Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Σύνολα

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμία από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Αν $A \subseteq B$, τότε ισχύει $\nu(A) \leq \nu(B)$.

ii. Αν $x \in (A - B)$, τότε ισχύει ότι $x \notin B$.

iii. Ισχύει πάντα ότι $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

iv. Ισχύει πάντα ότι $x \in \{x\}$.

v. Το κενό σύνολο περιέχει το 0.

vi. Ισχύει πάντα ότι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

vii. Τα σύνολα $\Omega - A$ και A' είναι ίσα.

Λύση: (Ασκ. 1/16)

i. Σωστό. Αν $A \subseteq B$, τότε κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B, άρα $\nu(A) \leq \nu(B)$ (για πεπερασμένα σύνολα).

ii. Σωστό. Από τον ορισμό $A - B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$.

iii. Λάθος. Σωστή είναι η *Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού*. Ισχύει μόνο όταν $A \cap B = \emptyset$.

iv. Σωστό. Το $\{x\}$ έχει μοναδικό στοιχείο το x, άρα $x \in \{x\}$.

v. Λάθος. Το κενό σύνολο $\emptyset$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο (ούτε το 0).

vi. Σωστό. Κάθε στοιχείο του $A \cap B$ ανήκει στο A και κάθε στοιχείο του A ανήκει στο $A \cup B$.

vii. Σωστό. Από τον ορισμό του συμπληρώματος ως διαφοράς: $A' = \Omega - A$.

2. Δίνεται το σύνολο αναφοράς $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και τα υποσύνολα του

$$A = \{x \in \Omega \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, \qquad B = \{x \in \Omega \mid x \text{ άρτιος}\}.$$

Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τα πιο κάτω σύνολα:

i. A'

ii. $A \cap B$

iii. $A \cup B$

iv. $A - B$

v. $B - A$

vi. $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$

Λύση: (Ασκ. 2/16)

Λύνουμε $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$. Άρα $A = \{1, 2\}$ και $B = \{0, 2, 4, 6\}$.

i. $A' = \Omega - A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ii. $A \cap B = \{2\}$

iii. $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6\}$

iv. $A - B = \{1\}$

v. $B - A = \{0, 4, 6\}$

vi. $B' = \Omega - B = \{1, 3, 5, 7\}$. Τότε $A \cap B' = \{1\}$, $A' \cap B = \{0, 4, 6\}$ και

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = \{1\} \cup \{0, 4, 6\} = \{0, 1, 4, 6\}.$$

3. Σε ένα σύνολο 20 μαθητών, 10 μαθητές έχουν διαγώνισμα *μόνο* τη Δευτέρα, 5 μαθητές έχουν διαγώνισμα *μόνο* την Τρίτη και 3 μαθητές έχουν διαγώνισμα και τις δύο μέρες. Να βρείτε πόσοι από τους 20 μαθητές:

i. έχουν διαγώνισμα τη Δευτέρα

ii. έχουν διαγώνισμα την Τρίτη

iii. έχουν ένα μόνο διαγώνισμα αυτές τις δύο μέρες

iv. έχουν διαγώνισμα τουλάχιστον σε μία από τις δύο μέρες

v. δεν έχουν διαγώνισμα ούτε τη Δευτέρα ούτε την Τρίτη

Λύση: (Ασκ. 3/16)

Θέτουμε A: «διαγώνισμα Δευτέρα», B: «διαγώνισμα Τρίτη».

Δίνονται:

$$\nu(\text{μόνο } A) = 10 \qquad \nu(\text{μόνο } B) = 5 \qquad \nu(A \cap B) = 3 \qquad \nu(\Omega) = 20$$

i. $\nu(A) = \nu(\text{μόνο } A) + \nu(A \cap B) = 10 + 3 = 13$.

ii. $\nu(B) = \nu(\text{μόνο } B) + \nu(A \cap B) = 5 + 3 = 8$.

iii. «ένα μόνο» = «μόνο A ή μόνο B» $\Rightarrow 10 + 5 = 15$.

iv. $\nu(A \cup B) = \nu(\text{μόνο } A) + \nu(\text{μόνο } B) + \nu(A \cap B) = 10 + 5 + 3 = 18$.

v. Κανένα $\Rightarrow \nu(\Omega) - \nu(A \cup B) = 20 - 18 = 2$.

