Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Ορισμένο Ολοκλήρωμα

1. Να δείξετε ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στα διαστήματα που δίνονται και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα οριζόμενα ολοκληρώματα, μέσω ορισμού.

i. $f(x) = x^2 + 1, \;\; x \in [0, 2]$

ii. $f(x) = 2x + 3, \;\; x \in [1, 4]$

iii. $f(x) = 6(x - 1), \;\; x \in [0, 1]$

i.

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$
$$x_i^* = \frac{2i}{n}$$

Από ορισμό,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right]\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i^2}{n^3} + \frac{2}{n}\right)\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}$$
$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2$$
$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{1}{n}(2n)$$
$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2 = \frac{14n^2 + 12n + 4}{3n^2}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος,

$$\int_0^2 x^2+1\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\frac{14n^2+12n+4}{3n^2} = \frac{14}{3}$$

ii.

$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i^* = 1+\frac{3i}{n}$$

Από ορισμό,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1+\frac{3i}{n}\right)+3\right]\left[\frac{3}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{15}{n}+\frac{18i}{n^2}\right]$$

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\frac{15}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}15+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{1}{n}(15n)+\frac{18}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 15+\frac{9n+9}{n}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος,

$$\int_1^4 2x+3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[15+\frac{9n+9}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[24+\frac{9}{n}\right] = 24$$

iii.

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i^* = \frac{i}{n}$$

Από ορισμό,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{6i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{6i^2}{n^3}-\frac{6i}{n^2}\right]$$

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{6i^2}{n^3}\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{6i}{n^2}\right] = \frac{6}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2-\frac{6}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{6}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)-\frac{6}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2n^2+3n+1}{n^2}-\frac{3n+3}{n}$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος,

$$\int_0^1 6x(x-1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^2+3n+1}{n^2} - \frac{3n+3}{n}\right] = 2-3=-1$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_6^{11} (6g(x) - 10f(x))\,dx$ δεδομένου ότι:

$$\int_6^{11} f(x)\,dx = -7 \quad \text{και} \quad \int_6^{11} g(x)\,dx = 24$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int_6^{11} 6g(x) - 10f(x)\,dx &= \int_6^{11} 6g(x)\,dx - \int_6^{11} 10f(x)\,dx \\ &= 6\int_6^{11} g(x)\,dx - 10\int_6^{11} f(x)\,dx \\ &= 6(24) - 10(-7) = 214\end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_2^{9} f(x)\,dx$ δεδομένου ότι:

$$\int_5^{2} f(x)\,dx = 3 \quad \text{και} \quad \int_5^{9} f(x)\,dx = 8.$$

Λύση:

$$\int_2^9 f(x)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^9 f(x)\,dx$$

$$\int_2^9 f(x)\,dx = -\int_5^2 f(x)\,dx + \int_5^9 f(x)\,dx = -(3) + 8 = 5$$

4. Αν ισχύει

$$\int_1^e \ln x \, dx = 1,$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_e^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Λύση: (Ασκ. 3/96)

Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_e^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_e^1 -\ln x \, dx = -\int_e^1 \ln x \, dx.$$

Αλλάζουμε τα όρια ώστε να ταιριάζουν με την υπόθεση:

$$-\int_e^1 \ln x \, dx = \int_1^e \ln x \, dx.$$

Σύμφωνα με το δεδομένο:

$$\int_1^e \ln x \, dx = 1.$$

Συνεπώς:

$$\int_e^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = 1.$$

5. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\int_\alpha^6 \frac{x(x+3)}{x^2-x+1} \, dx - \int_\alpha^6 \frac{4x-1}{x^2-x+1} \, dx = 2$$

Λύση: (Ασκ. 4/96)

Συνδυάζουμε τα δύο ολοκληρώματα σε ένα:

$$\int_\alpha^6 \frac{x(x+3)-(4x-1)}{x^2-x+1} \, dx = 2$$

Υπολογίζουμε τον αριθμητή:

$$x(x+3)-(4x-1) = x^2+3x-4x+1 = x^2-x+1$$

Άρα το ολοκλήρωμα απλοποιείται:

$$\int_{\alpha}^{6} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1}\,dx = \int_{\alpha}^{6} 1\,dx = 6 - \alpha$$

Θέτουμε το ολοκλήρωμα ίσο με 2:

$$6 - \alpha = 2 \implies \alpha = 4$$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, εφόσον είναι δυνατόν. Αν κάποιο δεν μπορεί να υπολογιστεί, εξηγήστε τον λόγο.

i. $\int_{1}^{6} \left(12x^3 - 9x^2 + 2\right) dx$ ii. $\int_{-2}^{1} \left(5z^2 - 7z + 3\right) dz$ iii. $\int_{3}^{0} \left(15w^4 - 13w^2\right) dw$

iv. $\int_{1}^{4} \left(\frac{8}{\sqrt{t}} - 12t^{3/2}\right) dt$ v. $\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{7z} + \frac{z^{2/3}}{4} - \frac{1}{2z^3}\right) dz$ vi. $\int_{-2}^{4} \left(x^6 - x^4 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

vii. $\int_{-4}^{-1} x^2(3 - 4x)\,dx$ viii. $\int_{2}^{1} \frac{2y^3 - 6y^2}{y^2}\,dy$ ix. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (7\sin t - 2\cos t)\,dt$

x. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\sec^2 w - 8\csc w \cot w\right) dw$ xi. $\int_{0}^{2} \left(e^x + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$ xii. $\int_{-5}^{-2} \left(7e^y + \frac{2}{y}\right) dy$

Λύση:

i.

$$\int_{1}^{6} 12x^3 - 9x^2 + 2\,dx = \left(3x^4 - 3x^3 + 2x\right)\Big|_{1}^{6} = 3252 - 2 = 3250$$

ii.

$$\int_{-2}^{1} 5z^2 - 7z + 3\,dz = \left(\frac{5}{3}z^3 - \frac{7}{2}z^2 + 3z\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - \left(-\frac{100}{3}\right) = \frac{69}{2}$$

iii.

$$\int_{3}^{0} 15w^4 - 13w^2\,dw = \left(3w^5 - \frac{13}{3}w^3 + \frac{1}{2}w^2\right)\Bigg|_{3}^{0} = -612$$

iv.

$$\int_1^4 \frac{8}{\sqrt{t}} - 12\sqrt{t^3}\,dt = \int_1^4 8t^{-\frac{1}{2}} - 12t^{\frac{3}{2}}\,dt = \left(16t^{\frac{1}{2}} - \frac{24}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = -\frac{664}{5}$$

v.

$$\int_1^2 \frac{1}{7z} + \frac{\sqrt[3]{z^2}}{4} - \frac{1}{2z^3}\,dz = \int_1^2 \frac{1}{7}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}z^{-3}\,dz = \left(\frac{1}{7}\ln|z| + \frac{3}{20}z^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{7}\ln(2) + \frac{3}{20}\left(2^{\frac{5}{3}}\right) + \frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{7}\ln(1) + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{7}\ln(2) + \frac{3}{20}\left(2^{\frac{5}{3}}\right) - \frac{27}{80}$$

vi. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 4]$. Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί.

vii.

$$\int_{-4}^{-1} x^2(3-4x)\,dx = \int_{-4}^{-1} 3x^2 - 4x^3\,dx = \left(x^3 - x^4\right)\Bigg|_{-4}^{-1} = 318$$

viii.

$$\int_2^1 \frac{2y^3 - 6y^2}{y^2}\,dy = \int_2^1 2y - 6\,dy = \left(y^2 - 6y\right)\Bigg|_2^1 = 3$$

ix.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7\sin(t) - 2\cos(t)\,dt = (-7\cos(t) - 2\sin(t))\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5$$

x.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sec^2(w) - 8\csc(w)\cot(w)\,dw = (2\tan(w) + 8\csc(w))\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{16}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right) - \left(16 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{14}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 16$$

xi.

$$\int_0^2 e^x + \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left(e^x + \tan^{-1}(x)\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \left(e^2 + \tan^{-1}(2)\right) - \left(e^0 + \tan^{-1}(0)\right) = e^2 + \tan^{-1}(2) - 1$$

xii.

$$\int_{-5}^{-2} 7e^y + \frac{2}{y}\,dy = \left(7e^y + 2\ln|y|\right)\Big|_{-5}^{-2}$$

$$= \left(7e^{-2} + 2\ln|-2|\right) - \left(7e^{-5} + 2\ln|-5|\right) = 7\left(e^{-2} - e^{-5}\right) + 2\left(\ln(2) - \ln(5)\right)$$

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, εφόσον είναι δυνατόν.

i.

$$\int_0^4 f(t)\,dt \quad \text{where} \quad f(t) = \begin{cases} 2t & t > 1 \\ 1 - 3t^2 & t \leq 1 \end{cases}$$

ii.

$$\int_{-6}^{1} g(z)\,dz \quad \text{where} \quad g(z) = \begin{cases} 2 - z & z > -2 \\ 4e^z & z \leq -2 \end{cases}$$

Λύση:

i.

$$\int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^4 f(t)\,dt = \int_0^1 1 - 3t^2\,dt + \int_1^4 2t\,dt$$

$$\int_0^4 f(t)\,dt = \left(t - t^3\right)\Big|_0^1 + t^2\Big|_1^4 = [0 - 0] + [16 - 1] = 15$$

ii.

$$\int_{-6}^{1} g(z)\,dz = \int_{-6}^{-2} 4e^z\,dz + \int_{-2}^{1} 2 - z\,dz = \left(4e^z\right)\Big|_{-6}^{-2} + \left(2z - \frac{1}{2}z^2\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \left[4e^{-2} - 4e^{-6}\right] + \left[\frac{3}{2} - (-6)\right] = 4e^{-2} - 4e^{-6} + \frac{15}{2}$$

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, εφόσον είναι δυνατόν.

i. $\displaystyle\int_3^6 |2x - 10|\;dx$

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{0} |4w + 3|\;dw$

Λύση:

i.

$$\begin{aligned} x < 5 &\implies 2x - 10 < 0 \\ x > 5 &\implies 2x - 10 > 0 \end{aligned}$$

Για να αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές, αρκεί να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα στο σημείο $x = 5$.

$$\int_3^6 |2x-10|\,dx = \int_3^5 |2x-10|\,dx + \int_5^6 |2x-10|\,dx$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε $3 \leq x \leq 5$ και επομένως $|2x-10| = -(2x-10)$.

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε $5 \leq x \leq 6$ και επομένως $|2x-10| = 2x-10$.

$$\begin{aligned} \int_3^6 |2x-10|dx &= \int_3^5 -(2x-10)\,dx + \int_5^6 (2x-10)\,dx \\ &= \int_3^5 (-2x+10)\,dx + \int_5^6 (2x-10)\,dx \\ &= \left(-x^2+10x\right)\Big|_3^5 + \left(x^2-10x\right)\Big|_5^6 = 5 \end{aligned}$$

ii. Επειδή το $4w+3$ είναι εξίσωση ευθείας, είναι φανερό ότι η συνάρτηση έχει την εξής συμπεριφορά:

$$\begin{aligned} w < -\tfrac{3}{4} &\implies 4w+3 < 0 \\ w > -\tfrac{3}{4} &\implies 4w+3 > 0 \end{aligned}$$

Άρα, για να αφαιρέσουμε τις απόλυτες τιμές, αρκεί να χωρίσουμε το ολοκλήρωμα στο σημείο $w = -\frac{3}{4}$.

$$\int_{-1}^0 |4w+3|\,dw = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} |4w+3|\,dw + \int_{-\frac{3}{4}}^0 |4w+3|\,dw$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα ισχύει $-1 \leq w \leq -\frac{3}{4}$, οπότε έχουμε $|4w+3| = -(4w+3)$.

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ισχύει $-\frac{3}{4} \leq w \leq 0$, οπότε έχουμε $|4w+3| = 4w+3$.

$$\int_{-1}^{0} |4w+3|\,dw = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} -(4w+3)\,dw + \int_{-\frac{3}{4}}^{0} (4w+3)\,dw$$
$$= \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} (-4w-3)\,dw + \int_{-\frac{3}{4}}^{0} (4w+3)\,dw$$
$$= \left(-2w^2-3w\right)\Big|_{-1}^{-\frac{3}{4}} + \left(2w^2+3w\right)\Big|_{-\frac{3}{4}}^{0} = \frac{5}{4}$$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int_0^1 3\left(4x+x^4\right)\left(10x^2+x^5-2\right)^6\,dx$ ii. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\cos(2t)}{\sqrt{9-5\sin(2t)}}\,dt$ iii. $\displaystyle\int_{\pi}^{0} \sin(z)\cos^3(z)\,dz$

iv. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{w}\,e^{1-\sqrt{w^3}}\,dw$ v. $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \sqrt[3]{5-2y} + \frac{7}{5-2y}\,dy$ vi. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3 + e^{\frac{1}{4}x}\,dx$

Λύση:

i. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = 10x^2 + x^5 - 2$$

$$du = (20x+5x^4)\,dx = 5(4x+x^4)\,dx$$
$$\rightarrow (4x+x^4)\,dx = \frac{1}{5}du$$

Υπλογίζω νέα όρια,

$$x=0: \quad u=-2$$
$$x=1: \quad u=9$$

$$\int_0^1 3\left(4x+x^4\right)\left(10x^2+x^5-2\right)^6 dx = \frac{3}{5}\int_{-2}^{9} u^6\,du$$

Επομένως,

$$\int_0^1 3\left(4x+x^4\right)\left(10x^2+x^5-2\right)^6 dx = \frac{3}{35}u^7\Big|_{-2}^{9} = \frac{3}{35}\left(4782969-(-128)\right) = \frac{14349291}{35}$$

ii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = 9 - 5\sin(2t)$$

$$du = -10\cos(2t)\,dt$$
$$\to \cos(2t)\,dt = -\frac{1}{10}du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$t = 0 \;:\; u = 9 \qquad t = \frac{\pi}{4} \;:\; u = 4$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\cos(2t)}{\sqrt{9 - 5\sin(2t)}}dt = -\frac{8}{10}\int_9^4 u^{-\frac{1}{2}}du$$

Επομένως,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\cos(2t)}{\sqrt{9 - 5\sin(2t)}}dt = -\frac{8}{5}u^{\frac{1}{2}}\Big|_9^4 = -\frac{16}{5} - \left(-\frac{24}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

iii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \cos(z)$$
$$du = -\sin(z)\,dz$$
$$\to \sin(z)\,dz = -du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$z = \pi : u = -1 \qquad z = 0 : u = 1$$

$$\int_\pi^0 \sin(z)\cos^3(z)\,dz = -\int_{-1}^1 u^3\,du$$

Επομένως,

$$\int_\pi^0 \sin(z)\cos^3(z)\,dz = -\frac{1}{4}u^4\Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

iv. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = 1 - w^{\frac{3}{2}}$$

$$du = -\frac{3}{2} w^{\frac{1}{2}} dw \quad \rightarrow \quad \sqrt{w}\, dw = -\frac{2}{3} du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$w = 1 : u = 0 \qquad w = 4 : u = -7$$

$$\int_1^4 \sqrt{w}\, e^{1-\sqrt{w^3}}\, dw = -\frac{2}{3} \int_0^{-7} e^u du$$

Επομένως,

$$\int_1^4 \sqrt{w}\, e^{1-\sqrt{w^3}}\, dw = -\frac{2}{3} e^u \Big|_0^{-7} = -\frac{2}{3} e^{-7} - \left(-\frac{2}{3} e^0\right) = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-7}\right) \frac{2}{3}\left(1 - e^{-7}\right)$$

v. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = 5 - 2y$$

$$du = -2\, dy \quad \rightarrow \quad = -\frac{1}{2} du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$y = -4 : u = 13 \qquad y = -1 : u = 7$$

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt[3]{5 - 2y} + \frac{7}{5 - 2y}\, dy = -\frac{1}{2} \int_{13}^{7} u^{1/3} + \frac{7}{u}\, du$$

Επομένως,

$$\int_{-4}^{-1} \sqrt[3]{5 - 2y} + \frac{7}{5 - 2y}\, dy = \left(-\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} u^{4/3} + 7 \ln|u|\right]\right)\Bigg|_{13}^{7}$$

$$= -\frac{3}{8} 7^{4/3} - \frac{7}{2} \ln|7| - \left(-\frac{3}{8} 13^{4/3} - \frac{7}{2} \ln|13|\right) = \frac{3}{8}\left(13^{4/3} - 7^{4/3}\right) + \frac{7}{2}\left(\ln(13) - \ln(7)\right)$$

vi.

$$\int_{-1}^{2} x^3 + e^{\frac{1}{4}x} dx = \int_{-1}^{2} x^3 dx + \int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{4}x} dx$$

Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \frac{1}{4}x$$

$$du = \frac{1}{4}dx \quad \rightarrow \quad dx = 4\,du$$

Υπολογίζω νέα όρια,

$$x = -1 : u = -\frac{1}{4} \qquad x = 2 : u = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{2} x^3 + e^{\frac{1}{4}x} dx = \int_{-1}^{2} x^3 dx + 4\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} e^u du$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} x^3 + e^{\frac{1}{4}x} dx &= \frac{1}{4}x^4\bigg|_{-1}^{2} + 4\; e^u\big|_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(4 - \frac{1}{4}\right) + \left(4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{15}{4} + 4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

10. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$.

i. Αν η f είναι άρτια στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

ii. Αν η f είναι περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

Λύση:

i. Αφού η f συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, έχουμε:

$$f(-t) = f(t), \quad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]$$

Είναι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx$$

Για το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\, dx$$

κάνουμε την αντικατάσταση $t = -x$. Έχουμε $dx = -dt$ και για $x = -\alpha \implies t = \alpha$, ενώ για $x = 0 \implies t = 0$. Έτσι:

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{0} f(x)\, dx &= \int_{\alpha}^{0} f(-t)(-dt) \\ &= \int_{0}^{\alpha} f(-t)\, dt = \int_{0}^{\alpha} f(t)\, dt \quad (f \text{ άρτια στο } [-\alpha, \alpha]) \\ &= \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx &= \int_{-\alpha}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx \\ &= 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx\end{aligned}$$

ii. Αφού η f συνεχής και περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$, έχουμε:

$$f(-t) = -f(t), \quad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]$$

Είναι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx$$

Για το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx$$

κάνουμε την αντικατάσταση $t = -x$. Έχουμε $dx = -dt$ και για $x = -\alpha \implies t = \alpha$, ενώ για $x = 0 \implies t = 0$. Έτσι:

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{0} f(-t)(-dt) \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(-t)\,dt = -\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt \quad (f \text{ περιττή στο } [-\alpha, \alpha]) \\
&= -\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

11. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(\alpha + \beta - x) = f(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

Λύση: (Ασκ. 6/108)

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \alpha + \beta - x \quad \Rightarrow \quad dx = -du.$$

Για $x = \alpha \implies u = \beta$, και για $x = \beta \implies u = \alpha$.

