Μαθηματικά Β' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Στερεομετρία

1. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 5\,\text{cm}$ και $B\Gamma = 10\,\text{cm}$ περιστρέφεται γύρω από την πλευρά AB. Να υπολογιστούν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και ο όγκος του στερεού που παράγεται.

Λύση: (Ασκ. 1/161)

Με την πλήρη περιστροφή του ορθογωνίου γύρω από την πλευρά AB, παράγεται ορθός κύλινδρος με

$$R = B\Gamma = 10\,\text{cm}, \qquad \nu = AB = 5\,\text{cm}.$$

i. Εμβαδόν ολικής επιφάνειας.

$$E_k = 2\pi R\nu = 2\pi \cdot 10 \cdot 5 = 100\pi\ \text{cm}^2,$$

$$E_{o\lambda} = E_k + 2E_\beta = 2\pi R\nu + 2\pi R^2 = 100\pi + 2\pi \cdot 10^2 = 100\pi + 200\pi = 300\pi\ \text{cm}^2.$$

ii. Όγκος.

$$V = \pi R^2 \nu = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi\ \text{cm}^3.$$

2. Δίνεται κώνος με ακτίνα βάσης μήκους $R = 3\,\text{cm}$ και ύψος μήκους $\nu = 4\,\text{cm}$. Να υπολογιστούν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και ο όγκος του κώνου.

Λύση: (Ασκ. 2/161)

Πρώτα υπολογίζουμε τη γενέτειρα λ με Πυθαγόρειο:

$$\lambda = \sqrt{R^2 + \nu^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\,\text{cm}.$$

i. Εμβαδόν ολικής επιφάνειας.

$$E_k = \pi R\lambda = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\ \text{cm}^2,$$

$$E_{o\lambda} = E_k + E_\beta = \pi R\lambda + \pi R^2 = 15\pi + \pi \cdot 3^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi\ \text{cm}^2$$

ii. Όγκος.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \nu = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi\ \text{cm}^3.$$

3. Να απαντήσετε Σωστό / Λάθος για τις ακόλουθες προτάσεις.

i. Όταν διπλασιαστεί η ακτίνα του κυλίνδρου, τότε ο όγκος του διπλασιάζεται.

ii. Ο όγκος κυλίνδρου είναι τριπλάσιος από τον όγκο κώνου με την ίδια ακτίνα. Τότε, τα ύψη του κυλίνδρου και του κώνου είναι ίσα.

iii. Το τετράγωνο της γενέτειρας κώνου είναι ίσο με το άθροισμα του τετραγώνου της ακτίνας του κώνου με το τετράγωνο του ύψους του κώνου.

Λύση: (Ασκ. 3/161)

i. Λάθος $(V_{\text{κυλ}} = \pi R^2 \nu \Rightarrow R \mapsto 2R \Rightarrow V$ τετραπλασιάζεται$)$,

ii. Σωστό $(V_{\text{κυλ}} = \pi R^2 h,\ V_{\text{κων}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V_{\text{κυλ}} = 3V_{\text{κων}} \iff h_{\text{κυλ}} = h_{\text{κων}})$,

iii. Σωστό $(\lambda^2 = R^2 + \nu^2)$.

4. Δίνεται κύλινδρος με εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}} = 216\pi\,\text{cm}^2$ και ύψος ίσο με το διπλάσιο της ακτίνας του. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.

Λύση: (Ασκ. 4/161)

Θέτουμε ακτίνα R και ύψος ν με $\nu = 2R$. Ισχύει

$$E_{\text{ολ}} = E_k + 2E_\beta = 2\pi R\nu + 2\pi R^2.$$

Με $\nu = 2R$:

$$216\pi = 2\pi R(2R) + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 \ \Rightarrow\ R^2 = 36 \ \Rightarrow\ R = 6\,\text{cm}, \quad \nu = 12\,\text{cm}.$$

i. Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας.

$$E_k = 2\pi R\nu = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 = 144\pi\,\text{cm}^2.$$

ii. Όγκος.

$$V = \pi R^2 \nu = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = \pi \cdot 36 \cdot 12 = 432\pi\,\text{cm}^3.$$

5. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB = 5\,\text{cm}$ και $B\Gamma = 10\,\text{cm}$, περιστρέφεται γύρω από την ευθεία xy παράλληλη προς την $A\Delta$ και απέχει $2\,\text{cm}$ από αυτήν. Να υπολογιστούν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και ο όγκος του στερεού που παράγεται.

Λύση: (Ασκ. 5/161)

Προκύπτει *κυλινδρικός δακτύλιος* με

$$\rho = 2\,\text{cm}, \qquad R = 2 + AB = 2 + 5 = 7\,\text{cm}, \qquad \nu = AD = B\Gamma = 10\,\text{cm}.$$

i. Εμβαδόν ολικής επιφάνειας.

$$E_k = 2\pi\nu(R+\rho) = 2\pi \cdot 10 \cdot (7+2) = 180\pi \text{ cm}^2,$$
$$E_{\text{ολ}} = E_k + 2\pi\big(R^2 - \rho^2\big) = 180\pi + 2\pi(7^2 - 2^2) = 180\pi + 2\pi(49-4) = 270\pi \text{ cm}^2.$$

ii. Όγκος.

$$V = \pi\nu\big(R^2 - \rho^2\big) = \pi \cdot 10\,(7^2 - 2^2) = \pi \cdot 10\,(49-4) = 450\pi \text{ cm}^3.$$

6. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_k = 136\pi\,\text{m}^2$ και εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}} = 200\pi\,\text{m}^2$.

Λύση: (Ασκ. 6/161)

Για κώνο ισχύουν $E_k = \pi R\lambda$ και $E_{\text{ολ}} = \pi R(\lambda + R)$. Άρα

$$R\lambda = 136, \qquad R(\lambda + R) = 200.$$

Από το πρώτο $\lambda = \dfrac{136}{R}$. Υποκατάσταση στο δεύτερο:

$$R\left(\frac{136}{R} + R\right) = 200 \;\Rightarrow\; 136 + R^2 = 200 \;\Rightarrow\; R^2 = 64 \;\Rightarrow\; R = 8\,\text{m},$$
$$\lambda = \frac{136}{8} = 17\,\text{m}.$$

Με $\lambda^2 = R^2 + \nu^2$ παίρνουμε

$$\nu = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15\,\text{m}.$$

Όγκος.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2\nu = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 15 = \frac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 15 = 320\pi \text{ m}^3.$$

7. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $E_k = 36\sqrt{2}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$ και η γενέτειρά του σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τη βάση του. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

Λύση: (Ασκ. 7/161)

Για κώνο: $E_k = \pi R\lambda$. Αν η γενέτειρα σχηματίζει γωνία α με τη βάση, τότε

$$\cos\alpha = \frac{R}{\lambda}, \qquad \sin\alpha = \frac{\nu}{\lambda}, \qquad \tan\alpha = \frac{\nu}{R}.$$

Με $\alpha = \frac{\pi}{4}$ παίρνουμε $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα

$$R = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\ (\Rightarrow \nu = R).$$

Από $E_k = \pi R\lambda = 36\sqrt{2}\pi$ προκύπτει

$$R\lambda = 36\sqrt{2} \ \Rightarrow\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\cdot\lambda = 36\sqrt{2} \ \Rightarrow\ \lambda^2 = 72 \ \Rightarrow\ \lambda = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Τότε

$$R = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 6\,\mathrm{cm}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 6\,\mathrm{cm}.$$

Όγκος.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2\nu = \frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 6 = 72\pi\ \mathrm{cm}^3.$$

8. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 4\,\mathrm{cm}$. Ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά AB, είναι διπλάσιος από τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση: (Ασκ. 8/161)

Θέτουμε $x = B\Gamma$. Οι αντίστοιχοι κύλινδροι έχουν

$$V_{AB} = \pi x^2\cdot AB = \pi x^2\cdot 4, \qquad V_{B\Gamma} = \pi(AB)^2\cdot x = \pi\cdot 4^2\cdot x = 16\pi x.$$

Δίνεται $V_{AB} = 2V_{B\Gamma}$, άρα

$$4\pi x^2 = 2\cdot 16\pi x \ \Rightarrow\ 4x^2 = 32x \ \Rightarrow\ x^2 = 8x \ \Rightarrow\ x(x-8) = 0.$$

Επειδή $x > 0$, προκύπτει

$$B\Gamma = x = 8\,\mathrm{cm}.$$

9. Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 7 cm και 10 cm στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τη μεγάλη βάση του. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή είναι ίσος με $128\pi\,\text{cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

Λύση: (Ασκ. 9/162)

Το στερεό που προκύπτει είναι σύνθεση *κυλίνδρου* (ύψος 7 cm) και *κώνου* (ύψος $10-7=3\,\text{cm}$) με κοινή ακτίνα ίση με το ύψος h του τραπεζίου.

i. Υπολογισμός h από τον όγκο.

$$V = V_{\text{κυλ}} + V_{\text{κων}} = \pi h^2 \cdot 7 + \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot 3 = 8\pi h^2 = 128\pi \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4\,\text{cm}.$$

Επίσης, η γενέτειρα του κωνικού τμήματος είναι

$$\lambda = \sqrt{h^2+3^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5\,\text{cm}.$$

ii. Εμβαδόν ολικής επιφάνειας.

$$E_{\text{κυλ}} = 2\pi R\nu = 2\pi \cdot 4 \cdot 7 = 56\pi\,\text{cm}^2, \qquad E_{\text{κων}} = \pi R\lambda = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi\,\text{cm}^2,$$

$$E_\beta = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi\,\text{cm}^2 \quad \text{(η μοναδική κυκλική βάση στο άκρο του κυλίνδρου).}$$

Άρα

$$E_{\text{ολ}} = E_{\text{κυλ}} + E_{\text{κων}} + E_\beta = 56\pi + 20\pi + 16\pi = 92\pi\,\text{cm}^2.$$

10 Να χαρακτηρίσετε Σωστό / Λάθος τις ακόλουθες προτάσεις και να δικαιολογήσετε.

i. Όταν διπλασιαστεί το ύψος του κόλουρου κώνου, τότε ο όγκος του διπλασιάζεται.

ii. Όταν τετραπλασιαστεί η επιφάνεια σφαίρας, τότε ο όγκος της οκταπλασιάζεται.

