

---

## Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος Παραβολή

---

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των παραβολών, γνωρίζοντας την εστία  $E$  και τη διευθετούσα ( $\delta$ ):
- $E(1, 1)$  και ( $\delta$ ):  $3x + 4y - 5 = 0$
  - $E(2, 0)$  και ( $\delta$ ):  $x = -2$
  - $E(0, -3)$  και ( $\delta$ ):  $y = 3$
  - $E(-5, 0)$  και ( $\delta$ ):  $x - 5 = 0$

Λύση: (Ασκ. 1/81)

i. Από τον ορισμό της παραβολής:

$$PE = \text{απόσταση του σημείου } P(x, y) \text{ από τη διευθετούσα } (\delta),$$

δηλαδή:

$$\sqrt{(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Για  $E(1, 1)$  και ( $\delta$ ):  $3x + 4y - 5 = 0$ :

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \frac{|3x + 4y - 5|}{5}.$$

Τψώνουμε στο τετράγωνο και αναπτύσσουμε:

$$25((x - 1)^2 + (y - 1)^2) = (3x + 4y - 5)^2.$$

Μετά την ανάπτυξη και απλοποίηση προκύπτει:

$$16x^2 + 9y^2 - 24xy - 20x - 10y + 25 = 0$$

ii. Γενική εξίσωση παραβολής με εστία  $E(a, 0)$  και διευθετούσα  $x = -a$ :

$$y^2 = 4ax.$$

Για  $E(2, 0)$  και ( $\delta$ ):  $x = -2$ , έχουμε  $a = 2$ :

$$y^2 = 8x$$

iii. Γενική εξίσωση παραβολής με εστία  $E(0, a)$  και διευθετούσα  $y = -a$ :

$$x^2 = 4ay.$$

Για  $E(0, -3)$  και  $(\delta) : y = 3$ , έχουμε  $a = -3$ :

$$x^2 = -12y$$

iv. Γενική εξίσωση παραβολής με εστία  $E(-a, 0)$  και διευθετούσα  $x = a$ :

$$y^2 = -4ax.$$

Για  $E(-5, 0)$  και  $(\delta) : x = 5$ , έχουμε  $a = 5$ :

$$y^2 = -20x$$

**2.** Να βρείτε τις εξισώσεις των παραβολών με κορυφή το  $O(0, 0)$ , αν γνωρίζετε ότι:

i. έχει άξονα συμμετρίας τον  $x'x$  και εστία το σημείο  $(-2, 0)$

ii. έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$  και εστία το σημείο  $E(0, 2)$

iii. έχει διευθετούσα την ευθεία  $y = 4$

iv. έχει άξονα συμμετρίας τον  $x'x$  και διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 2)$ .

**Λύση:**

(Ασκ. 2/81)

i. Κανόνας (άξονας  $x'x$ , κορυφή  $O$ ):  $y^2 = 4ax$ ,  $E(a, 0)$ ,  $(\delta) : x = -a$ .

Για  $E(-2, 0) \Rightarrow a = -2$ .

$$y^2 = -8x$$

ii. Κανόνας (άξονας  $y'y$ , κορυφή  $O$ ):  $x^2 = 4ay$ ,  $E(0, a)$ ,  $(\delta) : y = -a$ .

Για  $E(0, 2) \Rightarrow a = 2$ .

$$x^2 = 8y$$

iii. Κανόνας (άξονας  $y'y$ , κορυφή  $O$ ):  $x^2 = 4ay$  με διευθετούσα  $y = -a$ .

Δίνεται  $(\delta) : y = 4 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$ .

$$x^2 = -16y$$

iv. Κανόνας (άξονας  $x'x$ , κορυφή  $O$ ):  $y^2 = 4ax$ .

Ανήκει το  $A(-1, 2) \Rightarrow 2^2 = 4a(-1) \Rightarrow a = -1$ .

$$y^2 = -4x$$

**3.** Δίνονται οι παραβολές με εξισώσεις:

i.  $y^2 = 12x$

ii.  $y^2 = -8x$

iii.  $x^2 = 10y$

iv.  $x^2 = -4y$

Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας και την εξίσωση της διευθετούσας σε κάθε περίπτωση.

Λύση:

(Ασκ. 3/81)

i. Αν  $y^2 = 4ax$ , τότε  $E(a, 0)$  και  $(\delta) : x = -a$ . Εδώ  $4a = 12 \Rightarrow a = 3$ .

$$E(3, 0), \quad (\delta) : x = -3$$

ii. Αν  $y^2 = 4ax$ , τότε  $E(a, 0)$  και  $(\delta) : x = -a$ . Εδώ  $4a = -8 \Rightarrow a = -2$ .

$$E(-2, 0), \quad (\delta) : x = 2$$

iii. Αν  $x^2 = 4ay$ , τότε  $E(0, a)$  και  $(\delta) : y = -a$ . Εδώ  $4a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ .

$$E\left(0, \frac{5}{2}\right), \quad (\delta) : y = -\frac{5}{2}$$

iv. Αν  $x^2 = 4ay$ , τότε  $E(0, a)$  και  $(\delta) : y = -a$ . Εδώ  $4a = -4 \Rightarrow a = -1$ .

$$E(0, -1), \quad (\delta) : y = 1$$

**4.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 8x$ . Να βρείτε τα σημεία της, των οποίων η απόσταση από την εστία είναι ίση με 4 μονάδες.

Λύση:

(Ασκ. 4/81)

Αν  $y^2 = 4ax$ , τότε η εστία είναι  $E(a, 0)$  και η διευθετούσα  $x = -a$ .

Εδώ  $4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow E(2, 0)$ .

Θέτουμε  $P(x, y)$  σημείο της παραβολής με  $PE = 4$ . Τότε

$$\begin{cases} y^2 = 8x, \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4^2. \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε  $y^2 = 8x$ :

$$(x - 2)^2 + 8x = 16 \iff x^2 + 4x + 4 = 16 \iff x^2 + 4x - 12 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm 8}{2} \in \{2, -6\}.$$

Επειδή στην  $y^2 = 8x$  πρέπει  $x \geq 0$ , κρατούμε  $x = 2$ . Τότε  $y^2 = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$ .

$$P_1(2, 4), \quad P_2(2, -4)$$

Προσοχή: Το  $x = -6$  απορρίπτεται διότι θα έδινε  $y^2 < 0$

**5.** Αν η χορδή  $AB$  της παραβολής  $y^2 = 4ax$  με  $a > 0$  τέμνει κάθετα τον άξονά της στο σημείο  $P$ , να αποδείξετε ότι  $(AB)^2 = 16a(OP)$ . Αν η  $AB$  διέρχεται και από την εστία  $E$ , να δείξετε ότι  $(AB) = 4a$ .

Λύση:

(Ασκ. 5/81)

Γενικά στοιχεία παραβολής  $y^2 = 4ax$ :

$$O(0, 0) \text{ (κορυφή)}, \quad \text{άξονας } x'x, \quad E(a, 0) \text{ (εστία)}, \quad (\delta) : x = -a.$$

Θεωρούμε χορδή κάθετη στον άξονα. Κάθε ευθεία κάθετη στον  $x'x$  έχει μορφή  $x = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) και τέμνει τον άξονα στο

$$P(t, 0), \quad OP = |t|.$$

Για να τέμνει την παραβολή  $y^2 = 4ax$  απαιτείται  $t \geq 0$ .

Τα σημεία τομής  $A, B$  ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{cases} y^2 = 4ax, \\ x = t, \end{cases} \implies y = \pm 2\sqrt{at}.$$

Άρα

$$A(t, 2\sqrt{at}), \quad B(t, -2\sqrt{at})$$

και το μήκος της χορδής είναι

$$(AB) = |2\sqrt{at} - (-2\sqrt{at})| = 4\sqrt{at}.$$

Επομένως

$$(AB)^2 = 16at = 16a|t| = 16a(OP).$$

$$(AB)^2 = 16a(OP)$$

Αν επιπλέον η χορδή διέρχεται από την εστία  $E(a, 0)$ , τότε  $t = a$  (διότι η κάθετη  $x = t$  που περνά από το  $E$  έχει  $t = a$ ). Άρα

$$(AB) = 4\sqrt{a \cdot a} = 4a \implies (AB) = 4a$$

**6.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4ax$  και σημεία της  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ . Να αποδείξετε ότι η  $AB$  περνά από την εστία  $E$  αν και μόνο αν  $y_1y_2 = -4a^2$  και  $x_1x_2 = a^2$ .

**Λύση:**

(Ασκ. 6/81)

Κανόνες: Για την παραβολή  $y^2 = 4ax$  ισχύουν

$$E(a, 0), \quad P(t) \equiv (at^2, 2at) \quad (\text{παραμετρική μορφή}).$$

Αναγκαίο  $\Rightarrow$  (αν  $AB$  διέρχεται από  $E$ ): Έστω  $A = P(t_1) = (at_1^2, 2at_1), B = P(t_2) = (at_2^2, 2at_2)$ . Η ευθεία  $AB$  περνά από το  $E(a, 0)$  αν

$$\begin{vmatrix} at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ at_2^2 & 2at_2 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff a(t_1^2 - t_2^2) \cdot 0 - 2a(t_1 - t_2) \cdot a + a(2at_1 - 2at_2) = 0$$

$$\iff (t_1 - t_2)(-2a^2 + 2a^2t_1t_2) = 0 \iff t_1t_2 = -1 \quad (\text{διαφορετικά σημεία } t_1 \neq t_2).$$

Άρα

$$y_1 y_2 = (2at_1)(2at_2) = 4a^2(t_1 t_2) = -4a^2, \quad x_1 x_2 = (at_1^2)(at_2^2) = a^2(t_1 t_2)^2 = a^2.$$

Ικανό  $\Leftarrow$  (αν  $y_1 y_2 = -4a^2$  και  $x_1 x_2 = a^2$ ):

Από την παραμετρική μορφή θέτουμε  $A = P(t_1), B = P(t_2)$ . Τότε

$$y_1 y_2 = 4a^2 t_1 t_2 = -4a^2 \Rightarrow t_1 t_2 = -1,$$

και συνεπώς η ευθεία  $AB$  ικανοποιεί την προηγούμενη συνθήκη  $t_1 t_2 = -1$ , άρα περνά από την εστία  $E(a, 0)$ .

Συμπέρασμα:

$$AB \text{ διέρχεται από } E \iff y_1 y_2 = -4a^2 \text{ και } x_1 x_2 = a^2.$$

7. Δίνεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$  και άξονα συμμετρίας τον άξονα των τετμημένων. Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο  $A(16, -8)$ , να βρεθούν:

- i. η εξίσωση της παραβολής,
- ii. οι συντεταγμένες της εστίας και η εξίσωση της διευθετούσας,
- iii. οι συντεταγμένες σημείου  $B$  της παραβολής ώστε  $\angle AOB = 90^\circ$  όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

Λύση:

(Ασκ. 7/81)

Αν  $y^2 = 4ax$ , τότε  $E(a, 0)$  και  $(\delta) : x = -a$ .

i. Η παραβολή έχει μορφή  $y^2 = 4ax$ . Επειδή ανήκει το  $A(16, -8)$ :

$$(-8)^2 = 4a \cdot 16 \Rightarrow 64 = 64a \Rightarrow a = 1$$

άρα

$$y^2 = 4x$$

ii. Για  $a = 1$ :  $E(a, 0) = (1, 0)$  και  $(\delta) : x = -a \Rightarrow x = -1$ .

$$E(1, 0) \quad (\delta) : x = -1$$

iii. Κριτήριο καθέτων ευθειών: Αν δύο μη κατακόρυφες ευθείες έχουν κλίσεις  $m_1, m_2$ , τότε είναι κάθετες αν  $m_1 m_2 = -1$ .

Η  $OA$  έχει κλίση  $m_{OA} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$ . Άρα η  $OB$  πρέπει να έχει κλίση  $m_{OB} = 2$  και, επειδή διέρχεται από το  $O$ , είναι

$$OB : y = 2x.$$

To  $B$  είναι η τομή της  $y = 2x$  με την παραβολή  $y^2 = 4x$ :

$$(2x)^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 = 4x \Rightarrow x(x-1) = 0.$$

Λύσεις  $x = 0$  (δίνει το  $O$ , που απορρίπτεται ως ταυτιζόμενο με την κορυφή) ή  $x = 1 \Rightarrow y = 2$ .

$$B(1, 2)$$

8. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2x$  και χορδή  $AB$  της, έτσι ώστε το σημείο  $\Gamma(5, -1)$  να είναι το μέσο της. Να βρεθεί η εξίσωση της  $AB$ .

Λύση:

(Ασκ. 8/81)

Για την παραβολή  $y^2 = 4ax$ , η χορδή που έχει μέσο το  $(x_1, y_1)$  δίνεται από

$$T = S_1 \iff yy_1 = 2a(x + x_1) + (y_1^2 - 4ax_1).$$

$\Sigma$  την  $y^2 = 2x$  έχουμε  $4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ . Για  $\Gamma(5, -1)$ :

$$-y = 1 \cdot (x + 5) + ((-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5) = x + 5 + (1 - 10) = x - 4.$$

Άρα

$$x + y - 4 = 0$$

Έλεγχος: Η τομή της  $x + y - 4 = 0$  με  $y^2 = 2x$  δίνει,

$$(-x + 4)^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2, 8$$

Τότε  $y = 2, -4$ . Το μέσο είναι  $(\frac{2+8}{2}, \frac{2+(-4)}{2}) = (5, -1) = \Gamma$ .

