Μαθηματικά Β' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

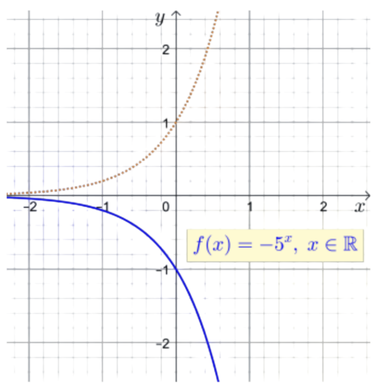
1. Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 5^x,\ x \in \mathbb{R}$. να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i. $f(x) = -5^x$

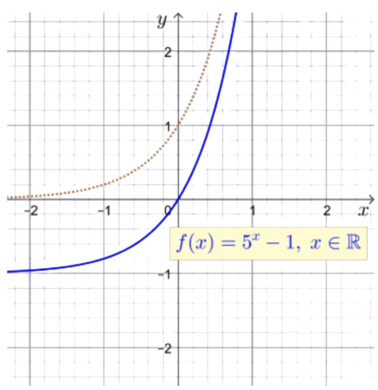
ii. $f(x) = 5^x - 1$

iii. $f(x) = 5^x + 3$

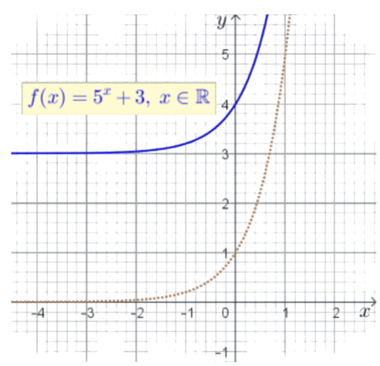
Λύση: (Ασκ: 1/160)



i.



ii.



iii.

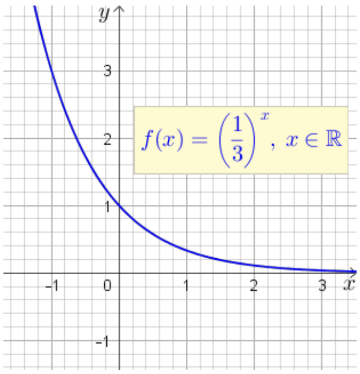
2. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

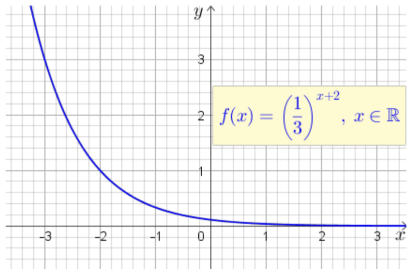
ii. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

iii. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

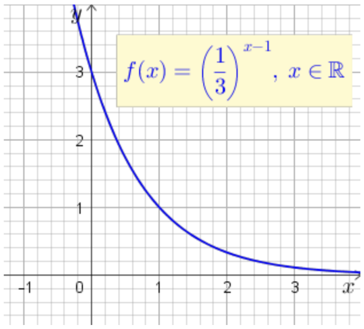
Λύση: (Ασκ: 2/160)



i.



ii.



iii.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{\lambda-2}{1+\lambda}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι εκθετική συνάρτηση.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f όταν $\lambda = 3$ και να αναφέρετε τη συμπεριφορά της στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$.

Λύση: (Ασκ: 3/160)

i. Θέτουμε $a = \dfrac{\lambda-2}{1+\lambda}$. Για να είναι η $f(x) = a^x$ εκθετική απαιτείται $a > 0$ και $a \neq 1$ (και, προφανώς, $1+\lambda \neq 0$).
- $a > 0 \iff \dfrac{\lambda-2}{1+\lambda} > 0 \iff$ αριθμητής και παρονομαστής ομόσημοι $\iff \lambda > 2$ ή $\lambda < -1$.
- $a = 1 \iff \lambda - 2 = 1 + \lambda \Rightarrow -2 = 1$ (αδύνατο), άρα ποτέ.

Επίσης $1 + \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1$ (ήδη αποκλείστηκε).
$\Rightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii. Για $\lambda = 3$ έχουμε $a = \dfrac{3-2}{1+3} = \dfrac{1}{4}$, άρα $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$. Η γραφική παράσταση είναι εκθετική φθίνουσα, διέρχεται από το $(0,1)$ και έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα xx' ($y = 0$).
Χαρακτηριστικά σημεία: $f(1) = \frac{1}{4}$, $f(-1) = 4$.
Συμπεριφορά ορίων:
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^x = 0^+, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^x = +\infty.$$

4. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Η συνάρτηση $f(x) = (-2)^x,\ x \in \mathbb{R}$ είναι εκθετική συνάρτηση.

ii. Η εξίσωση $16^x = -16$ δεν έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

iii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = -4^x,\ x \in \mathbb{R}$ είναι το $(-\infty, 0)$.

iv. Η συνάρτηση $g(x) = 2^x + e^x,\ x \in \mathbb{R}$ δεν είναι $1-1$ συνάρτηση.

v. Ισχύει ότι $2 < 3 \iff 2^x < 3^x$, για κάθε $x > 0$.

Λύση: (Ασκ: 1/168)

i. ΛΑΘΟΣ. Για εκθετική a^x απαιτείται $a > 0,\ a \neq 1$. Η βάση $-2 < 0$, άρα $f(x) = (-2)^x$ δεν ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και δεν είναι εκθετική στο $\mathbb{R}$.

ii. ΣΩΣΤΟ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $16^x > 0$. Δεν μπορεί να ισούται με $-16 < 0$.

iii. ΣΩΣΤΟ. Επειδή $4^x > 0$ για κάθε x, έχουμε $f(x) = -4^x < 0$. Επιπλέον

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-,$$

άρα το σύνολο τιμών είναι $(-\infty, 0)$.

iv. ΛΑΘΟΣ. $g'(x) = 2^x \ln 2 + e^x > 0$ για κάθε x, οπότε η g είναι γνήσια αύξουσα $\Rightarrow$ 1–1.

v. ΣΩΣΤΟ. Για $x > 0$ η απεικόνιση $t \mapsto t^x$ είναι γνήσια αύξουσα στο $t > 0$. Επομένως $2 < 3 \Rightarrow 2^x < 3^x$ και αντιστρόφως $2^x < 3^x \Rightarrow 2 < 3$.

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

i. $10^{x-3} = 10000$	ii. $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{27}{64}$	iii. $5^{\sqrt{x}} = 125$
iv. $9^{2x} \cdot 27^{x^2} = 3^{-1}$	v. $16^{5-x} = \dfrac{8^{2x-3}}{2}$	vi. $e^{2x} \cdot \sqrt{e^x} = \dfrac{1}{e}$
vii. $11^{x^2-3x-4} = 1$	viii. $7^{1+\text{συν}x+\text{συν}^2 x+\cdots} = 49$	

Λύση: (Ασκ: 2/168)

i. $10^{x-3} = 10^4 \;\Rightarrow\; x = 7.$

ii. $\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \;\Rightarrow\; x = -3.$

iii. $125 = 5^3 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = 3 \;\Rightarrow\; x = 9.$

iv. $9 = 3^2,\ 27 = 3^3 \;\Rightarrow\; 3^{4x} \cdot 3^{3x^2} = 3^{-1} \;\Rightarrow\; 3x^2 + 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\ -\frac{1}{3}.$

v. $16 = 2^4,\ 8 = 2^3 \;\Rightarrow\; 2^{20-4x} = 2^{6x-10} \;\Rightarrow\; x = 3.$

vi. $\sqrt{e^x} = e^{x/2} \;\Rightarrow\; e^{2x}e^{x/2} = e^{-1} \;\Rightarrow\; e^{\frac{5}{2}x} = e^{-1} \;\Rightarrow\; x = -\frac{2}{5}.$

vii. $11^{x^2-3x-4} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\ 4.$

viii. Θέτω $S = 1 + \text{συν}(x) + \text{συν}^2 x + \cdots = \frac{1}{1-\text{συν}(x)}$. $7^S = 49 = 7^2 \;\Rightarrow\; S = 2 \;\Rightarrow\; \text{συν}(x) = \frac{1}{2}$.
Άρα $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

i. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ ii. $e^x + e^{-x} = 2$ iii. $25^x + 5^{x+1} - 50 = 0$

iv. $7 \cdot 3^{x-1} + 5^{x+1} = 3^{x+2} + 5^x$ v. $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$ vi. $4 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 4^x = 13 \cdot 6^x$

vii. $6^x - 3^x = 2^x - 1$ viii. $\left(x^2 - 5x + 6\right)^{x(x-2)} = 1$

Λύση: (Ασκ: 3/168)

i.

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0, \quad 9^x = (3^x)^2 = t^2,\ t = 3^x > 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \;\Rightarrow\; t = 3 \;\Rightarrow\; x = 1$$

ii.

$$e^x + e^{-x} = 2 \;\Rightarrow\; e^{2x} + 1 = 2e^x$$

$$(e^x - 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

iii.

$$25^x + 5^{x+1} - 50 = 0, \quad 25^x = (5^2)^x = (5^x)^2 = t^2,\ t = 5^x > 0$$
$$t^2 + 5t - 50 = 0 \ \Rightarrow\ t = 5 \ \Rightarrow\ x = 1$$

iv.

$$7 \cdot 3^{x-1} + 5^{x+1} = 3^{x+2} + 5^x$$
$$\tfrac{7}{3} \cdot 3^x + 5 \cdot 5^x = 9 \cdot 3^x + 5^x \ \Rightarrow\ -\tfrac{20}{3}3^x + 4 \cdot 5^x = 0 \ \Rightarrow\ \left(\tfrac{5}{3}\right)^x = \tfrac{5}{3} \ \Rightarrow\ x = 1$$

v.

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2, \quad t = 3^x > 0$$
$$\frac{t + t^{-1}}{t - t^{-1}} = 2 \ \Rightarrow\ t^2 + 1 = 2(t^2 - 1) \ \Rightarrow\ t^2 = 3 \ \Rightarrow\ 3^x = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ x = \tfrac{1}{2}$$

vi.

$$4 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 4^x = 13 \cdot 6^x, \quad a = 3^x,\ b = 2^x > 0$$
$$4a^2 + 9b^2 = 13ab \ \Rightarrow\ 4\left(\tfrac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\tfrac{a}{b}\right) + 9 = 0$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^x = 1 \ \text{ή}\ \left(\tfrac{3}{2}\right)^x = \tfrac{9}{4} \ \Rightarrow\ x = 0 \ \text{ή}\ x = 2$$

vii.

$$6^x - 3^x = 2^x - 1 \ \Rightarrow\ 2^x 3^x - 3^x = 2^x - 1 \ \Rightarrow\ (2^x - 1)(3^x - 1) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$$

viii.

$$(x^2 - 5x + 6)^{x(x-2)} = 1$$

Για να ισχύει: βάση $= 1$ ή εκθέτης $= 0$.

$$x^2 - 5x + 6 = 1 \ \Rightarrow\ x^2 - 5x + 5 = 0 \ \Rightarrow\ x = \tfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x(x-2) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \ \ (\text{όχι } x = 2,\ 0^0 \text{ απροσδ.})$$

Άρα $x = 0,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

7. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

i. $8^{x^2-1} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ii. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\right]^{3-x} > 1$

Λύση: (Ασκ: 4/168)

i.

$$8^{x^2-1} < \frac{1}{\sqrt{2}} \iff (2^3)^{x^2-1} < 2^{-1/2} \iff 2^{3(x^2-1)} < 2^{-1/2}$$

$$3(x^2-1) < -\tfrac{1}{2} \iff x^2 < \tfrac{5}{6} \iff x \in \left(-\sqrt{\tfrac{5}{6}}, \sqrt{\tfrac{5}{6}}\right).$$

ii.