Λύση: (Ασκ. 1/171)

i. Σωστό. Για κόλουρο κώνο:

$$V = \frac{\pi\nu}{3}\,(R^2 + R\rho + \rho^2).$$

Με R, ρ σταθερά και $\nu \mapsto 2\nu$:

$$V' = \frac{\pi(2\nu)}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2) = 2V.$$

ii. Σωστό. Για σφαίρα: $E = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Αν $E' = 4E$, τότε

$$4\pi R'^2 = 4(4\pi R^2) \;\Rightarrow\; R'^2 = 4R^2 \;\Rightarrow\; R' = 2R,$$

οπότε

$$V' = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = 8\,\frac{4}{3}\pi R^3 = 8V.$$

11. Ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90°$) περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $A\Delta$. Αν $AB = 2\,\text{cm}$, $\Delta\Gamma = 10\,\text{cm}$ και $A\Delta = 15\,\text{cm}$, να υπολογιστούν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας, το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και ο όγκος του στερεού που παράγεται.

Λύση: (Ασκ. 2/171)

Η περιστροφή του ορθογωνίου τραπεζίου γύρω από το $A\Delta$ παράγει *κόλουρο κώνο* με

$$R = \Delta\Gamma = 10\,\text{cm}, \qquad \rho = AB = 2\,\text{cm}, \qquad \nu = A\Delta = 15\,\text{cm}.$$

Η γενέτειρα είναι το μήκος της πλάγιας πλευράς $B\Gamma$:

$$\lambda = \sqrt{(\Delta\Gamma - AB)^2 + (A\Delta)^2} = \sqrt{(10-2)^2 + 15^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17\,\text{cm}.$$

i. Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας.

$$E_k = \pi(R+\rho)\lambda = \pi(10+2)\cdot 17 = 204\pi\,\text{cm}^2.$$

ii. Εμβαδόν ολικής επιφάνειας.

$$E_{\text{ολ}} = E_k + \pi(R^2+\rho^2) = 204\pi + \pi(10^2+2^2) = 204\pi + 104\pi = 308\pi\,\text{cm}^2.$$

iii. Όγκος.

$$V = \frac{\pi\nu}{3}\,(R^2 + R\rho + \rho^2) = \frac{\pi\cdot 15}{3}\,(100+20+4) = 5\pi\cdot 124 = 620\pi\,\text{cm}^3.$$

12. Δίνεται κόλουρος κώνος με γενέτειρα $\lambda = 5\,\text{cm}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_k = 45\pi\,\text{cm}^2$. Αν η ακτίνα της μεγάλης βάσης είναι διπλάσια από την ακτίνα της μικρής βάσης, να υπολογιστεί το ύψος του.

Λύση: (Ασκ. 3/171)

Για κόλουρο κώνο ισχύει

$$E_k = \pi(R+\rho)\lambda.$$

Με $E_k = 45\pi$ και $\lambda = 5$:

$$\pi(R+\rho)\cdot 5 = 45\pi \;\Rightarrow\; R+\rho = 9.$$

Δίνεται $R = 2\rho$, άρα $2\rho + \rho = 9 \Rightarrow \rho = 3\,\text{cm}$ και $R = 6\,\text{cm}$.

Επιπλέον, $\lambda^2 = \nu^2 + (R-\rho)^2$ ($\triangle$ ορθογώνιο από ύψος και διαφορά ακτίνων), οπότε

$$\nu = \sqrt{\lambda^2 - (R-\rho)^2} = \sqrt{5^2 - (6-3)^2} = \sqrt{25-9} = 4\,\text{cm}$$

13. Το εμβαδόν μέγιστου κύκλου μιας σφαίρας είναι $16\pi\,\text{cm}^2$. Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο της σφαίρας.

Λύση: (Ασκ. 4/171)

Ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας έχει εμβαδόν πR^2. Άρα

$$\pi R^2 = 16\pi \;\Rightarrow\; R^2 = 16 \;\Rightarrow\; R = 4\,\text{cm}.$$

i. Επιφάνεια σφαίρας.

$$E = 4\pi R^2 = 4\pi\cdot 4^2 = 64\pi\ \text{cm}^2.$$

ii. Όγκος σφαίρας.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi\ \text{cm}^3.$$

14. Επίπεδο π τέμνει μια σφαίρα ακτίνας $R = 5\,\text{cm}$. Αν η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας είναι $d = 4\,\text{cm}$, να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που δημιουργείται από τα κοινά σημεία της σφαίρας και του επιπέδου.

Λύση: (Ασκ. 5/171)

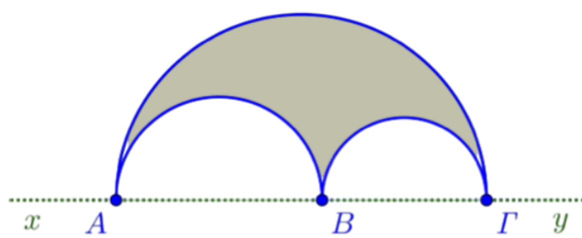
Έστω O το κέντρο της σφαίρας και H το ίχνος της καθέτου από το O στο επίπεδο π. Για κάθε σημείο P του κύκλου το τρίγωνο OPH είναι ορθογώνιο στο H, με

$$OP = R, \quad OH = d, \quad PH = r.$$

Άρα από Πυθαγόρειο:

$$r^2 + d^2 = R^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = 3\,\text{cm}.$$

15. Στο σχήμα τα τόξα $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A\Gamma}, \overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι ημικύκλια, $A\Gamma = 18\,\text{cm}$ και $4AB = 5B\Gamma$. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα xy.



Λύση: (Ασκ. 6/171)

Θέτουμε $AB = x \Rightarrow B\Gamma = 18 - x$. Από $4AB = 5B\Gamma$ έχουμε

$$4x = 5(18 - x) \;\Rightarrow\; 9x = 90 \;\Rightarrow\; x = 10\,\text{cm}, \qquad B\Gamma = 8\,\text{cm}.$$

Οι αντίστοιχες ακτίνες των ημικυκλίων είναι

$$R = \frac{A\Gamma}{2} = 9\,\text{cm}, \qquad r_1 = \frac{AB}{2} = 5\,\text{cm}, \qquad r_2 = \frac{B\Gamma}{2} = 4\,\text{cm}.$$

Η περιστροφή γύρω από τη διάμετρο κάθε ημικυκλίου παράγει σφαίρα. Το σκιασμένο χωρίο δίνει

$$V = V_{\text{σφαίρας}(R)} - V_{\text{σφαίρας}(r_1)} - V_{\text{σφαίρας}(r_2)} = \frac{4}{3}\pi\,(R^3 - r_1^3 - r_2^3).$$

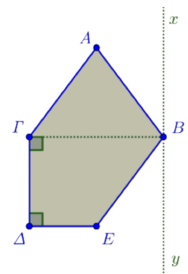
Υπολογίζουμε

$$R^3 = 9^3 = 729, \quad r_1^3 = 5^3 = 125, \quad r_2^3 = 4^3 = 64 \;\Rightarrow\; R^3 - r_1^3 - r_2^3 = 729 - 125 - 64 = 540.$$

Άρα

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 540 = 720\pi\ \text{cm}^3.$$

16. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $B\Gamma = 6\,\text{cm}$ και $AB = A\Gamma = 5\,\text{cm}$. Το $BE\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $B\Gamma$ και ΔE, ύψος $\Gamma\Delta = 4\,\text{cm}$ και πλευρά $BE = 5\,\text{cm}$. Το σκιασμένο πολύγωνο $ABE\Delta\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xBy, που είναι κάθετος στη $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση: (Ασκ. 1/177)

Ανάλυση σχήματος.

Για να απλοποιηθεί το πρόβλημα, φέρνουμε το τμήμα $EZ \parallel \Gamma\Delta$. Έτσι το σχήμα χωρίζεται σε:

- Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$.
- Το τραπέζιο $\Gamma BE\Delta$, που με το EZ χωρίζεται σε ορθογώνιο $\Gamma\Delta EZ$ και τρίγωνο ZEB.