**9.** Να βρείτε τη θέση των σημείων  $(-1, 2)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(-4, -2)$  και  $(4, 5)$  σε σχέση με τις παραβολές με εξίσωση:

i.  $y^2 = 6x$

ii.  $x^2 = -4y$

Λύση:

(Ασκ. 1/87)

i. Για  $y^2 = 4ax$  έχουμε  $4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ . Η θέση σημείου  $A(x_1, y_1)$  ως προς την παραβολή δίνεται από το πρόσημο της παράστασης

$$y_1^2 - 4ax_1 = y_1^2 - 6x_1.$$

Για καθένα από τα σημεία:

$$A_1(-1, 2) : y_1^2 - 6x_1 = 4 - 6(-1) = 10 > 0 \Rightarrow A_1 \text{ εκτός της παραβολής,}$$

$$A_2(2, -1) : y_1^2 - 6x_1 = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow A_2 \text{ εντός της παραβολής,}$$

$$A_3(-4, -2) : y_1^2 - 6x_1 = 4 - 6(-4) = 28 > 0 \Rightarrow A_3 \text{ εκτός της παραβολής,}$$

$$A_4(4, 5) : y_1^2 - 6x_1 = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow A_4 \text{ εκτός της παραβολής.}$$

ii. Για  $x^2 = 4ay$  έχουμε  $4a = -4 \Rightarrow a = -1$ . Η θέση σημείου  $A(x_1, y_1)$  δίνεται από

$$x_1^2 - 4ay_1 = x_1^2 + 4y_1.$$

Υπολογίζουμε:

$$A_1(-1, 2) : x_1^2 + 4y_1 = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow A_1 \text{ εκτός της παραβολής,}$$

$$A_2(2, -1) : x_1^2 + 4y_1 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow A_2 \text{ επάνω στην παραβολή,}$$

$$A_3(-4, -2) : x_1^2 + 4y_1 = 16 - 8 = 8 > 0 \Rightarrow A_3 \text{ εκτός της παραβολής,}$$

$$A_4(4, 5) : x_1^2 + 4y_1 = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow A_4 \text{ εκτός της παραβολής.}$$

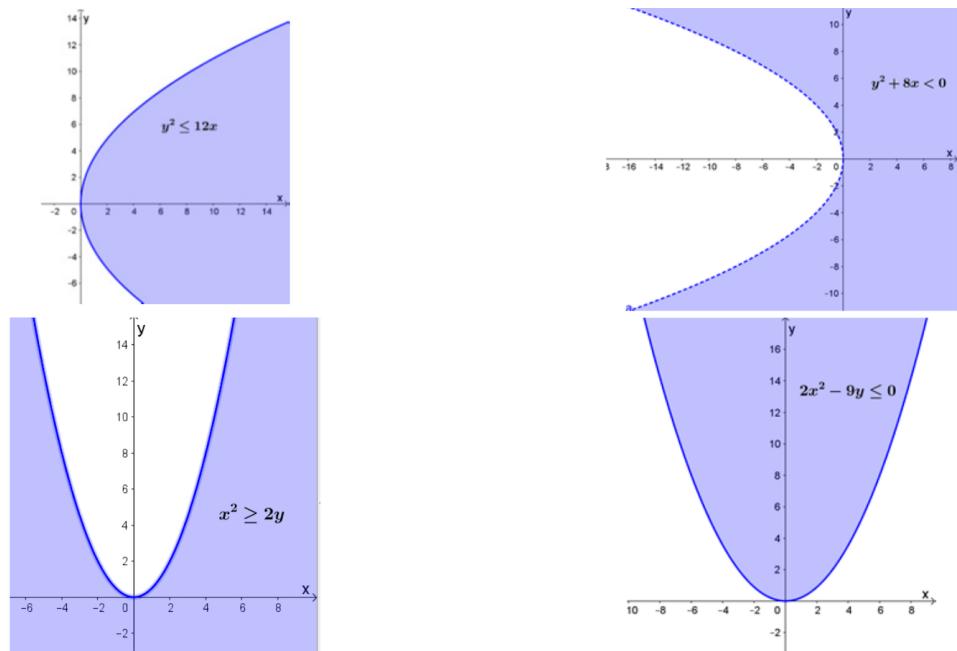
**10.** Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- i.  $y^2 \leq 12x$
- ii.  $y^2 + 8x < 0$
- iii.  $x^2 \geq 2y$
- iv.  $2x^2 - 9y \leq 0$

Λύση:

(Ασκ. 2/87)

- i.  $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 12x\} \implies x \geq \frac{y^2}{12}$ .
- ii.  $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < -8x\} \implies x < -\frac{y^2}{8}$ .
- iii.  $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq 2y\} \implies y \leq \frac{x^2}{2}$ .
- iv.  $S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 9y \leq 0\} \implies y \geq \frac{2}{9}x^2$ .



**11.** Να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$(y^2 - 4x)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0.$$

Λύση:

(Ασκ. 3/87)

Θέτουμε

$$f(x, y) = y^2 - 4x, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 4.$$

Ζητούμε τα σημεία για τα οποία  $f \cdot g \leq 0$ , δηλαδή αντίθετα πρόσημα ή τουλάχιστον ένα μηδενικό. Τα σύνορα είναι:

$$\underbrace{y^2 = 4x}_{\text{παραβολή } (P)}, \quad \underbrace{x^2 + y^2 = 4}_{\text{κύκλος } (K)}.$$

- i.  $f(x, y) \leq 0 \iff y^2 \leq 4x$ : εσωτερικό (με σύνορο) της παραβολής  $P$ .
- ii.  $f(x, y) \geq 0 \iff y^2 \geq 4x$ : εξωτερικό της παραβολής.
- iii.  $g(x, y) \leq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 4$ : εσωτερικό (με σύνορο) του κύκλου  $K$ .
- iv.  $g(x, y) \geq 0 \iff x^2 + y^2 \geq 4$ : εξωτερικό του κύκλου.

Άρα

$$(f \cdot g \leq 0) \iff (f \leq 0 \& g \geq 0) \cup (f \geq 0 \& g \leq 0).$$

Δηλαδή η ένωση δύο χωρίων:

$$S = \underbrace{\{y^2 \leq 4x\} \cap \{x^2 + y^2 \geq 4\}}_{S_1 : \text{μέσα στην παραβολή \& έξω από τον κύκλο}} \cup \underbrace{\{y^2 \geq 4x\} \cap \{x^2 + y^2 \leq 4\}}_{S_2 : \text{έξω από την παραβολή \& μέσα στον κύκλο}}$$

με ολόκληρα τα σύνορα  $P$  και  $K$  να περιλαμβάνονται (επειδή  $\leq 0$ ).

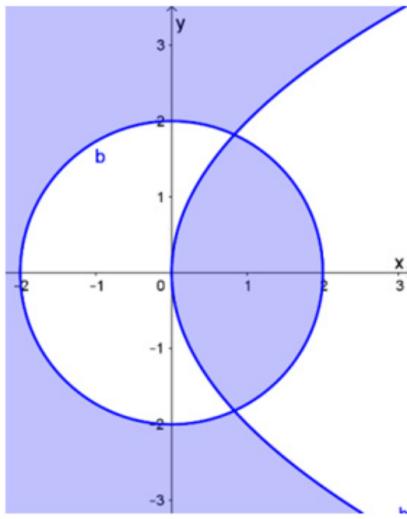
Σημεία τομής  $P \cap K$  (για το σχήμα): Από  $y^2 = 4x$  και  $x^2 + y^2 = 4$  παίρνουμε  $x = \frac{y^2}{4}$  και

$$\frac{y^4}{16} + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = -8 + 8\sqrt{2},$$

οπότε

$$x = -2 + 2\sqrt{2}, \quad y = \pm\sqrt{-8 + 8\sqrt{2}}.$$

Τα σημεία αυτά χωρίζουν τα σύνορα και βοηθούν στη γραφική παράσταση του  $S$ .



**12.** Να βρείτε τη θέση της ευθείας:

- $y = -x - 1$  ως προς την παραβολή  $y^2 = 2x$
- $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$  ως προς την παραβολή  $y^2 = 4x$
- $x - y = 2$  ως προς την παραβολή  $x^2 + y = 0$ .

Λύση:

(Ασκ. 4/87)

- Στο  $y^2 = 2x$  βάζουμε  $y = -x - 1$ :

$$(-x - 1)^2 = 2x \iff x^2 + 1 = 0.$$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες ( $\Delta = -4 < 0$ )  $\Rightarrow$  δεν τέμνει την παραβολή.

- Στο  $y^2 = 4x$  βάζουμε  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}\right)^2 = 4x \iff \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0.$$

Μοναδική λύση  $x = 2 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$ . ( $\Delta = 0$ )  $\Rightarrow$  εφαπτέται στην  $A(2, 2\sqrt{2})$ .

- Από  $x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$ . Στην  $x^2 + y = 0$ :

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff (x - 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2.$$

Άρα σημεία τομής  $A(1, -1)$ ,  $B(-2, -4)$ . ( $\Delta = 9 > 0$ )  $\Rightarrow$  τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

**13.** Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση  $y = 2x - 4$  τέμνει την παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$ , υπολογίζοντας και τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.

Λύση:

(Ασκ. 5/87)

Στην  $y^2 = 4x$  θέτουμε  $y = 2x - 4$ :

$$(2x - 4)^2 = 4x \iff 4x^2 - 16x + 16 = 4x \iff 4x^2 - 20x + 16 = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Η διαχρίνουσα είναι  $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \implies$  η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

$$x = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4.$$

Για  $y = 2x - 4$  παίρνουμε

$$y_1 = 2 \cdot 1 - 4 = -2, \quad y_2 = 2 \cdot 4 - 4 = 4.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι

$$A(1, -2), \quad B(4, 4).$$

Έλεγχος:  $(-2)^2 = 4 \cdot 1$  και  $4^2 = 4 \cdot 4$

**14.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$ . Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η ευθεία  $y = \lambda x + 1$ :

- i. εφάπτεται της παραβολής,
- ii. τέμνει την παραβολή,
- iii. μην τέμνει την παραβολή.

Λύση:

(Ασκ. 6/87)

Θέτοντας  $y = \lambda x + 1$  στην  $y^2 = 4x$  παίρνουμε εξίσωση ως προς  $x$ :

$$(\lambda x + 1)^2 = 4x \iff \lambda^2 x^2 + (2\lambda - 4)x + 1 = 0.$$

Για  $\lambda \neq 0$  είναι δευτέρου βαθμού με διαχρίνουσα

$$\Delta = (2\lambda - 4)^2 - 4\lambda^2 = 16(1 - \lambda).$$

i. Εφαπτομένη  $\iff \Delta = 0 \iff 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ .

(Τότε  $x = 1, y = 2 \Rightarrow T(1, 2)$ .)

ii. Τέμνει  $\iff \Delta > 0 \iff 1 - \lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 1$ .

*Παρατήρηση:* Για  $\lambda = 0$  η εξίσωση γίνεται γραμμική  $(-4)x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$  και δίνει ένα κοινό σημείο  $(\frac{1}{4}, 1)$ , που ανήκει επίσης στην περίπτωση (ii).

iii. Δεν τέμνει  $\iff \Delta < 0 \iff 1 - \lambda < 0 \Rightarrow \lambda > 1$ .

**15.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4ax$  με  $a > 0$  και το σημείο  $A(2a, 0)$ .

Να αποδείξετε ότι:

i. η ευθεία  $(\varepsilon) : x - y + a = 0$  εφαπτεται στην παραβολή σε σημείο της  $B$ ,

ii. αν η ευθεία  $AB$  τέμνει την παραβολή σε σημείο  $\Gamma$  (διαφορετικό από το  $B$ ), τότε ισχύει  $(A\Gamma) = 2(AB)$ .

Λύση:

(Ασκ. 7/87)

i. Για την παραβολή  $y^2 = 4ax$  η εξίσωση εφαπτομένης με κλίση  $m$  είναι  $y = mx + \frac{a}{m}$  ( $m \neq 0$ ).

Για  $m = 1$  παίρνουμε  $y = x + a$ , δηλαδή  $x - y + a = 0$ , άρα  $(\varepsilon)$  είναι εφαπτομένη.

Το σημείο επαφής προκύπτει από το σύστημα

$$\begin{cases} y^2 = 4ax, \\ y = x + a \end{cases} \implies (x + a)^2 = 4ax \implies (x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = a, y = 2a.$$

Άρα  $B(a, 2a)$ .

ii. Η ευθεία  $AB$  με  $A(2a, 0), B(a, 2a)$  έχει κλίση  $m = \frac{2a - 0}{a - 2a} = -2$  και εξίσωση

$$AB : y = -2x + 4a.$$

Τα κοινά σημεία της  $AB$  με την παραβολή δίνονται από

$$(-2x + 4a)^2 = 4ax \iff 4x^2 - 20ax + 16a^2 = 0 \iff x^2 - 5ax + 4a^2 = 0,$$

με ρίζες  $x = a$  (που αντιστοιχεί στο  $B$ ) και  $x = 4a$ .

