Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Ορισμένο Ολοκλήρωμα

1. Να δείξετε ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στα διαστήματα που δίνονται και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα οριζόμενα ολοκληρώματα, μέσω ορισμού.

i. $f(x) = x^2 + 1, \;\; x \in [0,2]$

ii. $f(x) = 2x + 3, \;\; x \in [1,4]$

iii. $f(x) = 6(x-1), \;\; x \in [0,1]$

i.

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$
$$x_i^* = \frac{2i}{n}$$

Από ορισμό,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right]\left(\frac{2}{n}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i^2}{n^3} + \frac{2}{n}\right)\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}$$
$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2$$
$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{1}{n}(2n)$$
$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2 = \frac{14n^2 + 12n + 4}{3n^2}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος,

$$\int_0^2 x^2+1\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\frac{14n^2+12n+4}{3n^2} = \frac{14}{3}$$

ii.

$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i^* = 1+\frac{3i}{n}$$

Από ορισμό,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1+\frac{3i}{n}\right)+3\right]\left[\frac{3}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{15}{n}+\frac{18i}{n^2}\right]$$

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\frac{15}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}15+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$

$$= \frac{1}{n}(15n)+\frac{18}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 15+\frac{9n+9}{n}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος,

$$\int_1^4 2x+3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[15+\frac{9n+9}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[24+\frac{9}{n}\right] = 24$$

iii.

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i^* = \frac{i}{n}$$

Από ορισμό,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{6i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{6i^2}{n^3}-\frac{6i}{n^2}\right]$$

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{6i^2}{n^3}\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{6i}{n^2}\right] = \frac{6}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{6}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$

$$= \frac{6}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)-\frac{6}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2n^2+3n+1}{n^2}-\frac{3n+3}{n}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος,

$$\int_0^1 6x(x-1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^2+3n+1}{n^2} - \frac{3n+3}{n}\right] = 2-3=-1$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_6^{11} (6g(x) - 10f(x))\,dx$ δεδομένου ότι:

$$\int_6^{11} f(x)\,dx = -7 \quad \text{και} \quad \int_6^{11} g(x)\,dx = 24$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int_6^{11} 6g(x) - 10f(x)\,dx &= \int_6^{11} 6g(x)\,dx - \int_6^{11} 10f(x)\,dx \\ &= 6\int_6^{11} g(x)\,dx - 10\int_6^{11} f(x)\,dx \\ &= 6(24) - 10(-7) = 214\end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_2^9 f(x)\,dx$ δεδομένου ότι:

$$\int_5^2 f(x)\,dx = 3 \quad \text{και} \quad \int_5^9 f(x)\,dx = 8.$$

Λύση:

$$\int_2^9 f(x)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^9 f(x)\,dx$$

$$\int_2^9 f(x)\,dx = -\int_5^2 f(x)\,dx + \int_5^9 f(x)\,dx = -(3) + 8 = 5$$

4. Αν ισχύει
$$\int_1^e \ln x\, dx = 1,$$
να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:
$$\int_e^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Λύση:

Αρχικά, παρατηρούμε ότι
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$
Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται ως
$$\int_e^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_e^1 -\ln x\, dx = -\int_e^1 \ln x\, dx.$$
Αλλάξουμε τα όρια ώστε να ταιριάζουν με την υπόθεση:
$$-\int_e^1 \ln x\, dx = \int_1^e \ln x\, dx.$$
Σύμφωνα με το δεδομένο:
$$\int_1^e \ln x\, dx = 1.$$
Συνεπώς:
$$\int_e^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = 1.$$

5. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:
$$\int_\alpha^6 \frac{x(x+3)}{x^2-x+1}\, dx - \int_\alpha^6 \frac{4x-1}{x^2-x+1}\, dx = 2$$

Λύση:

Συνδυάζουμε τα δύο ολοκληρώματα σε ένα:
$$\int_\alpha^6 \frac{x(x+3)-(4x-1)}{x^2-x+1}\, dx = 2$$
Υπολογίζουμε τον αριθμητή:
$$x(x+3)-(4x-1) = x^2+3x-4x+1 = x^2-x+1$$

Άρα το ολοκλήρωμα απλοποιείται:

$$\int_{\alpha}^{6} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1}\, dx = \int_{\alpha}^{6} 1\, dx = 6 - \alpha$$

Θέτουμε το ολοκλήρωμα ίσο με 2:

$$6 - \alpha = 2 \implies \alpha = 4$$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, εφόσον είναι δυνατόν. Αν κάποιο δεν μπορεί να υπολογιστεί, εξηγήστε τον λόγο.

i. $\displaystyle\int_{1}^{6} \left(12x^3 - 9x^2 + 2\right) dx$ ii. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \left(5z^2 - 7z + 3\right) dz$ iii. $\displaystyle\int_{3}^{0} \left(15w^4 - 13w^2\right) dw$

iv. $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\tfrac{8}{\sqrt{t}} - 12t^{3/2}\right) dt$ v. $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(\tfrac{1}{7z} + \tfrac{z^{2/3}}{4} - \tfrac{1}{2z^3}\right) dz$ vi. $\displaystyle\int_{-2}^{4} \left(x^6 - x^4 + \tfrac{1}{x^2}\right) dx$

vii. $\displaystyle\int_{-4}^{-1} x^2(3 - 4x)\, dx$ viii. $\displaystyle\int_{2}^{1} \tfrac{2y^3 - 6y^2}{y^2}\, dy$ ix. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (7\sin t - 2\cos t)\, dt$

x. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\sec^2 w - 8\csc w \cot w\right) dw$ xi. $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(e^x + \tfrac{1}{x^2+1}\right) dx$ xii. $\displaystyle\int_{-5}^{-2} \left(7e^y + \tfrac{2}{y}\right) dy$

Λύση:

i.

$$\int_{1}^{6} 12x^3 - 9x^2 + 2\, dx = \left(3x^4 - 3x^3 + 2x\right)\Big|_{1}^{6} = 3252 - 2 = 3250$$

ii.

$$\int_{-2}^{1} 5z^2 - 7z + 3\, dz = \left(\frac{5}{3}z^3 - \frac{7}{2}z^2 + 3z\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - \left(-\frac{100}{3}\right) = \frac{69}{2}$$

iii.

$$\int_{3}^{0} 15w^4 - 13w^2\, dw = \left(3w^5 - \frac{13}{3}w^3 + \frac{1}{2}w^2\right)\Bigg|_{3}^{0} = -612$$

iv.

$$\int_1^4 \frac{8}{\sqrt{t}} - 12\sqrt{t^3}\,dt = \int_1^4 8t^{-\frac{1}{2}} - 12t^{\frac{3}{2}}\,dt = \left(16t^{\frac{1}{2}} - \frac{24}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = -\frac{664}{5}$$

v.

$$\int_1^2 \frac{1}{7z} + \frac{\sqrt[3]{z^2}}{4} - \frac{1}{2z^3}\,dz = \int_1^2 \frac{1}{7}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}z^{-3}\,dz = \left(\frac{1}{7}\ln|z| + \frac{3}{20}z^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{7}\ln(2) + \frac{3}{20}\left(2^{\frac{5}{3}}\right) + \frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{7}\ln(1) + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{7}\ln(2) + \frac{3}{20}\left(2^{\frac{5}{3}}\right) - \frac{27}{80}$$

vi. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 4]$. Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί.

vii.

$$\int_{-4}^{-1} x^2(3-4x)\,dx = \int_{-4}^{-1} 3x^2 - 4x^3\,dx = \left(x^3 - x^4\right)\Bigg|_{-4}^{-1} = 318$$

viii.

$$\int_2^1 \frac{2y^3 - 6y^2}{y^2}\,dy = \int_2^1 2y - 6\,dy = \left(y^2 - 6y\right)\Bigg|_2^1 = 3$$

ix.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\sin(t) - 2\cos(t)\,dt = (-7\cos(t) - 2\sin(t))\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5$$

x.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sec^2(w) - 8\csc(w)\cot(w)\,dw = (2\tan(w) + 8\csc(w))\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{16}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right) - \left(16 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{14}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 16$$

xi.

$$\int_0^2 e^x + \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left(e^x + \tan^{-1}(x)\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \left(e^2 + \tan^{-1}(2)\right) - \left(e^0 + \tan^{-1}(0)\right) = e^2 + \tan^{-1}(2) - 1$$

xii.