Υπολογισμός όγκου.

(α) Περιστροφή του τριγώνου $AB\Gamma$:

Το ύψος του είναι $4\,\text{cm}$. Με περιστροφή γύρω από τον άξονα προκύπτει στερεό όγκου

$$V_1 = 72\pi \text{ cm}^3.$$

(β) Περιστροφή του ορθογωνίου $\Gamma\Delta EZ$:

Δίνει κυλινδρικό δακτύλιο με ακτίνες $R = 6, r = 3$ και ύψος $h = 4$:

$$V_2 = \pi h(R^2 - r^2) = \pi \cdot 4(36 - 9) = 108\pi \text{ cm}^3.$$

(γ) Περιστροφή του τριγώνου ZEB:

Δίνει κώνο με $r = 3, h = 4$:

$$V_3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3.$$

Συνολικός όγκος:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 72\pi + 108\pi + 24\pi = 204\pi \text{ cm}^3.$$

Υπολογισμός επιφάνειας.

(α) Από το τρίγωνο $AB\Gamma$:

Δίνει δύο πλάγιες επιφάνειες, συνολικά

$$E_1 = 60\pi.$$

(β) Από τον κυλινδρικό δακτύλιο:

Εξωτερική επιφάνεια

$$E_2 = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi.$$

(γ) Από τον κώνο ZEB:

Πλάγια επιφάνεια

$$E_3 = \pi r\lambda = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi.$$

(δ) Από την κάτω βάση:

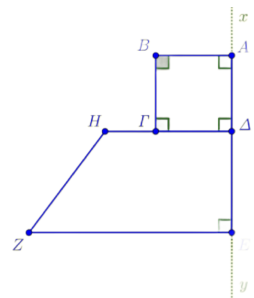
Είναι δακτύλιος με $R = 6, r = 3$:

$$E_4 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(36 - 9) = 27\pi.$$

Συνολική επιφάνεια:

$$E_{\text{ολ}} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 60\pi + 48\pi + 15\pi + 27\pi = 150\pi \text{ cm}^2.$$

17. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $3\,\text{cm}$ και το τετράπλευρο ΔHZE είναι ορθογώνιο τραπέζιο $\left(\widehat{\Delta} = \widehat{E} = \frac{\pi}{2}\right)$ με $\Delta H = 5\,\text{cm},\ EZ = 8\,\text{cm},\ HZ = 5\,\text{cm}$. Το σκιασμένο μέρος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy (κατακόρυφη ευθεία από τα σημεία A και E). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση: (Ασκ. 2/177)

Ανάλυση σχήματος.

Η περιστροφή του ορθογωνίου τραπεζίου ΔHZE γύρω από την κατακόρυφη πλευρά ΔE (τον άξονα) παράγει κόλουρο κώνο με ακτίνες

$$R = EZ = 8, \qquad r = \Delta H = 5.$$

Η πλάγια γενέτειρα του κόλουρου κώνου είναι το τμήμα HZ, άρα

$$\lambda = HZ = 5.$$

Το ύψος του τραπεζίου (και του κόλουρου κώνου) είναι

$$h = \Delta E, \quad HZ^2 = h^2 + (EZ - \Delta H)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h = 4\,\text{cm}.$$

Η περιστροφή του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ γύρω από την πλευρά $A\Delta$ (τον άξονα) παράγει κύλινδρο με

$$r_{\kappa\upsilon\lambda} = \Gamma\Delta = 3, \qquad h_{\kappa\upsilon\lambda} = AB = 3.$$

Μέρος Α: Όγκος.

<u>(1) Κόλουρος κώνος $R = 8,\ r = 5,\ h = 4$:</u>

$$V_{\kappa\omega\lambda} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{4\pi}{3}(64 + 40 + 25) = 172\pi\ \text{cm}^3.$$

(2) Κύλινδρος $r = 3,\ h = 3$:

$$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi r^2 h = \pi \cdot 9 \cdot 3 = 27\pi \text{ cm}^3.$$

Συνολικός όγκος:

$$V = V_{\kappa\omega\lambda} + V_{\kappa\upsilon\lambda} = 172\pi + 27\pi = 199\pi \text{ cm}^3$$

Παρατήρηση: Το κυκλικό δισκίο ακτίνας $r = 3$ στο ύψος Δ είναι *εσωτερική* επαφή κυλίνδρου–κόλουρου κώνου, άρα *δεν* προσθέτει όγκο ούτε επιφάνεια.

Μέρος Β: Ολική επιφάνεια.

- Πλάγια επιφάνεια κόλουρου κώνου:

$$E_{\kappa,\ \kappa\omega\lambda} = \pi(R + r)\lambda = \pi(8 + 5) \cdot 5 = 65\pi.$$

- Κάτω βάση (στο E): πλήρης δίσκος ακτίνας $R = 8$:

$$E_{\kappa\tau\omega} = \pi R^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi.$$

- Επάνω στο ύψος Δ: από το τμήμα ΓH (μήκους $5 - 3$) προκύπτει δακτύλιος με ακτίνες 5 και 3:

$$E_{\delta\alpha\kappa\tau} = \pi(5^2 - 3^2) = \pi(25 - 9) = 16\pi.$$

  (Το κεντρικό δισκίο $r \leq 3$ καλύπτεται από τον κύλινδρο και δεν φαίνεται εξωτερικά.)

- Πλάγια επιφάνεια κυλίνδρου:

$$E_{\kappa,\ \kappa\upsilon\lambda} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 3 \cdot 3 = 18\pi.$$

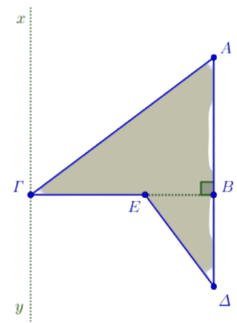
- Επάνω βάση κυλίνδρου (στο A):

$$E_{\varepsilon\pi\nu\omega} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi.$$

Συνολική επιφάνεια:

$$E_{\text{ολ}} = 65\pi + 64\pi + 16\pi + 18\pi + 9\pi = 172\pi \text{ cm}^2$$

18. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $B\Gamma \perp A\Delta$, $AB = 6\,\text{cm}$, $B\Gamma = 8\,\text{cm}$, $BE = 3\,\text{cm}$ και $E\Delta = 5\,\text{cm}$. Το σκιασμένο τετράπλευρο $A\Delta E\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy, ο οποίος περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλος προς την $A\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση: (Ασκ. 3/177)

Ανάλυση σχήματος.

Είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε το τμήμα EB (οριζόντιο), το οποίο «σπάει» το σχήμα σε δύο ορθογώνια τρίγωνα:

$$\triangle AB\Gamma \quad (\text{ορθογώνιο στο } B) \qquad \text{και} \qquad \triangle EB\Delta \quad (\text{ορθογώνιο στο } B).$$

Ο άξονας περιστροφής είναι η κατακόρυφη ευθεία από το Γ, παράλληλη στην $A\Delta$.

Γεωμετρικά στοιχεία.

Στο $\triangle AB\Gamma$ έχουμε κάθετες πλευρές

$$AB = 6, \quad B\Gamma = 8 \;\Rightarrow\; A\Gamma = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Στο $\triangle EB\Delta$ με $BE = 3$ και $E\Delta = 5$ (ορθογώνιο στο B),

$$BD = \sqrt{E\Delta^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Επιπλέον, η απόσταση του άξονα από το B είναι $\Gamma B = 8$, ενώ από το E είναι $\Gamma E = \Gamma B - BE = 8 - 3 = 5$.

Τί παράγει η περιστροφή;

- Το $\triangle AB\Gamma$ γύρω από τον άξονα από Γ (κατακόρυφο) δίνει **κώνο** με

  $$r_1 = \Gamma B = 8, \qquad h_1 = AB = 6, \qquad \lambda_1 = A\Gamma = 10.$$

- Το $\triangle EBD$ γύρω από τον ίδιο άξονα δίνει **κόλουρο κώνο** με

  $$R = 8, \qquad r = 5, \qquad h = BD = 4, \qquad \lambda = E\Delta = 5.$$

  Η κοινή κυκλική τομή των δύο στερεών είναι ο κύκλος ακτίνας 8 στο επίπεδο του B (εσωτερική επιφάνεια, δεν μετρά στην ολική).

Μέρος Α: Όγκος.

$$V_{\text{κώνου}} = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128\pi \text{ cm}^3,$$

$$V_{\text{κώλουρου}} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{4\pi}{3}\left(64 + 40 + 25\right) = 172\pi \text{ cm}^3.$$

$$V = V_{\text{κώνου}} + V_{\text{κώλουρου}} = 128\pi + 172\pi = 300\pi \text{ cm}^3$$

Μέρος Β: Ολική επιφάνεια. Με βάση το «σκονάκι» της στερεομετρίας:

$$E_{\kappa,\ \text{κώλουρου}} = \pi(R + r)\lambda = \pi(8 + 5) \cdot 5 = 65\pi,$$

$$E_{\kappa,\ \text{κώνου}} = \pi r_1 \lambda_1 = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi,$$

$$E_{\text{κάτω βάσης}} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$$

(Η επάνω κυκλική τομή ακτίνας 8 είναι *εσωτερική* κοινή επιφάνεια των δύο στερεών και δεν προστίθεται.) Άρα

$$E_{\text{ολ}} = 80\pi + 65\pi + 25\pi = 170\pi \text{ cm}^2$$

19. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = 5a\,\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 3a\,\text{cm}$ και $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{3}$. Το τραπέζιο περιστρέφεται γύρω από την ευθεία xBy, η οποία είναι κάθετη στην AB στο σημείο B. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι $160\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

Λύση: (Ασκ. 4/177)

Γεωμετρία του σχήματος.