Για  $x = 4a$  βρίσκουμε  $y = -2(4a) + 4a = -4a$ , άρα  $\Gamma(4a, -4a)$ .

Τότε

$$(AB) = \sqrt{(a - 2a)^2 + (2a - 0)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5},$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(4a - 2a)^2 + (-4a - 0)^2} = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2a\sqrt{5} = 2(AB).$$

Επομένως  $(A\Gamma) = 2(AB)$ .

**16.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4ax$  με  $a > 0$  και ένα σημείο της  $B$ . Αν η ευθεία ( $\varepsilon$ ) είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο  $B$  και η ευθεία ( $\zeta$ ) είναι κάθετη στην ( $\varepsilon$ ) στο σημείο  $B$ , να δείξετε ότι η ( $\zeta$ ) διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ημιευθείες  $Bx$  και  $BE$ , όπου  $E$  είναι η εστία της παραβολής και  $Bx$  είναι διάμετρος της παραβολής (παράλληλη με τον άξονα  $x'x$ ).

(Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής)

Λύση:

(Ασκ. 8/87)

Θέτουμε  $B(at^2, 2at)$  με  $t \in \mathbb{R}$  (παραμετρικές της  $y^2 = 4ax$ ).

Η κλίση της εφαπτομένης στο  $B$  είναι  $m_\varepsilon = \frac{dy}{dx}\Big|_B = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$ , άρα η κάθετη σε αυτήν έχει κλίση  $m_\zeta = -t$ . Μια διάνυσμή της είναι  $\mathbf{n} = (1, -t)$ .

Η εστία είναι  $E(a, 0)$ . Διάνυσμα  $\overrightarrow{BE} = (a - at^2, -2at) = a(1 - t^2, -2t)$ . Το μήκος του (αγνοώντας το θετικό συντελεστή  $a$ ) είναι

$$\|(1 - t^2, -2t)\| = \sqrt{(1 - t^2)^2 + 4t^2} = \sqrt{(1 + t^2)^2} = 1 + t^2.$$

Άρα το μοναδιαίο διάνυσμα προς  $BE$  είναι

$$\widehat{\mathbf{u}}_{BE} = \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{-2t}{1 + t^2} \right).$$

Η  $Bx$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , όπα το μοναδιαίο διάνυσμα προς  $Bx$  είναι  $\widehat{\mathbf{u}}_{Bx} = (1, 0)$ .

Το διάνυσμα του εσωτερικού διχοτόμου της γωνίας των  $\widehat{\mathbf{u}}_{Bx}$  και  $\widehat{\mathbf{u}}_{BE}$  είναι ανάλογο του ανθροίσματός τους:

$$\widehat{\mathbf{u}}_{Bx} + \widehat{\mathbf{u}}_{BE} = \left( 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2} \right) = \frac{2}{1+t^2} (1, -t).$$

Το παραπάνω είναι παράλληλο προς το  $\mathbf{n} = (1, -t)$ , δηλαδή έχει την ίδια διεύθυνση με την ευθεία  $(\zeta)$ .

Συνεπώς η  $(\zeta)$  είναι ο διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι ημιευθείες  $Bx$  και  $BE$ .

**17.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης στο σημείο  $A$  κάθε παραβολής με εξίσωση:

- i.  $y^2 = x$  στο  $A(1, 1)$
- ii.  $y^2 = 32x$  στο  $A(2, 8)$
- iii.  $x^2 = 16y$  στο  $A(-16, 16)$
- iv.  $y = 4(x+1)^2$  στο  $A(-3, 16)$

Λύση:

(Ασκ. 1/94)

i. Για  $y^2 = x$ , παραγωγίζουμε ως προς  $x$ :

$$2y y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}.$$

Στο  $A(1, 1)$ :  $y' = \frac{1}{2}$ . Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y + 1 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση  $-2$  και εξίσωση:

$$y - 1 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 3 = 0.$$

ii. Για  $y^2 = 32x$ :

$$2y y' = 32 \Rightarrow y' = \frac{16}{y}.$$

Στο  $A(2, 8)$ :  $y' = 2$ . Επομένως η εφαπτομένη είναι:

$$y - 8 = 2(x - 2) \Rightarrow 2x - y + 4 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση  $-\frac{1}{2}$ :

$$y - 8 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y - 18 = 0.$$

iii. Για  $x^2 = 16y$ :

$$2x = 16y' \Rightarrow y' = \frac{x}{8}.$$

Στο  $A(-16, 16)$ :  $y' = -2$ . Αρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 16 = -2(x + 16) \Rightarrow 2x + y + 16 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση  $\frac{1}{2}$ :

$$y - 16 = \frac{1}{2}(x + 16) \Rightarrow x - 2y + 48 = 0.$$

iv. Για  $y = 4(x + 1)^2$ :

$$y' = 8(x + 1).$$

Στο  $A(-3, 16)$ :  $y' = -16$ . Αρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 16 = -16(x + 3) \Rightarrow 16x + y + 32 = 0.$$

Η κάθετη έχει κλίση  $\frac{1}{16}$ :

$$y - 16 = \frac{1}{16}(x + 3) \Rightarrow x - 16y + 259 = 0.$$

**18.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, η οποία:

- i. διέρχεται από το σημείο  $(1, 2)$
- ii. διέρχεται από το σημείο  $(-4, 0)$
- iii. είναι παράλληλη προς την ευθεία  $x + y = -2$
- iv. είναι κάθετη στην ευθεία  $x + y = -4$

**Λύση:**

(Ασκ. 2/94)

Γενική μορφή εφαπτομένης της  $y^2 = 4x$  με κλίση  $m$  είναι:

$$y = mx + \frac{1}{m}, \quad m \neq 0.$$

i. Το σημείο  $A(1, 2)$  ανήκει στην παραβολή, άρα:

$$2^2 = 4 \cdot 1 \Rightarrow \text{ισχύει.}$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο  $A$  δίνεται από:

$$2y y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}.$$

Για  $y = 2$ , έχουμε  $y' = 1$ . Άρα η εφαπτομένη είναι:

$$y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

ii. Η εφαπτομένη έχει μορφή  $y = mx + \frac{1}{m}$  και διέρχεται από το σημείο  $(-4, 0)$ :

$$0 = m(-4) + \frac{1}{m} \Rightarrow -4m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Άρα:

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{ή} \quad y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

iii. Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την  $x+y = -2$ , δηλαδή έχει κλίση  $m = -1$ :

$$y = -x + \frac{1}{m} = -x - 1.$$

$$y = -x - 1$$

iv. Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι κάθετη στην  $x+y = -4$ , που έχει κλίση  $-1$ . Η κάθετη έχει κλίση  $m = 1$ :

$$y = x + \frac{1}{m} = x + 1.$$

$$y = x + 1$$

**19.** Η εφαπτομένη της παραβολής με εξίσωση  $y^2 = 20x$  στο σημείο  $A(5t^2, 10t)$  τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο  $B$ . Αν  $E$  είναι η εστία της παραβολής, να αποδείξετε ότι η γωνία  $ABE$  είναι ορθή.

Λύση:

(Ασκ. 3/94)

Η  $y^2 = 20x$  είναι της μορφής  $y^2 = 4ax$  με  $4a = 20 \Rightarrow a = 5$ .

Άρα  $E(a, 0) = (5, 0)$  και  $A(5t^2, 10t)$  είναι παραμετρικό σημείο  $(at^2, 2at)$  για  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Η εφαπτομένη στο  $A$  έχει γνωστή μορφή

$$ty = x + at^2 \implies ty = x + 5t^2.$$

Θέτοντας  $x = 0$  (τομής με τον άξονα  $Oy$ ) βρίσκουμε

$$y_B = 5t \implies B(0, 5t).$$

Κλίσεις:

$$m_{BA} = \frac{10t - 5t}{5t^2 - 0} = \frac{1}{t}, \quad m_{BE} = \frac{0 - 5t}{5 - 0} = -t.$$

Επομένως

$$m_{BA} \cdot m_{BE} = \frac{1}{t} \cdot (-t) = -1,$$

άρα οι ευθείες  $BA$  και  $BE$  είναι κάθετες και η γωνία  $ABE$  είναι ορθή.

**20.** Δίνεται η παραβολή  $x^2 = 4y$  και η ευθεία  $(\varepsilon) : x + y = 8$ .

- i. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $(\varepsilon)$  τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία  $A, B$  και να βρείτε τις συνταγμένες τους.
- iii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία  $A$  και  $B$ .
- iv. Να βρείτε το σημείο τομής  $\Gamma$  των δύο εφαπτομένων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Λύση:

(Ασκ. 4/94)

i. Η  $x^2 = 4y$  είναι της μορφής  $x^2 = 4ay$  με  $4a = 4 \Rightarrow a = 1$ .

Άρα  $E(0, a) = (0, 1)$  (εστία) και  $y = -a = -1$  (διευθετούσα).

ii. Από  $x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$ . Στην  $x + y = 8$ :

$$x + \frac{x^2}{4} = 8 \iff x^2 + 4x - 32 = 0$$

με διακρίνουσα  $\Delta = 16 + 128 = 144 > 0 \Rightarrow$  δύο σημεία τομής.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 12}{2} \Rightarrow x_A = 4, \quad x_B = -8, \quad y_A = \frac{4^2}{4} = 4, \quad y_B = \frac{(-8)^2}{4} = 16.$$

Άρα  $A(4, 4), B(-8, 16)$ .

iii. Από  $x^2 = 4y$  προκύπτει με παραγώγιση  $2x = 4y' \Rightarrow y' = \frac{x}{2}$ .

$$m_A = \frac{4}{2} = 2, \quad m_B = \frac{-8}{2} = -4.$$

Εφαπτομένη στο  $A(4, 4)$ :

$$y - 4 = 2(x - 4) \iff y = 2x - 4$$

Εφαπτομένη στο  $B(-8, 16)$ :

$$y - 16 = -4(x + 8) \iff y = -4x - 16$$

iv. Τομή των εφαπτομένων:

$$\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = -4x - 16 \end{cases} \implies 2x - 4 = -4x - 16 \implies x = -2, \quad y = -8.$$

Άρα  $\Gamma(-2, -8)$ .

Το εμβαδόν του  $\triangle A B \Gamma$  είναι

$$E = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_\Gamma - x_A & y_\Gamma - y_A \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} | (-12)(-12) - 12(-6) | = \frac{1}{2} \cdot 216 = 108.$$

Επομένως  $E_{AB\Gamma} = 108$  τετρ. μον.

**21.** Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 4ax$  στο σημείο  $A$  τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο  $B$ . Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου του μέσου  $M$  του  $AB$ , όταν το  $A$  διαγράφει την παραβολή.

Λύση:

(Ασκ. 5/94)

Παραμετροποιούμε την παραβολή ως

$$A(x_A, y_A) = (at^2, 2at), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Η εφαπτομένη στο  $A$  δίνεται από τον τύπο  $y y_A = 2a(x + x_A)$ :

$$(2at)y = 2a(x + at^2) \implies t y = x + at^2.$$

Η διευθετούσα είναι  $x = -a$ . Άρα το σημείο τομής  $B$  έχει

$$x_B = -a, \quad y_B = a\left(t - \frac{1}{t}\right) \quad (t \neq 0).$$

Το μέσο  $M$  του  $AB$  είναι

$$M(x, y) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}(t^2 - 1), \frac{a}{2}\left(3t - \frac{1}{t}\right)\right).$$

Θέτουμε  $x = \frac{a}{2}(t^2 - 1) \Rightarrow t^2 = 1 + \frac{2x}{a}$  και  $\frac{2y}{a} = 3t - \frac{1}{t}$ . Υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$\left(\frac{2y}{a}\right)^2 = 9t^2 - 6 + \frac{1}{t^2} = 9\left(1 + \frac{2x}{a}\right) - 6 + \frac{1}{1 + \frac{2x}{a}}.$$

Με απλοποίηση καταλήγουμε στην κομψή μορφή

$$(a + 2x)y^2 = a(3x + a)^2$$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι το τυμπανό με την καμπύλη  $y^2 = 4ax$  και τη διευθετούσα  $x = -\frac{a}{2}$  (κάθετη ασύμπτωτη  $x = -\frac{a}{2}$ ); για  $t = 0$  η εφαπτομένη είναι  $x = 0$  και δεν τέμνει τη διευθετούσα, οπότε το  $M$  δεν ορίζεται.

**22.** Αν  $A(3t_1^2, 6t_1)$  και  $B(3t_2^2, 6t_2)$  είναι δύο διαφορετικά σημεία της παραβολής  $y^2 = 12x$ , να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου  $M$  της χορδής  $AB$ , αν:

- i.  $t_1^2 + t_2^2 = 3t_1 t_2$ ,
- ii. η χορδή  $AB$  περνά από το σημείο  $(0, 6)$ .

