, αν το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις δυο εστίες της είναι ίσο με 10 μονάδες.

Λύση:

2021

Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τους από δυο σταθερά σημεία E και E' του επιπέδου είναι σταθερό και μεγαλύτερο του EE' .

ii. $E(4, 0), E'(-4, 0) \Rightarrow \gamma = 4$

Αν T τυχαίο σημείο της έλλειψης τότε $TE + TE' = 10$ (ορισμός της έλλειψης)

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$E(4, 0), E'(-4, 0) \Rightarrow a > \beta \Rightarrow \gamma^2 = a^2 - \beta^2$$

$$\beta^2 = a^2 - \gamma^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \beta = 3$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $a > \beta$ και το τυχαίο σημείο της $P(a\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Η κάθετη της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Λ .

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο P είναι

$$(a\eta\mu\theta)x - (\beta\sigma\upsilon\nu\theta)y = (a^2 - \beta^2)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta.$$

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος PL είναι έλλειψη.

Λύση:

2021

i.

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{\beta^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2 x}{a^2 y}$$

ii.

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{\beta \sigma \nu \theta}{a \eta \mu \theta} \Rightarrow \lambda_{\kappa\theta} = \frac{a \eta \mu \theta}{\beta \sigma \nu \theta} \quad (\eta \mu \theta \neq 0, \sigma \nu \theta \neq 0, \theta \in (0, \pi/2))$$

Εξίσωση της κάθετης:

$$y - \beta \eta \mu \theta = \frac{a \eta \mu \theta}{\beta \sigma \nu \theta} (x - a \sigma \nu \theta)$$

$$\beta \sigma \nu \theta y - \beta^2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta = a \eta \mu \theta x - a^2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta$$

$$\Rightarrow (a \eta \mu \theta) x - (\beta \sigma \nu \theta) y = (a^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \sigma \nu \theta$$

iii. Για $x = 0$:

$$-(\beta \sigma \nu \theta) y = (a^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \sigma \nu \theta \Rightarrow y = \frac{\beta^2 - a^2}{\beta} \eta \mu \theta \Rightarrow \Lambda \left(0, \frac{\beta^2 - a^2}{\beta} \eta \mu \theta \right)$$

 $M(x, y)$ μέσω του PA :

$$x = \frac{a \sigma \nu \theta + 0}{2} = \frac{a \sigma \nu \theta}{2} \Rightarrow \sigma \nu \theta = \frac{2x}{a}$$

$$y = \frac{\beta \eta \mu \theta + \frac{\beta^2 - a^2}{\beta} \eta \mu \theta}{2} = \frac{(\beta^2 - a^2) \eta \mu \theta + \beta^2 \eta \mu \theta}{2\beta}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\eta \mu \theta (2\beta^2 - a^2)}{2\beta} \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{2\beta y}{2\beta^2 - a^2}$$

Από $\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1$:

$$\left(\frac{2\beta y}{2\beta^2 - a^2} \right)^2 + \left(\frac{2x}{a} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2\beta^2 - a^2}{2\beta}\right)^2} = 1$$

Άρα η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου M είναι έλλειψη (αν $a \neq \beta\sqrt{2}$ και $a \neq 2\beta$).

Αν $a = 2\beta$ τότε ο Γ.Τ. του σημείου M ανήκει σε κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = \beta^2$

Αν $a = \beta\sqrt{2}$ τότε $M\left(\frac{a\sin\theta}{2}, 0\right)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow M(x, 0)$ οπότε $0 < x < \frac{a}{2}$

\Rightarrow Ο Γ.Τ. του σημείου M είναι ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα $x'x$

Οι δύο αυτές περιπτώσεις είναι ειδικές περιπτώσεις έλλειψης.