Άρα

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} \big(\alpha + \beta - u\big) f(\alpha + \beta - u)(-du).$$

Αντιστρέφοντας τα όρια:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha+\beta-u) f(\alpha+\beta-u)\, du.$$

Με την ιδιότητα συμμετρίας $f(\alpha+\beta-u) = f(u)$, έχουμε:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha+\beta-u) f(u)\, du.$$

Συνεπώς,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha+\beta-x) f(x)\, dx.$$

Προσθέτοντας τις δύο εκφράσεις:

$$2I = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(x + (\alpha+\beta-x)\Big) f(x)\, dx.$$

Δηλαδή:

$$2I = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha+\beta) f(x)\, dx.$$

Άρα:

$$I = \frac{\alpha+\beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx.$$

12. Δίνεται ότι:

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x\, dx, \quad \nu \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

i. Να υπολογίσετε τα I_0 και I_1.

ii. Να δείξετε ότι $I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}, \quad \forall \quad \nu \geq 2$.

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$$

Λύση: (Ασκ. 11/109)

i. Υπολογισμός I_0 και I_1:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos(\tfrac{\pi}{2})) - (-\cos(0)) = 1$$

Άρα:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$$

ii. Σχέση αναδρομής:

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x \, dx$$

Θέτουμε:

$$u = \sin^{\nu-1} x, \quad dv = \sin x \, dx$$
$$du = (\nu-1)\sin^{\nu-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\cos x$$

Οπότε:

$$I_\nu = \left[-\sin^{\nu-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-2} x \cos^2 x \, dx$$

Το οριακό μέλος μηδενίζεται, και με $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ έχουμε:

$$I_\nu = (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-2} x \, dx - (\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x \, dx$$

$$I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2} - (\nu-1)I_\nu$$
$$I_\nu + (\nu-1)I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2}$$
$$\nu I_\nu = (\nu-1)I_{\nu-2}$$
$$I_\nu = \tfrac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$$

iii. Υπολογισμός $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx$:

$$I_7 = \frac{6}{7}I_5, \quad I_5 = \frac{4}{5}I_3, \quad I_3 = \frac{2}{3}I_1, \quad I_1 = 1$$

$$I_3 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15}, \quad I_7 = \frac{6}{7}\cdot\frac{8}{15} = \frac{16}{35}$$

Άρα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx = \frac{16}{35}$$

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

i. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(x)+f(\alpha+\beta-x)]\,dx$$

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

a.
$$\int_0^1 \frac{2^x}{2^x+2^{1-x}}\,dx$$

b.
$$\int_1^3 \frac{\ln x}{\ln x+\ln(4-x)}\,dx$$

Λύση: (Ασκ. 12/109)

i. Έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Θέτουμε $t=\alpha+\beta-x \;\Rightarrow\; dt=-dx$. Όταν $x=\alpha \Rightarrow t=\beta$, και όταν $x=\beta \Rightarrow t=\alpha$. Άρα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\alpha+\beta-t)(-dt) = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-t)\,dt$$

Μετονομάζοντας ξανά τη μεταβλητή ολοκλήρωσης $t \mapsto x$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \big[f(x) + f(\alpha+\beta-x)\big]\,dx$$

Άρα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big[f(x) + f(\alpha+\beta-x)\big]\,dx$$

ii. Υπολογισμός ολοκληρωμάτων.

a. Έστω:

$$I = \int_0^1 \frac{2^x}{2^x + 2^{1-x}}\,dx$$

Με συμμετρία:

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2^{1-x}}, \quad f(1-x) = \frac{2^{1-x}}{2^{1-x} + 2^x}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) + f(1-x) = 1$$

Άρα:

$$2I = \int_0^1 \big[f(x) + f(1-x)\big]dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$
$$I = \tfrac{1}{2}$$

b. Έστω:

$$J = \int_1^3 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}\,dx$$

Ορίζουμε:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}$$

Μετασχηματισμός $x \mapsto 4-x$, τότε:

$$f(4-x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln(4-x) + \ln x}$$

Άρα:

$$f(x) + f(4-x) = 1$$

Συνεπώς:

$$2J = \int_1^3 \big[f(x) + f(4-x)\big]\,dx = \int_1^3 1\,dx = 2$$
$$J = 1$$

14. Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x}\,dx, \quad \nu \in \mathbb{N}_0$$

i. Να αποδείξετε ότι:

$$I_\nu = -\frac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1)I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x^4 e^{-x}\,dx$$

Λύση: (Ασκ. 13/110)

i. Έχουμε:

$$I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x}\,dx$$

Κάνουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση με:

$$u = x^\nu \;\;\Rightarrow\;\; du = \nu x^{\nu-1}dx, \quad dv = e^{-x}dx \;\;\Rightarrow\;\; v = -e^{-x}$$

Άρα:

$$I_\nu = \left[-x^\nu e^{-x}\right]_0^1 + \nu \int_0^1 x^{\nu-1} e^{-x} dx$$
$$I_\nu = -\frac{1}{e} + \nu I_{\nu-1}$$

Ξανακάνουμε μερική ολοκλήρωση στο $I_{\nu-1}$:

$$I_{\nu-1} = \int_0^1 x^{\nu-1} e^{-x} dx$$

Θέτουμε:

$$u = x^{\nu-1} \quad \Rightarrow \quad du = (\nu-1)x^{\nu-2}dx, \quad dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$$
$$I_{\nu-1} = \left[-x^{\nu-1} e^{-x}\right]_0^1 + (\nu-1) \int_0^1 x^{\nu-2} e^{-x} dx$$
$$I_{\nu-1} = -\frac{1}{e} + (\nu-1) I_{\nu-2}$$

Επιστρέφουμε στο I_ν:

$$I_\nu = -\frac{1}{e} + \nu \left(-\frac{1}{e} + (\nu-1) I_{\nu-2}\right)$$
$$I_\nu = -\frac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1) I_{\nu-2}$$
$$I_\nu = -\tfrac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1) I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2$$

ii. Υπολογισμός του I_4:

Από τον τύπο:

$$I_4 = -\frac{5}{e} + 4 \cdot 3 I_2$$

Υπολογίζουμε πρώτα I_2:

$$I_2 = -\frac{3}{e} + 2 \cdot 1 I_0$$

και

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

Άρα:

$$I_2 = -\frac{3}{e} + 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{5}{e}$$

Τότε:

$$I_4 = -\frac{5}{e} + 12\left(2 - \frac{5}{e}\right) = -\frac{5}{e} + 24 - \frac{60}{e}$$

$$I_4 = 24 - \frac{65}{e}$$

Επομένως,

$$\int_0^1 x^4 e^{-x} dx = 24 - \tfrac{65}{e}$$

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη της τιμή, αντίστοιχα, στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$m(\beta - \alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \le M(\beta - \alpha)$$

Λύση: (Ασκ. 1/141)

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ορίζουμε:

$$m = \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x), \quad M = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$$

Λόγω της ορισμού του m και M, έχουμε:

$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη:

$$\int_\alpha^\beta m\, dx \le \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \le \int_\alpha^\beta M\, dx$$

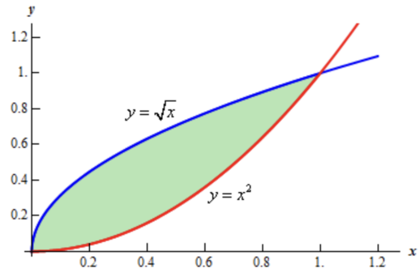
Αφού m και M είναι σταθερές:

$$m(\beta - \alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \le M(\beta - \alpha)$$

Σημείωση: Η ανισότητα προκύπτει άμεσα από τη συνέχεια της συνάρτησης και τον ορισμό των ελάχιστων και μέγιστων τιμών.

16. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$.

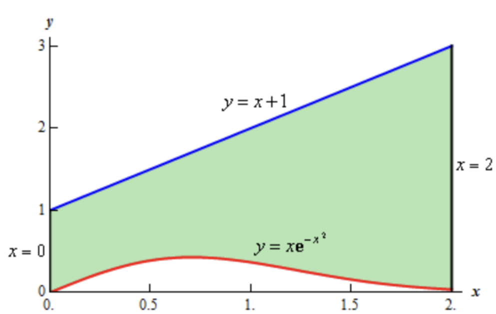
Λύση:



$$A = \int_a^b (\text{upper function} - \text{lower function})\, dx = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\, dx$$
$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

17. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = xe^{-x^2}$, $y = x + 1$, $x = 2$ και τον y-άξονα.

Λύση:



$$A = \int_a^b (\text{upper function} - \text{lower function})\, dx = \int_0^2 x + 1 - xe^{-x^2}\, dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\bigg|_0^2 = \frac{7}{2} + \frac{e^{-4}}{2} = 3.5092$$

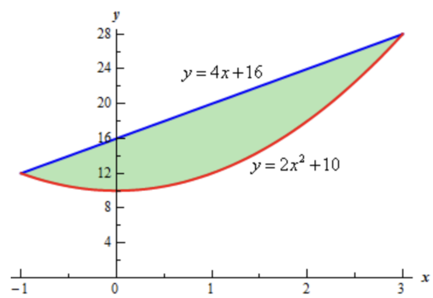
18. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2x^2 + 10$ και την ευθεία $y = 4x + 16$.

Λύση:

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να βρούμε τα σημεία τομής θέτοντας τις δύο εξισώσεις ίσες.

$$2x^2 + 10 = 4x + 16$$
$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$2(x+1)(x-3) = 0$$

Οι δύο καμπύλες θα τέμνονται στα $x = -1$ και $x = 3$. Μπορούμε να βρούμε τις τιμές του y που αντιστοιχούν σε αυτά τα x αντικαθιστώντας τα στις εξισώσεις. Οι συντεταγμένες των δύο σημείων τομής στο γράφημα είναι $(-1,\, 12)$ και $(3,\, 28)$.



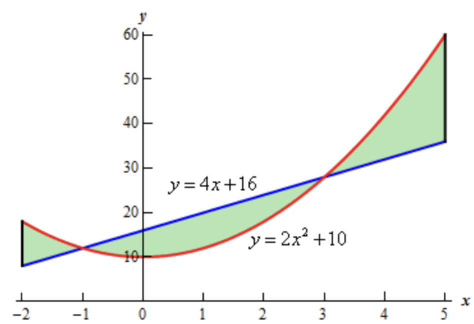
$$\begin{aligned} A &= \int_a^b (\text{upper function} - \text{lower function})\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} 4x + 16 - (2x^2 + 10)\, dx = \int_{-1}^{3} -2x^2 + 4x + 6\, dx \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

19. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2x^2 + 10$ και τις ευθείες $y = 4x + 16$, $x = -2$ και $x = 5$.

Λύση:

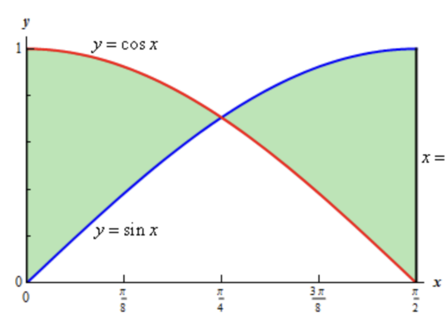
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} 2x^2 + 10 - (4x + 16)\, dx + \int_{-1}^{3} 4x + 16 - (2x^2 + 10)\, dx + \int_{3}^{5} 2x^2 + 10 - (4x + 16)\, dx \\ &= \int_{-2}^{-1} 2x^2 - 4x - 6\, dx + \int_{-1}^{3} -2x^2 + 4x + 6\, dx + \int_{3}^{5} 2x^2 - 4x - 6\, dx \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3} + \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right)\Bigg|_{3}^{5}$$
$$= \frac{14}{3} + \frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \frac{142}{3}$$



20. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, και τον y-άξονα.

Λύση:



Το σημείο τομής είναι το $x = \frac{\pi}{4}$, όπου $\sin x = \cos x$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x - \cos x \, dx \\ &= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} - 1) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 = 0.828427 \end{aligned}$$

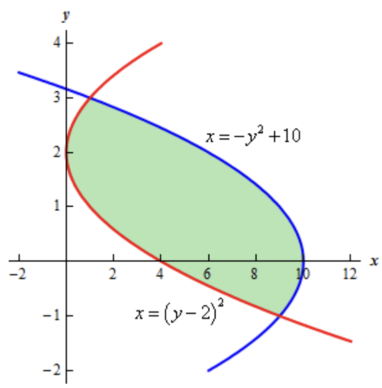
21. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις $x = -y^2 + 10$ και $x = (y-2)^2$.

Λύση:

Αρχικά, θα χρειαστούμε τα σημεία τομής.

$$\begin{aligned}
-y^2 + 10 &= (y-2)^2 \\
-y^2 + 10 &= y^2 - 4y + 4 \\
0 &= 2y^2 - 4y - 6 \\
0 &= 2(y+1)(y-3)
\end{aligned}$$

Τα σημεία τομής είναι $y = -1$ και $y = 3$.



$$\begin{aligned}
A &= \int_c^d (\text{right function} - \text{left function})\, dy \\
&= \int_{-1}^{3} -y^2 + 10 - (y-2)^2\, dy = \int_{-1}^{3} -2y^2 + 4y + 6\, dy \\
&= \left(-\frac{2}{3}y^3 + 2y^2 + 6y \right) \Bigg|_{-1}^{3} = \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Υπενθύμιση: Θυμηθείτε ότι υπάρχει και ένας άλλος τύπος για τον προσδιορισμό του εμβαδού. Είναι,

$$A = \int_c^d (\text{δεξιά συνάρτηση} - \text{αριστερή συνάρτηση})\, dy, \quad c \leq y \leq d$$

και στη δική μας περίπτωση πράγματι έχουμε μία συνάρτηση που είναι πάντα στα αριστερά και μία που είναι πάντα στα δεξιά. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση αυτή είναι σίγουρα η κατάλληλη μέθοδος. Σημειώστε ότι θα χρειαστεί να ξαναγράψουμε την εξίσωση της ευθείας έτσι ώστε να είναι στη μορφή $x = f(y)$.

22. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$, και $y = x - 1$.

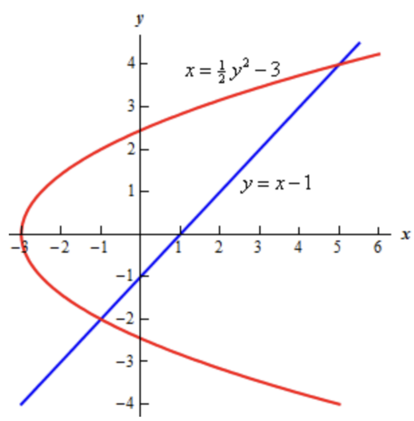
Λύση:

Ολοκλήρωση ως προς x:

Στην περίπτωση αυτή, θα βρούμε τα σημεία τομής λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς x.

$$\begin{aligned} y + 1 &= \frac{1}{2}y^2 - 3 \\ 2y + 2 &= y^2 - 6 \\ 0 &= y^2 - 2y - 8 \\ 0 &= (y-4)(y+2) \end{aligned}$$

Έτσι, φαίνεται ότι οι δύο καμπύλες θα τέμνονται στα $y = -2$ και $y = 4$. Αν χρειαζόμαστε τις πλήρεις συντεταγμένες, θα είναι: $(-1, -2)$ και $(5, 4)$.