$$\int_{-5}^{-2} 7e^y + \frac{2}{y}\,dy = \left(7e^y + 2\ln|y|\right)\Big|_{-5}^{-2}$$

$$= \left(7e^{-2} + 2\ln|-2|\right) - \left(7e^{-5} + 2\ln|-5|\right) = 7\left(e^{-2} - e^{-5}\right) + 2\left(\ln(2) - \ln(5)\right)$$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, εφόσον είναι δυνατόν.

i.

$$\int_0^4 f(t)\,dt \quad \text{where} \quad f(t) = \begin{cases} 2t & t > 1 \\ 1 - 3t^2 & t \leq 1 \end{cases}$$

ii.

$$\int_{-6}^{1} g(z)\,dz \quad \text{where} \quad g(z) = \begin{cases} 2 - z & z > -2 \\ 4e^z & z \leq -2 \end{cases}$$

Λύση:

i.

$$\int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^4 f(t)\,dt = \int_0^1 1 - 3t^2\,dt + \int_1^4 2t\,dt$$

$$\int_0^4 f(t)\,dt = \left(t - t^3\right)\Big|_0^1 + t^2\Big|_1^4 = [0 - 0] + [16 - 1] = 15$$

ii.

$$\int_{-6}^{1} g(z)\,dz = \int_{-6}^{-2} 4e^z\,dz + \int_{-2}^{1} 2 - z\,dz = \left(4e^z\right)\Big|_{-6}^{-2} + \left(2z - \frac{1}{2}z^2\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \left[4e^{-2} - 4e^{-6}\right] + \left[\frac{3}{2} - (-6)\right] = 4e^{-2} - 4e^{-6} + \frac{15}{2}$$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, εφόσον είναι δυνατόν.

i. $\displaystyle\int_3^6 |2x - 10|\;dx$

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{0} |4w + 3|\;dw$

Λύση:

i.

$$\begin{aligned} x<5 &\implies 2x-10<0 \\ x>5 &\implies 2x-10>0 \end{aligned}$$

Για να αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές, αρκεί να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα στο σημείο $x = 5$.

$$\int_3^6 |2x-10|\,dx = \int_3^5 |2x-10|\,dx + \int_5^6 |2x-10|\,dx$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε $3 \leq x \leq 5$ και επομένως $|2x-10| = -(2x-10)$.

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε $5 \leq x \leq 6$ και επομένως $|2x-10| = 2x-10$.

$$\begin{aligned} \int_3^6 |2x-10|dx &= \int_3^5 -(2x-10)\,dx + \int_5^6 (2x-10)\,dx \\ &= \int_3^5 (-2x+10)\,dx + \int_5^6 (2x-10)\,dx \\ &= \left(-x^2+10x\right)\Big|_3^5 + \left(x^2-10x\right)\Big|_5^6 = 5 \end{aligned}$$

ii. Επειδή το $4w+3$ είναι εξίσωση ευθείας, είναι φανερό ότι η συνάρτηση έχει την εξής συμπεριφορά:

$$\begin{aligned} w<-\tfrac{3}{4} &\implies 4w+3<0 \\ w>-\tfrac{3}{4} &\implies 4w+3>0 \end{aligned}$$

Άρα, για να αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές, αρκεί να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα στο σημείο $w = -\frac{3}{4}$.

$$\int_{-1}^0 |4w+3|\,dw = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} |4w+3|\,dw + \int_{-\frac{3}{4}}^0 |4w+3|\,dw$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα ισχύει $-1 \leq w \leq -\frac{3}{4}$, οπότε έχουμε $|4w+3| = -(4w+3)$.

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ισχύει $-\frac{3}{4} \leq w \leq 0$, οπότε έχουμε $|4w+3| = 4w+3$.

$$\int_{-1}^{0} |4w+3|\,dw = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} -(4w+3)\,dw + \int_{-\frac{3}{4}}^{0} (4w+3)\,dw$$
$$= \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} (-4w-3)\,dw + \int_{-\frac{3}{4}}^{0} (4w+3)\,dw$$
$$= \left(-2w^2-3w\right)\Big|_{-1}^{-\frac{3}{4}} + \left(2w^2+3w\right)\Big|_{-\frac{3}{4}}^{0} = \tfrac{5}{4}$$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int_0^1 3\left(4x+x^4\right)\left(10x^2+x^5-2\right)^6\,dx$ ii. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\cos(2t)}{\sqrt{9-5\sin(2t)}}\,dt$ iii. $\displaystyle\int_{\pi}^{0} \sin(z)\cos^3(z)\,dz$

iv. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{w}\,e^{1-\sqrt{w^3}}\,dw$ v. $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \sqrt[3]{5-2y}+\frac{7}{5-2y}\,dy$ vi. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3+e^{\frac{1}{4}x}\,dx$

Λύση:

i. Θέτω αντικατάσταση,
$$u = 10x^2+x^5-2$$

$$du = (20x+5x^4)\,dx = 5(4x+x^4)\,dx$$
$$\rightarrow (4x+x^4)\,dx = \frac{1}{5}du$$

Υπολογίζω νέα όρια,
$$x=0: \quad u=-2$$
$$x=1: \quad u=9$$

$$\int_0^1 3\left(4x+x^4\right)\left(10x^2+x^5-2\right)^6 dx = \frac{3}{5}\int_{-2}^{9} u^6\,du$$

Επομένως,

$$\int_0^1 3\left(4x+x^4\right)\left(10x^2+x^5-2\right)^6 dx = \frac{3}{35}u^7\Bigg|_{-2}^{9} = \frac{3}{35}\left(4782969-(-128)\right) = \frac{14349291}{35}$$

ii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = 9 - 5\sin(2t)$$

$$du = -10\cos(2t)\,dt$$
$$\rightarrow \cos(2t)\,dt = -\frac{1}{10}du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$t = 0 \ : \ u = 9 \qquad t = \frac{\pi}{4} \ : \ u = 4$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\cos(2t)}{\sqrt{9 - 5\sin(2t)}}dt = -\frac{8}{10}\int_9^4 u^{-\frac{1}{2}}du$$

Επομένως,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\cos(2t)}{\sqrt{9 - 5\sin(2t)}}dt = -\frac{8}{5}u^{\frac{1}{2}}\Big|_9^4 = -\frac{16}{5} - \left(-\frac{24}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

iii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \cos(z)$$
$$du = -\sin(z)\,dz$$
$$\rightarrow \sin(z)\,dz = -du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$z = \pi : u = -1 \qquad z = 0 : u = 1$$

$$\int_\pi^0 \sin(z)\cos^3(z)\,dz = -\int_{-1}^1 u^3\,du$$

Επομένως,

$$\int_\pi^0 \sin(z)\cos^3(z)\,dz = -\frac{1}{4}u^4\Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

iv. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = 1 - w^{\frac{3}{2}}$$

$$du = -\frac{3}{2} w^{\frac{1}{2}} dw \quad \to \quad \sqrt{w}\, dw = -\frac{2}{3} du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$w = 1 : u = 0 \qquad w = 4 : u = -7$$

$$\int_1^4 \sqrt{w}\, e^{1-\sqrt{w^3}}\, dw = -\frac{2}{3} \int_0^{-7} e^u du$$

Επομένως,

$$\int_1^4 \sqrt{w}\, e^{1-\sqrt{w^3}}\, dw = -\frac{2}{3} e^u \Big|_0^{-7} = -\frac{2}{3} e^{-7} - \left(-\frac{2}{3} e^0 \right) = \frac{2}{3} \left(1 - e^{-7} \right) \frac{2}{3} \left(1 - e^{-7} \right)$$

v. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = 5 - 2y$$

$$du = -2\, dy \quad \to \quad = -\frac{1}{2} du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$y = -4 : u = 13 \qquad y = -1 : u = 7$$

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt[3]{5-2y} + \frac{7}{5-2y}\, dy = -\frac{1}{2} \int_{13}^{7} u^{1/3} + \frac{7}{u}\, du$$

Επομένως,

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt[3]{5-2y} + \frac{7}{5-2y}\, dy = \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} u^{4/3} + 7 \ln |u| \right] \right) \Bigg|_{13}^{7}$$

$$= -\frac{3}{8} 7^{4/3} - \frac{7}{2} \ln |7| - \left(-\frac{3}{8} 13^{4/3} - \frac{7}{2} \ln |13| \right) = \frac{3}{8} \left(13^{4/3} - 7^{4/3} \right) + \frac{7}{2} \left(\ln(13) - \ln(7) \right)$$

vi.