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1}\right]^{3-x} > 1, \quad a = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1} > 0,\ b = 3-x.$$

$$a^b > 1 \iff (a > 1 \,\&\, b > 0) \text{ ή } (0 < a < 1 \,\&\, b < 0).$$

$$a > 1 \iff x < 1, \qquad b > 0 \iff x < 3 \Rightarrow x < 1.$$

$$0 < a < 1 \iff x > 1, \qquad b < 0 \iff x > 3 \Rightarrow x > 3.$$

$$\Longrightarrow \quad x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

8. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3^x - 5^y = 4, \\ 9^x - 25^y = 56. \end{cases}$$

Λύση: (Ασκ: 5/168)

$$\text{Θέτω } a = 3^x > 0,\ b = 5^y > 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 4, \\ a^2 - b^2 = 56. \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 56 \Rightarrow a + b = \frac{56}{4} = 14.$$

$$\begin{cases} a - b = 4, \\ a + b = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9, \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 9, \\ 5^y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Άρα x=2, y=1

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 5^{\eta\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 2^{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in [0, \pi]$. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1-1$.

Λύση: (Ασκ: 6/168)

i. Για $f(x) = 5^{\eta\mu x}$ στο $\mathbb{R}$.

$$\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu x \;\Rightarrow\; f(x+2\pi) = 5^{\eta\mu(x+2\pi)} = 5^{\eta\mu x} = f(x).$$

Υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ (π.χ. 0 και 2π) με $f(x_1) = f(x_2)$, άρα η f $\delta\epsilon\nu$ είναι $1-1$.

ii. Αν $g(x_1) = g(x_2)$, τότε

$$2^{\sigma\upsilon\nu x_1} = 2^{\sigma\upsilon\nu x_2} \;\Rightarrow\; \sigma\upsilon\nu x_1 = \sigma\upsilon\nu x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \quad (\text{επειδή η συν}x \text{ είναι 1–1 στο } [0,\pi]).$$

Άρα η g είναι $1-1$ στο $[0, \pi]$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{6^x}{4^x + 9^x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \dfrac{12}{13} f(0)$.

Λύση: (Ασκ: 7/169)

i.

$$4^x > 0, \quad 9^x > 0 \;\Rightarrow\; 4^x + 9^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } D_f = \mathbb{R}.$$

ii.

$$f(-x) = \frac{6^{-x}}{4^{-x} + 9^{-x}} = \frac{\frac{1}{6^x}}{\frac{1}{4^x} + \frac{1}{9^x}} = \frac{\frac{1}{6^x}}{\frac{9^x+4^x}{36^x}} = \frac{36^x}{6^x} \cdot \frac{1}{9^x + 4^x} = \frac{6^x}{4^x + 9^x} = f(x).$$

$$\Rightarrow \text{ Η } f \text{ είναι άρτια.}$$

iii.

$$f(0)=\frac{6^0}{4^0+9^0}=\frac{1}{2},\qquad f(x)=\frac{12}{13}\,f(0)=\frac{6}{13}.$$

$$\frac{6^x}{4^x+9^x}=\frac{6}{13}\iff 13\cdot 6^x=6\cdot 4^x+6\cdot 9^x.$$

Θέτουμε $a=2^x>0,\ b=3^x>0\Rightarrow 6^x=ab,\ 4^x=a^2,\ 9^x=b^2.$

$$13ab=6a^2+6b^2\iff 6\Big(\frac{a}{b}\Big)^2-13\Big(\frac{a}{b}\Big)+6=0.$$

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{2}{3}\right)^x\in\left\{\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right\}\iff\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3}{2}\text{ ή }\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}.$$

$$x=-1\quad\text{ή}\quad x=1.$$

11. Μια μεγάλη αυτοκινητοβιομηχανία, για να αυξήσει τις πωλήσεις της, δίνει στον γενικό αντιπρόσωπο που έχει στην Κύπρο δώρο $\Delta(x)=4^x-2^{x+1}+4$ αυτοκίνητα, σε περίπτωση που ο αντιπρόσωπος πουλήσει x χιλιάδες αυτοκίνητα τα επόμενα δύο χρόνια.

i. Αν ο αντιπρόσωπος στην Κύπρο πουλήσει 2000 αυτοκίνητα τα επόμενα δύο χρόνια, πόσα αυτοκίνητα θα πάρει ως δώρο;

ii. Πόσα αυτοκίνητα πρέπει να πουλήσει την επόμενη διετία ο αντιπρόσωπος στην Κύπρο για να πάρει δώρο 52 αυτοκίνητα;

Λύση: (Ασκ: 8/169)

i.

$$x=2\ (\text{χιλιάδες})\ \Rightarrow\ \Delta(2)=4^2-2^3+4=16-8+4=12\text{ αυτοκίνητα.}$$

ii.

$$\Delta(x)=52\iff 4^x-2^{x+1}+4=52\iff 4^x-2^{x+1}-48=0.$$

Θέτουμε $t=2^x>0\Rightarrow 4^x=t^2.$

$$t^2-2t-48=0\iff (t-8)(t+6)=0\iff t=8.$$

$$2^x=8\ \Rightarrow\ x=3\ (\text{χιλιάδες})\ \Rightarrow\ 3000\text{ αυτοκίνητα.}$$

12. Οι κοινωνιολόγοι εκτιμούν ότι ο πληθυσμός μιας μικρής πόλης μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής. Ο πληθυσμός της πόλης είναι σήμερα 8000 κάτοικοι, ενώ εκτιμάται ότι μετά από 20 χρόνια ο πληθυσμός της πόλης θα είναι 4000 κάτοικοι.

i. Να αποδείξετε ότι ο πληθυσμός $P(t)$ της πόλης μετά από t δεκαετίες δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 8 \cdot 2^{-t/2},$$

με τον πληθυσμό να μετριέται σε χιλιάδες κατοίκους.

ii. Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις των κοινωνιολόγων, να υπολογίσετε τον πληθυσμό της πόλης μετά από 60 χρόνια.

Λύση: (Ασκ: 9/169)

i.

$$\text{Έστω } P(t) = P_0 \cdot a^t \text{ (εκθετική μεταβολή, σε χιλιάδες).}$$
$$P(0) = 8 \Rightarrow P_0 = 8, \qquad P(2) = 4 \Rightarrow 8 \cdot a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow a = 2^{-1/2}.$$
$$\Longrightarrow \quad P(t) = 8 \cdot \left(2^{-1/2}\right)^t = 8 \cdot 2^{-t/2}.$$

ii.

$$t = 6 \text{ (60 χρόνια)} \;\Rightarrow\; P(6) = 8 \cdot 2^{-3} = 8 \cdot \tfrac{1}{8} = 1 \text{ (χιλ.)}.$$

Άρα ο πληθυσμός μετά από 60 χρόνια θα είναι 1000 κάτοικοι.

13. Σε έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο

$$\theta(t) = 36 + 4 \cdot 2^{-t},$$

με τη θερμοκρασία να μετριέται σε ℃.

i. Να υπολογίσετε τη θερμοκρασία του ασθενούς τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

ii. Να υπολογίσετε σε πόσες ώρες, από τη χορήγηση του φαρμάκου, η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει τη φυσιολογική τιμή των 36,5℃.

iii. Αν η επίδραση του αντιπυρετικού φαρμάκου διαρκεί 4 ώρες, να υπολογίσετε τη θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

iv. Να βρείτε ποιο ήταν το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η θερμοκρασία του ασθενούς ήταν μεγαλύτερη από 38℃.

Λύση: (Ασκ: 10/169)

i.

$$\theta(0) = 36 + 4 \cdot 2^0 = 36 + 4 = 40℃.$$

ii.

$$\theta(t) = 36{,}5 \iff 36 + 4 \cdot 2^{-t} = 36{,}5 \iff 2^{-t} = \tfrac{1}{8} \iff 2^t = 8 \iff t = 3 \text{ ώρες}.$$

iii.

$$\theta(4) = 36 + 4 \cdot 2^{-4} = 36 + \frac{4}{16} = 36 + \frac{1}{4} = 36{,}25℃.$$

iv.

$$\theta(t) > 38 \iff 36 + 4 \cdot 2^{-t} > 38 \iff 2^{-t} > \tfrac{1}{2} \iff -t > -1 \iff t < 1.$$

Με δεδομένο $t \geq 0$, το ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι $[0, 1)$ ώρες.

14. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω λογαρίθμους:

i. $\log_3 81$	ii. $\log_2 \sqrt{2}$	iii. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$
iv. $\ln e^2$	v. $\log_{1/2}\left(\frac{1}{8}\right)$	vi. $\log 0{,}1$

Λύση: (Ασκ: 1/173)

i.

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

ii.

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{1/2} = \tfrac{1}{2}.$$

iii.

$$\log_5\left(\tfrac{1}{25}\right) = \log_5 5^{-2} = -2.$$

iv.

$$\ln e^2 = 2.$$

v.

$$\log_{1/2}\left(\tfrac{1}{8}\right) = \log_{1/2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 3.$$

vi.

$$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1.$$

15. Να υπολογίσετε το x στις πιο κάτω ισότητες:

i. $\log_x 1000 = 3$	ii. $\log_5 125 = x$	iii. $\log_3 x = 4$
iv. $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = x$	v. $\ln x = \frac{1}{2}$	vi. $\log_x\left(\frac{81}{16}\right) = 4$

Λύση: (Ασκ: 2/173)

i.

$$\log_x 1000 = 3 \iff x^3 = 1000 \iff x = 10 \quad (x > 0,\ x \neq 1).$$

ii.

$$\log_5 125 = x \iff 5^x = 125 = 5^3 \iff x = 3.$$

iii.

$$\log_3 x = 4 \iff x = 3^4 = 81.$$

iv.

$$\ln\left(\tfrac{1}{e^3}\right) = \ln(e^{-3}) = -3 \iff x = -3.$$

v.