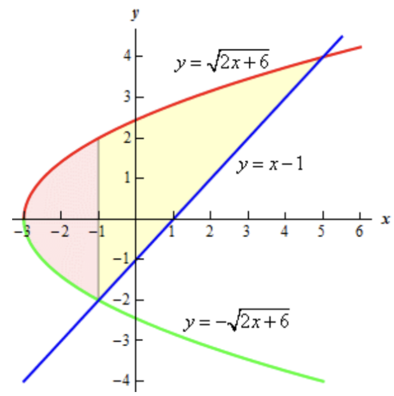


Τώρα, μπορούμε να έχουμε ένα σοβαρό πρόβλημα σε αυτό το σημείο αν δεν είμαστε προσεκτικοί. Μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε μία άνω συνάρτηση και μία κάτω συνάρτηση. Για να το κάνουμε αυτό εδώ, παρατηρήστε ότι υπάρχουν ουσιαστικά δύο τμήματα της περιοχής που θα έχουν διαφορετικές κάτω συναρτήσεις. Στο διάστημα $[-3, -1]$ η παραβολή είναι στην πραγματικότητα τόσο η άνω όσο και η κάτω συνάρτηση.

Για να χρησιμοποιήσουμε την ολοκλήρωση ως προς x, πρέπει να λύσουμε την παραβολή ως προς y. Παίρνουμε,

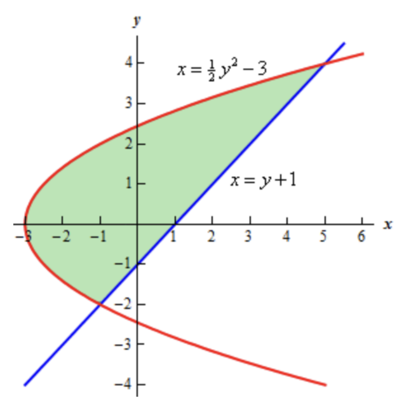
$$y = \pm\sqrt{2x + 6}$$

όπου το «+» δίνει το άνω τμήμα της παραβολής και το «−» δίνει το κάτω τμήμα.



$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})\,dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6} - (x-1)\,dx \\
&= \int_{-3}^{-1} 2\sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6} - x + 1\,dx \\
&= \int_{-3}^{-1} 2\sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5} \sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5} -x+1\,dx \\
&= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^4 + \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_4^{16} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{5} = 18
\end{aligned}
$$

Ολοκλήρωση ως προς y:



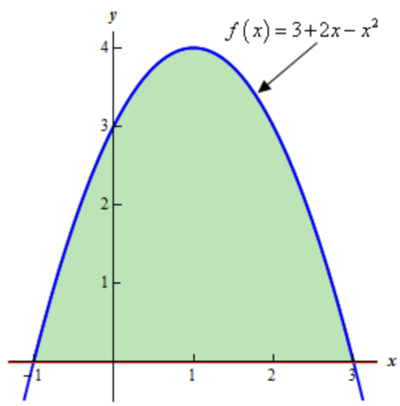
$$
\begin{aligned}
A &= \int_c^d (\text{right function} - \text{left function})\ dy \\
&= \int_{-2}^{4} (y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right) dy = \int_{-2}^{4} -\frac{1}{2}y^2 + y + 4\,dy \\
&= \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 4y\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 18
\end{aligned}
$$

23. Να βρείτε το εμβαδόν κάτω από τη $f(x) = 3 + 2x - x^2$ και πάνω από τον άξονα x.

Λύση:

$$3 + 2x - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad -(x+1)(x-3) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1, \; x = 3$$

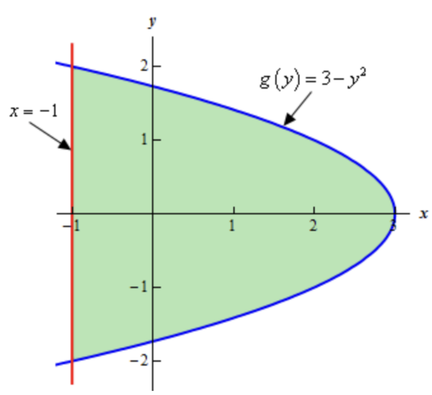
$$A = \int_{-1}^{3} 3 + 2x - x^2 \, dx = \left(3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$



24. Να βρείτε το εμβαδόν στα αριστερά της $g(y) = 3 - y^2$ και δεξιά της $x = -1$.

Λύση:

$$3 - y^2 = -1 \implies y^2 = 4 \implies y = -2, \; y = 2$$



$$A = \int_{-2}^{2} 3 - y^2 - (-1) \, dy = \int_{-2}^{2} 4 - y^2 \, dy = \left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

25. Να προσδιοριστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις πιο κάτω καμπύλες.

i. $y = x^2 + 2,\ y = \sin(x),\ x = -1$ και $x = 2$

ii. $y = \dfrac{8}{x},\ y = 2x$ και $x = 4$

iii. $x = 3 + y^2,\ x = 2 - y^2,\ y = 1$ και $y = -2$

iv. $x = y^2 - y - 6$ και $x = 2y + 4$

v. $y = x\sqrt{x^2+1},\ y = e^{-\frac{1}{2}x},\ x = -3$ και ο άξονας y

vi. $y = 4x + 3,\ y = 6 - x - 2x^2,\ x = -4$ και $x = 2$

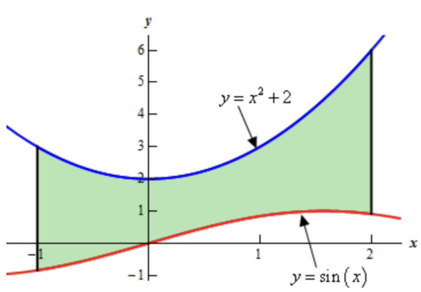
vii. $y = \dfrac{1}{x+2},\ y = (x+2)^2,\ x = -\dfrac{3}{2},\ x = 1$

viii. $x = y^2 + 1,\ x = 5,\ y = -3$ και $y = 3$

ix. $x = e^{1+2y},\ x = e^{1-y},\ y = -2$ και $y = 1$

Λύση:

i.

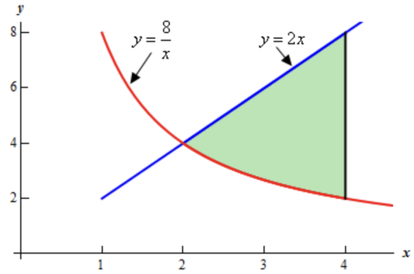


$$A = \int_{-1}^{2} x^2 + 2 - \sin(x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x + \cos(x)\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 9 + \cos(2) - \cos(1) = 8.04355$$

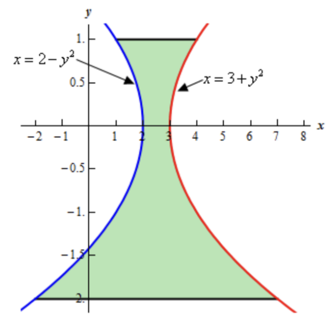
ii.

$$\frac{8}{x} = 2x \quad \to \quad x^2 = 4 \quad \to \quad x = -2,\ x = 2$$

$$A = \int_{2}^{4} 2x - \frac{8}{x}\,dx = \left(x^2 - 8\ln|x|\right)\Big|_{2}^{4} = 12 - 8\ln(4) + 8\ln(2) = 6.4548$$



iii.

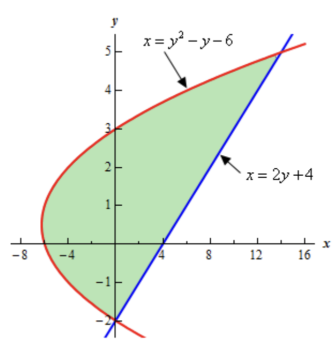


$$A=\int_{-2}^{1} 3+y^2-(2-y^2)\,dy=\int_{-2}^{1} 1+2y^2\,dy=\left(y+\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{1}=9$$

iv.

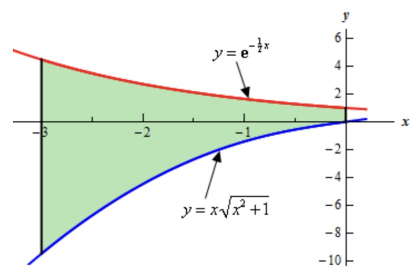
$$y^2-y-6=2y+4 \quad\rightarrow\quad y^2-3y-10=(y-5)(y+2)=0 \quad\rightarrow\quad y=-2,\ y=5$$

$$A=\int_{-2}^{5} 2y+4-(y^2-y-6)\,dy=\int_{-2}^{5} 10+3y-y^2\,dy=\left(10y+\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{5}=\frac{343}{6}$$



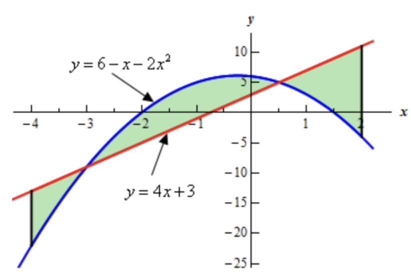
v.

$$A = \int_{-3}^{0} e^{-\frac{1}{2}x} - x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left(-2e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = -\frac{7}{3} + 2e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}10^{\frac{3}{2}} = 17.17097$$



vi. Τα σημεία τομής είναι εκεί όπου οι δύο καμπύλες τέμνονται, οπότε το μόνο που χρειάζεται είναι να εξισώσουμε τις δύο εξισώσεις και να λύσουμε. Αυτό δίνει,

$$6 - x - 2x^2 = 4x + 3 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3,\ x = \frac{1}{2}$$

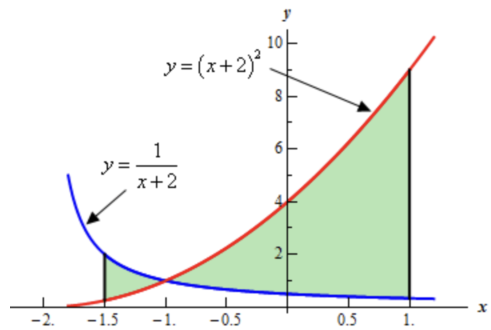


Παρατηρούμε ότι στα διαστήματα, ($-4 \le x \le -3$, $-3 \le x \le \frac{1}{2}$, και $\frac{1}{2} \le x \le 2$) οι άνω/κάτω συναρτήσεις είναι διαφορετικές.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{-3} 4x + 3 - (6 - x - 2x^2)\,dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} 6 - x - 2x^2 - (4x+3)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} 4x + 3 - (6 - x - 2x^2)\,dx \\ &= \int_{-4}^{-3} 2x^2 + 5x - 3\,dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} 3 - 5x - 2x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} 2x^2 + 5x - 3\,dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x\right)\Bigg|_{-4}^{-3} + \left(3x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-3}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{25}{6} + \frac{343}{24} + \frac{81}{8} = \frac{343}{12} \end{aligned}$$

vii.

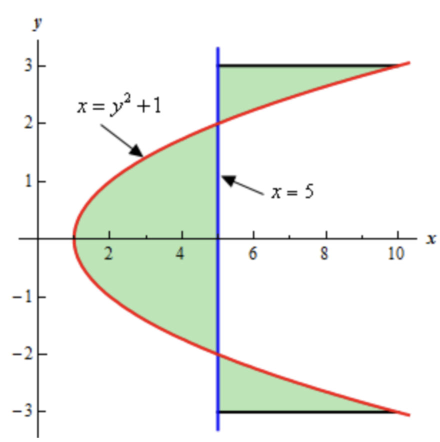
$$\frac{1}{x+2} = (x+2)^2 \quad \to \quad (x+2)^3 = 1 \quad \to \quad x+2 = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \to \quad x = -1$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{x+2} - (x+2)^2\,dx + \int_{-1}^{1} (x+2)^2 - \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \left(\ln|x+2| - \frac{1}{3}(x+2)^3\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \left(\frac{1}{3}(x+2)^3 - \ln|x+2|\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \left[-\frac{7}{24} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{26}{3} - \ln(3)\right] = \frac{67}{8} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(3) \end{aligned}$$

viii.

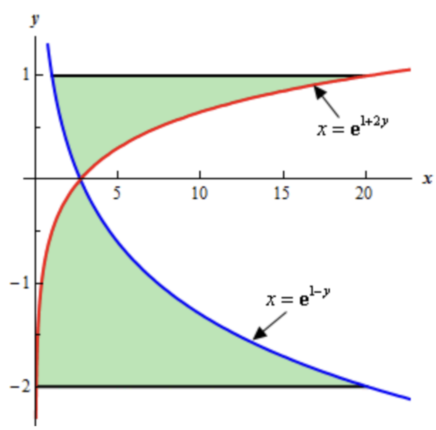
$$y^2 + 1 = 5 \quad \to \quad y^2 = 4 \quad \to \quad y = -2,\ y = 2$$



$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{-2} y^2+1-5\,dy + \int_{-2}^{2} 5-(y^2+1)\,dy + \int_{2}^{3} y^2+1-5\,dy \\
&= \int_{-3}^{-2} y^2-4\,dy + \int_{-2}^{2} 4-y^2\,dy + \int_{2}^{3} y^2-4\,dy \\
&= \left(\frac{1}{3}y^3-4y\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \left(4y-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} + \left(\frac{1}{3}y^3-4y\right)\Bigg|_{2}^{3} \\
&= \frac{7}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{46}{3}
\end{aligned}$$

ix.

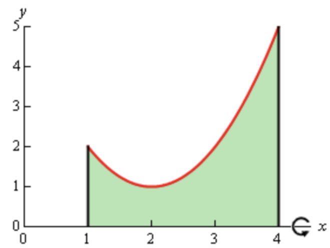
$$\mathbf{e}^{1+2y}=\mathbf{e}^{1-y} \quad\rightarrow\quad \frac{\mathbf{e}^{1+2y}}{\mathbf{e}^{1-y}}=1 \quad\rightarrow\quad \mathbf{e}^{3y}=1 \quad\rightarrow\quad y=0$$

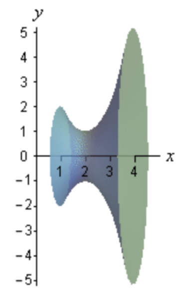


$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} \mathbf{e}^{1-y}-\mathbf{e}^{1+2y}\,dy + \int_{0}^{1} \mathbf{e}^{1+2y}-\mathbf{e}^{1-y}\,dy \\
&= \left(-\mathbf{e}^{1-y}-\frac{1}{2}\mathbf{e}^{1+2y}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}^{1+2y}+\mathbf{e}^{1-y}\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \left[\mathbf{e}^3+\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-3}-\frac{3}{2}\mathbf{e}\right]+\left[1+\frac{1}{2}\mathbf{e}^3-\frac{3}{2}\mathbf{e}\right]=22.9983
\end{aligned}$$

26. Να υπολογίσετε τον όγκο που δημιουργείται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 4x + 5$, τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Λύση:





Το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής είναι,

$$A(x) = \pi(x^2 - 4x + 5)^2 = \pi\left(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25\right)$$

Από αριστερά προς τα δεξιά, η πρώτη τομή γίνεται στο $x = 1$ και η τελευταία στο $x = 4$. Αυτά είναι τα όρια ολοκλήρωσης. Ο όγκος του στερεού δίνεται τότε από:

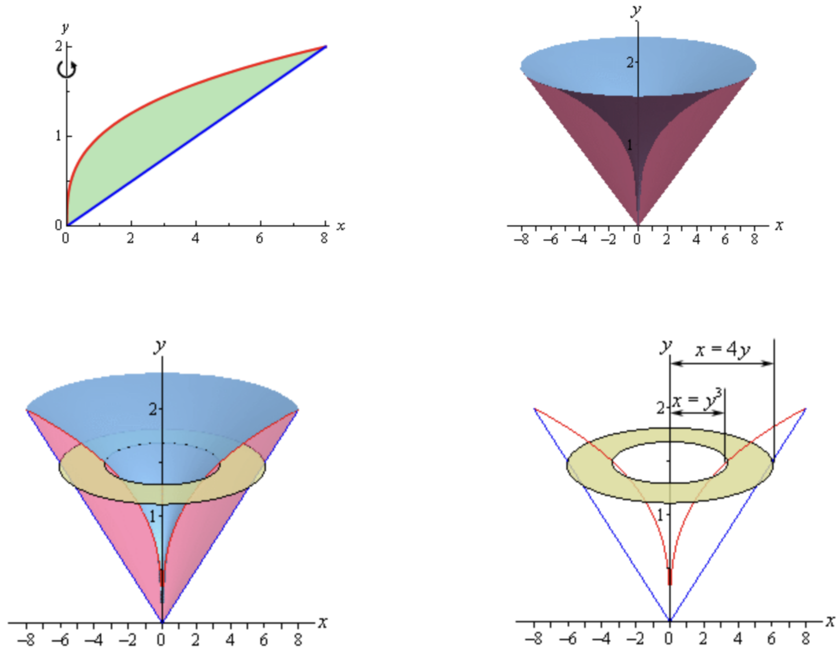
$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi\int_1^4 x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25\,dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{26}{3}x^3 - 20x^2 + 25x\right)\Bigg|_1^4$$
$$= \frac{78\pi}{5}$$

27. Να υπολογίσετε τον όγκο που δημιουργείται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt[3]{x}$, και $y = \frac{x}{4}$.