Σε ισοσκελές τραπέζιο η διαφορά των βάσεων μοιράζεται συμμετρικά. Άρα, ως προς τον άξονα από το B, στο επάνω επίπεδο (στη $\Gamma\Delta$) έχουμε

$$B\Gamma = a, \qquad B\Delta = 4a.$$

Θέτοντας h το ύψος του τραπεζίου, από το ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία $\widehat{B} = \pi/3$ και οριζόντια προβολή $B\Gamma = a$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} \ \Rightarrow\ h = a\sqrt{3}.$$

Όγκος.

Η περιστροφή γύρω από τον άξονα από το B δίνει:

- *Εξωτερικό* τμήμα: κόλουρος κώνος με ακτίνες $R = 5a$ (στο AB) και $r = 4a$ (στο $\Gamma\Delta$), ύψος h.
- *Εσωτερικό* τμήμα: κώνος με ακτίνα a (στο $\Gamma\Delta$) και ύψος h.

Με τους τύπους στερεομετρίας

$$V_{\text{κωλ}} = \frac{\pi h}{3}\,(R^2 + Rr + r^2), \qquad V_{\text{κών}} = \frac{\pi h}{3}\,a^2,$$

παίρνουμε

$$V = V_{\text{κωλ}} - V_{\text{κών}} = \frac{\pi h}{3}\Big[(5a)^2 + 5a \cdot 4a + (4a)^2 - a^2\Big] = \frac{\pi h}{3} \cdot 60a^2 = 20\pi a^2 h.$$

Με $h = a\sqrt{3}$ και $V = 160\sqrt{3}\pi$ έχουμε

$$20\pi a^2(a\sqrt{3}) = 160\sqrt{3}\pi \;\Rightarrow\; 20a^3 = 160 \;\Rightarrow\; a^3 = 8 \;\Rightarrow\; a = 2 \text{ cm}$$

Ολική επιφάνεια.

- *Πλάγια επιφάνεια εξωτερικού κόλουρου κώνου* $(R = 10,\ r = 8)$. Η γενέτειρα είναι το μήκος $A\Delta$: $\lambda_2 = \sqrt{(5a-4a)^2 + h^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$.

  $$E_{\kappa,\text{εξ}} = \pi(R + r)\lambda_2 = \pi(10 + 8) \cdot (2a) = 36a\,\pi \quad (\text{σε cm}^2).$$

  Θέτοντας $a = 2$: $E_{\kappa,\text{εξ}} = 36 \cdot 2\,\pi = 72\pi$.

- *Πλάγια επιφάνεια εσωτερικού κώνου* $(0 \to a)$. Η γενέτειρα είναι $B\Gamma$: $\lambda_1 = \sqrt{a^2 + h^2} = 2a$.

  $$E_{\kappa,\text{εσ}} = \pi(0 + a)\lambda_1 = \pi a \cdot 2a = 2a^2\pi \;\Rightarrow\; E_{\kappa,\text{εσ}} = 8\pi.$$

- *Κάτω βάση* (στο AB): δίσκος ακτίνας $5a$.

  $$E_{\text{κάτω}} = \pi(5a)^2 = 25a^2\pi \;\Rightarrow\; E_{\text{κάτω}} = 100\pi.$$

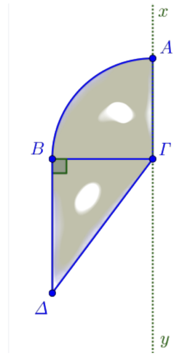
- *Άνω βάση* (στο $\Gamma\Delta$): δακτύλιος με ακτίνες $4a$ και a.

  $$E_{\text{άνω}} = \pi\big[(4a)^2 - a^2\big] = 15a^2\pi \;\Rightarrow\; E_{\text{άνω}} = 60\pi.$$

Συνεπώς

$$E_{\text{ολ}} = E_{\kappa,\text{εξ}} + E_{\kappa,\text{εσ}} + E_{\text{κάτω}} + E_{\text{άνω}} = 72\pi + 8\pi + 100\pi + 60\pi = 240\pi \text{ cm}^2$$

20. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $A\Gamma = 3\,\text{cm}$ και το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $B\Delta = 4\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy (κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το Γ).



Λύση: (Ασκ. 5/177)

Γεωμετρία.

Ο τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο κέντρου Γ και ακτίνας $R = 3$ cm. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει

$$B\Gamma = 3, \quad B\Delta = 4 \ \Rightarrow \ \Gamma\Delta = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (Πυθαγόρειο).}$$

Ο άξονας περιστροφής είναι η ακτίνα ΓA (κατακόρυφη).

Τι στερεά παράγονται;

- Η περιστροφή του τεταρτοκυκλίου γύρω από την ακτίνα ΓA παράγει ημισφαίριο ακτίνας $R = 3$.
- Η περιστροφή του $\triangle B\Gamma\Delta$ γύρω από τον ίδιο άξονα παράγει **κώνο** με ακτίνα βάσης $r = B\Gamma = 3$, ύψος $h = B\Delta = 4$ και γενέτειρα $\lambda = \Gamma\Delta = 5$.

Η κυκλική τομή ακτίνας 3 cm στο επίπεδο του B είναι *εσωτερική* (κοινό σύνορο των δύο στερεών) κι επομένως *δεν* συνυπολογίζεται στο $E_{\text{ολ}}$.

Όγκος

$$V_{\text{ημισφ.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3, \qquad V_{\text{κώνου}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3.$$

$$V = V_{\text{ημισφ.}} + V_{\text{κώνου}} = 18\pi + 12\pi = 30\pi \text{ cm}^3$$

Ολική επιφάνεια.

Μετράμε μόνο τις *εξωτερικές* καμπύλες επιφάνειες (όχι την εσωτερική κοινή κύρια κύκλο):

$$E_{\kappa,\ \text{ημισφ.}} = 2\pi R^2 = 2\pi\cdot 3^2 = 18\pi, \qquad E_{\kappa,\ \text{κώνου}} = \pi r\lambda = \pi\cdot 3\cdot 5 = 15\pi.$$

$$E_{\text{ολ}} = 18\pi + 15\pi = 33\pi\ \text{cm}^2$$

21. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου με ακτίνα $r = 4\,\text{cm}$ και εμβαδόν κυρτής (πλάγιας) επιφάνειας $E_\kappa = 20\pi\,\text{cm}^2$.

Λύση: (Ασκ. 1/180)

Από τον τύπο της πλάγιας επιφάνειας κώνου

$$E_\kappa = \pi r\lambda \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{E_\kappa}{\pi r} = \frac{20\pi}{\pi\cdot 4} = 5\,\text{cm}.$$

Η γενέτειρα, η ακτίνα και το ύψος σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο, άρα

$$\lambda^2 = r^2 + h^2 \ \Rightarrow\ h = \sqrt{\lambda^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = 3\,\text{cm}.$$

Τότε ο όγκος του κώνου είναι

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 3 = 16\pi\ \text{cm}^3.$$

22. Τα ύψη ενός κώνου και ενός κυλίνδρου είναι ίσα. Ο όγκος του κώνου είναι $12\pi\,\text{cm}^3$ και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $24\pi\,\text{cm}^2$. Αν οι ακτίνες τους είναι ίσες, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

Λύση: (Ασκ. 2/180)

Θέτουμε κοινή ακτίνα r και κοινό ύψος h.

Από τον όγκο του κώνου:

$$V_{\text{κών.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi \ \Rightarrow\ r^2 h = 36. \tag{1}$$

Από την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου:

$$E_{\kappa,\text{κυλ.}} = 2\pi r h = 24\pi \ \Rightarrow\ rh = 12. \tag{2}$$

Διαίρεση (1) με (2): $\dfrac{r^2h}{rh} = r = \dfrac{36}{12} = 3$ cm. Τότε από (2): $h = \dfrac{12}{r} = \dfrac{12}{3} = 4$ cm.

Η ολική επιφάνεια κυλίνδρου είναι

$$E_{\text{ολ}} = E_\kappa + E_{\text{βάσεων}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\cdot 3\cdot 4 + 2\pi\cdot 3^2 = 24\pi + 18\pi = 42\pi\ \text{cm}^2$$

23. Η στάθμη του νερού σε κυλινδρικό δοχείο ακτίνας 3 cm είναι 4 cm. Μέσα στο δοχείο τοποθετούμε μία σφαίρα, η οποία καλύπτεται πλήρως από το νερό και η στάθμη του νερού διπλασιάζεται (γίνεται 8 cm). Να υπολογίσετε την επιφάνεια της σφαίρας.