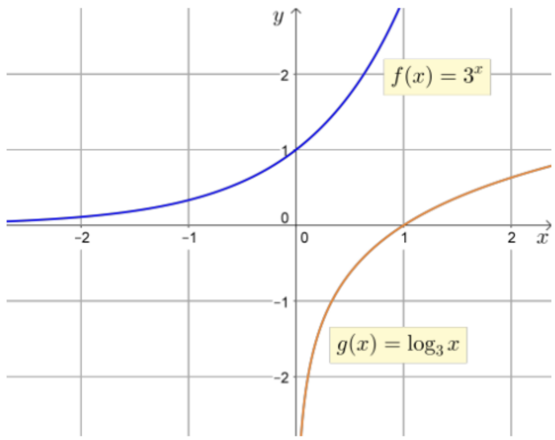
$$\ln x = \tfrac{1}{2} \iff x = e^{1/2} = \sqrt{e}\ (> 0).$$

vi.

$$\log_x\left(\tfrac{81}{16}\right) = 4 \iff x^4 = \tfrac{81}{16} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^4 \iff x = \tfrac{3}{2} \quad (x > 0,\ x \neq 1).$$

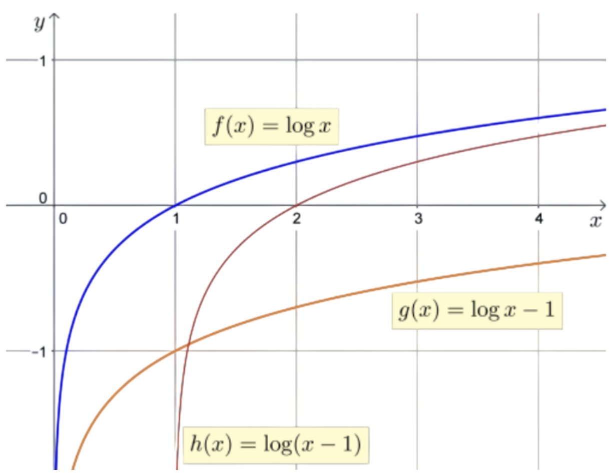
16. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = 3^x$ και $g(x) = \log_3 x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση: (Ασκ: 1/177)



17. Να παραστήσετε γραφικά, τις $f(x) = \log x$, $g(x) = \log x - 1$ και $h(x) = \log(x-1)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

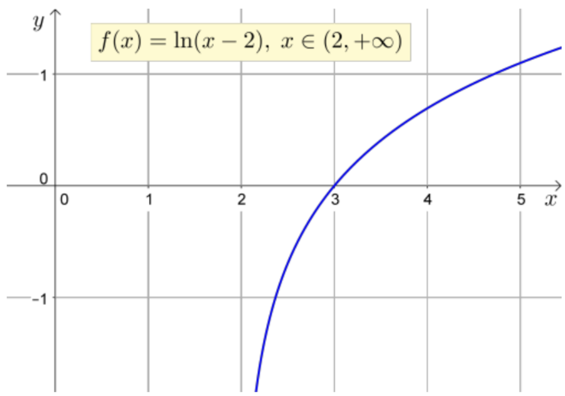
Λύση: (Ασκ: 2/177)



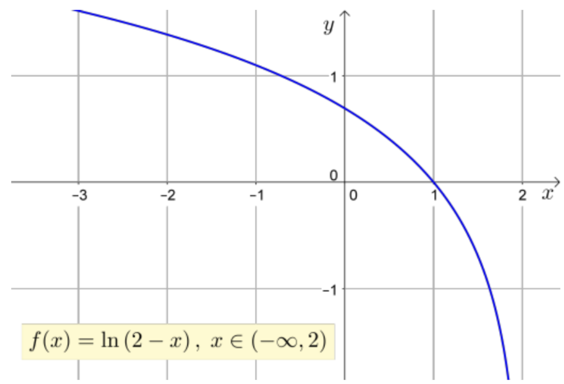
18. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων, αφού βρείτε πρώτα το πεδίο ορισμού τους:

i. $y = \ln(x-2)$ ii. $y = \ln(2-x)$ iii. $y = 3 + \ln x$

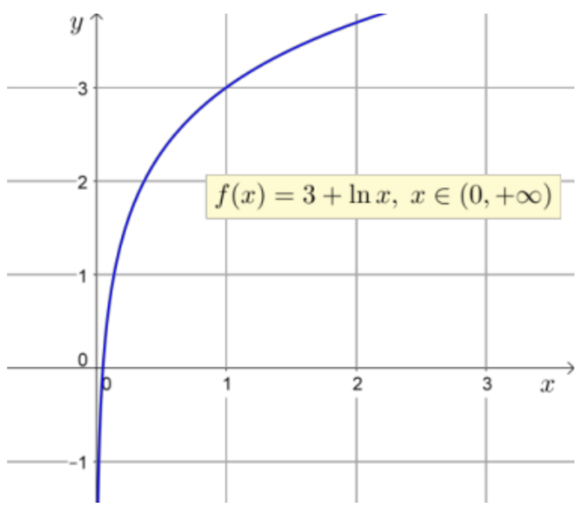
Λύση: (Ασκ: 3/177)



i.



ii.



iii.

19. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log_{x+1}(2-5x)$.

Λύση: (Ασκ: 4/177)

$$\text{Για να ορίζεται } \log_{x+1}(2-5x): \quad \begin{cases} 2-5x>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1. \end{cases}$$

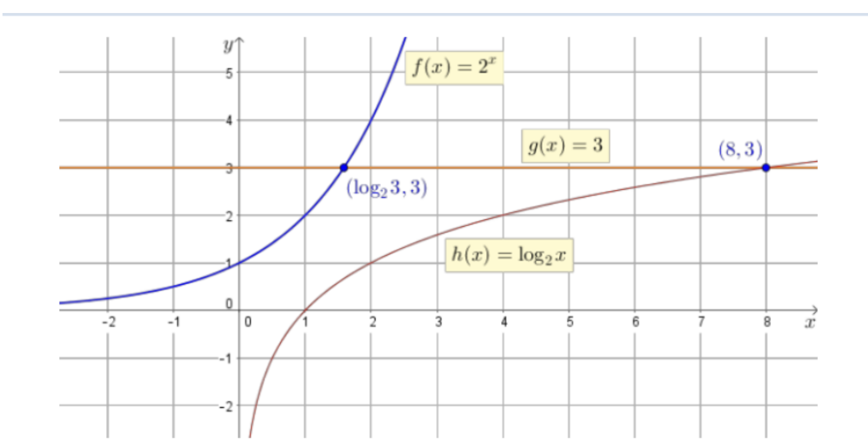
$$2-5x>0 \iff x<\tfrac{2}{5}, \qquad x+1>0 \iff x>-1, \qquad x+1\neq 1 \iff x\neq 0.$$

$$\implies \quad D_f = (-1,\tfrac{2}{5})\setminus\{0\} = (-1,0)\cup(0,\tfrac{2}{5}).$$

20. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $h(x) = \log_2 x$ και $g(x) = 3$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

i. Να βρείτε το σημείο τομής των f και g.
ii. Να βρείτε το σημείο τομής των h και g.
iii. Να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές των f και h δεν έχουν σημεία τομής.

Λύση: (Ασκ: 4/177)



i. Τομή f και g: λύση της $2^x = 3$.

$$2^x = 3 \iff x = \log_2 3.$$

Άρα το σημείο τομής είναι $\big(\log_2 3,\, 3\big)$.

ii. Τομή h και g: λύση της $\log_2 x = 3$.

$$\log_2 x = 3 \iff x = 2^3 = 8.$$

Άρα το σημείο τομής είναι $(8,\, 3)$.

iii. Οι f και h είναι *αντίστροφες* ($h = f^{-1}$), συνεπώς αν τέμνονταν, θα ικανοποιούσαν

$$2^x = x.$$

Δείχνουμε ότι η εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$:

- Αν $x \le 0$, τότε $2^x > 0$ και $x \le 0 \Rightarrow 2^x - x \ge 2^x > 0$.

- Αν $0 < x < 1$, τότε $2^x > 1 > x$.

- Αν $x \ge 1$, αποδεικνύεται επαγωγικά ότι $2^x \ge x + 1 > x$ για κάθε ακέραιο $x \ge 1$, ενώ για ενδιάμεσες τιμές ισχύει 2^x συνεχώς $> x$.

$$\Rightarrow\ 2^x > x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \implies \text{καμία τομή } f \text{ και } h.$$

Σχόλια για τη γραφική:

- Οι γραφικές των f και h είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

- Η $g(x) = 3$ είναι οριζόντια ευθεία και τέμνει την f στο $\big(\log_2 3, 3\big)$ και την h στο $(8, 3)$ (όπως φαίνεται και στο σχήμα).

21. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

i. $\dfrac{\log 1000}{\log 100}$ ii. $\log_{1/2}\sqrt{2}$ iii. $\log\left(\frac{1}{100}\right)\cdot\log\sqrt{10}$

iv. $\log 40+\log 25$ v. $\dfrac{\log 16}{\log 15-\log 30}$ vi. $\dfrac{\log_3 4\cdot\log_3 9}{\log_3\left(\frac{1}{4}\right)}$

vii. $\dfrac{3\log 2-\log 24}{\log 3+\log 27}$ viii. $\dfrac{\log 2+\log 500}{\log_3 3+\log_3 27}$

Λύση: (Ασκ: 1/180)

i.

$$\frac{\log 1000}{\log 100}=\frac{\log(10^3)}{\log(10^2)} \qquad \big(\text{ιδιότητα } \log a^k=k\log a\big)$$
$$=\frac{3\log 10}{2\log 10}=\frac{3}{2}.$$

ii.

$$\log_{1/2}\sqrt{2}=\frac{\ln\sqrt{2}}{\ln(1/2)} \qquad \big(\text{μεταβολή βάσης}\big)$$
$$=\frac{\ln 2^{1/2}}{\ln 2^{-1}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{-\ln 2}=-\tfrac{1}{2}.$$

iii.

$$\log\left(\tfrac{1}{100}\right)\cdot\log\sqrt{10}=\log(10^{-2})\cdot\log(10^{1/2})$$
$$=(-2\log 10)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\log 10\right)=-1\cdot(\log 10)^2/(\log 10)^2=-1.$$

iv.

$$\log 40+\log 25=\log(40\cdot 25) \qquad \big(\log ab=\log a+\log b\big)$$
$$=\log 1000=\log(10^3)=3.$$

v.

$$\frac{\log 16}{\log 15-\log 30}=\frac{\log 2^4}{\log\left(\frac{15}{30}\right)} \qquad \big(\log a^k=k\log a,\ \log a-\log b=\log\tfrac{a}{b}\big)$$
$$=\frac{4\log 2}{\log(1/2)}=\frac{4\log 2}{-\log 2}=-4.$$

vi.

$$\frac{\log_3 4 \cdot \log_3 9}{\log_3\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\log_3 4 \cdot \log_3 3^2}{\log_3 4^{-1}} = \frac{\log_3 4 \cdot 2}{-\log_3 4} = -2.$$

vii.

$$\begin{aligned}\frac{3\log 2 - \log 24}{\log 3 + \log 27} &= \frac{\log 2^3 - \log(3 \cdot 8)}{\log(3 \cdot 27)} = \frac{\log 8 - \log 24}{\log 81} \\ &= \frac{\log\left(\frac{8}{24}\right)}{\log 3^4} = \frac{\log(1/3)}{4\log 3} = \frac{-\log 3}{4\log 3} = -\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

viii.

$$\begin{aligned}\frac{\log 2 + \log 500}{\log_3 3 + \log_3 27} &= \frac{\log(2 \cdot 500)}{1+3} \qquad \big(\log_3 3 = 1,\ \log_3 27 = 3\big) \\ &= \frac{\log 1000}{4} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

22. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $\log_2(x+y) = \log_2 x + \log_2 y, \quad x, y > 0$

ii. $(\log x)^2 = 2\log x, \quad x > 0,\ x \neq 1$

iii. $e^{-\ln 2} = \dfrac{1}{2}$

iv. $\log 2 + \log 5 = 1$

v. $\dfrac{\log_3 x}{\log_3 y} = \log_3 x - \log_3 y, \quad x, y > 0,\ y \neq 1$

Λύση: (Ασκ: 2/180)

i. ΛΑΘΟΣ. Ισχύει $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$, όχι $\log_2(a+b)$. Π.χ. για $x = y = 1$: $\log_2(x+y) = \log_2 2 = 1$, ενώ $\log_2 x + \log_2 y = 0 + 0 = 0$.

ii. ΛΑΘΟΣ. Η σχέση θα ίσχυε μόνο όταν $(\log x)^2 - 2\log x = 0 \Rightarrow \log x \in \{0, 2\} \Rightarrow x \in \{1, 100\}$ (με βάση 10). Εφόσον ζητείται ως ταυτότητα για όλα τα $x > 0,\ x \neq 1$, είναι ψευδής (π.χ. $x = 10$: $1 \neq 2$).

iii. ΣΩΣΤΟ. $e^{-\ln 2} = e^{\ln(2^{-1})} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

iv. ΣΩΣΤΟ. (Θεωρούμε log τον δεκαδικό.) $\log 2 + \log 5 = \log(2 \cdot 5) = \log 10 = 1$.

v. ΛΑΘΟΣ. Μεταβολή βάσης: $\dfrac{\log_3 x}{\log_3 y} = \dfrac{\ln x}{\ln y}$, ενώ $\log_3 x - \log_3 y = \log_3\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Π.χ. $x = y = 3$: αριστερά $= 1$, δεξιά $= 0$.

23. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

i. $e^{\,2\ln x}$ ii. $2^{\,1+\log_2 6}$ iii. $3^{\,2\log_3 4 - \log_3 \sqrt{2}}$

Λύση: (Ασκ: 3/180)

i. (με $x > 0$)

$$e^{\,2\ln x} = e^{\,\ln x^2} = x^2.$$

ii.

$$2^{\,1+\log_2 6} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 6} = 2 \cdot 6 = 12.$$

iii.

$$3^{\,2\log_3 4 - \log_3 \sqrt{2}} = 3^{\,\log_3 4^2 - \log_3 2^{1/2}} = 3^{\,\log_3\left(\frac{16}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{16}{\sqrt{2}} = 2^{4-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}} = 8\sqrt{2}.$$

24. Να γράψετε ως *ένα* λογάριθμο τις πιο κάτω παραστάσεις:

i. $2\log(x+1) - \log x$ ii. $\frac{1}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\ln x$ iii. $\log_2 x - \log_2 y + 4$

Λύση: (Ασκ: 4/180)

i. (πεδ. ορ.: $x > 0$)

$$2\log(x+1) - \log x = \log\big((x+1)^2\big) - \log x = \log\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right).$$

ii. (πεδ. ορ.: $x > 0$)

$$\tfrac{1}{2}\ln(x+3) - \tfrac{1}{2}\ln x = \tfrac{1}{2}\ \ln\!\left(\frac{x+3}{x}\right) = \ln\!\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right).$$

iii. (πεδ. ορ.: $x > 0,\ y > 0$)

$$\log_2 x - \log_2 y + 4 = \log_2 x - \log_2 y + \log_2 16 = \log_2\!\left(\frac{16\,x}{y}\right).$$

25. Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$:

i. $e^{2\ln x} + 10^{\log 7} + \ln e = x^2 + 8$

ii. $\ln e^{2x+1} + 10^{2\log x} + \log 1 > 0$

Λύση: (Ασκ: 5/180)

i.

$$e^{2\ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2, \qquad 10^{\log 7} = 7, \qquad \ln e = 1$$
$$\Rightarrow\ e^{2\ln x} + 10^{\log 7} + \ln e = x^2 + 7 + 1 = x^2 + 8.$$

ii.

$$\ln e^{2x+1} = 2x+1, \qquad 10^{2\log x} = 10^{\log x^2} = x^2, \qquad \log 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ \ln e^{2x+1} + 10^{2\log x} + \log 1 = (2x+1) + x^2 + 0 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0\ \ (\text{για κάθε } x > 0).$$

26. Το σημείο $M(a,\beta)$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon) :\ y = 3x+1$. Αν $a = \log\lambda$ και $\beta = \log\mu$, να αποδείξετε ότι $\mu = 10\lambda^3$, όπου $\mu, \lambda > 0$.

Λύση: (Ασκ: 6/180)

$$M(a,\beta) \in (\varepsilon) :\ y = 3x+1 \implies \beta = 3a+1.$$

Με $a = \log\lambda,\ \beta = \log\mu$ (δεκαδικοί λογάριθμοι):

$$\log\mu = 3\log\lambda + 1 = \log\lambda^3 + \log 10 = \log(10\lambda^3).$$

Επομένως

$$\mu = 10\lambda^3 \quad (\mu, \lambda > 0).$$

27. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Λύση: (Ασκ: 7/180)

Πεδίο ορισμού.

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ ορίζεται} \iff \frac{1-x}{1+x} > 0 \text{ και } 1+x \neq 0.$$

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \iff \begin{cases} 1-x>0 \\ 1+x>0 \end{cases} \quad (\text{ομόσημα}) \iff -1 < x < 1.$$

(Η περίπτωση $1-x<0$ και $1+x<0$ είναι αδύνατη.)

$$\implies \quad D_f = (-1,1).$$

Ιδιότητα περιττότητας.

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left[\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}\right] = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x),$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

28. Να αποδείξετε ότι, για ακέραιο $\nu \geq 2$,

$$\log\left(1-\tfrac{1}{2}\right) + \log\left(1-\tfrac{1}{3}\right) + \log\left(1-\tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \log\left(1-\tfrac{1}{\nu}\right) = -\log\nu.$$

Λύση: (Ασκ: 8/180)

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\nu} \log\left(1-\tfrac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{\nu} \log\left(\tfrac{k-1}{k}\right) = \log\prod_{k=2}^{\nu} \tfrac{k-1}{k} \\ &= \log\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdots\tfrac{\nu-1}{\nu}\right) = \log\left(\tfrac{1}{\nu}\right) = -\log\nu.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήθηκε ότι $\log ab = \log a + \log b$ και $\log a^m = m\log a$.

29. Να υπολογίσετε, χωρίς υπολογιστική μηχανή, τις πιο κάτω παραστάσεις:

i. $\big(\log_5 4\big) \cdot \big(\log_4 5\big)$ ii. $\dfrac{\log_3 4}{\log_9 16}$

Λύση: (Ασκ: 1/183)

i.
$$\big(\log_5 4\big) \cdot \big(\log_4 5\big) = \log_5 4 \cdot \frac{1}{\log_5 4} = 1 \quad (\text{διότι } \log_a b = \tfrac{1}{\log_b a}).$$

ii.
$$\frac{\log_3 4}{\log_9 16} = \frac{\log_3(2^2)}{\dfrac{\log_3 16}{\log_3 9}} = \frac{2\log_3 2}{\dfrac{\log_3(2^4)}{\log_3(3^2)}} = \frac{2\log_3 2}{\dfrac{4\log_3 2}{2}} = \frac{2\log_3 2}{2\log_3 2} = 1.$$

30. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x > 0$, ισχύει:

i. $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x, \quad 0 < a \neq 1$

ii. $\log_a \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma a = 1, \quad a, \beta, \gamma > 0,\ a, \beta, \gamma \neq 1$

Λύση: (Ασκ: 2/183)

i.
$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\ln x}{\ln\big(\frac{1}{a}\big)} = \frac{\ln x}{-\ln a} = -\frac{\ln x}{\ln a} = -\log_a x.$$

ii.
$$\log_a \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma a = \frac{\ln \beta}{\ln a} \cdot \frac{\ln \gamma}{\ln \beta} \cdot \frac{\ln a}{\ln \gamma} = 1.$$

31. Να υπολογίσετε την τιμή του x, ώστε να ισχύει η σχέση

$$(\log_3 a)\,(\log_a 2a)\,(\log_{2a} x) = \log_a a^2, \qquad a > 0,\ a \neq 1.$$

Λύση: (Ασκ: 3/183)

$$\log_a a^2 = 2.$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\log_b c \cdot \log_c d = \log_b d$ (με $b = 3,\ c = a,\ d = 2a$):

$$(\log_3 a)(\log_a 2a) = \log_3(2a).$$

Άρα η εξίσωση γράφεται

$$\log_3(2a) \cdot \log_{2a} x = 2.$$

Εφαρμόζοντας ξανά $\log_b c \cdot \log_c d = \log_b d$ (με $b = 3,\ c = 2a,\ d = x$):

$$\log_3 x = 2 \iff x = 3^2 = 9.$$

Σημείωση: Για να ορίζεται το $\log_{2a} x$ απαιτείται $2a > 0$ και $2a \neq 1$ (δηλ. $a > 0$ και $a \neq \frac{1}{2}$), πέρα από $a \neq 1$.

32. Αν $\log 2 = a$ και $\log 5 = \beta$, να βρείτε συναρτήσει των a, β τους λογαρίθμους:

i. $\log 20$ ii. $\log_{25} 4$ iii. $\log\left(\frac{4}{125}\right)$

Λύση: (Ασκ: 4/183)

i.

$$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = a + 1.$$

ii.

$$\log_{25} 4 = \frac{\log 4}{\log 25} = \frac{\log(2^2)}{\log(5^2)} = \frac{2\log 2}{2\log 5} = \frac{a}{\beta}.$$

iii.

$$\log\left(\frac{4}{125}\right) = \log 4 - \log 125 = \log(2^2) - \log(5^3) = 2a - 3\beta.$$

33. Να αποδείξετε ότι, για $N>0,\ k>0,\ a>0,\ ak\neq 1$,

$$\frac{\log_a N}{\log_{ak} N} = 1+\log_a k.$$

Λύση: (Ασκ: 5/183)

$$\log_{ak} N = \frac{\ln N}{\ln(ak)} = \frac{\ln N}{\ln a+\ln k}.$$

Άρα

$$\frac{\log_a N}{\log_{ak} N} = \frac{\frac{\ln N}{\ln a}}{\frac{\ln N}{\ln a+\ln k}} = \frac{\ln a+\ln k}{\ln a} = 1+\frac{\ln k}{\ln a} = 1+\log_a k.$$

34. Αν $\log_8 x = \frac{1}{2}a$ και $\log_2(2x) = a+4$, να υπολογίσετε την τιμή του x.