4. Σε μια τάξη των 20 παιδιών, οι 12 προτιμούν ως αγαπημένο τους φρούτο το μήλο, ενώ οι 10 προτιμούν το αχλάδι. Αν υπάρχουν 5 παιδιά που δεν προτίμησαν ούτε μήλο, ούτε αχλάδι, πόσα από τα παιδιά προτιμούν και μήλο και αχλάδι;

Λύση: (Ασκ. 4/16)

Θέτουμε A: «προτιμούν μήλο», B: «προτιμούν αχλάδι».

Δίνεται $\nu(\Omega) = 20$, $\nu(A) = 12$, $\nu(B) = 10$, και $\nu(\Omega - (A \cup B)) = 5$.

Άρα $\nu(A \cup B) = \nu(\Omega) - \nu(\Omega - (A \cup B)) = 20 - 5 = 15$.

Με την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού:

$$\nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cup B) = 12 + 10 - 15 = 7.$$

5. Πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 100 διαιρούνται είτε με το 3 είτε με το 5;

Λύση: (Ασκ. 5/16)

Θέτουμε $A = \{\text{πολλαπλάσια του } 3\}$, $B = \{\text{πολλαπλάσια του } 5\}$ στο $[1, 100]$.

$$\nu(A) = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33, \qquad \nu(B) = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20, \qquad \nu(A \cap B) = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6.$$

Με την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47.$$

6. Μεταξύ 130 μαθητών, δηλώθηκαν οι εξής επιλογές:

$$\nu(M) = 92, \quad \nu(F) = 86, \quad \nu(X) = 48,$$

$$\nu(M \cap F \cap X) = 10, \quad \nu(M \cap F) = 70, \quad \nu(M \cap X) = 30, \quad \nu(F \cap X) = 25.$$

Να υπολογίσετε:

i. πόσοι επέλεξαν τουλάχιστον ένα από τα τρία μαθήματα

ii. πόσοι δεν επέλεξαν κανένα από τα τρία μαθήματα

Λύση: (Ασκ. 6/16)

Με την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού για τρία σύνολα:

$$\nu(M \cup F \cup X) = \nu(M) + \nu(F) + \nu(X) - \nu(M \cap F) - \nu(M \cap X) - \nu(F \cap X) + \nu(M \cap F \cap X).$$

Άρα

$$\nu(M \cup F \cup X) = 92 + 86 + 48 - (70 + 30 + 25) + 10 = 226 - 125 + 10 = 111.$$

i. 111 μαθητές επέλεξαν τουλάχιστον ένα μάθημα.

ii. Κανένα $= 130 - 111 = 19$ μαθητές.

7. Δίνεται ένα σύνολο αναφοράς $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ και τα υποσύνολά του:

$$A = \{1, 4, 5, 7, 11\}, \quad B = \{1, 5, 6, 8, 9\}, \quad \Gamma = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 12\}.$$

(α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο Βέννειο διάγραμμα.

(β) Να βρείτε, με αναγραφή των στοιχείων τους, τα πιο κάτω σύνολα:

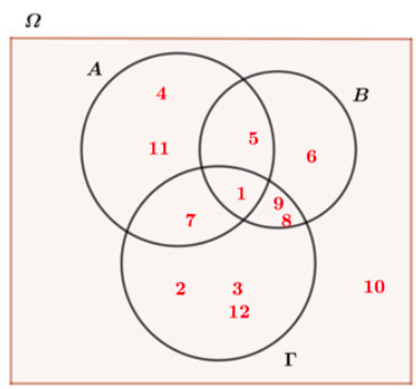
i. A' ii. $A \cap B$ iii. $A \cup \Gamma$ iv. $A - B$ v. $(A \cap \Gamma)'$

vi. $(B \cup \Gamma)'$ vii. $A \cap B \cap \Gamma$ viii. $A \cup B \cup \Gamma$ ix. $A \cap B' \cap \Gamma'$

x. $(A \cup B \cup \Gamma)'$ xi. $A \cap B \cap \Gamma'$

Λύση: (Ασκ. 1/17)

(α)



