
Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Διαγνωστικό Δοκίμιο 1

Όνομα: _____

1. [1μ] Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int (5x + e^{3x} + \eta \mu 2x) dx.$$

2. [1μ] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

3. [4μ] Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

(a)

$$\int (\eta \mu x + \sigma v nx)^2 dx.$$

(b)

$$\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right) dx$$

(c)

$$\int \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

(d)

$$\int e^{2x} \cos\left(\frac{1}{4}x\right) dx.$$

4. [5μ] Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

5. [3μ]

(a) Να δείξετε ότι το χλάσμα

$$\frac{1}{x(x+1)^2}$$

γράφεται ως άθροισμα απλών χλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(b) Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}, & x \in (0, +\infty) \\ f(1) = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

6. [3μ] Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf''(x) + f'(x) = 4x, \quad \forall x > 0$$

και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 2$. Να βρείτε:

(a') Τις τιμές $f'(1)$ και $f(1)$.

(b') Τον τύπο της συνάρτησης f .

(c') Το ολοκλήρωμα

$$\int e^{f(x)} dx.$$

7. [3μ] Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 5 \quad \text{και} \quad C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0.$$

- (a) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κάθε κύκλου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κάθε κύκλου.
- (b) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
- (c) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο του $B(1, -2)$ και να αποδείξετε ότι $\eta(\varepsilon)$ εφάπτεται και στον κύκλο C_2 .