Λύση: (Ασκ: 6/183)

$$\log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 x}{3} = \frac{a}{2} \ \Rightarrow\ \log_2 x = \frac{3a}{2}.$$

$$\log_2(2x) = 1+\log_2 x = a+4 \ \Rightarrow\ \log_2 x = a+3.$$

$$\frac{3a}{2} = a+3 \ \Rightarrow\ \frac{a}{2} = 3 \ \Rightarrow\ a=6.$$

$$\log_2 x = a+3 = 9 \ \Rightarrow\ x = 2^9 = 512.$$

35. Αν a,β,γ είναι οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\widehat{A}=90^\circ$ (οπότε a είναι η υποτείνουσα) και $a+\beta\neq 1,\ a-\beta\neq 1$, να αποδείξετε ότι

$$\log_{(a+\beta)}\gamma \ +\ \log_{(a-\beta)}\gamma \ =\ 2\,\log_{(a+\beta)}\gamma\cdot\log_{(a-\beta)}\gamma.$$

Λύση: (Ασκ: 7/183)

Θέτουμε
$$x = \log_{a+\beta}\gamma, \qquad y = \log_{a-\beta}\gamma$$
(ορίζονται επειδή $a \pm \beta > 0$ και $\neq 1$). Θέλουμε να δείξουμε $x + y = 2xy$, που ισοδύναμα γράφεται
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2.$$
Επειδή $\dfrac{1}{\log_b c} = \log_c b$, έχουμε
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_\gamma(a+\beta) + \log_\gamma(a-\beta) = \log_\gamma\big((a+\beta)(a-\beta)\big) = \log_\gamma(a^2-\beta^2).$$
Στο ορθογώνιο τρίγωνο, με a υποτείνουσα, από Πυθαγόρειο:
$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 \;\;\Rightarrow\;\; a^2 - \beta^2 = \gamma^2.$$
Άρα
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_\gamma(\gamma^2) = 2,$$
οπότε $x + y = 2xy$.

36. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

i. $\log(x+1) = 2$

ii. $2\log(x-2) = \log(x+1) + \log(x-4)$

iii. $\log_2(3x-2) - \log_2 x = 1$

iv. $\log[\log(2x^2+x-11)] = 0$

v. $\log_4 x + \log_2 x = 6$

vi. $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

Λύση: (Ασκ: 1/191)

i.
$$x + 1 = 10^2 = 100 \;\Rightarrow\; x = 99 \qquad (x > -1).$$

ii. (Π.Ο.: $x > 4$)
$$2\log(x-2) = \log\big((x-2)^2\big), \quad \log(x+1) + \log(x-4) = \log\big((x+1)(x-4)\big).$$
$$(x-2)^2 = (x+1)(x-4) \;\Rightarrow\; x = 8.$$

iii. (Π.Ο.: $x > \frac{2}{3}$)

$$\log_2\left(\frac{3x-2}{x}\right) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{3x-2}{x} = 2 \;\Rightarrow\; x = 2.$$

iv.

$$\log[\log(2x^2+x-11)] = 0 \;\Rightarrow\; \log(2x^2+x-11) = 1 \;\Rightarrow\; 2x^2+x-11 = 10.$$

$$2x^2+x-21 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1\pm 13}{4} \;\Rightarrow\; x = 3,\; -\tfrac{7}{2}.$$

v.

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 x \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\log_2 x = 6 \;\Rightarrow\; \log_2 x = 4 \;\Rightarrow\; x = 16 \quad (x>0).$$

vi. (Θέτω $t = \log x$, άρα $t \geq 0$ και $x > 0$)

$$\log\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}\log x = \tfrac{t}{2} = \sqrt{t}.$$

$$\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{2} - 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{t} = 0 \text{ ή } 2 \;\Rightarrow\; t = 0 \text{ ή } 4.$$

$$x = 10^t = 1 \text{ ή } 10000.$$

37. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

i. $\log_5 x - 4\log_x 5 = 3$

ii. $\log_3\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$

iii. $9^{\log x} - 12\cdot 3^{\log x} + 27 = 0$

iv. $\log_2\left(9^{x^{-1}} + 7\right) = 2 + \log_2\left(3^{x^{-1}} + 1\right)$

v. $e^{5x-1} = 4$

vi. $x^{\log x} = 10$

Λύση: (Ασκ: 2/191)

i. Θέτω $t = \log_5 x$. Τότε $\log_x 5 = \frac{1}{t}$.

$$t - \frac{4}{t} = 3 \;\Rightarrow\; t^2 - 3t - 4 = 0 \;\Rightarrow\; t = 4 \text{ ή } -1.$$

$$x = 5^4 = 625 \quad \text{ή} \quad x = 5^{-1} = \tfrac{1}{5}.$$

ii. Θέτω $t = \log_3 x$.

$$\log_3\bigl(\tfrac{3}{x}\bigr) = \log_3 3 - \log_3 x = 1 - t.$$

Άρα

$$(1-t) + t^2 = 1 \;\Rightarrow\; t^2 - t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \text{ ή } 1.$$

$$x = 3^0 = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3^1 = 3.$$

iii. Θέτω $t = \log x$.

$$9^t - 12 \cdot 3^t + 27 = 0 \;\Rightarrow\; (3^2)^t - 12 \cdot 3^t + 27 = 0.$$

$$(3^t)^2 - 12 \cdot 3^t + 27 = 0.$$

Θέτω $u = 3^t > 0$:

$$u^2 - 12u + 27 = 0 \;\Rightarrow\; u = 9 \text{ ή } 3.$$

$$3^t = 9 \;\Rightarrow\; t = 2 \;\Rightarrow\; x = 100, \qquad 3^t = 3 \;\Rightarrow\; t = 1 \;\Rightarrow\; x = 10.$$

iv. Θέτω $y = \frac{1}{x}$.

$$\log_2(9^y + 7) = 2 + \log_2(3^y + 1).$$

$$\log_2(9^y + 7) = \log_2 4 + \log_2(3^y + 1) = \log_2\bigl(4(3^y + 1)\bigr).$$

$$9^y + 7 = 4(3^y + 1) \;\Rightarrow\; 9^y - 4 \cdot 3^y + 3 = 0.$$

Θέτω $u = 3^y > 0$:

$$u^2 - 4u + 3 = 0 \;\Rightarrow\; u = 3 \text{ ή } 1.$$

$$3^y = 3 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\Rightarrow\; x = 1, \qquad 3^y = 1 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; x \to \infty.$$

Λύση: $x = 1$.

v.

$$e^{5x-1} = 4 \;\Rightarrow\; 5x - 1 = \ln 4 \;\Rightarrow\; x = \frac{1 + \ln 4}{5}.$$

vi.

$$x^{\log x} = 10 \;\Rightarrow\; \log\bigl(x^{\log x}\bigr) = \log 10 \;\Rightarrow\; (\log x)^2 = 1.$$

$$\log x = \pm 1 \;\Rightarrow\; x = 10 \text{ ή } \tfrac{1}{10}.$$

38. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

i. $\begin{cases} xy = 8 \\ 2\log x = \log y \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x + \log y = 3 \\ 10^x = y - 90 \end{cases}$

Λύση: (Ασκ: 3/191)

i.

$$2\log x = \log y \;\Rightarrow\; \log y = \log x^2 \;\Rightarrow\; y = x^2 \quad (x > 0).$$
$$xy = 8 \;\Rightarrow\; x \cdot x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x^3 = 8 \;\Rightarrow\; x = 2, \quad y = 4.$$

ii.

$$y = 10^x + 90 \quad \Rightarrow \quad x + \log(10^x + 90) = 3.$$

Η $x \mapsto x$ είναι γνήσια αύξουσα και η $x \mapsto \log(10^x + 90)$ επίσης (σύνθεση αύξουσων), άρα το άθροισμα είναι γνήσια αύξον· συνεπώς η λύση είναι μοναδική.

$$x = 1 \;\Rightarrow\; 1 + \log(100) = 1 + 2 = 3 \quad (\text{ισχύει}) \;\Rightarrow\; y = 10^1 + 90 = 100.$$

Άρα η λύση είναι $(x, y) = (1, 100)$.

39. Να βρείτε για ποιες τιμές του t η εξίσωση

$$x^2 - x\log t + 3\log t - 8 = 0$$

έχει διπλή λύση.

Λύση: (Ασκ: 4/191)

Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς x (με $t > 0$). Για να έχει διπλή ρίζα απαιτείται

$$\Delta = (\log t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3\log t - 8) = 0$$
$$\iff (\log t)^2 - 12\log t + 32 = 0$$
$$\iff \log t = 4 \text{ ή } \log t = 8$$
$$\iff t = 10^4 \text{ ή } t = 10^8.$$

(Τότε η διπλή ρίζα είναι $x = \dfrac{\log t}{2}$, δηλαδή $x = 2$ ή $x = 4$, αντίστοιχα.)

40. Να απαντήσετε στα πιο κάτω,

i. Να αποδείξετε ότι $\log 2 = 1 - \log 5$

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $y = (1 - \log 5)\, x$ και της καμπύλης $y = \log(2^x + x - 41)$.

Λύση: (Ασκ: 5/191)

i.
$$1 - \log 5 = \log 10 - \log 5 = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 2.$$

ii. Χρησιμοποιούμε το (i): $1 - \log 5 = \log 2$. Τότε η ευθεία γράφεται $y = \log 2 \cdot x = \log(2^x)$.

Στα σημεία τομής ισχύει
$$\log(2^x) = \log(2^x + x - 41).$$

Εφόσον οι λογάριθμοι έχουν την ίδια βάση και τα επιχειρήματα είναι θετικά, συμπεραίνουμε

$$2^x = 2^x + x - 41 \implies x - 41 = 0 \implies x = 41.$$

Ο έλεγχος πεδίου ορισμού: $2^{41} + 41 - 41 = 2^{41} > 0$ (εντάξει). Άρα
$$y = (1 - \log 5) \cdot 41 = \log 2 \cdot 41 = 41 \log 2.$$

Συνεπώς το σημείο τομής είναι
$$(41,\ 41 \log 2).$$

41. Να αποδείξετε ότι $5^{\log x} = x^{\log 5}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $5^{\log x} = 5 - 4x^{\log 5}$.

Λύση: (Ασκ: 6/191)

Απόδειξη ταυτότητας.

$$5^{\log x} = 10^{(\log 5)(\log x)} = x^{\log 5} \quad (\text{χρησιμοποιούμε } a^{\log b} = b^{\log a} \text{ ή } c^{(\log_c a)(\log_c b)} = c^{(\log_c b)(\log_c a)}).$$

Λύση της εξίσωσης. Θέτουμε:

$$t = x^{\log 5}\ (>0).$$

Με την ταυτότητα, $5^{\log x} = x^{\log 5} = t$. Άρα

$$t = 5 - 4t \iff 5t = 5 \iff t = 1.$$

$$x^{\log 5} = 1 \iff x = 1 \quad (\text{εφόσον } x > 0 \text{ και } \log 5 \neq 0).$$

Τελική λύση: $x = 1$.

42. Αν ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\log y}{\log x} + 4 = 0,$$

να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις μεταβλητές x, y.

Λύση: (Ασκ: 7/191)

$$\frac{\ln y}{\ln x} = \frac{\log y}{\log x} = \log_x y \quad (x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0).$$

Θέτουμε $t = \log_x y$. Τότε

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \iff (t-2)^2 = 0 \iff t = 2.$$

Άρα

$$\log_x y = 2 \iff y = x^2 \quad (x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0).$$

43. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

i. $\log(x^2 - 4) < \log 3$ ii. $x^{\ln 81} \geq 6 + x^{\ln 9}$

Λύση: (Ασκ: 8/191)

i.