Λύση:

(Ασκ. 6/94)

Η  $y^2 = 12x$  έχει  $a = 3$  και παραμετρικά σημεία  $(3t^2, 6t)$ . Για τα  $A, B$  θέτουμε

$$S = t_1 + t_2, \quad P = t_1 t_2.$$

Τότε το μέσο  $M(x, y)$  της  $AB$  είναι

$$x = \frac{3t_1^2 + 3t_2^2}{2} = \frac{3}{2}(S^2 - 2P), \quad y = \frac{6t_1 + 6t_2}{2} = 3S.$$

i. Από  $t_1^2 + t_2^2 = 3t_1 t_2$  έχουμε  $S^2 - 2P = 3P \Rightarrow S^2 = 5P$ . Άρα

$$x = \frac{3}{2}(S^2 - 2P) = \frac{3}{2}(5P - 2P) = \frac{9}{2}P, \quad S = \frac{y}{3} \Rightarrow P = \frac{S^2}{5} = \frac{y^2}{45}.$$

Επομένως

$$x = \frac{9}{2} \cdot \frac{y^2}{45} = \frac{y^2}{10} \iff y^2 = 10x$$

(Για διαφορετικά σημεία απαιτείται  $S \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$ , άρα το  $(0, 0)$  δεν ανήκει στο λοχούς.)

ii. Η κλίση της  $AB$  είναι

$$m_{AB} = \frac{6(t_2 - t_1)}{3(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2} = \frac{2}{S}.$$

Η ευθεία  $AB$  που διέρχεται από το  $A$  γράφεται

$$y - 6t_1 = \frac{2}{S} (x - 3t_1^2).$$

Το σημείο  $(0, 6)$  ανήκει στην  $AB \Leftrightarrow 6 - 6t_1 = \frac{2}{S}(-3t_1^2) \Leftrightarrow S = t_1(S - t_1) = t_1t_2$ .

Άρα  $P = S$ .

Με  $x = \frac{3}{2}(S^2 - 2P)$  και  $y = 3S$  παίρνουμε

$$x = \frac{3}{2}(S^2 - 2S) \Rightarrow 6x = y^2 - 6y \Rightarrow y^2 - 6y = 6x \quad \text{ή} \quad (y - 3)^2 = 6(x + \frac{3}{2})$$

(Για  $t_1 \neq t_2$ :  $\Delta = S^2 - 4P = S(S - 4) > 0 \Rightarrow y < 0$  ή  $y > 12$ , δηλ. το λοχούς είναι το παραπάνω παραβολικό τόξο.)

**23.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 8x$  και από το σημείο  $A(-2, 3)$  φέρουμε τις εφαπτόμενες προς αυτή.

- i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων.
- ii. Να αποδείξετε ότι αυτές είναι κάθετες.

Λύση:

(Ασκ. 7/95)

Η  $y^2 = 8x$  είναι της μορφής  $y^2 = 4ax$  με  $a = 2$ . Η εφαπτομένη στο παραμετρικό σημείο  $(at^2, 2at)$  δίνεται από

$$ty = x + at^2.$$

Για να περνά από το  $A(-2, 3)$ :

$$3t = -2 + 2t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{1}{2}.$$

- i. Εξισώσεις εφαπτομένων:

$$\begin{aligned} t = 2 : \quad 2y = x + 8 &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 4 \\ t = -\frac{1}{2} : \quad -\frac{1}{2}y = x + \frac{1}{2} &\Leftrightarrow y = -2x - 1 \end{aligned}$$

- ii. Οι κλίσεις είναι  $m_1 = \frac{1}{2}$  και  $m_2 = -2$ . Επομένως

$$m_1 m_2 = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \Rightarrow \text{οι δύο ευθείες είναι κάθετες.}$$

**24.** Η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  με  $\lambda \neq 0$  τέμνει την παραβολή  $y^2 = 4x$  στα σημεία  $A, B$ .

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  της χορδής  $AB$  είναι  $\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{2}{\lambda}\right)$ .

ii. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου του  $M$ , όταν η ευθεία διέρχεται από το σταθερό σημείο  $(2, 0)$ .

Λύση:

(Ασκ. 8/95)

i. Από  $y^2 = 4x$  και  $y = \lambda x + \beta$  παίρνουμε, εξαλείφοντας το  $x$ ,

$$\frac{\lambda}{4}y^2 - y + \beta = 0.$$

Αυτή είναι τετραγωνική ως προς  $y$ . Ο άξονας συμμετρίας της είναι

$$y = \frac{-(-1)}{2 \cdot (\lambda/4)} = \frac{2}{\lambda},$$

δηλαδή το μέσο των τεταγμένων των σημείων τομής (άρα  $y_M$ ) είναι

$$y_M = \frac{2}{\lambda}$$

Επειδή το  $M$  ανήκει στην ευθεία  $y = \lambda x + \beta$ , έχουμε

$$y_M = \lambda x_M + \beta \implies x_M = \frac{y_M - \beta}{\lambda} = \frac{\frac{2}{\lambda} - \beta}{\lambda} = \frac{2 - \lambda\beta}{\lambda^2}$$

ii. Αν η ευθεία περνά από  $(2, 0)$ , τότε  $0 = \lambda \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = -2\lambda$ . Άρα

$$x = \frac{2 - \lambda(-2\lambda)}{\lambda^2} = 2 + \frac{2}{\lambda^2}, \quad y = \frac{2}{\lambda}.$$

Θέτοντας  $\lambda = \frac{2}{y}$  (οπότε  $y \neq 0$ ) προκύπτει

$$x = 2 + \frac{2}{(2/y)^2} = 2 + \frac{y^2}{2} \iff y^2 = 2(x - 2)$$

**25.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 8x$  και σημεία της  $A(2t^2, 4t)$ ,  $B(2\rho^2, 4\rho)$ .

(α) Αν το  $AB$  περνά από το  $\Gamma(5, 2)$ :

i. να δείξετε ότι  $2t\rho + 5 = t + \rho$ .

ii. να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου  $M$  του  $AB$ .

(β) Αν το  $\Gamma$  είναι το μέσο του  $AB$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση της  $AB$  είναι  $(\varepsilon) : y = 2x - 8$ .

Λύση:

(Ασκ. 9/95)

Για την  $y^2 = 8x$  ( $\deltaηλ.$   $4ax$  με  $a = 2$ ) η χορδή  $AB$  έχει κλίση

$$m_{AB} = \frac{4(\rho - t)}{2(\rho^2 - t^2)} = \frac{2}{t + \rho} \quad (t \neq \rho),$$

άρα εξίσωση (από το  $A$ ):

$$y - 4t = \frac{2}{t + \rho} (x - 2t^2).$$

(α.i) Το  $\Gamma(5, 2) \in AB$  δίνει

$$2 - 4t = \frac{2}{t + \rho} (5 - 2t^2) \iff t + \rho - 2t\rho = 5 \iff 2t\rho + 5 = t + \rho$$

(α.ii) Το μέσο  $M(x, y)$  της  $AB$  είναι

$$x = \frac{2t^2 + 2\rho^2}{2} = t^2 + \rho^2, \quad y = \frac{4t + 4\rho}{2} = 2(t + \rho).$$

Θέτουμε  $S = t + \rho$ ,  $P = t\rho$ . Από (α.i) έχουμε  $S = 2P + 5 \Rightarrow P = \frac{S - 5}{2}$ . Τότε

$$x = S^2 - 2P = S^2 - (S - 5) = S^2 - S + 5, \quad y = 2S \Rightarrow S = \frac{y}{2}.$$

Άρα

$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} + 5 \iff y^2 - 2y - 4x + 20 = 0 \iff (y - 1)^2 = 4x - 19$$

(β) Αν  $\Gamma$  είναι το μέσο, τότε  $M \equiv \Gamma(5, 2)$ . Άρα  $y = 2S = 2 \Rightarrow S = 1$  και από  $S = 2P + 5$  παίρνουμε  $P = -2$ .

Η κλίση της  $AB$  είναι  $m = \frac{2}{S} = 2$ , και επειδή περνά από  $(5, 2)$ :

$$y - 2 = 2(x - 5) \iff y = 2x - 8$$

**26.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  με εστία  $E(1, 0)$  και τυχαίο σημείο της  $A(t^2, 2t)$ ,  $t \neq 0$ . Από την εστία  $E$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην  $AE$ , η οποία τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο  $B$ .

i. Να δείξετε ότι η  $BA$  είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο  $A$ .

ii. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής  $\Gamma$  του ορθογωνίου παραλληλογράμμου  $AEB\Gamma$ , καθώς το  $A$  κινείται πάνω στην παραβολή.

Λύση:

(Ασκ. 10/95)

Η διευθετούσα είναι  $x = -1$ .

Συντεταγμένες του  $B$ . Κλίση της  $AE$ :

$$m_{AE} = \frac{0 - 2t}{1 - t^2} = -\frac{2t}{1 - t^2} \Rightarrow m_{\perp} = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

Η ευθεία από  $E(1, 0)$  με κλίση  $m_{\perp}$  τέμνει τη διευθετούσα  $x = -1$  στο

$$B(-1, -2m_{\perp}) = \left(-1, \frac{t^2 - 1}{t}\right).$$

i. Κλίση της  $AB$ :

$$m_{AB} = \frac{\frac{t^2 - 1}{t} - 2t}{-1 - t^2} = \frac{-\frac{t^2 + 1}{t}}{-(t^2 + 1)} = \frac{1}{t}.$$

Η εφαπτομένη της  $y^2 = 4x$  στο  $A(t^2, 2t)$  έχει τύπο  $ty = x + t^2$  ( $\text{ή } y = \frac{1}{t}x + t$ ), που είναι ακριβώς η ευθεία από το  $A$  με κλίση  $1/t$ .

Άρα  $BA : ty = x + t^2$  και επομένως η  $BA$  είναι η εφαπτομένη στο  $A$ .

ii. Για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AEBG$  ισχύει  $\Gamma = A + B - E$ . Άρα

$$\Gamma(x, y) = \left(t^2 - 2, 2t + \frac{t^2 - 1}{t}\right) = \left(t^2 - 2, 3t - \frac{1}{t}\right).$$

Θέτουμε  $x = t^2 - 2 \Rightarrow t^2 = x + 2$  και από  $y = 3t - \frac{1}{t}$  παίρουμε

$$y t = 3t^2 - 1 = 3(x + 2) - 1 = 3x + 5.$$

Με  $t^2 = x + 2$  προκύπτει

$$(x + 2) y^2 = (3x + 5)^2 \quad x > -2$$

(κάθετη ασύμπτωτη  $x = -2$ ).

Αυτός είναι ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής  $\Gamma$ .

**27.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 16x$ .

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας και την εξίσωση της διευθετούσας της.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(1, 4)$ .
- iii. Αν η εφαπτομένη στο  $A$  τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο  $B$ , να βρείτε την εξίσωση της άλλης εφαπτομένης που άγεται από το  $B$  προς την παραβολή.

Λύση:

(Ασκ. 1/96)

i. Η εξίσωση  $y^2 = 4ax$  δίνει  $4a = 16 \Rightarrow a = 4$ .

$$E(4, 0), \quad (\delta) : x = -4$$

ii. Για  $y^2 = 4ax$  η εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_1, y_1)$  δίνεται από

$$y y_1 = 2a(x + x_1).$$

Για  $a = 4$ ,  $A(1, 4)$ :

$$4y = 8(x + 1) \iff y = 2x + 2.$$

$$(\varepsilon_A) : y = 2x + 2$$

iii. Η  $(\varepsilon_A)$  τέμνει τη διευθετούσα  $x = -4$ :

$$y = 2(-4) + 2 = -6 \Rightarrow B(-4, -6).$$

Θεωρούμε ότι η άλλη εφαπτομένη της  $y^2 = 16x$  έχει κλίση  $m$  και διέρχεται από το  $B(-4, -6)$ . Χρησιμοποιούμε τον τύπο της εφαπτομένης:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \quad \text{με} \quad (x_1, y_1) = (-4, -6).$$

Άρα:

$$y + 6 = m(x + 4).$$

Επειδή η ευθεία είναι εφαπτομένη παραβολής  $y^2 = 16x$ , αντικαθιστούμε το  $y$  από την παραπάνω εξίσωση:

$$y = m(x + 4) - 6,$$

στην  $y^2 = 16x$ :

$$[m(x + 4) - 6]^2 = 16x.$$

Αναπτύσσουμε:

$$m^2(x + 4)^2 - 12m(x + 4) + 36 - 16x = 0.$$

Για να είναι εφαπτομένη, η εξίσωση ως προς  $x$  πρέπει να έχει μία μόνο λύση, δηλαδή  $\Delta = 0$ . Υπολογίζοντας, παίρνουμε (μετά από πράξεις):

$$4m^2 - 6m - 4 = 0,$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Η  $m_1 = 2$  αντιστοιχεί στην εφαπτομένη του  $A$ . Η άλλη, με  $m = -\frac{1}{2}$ , δίνει:

$$y + 6 = -\frac{1}{2}(x + 4) \iff y = -\frac{1}{2}x - 8.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 2:

$$x + 2y + 16 = 0.$$

**28.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4ax$ ,  $a > 0$ , και η εφαπτομένη σε σημείο της  $A$ . Αν  $\Gamma\Delta$  είναι εστιακή χορδή (διέρχεται από την εστία) που είναι παράλληλη στην εφαπτομένη, να αποδείξετε ότι  $(\Gamma\Delta) = 4(AE)$ , όπου  $E$  η εστία της παραβολής.

Λύση:

(Ασκ. 2/96)

Η παραβολή είναι  $y^2 = 4ax \Rightarrow x = \frac{y^2}{4a}$ . Παράγωγος:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}.$$

Θεωρούμε σημείο  $A(x_1, y_1)$  της παραβολής. Από  $y_1^2 = 4ax_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1^2}{4a}$ .