Λύση:

Η εγκάρσια τομή, κάθετα ως προς τον άξονα περιστροφής θα είναι ένας δακτύλιος και θα είναι οριζόντια σε κάποιο y. Αυτό σημαίνει ότι η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του δαχτυλίου θα είναι τιμές του x και έτσι πρέπει να ξαναγράψουμε τις συναρτήσεις στη μορφή $x = f(y)$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x} && \Longrightarrow && x = y^3 \\ y &= \frac{x}{4} && \Longrightarrow && x = 4y \end{aligned}$$



Το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής είναι τότε,

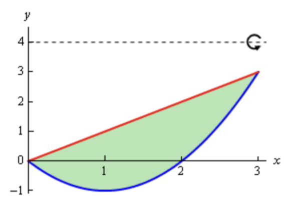
$$A(y) = \pi\left((4y)^2 - (y^3)^2\right) = \pi\left(16y^2 - y^6\right)$$

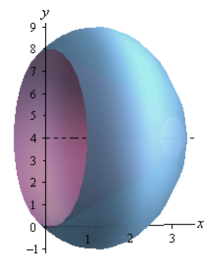
Ξεκινώντας από το κατώτερο σημείο του στερεού προς το ανώτερο παρατηρούμε ότι η πρώτη τομή γίνεται στο $y = 0$ και η τελευταία τομή θα γίνει στο $y = 2$. Αυτά θα είναι τα όρια ολοκλήρωσης. Ο όγκος είναι τότε,

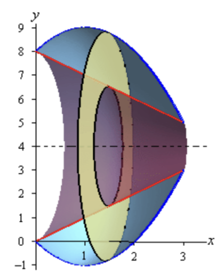
$$\begin{aligned} V &= \int_c^d A(y)\,dy \\ &= \pi \int_0^2 16y^2 - y^6\,dy \\ &= \pi\left(\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7\right)\Bigg|_0^2 = \frac{512\pi}{21} \end{aligned}$$

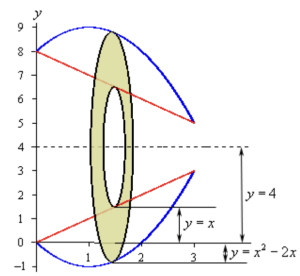
28. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της περιοχής που περικλείεται από τις $y = x^2 - 2x$ και $y = x$ ως προς την ευθεία $y = 4$.

Λύση:









Τώρα, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί εδώ προσδιορίζοντας την εσωτερική και την εξωτερική ακτίνα, καθώς δεν υπάρχει συμμετρία ως προς τους άξονες.

Η εσωτερική ακτίνα θα είναι,

$$\text{εσωτερική ακτίνα} = 4 - x$$

Η εξωτερική ακτίνα είναι,

$$\text{εξωτερική ακτίνα} = 4 - \left(x^2 - 2x\right) = -x^2 + 2x + 4$$

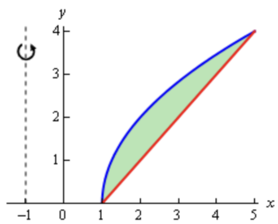
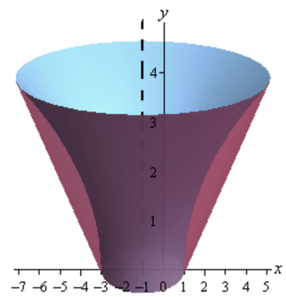
Το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής σε αυτή την περίπτωση είναι

$$A(x) = \pi\left(\left(-x^2 + 2x + 4\right)^2 - (4 - x)^2\right) = \pi\left(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x\right)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_0^3 x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x\,dx \\ &= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 12x^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{153\pi}{5} \end{aligned}$$

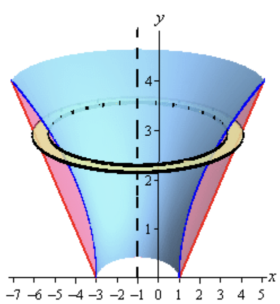
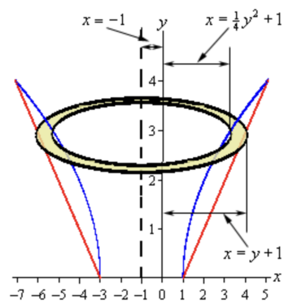
29. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 2\sqrt{x-1}$ και $y = x - 1$ ως προς την ευθεία $x = -1$.

Λύση:

Επειδή περιστρέφουμε γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα, το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής θα είναι συνάρτηση του y. Αυτό σημαίνει επίσης ότι πρέπει να ξαναγράψουμε τις συναρτήσεις ως προς το y.

$$y = 2\sqrt{x-1} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{y^2}{4} + 1$$
$$y = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = y + 1$$

$$\text{Εξωτερική ακτίνα:} \quad y + 1 + 1 = y + 2$$

$$\text{Εσωτερική ακτίνα:} \quad \frac{y^2}{4} + 1 + 1 = \frac{y^2}{4} + 2$$

$$A(y) = \pi\left((y+2)^2 - \left(\frac{y^2}{4} + 2\right)^2\right) = \pi\left(4y - \frac{y^4}{16}\right)$$

Ο πρώτος δακτύλιος εμφανίζεται για $y = 0$ και ο τελευταίος για $y = 4$, άρα αυτά θα είναι τα όρια ολοκλήρωσης.

Ο όγκος είναι,

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d A(y)\, dy = \pi \int_0^4 \left(4y - \frac{y^4}{16}\right) dy \\ &= \pi \left(2y^2 - \frac{1}{80}y^5\right)\Bigg|_0^4 = \frac{96\pi}{5} \end{aligned}$$

30. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που ορίζετε στις πιο κάτω περιπτώσεις.

i. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = \sqrt{x}$, $y = 3$ και τον άξονα y ως προς τον άξονα y.

ii. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 7 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$ και τον άξονα x ως προς τον άξονα x.

iii. Την περιοχή που περικλείεται από τις $x = y^2 - 6y + 10$ και $x = 5$ ως προς τον άξονα y.

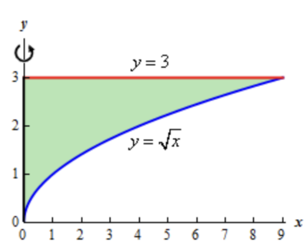
iv. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 2x^2$ και $y = x^3$ ως προς τον άξονα x.

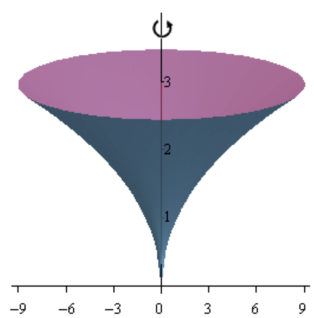
v. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 6e^{-2x}$ και $y = 6 + 4x - 2x^2$ για $x = 0$ και $x = 1$ ως προς την ευθεία $y = -2$.

vi. Την περιοχή που περικλείεται από τις $y = 10 - 6x + x^2$, $y = -10 + 6x - x^2$, $x = 1$ και $x = 5$ ως προς την ευθεία $y = 8$.

Λύση:

i.





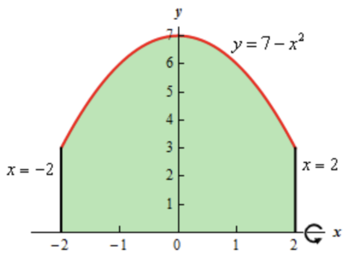
Το εμβαδόν του δίσκου είναι,

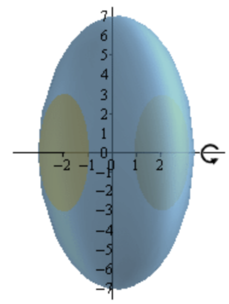
$$A(y) = \pi(\text{Ακτίνα})^2 = \pi(y^2)^2 = \pi y^4 \quad 0 \le y \le 3$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$V = \int_0^3 \pi y^4 \, dy = \frac{1}{5}\pi y^5 \Big|_0^3 = \frac{243}{5}\pi$$

ii.





Όπως φαίνεται από το σχήμα, η ακτίνα του δίσκου είναι η απόσταση από τον άξονα x έως την καμπύλη που ορίζει το όριο του στερεού. Με άλλα λόγια,

$$\text{Ακτίνα} = 7 - x^2$$

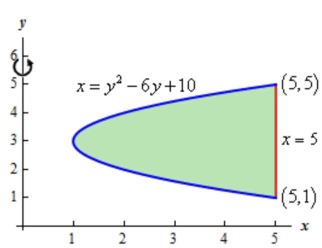
Το εμβαδόν του δίσκου είναι τότε,

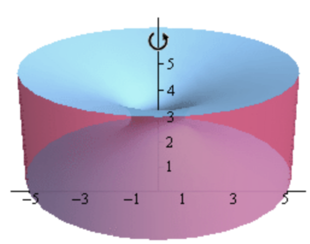
$$A(x) = \pi(\text{Ακτίνα})^2 = \pi(7-x^2)^2 = \pi(49 - 14x^2 + x^4)$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$V = \int_{-2}^{2} \pi(49 - 14x^2 + x^4)dx = \pi\left(49x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{2012}{15}\pi$$

iii.





$$\begin{aligned} &y^2 - 6y + 10 = 5 \\ &y^2 - 6y + 5 = 0 \\ &(y-5)(y-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1,\ y = 5 \quad \Rightarrow \quad (5,1)\ \&\ (5,5) \end{aligned}$$

$$\text{Εσωτερική ακτίνα} = y^2 - 6y + 10 \qquad \text{Εξωτερική ακτίνα} = 5$$

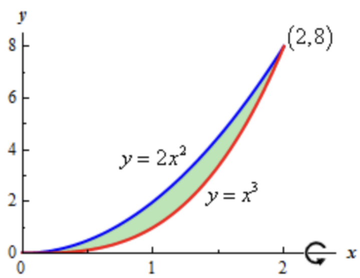
Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

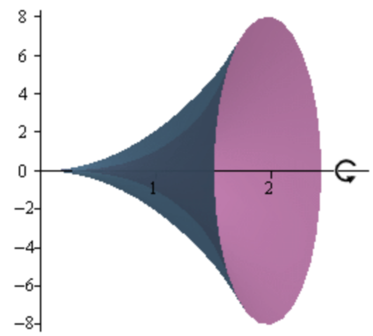
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2\right] \\ &= \pi\left[5^2 - (y^2 - 6y + 10)^2\right] = \pi\left(-75 + 120y - 56y^2 + 12y^3 - y^4\right) \end{aligned}$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 \pi\left(-75 + 120y - 56y^2 + 12y^3 - y^4\right)\, dy \\ &= \pi\left(-75y + 60y^2 - \frac{56}{3}y^3 + 3y^4 - \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_1^5 = \frac{1088}{15}\pi \end{aligned}$$

iv.





$$\begin{aligned} &x^3 = 2x^2 \\ &x^3 - 2x^2 = 0 \\ &x^2(x-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0,\ x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad (0,0)\ \ \&\ \ (2,8) \end{aligned}$$

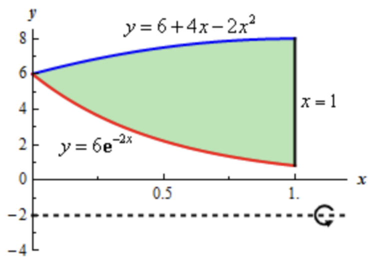
$$\text{Εσωτερική ακτίνα} = x^3 \qquad \text{Εξωτερική ακτίνα} = 2x^2$$

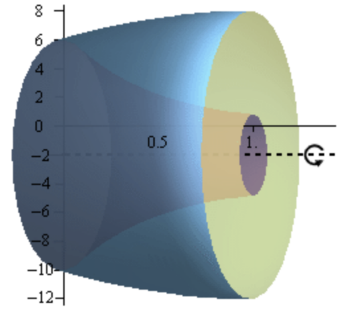
Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2\right] \\ &= \pi\left[(2x^2)^2 - (x^3)^2\right] = \pi\left(4x^4 - x^6\right) \end{aligned}$$

$$V = \int_0^2 \pi\left(4x^4 - x^6\right) dx = \pi\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{35}\pi$$

v.





Εσωτερική ακτίνα $= 2 + 6e^{-2x}$ Εξωτερική ακτίνα $= 2 + 6 + 4x - 2x^2 = 8 + 4x - 2x^2$

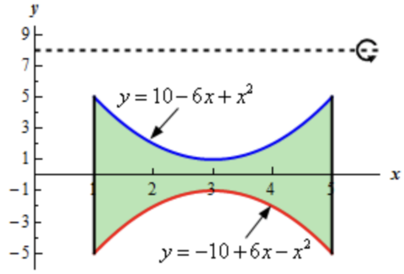
Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

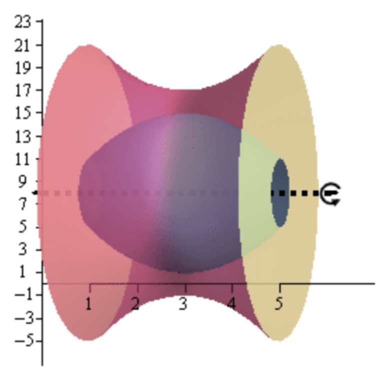
$$
\begin{aligned}
A(x) &= \pi\left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2\right] \\
&= \pi\left[\left(8 + 4x - 2x^2\right)^2 - \left(2 + 6e^{-2x}\right)^2\right] \\
&= \pi\left(60 + 64x - 16x^2 - 16x^3 + 4x^4 - 24e^{-2x} - 36e^{-4x}\right)
\end{aligned}
$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi\left(60 + 64x - 16x^2 - 16x^3 + 4x^4 - 24e^{-2x} - 36e^{-4x}\right) dx \\
&= \pi\left(60x + 32x^2 - \frac{16}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{4}{5}x^5 + 12e^{-2x} + 9e^{-4x}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{937}{15} + 12e^{-2} + 9e^{-4}\right)\pi
\end{aligned}
$$

vi.





Η εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής έως την καμπύλη που ορίζει το εσωτερικό όριο του στερεού. Ο άξονας περιστροφής απέχει 8 από τον άξονα x. Η καμπύλη που ορίζει το εσωτερικό όριο απέχει $y = 10 - 6x + x^2$ από τον άξονα x. Η εσωτερική ακτίνα είναι:

$$\text{Εσωτερική ακτίνα} = 8 - (10 - 6x + x^2) = -2 + 6x - x^2$$

Η εξωτερική ακτίνα είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής έως τον άξονα x (8), και συνεχίζει κάτω από τον άξονα x μέχρι να συναντήσει την καμπύλη που ορίζει το εξωτερικό όριο. Πρέπει να προσθέσουμε τις δύο αποστάσεις, λαμβάνοντας υπόψη το αρνητικό πρόσημο ώστε η απόσταση να είναι θετική:

$$\text{Εξωτερική ακτίνα} = 8 - (-10 + 6x - x^2) = 18 - 6x + x^2$$

Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι τότε,

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2\right] \\ &= \pi\left[(18 - 6x + x^2)^2 - (-2 + 6x - x^2)^2\right] \\ &= \pi\left(320 - 192x + 32x^2\right) \end{aligned}$$

Ο όγκος είναι τότε,

$$V = \int_1^5 \pi\,(320 - 192x + 32x^2)\,dx = \pi\left(320x - 96x^2 + \frac{32}{3}x^3\right)\Bigg|_1^5 = \frac{896}{3}\pi$$

31. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$ και την ευθεία $y = 1$:

i. γύρω από την ευθεία $y = 1$.

ii. γύρω από την ευθεία $y = 2$.

Λύση: (Ασκ. 7/136)

Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$, αφού $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

i. <u>Περιστροφή γύρω από την ευθεία $y = 1$</u>.

Η ακτίνα κάθε δίσκου είναι:

$$R(x) = 1 - x^2$$

Άρα το εμβαδόν κάθε δίσκου είναι:

$$A(x) = \pi(\text{Ακτίνα})^2 = \pi(1 - x^2)^2 = \pi(1 - 2x^2 + x^4)$$

Ο όγκος του στερεού είναι:

$$V_1 = \int_{-1}^{1} \pi(1 - 2x^2 + x^4)\, dx = \pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$V_1 = \frac{16}{15}\pi$$

ii. <u>Περιστροφή γύρω από την ευθεία $y = 2$</u>.