(β)

i. $A' = \Omega - A = \{2, 3, 6, 8, 9, 10, 12\}$

ii. $A \cap B = \{1, 5\}$

iii. $A \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12\}$

iv. $A - B = \{4, 7, 11\}$

v. $A \cap \Gamma = \{1, 7\}$, άρα $(A \cap \Gamma)' = \Omega - \{1, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

vi. $B \cup \Gamma = \{1,2,3,5,6,7,8,9,12\}$, άρα $(B \cup \Gamma)' = \{4,10,11\}$

vii. $A \cap B = \{1,5\}$ και $\{1,5\} \cap \Gamma = \{1\}$, άρα $A \cap B \cap \Gamma = \{1\}$

viii. $A \cup B \cup \Gamma = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12\}$

ix. $B' = \Omega - B = \{2,3,4,7,10,11,12\}$

$$\Gamma' = \Omega - \Gamma = \{4,5,6,10,11\}$$

$$A \cap B' = \{4,7,11\} \quad \text{και} \quad \{4,7,11\} \cap \Gamma' = \{4,11\}$$

Άρα $A \cap B' \cap \Gamma' = \{4,11\}$.

x. $(A \cup B \cup \Gamma)' = \Omega - \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12\} = \{10\}$

xi. $A \cap B = \{1,5\}$ και $\Gamma' = \{4,5,6,10,11\}$. Άρα $A \cap B \cap \Gamma' = \{5\}$

8. Από τους 190 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου, οι 105 επέλεξαν τα Μαθηματικά, οι 80 επέλεξαν τη Φυσική και 55 μαθητές επέλεξαν και τα δύο μαθήματα. Πόσοι μαθητές επέλεξαν:

i. τα Μαθηματικά αλλά όχι τη Φυσική

ii. τη Φυσική αλλά όχι τα Μαθηματικά

iii. τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα

iv. κανένα από τα δύο αυτά μαθήματα

Λύση: (Ασκ. 2/17)

Θέτουμε M: «Μαθηματικά», F: «Φυσική».

Δίνονται $\nu(M) = 105$, $\nu(F) = 80$, $\nu(M \cap F) = 55$, $\nu(\Omega) = 190$.

i. «Μόνο M» $\Rightarrow \nu(M) - \nu(M \cap F) = 105 - 55 = 50$.

ii. «Μόνο F» $\Rightarrow \nu(F) - \nu(M \cap F) = 80 - 55 = 25$.

iii. $\nu(M \cup F) = \nu(M) + \nu(F) - \nu(M \cap F) = 105 + 80 - 55 = 130$.

iv. Κανένα $\Rightarrow \nu(\Omega) - \nu(M \cup F) = 190 - 130 = 60$.

9. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων του Ω που:

i. διαιρούνται με το 5 ή το 11 ή το 13

ii. δεν διαιρούνται με κανέναν από αυτούς τους αριθμούς

Λύση: (Ασκ. 3/17)

Θέτουμε $A = \{\text{πολλαπλάσια του } 5\}$,

$B = \{\text{πολλαπλάσια του } 11\}$,

$\Gamma = \{\text{πολλαπλάσια του } 13\}$ στο $[1, 1000]$.

$$\nu(A) = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, \quad \nu(B) = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90, \quad \nu(\Gamma) = \left\lfloor \frac{1000}{13} \right\rfloor = 76.$$

$$\nu(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{lcm}(5,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{55} \right\rfloor = 18, \quad \nu(A \cap \Gamma) = \left\lfloor \frac{1000}{65} \right\rfloor = 15, \quad \nu(B \cap \Gamma) = \left\lfloor \frac{1000}{143} \right\rfloor = 6,$$

$$\nu(A \cap B \cap \Gamma) = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{lcm}(5,11,13)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{715} \right\rfloor = 1.$$

i. Με την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού:

$$\nu(A \cup B \cup \Gamma) = 200 + 90 + 76 - (18 + 15 + 6) + 1 = 328.$$

ii. Συμπλήρωμα στο $[1, 1000]$:

$$1000 - \nu(A \cup B \cup \Gamma) = 1000 - 328 = 672$$

10. Είναι γνωστό ότι η αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού για δύο σύνολα είναι:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B),$$

και για τρία σύνολα:

$$\nu(A \cup B \cup \Gamma) = \nu(A) + \nu(B) + \nu(\Gamma) - \nu(A \cap B) - \nu(A \cap \Gamma) - \nu(B \cap \Gamma) + \nu(A \cap B \cap \Gamma).$$

Να εισαχθεί τύπος για τον πληθικό αριθμό της ένωσης τεσσάρων συνόλων, δηλαδή για τον $\nu(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta)$, και να αποδειχθεί.