Η εφαπτομένη στο  $A$  έχει κλίση

$$m_A = \left. \frac{dy}{dx} \right|_A = \frac{2a}{y_1}.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(y - y_1) = m_A(x - x_1) \iff y - y_1 = \frac{2a}{y_1} \left( x - \frac{y_1^2}{4a} \right).$$

Αναπτύσσοντας:

$$y = \frac{2a}{y_1}x - \frac{y_1^2}{2}.$$

Η εστία της παραβολής είναι  $E(a, 0)$ . Θέλουμε τώρα την εστιακή χορδή  $\Gamma\Delta$ , δηλαδή τη χορδή που περνά από το  $E(a, 0)$ , και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη, άρα έχει την ίδια κλίση:

$$m_{\Gamma\Delta} = m_A = \frac{2a}{y_1}.$$

Η γενική εξίσωση ευθείας που περνά από  $E(a, 0)$  με αυτή την κλίση είναι:

$$y = m_A(x - a) \iff y = \frac{2a}{y_1}(x - a).$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής  $\Gamma, \Delta$  της με την παραβολή  $y^2 = 4ax$ , αντικαθιστούμε το  $y$  στην εξίσωση της παραβολής:

$$\left( \frac{2a}{y_1}(x - a) \right)^2 = 4ax \iff \frac{4a^2}{y_1^2}(x - a)^2 = 4ax.$$

Απλοποιούμε με  $4a$ :

$$\frac{a}{y_1^2}(x - a)^2 = x \iff a(x^2 - 2ax + a^2) = xy_1^2.$$

Μεταφέρουμε τα πάντα στο ένα μέλος:

$$ax^2 - (2a^2 + y_1^2)x + a^3 = 0.$$

Αυτή είναι δευτεροβάθμια ως προς  $x$ , οι δύο ρίζες της  $x_\Gamma, x_\Delta$  αντιστοιχούν στα σημεία  $\Gamma, \Delta$  όπου η χορδή τέμνει την παραβολή.

Από τύπους Viète:

$$x_\Gamma + x_\Delta = \frac{2a^2 + y_1^2}{a}, \quad x_\Gamma x_\Delta = a^2.$$

Από τις αντίστοιχες τιμές  $y = \frac{2a}{y_1}(x - a)$ , παίρνουμε:

$$y_\Gamma = \frac{2a}{y_1}(x_\Gamma - a), \quad y_\Delta = \frac{2a}{y_1}(x_\Delta - a).$$

Το τετράγωνο του μήκους της χορδής είναι:

$$(\Gamma\Delta)^2 = (x_\Gamma - x_\Delta)^2 + (y_\Gamma - y_\Delta)^2.$$

Αντικαθιστούμε:

$$y_\Gamma - y_\Delta = \frac{2a}{y_1}(x_\Gamma - x_\Delta),$$

οπότε:

$$(\Gamma\Delta)^2 = (x_\Gamma - x_\Delta)^2 \left(1 + \frac{4a^2}{y_1^2}\right) = (x_\Gamma - x_\Delta)^2 \frac{(y_1^2 + 4a^2)}{y_1^2}.$$

Από την εξίσωση  $ax^2 - (2a^2 + y_1^2)x + a^3 = 0$ , το

$$x_\Gamma - x_\Delta = \sqrt{(x_\Gamma + x_\Delta)^2 - 4x_\Gamma x_\Delta} = \sqrt{\left(\frac{2a^2 + y_1^2}{a}\right)^2 - 4a^2} = \frac{2}{a}\sqrt{a^2(y_1^2 + a^2)}.$$

Εποι:

$$(\Gamma\Delta)^2 = \frac{4a^2(y_1^2 + a^2)}{a^2} \cdot \frac{y_1^2 + 4a^2}{y_1^2} = 16a^2 \left(1 + \frac{a^2}{y_1^2}\right) \left(1 + \frac{y_1^2}{4a^2}\right).$$

Λαμβάνοντας τετραγωνική ρίζα και απλοποιώντας:

$$(\Gamma\Delta) = 4a \left(1 + \frac{y_1^2}{4a^2}\right) = 4a \left(\frac{y_1^2 + 4a^2}{4a^2}\right) a = 4a \left(1 + \frac{y_1^2}{4a^2}\right).$$

Αλλά από  $A(x_1, y_1)$  και  $E(a, 0)$ :

$$AE^2 = (x_1 - a)^2 + y_1^2 = \left(\frac{y_1^2}{4a} - a\right)^2 + y_1^2 = a^2 \left(1 + \frac{y_1^2}{4a^2}\right)^2$$

$$\text{οπότε } AE = a \left(1 + \frac{y_1^2}{4a^2}\right).$$

Τελικά:

$$(\Gamma\Delta) = 4AE.$$

**29.** Έστω ότι η εφαπτομένη και η κάθετη στην παραβολή  $y^2 = 4ax$  ( $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) σε σημείο της  $M$  τέμνουν τον áξονα  $x'$  στα σημεία  $A, B$ , αντίστοιχα. Έστω, επίσης,  $\Pi$  η προβολή του  $M$  στον áξονα αυτό και  $H$  η προβολή του  $M$  στη διεύθετούσα. Να αποδείξετε ότι:

- i. το τετράπλευρο  $AEMH$  είναι ρόμβος,
- ii. η κορυφή  $O$  της παραβολής είναι το μέσο της  $AB$ ,
- iii. το κέντρο του ρόμβου  $AEMH$  ανήκει στην εφαπτομένη της παραβολής στην κορυφή της,
- iv. η εστία  $E$  είναι το μέσο της  $AB$ .

Λύση:

(Ασκ. 3/96)

Θέτουμε  $M(x_0, y_0)$  σημείο της  $y^2 = 4ax$  με  $y_0 \neq 0$ . Τότε

$$y_0^2 = 4ax_0 \quad \text{και} \quad \frac{d}{dx}(y^2) = 2y y' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}.$$

Στο  $M$  η εφαπτομένη έχει κλίση  $m_T = \frac{2a}{y_0}$  και, με τύπο σημείου-κλίσης,

$$y - y_0 = m_T(x - x_0) = \frac{2a}{y_0}(x - x_0). \tag{*}$$

Η κάθετη (κανονική) έχει κλίση  $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{y_0}{2a}$  και

$$y - y_0 = m_N(x - x_0) = -\frac{y_0}{2a}(x - x_0). \tag{**}$$

Εστία  $E(a, 0)$ , διεύθετούσα  $x = -a$ . Προβολές:

$$\Pi(x_0, 0), \quad H(-a, y_0).$$

i. (*O AEMH είναι ρόμβος*). Τα σημεία τομής με τον άξονα  $y = 0$  προκύπτουν από (\*), (\*\*):

$$\text{στην } (*) : -y_0 = \frac{2a}{y_0}(x_A - x_0) \Rightarrow x_A = -x_0, \quad \text{στην } (**) : -y_0 = -\frac{y_0}{2a}(x_B - x_0) \Rightarrow x_B = x_0 + 2a.$$

Άρα  $A(-x_0, 0)$ ,  $B(x_0 + 2a, 0)$ .

Μήκη πλευρών του  $AEMH$ :

$$\begin{aligned} AE &= |a - (-x_0)| = a + x_0, & MH &= |x_0 - (-a)| = a + x_0, \\ EM &= \sqrt{(x_0 - a)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - a)^2 + 4ax_0} = \sqrt{(x_0 + a)^2} = a + x_0, \\ HA &= \sqrt{(a - x_0)^2 + y_0^2} = \sqrt{(a - x_0)^2 + 4ax_0} = \sqrt{(a + x_0)^2} = a + x_0. \end{aligned}$$

Άρα  $AE = EM = MH = HA \implies$  το τετράπλευρο  $AEMH$  είναι ρόμβος.

ii. (*To O είναι μέσο της  $A\Pi$* ).

$$A(-x_0, 0), \quad \Pi(x_0, 0) \Rightarrow \text{μέσο} = \left( \frac{-x_0+x_0}{2}, 0 \right) = (0, 0) = O.$$

iii. (*To κέντρο του ρόμβου ανήκει στην εφαπτομένη της κορυφής*). Το κέντρο  $K$  του ρόμβου είναι το μέσο διαγωνίων, π.χ. της  $AM$ :

$$K = \left( \frac{-x_0+x_0}{2}, \frac{0+y_0}{2} \right) = (0, \frac{y_0}{2}).$$

Η εφαπτομένη στην κορυφή  $O$  της  $y^2 = 4ax$  είναι η  $x = 0$  (κατακόρυφη). Το  $K$  έχει  $x = 0$   $\implies K$  ανήκει στην εφαπτομένη της κορυφής.

iv. (*H εστία είναι μέσο της  $AB$* ).

$$A(-x_0, 0), \quad B(x_0 + 2a, 0) \Rightarrow \text{μέσο}(AB) = \left( \frac{-x_0+x_0+2a}{2}, 0 \right) = (a, 0) = E.$$

**30.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4ax$  με  $a > 0$  και σημείο της  $A(4a, -4a)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την κάθετη της παραβολής στο σημείο  $A$ .

Λύση:

(Ασκ. 4/96)

Για την  $y^2 = 4ax$  έχουμε

$$2y y' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}.$$

Στο  $A(4a, -4a)$  η κλίση της εφαπτομένης είναι

$$m_A = y'(A) = \frac{2a}{-4a} = -\frac{1}{2},$$

άρα η κλίση της κάθετης (χανονικής) στο  $A$  είναι

$$m_{\perp A} = +2.$$

Ζητούμε σημείο  $P(x_1, y_1)$  της παραβολής ώστε η εφαπτομένη στο  $P$  να είναι παράλληλη προς την κάθετη στο  $A$ , δηλ.

$$y'(P) = \frac{2a}{y_1} = m_{\perp A} = 2 \implies y_1 = a.$$

Επειδή το  $P$  ανήκει στην παραβολή,  $y_1^2 = 4ax_1 \Rightarrow a^2 = 4ax_1 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{4}$ .

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι

$$P\left(\frac{a}{4}, a\right)$$

Η εφαπτομένη στο  $P$  με εξίσωση  $(y - a) = 2\left(x - \frac{a}{4}\right)$  είναι παράλληλη στην κάθετη του  $A$ .

**31.** Έστω  $AB$  εστιακή χορδή και  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  οι εφαπτόμενες της παραβολής  $y^2 = 4ax$  στα  $A, B$ , αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$ . Αν οι  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  τέμνουν την εφαπτομένη στην κορυφή στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$ , να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου  $K\Lambda\Gamma$ .

Λύση:

(Ασκ. 5/96)

Θέτουμε τα σημεία  $A$  και  $B$  της παραβολής  $y^2 = 4ax$  ως:

$$A(at_1^2, 2at_1), \quad B(at_2^2, 2at_2).$$

Επειδή η  $AB$  είναι εστιακή χορδή, ισχύει

$$t_1 t_2 = -1. \quad (1)$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  στα σημεία  $A, B$  είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1) : t_1 y &= x + at_1^2, \\ (\varepsilon_2) : t_2 y &= x + at_2^2. \end{aligned}$$

Το σημείο  $\Gamma$  τομής τους προκύπτει λύνοντας το σύστημα:

$$t_1 y - x - at_1^2 = 0, \quad t_2 y - x - at_2^2 = 0.$$

Αφαιρούμε κατά μέλη:

$$(t_1 - t_2)y - a(t_1^2 - t_2^2) = 0 \implies y_\Gamma = a(t_1 + t_2).$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση:

$$x_\Gamma = t_1 y_\Gamma - at_1^2 = at_1(t_1 + t_2) - at_1^2 = at_1 t_2.$$

Άρα:

$$\Gamma(at_1 t_2, a(t_1 + t_2)). \quad (2)$$

Η εφαπτομένη στην κορυφή  $O(0, 0)$  είναι ο άξονας  $x = 0$ . Οι  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  τέμνουν την  $x = 0$  στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$ . Από  $x = 0$ :

$$t_1 y = at_1^2 \Rightarrow y = at_1, \quad \Rightarrow K(0, at_1),$$

$$t_2 y = at_2^2 \Rightarrow y = at_2, \quad \Rightarrow \Lambda(0, at_2).$$

Υπολογίζουμε τα εμβαδά:

Το τρίγωνο  $OAB$  έχει κορυφές  $O(0, 0)$ ,  $A(at_1^2, 2at_1)$ ,  $B(at_2^2, 2at_2)$ , οπότε το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:

$$E_{OAB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_O & y_O & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2} a^2 |t_1 t_2| |2(t_1 - t_2)|.$$

Από (1),  $t_1 t_2 = -1$ , άρα

$$E_{OAB} = a^2 |t_1 - t_2|. \quad (3)$$

Για το τρίγωνο  $K\Lambda\Gamma$ :

$$K(0, at_1), \quad \Lambda(0, at_2), \quad \Gamma(at_1 t_2, a(t_1 + t_2)).$$

Το εμβαδόν είναι:

$$E_{K\Lambda\Gamma} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_K & y_K & 1 \\ x_\Lambda & y_\Lambda & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_\Gamma| \cdot |y_\Lambda - y_K| = \frac{1}{2} |at_1 t_2| \cdot a|t_2 - t_1| = \frac{1}{2} a^2 |t_1 - t_2|. \quad (4)$$

Από (3) και (4):

$$E_{OAB} = 2 E_{K\Lambda\Gamma}.$$

**32.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4ax$  ( $a > 0$ ) με κορυφή  $O$ . Έστω  $A, B$  σημεία της παραβολής έτσι ώστε οι χορδές  $OA$  και  $OB$  να είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των εφαπτομένων στα  $A$  και  $B$  είναι η ευθεία  $x = -4a$ .