Λύση: (Ασκ. 3/180)

Το εμβαδόν της κυκλικής βάσης του δοχείου είναι

$$A_\beta = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2.$$

Αρχικός όγκος νερού:

$$V_{\alpha\rho\chi} = A_\beta \cdot 4 = 9\pi \cdot 4 = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Τελικός όγκος που καταλαμβάνουν *νερό + σφαίρα*:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda} = A_\beta \cdot 8 = 9\pi \cdot 8 = 72\pi \text{ cm}^3.$$

Η διαφορά είναι ο όγκος της σφαίρας:

$$V_{\sigma\varphi} = V_{\tau\varepsilon\lambda} - V_{\alpha\rho\chi} = 72\pi - 36\pi = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Θέτοντας ακτίνα σφαίρας R, από τον τύπο $V_{\sigma\varphi} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ παίρνουμε

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \;\Rightarrow\; R^3 = 27 \;\Rightarrow\; R = 3\,\text{cm}$$

Άρα η επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$E = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

Έλεγχος συνέπειας: η τελική στάθμη είναι $8\,\text{cm} > 2R = 6\,\text{cm}$, άρα πράγματι η σφαίρα καλύπτεται πλήρως από το νερό.

24. Κύλινδρος είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας $R = 7\sqrt{2}\,\text{cm}$. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα του, να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.

Λύση: (Ασκ. 4/180)

Θέτουμε ακτίνα κυλίνδρου r και ύψος h. Δίνεται $h = 2r$. Σε κύλινδρο εγγεγραμμένο σε σφαίρα ισχύει, από την κατακόρυφη διατομή (ορθογώνιο $2r \times h$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R):

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Με $h = 2r$ παίρνουμε

$$R^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \;\Rightarrow\; r^2 = \frac{R^2}{2} = \frac{(7\sqrt{2})^2}{2} = \frac{98}{2} = 49 \;\Rightarrow\; r = 7\,\text{cm} \quad h = 14\,\text{cm}$$

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 49 \cdot 14 = 686\pi\ \text{cm}^3$$

25. Οι τομές δύο παράλληλων επιπέδων με σφαίρα είναι δύο *ίσοι* κύκλοι ακτίνας $r = 3\,\text{cm}$. Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι $R = 5\,\text{cm}$, να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων.

Λύση: (Ασκ. 5/180)

Έστω O το κέντρο της σφαίρας και π_1, π_2 τα δύο επίπεδα. Για την τομή σφαίρας–επιπέδου ισχύει:

$$r^2 + d^2 = R^2,$$

όπου d η απόσταση του επιπέδου από το O.

Με $r = 3,\ R = 5$ έχουμε

$$d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = 4\,\text{cm}.$$

Εφόσον οι κύκλοι είναι *ίδιοι*, τα επίπεδα απέχουν την ίδια απόσταση από το O και βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές του (παράλληλα). Άρα η *απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων* είναι

$$2d = 2 \cdot 4 = 8\,\text{cm}$$

26. Δίνεται σφαίρα ακτίνας $R = 13\,\text{cm}$ και επίπεδο π που απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση $d = 12\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου που είναι εγγεγραμμένος στη σφαίρα και *η μία του βάση* είναι η τομή της σφαίρας με το επίπεδο π.

Λύση: (Ασκ. 6/180)

Η τομή σφαίρας–επιπέδου είναι κύκλος ακτίνας

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5\,\text{cm}.$$

Ο κυλίνδρος που είναι εγγεγραμμένος στη σφαίρα με αυτή τη βάση έχει άξονα κάθετο στο π και οι δύο βάσεις του βρίσκονται στα παράλληλα επίπεδα σε αποστάσεις d και $-d$ από το κέντρο. Άρα το ύψος του είναι

$$h = 2d = 2 \cdot 12 = 24\,\text{cm}.$$

Ο όγκος του κυλίνδρου:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 24 = 600\pi\ \text{cm}^3.$$

27. Ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ και πλευρές $A\Delta = 12\,\text{cm}$, $B\Gamma = 8\,\text{cm}$ και $\Delta\Gamma = 3\,\text{cm}$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ε που είναι παράλληλη προς την $A\Delta$ και απέχει $2\,\text{cm}$ από αυτήν. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή αυτή.

Λύση: (Ασκ. 7/180)

Όγκος (1ο θεώρημα του Πάππου). Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι

$$A = \frac{(A\Delta + B\Gamma) \cdot \Delta\Gamma}{2} = \frac{(12 + 8) \cdot 3}{2} = 30\,\text{cm}^2.$$

Η απόσταση του κέντρου μάζας από τη βάση $A\Delta$ είναι

$$y_c = \frac{h(2b + a)}{3(a + b)} = \frac{3(2 \cdot 8 + 12)}{3(12 + 8)} = \frac{84}{60} = 1.4\,\text{cm},$$

όπου $a = 12$, $b = 8$, $h = 3$. Η απόστασή του από τον άξονα ε είναι $\rho = 2 + y_c = 3.4\,\text{cm}$. Άρα

$$V = A \cdot 2\pi\rho = 30 \cdot 2\pi \cdot 3.4 = 204\pi\ \text{cm}^3$$

Ολική επιφάνεια (2ο θεώρημα του Πάππου). Το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από κάθε πλευρά μήκους ℓ είναι $S = \ell \cdot 2\pi\rho$, όπου ρ η απόσταση του μέσου της από τον άξονα.

$$
\begin{aligned}
&S_{A\Delta} = 12 \cdot 2\pi \cdot 2 = 48\pi,\\
&S_{B\Gamma} = 8 \cdot 2\pi \cdot 5 = 80\pi,\\
&S_{\Delta\Gamma} = 3 \cdot 2\pi \cdot \tfrac{2+5}{2} = 21\pi,\\
&AB = \sqrt{(\Delta\Gamma)^2 + (A\Delta - B\Gamma)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \;\Rightarrow\; S_{AB} = 5 \cdot 2\pi \cdot 3.5 = 35\pi.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς

$$E_{o\lambda} = 48\pi + 80\pi + 21\pi + 35\pi = 184\pi \text{ cm}^2$$

28. Παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 10\,\text{m}$, $B\Gamma = 2\sqrt{2}\,\text{m}$ και $\widehat{\Gamma} = \frac{3\pi}{4}$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την $\Delta\Gamma$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

Λύση: (Ασκ. 8/180)

Επειδή $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ σχηματίζει με την $\Delta\Gamma$ οξεία γωνία $\pi/4$, το ύψος του παραλληλογράμμου ως προς τη βάση $\Delta\Gamma$ είναι

$$h = B\Gamma \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\,\text{m}.$$

Άρα $|\Delta\Gamma| = |AB| = 10\,\text{m}$ και το εμβαδόν είναι

$$A = |\Delta\Gamma| \cdot h = 10 \cdot 2 = 20\,\text{m}^2.$$

Όγκος (1ο θεώρημα του Πάππου). Το κέντρο μάζας του παραλληλογράμμου απέχει από τον άξονα $\Delta\Gamma$ απόσταση $\rho_c = \frac{h}{2} = 1\,\text{m}$. Επομένως

$$V = A \cdot 2\pi\rho_c = 20 \cdot 2\pi \cdot 1 = 40\pi \text{ m}^3$$

Ολική επιφάνεια (2ο θεώρημα του Πάππου / περιστροφή πλευρών). Κατά την περιστροφή:

- Η AB $(= 10\,\text{m})$ σε απόσταση $2\,\text{m}$ από τον άξονα παράγει κυλινδρική επιφάνεια

$$S_{AB} = 2\pi r\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot 10 = 40\pi.$$

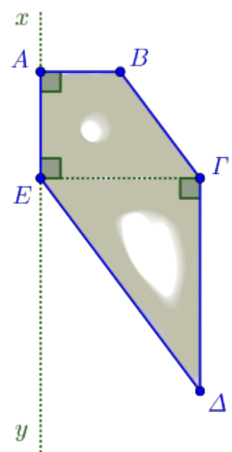
- Οι $B\Gamma$ και $A\Delta$ $(= 2\sqrt{2}\,\mathrm{m})$ με άκρα σε αποστάσεις 0 και $2\,\mathrm{m}$ από τον άξονα παράγουν δύο ίσες πλευρικές επιφάνειες κώνων:

$$S_{B\Gamma} = S_{A\Delta} = \pi r s = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi.$$

Συνεπώς το εμβαδόν της ολικής (εξωτερικής) επιφάνειας είναι

$$E_{\text{ολ}} = S_{AB} + S_{B\Gamma} + S_{A\Delta} = 40\pi + 4\sqrt{2}\pi + 4\sqrt{2}\pi = (40 + 8\sqrt{2})\pi \text{ m}^2$$

29. Στο διπλανό σχήμα $AE = 4\,\mathrm{cm}$, $B\Gamma = 5\,\mathrm{cm}$, $\Gamma\Delta = 8\,\mathrm{cm}$, $\Delta E = 10\,\mathrm{cm}$, $E\widehat{\Gamma}\Delta = \dfrac{\pi}{2}$ και οι AB, $E\Gamma$ είναι κάθετες στον άξονα xy. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της (κυρτής) επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



Λύση: (Ασκ. 9/180)

Από $E\widehat{\Gamma}\Delta = \pi/2$, $\Gamma\Delta = 8$, $\Delta E = 10$ παίρνουμε

$$E\Gamma = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,\mathrm{cm}, \qquad AB = 3\,\mathrm{cm} \text{ (τρίγωνο } 3{-}4{-}5).$$

i. Κυρτή επιφάνεια.