Η εξωτερική ακτίνα είναι:

$$R(x) = 2 - x^2$$

και η εσωτερική ακτίνα είναι:

$$r(x) = 2 - 1 = 1$$

Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι:

$$A(x) = \pi \left[(\text{Εξωτερική ακτίνα})^2 - (\text{Εσωτερική ακτίνα})^2 \right] = \pi \left[(2 - x^2)^2 - 1^2 \right] = \pi(3 - 4x^2 + x^4)$$

Ο όγκος του στερεού είναι:

$$V_2 = \int_{-1}^{1} \pi(3 - 4x^2 + x^4)\, dx = \pi \left(3x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$V_2 = \frac{56}{15}\pi$$

32. Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος για να υπολογίσετε

$$\int_0^1 (3x+2)\,dx.$$

Λύση: (Ασκ. 1/137)

Διαίρεση του $[0,1]$ σε n ίσα τμήματα:

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, \qquad x_i^* = 0 + i\Delta x = \frac{i}{n} \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Από ορισμό (άθροισμα Riemann),

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(3x_i^*+2)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(3\frac{i}{n}+2\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n^2}+\frac{2}{n}\right).$$

Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{3}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n}\cdot n = \frac{3(n+1)}{2n} + 2.$$

Άρα,

$$\int_0^1 (3x+2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)}{2n}+2\right) = \frac{3}{2}+2 = \frac{7}{2}$$

33. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον *ορισμό* του ορισμένου ολοκληρώματος, ότι

$$\int_\alpha^\beta x^2\,dx = \frac{1}{3}\big(\beta^3-\alpha^3\big).$$

Λύση: (Ασκ. 2/137)

Διαιρούμε το $[\alpha,\beta]$ σε n ίσα τμήματα. Τότε

$$\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{n}, \qquad x_i^* = \alpha + i\Delta x = \alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{n}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Από τον ορισμό (άθροισμα Riemann),

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\big(x_i^*\big)^2\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\Big(\alpha+i\Delta x\Big)^2\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\Big(\alpha^2\Delta x + 2\alpha\, i\Delta x^2 + i^2\Delta x^3\Big).$$

Άρα
$$S_n = n\alpha^2\Delta x + 2\alpha\Delta x^2\sum_{i=1}^{n} i + \Delta x^3\sum_{i=1}^{n} i^2.$$
Χρησιμοποιούμε τους τύπους $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ και $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:
$$S_n = \alpha^2(\beta-\alpha) + \alpha(\beta-\alpha)^2\frac{n+1}{n} + (\beta-\alpha)^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$
Περνώντας στο όριο,
$$\int_\alpha^\beta x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha^2(\beta-\alpha) + \alpha(\beta-\alpha)^2 + \frac{(\beta-\alpha)^3}{3}.$$
Τέλος,
$$\begin{aligned}\alpha^2(\beta-\alpha) + \alpha(\beta-\alpha)^2 + \frac{(\beta-\alpha)^3}{3} &= \frac{1}{3}\Big[3\alpha^2(\beta-\alpha) + 3\alpha(\beta-\alpha)^2 + (\beta-\alpha)^3\Big]\\ &= \frac{1}{3}\big((\alpha+(\beta-\alpha))^3-\alpha^3\big) = \frac{1}{3}\left(\beta^3-\alpha^3\right)\end{aligned}$$

34. Για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δίνεται ότι
$$\int_1^4 f(x)\,dx = 10 \quad \text{και} \quad \int_4^6 f(x)\,dx = -6.$$
Να υπολογίσετε:

i. $\displaystyle\int_6^4 f(x)\,dx$

ii. $\displaystyle\int_2^2 f(x)\,dx$

iii. $\displaystyle\int_1^6 f(x)\,dx$

iv. $\displaystyle\int_0^3 f(x+1)\,dx$

Λύση: (Ασκ. 3/137)

i. Αλλαγή ορίων:
$$\int_6^4 f(x)\,dx = -\int_4^6 f(x)\,dx = -(-6) = 6$$

ii. Ίδια άνω–κάτω όρια:

$$\int_{2}^{2} f(x)\,dx = 0$$

iii. Προσθετικότητα ως προς τα όρια:

$$\int_{1}^{6} f(x)\,dx = \int_{1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{6} f(x)\,dx = 10 + (-6) = 4$$

iv. Θέτουμε $u = x + 1$ $(du = dx)$. Για $x = 0 \Rightarrow u = 1$, για $x = 3 \Rightarrow u = 4$:

$$\int_{0}^{3} f(x+1)\,dx = \int_{1}^{4} f(u)\,du = 10$$

35. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^{x}}\,dx - \int_{3\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}}\,dx = \alpha.$$

Λύση: (Ασκ. 4/137)

Αλλάζουμε τα όρια στο δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^{x}}\,dx - \int_{3\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}}\,dx = \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^{x}}\,dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}}\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{1+3^{-x}} = \frac{3^{x}}{1+3^{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+3^{x}} + \frac{1}{1+3^{-x}} = \frac{1+3^{x}}{1+3^{x}} = 1.$$

Άρα

$$\int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^{x}}\,dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}}\,dx = \int_{2\alpha}^{3\alpha} 1\,dx = [x]_{2\alpha}^{3\alpha} = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$$

36. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_2^7 f(x)\,dx.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_4^7 f(x)\,dx.$$

Λύση: (Ασκ. 5/137)

Από την προσθετικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος ως προς τα όρια,

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

και

$$\int_2^7 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^7 f(x)\,dx.$$

Δεδομένου ότι $\int_1^4 f(x)\,dx = \int_2^7 f(x)\,dx$, εξισώνοντας και απαλείφοντας τον κοινό όρο $\int_2^4 f(x)\,dx$, προκύπτει

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_4^7 f(x)\,dx, \qquad \square$$

37. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\int_{-\kappa}^{2\kappa} (2x+1)\,dx = 4.$$

Λύση: (Ασκ. 6/137)

$$\int_{-\kappa}^{2\kappa} (2x+1)\,dx = \Big[x^2 + x\Big]_{-\kappa}^{2\kappa} = (4\kappa^2 + 2\kappa) - (\kappa^2 - \kappa) = 3\kappa^2 + 3\kappa.$$

Θέτοντας $3\kappa^2 + 3\kappa = 4$ παίρνουμε

$$3\kappa^2 + 3\kappa - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \kappa = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{6}.$$

$$\kappa = \frac{-3+\sqrt{57}}{6} \quad \text{ή} \quad \kappa = \frac{-3-\sqrt{57}}{6}$$

38. Να χρησιμοποιήσετε *κατάλληλο μετασχηματισμό* για να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ ii. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ iii. $\displaystyle\int_0^{1/4} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

iv. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\text{ημ}^3(x)}{\text{συν}^4(x)}\,dx$ v. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{8x-x^2}\,dx$ vi. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3-3\text{ημ}(x)+\text{συν}(x)}\,dx.$

Λύση: (Ασκ. 7/138)

i. Θέτουμε $x=\text{ημ}(t)$, $dx=\text{συν}(t)\,dt$, $t:0\to\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\text{ημ}^2(t)\text{συν}^2(t)\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\text{ημ}^2(2t)\,dt=\frac{1}{8}\left[t-\frac{\text{ημ}(4t)}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{16}$$

ii. Παρατήρηση $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{3}}-[\arctan x]_1^{\sqrt{3}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$$

iii. Θέτουμε $x=\dfrac{t}{1+t}\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{(1+t)^2}$, τότε $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\sqrt{t}$.

Όρια: $x:0\to\frac{1}{4}\Rightarrow t:0\to\frac{1}{3}$.

$$\int_0^{1/4}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\int_0^{1/3}\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\,dt\overset{t=u^2}{=}\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{2u^2}{(1+u^2)^2}\,du=\int_0^{1/\sqrt{3}}\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{2}{(1+u^2)^2}\right)du$$

$$=\left[\arctan u-\frac{u}{1+u^2}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}-\frac{3}{4\sqrt{3}}$$

iv. Θέτουμε $u=\text{συν}(x)\Rightarrow du=-\text{ημ}(x)\,dx$.

$$\int_0^{\pi/3}\frac{\text{ημ}^3(x)}{\text{συν}^4(x)}\,dx=\int_0^{\pi/3}\frac{\text{ημ}(x)\big(1-\text{συν}^2(x)\big)}{\text{συν}^4(x)}\,dx=\int_{1/2}^1\left(u^{-4}-u^{-2}\right)\,du=\left[-\tfrac{1}{3}u^{-3}+u^{-1}\right]_{1/2}^1=\frac{4}{3}$$

v. Πλήρες τετράγωνο: $8x - x^2 = 16 - (x-4)^2$.

Θέτουμε $x - 4 = 4\,\text{ημ}(t) \Rightarrow dx = 4\,\text{συν}(t)\,dt$, $t : -\frac{\pi}{2} \to 0$.

$$\int_0^4 \sqrt{8x - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} 4\,\text{συν}(t)\cdot 4\,\text{συν}(t)\,dt = 16\int_{-\pi/2}^{0} \text{συν}^2(t)\,dt = 16\left[\frac{t}{2} + \frac{\text{ημ}(2t)}{4}\right]_{-\pi/2}^{0} = 4\pi$$

vi. Θέτουμε $t = \text{εφ}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (τύπος ημιγωνίας):

$$\text{ημ}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{συν}(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Τότε

$$3 - 3\text{ημ}(x) + \text{συν}(x) = \frac{2(t-1)(t-2)}{1+t^2}, \qquad x : 0 \to \frac{\pi}{3} \Rightarrow t : 0 \to \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Άρα

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3 - 3\text{ημ}(x) + \text{συν}(x)} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \Big[\ln|t-2| - \ln|t-1|\Big]_0^{1/\sqrt{3}}.$$

Επομένως

$$= \ln\left(\frac{2 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) - \ln 2 = \ln\left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2(\sqrt{3}-1)}\right) = \ln\left(\frac{5+\sqrt{3}}{4}\right)$$

39. Να υπολογίσετε την τιμή του $f(3)$, αν ισχύει ότι

$$\int_0^3 x\,f'(x)\,dx \;+\; \int_0^3 f(x)\,dx \;=\; 12.$$

Λύση: (Ασκ. 8/138)

Κάνουμε μερική ολοκλήρωση στο $\displaystyle\int_0^3 xf'(x)\,dx$ με

$$u = x \;\Rightarrow\; du = dx, \qquad dv = f'(x)\,dx \;\Rightarrow\; v = f(x).$$

Τότε

$$\int_0^3 xf'(x)\,dx = \Big[xf(x)\Big]_0^3 - \int_0^3 f(x)\,dx = 3f(3) - \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Άρα

$$\underbrace{\left(3f(3)-\int_0^3 f(x)\,dx\right)}_{\int_0^3 xf'(x)\,dx}+\int_0^3 f(x)\,dx=3f(3)=12 \;\Rightarrow\; f(3)=4$$

40. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(4,7)$. Οι εφαπτόμενες της f στα A και B σχηματίζουν γωνίες $\dfrac{\pi}{3}$ και $\dfrac{\pi}{6}$, αντίστοιχα, με τον άξονα x. Να υπολογίσετε

$$\int_2^4 f'(x)\,f''(x)\,dx.$$

Λύση: (Ασκ. 9/138)

Η κλίση της εφαπτομένης ισούται με την παράγωγο:

$$f'(2)=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3},\qquad f'(4)=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(f'(x))^2}{2}\right)=f'(x)\,f''(x).$$

Άρα, με θεμελιώδες θεώρημα:

$$\int_2^4 f'(x)\,f''(x)\,dx=\left[\frac{(f'(x))^2}{2}\right]_2^4=\frac{1}{2}\Big((f'(4))^2-(f'(2))^2\Big)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-3\right)=-\frac{4}{3}.$$

41. Δίνονται τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$A=\int_0^{\pi/2}\frac{\text{ημ}(x)}{1+2\text{συν}(x)}\,dx,\qquad B=\int_0^{\pi/2}\frac{\text{ημ}(2x)}{1+2\text{συν}(x)}\,dx.$$

Να υπολογίσετε τα A, $A+B$ και B.

Λύση: (Ασκ. 10/138)

<u>Για το A.</u>

Θέτουμε $u = 1 + 2\text{συν}(x) \Rightarrow du = -2\,\text{ημ}(x)\,dx$. Όρια: $x = 0 \Rightarrow u = 3$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$.

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{ημ}(x)}{1 + 2\text{συν}(x)}\,dx = \int_3^1 \frac{-du/2}{u} = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\ln 3$$

<u>Για το B.</u>

Χρησιμοποιούμε $\text{ημ}(2x) = 2\,\text{ημ}(x)\text{συν}(x)$ και την ίδια αλλαγή $u = 1 + 2\text{συν}(x)$. Τότε $\text{συν}(x) = \dfrac{u-1}{2}$ και $\text{ημ}(x)\,dx = -\dfrac{du}{2}$.

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\text{ημ}(x)\text{συν}(x)}{1 + 2\text{συν}(x)}\,dx = \int_3^1 \frac{(u-1)(-du/2)}{u} = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{2}\Big[u - \ln u\Big]_1^3 = 1 - \frac{1}{2}\ln 3$$

Άρα

$$A + B = \frac{1}{2}\ln 3 + \left(1 - \frac{1}{2}\ln 3\right) = 1$$

42. Αν $f(2a - x) = f(x)$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx \;=\; 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Λύση: (Ασκ. 11/138)

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx.$$

Στο δεύτερο εφαρμόζουμε την αλλαγή $u = 2a - x$ (οπότε $dx = -du$). Όρια: $x = a \Rightarrow u = a$, $x = 2a \Rightarrow u = 0$. Τότε

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_a^0 f(2a - u)(-du) = \int_0^a f(2a - u)\,du.$$

Από την υπόθεση $f(2a - u) = f(u)$, άρα

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du.$$

Επομένως,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx, \qquad \square$$

43. Αν $f(2a-x) = -f(x)$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0.$$

Λύση: (Ασκ. 12/138)

Χωρίζουμε:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = 2a - x$ ($dx = -du$). Τότε, όταν $x = a \Rightarrow u = a$ και όταν $x = 2a \Rightarrow u = 0$, άρα

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_a^0 f(2a-u)(-du) = \int_0^a f(2a-u)\,du.$$

Με βάση την υπόθεση $f(2a-u) = -f(u)$, προκύπτει

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a \big(-f(u)\big)\,du = -\int_0^a f(u)\,du.$$

Επομένως,

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0, \qquad \square$$

44. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[0, a]$, $a > 0$. Να δείξετε ότι

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\,f(x)\,dx.$$

Λύση: (Ασκ. 13/139)

Θέτουμε $u = x^2$. Τότε $du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{2}$ και όταν $x : 0 \to a$ έχουμε $u : 0 \to a^2$. Επιπλέον,

$$x^3 dx = x^2 \cdot x\,dx = u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\,u\,du.$$

Άρα

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \int_0^{a^2} \frac{1}{2}\,u\,f(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} u\,f(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\,f(x)\,dx, \qquad \square$$

45. Αν f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να υπολογίσετε:

i. $\displaystyle\int_0^{2a} \frac{f(x)}{f(x)+f(2a-x)}\,dx$

ii. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx.$

Λύση: (Ασκ. 14/139)

i. Θέτουμε $u = 2a - x \Rightarrow du = -dx$. Όρια: $x = 0 \Rightarrow u = 2a$, $x = 2a \Rightarrow u = 0$. Τότε

$$\int_0^{2a} \frac{f(x)}{f(x)+f(2a-x)}\,dx = \int_{2a}^{0} \frac{f(2a-u)}{f(2a-u)+f(u)}\,(-du) = \int_0^{2a} \frac{f(2a-u)}{f(2a-u)+f(u)}\,du.$$

Αν ονομάσουμε

$$I = \int_0^{2a} \frac{f(x)}{f(x)+f(2a-x)}\,dx, \qquad J = \int_0^{2a} \frac{f(2a-x)}{f(2a-x)+f(x)}\,dx,$$

τότε από τα παραπάνω $J = I$ και επιπλέον, κατά σημείο,

$$\frac{f(x)}{f(x)+f(2a-x)} + \frac{f(2a-x)}{f(2a-x)+f(x)} = 1.$$

Άρα

$$I + J = \int_0^{2a} 1\,dx = 2a \;\Rightarrow\; 2I = 2a \;\Rightarrow\; I = a$$

ii. Ομοίως θέτουμε $u = \dfrac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx$. Όρια: $x = 0 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$. Με τα ίδια βήματα,

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx \quad \text{και} \quad L = \int_0^{\pi/2} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x)}\,dx$$

ικανοποιούν $K = L$ και

$$\frac{f(x)}{f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x)} = 1.$$

Επομένως

$$K + L = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2K = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; K = \frac{\pi}{4}$$

46. Δίνεται f με συνεχείς παράγωγους έως τάξη 2 στο $\mathbb{R}$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ και

$$\int_0^{\pi/2} \big(f(x) + f''(x)\big)\, \text{συν}(x)\, dx = 2.$$

Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

Λύση: (Ασκ. 15/139)

Θέτουμε

$$I = \int_0^{\pi/2} \big(f(x) + f''(x)\big)\, \text{συν}(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\text{συν}x\, dx + \int_0^{\pi/2} f''(x)\text{συν}x\, dx.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα μερική ολοκλήρωση με $u = \text{συν}x,\ dv = f''(x)\, dx$

(άρα $du = -\text{ημ}x\, dx,\ v = f'(x)$):

$$\int_0^{\pi/2} f''(x)\text{συν}x\, dx = \Big[\text{συν}x\, f'(x)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f'(x)\text{ημ}x\, dx.$$

Ξανά μερική ολοκλήρωση στο τελευταίο με $u = \text{ημ}x,\ dv = f'(x)\, dx$:

$$\int_0^{\pi/2} f'(x)\text{ημ}x\, dx = \Big[\text{ημ}x\, f(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f(x)\text{συν}x\, dx.$$

Άρα τα ολοκληρωτικά μέλη ακυρώνονται και

$$I = \Big[\text{συν}x\, f'(x) + \text{ημ}x\, f(x)\Big]_0^{\pi/2}.$$

Υπολογίζοντας στα άκρα:

$$I = \big(0 \cdot f'(\tfrac{\pi}{2}) + 1 \cdot f(\tfrac{\pi}{2})\big) - \big(1 \cdot f'(0) + 0 \cdot f(0)\big) = f\big(\tfrac{\pi}{2}\big) - f'(0).$$

Επειδή $I = 2$ και $f(\frac{\pi}{2}) = 3$,

$$2 = 3 - f'(0) \;\Rightarrow\; f'(0) = 1$$

47. Δίνονται συνεχείς $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = f(\pi - x) \quad \text{και} \quad g(x) + g(\pi - x) = \pi,\ \forall x \in [0,\pi].$$

i. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx$

ii. Να υπολογίσετε $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\,\text{ημ}(x)}{1+\text{συν}^2(x)}\,dx.$

Λύση: (Ασκ. 16/139)

i. Θέτουμε στο $I = \displaystyle\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$ την αλλαγή $u = \pi - x$ $(du = -dx)$.