Λύση:

(Ασκ. 6/96)

Παραμετροποιούμε την  $y^2 = 4ax$  ως

$$A(at_1^2, 2at_1), \quad B(at_2^2, 2at_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Κλίση εφαπτομένης: Για  $y^2 = 4ax$  ισχύει  $2y y' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}$ . Στο σημείο  $P(at^2, 2at)$  πάροντας

$$m_T(t) = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} \Rightarrow y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2) \iff ty = x + at^2. \quad (1)$$

Άρα οι εφαπτόμενες στα  $A, B$  είναι

$$t_1 y = x + at_1^2, \quad t_2 y = x + at_2^2.$$

Λύνοντας το σύστημα, το σημείο τομής  $\Gamma$  ικανοποιεί

$$(t_1 - t_2)y = a(t_1^2 - t_2^2) \Rightarrow y_\Gamma = a(t_1 + t_2),$$

και από (1) ( $\pi.\chi.$  για  $t_1$ ):

$$x_\Gamma = t_1 y_\Gamma - at_1^2 = at_1(t_1 + t_2) - at_1^2 = at_1 t_2. \quad (2)$$

Κάθετες  $OA$  και  $OB$ :

$$\text{κλίση } OA = \frac{2at_1}{at_1^2} = \frac{2}{t_1}, \quad \text{κλίση } OB = \frac{2}{t_2}.$$

$$\text{Κάθετες} \iff \frac{2}{t_1} \cdot \frac{2}{t_2} = -1 \Rightarrow t_1 t_2 = -4.$$

$$t_1 t_2 = -4. \quad (3)$$

Από (2) και (3) προκύπτει

$$x_\Gamma = a t_1 t_2 = a(-4) = -4a,$$

δηλαδή το  $x$ -συντεταγμένο του  $\Gamma$  είναι σταθερό και ανεξάρτητο των  $t_1, t_2$ .

Συμπέρασμα: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των εφαπτομένων στα  $A, B$  είναι η κατακόρυφη ευθεία

$$x = -4a$$

**33.** Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής  $y^2 = 4ax$  ( $a > 0$ ), της οποίας το μέσο είναι το σημείο  $A(x_1, y_1)$ , σε συνάρτηση των  $x_1, y_1$ .

Λύση:

(Ασκ. 7/97)

Θέτουμε τα άκρα της χορδής

$$P(at_1^2, 2at_1), \quad Q(at_2^2, 2at_2).$$

Εφόσον το μέσο είναι  $A(x_1, y_1)$ ,

$$x_1 = \frac{a(t_1^2 + t_2^2)}{2}, \quad y_1 = \frac{2a(t_1 + t_2)}{2} = a(t_1 + t_2). \quad (1)$$

Από (1) παίρνουμε

$$t_1 + t_2 = \frac{y_1}{a}, \quad t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = \frac{y_1^2}{a^2} - 2t_1 t_2,$$

και άρα

$$x_1 = \frac{a}{2} \left( \frac{y_1^2}{a^2} - 2t_1 t_2 \right) \implies t_1 t_2 = \frac{y_1^2}{2a^2} - \frac{x_1}{a}. \quad (2)$$

Η εξίσωση της ευθείας  $PQ$  γράφεται  $y = mx + c$ . Για κάθε σημείο της παραβολής  $(x, y) = (at^2, 2at)$  που ανήκει στην ευθεία ισχύει

$$2at = m(at^2) + c \iff ma t^2 - 2a t + c = 0,$$

της οποίας ρίζες είναι  $t_1, t_2$ . Άρα **Vieta**,

$$t_1 + t_2 = \frac{2}{m}, \quad t_1 t_2 = \frac{c}{ma}. \quad (3)$$

Από (1) και (3) παίρνουμε

$$m = \frac{2}{t_1 + t_2} = \frac{2}{y_1/a} = \frac{2a}{y_1},$$

και από (2),(3)

$$c = ma t_1 t_2 = \frac{2a}{y_1} \cdot a \left( \frac{y_1^2}{2a^2} - \frac{x_1}{a} \right) = y_1 - \frac{2ax_1}{y_1}.$$

Επομένως η ζητούμενη χορδή είναι

$$y = \frac{2a}{y_1} x + \left( y_1 - \frac{2ax_1}{y_1} \right).$$

Πολλαπλασιάζοντας επί  $y_1$ :

$$y y_1 = 2a x + y_1^2 - 2a x_1 \iff y y_1 = 2a(x + x_1) + (y_1^2 - 4ax_1).$$

(Η σχέση ισχύει για κάθε  $A(x_1, y_1)$ ; αν  $y_1 = 0$ , η χορδή είναι ο άξονας  $y = 0$ .)

**34.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και τα σημεία της  $P(\rho^2, 2\rho)$  και  $T(t^2, 2t)$ .

- i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα  $P, T$ .
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $M$  των εφαπτομένων.
- iii. Αν η χορδή  $PT$  διέρχεται από το σταθερό σημείο  $A(2, 0)$ , να δείξετε ότι  $\rho t = -2$ .
- iv. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του  $M$ .
- v. Να βρείτε την τιμή του  $\rho > 0$  για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου  $PMT$  είναι ελάχιστο και να υπολογίσετε το εμβαδόν αυτό.

Λύση:

(Ασκ. 8/97)

Παράγωγος και τύπος σημείου-κλίσης. Από  $y^2 = 4x$  παίρνουμε  $2y y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}$ . Στο σημείο  $(s^2, 2s)$  η κλίση της εφαπτομένης είναι  $m = \frac{2}{2s} = \frac{1}{s}$  και

$$y - 2s = \frac{1}{s}(x - s^2) \iff s y = x + s^2. \quad (\star)$$

- i. Για τα σημεία  $P(\rho^2, 2\rho)$  και  $T(t^2, 2t)$ , από  $(\star)$ :

$$(\varepsilon_P) : \rho y = x + \rho^2, \quad (\varepsilon_T) : t y = x + t^2.$$

ii. Για το σημείο τομής  $M$  των εφαπτομένων λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \rho y = x + \rho^2 \\ t y = x + t^2 \end{cases} \Rightarrow (\rho - t)y = \rho^2 - t^2 = (\rho - t)(\rho + t) \Rightarrow y_M = \rho + t,$$

$$x_M = \rho y_M - \rho^2 = \rho(\rho + t) - \rho^2 = \rho t.$$

$$M(\rho t, \rho + t)$$

iii. Η χορδή  $PT$  περνά από το σταθερό σημείο  $A(2, 0)$ . Η κλίση της  $PT$  είναι

$$m_{PT} = \frac{2t - 2\rho}{t^2 - \rho^2} = \frac{2}{t + \rho}.$$

Για να ανήκει το  $A$  στην  $PT$ , πρέπει να ισχύει:

$$\frac{0 - 2\rho}{2 - \rho^2} = \frac{2}{t + \rho} \iff -2\rho(t + \rho) = 2(2 - \rho^2) \iff -\rho t - \rho^2 = 2 - \rho^2 \Rightarrow \rho t = -2$$

iv. Από (ii) και (iii):  $x_M = \rho t = -2$ ,  $y_M = \rho + t$ . Άρα ο γεωμετρικός τόπος του  $M$  έχει εξίσωση

$$x = -2$$

v. Από  $\rho t = -2$  έχουμε  $t = -\frac{2}{\rho}$  με  $\rho > 0$ . Τότε:

$$P(\rho^2, 2\rho), \quad T\left(\frac{4}{\rho^2}, -\frac{4}{\rho}\right), \quad M(-2, \rho - \frac{2}{\rho}).$$

Το εμβαδόν  $E(\rho)$  του τριγώνου  $PMT$  (τύπος ορίζοντα):

$$E(\rho) = \frac{1}{2} |x_P(y_T - y_M) + x_T(y_M - y_P) + x_M(y_P - y_T)| = \frac{\rho^3}{2} + 3\rho + \frac{6}{\rho} + \frac{4}{\rho^3}.$$

Παράγωγος:

$$E'(\rho) = \frac{3}{2}\rho^2 + 3 - \frac{6}{\rho^2} - \frac{12}{\rho^4} = \frac{3(\rho^2 - 2)(\rho^2 + 2)^2}{2\rho^4}.$$

Για  $\rho > 0$ , ελάχιστο όταν  $\rho = \sqrt{2}$ .

$$\rho_{\min} = \sqrt{2}, \quad t_{\min} = -\sqrt{2}, \quad E_{\min} = 8\sqrt{2}$$

**35.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 4x$  στο σημείο  $P(\rho^2, 2\rho)$  είναι η  $\rho y = x + \rho^2$ . Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $A$  και  $O$  είναι η κορυφή της παραβολής, να δείξετε ότι ισχύει:

$$(PA)^2 - (PO)^2 = 3\rho^4.$$

Λύση:

(Ασκ. 9/96)

Για την παραβολή  $y^2 = 4x$  έχουμε  $2y y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}$ .

Στο σημείο  $P(\rho^2, 2\rho)$  η κλίση της εφαπτομένης είναι

$$m_P = \frac{2}{2\rho} = \frac{1}{\rho}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης με τύπο σημείου-κλίσης είναι:

$$y - 2\rho = \frac{1}{\rho}(x - \rho^2) \iff \rho y = x + \rho^2.$$

Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των  $x$  (όπου  $y = 0$ ):

$$0 = \frac{1}{\rho}(x - \rho^2) + 2\rho \iff x = \rho^2 - 2\rho^2 = -\rho^2.$$

Άρα:

$$A(-\rho^2, 0).$$

Η κορυφή είναι  $O(0, 0)$  και  $P(\rho^2, 2\rho)$ .

Τι πολογίζουμε:

$$PA^2 = (\rho^2 - (-\rho^2))^2 + (2\rho - 0)^2 = (2\rho^2)^2 + (2\rho)^2 = 4\rho^4 + 4\rho^2.$$

$$PO^2 = (\rho^2 - 0)^2 + (2\rho - 0)^2 = \rho^4 + 4\rho^2.$$

Άρα:

$$(PA)^2 - (PO)^2 = (4\rho^4 + 4\rho^2) - (\rho^4 + 4\rho^2) = 3\rho^4.$$

**36.** Έστω η παραβολή  $y^2 = 4ax$  με  $a > 0$  και μια εστιακή χορδή  $PQ$ . Να δείξετε ότι:

i. οι εφαπτόμενες στα άκρα  $P, Q$  τέμνονται υπό ορθή γωνία πάνω στη διευθετούσα της παραβολής,

ii. ο κύκλος με διάμετρο την  $PQ$  εφάπτεται της διευθετούσας.

Λύση:

(Ασκ. 10/97)

Θέτουμε

$$P(at_1^2, 2at_1), \quad Q(at_2^2, 2at_2)$$

(παραμετρικά σημεία της  $y^2 = 4ax$ ). Εφόσον η  $PQ$  είναι εστιακή χορδή,

$$t_1 t_2 = -1. \quad (1)$$

Η παράγωγος της  $y^2 = 4ax$  δίνει  $2y y' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}$ . Στο σημείο  $(at^2, 2at)$  η κλίση της εφαπτομένης είναι  $m = \frac{1}{t}$  και η εξίσωσή της (τύπος σημείου-κλίσης) ισοδυναμεί με

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2) \iff t y = x + at^2. \quad (2)$$

i. Κάθετες εφαπτόμενες που τέμνουν στη διευθετούσα. Οι εφαπτόμενες στα  $P, Q$  από (2) είναι

$$t_1 y = x + at_1^2, \quad t_2 y = x + at_2^2.$$

Τομή τους  $\Gamma$ : αφαιρούμε κατά μέλη

$$(t_1 - t_2)y = a(t_1^2 - t_2^2) \Rightarrow y_\Gamma = a(t_1 + t_2),$$

και π.χ. στην πρώτη

$$x_\Gamma = t_1 y_\Gamma - at_1^2 = at_1 t_2.$$

Με (1):  $x_\Gamma = a(-1) = -a$ . Άρα  $\Gamma$  ανήκει στη διευθετούσα  $x = -a$ . Επιπλέον οι κλίσεις είναι  $m_P = \frac{1}{t_1}, m_Q = \frac{1}{t_2}$  οπότε

$$m_P m_Q = \frac{1}{t_1 t_2} = -1,$$

δηλαδή οι δύο εφαπτόμενες είναι κάθετες. Το (i) αποδείχθηκε.

ii. Ο κύκλος με διάμετρο  $PQ$  εφάπτεται της διευθετούσας. Κέντρο  $M$  του κύκλου: μέσο του  $PQ$ ,

$$M\left(\frac{a(t_1^2 + t_2^2)}{2}, \frac{2a(t_1 + t_2)}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2), a(t_1 + t_2)\right).$$

Ακτίνα  $r = \frac{PQ}{2}$ . Από

$$\Delta x = a(t_1^2 - t_2^2) = a(t_1 - t_2)(t_1 + t_2), \quad \Delta y = 2a(t_1 - t_2),$$

παίρνουμε

$$r^2 = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{4} = \frac{a^2(t_1 - t_2)^2[(t_1 + t_2)^2 + 4]}{4}. \quad (3)$$

Από  $t_1 t_2 = -1$  ισχύει

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = (t_1 + t_2)^2 + 4. \quad (4)$$

Με (4) η (3) δίνει

$$r^2 = \frac{a^2}{4} (t_1 - t_2)^4 \Rightarrow r = \frac{a}{2} |t_1 - t_2|^2. \quad (5)$$

Η απόσταση του κέντρου  $M$  από τη διευθετούσα  $x = -a$  είναι

$$d(M, x = -a) = |x_M + a| = \left| \frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2) + a \right| = \frac{a}{2} ((t_1 + t_2)^2 + 4) = \frac{a}{2} |t_1 - t_2|^2. \quad (6)$$

Από (5) και (6) προκύπτει  $d(M, x = -a) = r$ . Άρα η διευθετούσα είναι εφαπτομένη του κύκλου με διάμετρο  $PQ$ .