$$\int_{-1}^{2} x^3 + e^{\frac{1}{4}x} dx = \int_{-1}^{2} x^3 dx + \int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{4}x} dx$$

Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \frac{1}{4}x$$

$$du = \frac{1}{4}dx \quad \to \quad dx = 4\,du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$x = -1 : u = -\frac{1}{4} \qquad x = 2 : u = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{2} x^3 + e^{\frac{1}{4}x} dx = \int_{-1}^{2} x^3 dx + 4\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} e^u du$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x^3 + e^{\frac{1}{4}x} dx &= \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{2} + 4\; e^u\big|_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(4 - \frac{1}{4}\right) + \left(4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{15}{4} + 4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

10. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$.

i. Αν η f είναι άρτια στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

ii. Αν η f είναι περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

Λύση:

i. Αφού η f συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, έχουμε:

$$f(-t) = f(t), \quad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]$$

Είναι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

Για το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx$$

κάνουμε την αντικατάσταση $t = -x$. Έχουμε $dx = -dt$ και για $x = -\alpha \implies t = \alpha$, ενώ για $x = 0 \implies t = 0$. Έτσι:

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{0} f(-t)(-dt) \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(-t)\,dt = \int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt \quad (f \text{ άρτια στο } [-\alpha, \alpha]) \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx &= \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

ii. Αφού η f συνεχής και περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$, έχουμε:

$$f(-t) = -f(t), \quad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]$$

Είναι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

Για το ολοκλήρωμα
$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx$$
κάνουμε την αντικατάσταση $t = -x$. Έχουμε $dx = -dt$ και για $x = -\alpha \implies t = \alpha$, ενώ για $x = 0 \implies t = 0$. Έτσι:

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{0} f(-t)(-dt)\\ &= \int_{0}^{\alpha} f(-t)\,dt = -\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt \quad (f \text{ περιττή στο } [-\alpha,\alpha])\\ &= -\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

11. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(\alpha + \beta - x) = f(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Να αποδείξετε ότι:
$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

Λύση:

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \alpha + \beta - x \quad \Rightarrow \quad dx = -du.$$

Για $x = \alpha \implies u = \beta$, και για $x = \beta \implies u = \alpha$.

Άρα
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} \big(\alpha + \beta - u\big) f(\alpha + \beta - u)(-du).$$

Αντιστρέφοντας τα όρια:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - u) f(\alpha + \beta - u)\, du.$$

Με την ιδιότητα συμμετρίας $f(\alpha + \beta - u) = f(u)$, έχουμε:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - u) f(u)\, du.$$

Συνεπώς,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - x) f(x)\, dx.$$

Προσθέτοντας τις δύο εκφράσεις:

$$2I = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(x + (\alpha + \beta - x)\Big) f(x)\, dx.$$

Δηλαδή:

$$2I = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta) f(x)\, dx.$$

Άρα:

$$I = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx.$$

12. Δίνεται ότι:

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x\, dx, \quad \nu \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

i. Να υπολογίσετε τα I_0 και I_1.

ii. Να δείξετε ότι $I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}, \quad \forall \quad \nu \geq 2$.

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$$

Λύση:

i. Υπολογισμός I_0 και I_1:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos(\tfrac{\pi}{2})) - (-\cos(0)) = 1$$

Άρα:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$$

ii. Σχέση αναδρομής:

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x\, dx$$

Θέτουμε:

$$u = \sin^{\nu-1} x, \quad dv = \sin x\, dx$$
$$du = (\nu-1)\sin^{\nu-2} x \cos x\, dx, \quad v = -\cos x$$

Οπότε:

$$I_\nu = \left[-\sin^{\nu-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-2} x \cos^2 x\, dx$$

Το οριακό μέλος μηδενίζεται, και με $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ έχουμε:

$$I_\nu = (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-2} x\, dx - (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x\, dx$$

$$I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2} - (\nu-1)I_\nu$$
$$I_\nu + (\nu-1)I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2}$$
$$\nu I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2}$$
$$I_\nu = \tfrac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$$

iii. Υπολογισμός $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$:

$$I_7 = \frac{6}{7}I_5, \quad I_5 = \frac{4}{5}I_3, \quad I_3 = \frac{2}{3}I_1, \quad I_1 = 1$$

$$I_3 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15}, \quad I_7 = \frac{6}{7}\cdot\frac{8}{15} = \frac{16}{35}$$

Άρα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx = \frac{16}{35}$$

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

i. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(x) + f(\alpha+\beta-x)]\,dx$$

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

a.

$$\int_0^1 \frac{2^x}{2^x + 2^{1-x}}\,dx$$

b.

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}\,dx$$

Λύση:

i. Έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Θέτουμε $t = \alpha+\beta-x \quad\Rightarrow\quad dt = -dx$. Όταν $x = \alpha \Rightarrow t = \beta$, και όταν $x = \beta \Rightarrow t = \alpha$. Άρα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\alpha+\beta-t)(-dt) = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-t)\,dt$$

Μετονομάζοντας ξανά τη μεταβλητή ολοκλήρωσης $t \mapsto x$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \big[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\big]\,dx$$

Άρα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\big]\,dx$$

ii. Υπολογισμός ολοκληρωμάτων.

a. Έστω:

$$I = \int_0^1 \frac{2^x}{2^x+2^{1-x}}\,dx$$

Με συμμετρία:

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x+2^{1-x}}, \quad f(1-x) = \frac{2^{1-x}}{2^{1-x}+2^x}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x)+f(1-x) = 1$$

Άρα:

$$2I = \int_0^1 \big[f(x)+f(1-x)\big]dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

$$I = \tfrac{1}{2}$$

b. Έστω:

$$J = \int_1^3 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}\,dx$$

Ορίζουμε:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}$$

Μετασχηματισμός $x \mapsto 4 - x$, τότε:

$$f(4-x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln(4-x) + \ln x}$$

Άρα:

$$f(x) + f(4-x) = 1$$

Συνεπώς:

$$2J = \int_1^3 \big[f(x) + f(4-x)\big] dx = \int_1^3 1\, dx = 2$$
$$J = 1$$

14. Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x}\, dx, \quad \nu \in \mathbb{N}_0$$

i. Να αποδείξετε ότι:

$$I_\nu = -\frac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1)I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x^4 e^{-x}\, dx$$

Λύση:

i. Έχουμε:

$$I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x}\, dx$$

Κάνουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση με:

$$u = x^\nu \;\Rightarrow\; du = \nu x^{\nu-1} dx, \quad dv = e^{-x} dx \;\Rightarrow\; v = -e^{-x}$$

Άρα:

$$I_\nu = \left[-x^\nu e^{-x}\right]_0^1 + \nu \int_0^1 x^{\nu-1}e^{-x}dx$$
$$I_\nu = -\frac{1}{e} + \nu I_{\nu-1}$$

Ξανακάνουμε μερική ολοκλήρωση στο $I_{\nu-1}$:

$$I_{\nu-1} = \int_0^1 x^{\nu-1}e^{-x}dx$$

Θέτουμε:

$$u = x^{\nu-1} \quad \Rightarrow \quad du = (\nu-1)x^{\nu-2}dx, \quad dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$$
$$I_{\nu-1} = \left[-x^{\nu-1}e^{-x}\right]_0^1 + (\nu-1)\int_0^1 x^{\nu-2}e^{-x}dx$$
$$I_{\nu-1} = -\frac{1}{e} + (\nu-1)I_{\nu-2}$$

Επιστρέφουμε στο I_ν:

$$I_\nu = -\frac{1}{e} + \nu\left(-\frac{1}{e} + (\nu-1)I_{\nu-2}\right)$$
$$I_\nu = -\frac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1)I_{\nu-2}$$
$$I_\nu = -\tfrac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1)I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2$$

ii. Υπολογισμός του I_4:

Από τον τύπο:

$$I_4 = -\frac{5}{e} + 4 \cdot 3I_2$$

Υπολογίζουμε πρώτα I_2:

$$I_2 = -\frac{3}{e} + 2 \cdot 1I_0$$

και

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

Άρα:

$$I_2 = -\frac{3}{e} + 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{5}{e}$$

Τότε:

$$I_4 = -\frac{5}{e} + 12\left(2 - \frac{5}{e}\right) = -\frac{5}{e} + 24 - \frac{60}{e}$$

$$I_4 = 24 - \frac{65}{e}$$

Επομένως,

$$\int_0^1 x^4 e^{-x} dx = 24 - \tfrac{65}{e}$$

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη της τιμή, αντίστοιχα, στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq M(\beta - \alpha)$$

Λύση:

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ορίζουμε:

$$m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x), \quad M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$$

Λόγω της ορισμού του m και M, έχουμε:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη:

$$\int_\alpha^\beta m\, dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \int_\alpha^\beta M\, dx$$

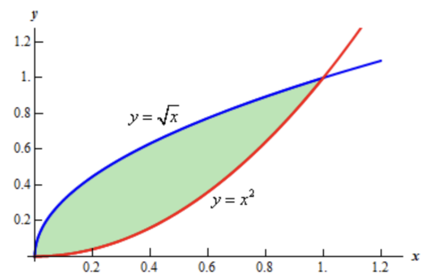
Αφού m και M είναι σταθερές:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq M(\beta - \alpha)$$

Σημείωση: Η ανισότητα προκύπτει άμεσα από τη συνέχεια της συνάρτησης και τον ορισμό των ελάχιστων και μέγιστων τιμών.

16. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$.

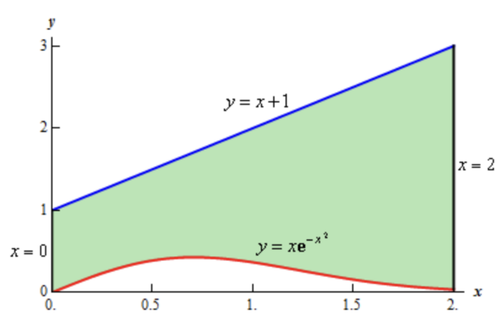
Λύση:



$$A = \int_a^b (\text{upper function} - \text{lower function})\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx$$
$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

17. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = xe^{-x^2}$, $y = x + 1$, $x = 2$ και τον y-άξονα.

Λύση:



$$A = \int_a^b (\text{upper function} - \text{lower function})\, dx = \int_0^2 x + 1 - xe^{-x^2}\, dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{7}{2} + \frac{e^{-4}}{2} = 3.5092$$

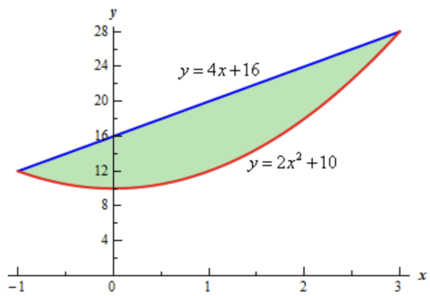
18. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2x^2 + 10$ και την ευθεία $y = 4x + 16$.

Λύση:

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής θέτοντας τις δύο εξισώσεις ίσες.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10 &= 4x + 16 \\ 2x^2 - 4x - 6 &= 0 \\ 2(x+1)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

Οι δύο καμπύλες θα τέμνονται στα $x = -1$ και $x = 3$. Μπορούμε να βρούμε τις τιμές του y που αντιστοιχούν σε αυτά τα x αντικαθιστώντας τα στις εξισώσεις. Οι συντεταγμένες των δύο σημείων τομής στο γράφημα είναι $(-1,\, 12)$ και $(3,\, 28)$.



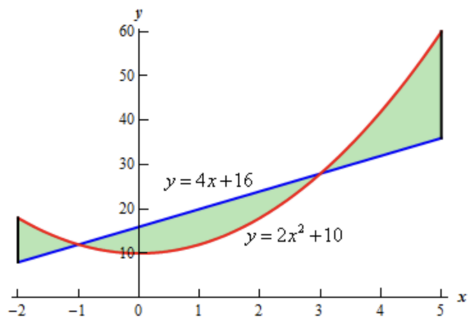
$$\begin{aligned} A &= \int_a^b (\text{upper function} - \text{lower function})\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} 4x + 16 - (2x^2 + 10)\, dx = \int_{-1}^{3} -2x^2 + 4x + 6\, dx \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right) \Bigg|_{-1}^{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

19. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2x^2 + 10$ και τις ευθείες $y = 4x + 16$, $x = -2$ και $x = 5$.

Λύση:

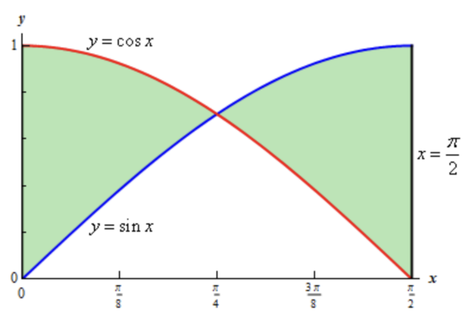
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} 2x^2 + 10 - (4x + 16)\, dx + \int_{-1}^{3} 4x + 16 - (2x^2 + 10)\, dx + \int_{3}^{5} 2x^2 + 10 - (4x + 16)\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 2x^2 - 4x - 6\, dx + \int_{-1}^{3} -2x^2 + 4x + 6\, dx + \int_{3}^{5} 2x^2 - 4x - 6\, dx \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3} + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right)\Bigg|_{3}^{5}$$
$$= \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \frac{142}{3}$$



20. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, και τον y-άξονα.

Λύση:



Το σημείο τομής είναι το $x = \frac{\pi}{4}$, όπου $\sin x = \cos x$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x - \cos x \, dx \\ &= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} - 1) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 = 0.828427 \end{aligned}$$

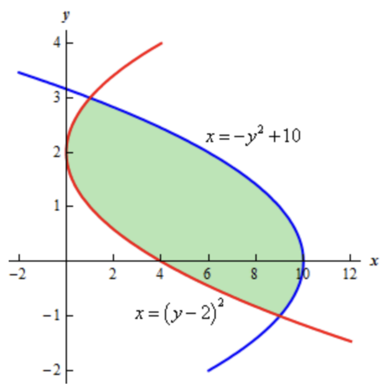
21. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις $x = -y^2 + 10$ και $x = (y-2)^2$.

Λύση:

Αρχικά, θα χρειαστούμε τα σημεία τομής.

$$\begin{aligned}
-y^2 + 10 &= (y-2)^2 \\
-y^2 + 10 &= y^2 - 4y + 4 \\
0 &= 2y^2 - 4y - 6 \\
0 &= 2(y+1)(y-3)
\end{aligned}$$

Τα σημεία τομής είναι $y = -1$ και $y = 3$.



$$\begin{aligned}
A &= \int_c^d (\text{right function} - \text{left function})\, dy \\
&= \int_{-1}^{3} -y^2 + 10 - (y-2)^2\, dy = \int_{-1}^{3} -2y^2 + 4y + 6\, dy \\
&= \left(-\frac{2}{3}y^3 + 2y^2 + 6y \right) \Bigg|_{-1}^{3} = \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Υπενθύμιση: Θυμηθείτε ότι υπάρχει και ένας άλλος τύπος για τον προσδιορισμό του εμβαδού. Είναι,

$$A = \int_c^d (\text{δεξιά συνάρτηση} - \text{αριστερή συνάρτηση})\, dy, \quad c \le y \le d$$

και στη δική μας περίπτωση πράγματι έχουμε μία συνάρτηση που είναι πάντα στα αριστερά και μία που είναι πάντα στα δεξιά. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση αυτή είναι σίγουρα η κατάλληλη μέθοδος. Σημειώστε ότι θα χρειαστεί να ξαναγράψουμε την εξίσωση της ευθείας έτσι ώστε να είναι στη μορφή $x = f(y)$.

22. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$, και $y = x - 1$.

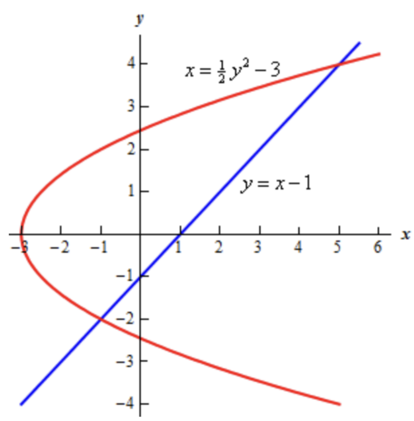
Λύση:

Ολοκλήρωση ως προς x:

Στην περίπτωση αυτή, θα βρούμε τα σημεία τομής λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς x.

$$\begin{aligned} y + 1 &= \frac{1}{2}y^2 - 3 \\ 2y + 2 &= y^2 - 6 \\ 0 &= y^2 - 2y - 8 \\ 0 &= (y-4)(y+2) \end{aligned}$$

Έτσι, φαίνεται ότι οι δύο καμπύλες θα τέμνονται στα $y = -2$ και $y = 4$. Αν χρειαζόμαστε τις πλήρεις συντεταγμένες, θα είναι: $(-1, -2)$ και $(5, 4)$.