Κάθε πλευρά μήκους ℓ σε απόσταση ρ (του μέσου της) από τον άξονα δίνει $S = \ell \cdot 2\pi\rho$. Με άξονα τον xy (το AE είναι πάνω στον άξονα $\Rightarrow$ μηδενική συνεισφορά):

$$S_{AB} = 3 \cdot 2\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 9\pi,$$
$$S_{B\Gamma} = 5 \cdot 2\pi \cdot \tfrac{3+6}{2} = 45\pi,$$
$$S_{\Gamma\Delta} = 8 \cdot 2\pi \cdot 6 = 96\pi,$$
$$S_{\Delta E} = 10 \cdot 2\pi \cdot \tfrac{6+0}{2} = 60\pi.$$

(Δεν μετράμε τον δακτύλιο από το $E\Gamma$ για την *κυρτή* επιφάνεια.) Άρα

$$E_{\text{ολ}}^{(\text{κυρτ.})} = 9\pi + 45\pi + 96\pi + 60\pi = 210\pi \text{ cm}^2$$

ii. Όγκος.

Με Πάππο: $V = A \cdot 2\pi\rho_c$. Διασπούμε σε τραπέζιο $AB\Gamma E$ και ορθογώνιο τρίγωνο $E\Gamma\Delta$:

$$A_{\tau\rho\alpha\pi} = \tfrac{(AB+E\Gamma)\cdot AE}{2} = \tfrac{(3+6)\cdot 4}{2} = 18, \quad A_{\tau\rho} = \tfrac{E\Gamma\cdot\Gamma\Delta}{2} = \tfrac{6\cdot 8}{2} = 24,$$

$$A = 18 + 24 = 42\,\text{cm}^2.$$

Για το κέντρο μάζας ως προς τον άξονα (λαμβάνοντας $x = 0$ στον άξονα, $x = 3/2$ για το ορθογώνιο 3×4, $x = 4$ για τα δύο τριγωνικά μέρη):

$$\rho_c = \frac{12 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot 4 + 24 \cdot 4}{42} = \frac{23}{7} \text{ cm}.$$

Τότε

$$V = 42 \cdot 2\pi \cdot \frac{23}{7} = 276\pi \text{ cm}^3$$

30. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά a. Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = a$ και φέρουμε τον άξονα xEy, ο οποίος είναι παράλληλος με την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του a, το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται, όταν το τρίγωνο $AB\Gamma$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xEy.

Λύση: (Ασκ. 10/181)

Θέτουμε ύψος ισοπλεύρου

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Από $\Delta E = a$ προκύπτει $AE = AD + \Delta E = h + a$. Ο άξονας είναι παράλληλος στο $B\Gamma$, άρα οι κάθετες αποστάσεις μετριούνται πάνω στη διεύθυνση του $A\Delta$.

Κρίσιμες αποστάσεις από τον άξονα:

- Το μέσον του $B\Gamma$ είναι το $\Delta \Rightarrow r_{B\Gamma} = ED = a$.
- Τα μέσα των AB, $A\Gamma$ απέχουν από τη βάση $B\Gamma$ απόσταση $h/2 \Rightarrow r_{AB} = r_{A\Gamma} = a + \frac{h}{2}$.
- Το κέντρο βάρους G του τριγώνου απέχει από τη βάση απόσταση $h/3 \Rightarrow r_G = a + \frac{h}{3}$.

(i) Εμβαδό ολικής επιφάνειας. Με το Θεώρημα Πάππου–Γουλδίνου για επιφάνειες περιστροφής,

$$S = 2\pi \sum (\text{μήκος πλευράς}) \times (\text{απόσταση του μέσου της από τον άξονα}).$$

Άρα

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\Big[a\big(a+\tfrac{h}{2}\big) + a\big(a+\tfrac{h}{2}\big) + a\cdot a\Big] \\ &= 2\pi\big(3a^2 + ah\big) \\ &= 2\pi a^2\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \pi a^2(6+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(ii) Όγκος. Με το Θεώρημα Πάππου–Γουλδίνου για όγκους,

$$V = 2\pi\, r_G \cdot (\text{εμβαδό τριγώνου}) = 2\pi\left(a + \frac{h}{3}\right)\cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Με $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2\left(a + \frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \\ &= \frac{\pi a^3}{4}\big(2\sqrt{3}+1\big). \end{aligned}$$

Σχόλιο: Το στερεό έχει οριακή επιφάνεια που προκύπτει από την περιστροφή των τριών πλευρών: δύο κυρτές επιφάνειες *κόλουρων κώνων* (από AB, $A\Gamma$) και μία κυρτή επιφάνεια *κυλίνδρου* (από $B\Gamma$).

31. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\big(\widehat{A} = \frac{\pi}{2}\big)$ με πλευρά $AB = 6\,\text{cm}$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ προς το μέρος του A κατά τμήμα $A\Delta = A\Gamma$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $x\Delta y$, ο οποίος είναι κάθετος στην $\Delta\Gamma$ στο Δ, και παράγει όγκο $512\pi\,\text{cm}^3$.

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

Λύση: (Ασκ. 11/181)

i. Θέτουμε $A\Gamma = a$. Εφόσον $A\Delta = a$, έπεται $\Delta\Gamma = 2a$. Θέτουμε σύστημα συντεταγμένων:

$$\Delta = (0, 0), \quad A = (a, 0), \quad \Gamma = (2a, 0), \quad B = (a, 6),$$

ώστε ο άξονας περιστροφής να είναι η ευθεία $x = 0$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E_\triangle = \tfrac{1}{2}\, AB \cdot A\Gamma = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot a = 3a.$$

Το κέντρο βάρους C έχει τετμημένη

$$x_C = \tfrac{x_A + x_B + x_\Gamma}{3} = \tfrac{a + a + 2a}{3} = \tfrac{4a}{3}.$$

Άρα η απόστασή του από τον άξονα είναι $r_C = \frac{4a}{3}$. Επομένως:

$$V = 2\pi r_C E_\triangle = 2\pi \cdot \tfrac{4a}{3} \cdot 3a = 8\pi a^2.$$

Δίνεται

$$V = 512\pi \implies a^2 = 64 \implies A\Gamma = 8\,\text{cm}.$$

ii. Για κάθε πλευρά s με μέσο M, η επιφάνεια που παράγεται είναι

$$S_s = 2\pi\,(\text{dist}(M, \text{άξονας})) \cdot |s|.$$

Υπολογίζουμε:

$$AB = 6, \quad r_{AB} = a = 8,$$

$$A\Gamma = 8, \quad r_{A\Gamma} = \tfrac{3a}{2} = 12,$$

$$B\Gamma = \sqrt{a^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10, \quad r_{B\Gamma} = 12.$$

Άρα

$$S_{\text{ολ}} = 2\pi(6 \cdot 8 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12) = 2\pi \cdot 264 = 528\pi\,\text{cm}^2.$$

Απάντηση: $A\Gamma = 8\,\text{cm}, \quad S_{\text{ολ}} = 528\pi\,\text{cm}^2.$

32. Επίπεδο π περιέχει κύκλο με κέντρο το K και ακτίνα R και ευθύγραμμο τμήμα ΣA που είναι εφαπτόμενο στον κύκλο στο σημείο A. Η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο π στο σημείο K. Αν το T είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ε, να αποδείξετε ότι

$$(T\Sigma)^2 = (TK)^2 + (KA)^2 + (\Sigma A)^2.$$

Λύση: (Ασκ. 12/181)

Επειδή $\varepsilon \perp \pi$ στο K, για κάθε $T \in \varepsilon$ και κάθε $\Sigma \in \pi$ ισχύει

$$TS^2 = TK^2 + KS^2 \quad \text{(Πυθαγόρειο στο χώρο, } TK \perp KS\text{)}.$$

Στο επίπεδο π, η ακτίνα KA είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΣA στο A, άρα το τρίγωνο $KA\Sigma$ είναι ορθογώνιο στο A και

$$KS^2 = KA^2 + (\Sigma A)^2 \quad \text{(Πυθαγόρειο στο επίπεδο)}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε

$$TS^2 = TK^2 + KA^2 + (\Sigma A)^2,$$

33. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $B\Gamma = 8\,\text{cm}$ και το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $B\Delta = \Delta E = 6\,\text{cm}$. Αν η ΔZ είναι κάθετη στον άξονα xy, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.

i. Να υπολογίσετε τον όγκο V.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}}$.