Τότε

$$I = \int_0^\pi f(\pi - u)\,g(\pi - u)\,du = \int_0^\pi f(u)\,\big(\pi - g(u)\big)\,du,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις δοθείσες ιδιότητες.

Άρα

$$2I = \int_0^\pi f(x)\big(g(x) + g(\pi - x)\big)\,dx = \int_0^\pi f(x)\,\pi\,dx = \pi\int_0^\pi f(x)\,dx,$$

και επομένως

$$\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx$$

ii. Θέτουμε $f(x) = \dfrac{\text{ημ}(x)}{1+\text{συν}^2(x)}$ και $g(x) = x$.

Τότε $f(\pi - x) = \dfrac{\text{ημ}(\pi - x)}{1+\text{συν}^2(\pi - x)} = \dfrac{\text{ημ}(x)}{1+\text{συν}^2(x)} = f(x)$, ενώ $g(x) + g(\pi - x) = x + (\pi - x) = \pi$.

Άρα από (i):
$$\int_0^{\pi} \frac{x\,\etaμ(x)}{1+\sigmaυν^2(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\etaμ(x)}{1+\sigmaυν^2(x)}\,dx.$$
Υπολογίζουμε το δεξί ολοκλήρωμα με $u = \sigmaυν(x) \Rightarrow du = -\etaμ(x)\,dx$.

Για $x = 0 \Rightarrow u = 1$, για $x = \pi \Rightarrow u = -1$:

$$\int_0^{\pi} \frac{\etaμ(x)}{1+\sigmaυν^2(x)}\,dx = \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \big[\arctan u\big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Τελικά
$$\int_0^{\pi} \frac{x\,\etaμ(x)}{1+\sigmaυν^2(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

48. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$a^2 y = x^2(x+a) \qquad (a \neq 0)$$

και τον άξονα των τετμημένων είναι ίσο με $\dfrac{a^2}{12}$.

Λύση: (Ασκ. 17/139)

Η καμπύλη γράφεται $y = \dfrac{x^2(x+a)}{a^2}$.

Τα σημεία τομής με τον άξονα x προκύπτουν από $y = 0 \Rightarrow x^2(x+a) = 0$, άρα $x = 0$ (διπλή ρίζα) και $x = -a$.

Στο διάστημα $[-a, 0]$ έχουμε $y \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{-a}^{0} \frac{x^2(x+a)}{a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{0} \left(x^3 + ax^2\right)dx = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3}\right]_{-a}^{0}.$$

Υπολογίζοντας στα άκρα,

$$E = \frac{1}{a^2}\left(0 - \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{3}\right)\right) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^4}{12} = \frac{a^2}{12}$$

49. Το χωρίο που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα x. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.

Λύση: (Ασκ. 18/139)

Κάθε κάθετη στο x τομή δίνει δίσκο ακτίνας $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Άρα
$$A(x) = \pi\, y^2 = \pi \left(R^2 - x^2\right).$$

Ο όγκος είναι

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi \left(\frac{2}{3}R^3 - \left(-\frac{2}{3}R^3\right)\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

50. Έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να βρεθεί ο όγκος όταν περιστραφεί *κατά* π γύρω από:

i. τον άξονα x

ii. τον άξονα y

Λύση: (Ασκ. 19/139)

i. Γύρω από x: $y = \beta\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $x \in [-a, a]$. Κάθε τομή είναι *πλήρης δίσκος* ακτίνας y, άρα

$$A(x) = \pi y^2 = \pi\beta^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

$$V_x = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \pi\beta^2 \int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi\beta^2\left[\,x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi\, a\beta^2$$

ii. Γύρω από y: $x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}$, $y \in [-\beta, \beta]$. Κάθε τομή είναι πλήρης δίσκος ακτίνας x, άρα

$$A(y) = \pi x^2 = \pi a^2\left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right).$$

$$V_y = \int_{-\beta}^{\beta} A(y)\,dy = \pi a^2 \int_{-\beta}^{\beta}\left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)dy = \pi a^2\left[\,y - \frac{y^3}{3\beta^2}\right]_{-\beta}^{\beta} = \frac{4}{3}\pi\, \beta a^2$$

51. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y = 2$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x - x^2$ και της ευθείας $y = 2$.

Λύση: (Ασκ. 20/140)

Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπυλών $y = 3x - x^2$ και $y = 2$:

$$3x - x^2 = 2 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x-2) = 0,$$

άρα $x = 1$ και $x = 2$.

Στο διάστημα $x \in [1, 2]$ ισχύει $3x - x^2 \geq 2$. Με πλήρη στροφή γύρω από το $y = 2$ (μέθοδος *δίσκων/ροδέλων*) η ακτίνα είναι

$$r(x) = (3x - x^2) - 2 = -(x^2 - 3x + 2),$$

οπότε

$$A(x) = \pi r^2(x) = \pi\,(x^2 - 3x + 2)^2.$$

Ο όγκος είναι

$$V = \int_1^2 A(x)\,dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2\,dx = \pi \int_1^2 \big(x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4\big)\,dx.$$

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x\right]_1^2.$$

Υπολογίζοντας:

$$\left.\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x\right|_{x=2} = \frac{32}{5} - 24 + \frac{104}{3} - 24 + 8 = \frac{16}{15},$$

$$\left.\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x\right|_{x=1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{13}{3} - 6 + 4 = \frac{31}{30}.$$

Άρα

$$V = \pi\left(\frac{16}{15} - \frac{31}{30}\right) = \pi\left(\frac{32-31}{30}\right) = \frac{\pi}{30}.$$

52. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $x = 5$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \sqrt{x-1}$, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = 5$.

Λύση: (Ασκ. 21/140)

Η καμπύλη είναι $y = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = 1 + y^2$ με $y \geq 0$. Στο χωρίο έχουμε $0 \leq y \leq 2$, αφού στο $x = 5$ προκύπτει $y = \sqrt{4} = 2$.

Περιστρέφουμε γύρω από την κατακόρυφη ευθεία $x = 5$. Με *ροδέλες* (κάθετες στον άξονα στροφής), για σταθερό y η ακτίνα είναι

$$r(y) = 5 - x_{\text{αριστ.}} = 5 - (1 + y^2) = 4 - y^2.$$

Άρα το εμβαδόν της ροδέλας:

$$A(y) = \pi\, r^2(y) = \pi\, (4 - y^2)^2.$$

Ο όγκος:

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \pi \int_0^2 (4 - y^2)^2\, dy = \pi \int_0^2 \left(16 - 8y^2 + y^4\right) dy.$$

$$V = \pi \left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \pi \cdot \frac{256}{15}$$

53. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $x = e$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$ $(x > 0)$, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = e$.

Λύση: (Ασκ. 22/140)

Η καμπύλη είναι $y = \ln x \iff x = e^y$. Το χωρίο αντιστοιχεί σε $0 \leq y \leq 1$ ($x = 1$ όταν $y = 0$, $x = e$ όταν $y = 1$).

Περιστρέφουμε γύρω από την κατακόρυφη ευθεία $x = e$. Με *ροδέλες* (οριζόντιες τομές), για σταθερό y η ακτίνα είναι

$$r(y) = e - x_{\text{καμπ.}} = e - e^y.$$

Άρα

$$A(y) = \pi\, r^2(y) = \pi\, (e - e^y)^2.$$

Ο όγκος:

$$V = \int_0^1 A(y)\, dy = \pi \int_0^1 (e - e^y)^2\, dy = \pi \int_0^1 \left(e^2 - 2e\, e^y + e^{2y}\right) dy.$$

$$V = \pi \left[e^2 y - 2e\, e^y + \frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1 = \pi\left(-\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(4e - e^2 - 1\right)$$

54. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x$:

i. γύρω από την ευθεία $y = 1$

ii. γύρω από την ευθεία $x = 2$

Λύση: (Ασκ. 23/140)

Οι καμπύλες τέμνονται όταν $x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$, άρα στα $x = 0, 1$. Στο $[0,1]$ ισχύει $x \geq x^2$.

i. *Γύρω από $y = 1$ (ροδέλες).* Για σταθερό $x \in [0,1]$,

$$R(x) = 1 - x^2, \qquad r(x) = 1 - x,$$

οπότε

$$V_{(i)} = \pi \int_0^1 \left(R^2 - r^2\right) dx = \pi \int_0^1 \Big[(1-x^2)^2 - (1-x)^2\Big] dx = \pi \int_0^1 \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right) dx.$$

$$V_{(i)} = \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} - 1 + 1\right) = \frac{\pi}{5}$$

ii. *Γύρω από $x = 2$ (κυλινδρικά κελύφη).* Ύψος $h(x) = x - x^2$, ακτίνα $\rho(x) = 2 - x$:

$$V_{(ii)} = 2\pi \int_0^1 \rho(x)\, h(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 (2-x)(x-x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 \left(2x - 3x^2 + x^3\right) dx.$$

$$V_{(ii)} = 2\pi \left[x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(1 - 1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - x^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα των τετμημένων γύρω από:

i. τον άξονα των τεταγμένων (y-άξονα)
ii. την ευθεία $x = -2$.

Λύση: (Ασκ. 24/140)

Το χωρίο ορίζεται από $y = f(x) = x - x^2$ και $y = 0$. Τα σημεία τομής είναι $x - x^2 = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$, άρα $x \in [0,1]$ και στο $[0,1]$ ισχύει $f(x) \geq 0$.

i. *Γύρω από τον άξονα y (κυλινδρικά κελύφη).* Για $x \in [0,1]$: ακτίνα $\rho(x) = x$, ύψος $h(x) = f(x) = x - x^2$.

$$V_{(i)} = 2\pi \int_0^1 \rho(x)h(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x(x-x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx.$$

$$V_{(i)} = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$$

ii. *Γύρω από την ευθεία $x = -2$ (κυλινδρικά κελύφη).* Για $x \in [0,1]$: ακτίνα $\rho(x) = x - (-2) = x + 2$, ύψος $h(x) = x - x^2$.

$$V_{(ii)} = 2\pi \int_0^1 (x+2)(x-x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 \big(-x^3 - x^2 + 2x\big)\,dx.$$

$$V_{(ii)} = 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

56. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και m, M είναι, αντίστοιχα, η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο $[\alpha,\beta]$, να αποδειχθεί ότι

$$m(\beta-\alpha) \;\le\; \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \;\le\; M(\beta-\alpha).$$

Λύση: (Ασκ. 1/141)

Εφόσον f είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, από το θεώρημα Weierstrass παίρνουμε ότι $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ με

$$m = \min_{[\alpha,\beta]} f, \qquad M = \max_{[\alpha,\beta]} f,$$

ώστε

$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [\alpha,\beta].$$

Ολοκληρώνοντας κατά x στο $[\alpha,\beta]$ και χρησιμοποιώντας τη *μονοτονία* του οριστικού ολοκληρώματος, παίρνουμε

$$\int_\alpha^\beta m\,dx \;\le\; \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \;\le\; \int_\alpha^\beta M\,dx.$$

Επειδή $\displaystyle\int_\alpha^\beta m\,dx = m(\beta-\alpha)$ και $\displaystyle\int_\alpha^\beta M\,dx = M(\beta-\alpha)$, καταλήγουμε

$$m(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \le M(\beta-\alpha)$$

57. Να μελετήσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη *μονοτονία* και τα *ακρότατά* τους:

$$\text{i.}\quad F(x) = \int_{-2}^{x} (t^3 - 4t)\, dt \qquad \text{και} \qquad \text{ii.}\quad F(x) = \int_{2}^{x^2} \frac{\ln t}{t}\, dt.$$

Λύση: (Ασκ. 2/141)

i. Από το *Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού* έχουμε

$$F'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2).$$

Θέτουμε $F'(x) = 0 \Rightarrow x = -2,\, 0,\, 2$.

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$\searrow$		TE		$\nearrow$		TM		$\searrow$

Άρα η συνάρτηση:

$$\text{ελαττώνεται στα } (-\infty, -2) \cup (0, 2), \quad \text{αυξάνεται στα } (-2, 0) \cup (2, +\infty),$$

και έχει:

$$\text{τοπικά ελάχιστα στα } x = -2,\, 2, \quad \text{και τοπικό μέγιστο στο } x = 0.$$

ii. Έχουμε

$$F(x) = \int_{2}^{x^2} \frac{\ln t}{t}\, dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{x^2} \frac{\ln t}{t}\, dt \right) = \frac{\ln(x^2)}{x^2} \cdot 2x = 2\,\frac{\ln(x^2)}{x}.$$

Για $x \neq 0$, γράφουμε $F'(x) = 4\,\dfrac{\ln|x|}{x}$.

Επειδή το ολοκλήρωμα ορίζεται για $x^2 \geq 2$, το πεδίο ορισμού είναι

$$D_F = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty).$$

Για $x \geq \sqrt{2}$ έχουμε $F'(x) = \dfrac{4\ln x}{x} > 0 \Rightarrow F$ *αυξάνεται.*

Για $x \leq -\sqrt{2}$ έχουμε $F'(x) = \dfrac{4\ln|x|}{x} < 0 \Rightarrow F$ *φθίνει.*

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$\searrow$				$\nearrow$

Άρα η F φθίνει στο $(-\infty,-\sqrt{2}]$ και αυξάνεται στο $[\sqrt{2},+\infty)$, χωρίς εσωτερικά ακρότατα.

58. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \big(\text{ημ}(t)-t\big)\,dt}{\text{ημ}(x)-x\,\text{συν}(x)}.$$

Λύση: (Ασκ. 3/141)

Θέτουμε

$$N(x)=\int_0^x \big(\text{ημ}(t)-t\big)\,dt,\qquad D(x)=\text{ημ}(x)-x\,\text{συν}(x).$$

Έχουμε $N(0)=D(0)=0$. Με de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{N'(x)}{D'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(x)-x}{x\,\text{ημ}(x)}.$$

Το πηλίκο είναι ακόμη $0/0$. Εφαρμόζουμε ξανά:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{ημ}(x)-x}{x\,\text{ημ}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}(x)-1}{\text{ημ}(x)+x\,\text{συν}(x)}.$$

Όπου είναι και πάλι $0/0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}(x)-1}{\text{ημ}(x)+x\,\text{συν}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{ημ}(x)}{2\,\text{συν}(x)-x\,\text{ημ}(x)}=\frac{-0}{2\cdot 1-0}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\text{ημ}(t)-t)\,dt}{\text{ημ}(x)-x\,\text{συν}(x)}=0$$

59. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι *γνησίως μονότονη* και *συνεχής* στο $[\alpha, \beta]$ (ώστε να υπάρχει το f^{-1} στο $[f(\alpha), f(\beta)]$) και *παραγωγίσιμη* στο (α, β), να αποδειχθεί και να ερμηνευθεί γραφικά ότι:

i. $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta x\,f'(x)\,dx,$ ii. $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha).$

Λύση: (Ασκ. 4/141)

i. Απόδειξη: Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής, το f^{-1} υπάρχει στο $[f(\alpha), f(\beta)]$. Θέτουμε $y = f(x)$. Τότε $dy = f'(x)\,dx$ και όταν $x = \alpha, \beta$ έχουμε $y = f(\alpha), f(\beta)$. Με *ολική μεταβολή* (substitution):

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f^{-1}(f(x))\,f'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta x\,f'(x)\,dx.$$

(Ο τύπος ισχύει και όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα: τότε αντιστρέφονται τα όρια και το πρόσημο συμπίπτει με εκείνο του $\int_\alpha^\beta x f'(x)\,dx$.)

ii. Απόδειξη: Εφαρμόζοντας *μερική ολοκλήρωση* στο $\displaystyle\int_\alpha^\beta x f'(x)\,dx$ παίρνουμε

$$\int_\alpha^\beta x f'(x)\,dx = \Big[x\,f(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Με βάση το (α),

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

που ισοδυναμεί με τον ζητούμενο τύπο (β).