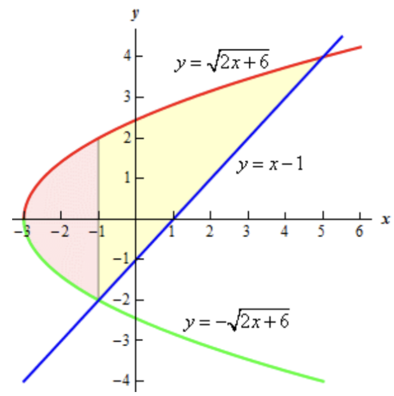


Τώρα, μπορούμε να έχουμε ένα σοβαρό πρόβλημα σε αυτό το σημείο αν δεν είμαστε προσεκτικοί. Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε μία άνω συνάρτηση και μία κάτω συνάρτηση. Για να το κάνουμε αυτό εδώ, παρατηρήστε ότι υπάρχουν ουσιαστικά δύο τμήματα της περιοχής που θα έχουν διαφορετικές κάτω συναρτήσεις. Στο διάστημα $[-3, -1]$ η παραβολή είναι στην πραγματικότητα τόσο η άνω όσο και η κάτω συνάρτηση.

Για να χρησιμοποιήσουμε την ολοκλήρωση ως προς x, πρέπει να λύσουμε την παραβολή ως προς y. Παίρνουμε,

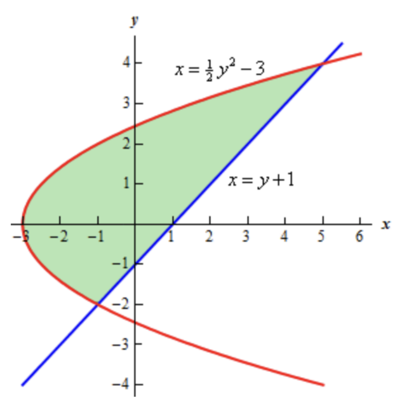
$$y = \pm\sqrt{2x + 6}$$

όπου το «+» δίνει το άνω τμήμα της παραβολής και το «−» δίνει το κάτω τμήμα.



$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})\,dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6} - (x-1)\,dx \\
&= \int_{-3}^{-1} 2\sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6} - x + 1\,dx \\
&= \int_{-3}^{-1} 2\sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5} -x + 1\,dx \\
&= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^4 + \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_4^{16} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{5} = 18
\end{aligned}
$$

Ολοκλήρωση ως προς y:



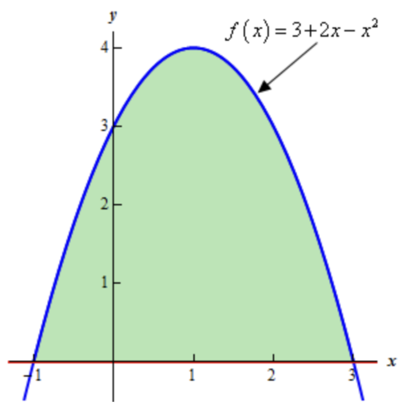
$$
\begin{aligned}
A &= \int_c^d (\text{right function} - \text{left function})\;dy \\
&= \int_{-2}^{4} (y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)\,dy = \int_{-2}^{4} -\frac{1}{2}y^2 + y + 4\,dy \\
&= \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 4y\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 18
\end{aligned}
$$

23. Να βρείτε το εμβαδόν κάτω από τη $f(x) = 3 + 2x - x^2$ και πάνω από τον άξονα x.

Λύση:

$$3 + 2x - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad -(x+1)(x-3) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1,\ x = 3$$

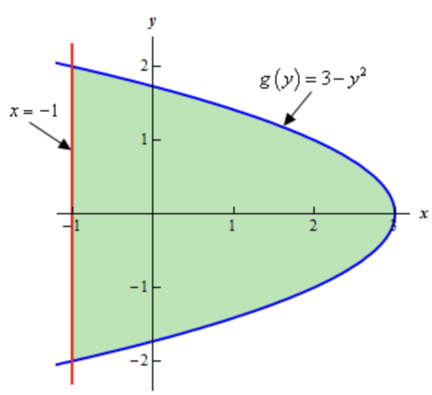
$$A = \int_{-1}^{3} 3 + 2x - x^2 \, dx = \left(3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$



24. Να βρείτε το εμβαδόν στα αριστερά της $g(y) = 3 - y^2$ και δεξιά της $x = -1$.

Λύση:

$$3 - y^2 = -1 \implies y^2 = 4 \implies y = -2,\ y = 2$$



$$A = \int_{-2}^{2} 3 - y^2 - (-1)\, dy = \int_{-2}^{2} 4 - y^2 \, dy = \left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

25. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις πιο κάτω καμπύλες.

i. $y = x^2 + 2,\ y = \sin(x),\ x = -1$ και $x = 2$

ii. $y = \dfrac{8}{x},\ y = 2x$ και $x = 4$

iii. $x = 3 + y^2,\ x = 2 - y^2,\ y = 1$ και $y = -2$

iv. $x = y^2 - y - 6$ και $x = 2y + 4$

v. $y = x\sqrt{x^2+1},\ y = e^{-\frac{1}{2}x},\ x = -3$ και ο άξονας y

vi. $y = 4x + 3,\ y = 6 - x - 2x^2,\ x = -4$ και $x = 2$

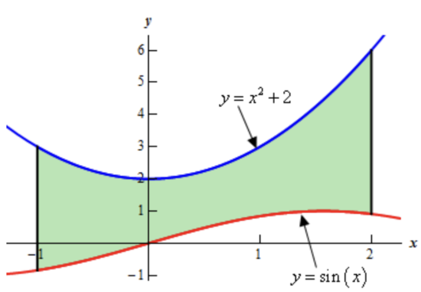
vii. $y = \dfrac{1}{x+2},\ y = (x+2)^2,\ x = -\dfrac{3}{2},\ x = 1$

viii. $x = y^2 + 1,\ x = 5,\ y = -3$ και $y = 3$

ix. $x = e^{1+2y},\ x = e^{1-y},\ y = -2$ και $y = 1$

Λύση:

i.

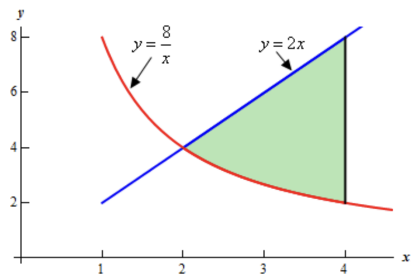


$$A = \int_{-1}^{2} x^2 + 2 - \sin(x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x + \cos(x)\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 9 + \cos(2) - \cos(1) = 8.04355$$

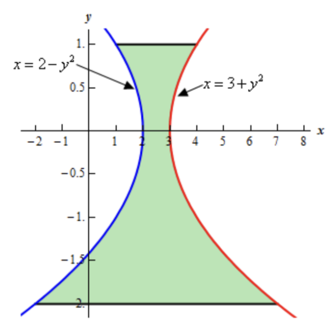
ii.

$$\frac{8}{x} = 2x \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = -2,\ x = 2$$

$$A = \int_{2}^{4} 2x - \frac{8}{x}\,dx = \left(x^2 - 8\ln|x|\right)\Big|_{2}^{4} = 12 - 8\ln(4) + 8\ln(2) = 6.4548$$



iii.

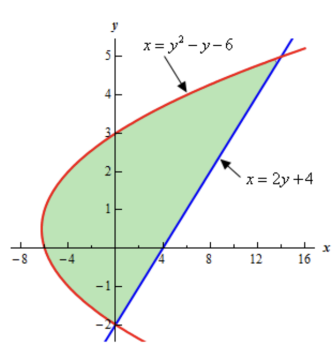


$$A = \int_{-2}^{1} 3 + y^2 - (2 - y^2)\, dy = \int_{-2}^{1} 1 + 2y^2\, dy = \left(y + \frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 9$$

iv.