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2.$$

Επειδή η log (βάση 10) είναι γνήσια αύξουσα,

$$\log(x^2 - 4) < \log 3 \iff x^2 - 4 < 3 \iff x^2 < 7.$$

Συνδυάζοντας με το πεδίο:

$$x \in (-\sqrt{7}, -2)\ \cup\ (2, \sqrt{7}).$$

ii. (Π.Ο.: $x > 0$)

$$x^{\ln 81} \geq 6 + x^{\ln 9} \iff \left(x^{\ln 3}\right)^4 - \left(x^{\ln 3}\right)^2 - 6 \geq 0.$$

Θέτουμε $u = x^{\ln 3} > 0$:

$$u^4 - u^2 - 6 = (u^2 - 3)(u^2 + 2) \geq 0 \iff u^2 \geq 3 \iff u \geq \sqrt{3}.$$

$$x^{\ln 3} \geq 3^{1/2} \iff (\ln 3)\ln x \geq \tfrac{1}{2}\ln 3 \iff \ln x \geq \tfrac{1}{2} \iff x \geq \sqrt{e}.$$

Άρα

$$x \in [\sqrt{e},\, +\infty).$$

44. Το κόστος παραγωγής x μονάδων την ημέρα (σε χιλ. €) δίνεται από

$$K(x) = \log(2^x + 2 \cdot 3^x) - \log 178 + \log 81,$$

ενώ οι εισπράξεις (σε χιλ. €) από την πώληση των x μονάδων είναι

$$E(x) = x \log 3.$$

Αν όλες οι μονάδες που παράγονται είναι προπωλημένες, να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν ώστε $K(x) = E(x)$.

Λύση: (Ασκ: 1/195)

Θέλουμε $K(x) = E(x)$:

$$\log(2^x + 2 \cdot 3^x) - \log 178 + \log 81 = x \log 3 = \log 3^x.$$

Άρα, συνδυάζοντας λογαρίθμους,

$$\log\left(\frac{81}{178}\left(2^x + 2 \cdot 3^x\right)\right) = \log 3^x \implies \frac{81}{178}\left(2^x + 2 \cdot 3^x\right) = 3^x.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 178:

$$81 \cdot 2^x + 162 \cdot 3^x = 178 \cdot 3^x \implies 81 \cdot 2^x = 16 \cdot 3^x.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \implies x = 4.$$

Συνεπώς, πρέπει να παραχθούν 4 μονάδες.

45. Ο πληθυσμός των ακρίδων $P(t)$ (σε χιλιάδες) t ημέρες μετά τον ψεκασμό δίνεται από

$$P(t) = \kappa - \ln(t + \lambda), \qquad \kappa, \lambda > 0.$$

Τη στιγμή του ψεκασμού ήταν 2 χιλιάδες και δύο ημέρες αργότερα ήταν $(2 - \ln 3)$ χιλιάδες.

i. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ.

ii. Να υπολογίσετε τον πληθυσμό στην περιοχή $(e - 1)$ ημέρες μετά τον ψεκασμό.

iii. Να βρείτε σε πόσες ημέρες μετά τον ψεκασμό θα μηδενιστεί ο πληθυσμός.

Λύση: (Ασκ: 2/195)

i.

$$P(0) = \kappa - \ln\lambda = 2 \quad (1), \qquad P(2) = \kappa - \ln(2 + \lambda) = 2 - \ln 3 \quad (2).$$

Από (2)−(1):

$$-\ln(2 + \lambda) + \ln\lambda = -\ln 3 \iff \ln\left(\frac{\lambda}{2 + \lambda}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \implies \frac{\lambda}{2 + \lambda} = \frac{1}{3}.$$

$$3\lambda = 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 1, \qquad \kappa - \ln 1 = \kappa = 2.$$

ii.

$$P(e - 1) = \kappa - \ln((e - 1) + \lambda) = 2 - \ln e = 2 - 1 = 1 \quad (\text{χιλιάδα}).$$

iii.

$P(t) = 0 \iff \kappa - \ln(t + \lambda) = 0 \iff \ln(t + 1) = 2 \iff t + 1 = e^2 \implies t = e^2 - 1$ ημέρες.

(Αριθμητικά: $e^2 \approx 7.389 \Rightarrow t \approx 6.389$ ημέρες.)

46. Οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με τη (φαινομένη) λαμπρότητά τους. Οι ασθενέστεροι αστέρες με λαμπρότητα L_0 λέμε ότι έχουν μέγεθος 6. Κάθε άλλος αστέρας με λαμπρότητα L έχει μέγεθος

$$m = 6 - 2{,}5\log\left(\frac{L}{L_0}\right).$$

i. Να βρείτε το μέγεθος m του αστέρα που έχει λαμπρότητα $L = \sqrt[5]{100}\,L_0$.
ii. Να βρείτε πόσες φορές λαμπρότερος είναι ένας αστέρας $1^{ου}$ μεγέθους από έναν αστέρα $6^{ου}$ μεγέθους.

Λύση: (Ασκ: 3/195)

i.

$$m = 6 - 2{,}5\log\left(\frac{\sqrt[5]{100}\,L_0}{L_0}\right) = 6 - 2{,}5\log\left(100^{1/5}\right) = 6 - 2{,}5\cdot\frac{1}{5}\log 100 = 6 - 0{,}5\cdot 2 = 5.$$

ii. Για αστέρα $1^{ου}$ μεγέθους ισχύει $m = 1$:

$$1 = 6 - 2{,}5\log\left(\frac{L_1}{L_0}\right) \implies 2{,}5\log\left(\frac{L_1}{L_0}\right) = 5 \implies \log\left(\frac{L_1}{L_0}\right) = 2 \implies \frac{L_1}{L_0} = 10^2 = 100.$$

Άρα ένας αστέρας $1^{ου}$ μεγέθους είναι 100 φορές λαμπρότερος από έναν $6^{ου}$.

47. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

i.	$100\cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$	ii.	$\dfrac{1}{125^x} = 25^{2x-7}$
iii.	$4^{x-1} = 7$	iv.	$e^{-3\ln(2x)} = \dfrac{1}{27}$
v.	$2^{x-2} - 3^{x-3} = 2^{x-3} - 3^{x-4}$	vi.	$49^x - 6\cdot 4^x + 5\cdot 14^x = 0$
vii.	$3\cdot 21^x - 9\cdot 7^x + 3 = 3^x$	viii.	$2^x + 16\cdot 2^{-x} - 10 = 0$
ix.	$e^{3x} + 2e^x - 3e^{-x} = 0$	x.	$\log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$
xi.	$\log_2 x = \log_4\left(\dfrac{2-x}{3}\right)$	xii.	$\log x + \log_x 1000 = 4$
xiii.	$\ln^2 x - \ln x^2 - 8 = 0$	xiv.	$64^{\ln x} - 9\cdot 8^{\ln x} + 8 = 0$
xv.	$\log_2(9^x + 7) = 3 + \log_2 3^x$	xvi.	$(\sin x)^{\tan x} = (\cos x)^{\tan x},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$
xvii.	$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$	xviii.	$2^{\sin 2x + \cos x} = 4^{\,1-2\sin^2\frac{x}{2}}$

Λύση: (Ασκ: 1/200)

i. $100 \cdot 10^x = 10^{2+x}$, $\sqrt[x]{1000^5} = 10^{15/x} \Rightarrow x+2 = \frac{15}{x} \Rightarrow x^2+2x-15=0 \Rightarrow x = 3, -5$ $(x \neq 0)$.

ii. $(5^3)^{-x} = (5^2)^{2x-7} \Rightarrow -3x = 4x-14 \Rightarrow x = 2$.

iii. $4^{x-1} = 7 \Rightarrow x = 1 + \log_4 7$.

iv. $e^{-3\ln(2x)} = (2x)^{-3} = 3^{-3} \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ $(x > 0)$.

v. $2^{x-2} - 2^{x-3} = 3^{x-3} - 3^{x-4} \Rightarrow 2^{x-3} = 2 \cdot 3^{x-4} \Rightarrow x = 4$.

vi. Διαιρ.: $4^x \Rightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^{2x} + 5\left(\frac{7}{2}\right)^x - 6 = 0$. Θέτω $t = \left(\frac{7}{2}\right)^x > 0$: $t^2+5t-6=0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 0$.

vii. Θέτω $a = 3^x$, $b = 7^x$: $3ab - 9b + 3 - a = 0 \Rightarrow (a-3)(3b-1) = 0$.

Άρα $x = 1$ ή $7^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \log_7 \frac{1}{3} = -\log_7 3$.

viii. Θέτω $y = 2^x > 0$: $y + \frac{16}{y} - 10 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow y = 2, 8 \Rightarrow x = 1, 3$.

ix. Θέτω $t = e^x > 0$: $t^3 + 2t - \frac{3}{t} = 0 \Rightarrow t^4 + 2t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 0$.

x. $\log[(x-6)(x-7)] = \log 2$ με $x > 7 \Rightarrow (x-6)(x-7) = 2 \Rightarrow x^2 - 13x + 40 = 0 \Rightarrow x = 8$.

xi. $\log_2 x = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2-x}{3}\right) \Rightarrow \log_2 x^2 = \log_2\left(\frac{2-x}{3}\right)$. Με $0 < x < 2$: $3x^2 = 2 - x \Rightarrow 3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

xii. Θέτω $t = \log x$: $t + \frac{3}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1, 3 \Rightarrow x = 10, 1000$.

xiii. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 8 = 0$. Θέτω $u = \ln x$: $(u-4)(u+2) = 0 \Rightarrow x = e^4, e^{-2}$.

xiv. $x^{\ln 64} - 9x^{\ln 8} + 8 = 0$ και $\ln 64 = 2\ln 8$. Θέτω $v = x^{\ln 8} > 0$: $v^2 - 9v + 8 = 0 \Rightarrow v = 1, 8 \Rightarrow x = 1,\ e$.

xv. $\log_2(9^x + 7) = \log_2(8 \cdot 3^x) \Rightarrow 3^{2x} + 7 = 8 \cdot 3^x$. Θέτω $w = 3^x > 0$: $w^2 - 8w + 7 = 0 \Rightarrow w = 1, 7 \Rightarrow x = 0,\ \log_3 7$.

xvi. Στο $(0, \frac{\pi}{2})$, $\tan x > 0$. Ύψωση στη δύναμη $1/\tan x > 0$: $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

xvii. $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$. Θέτω $a = \sin^2 x$: $2^a + 2^{1-a} = 3$. Άρα $a = 0$ ή $a = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 0$ ή $\sin^2 x = 1$.

$$x = k\pi \quad \text{ή} \quad x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

xviii. $4^{1-2\sin^2 \frac{x}{2}} = (2^2)^{\cos x} = 2^{2\cos x}$. Άρα $2^{\sin 2x + \cos x} = 2^{2\cos x} \Rightarrow \sin 2x = \cos x$.

$$2\sin x \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x = 0 \quad \text{ή} \quad \sin x = \tfrac{1}{2}.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ή} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

48. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

i. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log x - 7} \leq \frac{125}{27}$ ii. $27^x + 12^x - 2 \cdot 18^x > 0$

iii. $x + \log(1 + 2^x) \leq x \log 5 + \log 6$ iv. $\ln(x + 20)\,(\ln x + 2) \geq 0$

Λύση: (Ασκ: 2/200)

i. $\dfrac{125}{27} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$. Η βάση $\frac{3}{5} \in (0,1)$ είναι φθίνουσα, άρα

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^{2\log x - 7} \leq \left(\tfrac{3}{5}\right)^{-3} \iff 2\log x - 7 \geq -3 \iff \log x \geq 2 \iff x \geq 100.$$

Λύση: $[100, \infty)$.

ii. Θέτω $t = 3^x > 0,\ s = 2^x > 0$.

$$27^x + 12^x - 2 \cdot 18^x = t^3 + ts^2 - 2st^2 = t\big(t^2 - 2st + s^2\big) = t(t-s)^2 > 0$$

εκτός από $x = 0$ όπου μηδενίζεται.