Ο κύκλος με διάμετρο  $PQ$  εφάπτεται της διευθετούσας  $x = -a$ .

**37.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4ax$  ( $a > 0$ ), μια χορδή της  $AB$  και η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) που είναι παράλληλη προς την  $AB$ . Να αποδείξετε ότι, αν  $M$  είναι το μέσο της  $AB$  και  $\Gamma$  το σημείο επαφής ( $\varepsilon$ ) με την παραβολή, τότε η  $M\Gamma$  είναι παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής (τον  $x'x$ ).

Λύση:

(Ασκ. 11/97)

Παραμετροποιούμε την  $y^2 = 4ax$  ως

$$A(at_1^2, 2at_1), \quad B(at_2^2, 2at_2) \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Τότε το μέσο της χορδής  $AB$  είναι

$$M\left(\frac{a(t_1^2 + t_2^2)}{2}, \frac{2a(t_1 + t_2)}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2), a(t_1 + t_2)\right). \quad (1)$$

Κλίση χορδής  $AB$ . Η κλίση της  $AB$  είναι

$$m_{AB} = \frac{2a(t_2 - t_1)}{a(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2} \quad (t_1 \neq t_2). \quad (2)$$

Κλίση εφαπτομένης. Από  $y^2 = 4ax$  προκύπτει  $2y y' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}$ . Στο σημείο  $(a\tau^2, 2a\tau)$  η κλίση της εφαπτομένης είναι

$$m_{\text{εφαπτ.}}(\tau) = \frac{2a}{2a\tau} = \frac{1}{\tau}. \quad (3)$$

Η  $(\varepsilon)$  είναι παράλληλη προς την  $AB \implies$  ίδιες κλίσεις. Από (2),(3):  $\frac{1}{\tau} = \frac{2}{t_1 + t_2} \Rightarrow \tau = \frac{t_1 + t_2}{2}$ . Άρα το σημείο επαφής είναι

$$\Gamma(a\tau^2, 2a\tau) = \left(a\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)^2, 2a \cdot \frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \left(\frac{a}{4}(t_1 + t_2)^2, a(t_1 + t_2)\right). \quad (4)$$

Από (1) και (4) παίρνουμε

$$y_M = a(t_1 + t_2) = y_\Gamma.$$

Άρα η ευθεία  $M\Gamma$  έχει σταθερή τεταγμένη και επομένως είναι οριζόντια, δηλαδή παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .

$$M\Gamma \parallel x'x$$

**38.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4ax$  ( $a > 0$ ) και από σημείο  $M(x_0, y_0)$  εκτός της παραβολής άγονται οι εφαπτόμενες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Αν  $M_1, M_2$  είναι τα σημεία επαφής των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  με την παραβολή, να αποδείξετε ότι η χορδή επαφής  $M_1M_2$  έχει εξίσωση

$$y y_0 = 2a(x + x_0)$$

Λύση:

(Ασκ. 12/97)

Εξίσωση εφαπτομένης με παράγωγο και τύπο σημείου-κλίσης.

$$\text{Από } y^2 = 4ax \Rightarrow 2y y' = 4a, \text{ άρα } y' = \frac{2a}{y}.$$

$$\Sigma \text{το σημείο της παραβολής } P(at^2, 2at) \text{ η κλίση είναι } m = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} \text{ και}$$

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2) \iff t y = x + at^2. \quad (1)$$

Οι δύο εφαπτόμενες από το  $M(x_0, y_0)$  αντιστοιχούν σε δύο τιμές  $t = t_1, t_2$  που ικανοποιούν

$$t y_0 = x_0 + at^2 \iff at^2 - y_0 t + x_0 = 0. \quad (2)$$

Θέτουμε

$$S = t_1 + t_2 = \frac{y_0}{a}, \quad P = t_1 t_2 = \frac{x_0}{a}. \quad (3)$$

Εξίσωση της  $M_1M_2$ . Τα όκρα της είναι  $M_1(at_1^2, 2at_1), M_2(at_2^2, 2at_2)$ .

Η κλίση της χορδής  $M_1M_2$  (από τον τύπο δύο σημείων) είναι

$$m_{12} = \frac{2a(t_2 - t_1)}{a(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2} = \frac{2}{S}. \quad (4)$$

Με τύπο σημείου-κλίσης από το  $M_1$ :

$$y - 2at_1 = \frac{2}{S}(x - at_1^2) \iff S y = 2x - 2at_1^2 + 2at_1 S = 2x + 2a t_1 t_2.$$

Άρα

$$S y = 2x + 2aP.$$

Χρησιμοποιώντας το (3):

$$\frac{y_0}{a} y = 2x + 2a \cdot \frac{x_0}{a} \iff y y_0 = 2a(x + x_0).$$

**39.** Να εξηγήσετε γιατί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που *εφάπτονται σε ευθεία* ( $\delta$ ) *και διέρχονται από σταθερό σημείο*  $E$  είναι παραβολή με εστία το  $E$  και διευθετούσα την ( $\delta$ ).

Λύση:

(Ασκ. 1/98)

Έστω κύκλος που *εφάπτεται στην* ( $\delta$ ) *και διέρχεται από το*  $E$ . Θέτουμε  $C$  το κέντρο του και  $r$  την ακτίνα του. Η επαφή με την ( $\delta$ ) σημαίνει ότι η απόσταση του  $C$  από την ( $\delta$ ) είναι ίση με την ακτίνα:

$$d(C, \delta) = r.$$

Εφόσον το  $E$  ανήκει στον κύκλο, η απόσταση του  $C$  από το  $E$  είναι επίσης  $r$ :

$$CE = r.$$

Άρα για κάθε τέτοιο κέντρο  $C$  ισχύει

$$CE = d(C, \delta).$$

Αυτή ακριβώς είναι ο ορισμός της παραβολής με εστία το σημείο  $E$  και διευθετούσα την ( $\delta$ ): ο τόπος των σημείων που είναι *ισαπέχοντα από ένα σταθερό σημείο* (εστία) *και μια σταθερή ευθεία* (διευθετούσα).

Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων  $C$  όλων των ζητούμενων κύκλων είναι παραβολή με εστία  $E$  και διευθετούσα ( $\delta$ ).

Λοκούς  $C$ :  $CE = d(C, \delta) \iff$  παραβολή με εστία  $E$  και διευθετούσα ( $\delta$ ).

**40.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 8x$  με εστία το σημείο  $E$ . Το σημείο  $A$  της παραβολής είναι τέτοιο, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AH$  να είναι κάθετο στη διευθετούσα της παραβολής ( $H$  σημείο της διευθετούσας) και η  $\widehat{AEH} = 30^\circ$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του τριγώνου  $AEH$ .

Λύση:

(Ασκ. 2/98)

Η παραβολή έχει τη μορφή  $y^2 = 4ax$  με  $4a = 8 \Rightarrow a = 2$ .

Άρα:

$$E(2, 0), \quad (\delta) : x = -2.$$

Θέτουμε  $A(at^2, 2at) \Rightarrow A(2t^2, 4t)$ .

Το σημείο  $H$  ανήκει στη διευθετούσα, όπου έχει συντεταγμένες  $H(-2, y_H)$ . Εφόσον το  $AH$  είναι κάθετο στη διευθετούσα (δηλαδή παράλληλο στον άξονα  $x'x$ ), θα έχει σταθερή τεταγμένη  $y_A = y_H = 4t$ .

Αριθμητικές σημείων:

$$H(-2, 4t).$$

Αποστάσεις σημείων:

$$AE = \sqrt{(2t^2 - 2)^2 + (4t - 0)^2} = \sqrt{4(t^2 - 1)^2 + 16t^2} = 2\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2} = 2\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = 2(t^2 + 1).$$

$$EH = |x_E - x_H| = 2 - (-2) = 4.$$

$$AH = |x_A - x_H| = 2t^2 - (-2) = 2(t^2 + 1).$$

Δεδομένο: η  $\widehat{AEH} = 30^\circ$ . Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο  $AEH$ :

$$\cos 30^\circ = \frac{AE^2 + EH^2 - AH^2}{2(AE)(EH)}.$$

Αντικαθιστούμε:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(2(t^2 + 1))^2 + 4^2 - (2(t^2 + 1))^2}{2 \cdot 2(t^2 + 1) \cdot 4} = \frac{16}{16(t^2 + 1)} \Rightarrow \sqrt{3}(t^2 + 1) = 2 \Rightarrow t^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

Υπολογισμοί πλευρών:

$$AE = 2(t^2 + 1) = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad EH = 4, \quad AH = 2(t^2 + 1) = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Εμβαδόν:

$$E_{\triangle AEH} = \frac{1}{2}(AE)(EH) \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Περίμετρος:

$$\Pi_{\triangle AEH} = AE + EH + AH = \frac{4}{\sqrt{3}} + 4 + \frac{4}{\sqrt{3}} = 4\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

**41.** Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος των προβολών της εστίας μιας παραβολής πάνω στις εφαπτόμενές της.

Λύση:

(Ασκ. 3/98)

Έστω η παραβολή  $y^2 = 4ax$  με

$$E(a, 0) \quad (\text{εστία}).$$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο  $P(at^2, 2at)$  είναι

$$ty = x + at^2. \quad (1)$$

Θέλουμε την προβολή  $M(x, y)$  του  $E(a, 0)$  πάνω στην εφαπτομένη (1).

Απόσταση σημείου από ευθεία. Η (1) γράφεται σε κανονική μορφή:

$$x - ty + at^2 = 0. \quad (2)$$

Η κλίση της εφαπτομένης είναι  $m = \frac{1}{t}$ , άρα η κλίση της κάθετης (διεύθυνση της προβολής) είναι  $-t$ .

Η ευθεία κάθετη στην (1) που διέρχεται από  $E(a, 0)$  έχει εξίσωση:

$$y = -t(x - a). \quad (3)$$

Το σημείο τομής της (3) με την (1) είναι η προβολή  $M$ . Από (1):  $ty = x + at^2 \Rightarrow x = ty - at^2$ . Αντικαθιστούμε στη (3):

$$y = -t(ty - at^2 - a) \Rightarrow y(1 + t^2) = at^3 + at \Rightarrow y = \frac{at(1 + t^2)}{1 + t^2} = at.$$

Άρα

$$y_M = at.$$

Αντικαθιστούμε στην (1):

$$t(at) = x + at^2 \Rightarrow x = at^2 - at^2 = 0.$$

Έτσι:

$$M(0, at).$$

Το σημείο  $M$  κινείται με  $x = 0$ ,  $y = at$ . Εφόσον το  $t$  παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, ο τόπος των σημείων  $M$  είναι η ευθεία

$$x = 0$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των προβολών της εστίας πάνω στις εφαπτόμενες της παραβολής  $y^2 = 4ax$  είναι η κάθετη διάμεσος της παραβολής, δηλαδή ο άξονας συμμετρίας της.

## Θέματα Εξετάσεων

---

**1.** Δίνεται παραβολή με κορυφή το σημείο  $O(0, 0)$  και εστία το σημείο  $E(2, 0)$ . Να βρείτε:

- Την εξίσωση της παραβολής.
- Την εξίσωση διευθετούσας της παραβολής.
- Τις παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.

Λύση:

2025

- Έχουμε:

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ \text{Επομένως, } y^2 = 8x. \\ a = 2 \end{cases}$$

- $\delta : x = -a \Rightarrow x = -2$  η διευθετούσα.

- Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι:

$$x = 2t^2 \quad \text{και} \quad y = 4t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**2.** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4ax$ ,  $a > 0$ . Παίρνουμε σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  πάνω στην διευθετούσα της, με  $y_\Gamma > 0$ , έτσι ώστε η γωνία  $\Gamma E \Delta$  να είναι ορθή, όπου  $E$  η εστία της παραβολής. Από τα  $\Gamma$  και  $\Delta$  φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής, οι οποίες τέμνουν την παραβολή στα σημεία  $A(at^2, 2at)$  και  $B(ap^2, 2ap)$ , αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι  $AB$  είναι εστιακή χορδή.