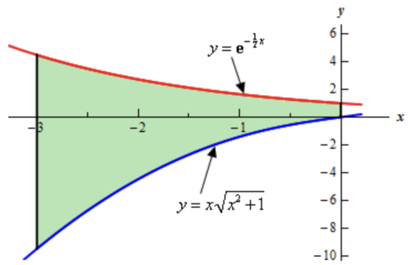
$$y^2 - y - 6 = 2y + 4 \quad \rightarrow \quad y^2 - 3y - 10 = (y-5)(y+2) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2,\ y = 5$$

$$A = \int_{-2}^{5} 2y + 4 - (y^2 - y - 6)\, dy = \int_{-2}^{5} 10 + 3y - y^2\, dy = \left(10y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{5} = \frac{343}{6}$$



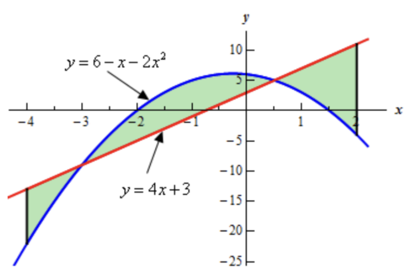
v.

$$A = \int_{-3}^{0} e^{-\frac{1}{2}x} - x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left(-2e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = -\frac{7}{3} + 2e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}10^{\frac{3}{2}} = 17.17097$$



vi. Τα σημεία τομής είναι εκεί όπου οι δύο καμπύλες τέμνονται, οπότε το μόνο που χρειάζεται είναι να εξισώσουμε τις δύο εξισώσεις και να λύσουμε. Αυτό δίνει,

$$6 - x - 2x^2 = 4x + 3 \quad \to \quad 2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3) = 0 \quad \to \quad x = -3,\ x = \frac{1}{2}$$

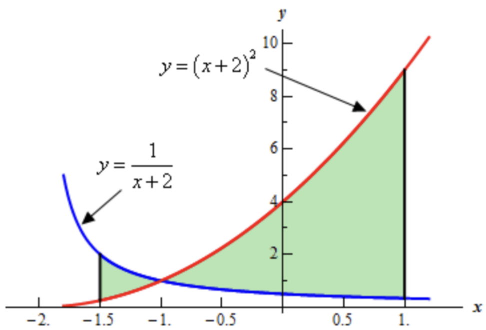


Παρατηρούμε ότι στα διαστήματα, ($-4 \le x \le -3$, $-3 \le x \le \frac{1}{2}$, και $\frac{1}{2} \le x \le 2$) οι άνω/κάτω συναρτήσεις είναι διαφορετικές.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{-3} 4x + 3 - (6 - x - 2x^2)\,dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} 6 - x - 2x^2 - (4x+3)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} 4x + 3 - (6 - x - 2x^2)\,dx \\
&= \int_{-4}^{-3} 2x^2 + 5x - 3\,dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} 3 - 5x - 2x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} 2x^2 + 5x - 3\,dx \\
&= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x\right)\Bigg|_{-4}^{-3} + \left(3x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-3}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} \\
&= \frac{25}{6} + \frac{343}{24} + \frac{81}{8} = \frac{343}{12}
\end{aligned}$$

vii.

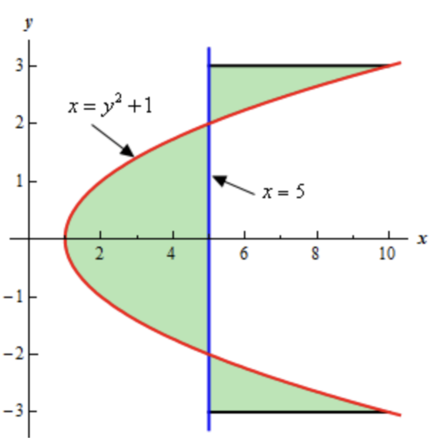
$$\frac{1}{x+2} = (x+2)^2 \quad \to \quad (x+2)^3 = 1 \quad \to \quad x+2 = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \to \quad x = -1$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{x+2} - (x+2)^2\,dx + \int_{-1}^{1} (x+2)^2 - \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \left(\ln|x+2| - \frac{1}{3}(x+2)^3\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \left(\frac{1}{3}(x+2)^3 - \ln|x+2|\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \left[-\frac{7}{24} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{26}{3} - \ln(3)\right] = \frac{67}{8} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(3) \end{aligned}$$

viii.

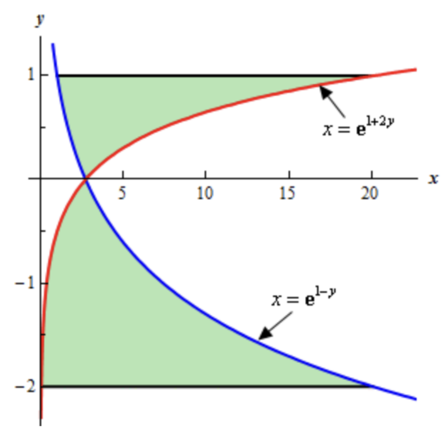
$$y^2 + 1 = 5 \quad \to \quad y^2 = 4 \quad \to \quad y = -2,\ y = 2$$



$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-2} y^2+1-5\,dy + \int_{-2}^{2} 5-(y^2+1)\,dy + \int_{2}^{3} y^2+1-5\,dy \\
&= \int_{-3}^{-2} y^2-4\,dy + \int_{-2}^{2} 4-y^2\,dy + \int_{2}^{3} y^2-4\,dy \\
&= \left(\frac{1}{3}y^3-4y\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \left(4y-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} + \left(\frac{1}{3}y^3-4y\right)\Bigg|_{2}^{3} \\
&= \frac{7}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{46}{3}
\end{aligned}
$$

ix.

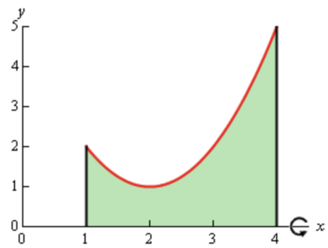
$$
\mathbf{e}^{1+2y}=\mathbf{e}^{1-y} \quad \to \quad \frac{\mathbf{e}^{1+2y}}{\mathbf{e}^{1-y}}=1 \quad \to \quad \mathbf{e}^{3y}=1 \quad \to \quad y=0
$$

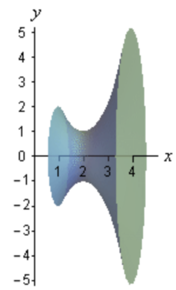


$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} \mathbf{e}^{1-y}-\mathbf{e}^{1+2y}\,dy + \int_{0}^{1} \mathbf{e}^{1+2y}-\mathbf{e}^{1-y}\,dy \\
&= \left(-\mathbf{e}^{1-y}-\frac{1}{2}\mathbf{e}^{1+2y}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}^{1+2y}+\mathbf{e}^{1-y}\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \left[\mathbf{e}^{3}+\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-3}-\frac{3}{2}\mathbf{e}\right] + \left[1+\frac{1}{2}\mathbf{e}^{3}-\frac{3}{2}\mathbf{e}\right] = 22.9983
\end{aligned}
$$

26. Να υπολογίσετε τον όγκο που δημιουργείται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 4x + 5$, τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Λύση:





Το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής είναι,

$$A(x) = \pi(x^2 - 4x + 5)^2 = \pi\left(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25\right)$$

Από αριστερά προς τα δεξιά, η πρώτη τομή γίνεται στο $x = 1$ και η τελευταία στο $x = 4$. Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης. Ο όγκος του στερεού δίνεται τότε από:

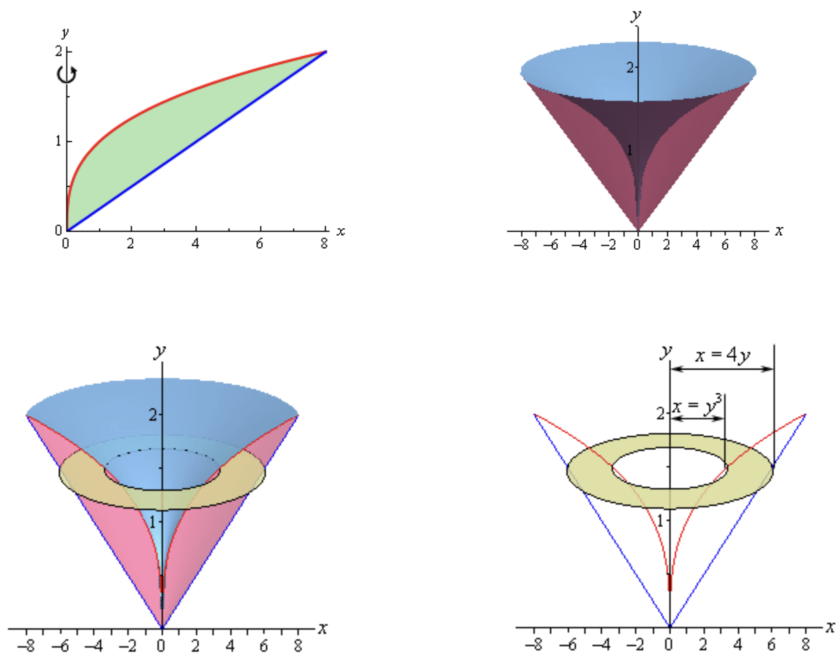
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_1^4 x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25\,dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{26}{3}x^3 - 20x^2 + 25x\right)\Bigg|_1^4$$
$$= \frac{78\pi}{5}$$

27. Να υπολογίσετε τον όγκο που δημιουργείται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt[3]{x}$, και $y = \frac{x}{4}$.