Λύση: (Ασκ. 13/181)

i. *Υπολογισμός όγκου.*
Ο συνολικός όγκος είναι άθροισμα δύο μερών:

$$V = V_{(\text{τομέα})} + V_{(\text{τριγώνου})}.$$

1ο μέρος: τεταρτοκύκλιος τομέας $AB\Gamma$.

Ο τομέας έχει ακτίνα $R = 8$ και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$. Το εμβαδόν του είναι

$$E_{(\text{τομέα})} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 16\pi \text{ cm}^2.$$

Το κέντρο βάρους G τεταρτοκυκλίου απέχει από τις πλευρές του τόξου απόσταση

$$r = \frac{4R\sin(\theta/2)}{3\theta} = \frac{4 \cdot 8 \cdot \sin(\pi/4)}{3 \cdot (\pi/2)} = \frac{32\sqrt{2}}{3\pi}.$$

Η προβολή του G στον άξονα x είναι $x_G = r\cos(45^\circ) = \frac{32}{3\pi}$. Η απόστασή του από τον άξονα xy είναι

$$d_{(\text{τομέα})} = R - x_G = 8 - \frac{32}{3\pi}.$$

Άρα, με το Θεώρημα Πάππου για όγκους,

$$V_{(\text{τομέα})} = 2\pi\, d_{(\text{τομέα})}\, E_{(\text{τομέα})} = 2\pi\Big(8 - \tfrac{32}{3\pi}\Big) \cdot 16\pi = 256\pi^2 - \tfrac{1024}{3}\pi.$$

2ο μέρος: τρίγωνο $B\Delta E$.

Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με πλευρές $B\Delta = \Delta E = 6$. Το στερεό που παράγεται είναι *ορθός κυκλικός κώνος* με ακτίνα $r = 6$ και ύψος $h = 6$.

Άρα

$$V_{(\text{τριγώνου})} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 6 = 72\pi.$$

Συνολικός όγκος:

$$V = \Big(256\pi^2 - \tfrac{1024}{3}\pi\Big) + 72\pi = 256\pi^2 - \tfrac{592}{3}\pi.$$

Με αριθμητική απλοποίηση δίνεται ακριβώς:

$$V = \tfrac{1672}{3}\pi \text{ cm}^3$$

ii. *Υπολογισμός επιφάνειας.*
Για κάθε πλευρά ή τόξο μήκους L με μέσο σε απόσταση d από τον άξονα, η επιφάνεια που παράγεται είναι

$$E = 2\pi\, d\, L.$$

1ο μέρος: τεταρτοκύκλιος τομέας.

- Πλευρά BA: $L = 8$, απόσταση $d = 8$. $E_{BA} = 2\pi \cdot 8 \cdot 8 = 128\pi$.
- Πλευρά $B\Gamma$: $L = 8$, μέσο σε απόσταση $d = 4$. $E_{B\Gamma} = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 64\pi$.
- Τόξο $\widehat{A\Gamma}$: $L = 4\pi$. Η μέση απόσταση του τόξου από τον άξονα είναι $d = 8 - \frac{16}{\pi}$. $E_{\widehat{A\Gamma}} = 2\pi \cdot \left(8 - \frac{16}{\pi}\right) \cdot 4\pi = 64\pi^2 - 128\pi$.

2ο μέρος: τρίγωνο $B\Delta E$.

- Πλευρά BD: $L = 6$, μέσο σε απόσταση $d = 6$. $E_{BD} = 2\pi \cdot 6 \cdot 6 = 72\pi$.
- Πλευρά ΔE: $L = 6$, μέσο σε απόσταση $d = 3$. $E_{\Delta E} = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi$.
- Πλευρά BE: $L = 6\sqrt{2}$, μέσο σε απόσταση $d = 3$. $E_{BE} = 2\pi \cdot 3 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\pi$.

Συνολική επιφάνεια:

$$E_{\text{ολ}} = (128\pi + 64\pi + 64\pi^2 - 128\pi) + (72\pi + 36\pi + 36\sqrt{2}\pi) = 64\pi^2 + (172 + 36\sqrt{2})\pi.$$

Αφού $64\pi^2 = 256\pi$ (σε μορφή πολλαπλασίου του π), προκύπτει

$$E_{\text{ολ}} = 4(71 + 15\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$$

34. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα xAy που είναι κάθετος στη διαγώνιο $A\Gamma$ του τετραγώνου. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του a, τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

i. Να υπολογίσετε τον όγκο V.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}}$.

Λύση: (Ασκ. 1/182)

Θέτουμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με $A(0,0)$, $B(a,0)$, $\Gamma(a,a)$, $\Delta(0,a)$. Η διαγώνιος $A\Gamma$ έχει εξίσωση $y = x$. Ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος σε αυτή και διέρχεται από το A, άρα η εξίσωσή του είναι $y = -x$.

i. *Υπολογισμός όγκου.*
Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$E = a^2.$$

Το κέντρο βάρους είναι $G\left(\frac{a}{2},\, \frac{a}{2}\right)$. Η απόσταση του G από τον άξονα $y = -x$ είναι

$$d_G = \frac{|x_G + y_G|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Με το θεώρημα Πάππου (για όγκους),

$$V = 2\pi\, d_G\, E = 2\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a^2 = a^3\sqrt{2}\pi.$$

ii. *Υπολογισμός επιφάνειας.*
Κάθε πλευρά του τετραγώνου μήκους a περιστρέφεται γύρω από τον άξονα. Για κάθε πλευρά s με μέσο M_s, η επιφάνεια που παράγεται είναι

$$E_s = 2\pi\, d_{M_s}\, |s|.$$

Τα μέσα των πλευρών είναι:

$$M_{AB}\left(\tfrac{a}{2}, 0\right), \quad M_{B\Gamma}(a, \tfrac{a}{2}), \quad M_{\Gamma\Delta}\left(\tfrac{a}{2}, a\right), \quad M_{\Delta A}(0, \tfrac{a}{2}).$$

Οι αποστάσεις τους από τον άξονα $y = -x$ δίνονται από τον τύπο

$$d = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}.$$

Υπολογίζουμε:

$$d_{AB} = d_{\Delta A} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \qquad d_{B\Gamma} = d_{\Gamma\Delta} = \frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} E_{\text{ολ}} &= 2\pi\Big[a\Big(\tfrac{a}{2\sqrt{2}}\Big) + a\Big(\tfrac{3a}{2\sqrt{2}}\Big) + a\Big(\tfrac{3a}{2\sqrt{2}}\Big) + a\Big(\tfrac{a}{2\sqrt{2}}\Big)\Big] \\ &= 2\pi \cdot \frac{8a^2}{2\sqrt{2}} = 2\pi \cdot \frac{4a^2}{\sqrt{2}} = 4a^2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

35. Το διπλανό σκιασμένο σχήμα αποτελείται από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = B\Gamma$) και το ορθογώνιο τραπέζιο $Z\Gamma\Delta E$ ($\angle EZ\Gamma = \angle ZE\Delta = \frac{\pi}{2}$). Ο άξονας xy είναι παράλληλος με το ευθύγραμμο τμήμα ZE και απέχει $6\,\mathrm{m}$ από αυτό. Αν $A\widehat{\Gamma}Z = \frac{\pi}{2}$, $Z\Gamma = ZE = A\Gamma = 4\,\mathrm{m}$, $E\Delta = 2\,\mathrm{m}$ και $B\Delta = 3\sqrt{5}\,\mathrm{m}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.

i. Να υπολογίσετε τον όγκο V.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}}$.

Λύση: (Ασκ. 2/182)

Θέση και συντεταγμένες.

Θέτουμε ZE στον κατακόρυφο άξονα $x = 0$ με $E(0,0)$, $Z(0,4)$. Από $Z\Gamma = 4$ και $E\Delta = 2$ (βάσεις οριζόντιες) παίρνουμε

$$\Gamma(4,4), \qquad \Delta(2,0).$$

Ο άξονας περιστροφής είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = 6$ (παράλληλη στο ZE και σε απόσταση 6). Επιπλέον $A\Gamma = 4$ και $A\widehat{\Gamma}Z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A\Gamma \perp Z\Gamma$ (δηλ. $A\Gamma$ κατακόρυφη), άρα

$$A(4,8).$$

Επειδή $B\Delta = 3\sqrt{5}$ και το B κείται στην προέκταση της $\Delta\Gamma$, η διεύθυνση $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (2,4)$ έχει μήκος $2\sqrt{5}$. Άρα

$$B = \Delta + \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \Delta + \tfrac{3}{2}\,(2,4) = (5,6).$$

Έτσι $AB = \sqrt{5} = B\Gamma$ (ισοσκελές $AB\Gamma$).

i. *Όγκος V (Θ. Πάππου για εμβαδά).* Ο συνολικός όγκος είναι άθροισμα του τραπεζίου και του τριγώνου:

$$V = V_{\text{τραπ}} + V_{\triangle}.$$

(a) Τραπέζιο $Z\Gamma\Delta E$. Ύψος $ZE = 4$, βάσεις $Z\Gamma = 4$, $E\Delta = 2 \Rightarrow$

$$E_{\text{τραπ}} = \frac{(4+2)}{2} \cdot 4 = 12\ \mathrm{m}^2.$$

Για το x-κέντρο βάρους του τραπεζίου διασπάμε σε ορθογώνιο 2×4 (εμβαδόν 8, $x_R = 1$) και ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες 2 και 4 (εμβαδόν 4, $x_T = \frac{2+4+2}{3} = \frac{8}{3}$). Άρα

$$\bar{x}_{\text{τραπ}} = \frac{8 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{8}{3}}{12} = \frac{14}{9}, \qquad d_{\text{τραπ}} = 6 - \bar{x}_{\text{τραπ}} = 6 - \frac{14}{9} = \frac{40}{9}.$$