Λύση: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

iii. Θέτω $y = 2^x > 0$ και χρησιμοποιώ $\log(1/2) = -\log 2$:

$$x + \log(1+y) \le x\log 5 + \log 6 \iff \log\left(\frac{1+y}{6}\right) \le x\log\tfrac{1}{2} = -\log y.$$

Άρα

$$\log\left(\frac{y(1+y)}{6}\right) \le 0 \iff \frac{y(1+y)}{6} \le 1 \iff y^2 + y - 6 \le 0.$$

Με $y > 0$: $(y+3)(y-2) \le 0 \Rightarrow 0 < y \le 2 \Rightarrow 2^x \le 2 \Rightarrow x \le 1$.

Λύση: $(-\infty, 1]$.

iv. Πεδίο: απαιτείται $x > 0$ (ώστε να ορίζεται $\ln x$). Για $x > 0$ ισχύει $\ln(x+20) > 0$, άρα το πρόσημο του γινομένου είναι το πρόσημο του $\ln x + 2$:

$$\ln(x+20)(\ln x + 2) \ge 0 \iff \ln x + 2 \ge 0 \iff \ln x \ge -2 \iff x \ge e^{-2}.$$

Λύση: $[e^{-2}, \infty)$.

49. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

i. $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$

Λύση: (Ασκ: 3/200)

i. Θέτουμε $a = 2^x > 0,\ b = 2^y > 0$. Τότε

$$ab = 8, \qquad a + b = 6.$$

Άρα a, b είναι ρίζες της $t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow t = 2, 4$.

$$(a,b) = (4,2) \Rightarrow (x,y) = (2,1), \qquad (a,b) = (2,4) \Rightarrow (x,y) = (1,2).$$

Λύσεις: $(2,1)$ και $(1,2)$.

ii. Από $\log\sqrt{xy} = 1 \Rightarrow \sqrt{xy} = 10 \Rightarrow xy = 100$ (με $x > 0,\ y > 0$). Θέτουμε $t = \log_x y \Rightarrow \log_y x = \dfrac{1}{t}$. Τότε

$$t + \frac{1}{t} = 2 \ \Rightarrow\ (t-1)^2 = 0 \ \Rightarrow\ t = 1 \ \Rightarrow\ y = x.$$

Με $xy = 100$ παίρνουμε $x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ (δεκτό, $x \neq 1$), και $y = 10$.

Λύση: $(x, y) = (10, 10)$.

50. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)$

ii. $f(x) = \log_{4-x^2}\left(2^x - 1\right)$

Λύση: (Ασκ: 4/200)

i. Απαιτείται $\dfrac{3x-1}{x+2} > 0$ και $x \neq -2$.

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{3}, \qquad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

Μελέτη προσήμου στα $(-\infty, -2), (-2, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \infty)$:

$$\frac{3x-1}{x+2} > 0 \implies x \in (-\infty, -2) \ \cup \ \left(\tfrac{1}{3}, \infty\right).$$

Πεδίο ορισμού: $D_f = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

ii. Για $\log_a(b)$ απαιτούνται $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

$$\text{Βάση: } 4 - x^2 > 0 \ \Rightarrow \ -2 < x < 2, \qquad 4 - x^2 \neq 1 \ \Rightarrow \ x \neq \pm\sqrt{3}.$$

Ο αντιλογάριθμος $2^x - 1$ δεν επηρεάζει το πρόσημο της βάσης, αρκεί να είναι διάφορος του μηδενός.

$$\Rightarrow x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2).$$

Πεδίο ορισμού: $D_f = (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.

51. Αν $\log_8 x = \log_4 y$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y}$, με $x, y > 0$.

Λύση: (Ασκ: 5/200)

Θέτω $t = \log_8 x = \log_4 y$. Τότε

$$x = 8^{\,t} = 2^{3t}, \qquad y = 4^{\,t} = 2^{2t}.$$

Άρα

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = (2^{3t})^{1/3} = 2^t \quad \text{και} \quad \sqrt{y} = y^{1/2} = (2^{2t})^{1/2} = 2^t.$$

Επομένως $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y}$.

52. Αν $\log(a-\beta y) - \log a = x$, να αποδείξετε ότι $y = \dfrac{a}{\beta}\big(1-10^x\big)$. (θεωρούμε $a > 0,\ a-\beta y > 0,\ \beta \neq 0$)

Λύση: (Ασκ: 6/200)

$$\log(a-\beta y) - \log a = \log\left(\frac{a-\beta y}{a}\right) = x \ \Rightarrow\ \frac{a-\beta y}{a} = 10^x$$

$$1 - \frac{\beta y}{a} = 10^x \ \Rightarrow\ \frac{\beta y}{a} = 1 - 10^x \ \Rightarrow\ y = \frac{a}{\beta}\big(1-10^x\big).$$

53. Να αποδείξετε ότι:

i. $\ln\Big(\ \ln\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}\Big) = -\ln 8$

ii. $\ln\Big(\ \underbrace{\ln\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{e}}}}_{\nu \text{ ριζικά}}\ \Big) = -\nu \ln 2, \quad \nu \geq 3$

Λύση: (Ασκ: 7/200)

i. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}} = e^{1/8} \Rightarrow \ln\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}} = \ln(e^{1/8}) = \frac{1}{8}$. Άρα

$$\ln\Big(\ \ln\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}\Big) = \ln\Big(\tfrac{1}{8}\Big) = -\ln 8.$$

ii. Με ν διαδοχικά τετραγωνικές ρίζες παίρνουμε

$$\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{e}}}}_{\nu\ \text{ριζικά}} = e^{1/2^\nu} \ \Rightarrow\ \ln\Big(\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{e}}}}_{\nu}\Big) = \ln\big(e^{1/2^\nu}\big) = \frac{1}{2^\nu}.$$

Επομένως

$$\ln\Big(\ \ln\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{e}}}}_{\nu}\ \Big) = \ln\Big(\frac{1}{2^\nu}\Big) = -\nu\ln 2.$$

54. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι είναι περιττή.

Λύση: (Ασκ: 8/201)

Πεδίο. Απαιτείται $x+\sqrt{x^2+1}>0$. Επειδή $\sqrt{x^2+1}>|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$x+\sqrt{x^2+1}\ \geq\ \sqrt{x^2+1}-|x|\ >\ 0.$$

Άρα το επιχείρημα του ln είναι θετικό για κάθε x, επομένως

$$D_f=\mathbb{R}.$$

Περιττότητα.

$$f(-x) = \ln\big(-x+\sqrt{x^2+1}\big) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big) = -f(x),$$

διότι $\big(\sqrt{x^2+1}+x\big)\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)=1$. Άρα η f είναι περιττή.

55. Αν η ακολουθία (a_ν), $\nu\in\mathbb{N}$, με $a_\nu>0$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος, να δείξετε ότι η ακολουθία $(\ln a_\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}$, είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση: (Ασκ: 9/201)

Εφόσον (a_ν) είναι γ.π. με θετικούς όρους, υπάρχει λόγος $q>0$ ώστε

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = q \quad (\forall\,\nu\in\mathbb{N}).$$

Τότε

$$\ln a_{\nu+1} - \ln a_\nu = \ln\left(\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right) = \ln q,$$

που είναι σταθερό. Άρα η $(\ln a_\nu)$ έχει σταθερή διαφορά και είναι α.π.

Ισοδύναμα, επειδή $a_\nu = a_1 q^{\nu-1}$ με $a_1 > 0$, $q > 0$,

$$\ln a_\nu = \ln a_1 + (\nu - 1)\ln q,$$

δηλαδή α.π. με πρώτο όρο $\ln a_1$ και διαφορά $d = \ln q$.

56. Σε αριθμητική πρόοδο (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$, δίνεται ότι $a_1 = \log 2$ και $a_2 = \log 8$. Να δείξετε ότι το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $\Sigma_\nu = \nu^2 \log 2$.

Λύση: (Ασκ: 10/201)

Επειδή (a_ν) είναι α.π., η διαφορά d είναι σταθερή και $d = a_2 - a_1$. Έχουμε

$$a_1 = \log 2, \qquad a_2 = \log 8 = \log(2^3) = 3\log 2$$

(όλοι οι log στην ίδια βάση), άρα

$$d = a_2 - a_1 = (3\log 2) - (\log 2) = 2\log 2.$$

Ο γενικός όρος της α.π. είναι

$$a_\nu = a_1 + (\nu - 1)d = \log 2 + (\nu - 1)\cdot 2\log 2 = (2\nu - 1)\log 2.$$

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων είναι

$$\Sigma_\nu = \frac{\nu}{2}\big(a_1 + a_\nu\big) = \frac{\nu}{2}\Big(\log 2 + (2\nu - 1)\log 2\Big) = \frac{\nu}{2}\cdot(2\nu\log 2) = \nu^2\log 2.$$

Άρα $\Sigma_\nu = \nu^2 \log 2$.

57. Να αποδείξετε ότι

$$\ln\big(\text{εφ}\,3^\circ\big) + \ln\big(\text{εφ}\,6^\circ\big) + \ln\big(\text{εφ}\,9^\circ\big) + \cdots + \ln\big(\text{εφ}\,87^\circ\big) = 0.$$

Λύση: (Ασκ: 11/201)

Θέτουμε

$$S=\sum_{k=1}^{29}\ln\big(\text{εφ}\,(3k)^\circ\big).$$

Ισχύει η ταυτότητα

$$\text{εφ}\,(90^\circ-\theta)=\text{σφ}\,\theta=\frac{1}{\text{εφ}\,\theta},$$

άρα για κάθε $k=1,2,\ldots,14$:

$$\ln\big(\text{εφ}\,(3k)^\circ\big)+\ln\big(\text{εφ}\,(90^\circ-3k)^\circ\big)=\ln\Big(\text{εφ}\,(3k)^\circ\cdot\text{εφ}\,(90^\circ-3k)^\circ\Big)=\ln 1=0.$$

Ο μεσαίος όρος αντιστοιχεί στο $k=15$: $\text{εφ}\,45^\circ=1\Rightarrow\ln 1=0$. Όλοι οι όροι, λοιπόν, αθροίζονται σε μηδέν και $S=0$.

58. Δίνεται η εξίσωση $\log 2+\log\big(4^{x-2}+9\big)=1+\log\big(2^{x-2}+1\big)$. Αν x_1,x_2 οι λύσεις της εξίσωσης, με $x_1>x_2$:

i. Να σχηματίσετε γεωμετρική πρόοδο (a_ν) με $a_1=(x_2)^6$, $a_5=x_1$ και λόγο $\lambda>0$.

ii. Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου.