Λύση:

Η εγκάρσια τομή, κάθετα ως προς τον άξονα περιστροφής θα είναι ένας δακτύλιος και θα είναι οριζόντια σε κάποιο y. Αυτό σημαίνει ότι η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του δαχτυλίου θα είναι τιμές του x και έτσι πρέπει να ξαναγράψουμε τις συναρτήσεις στη μορφή $x = f(y)$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x} & &\Longrightarrow & x &= y^3 \\ y &= \frac{x}{4} & &\Longrightarrow & x &= 4y \end{aligned}$$



Το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής είναι τότε,

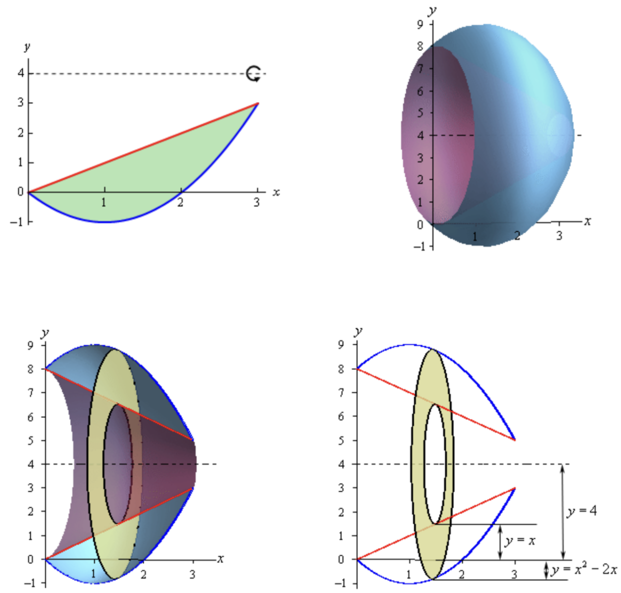
$$A(y) = \pi \left((4y)^2 - (y^3)^2\right) = \pi \left(16y^2 - y^6\right)$$

Ξεκινώντας από το κατώτερο σημείο του στερεού προς το ανώτερο παρατηρούμε ότι η πρώτη τομή γίνεται στο $y = 0$ και η τελευταία τομή θα γίνει στο $y = 2$. Αυτά θα είναι τα όρια ολοκλήρωσης. Ο όγκος είναι τότε,

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d A(y)\,dy \\ &= \pi \int_0^2 16y^2 - y^6\,dy \\ &= \pi \left(\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7\right)\Bigg|_0^2 = \frac{512\pi}{21} \end{aligned}$$

28. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της περιοχής που περικλείεται από τις $y = x^2 - 2x$ και $y = x$ ως προς την ευθεία $y = 4$.

Λύση:



Τώρα, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί εδώ προσδιορίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική ακτίνα, καθώς δεν υπάρχει συμμετρία ως προς τους άξονες.

Η εσωτερική ακτίνα θα είναι,

$$\text{εσωτερική ακτίνα} = 4 - x$$

Η εξωτερική ακτίνα είναι,

$$\text{εξωτερική ακτίνα} = 4 - \left(x^2 - 2x\right) = -x^2 + 2x + 4$$

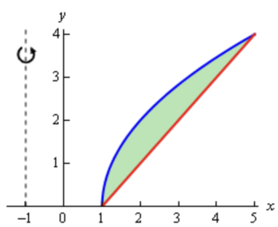
Το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής σε αυτή την περίπτωση είναι

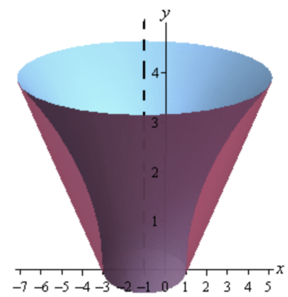
$$A(x) = \pi\left(\left(-x^2 + 2x + 4\right)^2 - (4 - x)^2\right) = \pi\left(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x\right)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx = \pi\int_0^3 x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x\,dx \\ &= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 12x^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{153\pi}{5} \end{aligned}$$

29. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 2\sqrt{x-1}$ και $y = x-1$ ως προς την ευθεία $x = -1$.

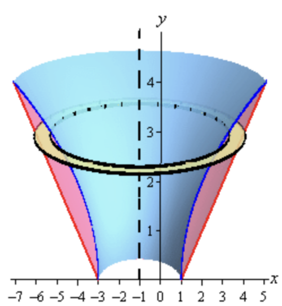
Λύση:

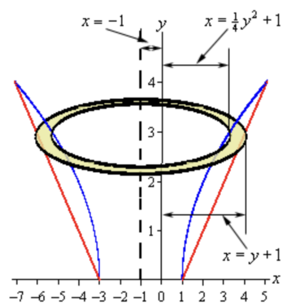




Επειδή περιστρέφουμε γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα, το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής θα είναι συνάρτηση του y. Αυτό σημαίνει επίσης ότι πρέπει να ξαναγράψουμε τις συναρτήσεις ως προς το y.

$$y = 2\sqrt{x-1} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{y^2}{4} + 1$$
$$y = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = y + 1$$





Εξωτερική ακτίνα: $y + 1 + 1 = y + 2$

Εσωτερική ακτίνα: $\dfrac{y^2}{4} + 1 + 1 = \dfrac{y^2}{4} + 2$

$$A(y) = \pi\left((y+2)^2 - \left(\frac{y^2}{4} + 2\right)^2\right) = \pi\left(4y - \frac{y^4}{16}\right)$$

Ο πρώτος δακτύλιος εμφανίζεται για $y = 0$ και ο τελευταίος για $y = 4$, άρα αυτά θα είναι τα όρια ολοκλήρωσης.

Ο όγκος είναι,

$$V = \int_c^d A(y)\,dy = \pi \int_0^4 \left(4y - \frac{y^4}{16}\right) dy$$
$$= \pi \left(2y^2 - \frac{1}{80}y^5\right)\Bigg|_0^4 = \frac{96\pi}{5}$$

30. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που ορίζετε στις πιο κάτω περιπτώσεις.

i. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = \sqrt{x}$, $y = 3$ και τον άξονα y ως προς τον άξονα y.

ii. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 7 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$ και τον άξονα x ως προς τον άξονα x.

iii. Την περιοχή που περικλείεται από τις $x = y^2 - 6y + 10$ και $x = 5$ ως προς τον άξονα y.

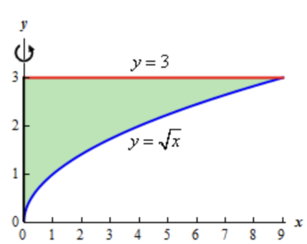
iv. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 2x^2$ και $y = x^3$ ως προς τον άξονα x.

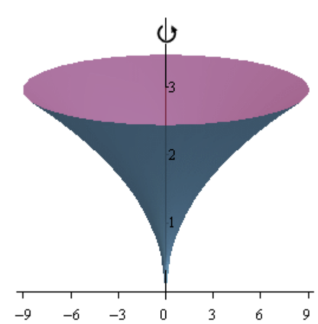
v. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 6e^{-2x}$ και $y = 6 + 4x - 2x^2$ για $x = 0$ και $x = 1$ ως προς την ευθεία $y = -2$.

vi. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 10 - 6x + x^2$, $y = -10 + 6x - x^2$, $x = 1$ και $x = 5$ ως προς την ευθεία $y = 8$.

Λύση:

i.