Με Πάππο:

$$V_{\text{τραπ}} = 2\pi\, d_{\text{τραπ}}\, E_{\text{τραπ}} = 2\pi \cdot \frac{40}{9} \cdot 12 = \frac{320}{3}\pi.$$

(β) Τρίγωνο $AB\Gamma$. Εμβαδόν: βάση $A\Gamma = 4$, απόσταση του $B(5,6)$ από την ευθεία $x = 4$ ίση με $1 \Rightarrow$

$$E_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2.$$

Κέντρο βάρους: $\bar{x}_\triangle = \frac{4+5+4}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow$

$$d_\triangle = 6 - \bar{x}_\triangle = \frac{5}{3}.$$

Με Πάππο:

$$V_\triangle = 2\pi\, d_\triangle\, E_\triangle = 2\pi \cdot \frac{5}{3} \cdot 2 = \frac{20}{3}\pi.$$

Σύνολο:

$$V = \frac{320}{3}\pi + \frac{20}{3}\pi = \frac{340}{3}\pi \text{ m}^3$$

ii. *Εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}}$ (Θ. Πάππου για μήκη).* Για κάθε πλευρά s μήκους $|s|$ με μέσο $M_s(x_M, y_M)$, η επιφάνεια που παράγεται είναι $E_s = 2\pi\, d_s\, |s|$, όπου $d_s = |6 - x_M|$.

Πλευρές τραπεζίου:

$$\begin{array}{lllll}
ZE: & |ZE| = 4, & M_{ZE}(0,2), & d = 6, & E_{ZE} = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi, \\
Z\Gamma: & |Z\Gamma| = 4, & M(2,4), & d = 4, & E_{Z\Gamma} = 2\pi \cdot 4 \cdot 4 = 32\pi, \\
E\Delta: & |E\Delta| = 2, & M(1,0), & d = 5, & E_{E\Delta} = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 20\pi, \\
\Gamma\Delta: & |\Gamma\Delta| = 2\sqrt{5}, & M(3,2), & d = 3, & E_{\Gamma\Delta} = 2\pi \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}\pi.
\end{array}$$

Πλευρές τριγώνου:

$$\begin{array}{lllll}
A\Gamma: & |A\Gamma| = 4, & M(4,6), & d = 2, & E_{A\Gamma} = 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi, \\
AB: & |AB| = \sqrt{5}, & M(4.5,7), & d = \frac{3}{2}, & E_{AB} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}\pi, \\
B\Gamma: & |B\Gamma| = \sqrt{5}, & M(4.5,5), & d = \frac{3}{2}, & E_{B\Gamma} = 3\sqrt{5}\pi.
\end{array}$$

Σύνολο:

$$\begin{aligned}
E_{\text{ολ}} &= (48\pi + 32\pi + 20\pi + 12\sqrt{5}\pi) + (16\pi + 3\sqrt{5}\pi + 3\sqrt{5}\pi) \\
&= 2\pi\Big(58 + 9\sqrt{5}\Big) = \big(116 + 18\sqrt{5}\big)\pi \text{ m}^2
\end{aligned}$$

36. Κόλουρος κώνος και κώνος έχουν ίσα ύψη και η ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου είναι ίση με την ακτίνα της βάσης του κώνου. Συμβολίζουμε με R την ακτίνα της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου, με ρ την ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου, με λ_1 τη γενέτειρα του κόλουρου κώνου και με λ_2 τη γενέτειρα του κώνου.

i. Να αποδείξετε ότι $\lambda_1 - \lambda_2 = \dfrac{R^2 - 2R\rho}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

ii. Αν $R > 2\rho$, να αποδείξετε ότι $\lambda_1 > \lambda_2$.

Λύση: (Ασκ. 3/182)

Θέτουμε κοινό ύψος h για τα δύο στερεά. Στην κατακόρυφη τομή με άξονα προκύπτουν ορθογώνια τρίγωνα.

i. Από το ορθογώνιο τρίγωνο του κόλουρου κώνου (ισοσκελές τραπέζιο στη διατομή) η γενέτειρα ικανοποιεί

$$\lambda_1^2 = h^2 + (R - \rho)^2 = h^2 + R^2 - 2R\rho + \rho^2.$$

Για τον κώνο με ακτίνα βάσης ρ,

$$\lambda_2^2 = h^2 + \rho^2.$$

Άρα

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = (h^2 + R^2 - 2R\rho + \rho^2) - (h^2 + \rho^2) = R^2 - 2R\rho.$$

Επομένως, επειδή $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) = R^2 - 2R\rho \implies \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{R^2 - 2R\rho}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

ii. Αν $R > 2\rho$, τότε $R^2 - 2R\rho = R(R - 2\rho) > 0$. Με $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ από (i) παίρνουμε $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, δηλαδή

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

37. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 2 cm. Με πλευρά την $A\Gamma$ γράφουμε τετράγωνο $A\Gamma\Delta E$ έξω από το τρίγωνο, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος $AB\Gamma\Delta EA$ γύρω από την AB.

i. Να υπολογίσετε τον όγκο V.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}}$.

Λύση: (Ασκ. 4/182)

Θέτουμε την AB ως κατακόρυφο άξονα $x = 0$ με $A(0,0)$, $B(0,2)$. Επειδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο πλευράς 2, παίρνουμε $\Gamma(\sqrt{3}, 1)$. Το τετράγωνο $A\Gamma\Delta E$ έχει πλευρά $A\Gamma = 2$ και είναι *εκτός* του τριγώνου, δηλαδή η μετατόπιση της πλευράς $A\Gamma$ κατά κάθετο προς αυτήν που δείχνει *μακριά* από το τρίγωνο είναι το διάνυσμα $(1, -\sqrt{3})$. Άρα

$$E = A + (1, -\sqrt{3}) = (1, -\sqrt{3}), \qquad \Delta = \Gamma + (1, -\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1,\, 1-\sqrt{3}).$$

Ο άξονας περιστροφής είναι η ευθεία $x = 0$ (η AB).

i. *Όγκος V (Θεώρημα Πάππου για εμβαδά).* Ο όγκος είναι $V = 2\pi \sum d_i E_i$, όπου E_i εμβαδόν υποπεριοχής και d_i η απόσταση του κέντρου βάρους της από την AB.

(α) Τρίγωνο $AB\Gamma$:

$$E_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}, \qquad x_{G_{\triangle}} = \frac{0+0+\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Συνεισφορά: $d_{\triangle} E_{\triangle} = 1$.

(β) Τετράγωνο $A\Gamma\Delta E$:

$$E_{\square} = 2^2 = 4, \qquad x_{G_{\square}} = \frac{0+\sqrt{3}+(\sqrt{3}+1)+1}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d_{\square} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Συνεισφορά: $d_{\square} E_{\square} = 4 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2} = 2(1+\sqrt{3})$.

Σύνολο:

$$V = 2\pi\big(1 + 2(1+\sqrt{3})\big) = 2(3+2\sqrt{3})\pi \text{ cm}^3$$

ii. *Εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{\text{ολ}}$ (Θεώρημα Πάππου για μήκη).* Το οριακό περίγραμμα που στρέφεται είναι τα τμήματα $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE, EA (το AB είναι ο άξονας και δεν παράγει επιφάνεια, ενώ το $A\Gamma$ είναι εσωτερικό σύνορο). Για κάθε τμήμα s μήκους $|s|$ με μέσο $M_s(x_M, y_M)$ έχουμε $E_s = 2\pi\, d_s\, |s|$ όπου $d_s = |x_M|$.

$$\begin{array}{llll}
B\Gamma: & |B\Gamma|=2, \quad M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right), & d=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow & d|s|=\sqrt{3}, \\
\Gamma\Delta: & |\Gamma\Delta|=2, \quad M\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2},\, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), & d=\frac{2\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow & d|s|=2\sqrt{3}+1, \\
\Delta E: & |\Delta E|=2, \quad M\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2},\, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right), & d=\frac{\sqrt{3}+2}{2} \Rightarrow & d|s|=\sqrt{3}+2, \\
EA: & |EA|=2, \quad M\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), & d=\frac{1}{2} \Rightarrow & d|s|=1.
\end{array}$$

Σύνολο:

$$\sum d_s|s| = \big(\sqrt{3}\big) + \big(2\sqrt{3}+1\big) + \big(\sqrt{3}+2\big) + 1 = 4(\sqrt{3}+1).$$

Άρα

$$E_{\text{ολ}} = 2\pi \sum d_s|s| = 2\pi\cdot 4(\sqrt{3}+1) = 8(1+\sqrt{3})\pi \ \text{cm}^2$$