Λύση: (Ασκ. 1/18)

Ο γενικός τύπος εγκλεισμού–αποκλεισμού για 4 σύνολα είναι:

$$\boxed{\begin{aligned}\nu(A\cup B\cup\Gamma\cup\Delta) = \nu(A)+\nu(B)+\nu(\Gamma)+\nu(\Delta)\\ &-\big[\nu(A\cap B)+\nu(A\cap\Gamma)+\nu(A\cap\Delta)+\nu(B\cap\Gamma)+\nu(B\cap\Delta)+\nu(\Gamma\cap\Delta)\big]\\ &+\big[\nu(A\cap B\cap\Gamma)+\nu(A\cap B\cap\Delta)+\nu(A\cap\Gamma\cap\Delta)+\nu(B\cap\Gamma\cap\Delta)\big]\\ &-\nu(A\cap B\cap\Gamma\cap\Delta).\end{aligned}}$$

Απόδειξη:

Ξεκινάμε από το $\nu(A\cup B\cup\Gamma)$ και προσθέτουμε το Δ:

$$\nu(A\cup B\cup\Gamma\cup\Delta)=\nu((A\cup B\cup\Gamma)\cup\Delta)=\nu(A\cup B\cup\Gamma)+\nu(\Delta)-\nu((A\cup B\cup\Gamma)\cap\Delta).$$

Το σύνολο $(A\cup B\cup\Gamma)\cap\Delta$ ισούται με:

$$(A\cap\Delta)\cup(B\cap\Delta)\cup(\Gamma\cap\Delta).$$

Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού στα $(A\cap\Delta),(B\cap\Delta),(\Gamma\cap\Delta)$:

$$\nu((A\cap\Delta)\cup(B\cap\Delta)\cup(\Gamma\cap\Delta))=\nu(A\cap\Delta)+\nu(B\cap\Delta)+\nu(\Gamma\cap\Delta)$$

$$-\nu(A\cap B\cap\Delta)-\nu(A\cap\Gamma\cap\Delta)-\nu(B\cap\Gamma\cap\Delta)+\nu(A\cap B\cap\Gamma\cap\Delta).$$

Αντικαθιστούμε στον αρχικό τύπο και συλλέγουμε όρους. Προκύπτει ακριβώς ο ζητούμενος τύπος.

11. Η συνάρτηση φ του Euler υπολογίζει το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του φυσικού αριθμού ν και είναι σχετικά πρώτοι με τον ν.

Αν ο φυσικός αριθμός ν αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως

$$\nu=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m},$$

να αποδείξετε ότι:

$$\varphi(\nu)=\nu\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

Λύση: (Ασκ. 2/18)

Θέλουμε να μετρήσουμε πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 έως το ν είναι σχετικά πρώτοι με τον ν. Αυτό σημαίνει ότι $\gcd(x, \nu) = 1$.

Παίρνουμε το συμπλήρωμα: μετράμε αυτούς που *δεν* είναι σχετικά πρώτοι με τον ν. Ένας αριθμός δεν είναι σχετικά πρώτος με τον ν αν διαιρείται από κάποιον από τους πρώτους παράγοντες του ν.

$$\nu = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}.$$

Θέτουμε τα σύνολα:

$$A_i = \{x \in \{1, 2, \dots, \nu\} \mid p_i \mid x\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Κάθε A_i περιέχει τους αριθμούς από 1 έως ν που διαιρούνται από τον p_i. Το πλήθος τους είναι:

$$\nu(A_i) = \frac{\nu}{p_i}.$$

Αντίστοιχα, το πλήθος των αριθμών που διαιρούνται από δύο πρώτους p_i, p_j είναι:

$$\nu(A_i \cap A_j) = \frac{\nu}{p_i p_j}.$$

Γενικά, για οποιαδήποτε τομή k συνόλων:

$$\nu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{\nu}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}.$$

Εφαρμόζουμε την αρχή **εγκλεισμού–αποκλεισμού** στα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_m$:

$$\nu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = \nu\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots\right) - \nu\left(\frac{1}{p_1 p_2} + \cdots\right) + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{\nu}{p_1 p_2 \cdots p_m}.$$

Άρα οι αριθμοί που ΔΕΝ είναι σχετικά πρώτοι με τον ν είναι:

$$\nu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m).$$

Άρα οι αριθμοί που *είναι* σχετικά πρώτοι με τον ν είναι:

$$\varphi(\nu) = \nu - \nu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m).$$

Αν αναδιατάξουμε τους όρους της έκφρασης, παίρνουμε:

$$\varphi(\nu) = \nu\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$