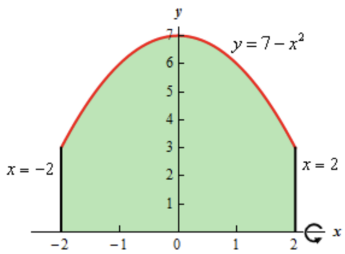
Το εμβαδόν του δίσκου είναι,

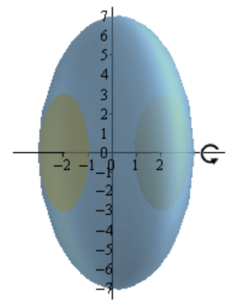
$$A(y) = \pi(\text{Ακτίνα})^2 = \pi(y^2)^2 = \pi y^4 \quad 0 \le y \le 3$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$V = \int_0^3 \pi y^4 \, dy = \frac{1}{5}\pi y^5 \bigg|_0^3 = \frac{243}{5}\pi$$

ii.





Όπως φαίνεται από το σχήμα, η ακτίνα του δίσκου είναι η απόσταση από τον άξονα x έως την καμπύλη που ορίζει το όριο του στερεού. Με άλλα λόγια,

$$\text{Ακτίνα} = 7 - x^2$$

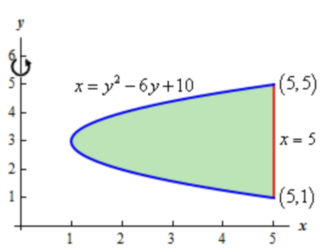
Το εμβαδόν του δίσκου είναι τότε,

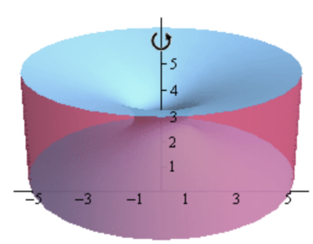
$$A(x) = \pi(\text{Ακτίνα})^2 = \pi(7 - x^2)^2 = \pi(49 - 14x^2 + x^4)$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$V = \int_{-2}^{2} \pi(49 - 14x^2 + x^4)dx = \pi\left(49x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\bigg|_{-2}^{2} = \frac{2012}{15}\pi$$

iii.





$$\begin{aligned}
&y^2 - 6y + 10 = 5 \\
&y^2 - 6y + 5 = 0 \\
&(y-5)(y-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1, \; y = 5 \qquad \Rightarrow \qquad (5,1) \;\; \& \;\; (5,5)
\end{aligned}$$

$$\text{Εσωτερική ακτίνα} = y^2 - 6y + 10 \qquad \text{Εξωτερική ακτίνα} = 5$$

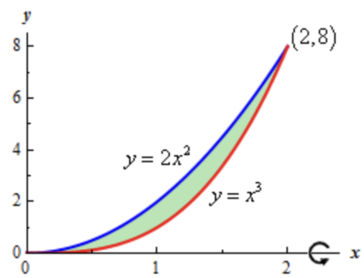
Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

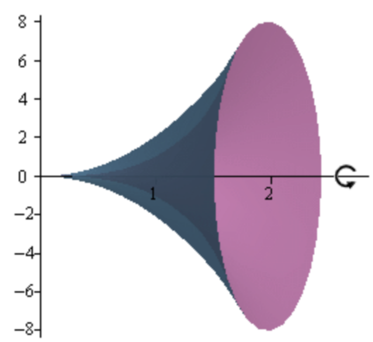
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2\right] \\ &= \pi\left[5^2 - (y^2 - 6y + 10)^2\right] = \pi\left(-75 + 120y - 56y^2 + 12y^3 - y^4\right) \end{aligned}$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 \pi\left(-75 + 120y - 56y^2 + 12y^3 - y^4\right)\,dy \\ &= \pi\left(-75y + 60y^2 - \frac{56}{3}y^3 + 3y^4 - \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_1^5 = \frac{1088}{15}\pi \end{aligned}$$

iv.





$$\begin{aligned} &x^3 = 2x^2 \\ &x^3 - 2x^2 = 0 \\ &x^2(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ x = 2 \quad \Rightarrow \quad (0,0)\ \&\ (2,8) \end{aligned}$$

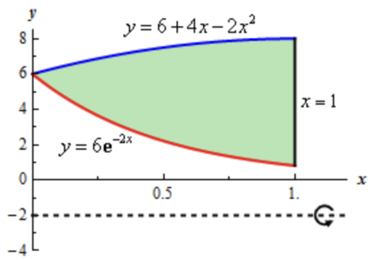
$$\text{Εσωτερική ακτίνα} = x^3 \qquad \text{Εξωτερική ακτίνα} = 2x^2$$

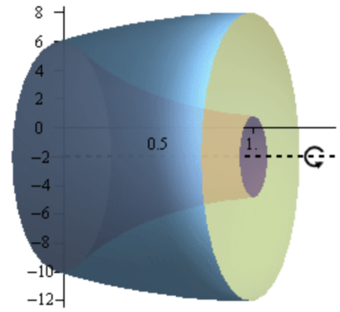
Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2\right] \\ &= \pi\left[(2x^2)^2 - (x^3)^2\right] = \pi\left(4x^4 - x^6\right) \end{aligned}$$

$$V = \int_0^2 \pi\left(4x^4 - x^6\right)dx = \pi\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{35}\pi$$

v.





$$\text{Εσωτερική ακτίνα} = 2 + 6e^{-2x} \qquad \text{Εξωτερική ακτίνα} = 2 + 6 + 4x - 2x^2 = 8 + 4x - 2x^2$$

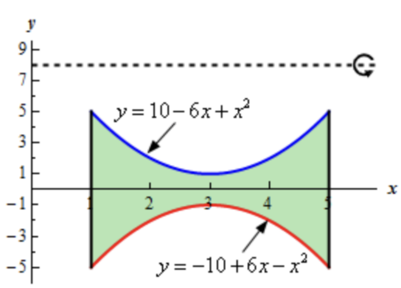
Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

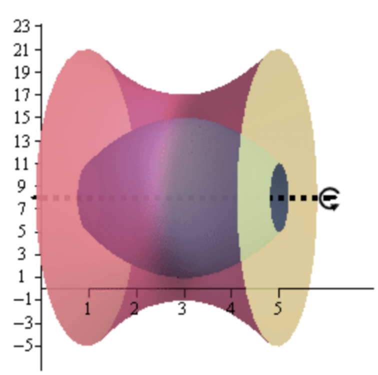
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2\right] \\ &= \pi\left[\left(8+4x-2x^2\right)^2 - \left(2+6e^{-2x}\right)^2\right] \\ &= \pi\left(60+64x-16x^2-16x^3+4x^4-24e^{-2x}-36e^{-4x}\right) \end{aligned}$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\left(60+64x-16x^2-16x^3+4x^4-24e^{-2x}-36e^{-4x}\right)dx \\ &= \pi\left(60x+32x^2-\frac{16}{3}x^3-4x^4+\frac{4}{5}x^5+12e^{-2x}+9e^{-4x}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{937}{15}+12e^{-2}+9e^{-4}\right)\pi \end{aligned}$$

vi.





Η εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής έως την καμπύλη που ορίζει το εσωτερικό όριο του στερεού. Ο άξονας περιστροφής απέχει 8 από τον άξονα x. Η καμπύλη που ορίζει το εσωτερικό όριο απέχει $y = 10 - 6x + x^2$ από τον άξονα x. Η εσωτερική ακτίνα είναι:

$$\text{Εσωτερική ακτίνα} = 8 - (10 - 6x + x^2) = -2 + 6x - x^2$$

Η εξωτερική ακτίνα είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής έως τον άξονα x (8), και συνεχίζει κάτω από τον άξονα x μέχρι να συναντήσει την καμπύλη που ορίζει το εξωτερικό όριο. Πρέπει να προσθέσουμε τις δύο αποστάσεις, λαμβάνοντας υπόψη το αρνητικό πρόσημο ώστε η απόσταση να είναι θετική:

$$\text{Εξωτερική ακτίνα} = 8 - (-10 + 6x - x^2) = 18 - 6x + x^2$$

Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi \left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2 \right] \\ &= \pi \left[(18 - 6x + x^2)^2 - (-2 + 6x - x^2)^2 \right] \\ &= \pi \left(320 - 192x + 32x^2 \right) \end{aligned}$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$V = \int_1^5 \pi \left(320 - 192x + 32x^2\right) dx = \pi \left(320x - 96x^2 + \frac{32}{3}x^3 \right) \Bigg|_1^5 = \frac{896}{3}\pi$$