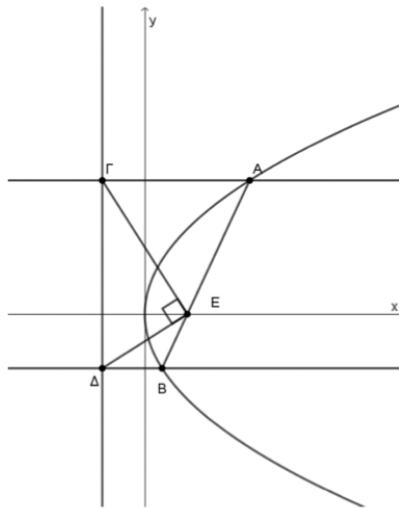
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$  έτσι ώστε το τραπέζιο  $AB\Delta\Gamma$  να έχει ελάχιστον εμβαδόν. ( $To εμβαδόν του τραπέζου εναντίον E = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\nu}{2}$ )

Λύση:

2024

- Τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  έχουν συντεταγμένες  $(-a, 2at)$  και  $(-a, 2ap)$  αντίστοιχα. Αφού η γωνία  $\Gamma E \Delta = 90^\circ$  έχουμε ότι

$$\Gamma E \perp E\Delta$$



Άρα  $\lambda_{E\Gamma} \cdot \lambda_{E\Delta} = -1$

$$\lambda_{E\Gamma} = \frac{2at - 0}{-a - a} = -t, \quad \lambda_{E\Delta} = \frac{2a\rho - 0}{-a - a} = -\rho$$

$$\Rightarrow (-t) \cdot (-\rho) = -1 \Rightarrow t \cdot \rho = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{\rho}$$

$$\lambda_{AE} = \frac{2at}{at^2 - a} = \frac{2t}{t^2 - 1} = \frac{2 \left( \frac{-1}{\rho} \right)}{\left( \frac{-1}{\rho} \right)^2 - 1} = \frac{-2\rho}{1 - \rho^2} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1}$$

$$\lambda_{BE} = \frac{2a\rho}{a\rho^2 - a} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \lambda_{AE} = \lambda_{BE} \Rightarrow AE \parallel BE$$

Επειδή το  $E$  είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία  $A, E, B$  είναι συνευθειακά και συνεπώς η  $AB$  είναι εστιακή χορδή.

B Τρόπος:

$$\lambda_{AB} = \frac{2at - 2a\rho}{at^2 - a\rho^2} = \frac{2a(t - \rho)}{a(t^2 - \rho^2)} = \frac{2a(t - \rho)}{a(t - \rho)(t + \rho)} = \frac{2}{t + \rho}$$

Εξίσωση ευθείας  $AB$ :

$$y - 2at = \frac{2}{(t + \rho)}(x - at^2) \Rightarrow (t + \rho)y - 2at(t + \rho) = 2x - 2at^2$$

$$\Rightarrow (t + \rho)y = 2x + 2at\rho$$

Η εστία την επαληθεύει, αφού

$$(t + \rho) \cdot 0 = 2a + 2at\rho \Rightarrow 2a + 2at\rho = 0 \Rightarrow tp = -1$$

που ισχύει από την καθετότητα των  $\Gamma E$  και  $E\Delta$ . Άρα τα σημεία  $A, E, B$  είναι συνευθειακά και συνεπώς η  $AB$  είναι εστιακή χορδή.

ii. Το εμβαδόν του τραπεζίου  $AB\Delta\Gamma$  είναι ίσο με

$$E = \frac{[(A\Gamma) + (B\Delta)] \cdot (\Gamma\Delta)}{2} = \frac{[(at^2 + a) + (a\rho^2 + a)] \cdot 2a(t - \rho)}{2}$$

$$\text{Αφού } t\rho = -1 \Rightarrow \rho = -\frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(t) &= \frac{1}{2}(at^2 + \frac{a}{t^2} + 2a) \cdot 2a \left( t + \frac{1}{t} \right) \\ &= a^2 \cdot \left( t + \frac{1}{t} \right)^2 \cdot \left( t + \frac{1}{t} \right) = a^2 \cdot \left( t + \frac{1}{t} \right)^3 \\ E'(t) &= 3a^2 \cdot \left( t + \frac{1}{t} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1, \quad t \neq 0 \text{ διπλή} \end{aligned}$$

$t$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$E'(t)$	+	0	-		- 0 +
$E(t)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα για  $t = 1$  έχουμε ελάχιστο εμβαδόν και οι συντεταγμένες του σημείου  $A$  είναι

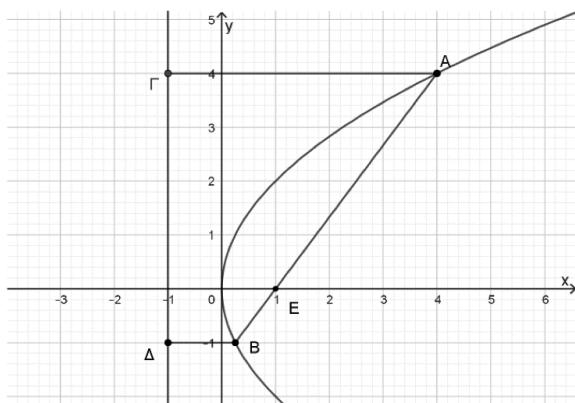
$$A(a, 2a)$$

3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$  και η εστιακή χορδή  $AB$  όπου  $A(t^2, 2t)$ ,  $t > 0$  και  $B(\rho^2, 2\rho)$ . Από τα σημεία  $A$  και  $B$  φέρουμε κάθετες προς την διευθετούσα της παραβολής, την οποία τέμνουν στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα.

- i. Να δείξετε ότι  $t\rho = -1$ .
- ii. Αν  $S = (A\Gamma) + (B\Delta)$ , να δείξετε ότι  $S = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$ .
- iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου  $t$  ώστε το  $S$  να ελαχιστοποιείται.

Λύση:

2023



i.

$$\lambda_{AE} = \lambda_{EB} \Rightarrow \frac{2t}{t^2 - 1} = \frac{2\rho}{\rho^2 - 1} \Rightarrow 2t(\rho^2 - 1) = 2\rho(t^2 - 1) \Rightarrow t\rho^2 - t = \rho t^2 - \rho$$

$$t\rho^2 - \rho t^2 = t - \rho \Rightarrow t\rho(\rho - t) = (t - \rho) \Rightarrow t\rho = -1 \quad (t \neq \rho, t, \rho \neq \pm 1)$$

ii.

$$S = (A\Gamma) + (B\Delta) = (x_A + 1) + (x_B + 1) = t^2 + 1 + \rho^2 + 1$$

Από (i)

$$\Rightarrow \rho = -\frac{1}{t} \Rightarrow S = t^2 + 1 + \frac{1}{t^2} + 1 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2.$$

iii.

$$S(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \Rightarrow S'(t) = 2t - \frac{2}{t^3}$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 2t - \frac{2}{t^3} = 0 \Rightarrow \frac{t^4 - 1}{t^3} = 0 \Rightarrow t^4 = 1 \Rightarrow t = 1, \quad (t > 0)$$

$$S'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} \Rightarrow S''(t) = 2 + \frac{6}{t^4} \Rightarrow S''(1) > 0$$

Από το χριτήριο της δεύτερης παραγώγου το  $S$  ελαχιστοποιείται για  $t = 1$ .

4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4ax$ ,  $a > 0$  και εστία  $E$ . Έστω  $T(at^2, 2at)$ ,  $t \neq 0$  τυχαίο σημείο της. Αν  $A$  η προβολή του σημείου  $T$  στην διεύθετούσα της παραβολής και  $M$  το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AE$ , να αποδείξετε ότι η  $TM$  τέμνει κάθετα την  $AE$ .

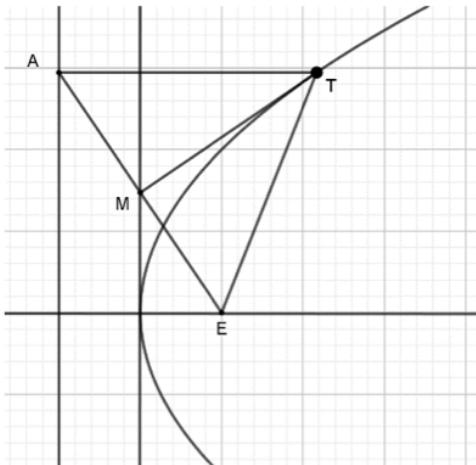
Λύση:

2022

Από τον ορισμό της παραβολής

$$TA = TE$$

Άρα,  $ATE$  ισοσκελές τρίγωνο  
και επειδή  $TM$  διάμεσος, τότε  $TM$  ύψος.  
Επομένως,  $TM \perp AE$ .



### B' τρόπος

Αφού το  $A$  είναι η προβολή του  $T$  στην διεύθετούσα, τότε  $A(-a, 2at)$ .

Η εστία της παραβολής είναι  $E(a, 0)$ .

Το μέσο του  $AE$  είναι το σημείο

$$M\left(\frac{-a+a}{2}, \frac{2at+0}{2}\right) \equiv M(0, at)$$

Έχουμε

$$\lambda_{TM} \cdot \lambda_{AE} = \frac{2at - at}{at^2 - 0} \cdot \frac{2at - 0}{-a - a} = \frac{at}{at^2} \cdot \frac{2at}{-2a} = -1$$

Συνεπώς,  $TM \perp AE$

5. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και το σημείο της  $A(t^2, 2t)$ ,  $t > 0$ . Η προβολή του σημείου  $A$  πάνω στον άξονα  $y'$  είναι το σημείο  $B$  και η προβολή του σημείου  $B$  πάνω στο ευθύγραμμο τυγματού  $OA$  είναι το σημείο  $M$ , όπου  $O$  η αρχή των άξονων. Η προέκταση του ευθύγραμμου τυγματού  $MB$  τέμνει τον άξονα  $x'$  στο σημείο  $\Gamma$  και η προέκταση του ευθύγραμμου τυγματού  $AG$  τέμνει την παραβολή στο σημείο  $\Delta$ .

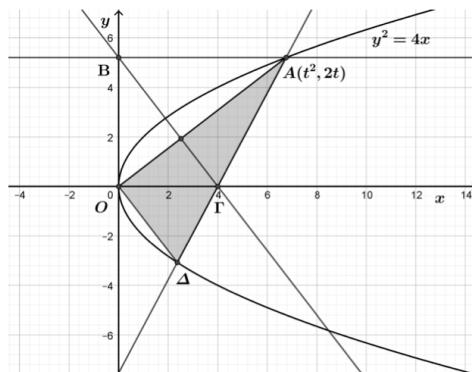
- Να δείξετε ότι το σημείο  $\Gamma$  είναι το  $(4, 0)$ .
- Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AO\Delta$  δίνεται από τη σχέση:

$$E(t) = \frac{16}{t} + 4t, \quad t > 0$$

- Να βρείτε την τιμή του  $t$ , για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου  $AO\Delta$  γίνεται ελάχιστο.

Λύση:

2021



i.

$$\lambda_{OA} = \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t} \Rightarrow \lambda_{BM} = -\frac{t}{2}$$

To σημείο  $B(0, 2t)$ .

$$y - 2t = -\frac{t}{2}(x - 0) \Rightarrow \Gamma B : y = -\frac{t}{2}x + 2t$$

Για  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{t}{2}x + 2t &= 0 \Rightarrow x = 4 \\ &\Rightarrow \Gamma(4, 0) \end{aligned}$$

ii.

Ta  $A, \Gamma$  και  $\Delta(\rho^2, 2\rho)$  συνευθειακά  $\Rightarrow \lambda_{A\Gamma} = \lambda_{A\Delta}$

$$\Rightarrow \frac{2t}{t^2 - 4} = \frac{2t - 2\rho}{t^2 - \rho^2} \Rightarrow \frac{2t}{t^2 - 4} = \frac{2t(t - \rho)}{(t - \rho)(t + \rho)} = \frac{2(t - \rho)}{t + \rho}, \quad t - \rho \neq 0$$

$$\Rightarrow t^2 + t\rho = t^2 - 4 \Rightarrow t\rho = -4 \Rightarrow \rho = -\frac{4}{t} \Rightarrow \Delta \left( \frac{16}{t^2}, -\frac{8}{t} \right)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} t^2 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{16}{t^2} & -\frac{8}{t} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (-1) \left( (-8t) - \frac{32}{t} \right) \right] = 4t + \frac{16}{t}, \quad t > 0$$

iii.

$$E(t) = 4t + \frac{16}{t}, \quad t > 0 \Rightarrow E'(t) = 4 - \frac{16}{t^2}$$

$$E'(t) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{16}{t^2} = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2 \text{ (δεκτή)}, \quad t = -2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$t$	0	2	$+\infty$
$E'(t)$	-	0	+
$E(t)$	↘	↗	

H συνάρτηση  $E$  είναι γνησίως φυίνουσα στο  $(0, 2]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty)$ .

Άρα για  $t = 2$  το εμβαδόν  $E$  γίνεται ελάχιστο.

B' τρόπος

$$E(t) = 4t + \frac{16}{t} = 4 \left( t + \frac{4}{t} \right) = 4 \left( \sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} \right)^2 + 16$$

$$E(t) \geq 16 \quad (t > 0)$$

και η ισότητα ισχύει όταν

$$\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow t = 2$$