Γραφική ερμηνεία του (ii.) Θεωρήστε το *ορθογώνιο* με κορυφή το $(\beta, f(\beta))$ και γωνία στο $O = (0,0)$. Η επιφάνειά του είναι $\beta f(\beta)$. Αφαιρώντας το μικρότερο ορθογώνιο με κορυφή $(\alpha, f(\alpha))$ απομένει μια *Γ-σχήματος* περιοχή εμβαδού $\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$. Αυτή η περιοχή διαμερίζεται ακριβώς σε δύο *μη επικαλυπτόμενα* μέρη:

$$\underbrace{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}_{\text{εμβαδόν κάτω από } y=f(x)} \qquad + \qquad \underbrace{\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)\,dy}_{\text{εμβαδόν αριστερά από } x=f^{-1}(y)} \qquad .$$

Άρα $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1} + \int_\alpha^\beta f = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$. (Η ίδια ερμηνεία ισχύει και για γνησίως φθίνουσα f, με τα όρια να λαμβάνονται με τη σωστή σειρά.)

60. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4x-2)\,dx$

ii. $\displaystyle\int_1^4 \left(2\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

iii. $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

iv. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3\,\text{συν}x+2\,\text{ημ}x-\frac{4}{\text{συν}^2x}\right)dx$

v. $\displaystyle\int_{-1}^3 (x^3-7x+2)\,dx+\int_{-1}^3 (3x^3+7x-2)\,dx$

vi. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx+\int_1^0 \frac{2}{x^2+1}\,dx$

vii. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/107)

i.

$$\int_0^1 (3x^2+4x-2)\,dx=\Big[x^3+2x^2-2x\Big]_0^1=1+2-2=1$$

ii.

$$\int \Big(2x^{1/2}+4x^{-1/2}+1\Big)dx=\frac{4}{3}x^{3/2}+8x^{1/2}+x.$$

$$\Rightarrow\ \Big[\tfrac{4}{3}x^{3/2}+8x^{1/2}+x\Big]_1^4=\big(\tfrac{32}{3}+16+4\big)-\big(\tfrac{4}{3}+8+1\big)=\tfrac{61}{3}$$

iii. Επειδή $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-2/3}$,

$$\int x^{-2/3}dx=3x^{1/3}\ \Rightarrow\ \Big[3x^{1/3}\Big]_1^8=3(2-1)=3$$

iv.

$$\int_0^{\pi/4}\left(3\,\text{συν}x+2\,\text{ημ}x-\frac{4}{\text{συν}^2x}\right)dx=\Big[3\,\text{ημ}x-2\,\text{συν}x-4\,\text{εφ}x\Big]_0^{\pi/4}.$$

Με ημ$\frac{\pi}{4}$ = συν$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, εφ$\frac{\pi}{4} = 1$:

$$\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 4\right) - (-2) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 2$$

v. Ίδια όρια $\Rightarrow$ αθροίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int_{-1}^{3} \Big[(x^3 - 7x + 2) + (3x^3 + 7x - 2)\Big] dx = \int_{-1}^{3} 4x^3\,dx = 4\Big[\tfrac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{3} = 80$$

vi. $\displaystyle\int_1^0 \frac{2}{x^2+1}dx = -\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1}dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

vii. $\displaystyle\frac{x^2+3}{x^2+1} = 1 + \frac{2}{x^2+1}$. Έτσι

$$\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}dx = \Big[x\Big]_0^1 + 2\Big[\arctan x\Big]_0^1 = 1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

61. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int_1^2 (x^3+1)^2 x^2\,dx$

ii. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

iii. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2x+7}{x^2+7x+12}\,dx$

iv. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{3}{4x\sqrt[3]{\ln x}}\,dx$

v. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(3\,\text{εφ}x + 1)^2\,\text{τεμ}^2 x\,dx$

Λύση: (Ασκ. 2/107)

i. Θέτουμε $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$.

$$\int_1^2 (x^3+1)^2 x^2\, dx = \frac{1}{3}\int_{u(1)=2}^{u(2)=9} u^2\, du = \frac{1}{3}\Big[\frac{u^3}{3}\Big]_2^9 = \frac{1}{9}(729-8) = \frac{721}{9}$$

ii. Θέτουμε $u = x^2 + 4 \Rightarrow du = 2x\, dx \Rightarrow x\, dx = \frac{du}{2}$.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx = \frac{1}{2}\int_4^{13} u^{-1/2}\, du = \Big[\sqrt{u}\Big]_4^{13} = \sqrt{13} - 2.$$

iii. Παραγοντοποιούμε $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$. Με *μερική κλασματική ανάλυση*:

$$\frac{2x+7}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} \Rightarrow 2x + 7 = A(x+4) + B(x+3).$$

Άρα

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ 4A + 3B = 7 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ B = 1.$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{2x+7}{x^2+7x+12}\, dx = \int_{-2}^{-1} \Big(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\Big) dx = \Big[\ln|x+3| + \ln|x+4|\Big]_{-2}^{-1}.$$

$$= \ln\frac{(-1+3)(-1+4)}{(-2+3)(-2+4)} = \ln\frac{(2)(3)}{(1)(2)} = \ln 3.$$

iv. Θέτουμε $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$. Όρια: $x = e \Rightarrow u = 1,\ x = e^2 \Rightarrow u = 2$.

$$\int_e^{e^2} \frac{3}{4x\sqrt[3]{\ln x}}\, dx = \frac{3}{4}\int_1^2 u^{-1/3}\, du = \frac{3}{4}\Big[\frac{u^{2/3}}{2/3}\Big]_1^2 = \frac{9}{8}\big(2^{2/3} - 1\big).$$

v. Θέτουμε $u = 3\,\text{εφ}x + 1 \Rightarrow du = 3\,\text{τεμ}^2 x\, dx \Rightarrow \text{τεμ}^2 x\, dx = \frac{du}{3}$.

$$\int_0^{\pi/4} 2(3\,\text{εφ}x + 1)^2\, \text{τεμ}^2 x\, dx = \frac{2}{3}\int_{u(0)=1}^{u(\pi/4)=4} u^2\, du = \frac{2}{3}\Big[\frac{u^3}{3}\Big]_1^4 = \frac{2}{9}(64-1) = \frac{126}{9} = 14$$

62. Χρησιμοποιώντας την υποδεικνυόμενη αντικατάσταση (ή οποιαδήποτε άλλη), να υπολογίσετε:

i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4}\,dx, \qquad t = x+1$

ii. $\displaystyle\int_2^7 x\sqrt{x+2}\,dx, \qquad u = \sqrt{x+2}$

Λύση: (Ασκ. 3/108)

i. Θέτουμε $t = x+1 \Rightarrow x = t-1,\ dx = dt$. Όρια: $x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4}dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t^4}\,dt = \int_1^2 \left(t^{-3} - t^{-4}\right)dt = \Big[-\tfrac{1}{2t^2} + \tfrac{1}{3t^3}\Big]_1^2 = \frac{1}{12}$$

ii. Θέτουμε $u = \sqrt{x+2} \Rightarrow u^2 = x+2 \Rightarrow x = u^2 - 2,\ dx = 2u\,du$. Όρια: $x = 2 \Rightarrow u = 2,\ x = 7 \Rightarrow u = 3$.

$$\int_2^7 x\sqrt{x+2}\,dx = \int_2^3 (u^2-2)\,u\,(2u)\,du = \int_2^3 2\big(u^4 - 2u^2\big)\,du = \Big[\tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{4}{3}u^3\Big]_2^3 = \frac{886}{15}$$

63. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται (ή οποιαδήποτε άλλη), να υπολογίσετε:

i. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \text{συν}^5 x\,\text{ημ}^2 x\,dx, \qquad t = \text{ημ}x$

ii. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx, \qquad x = 4\text{ημ}\theta,\ \theta \in \Big[0, \tfrac{\pi}{2}\Big]$

iii. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,dx, \qquad x = \text{εφ}\,\theta,\ \theta \in \Big[0, \tfrac{\pi}{2}\Big)$

Λύση: (Ασκ. 4/108)

i. Με $t = \text{ημ}x \Rightarrow dt = \text{συν}x\,dx$ και $\text{συν}^5 x\,\text{ημ}^2 x = (1-t^2)^2 t^2\,dt$.

Όρια: $x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{\pi/6} \text{συν}^5 x\,\text{ημ}^2 x\,dx = \int_0^{1/2} \big(t^2 - 2t^4 + t^6\big)\,dt = \Big[\tfrac{t^3}{3} - \tfrac{2t^5}{5} + \tfrac{t^7}{7}\Big]_0^{1/2} = \frac{407}{13440}$$

ii. Με $x = 4\etaμ\theta \Rightarrow dx = 4\sigmaυν\theta\, d\theta$ και $\sqrt{16-x^2} = 4\sigmaυν\theta$. Όρια: $x=0 \Rightarrow \theta = 0,\ x=4 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 16\,\sigmaυν^2\theta\,d\theta = 16\Big[\tfrac{\theta}{2} + \tfrac{\etaμ(2\theta)}{4}\Big]_0^{\pi/2} = 4\pi$$

iii. Με $x = \varepsilon\varphi\,\theta \Rightarrow dx = \tauεμ^2\theta\,d\theta$ και $x^2+1 = \tauεμ^2\theta$. Όρια: $x=0 \Rightarrow \theta=0,\ x=1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^4\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} (\tauεμ^2\theta - 1)^2\,d\theta = \Big[\tfrac{1}{3}\varepsilon\varphi^3\theta - \varepsilon\varphi\,\theta + \theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

64. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} \etaμ^3 x\,dx = \frac{4}{3}.$$

Λύση: (Ασκ. 5/108)

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ανάλυση:

$$\etaμ^3 x = \etaμ x\,(1 - \sigmaυν^2 x).$$

Θέτουμε $t = \sigmaυν x \Rightarrow dt = -\etaμ x\,dx$. Όρια: $x=0 \Rightarrow t=1,\ x=\pi \Rightarrow t=-1$.

$$\int_0^{\pi} \etaμ^3 x\,dx = \int_1^{-1} -(1-t^2)\,dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt = \Big[t - \frac{t^3}{3}\Big]_{-1}^{1}.$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{3}\Big) - \Big(-1 + \frac{1}{3}\Big) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

65. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα με *παραγοντική ολοκλήρωση*:

i. $\displaystyle\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$

ii. $\displaystyle\int_0^{1/2} x\,\etaμ(2x)\,dx$

iii. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^4}\,dx$

iv. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^x\,\etaμ(3x)\,dx$

Λύση: (Ασκ. 7/108)

i.
$$\int_0^1 (x-1)e^x dx = \Big[(x-2)e^x\Big]_0^1 = (-e)-(-2) = 2-e$$

ii. Θέτουμε $u=x,\ dv = \text{ημ}(2x)\,dx \Rightarrow du = dx,\ v = -\frac{1}{2}\text{συν}(2x)$.
$$\int_0^{1/2} x\,\text{ημ}(2x)\,dx = \Big[-\tfrac{x}{2}\text{συν}(2x)\Big]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\text{συν}(2x)\,dx = \tfrac{1}{4}\big(\text{ημ}1-\text{συν}1\big)$$

iii. Παίρνουμε $u=\ln x,\ dv = x^{-4}dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx,\ v = -\frac{1}{3}x^{-3}$.
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^4}dx = \Big[-\tfrac{\ln x}{3x^3}\Big]_1^e + \frac{1}{3}\int_1^e x^{-4}dx = -\frac{1}{3e^3} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{e^3}-1\right) = \frac{1}{9}\left(1-4e^{-3}\right)$$

iv. Είναι γνωστό ότι
$$\int e^x\text{ημ}(3x)\,dx = \frac{e^x}{1^2+3^2}\Big(\text{ημ}(3x) - 3\,\text{συν}(3x)\Big) = \frac{e^x}{10}\big(\text{ημ}(3x)-3\text{συν}(3x)\big).$$
Άρα
$$\int_0^{\pi/4} e^x\text{ημ}(3x)\,dx = \left[\frac{e^x}{10}\big(\text{ημ}(3x)-3\text{συν}(3x)\big)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{5}\,e^{\pi/4} + \frac{3}{10}$$

66. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int_4^5 \frac{x+1}{x-3}\,dx$

ii. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x+8}{x^2+x-2}\,dx$

iii. $\displaystyle\int_{1/2}^3 \frac{x^3}{x-1}\,dx$

iv. $\displaystyle\int_{1/2}^3 \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 8/109)

i. $\dfrac{x+1}{x-3}=1+\dfrac{4}{x-3}$.

$$\int_4^5 \frac{x+1}{x-3}\,dx=\Big[x\Big]_4^5+4\Big[\ln|x-3|\Big]_4^5=1+4\ln 2.$$

ii. Παράγοντες: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. Με *μερική κλασματική ανάλυση*

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{-2}{x+2}+\frac{3}{x-1}.$$

Άρα

$$\int_2^4 \frac{x+8}{x^2+x-2}\,dx=\Big[-2\ln|x+2|+3\ln|x-1|\Big]_2^4=\ln 12$$

iii. Χωρίζουμε:

$$\frac{x^3}{x-1}=\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=x^2+x+1+\frac{1}{x-1}.$$

$$\int_{1/2}^3 \frac{x^3}{x-1}\,dx=\Big[\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\Big]_{1/2}^3=\frac{95}{6}+2\ln 2$$

iv. $\dfrac{x^2+3}{x^2-1}=1+\dfrac{4}{x^2-1}=1+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$.

$$\int_{1/2}^3 \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx=\Big[x+2\ln|x-1|-2\ln|x+1|\Big]_{1/2}^3=\frac{5}{2}+2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

67. Να υπολογίσετε:

$$\int_0^4 \left|x^2-4x+3\right|dx.$$

Λύση: (Ασκ. 9/109)

Παραγοντοποιούμε $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Τα *μηδενικά* είναι $x=1,3$. Επειδή η παραβολή έχει θετικό συντελεστή στο x^2, ισχύει

$$x^2-4x+3\begin{cases}>0, & x\in[0,1]\cup[3,4],\\ <0, & x\in(1,3).\end{cases}$$

Άρα

$$\int_0^4 \left|x^2-4x+3\right| dx = \int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx - \int_1^3 (x^2-4x+3)\,dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx.$$

Θέτουμε $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$. Τότε:

$$\int_0^1 = F(1)-F(0)=\frac{4}{3}, \qquad \int_1^3 = F(3)-F(1)=0-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}, \qquad \int_3^4 = F(4)-F(3)=\frac{4}{3}.$$

Επομένως

$$\int_0^4 \left|x^2-4x+3\right| dx = \frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}=4$$

68. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx, \qquad f(x)=\begin{cases} x\,e^{-x}, & -1\le x<0,\\ \ln(x+1), & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Λύση: (Ασκ. 10/109)

Διασπάμε στο σημείο αλλαγής:

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 xe^{-x}\,dx + \int_0^2 \ln(x+1)\,dx.$$

Για το πρώτο,

$$\int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} \;\Rightarrow\; \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{-1}^0 = -1-0=-1.$$

Για το δεύτερο, με $u=x+1$ ($u:1\to 3$):

$$\int_0^2 \ln(x+1)\,dx = \int_1^3 \ln u\,du = \Big[u\ln u - u\Big]_1^3 = 3\ln 3 - 2.$$

Συνεπώς

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx = (-1)+(3\ln 3-2) = 3\ln 3 - 3$$

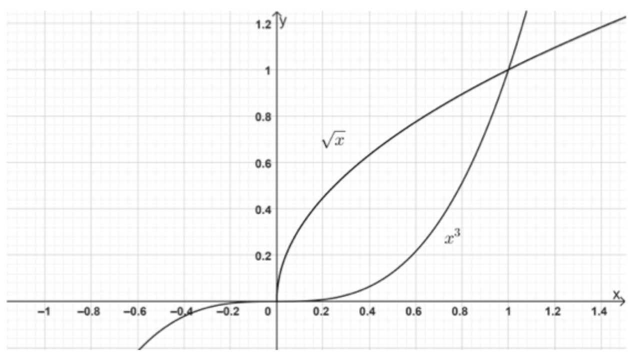
Θέματα Εξετάσεων

1. Έστω T το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$ και $y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T.

ii. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

Λύση: 2025



Οι καμπύλες τέμνονται όταν:

$$x^3 = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x^6 = x \;\Rightarrow\; x(x^5 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

i. Είναι:

$$E = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

ii. Είναι:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = y^4, \quad y = x^3 \Rightarrow x^2 = y^{2/3}.$$

Συνεπώς:

$$V = \pi \int_0^1 \left(y^{2/3} - y^4\right)\, dy = \pi \left[\frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

2. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδειχθεί ότι:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx$$

ii. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = 0$$

iii. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}}\,dx = \pi$$

Λύση: 2025

i. Είναι:

$$dx = -du, \quad x = a \Rightarrow u = -a,\ x = -a \Rightarrow u = a.$$

Συνεπώς:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{-a} f(-u)\,(-du) = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx.$$

ii. Έστω ότι $a = 1$ και $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$. Τότε από το (i) έχουμε ότι:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{-x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0.$$

Άρα:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = 0.$$

iii. Έστω ότι $a = \pi$ και $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\sin x}}$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Τότε από το (i) έχουμε ότι:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\sin(-x)}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{-\sin x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}}\,dx.$$

Είναι:

$$2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

Άρα:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\sin x}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\sin x}}{1+e^{\sin x}}\,dx = \pi.$$

3. Θεωρούμε το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x) = (x+2)^2,$$

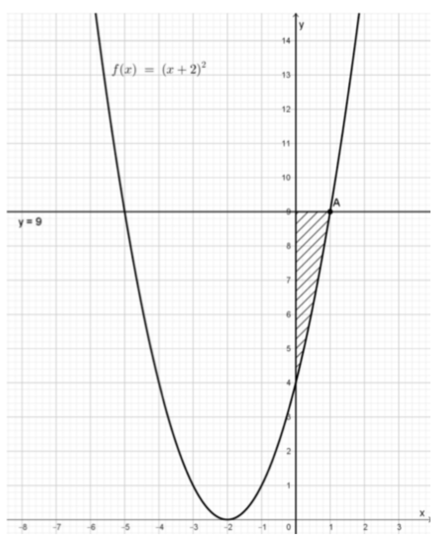
την ευθεία $y = 9$ και τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε:

i. το εμβαδόν του πιο πάνω χωρίου

ii. τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

Λύση: 2024

Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της παραβολής και της ευθείας, όπως φαίνεται στο σχήμα.



i. Βρίσκουμε το σημείο τομής ευθείας–παραβολής A στο πρώτο τεταρτημόριο:

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)^2 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2 = 9 \Rightarrow x+2 = \pm 3.$$

Επειδή το A βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, παίρνουμε $x+2=3 \Rightarrow x=1$. Άρα $A(1,9)$.

$$E = \int_0^1 (y_{\text{επάνω}} - y_{\text{κάτω}})\,dx = \int_0^1 (9 - f(x))\,dx = \int_0^1 (9-(x+2)^2)\,dx$$

$$E = \left[9x - \frac{(x+2)^3}{3}\right]_0^1 = 9 - \frac{27}{3} - \left(0 - \frac{8}{3}\right) = 9 - 9 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}.$$

ii. Λύνουμε τον τύπο της παραβολής ως προς x:

$$y = (x+2)^2 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{y}.$$

Για τον δεξιό κλάδο της παραβολής ισχύει $x = \sqrt{y} - 2$. Σημείο τομής παραβολής με άξονα τεταγμένων:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (0+2)^2 = 4 \Rightarrow (0,4).$$

Το ζητούμενο χωρίο βρίσκεται για $y \in [4,9]$. Ο όγκος του στερεού περιστροφής γύρω από τον άξονα των τεταγμένων είναι:

$$V_y = \pi \int_4^9 x^2\,dy = \pi \int_4^9 (\sqrt{y}-2)^2\,dy = \pi \int_4^9 (y - 4\sqrt{y} + 4)\,dy.$$

$$V_y = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{8}{3}y^{3/2} + 4y\right]_4^9$$

$$= \pi \left[\frac{81}{2} - \frac{8}{3}\cdot 27 + 36 - \left(\frac{16}{2} - \frac{8}{3}\cdot 8 + 16\right)\right]$$

$$= \pi\left(\frac{81}{2} - 72 + 36 - 8 + \frac{64}{3} - 16\right) = \pi\left(\frac{81}{2} - 60 + \frac{64}{3}\right) = \frac{11\pi}{6}.$$

4. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να υπολογίσετε το πιο κάτω ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Λύση: 2024

Χρησιμοποιούμε τη διαμέριση:

$$\Delta_\nu = \{0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu = 1\}$$

του διαστήματος $[0,1]$, όπου:

$$\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu} = \frac{1-0}{\nu} = \frac{1}{\nu}$$

και
$$x_\kappa = \alpha + \kappa \cdot \Delta x = 0 + \kappa \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu.$$
Επίσης:
$$f(x) = x^2,$$
η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Επιλέγουμε:
$$\xi_\kappa = x_\kappa = \frac{\kappa}{\nu}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu.$$
Άρα:
$$f(\xi_\kappa) = f(x_\kappa) = x_\kappa^2 = \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{\nu^2}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \nu.$$

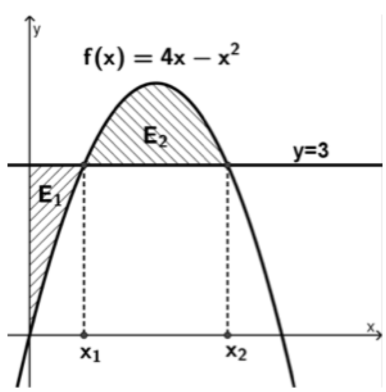
Ενώ:
$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa) \cdot \Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{\kappa^2}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu^3} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 = \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2).$$
$$= \frac{1}{\nu^3} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\left(2 + \frac{1}{\nu}\right).$$

Άρα:
$$\int_0^1 x^2\, dx = \lim_{\nu \to +\infty} S_\nu = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\left(2 + \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

5. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4x - x^2$ στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2, και σχηματίζει τα χωρία E_1 και E_2, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E_1.

ii. Να δείξετε ότι τα χωρία E_1 και E_2 είναι ισεμβαδικά.



Λύση: 2023

Σημεία τομής ευθείας – καμπύλης:

$$4x - x^2 = 3 \ \Rightarrow \ x^2 - 4x + 3 = 0 \ \Rightarrow \ (x-1)(x-3) = 0 \ \Rightarrow \ x = 1 \text{ ή } x = 3.$$

i. Υπολογισμός E_1:

$$E_1 = \int_0^1 \big[3 - (4x - x^2)\big]\,dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

$$E_1 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}.$$

ii. Υπολογισμός E_2:

$$E_2 = \int_1^3 \big[4x - x^2 - 3\big]\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^3.$$

$$E_2 = (18 - 9 - 9) - (2 - \tfrac{1}{3} - 3) = \frac{4}{3}.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα δύο χωρία είναι ισεμβαδικά:

$$E_1 = E_2 = \frac{4}{3}.$$

6. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 - x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}\,dx = \int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\kappa}\,dx, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{N}.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x(1-x)^{10}\,dx$$

Λύση: 2023

Θέτουμε:

$$u = 1 - x \Rightarrow x = 1 - u \Rightarrow dx = -du.$$

Για $x = 0 \Rightarrow u = 1$ και για $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

Επομένως:

$$\int_0^1 x^\kappa (1-x)^\lambda \, dx = -\int_1^0 (1-u)^\kappa u^\lambda \, du = \int_0^1 (1-u)^\kappa u^\lambda \, du = \int_0^1 x^\lambda (1-x)^\kappa \, dx.$$

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω με $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$:

$$\int_0^1 x(1-x)^{10} \, dx = \int_0^1 (1-x)x^{10} \, dx = \int_0^1 (x^{10} - x^{11}) \, dx.$$

$$= \left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{1}{132}.$$

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,4)$. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,2]$,

i. να δείξετε ότι $f(x) \leq 2x, \ \forall x \in [0,2]$

ii. να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x) \, dx \leq 4$

Λύση: 2023

i. Η f είναι συνεχής και κυρτή στο διάστημα $[0,2]$, άρα:

$$f(x) \leq y_{OA}, \quad \forall x \in [0,2].$$

Εξίσωση ευθείας OA:

$$\lambda_{OA} = \frac{4-0}{2-0} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x.$$

Άρα:

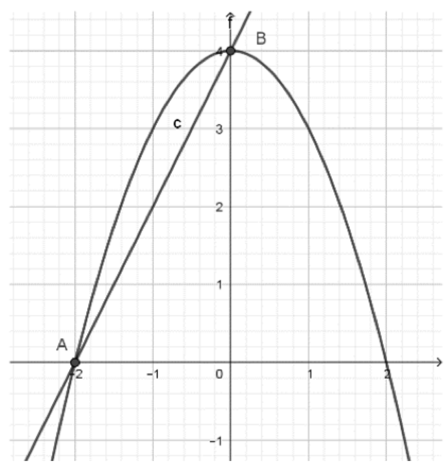
$$f(x) \leq 2x, \quad \forall x \in [0,2].$$

ii. Από το (i) έχουμε:

$$f(x) \leq 2x, \quad \forall x \in [0,2] \Rightarrow \int_0^2 f(x) \, dx \leq \int_0^2 2x \, dx \implies \int_0^2 f(x) \, dx \leq \left[x^2\right]_0^2 = 4 \Rightarrow \int_0^2 f(x) \, dx \leq 4$$

8. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x + 4.$$



i. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου T, το οποίο περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

ii. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

Λύση: 2022

Εύρεση σημείων τομής:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 4 = 2x + 4 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 0.$$

Άρα, $A(-2, 0)$ και $B(0, 4)$.

i.

$$E = \int_{-2}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_{-2}^{0} \big(-x^2 + 4 - 2x - 4\big)\,dx = \int_{-2}^{0} (-x^2 - 2x)\,dx.$$

$$E = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right) = \frac{8}{3} - 4 = \frac{4}{3}.$$

$$E = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

ii.
$$V = \pi \int_{-2}^{0} \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx = \pi \int_{-2}^{0} \left((-x^2+4)^2 - (2x+4)^2\right) dx.$$
$$V = \pi \int_{-2}^{0} (x^4 - 12x^2 - 16x)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 4x^3 - 8x^2\right]_{-2}^{0}.$$
$$V = \pi \left(0 - \left(\frac{(-2)^5}{5} - 4(-2)^3 - 8(-2)^2\right)\right) = \pi\left(\frac{32}{5} - 32 + 32\right) = \frac{32\pi}{5}.$$
$$V = \frac{32}{5}\pi \text{ κ.μ.}$$

9. Έστω το ολοκλήρωμα
$$I(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\, dt, \quad \text{με } x > 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι
$$I(x) = 2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}.$$

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

Λύση: 2022

i.
$$I(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\, dt.$$
Με ολοκλήρωση κατά μέρη:
$$u = t^2, \quad dv = e^{-t}dt \quad \Rightarrow \quad du = 2t\, dt, \quad v = -e^{-t}.$$
Άρα:
$$I(x) = -t^2e^{-t}\Big|_0^x + 2\int_0^x te^{-t}\, dt.$$
Υπολογίζουμε ξανά κατά μέρη το $\int_0^x te^{-t}\, dt$:
$$u = t, \quad dv = e^{-t}dt \Rightarrow du = dt,\ v = -e^{-t}.$$
$$\int_0^x te^{-t}\, dt = -te^{-t}\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t}\, dt = -xe^{-x} + (1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}(x+1).$$

Επομένως:

$$I(x) = -x^2e^{-x} + 2\big[1 - e^{-x}(x+1)\big] = 2 - e^{-x}(x^2+2x+2) = 2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}.$$

ii.

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{x^2+2x+2}{e^x}\right) = 2 - \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2}{e^x}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+2) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$, οπότε εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα του De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = 2 - 0 = 2.$$

10. Είναι συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $a>0$.

i. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=-x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx$$

ii. Αν $g(x) = f(x) + f(-x),\ x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} g(x)\,dx$$

iii. Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2+16} + \sigma\upsilon\nu\, 2x\right)dx$$

Λύση: 2022

i. Θέτουμε $u = -x \Rightarrow dx = -du$

x	u
$-a$	a
a	$-a$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{-a} f(-u)\,(-du) = \int_{-a}^{a} f(-u)\,du = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx.$$

ii. Εφόσον $f(x) + f(-x) = g(x)$, έχουμε:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx.$$

Από το (i):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx \Rightarrow 2\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} g(x)\,dx.$$

iii. Έστω

$$f(x) = \frac{x^3 - \etaμ^5 x}{x^2+16} + συν\,2x.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$g(x) = f(x) + f(-x) = \left[\frac{x^3 - ημ^5 x}{x^2+16} + συν\,2x\right] + \left[\frac{-x^3 + ημ^5 x}{x^2+16} + συν(-2x)\right].$$

$$g(x) = \frac{x^3 - ημ^5 x - x^3 + ημ^5 x}{x^2+16} + συν\,2x + συν\,2x = 2\,συν\,2x.$$

Άρα, από το (ii) έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - ημ^5 x}{x^2+16} + συν\,2x\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\,συν\,2x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} συν\,2x\,dx.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} συν\,2x\,dx = \left[\frac{ημ\,2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{ημ\,2\pi - ημ(-2\pi)}{2} = 0.$$

Άρα:

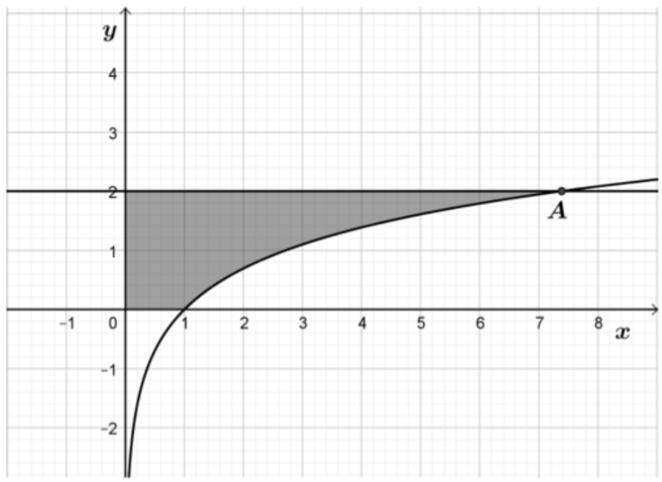
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - ημ^5 x}{x^2+16} + συν\,2x\right) dx = 0.$$

11. Δίνεται το χωρίο το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $y = \ln x,\ x \in (0, +\infty)$, της γραφικής παράστασης της ευθείας $y = 2$ και των αξόνων των συντεταγμένων. Να βρεθεί:

i. το εμβαδόν του χωρίου

ii. ο όγκος που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου γύρω από τον άξονα $y'y$.

Λύση:



i. Έχουμε $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$.

$$E = \int_0^2 e^y\, dy = [e^y]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1 \text{ τ.μ.}$$

ii.

$$V = \pi \int_0^2 e^{2y}\, dy = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - e^0) = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1) \text{ κ.μ.}$$

12. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x \in [0, \beta]$, $\beta > 0$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

i. $f(x) > 0, \ \forall x \in [0, \beta]$

ii. $f(x) + f(\beta - x) = c, \ \forall x \in [0, \beta]$, όπου c σταθερά και $c > 0$.

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, του άξονα των $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $\dfrac{\beta c}{2}$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \frac{\text{ημ}^2 x \, \text{συν} x}{1 + \text{ημ}^2 x} + 1, \quad x \in [0, \pi].$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης αυτής, του άξονα των $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \pi$.

Λύση:

i. Έστω

$$E = \int_0^\beta f(x)\, dx, \quad (f(x) > 0)$$

Έχουμε $f(x) + f(\beta - x) = c \Rightarrow f(x) = c - f(\beta - x)$.

$$E = \int_0^\beta f(x)\, dx = \int_0^\beta \big(c - f(\beta - x)\big)\, dx.$$

Θέτουμε $u = \beta - x \Rightarrow du = -dx$.

Για $x = 0 \Rightarrow u = \beta$ και για $x = \beta \Rightarrow u = 0$, άρα:

$$E = -\int_\beta^0 \big(c - f(u)\big)\, du = \int_0^\beta \big(c - f(x)\big)\, dx.$$

$$E = c\beta - E \Rightarrow 2E = c\beta \Rightarrow E = \frac{c\beta}{2}.$$

Άρα το εμβαδόν είναι $E = \dfrac{c\beta}{2}$ τ.μ.

ii. Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως γινόμενο, πηλίκο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και είναι καλά ορισμένη αφού $1 + \text{ημ}^2 x > 0, \ \forall x \in [0, \pi]$.

$$g(x) = \frac{\text{ημ}^2 x \, \text{συν} x}{1 + \text{ημ}^2 x} + 1$$

και

$$g(\pi - x) = \frac{\text{ημ}^2(\pi - x)\, \text{συν}(\pi - x)}{1 + \text{ημ}^2(\pi - x)} + 1 = \frac{\text{ημ}^2 x\, (-\text{συν} x)}{1 + \text{ημ}^2 x} + 1 = -\frac{\text{ημ}^2 x \, \text{συν} x}{1 + \text{ημ}^2 x} + 1.$$

Άρα:

$$g(x) + g(\pi - x) = \frac{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 - \frac{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 = 2.$$

Οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του (i) για $c = 2$ και $\beta = \pi$, άρα:

$$E = \frac{c\beta}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$E = \pi \text{ τ.μ.}$$