Λύση: (Ασκ: 12/201)

Όλοι οι log στην ίδια βάση. Το πεδίο ορισμού είναι $\mathbb{R}$, επειδή $4^{x-2}+9>0$ και $2^{x-2}+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\log 2+\log\big(4^{x-2}+9\big)-\log\big(2^{x-2}+1\big)=1\iff\log\left(\frac{2\big(4^{x-2}+9\big)}{2^{x-2}+1}\right)=\log 10.$$

Άρα

$$2\big(4^{x-2}+9\big)=10\big(2^{x-2}+1\big)\iff 4^{x-2}+9=5\cdot 2^{x-2}+5.$$

Θέτουμε $t=2^{x-2}>0$. Τότε $4^{x-2}=t^2$ και

$$t^2-5t+4=0\iff(t-1)(t-4)=0\implies t=1\text{ ή }t=4.$$

Οπότε $2^{x-2}=1\Rightarrow x=2$ ή $2^{x-2}=4\Rightarrow x=4$. Με $x_1>x_2$ παίρνουμε $x_1=4,\ x_2=2$.

i. Για τη γ.π. ζητείται $\lambda>0$ ώστε $a_1=(x_2)^6=2^6=64$ και $a_5=x_1=4$. Επειδή $a_5=a_1\lambda^4$, προκύπτει

$$64\,\lambda^4=4\implies\lambda^4=\frac{1}{16}\implies\lambda=\frac{1}{2}.$$

Άρα μια τέτοια γ.π. είναι

$$a_\nu=a_1\lambda^{\nu-1}=64\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}.$$

ii. Εφόσον $\lambda = \frac{1}{2} \in (0,1)$, το άθροισμα των απείρων όρων είναι

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-\lambda} = \frac{64}{1-\frac{1}{2}} = 128.$$

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \log_a x$.

i. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,3)$, να βρείτε το a και να την παραστήσετε γραφικά.

ii. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

Λύση: (Ασκ: 13/201)

i. Από το $A(2,3)$ έχουμε

$$3 = 2 + \log_a 2 \implies \log_a 2 = 1 \implies a = 2 \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

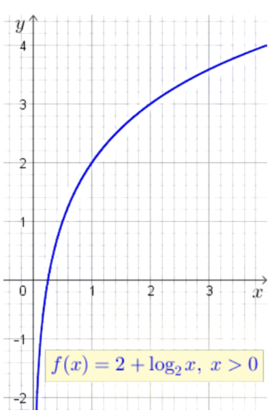
Άρα $f(x) = 2 + \log_2 x,\ D_f = (0, +\infty)$. Για τη γραφική παράσταση: $x = 0^+$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη, και χαρακτηριστικά σημεία

$$(1,2), \quad (2,3), \quad (4,4), \quad \text{μηδενισμός: } 2 + \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 2^{-2} = \tfrac{1}{4}.$$

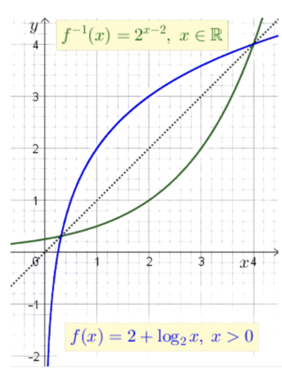
ii. Θέτουμε $y = 2 + \log_2 x \Rightarrow y - 2 = \log_2 x \Rightarrow x = 2^{y-2}$. Η αντίστροφη είναι

$$f^{-1}(x) = 2^{x-2}, \qquad D_{f^{-1}} = \mathbb{R},\ R_{f^{-1}} = (0, +\infty).$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Χαρακτηριστικά σημεία του f^{-1}: $(2,1),\ (3,2),\ (4,4)$.



i.



ii.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x$. Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση f είναι περιττή.

ii. ο αριθμός $4\sqrt{6}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Λύση: (Ασκ: 14/201)

i. Θέτουμε $a = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $b = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Τότε

$$ab = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3-2 = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{a}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = a^{-x} - b^{-x} = \frac{1}{a^x} - \frac{1}{b^x} = b^x - a^x = -(a^x - b^x) = -f(x).$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Για $x = 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(2) &= (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \\ &= (5+2\sqrt{6}) - (5-2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Επομένως $4\sqrt{6} \in f(\mathbb{R})$.

61. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{2^{x+1}+2^{x+2}-24}{4^x - 6\cdot 2^x + 8}.$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{6}{2^x-2}$.

Λύση: (Ασκ: 15/201)

i. Θέτουμε $t = 2^x > 0$. Τότε

$$4^x - 6\cdot 2^x + 8 = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4).$$

Άρα απαιτείται $(t-2)(t-4) \neq 0 \;\Rightarrow\; t \neq 2,\; t \neq 4$, δηλαδή $2^x \neq 2$ και $2^x \neq 4 \Rightarrow x \neq 1,\; x \neq 2$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

ii. Με $t = 2^x$ έχουμε

$$2^{x+1} + 2^{x+2} - 24 = 2^x(2+4) - 24 = 6 \cdot 2^x - 24 = 6(t-4).$$

Επομένως, για κάθε $x \in D_f$ (οπότε $t \neq 2, 4$),

$$f(x) = \frac{6(t-4)}{(t-2)(t-4)} = \frac{6}{t-2} = \frac{6}{2^x - 2}.$$

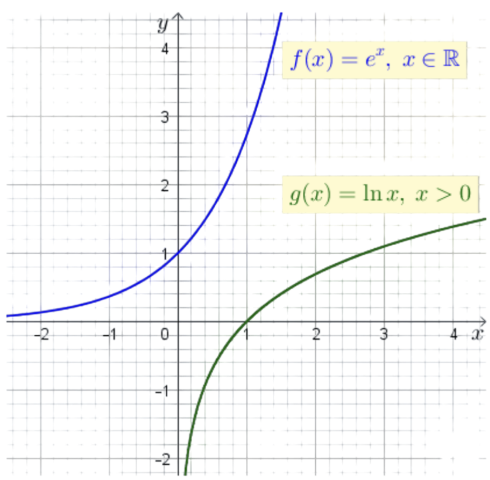
62. i. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$.

ii. Να βρείτε σημείο A της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x = 1$ και σημείο B της γραφικής παράστασης της g με τεταγμένη $y = 1$.

iii. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας $(\delta) : y = x$, ώστε το $AOB\Gamma$ να είναι ρόμβος.

Λύση: (Ασκ: 16/201)

i.



ii. Για $x = 1$: $A = (1, e)$. Για $y = 1$: $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$, άρα $B = (e, 1)$.

iii. Θέλουμε το τετράπλευρο $AOB\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο με ίσα διαδοχικά πλευρά (ρόμβος). Με $O = (0, 0)$, ο τέταρτος κορυφαίος σημείο παραλληλογράμμου είναι

$$\Gamma = A + B - O = A + B = (1 + e,\ e + 1).$$

Τότε Γ ικανοποιεί $y = x$ (διότι $e + 1 = 1 + e$), άρα $\Gamma \in (\delta)$. Επιπλέον

$$|AO| = \sqrt{1^2 + e^2} = |OB|, \qquad \overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}, \quad \overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma},$$

οπότε $AOB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαδοχικές πλευρές, δηλαδή ρόμβος. Συμπέρασμα: $\Gamma = (e+1,\ e+1)$.

63. Ο πληθυσμός της γης το 2009 υπολογίστηκε σε 6,78 δισ. ανθρώπους, με ποσοστό αύξησης 1,14% κάθε χρόνο. Αν θεωρήσουμε ότι συνεχίζει να αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό, ο πληθυσμός δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 6{,}78\,(1{,}0114)^{\,t-2009},$$

όπου $P(t)$ είναι ο πληθυσμός την t χρονιά. Να βρείτε ποια χρονιά ο πληθυσμός θα φτάσει τα 8,7 δισ. ανθρώπους.

Λύση: (Ασκ: 17/202)

Θέλουμε $P(t) = 8{,}7$:

$$6{,}78\,(1{,}0114)^{\,t-2009} = 8{,}7 \iff (1{,}0114)^{\,t-2009} = \frac{8{,}7}{6{,}78}.$$

Παίρνουμε λογάριθμο:

$$t - 2009 = \frac{\ln\left(\frac{8{,}7}{6{,}78}\right)}{\ln(1{,}0114)} \approx \frac{\ln(1{,}28318584)}{\ln(1{,}0114)} \approx 21{,}997.$$

Άρα $t \approx 2009 + 21{,}997 = 2030{,}997$. Αυτό αντιστοιχεί προς το *τέλος* του 2030, επομένως η πρώτη *ολόκληρη* χρονιά με $P(t) \geq 8{,}7$ είναι το 2031

64. Αν αφήσουμε το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου γεμάτου με βενζίνη ανοικτό, η βενζίνη εξατμίζεται με ρυθμό 20% ανά εβδομάδα. Η ποσότητα Q (σε λίτρα) που παραμένει στο δοχείο μετά από t εβδομάδες δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0\, e^{ct},$$

όπου Q_0 η αρχική ποσότητα της βενζίνης και c μία σταθερά.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες.

ii. Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

iii. Να δείξετε ότι μετά από 40 εβδομάδες μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

Λύση: (Ασκ: 18/202)

i. Κάθε εβδομάδα παραμένει το 80% της ποσότητας: $Q(t+1) = 0{,}8\,Q(t)$. Με $Q(t) = Q_0 e^{ct}$ παίρνουμε

$$Q(t+1) = Q_0 e^{c(t+1)} = e^c\,Q(t) \;\Rightarrow\; e^c = 0{,}8 \;\Rightarrow\; c = \ln(0{,}8) < 0.$$

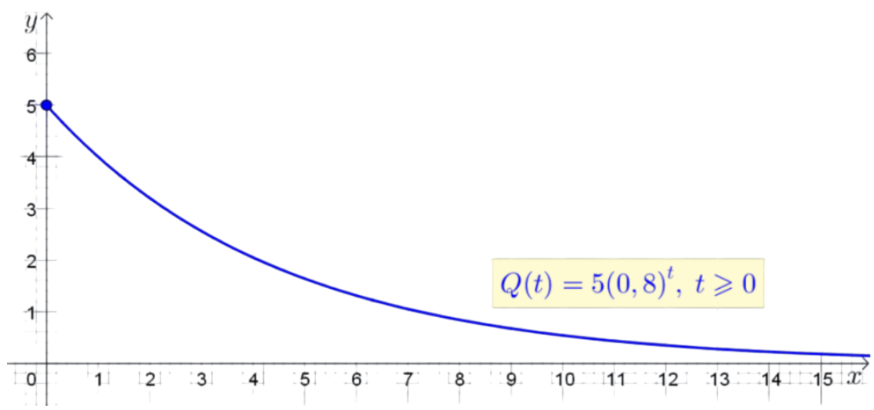
Άρα

$$Q(t) = Q_0\,e^{t\ln(0{,}8)} = Q_0\,(0{,}8)^t.$$

Επειδή το δοχείο είναι πεντάλιτρο και αρχικά γεμάτο, $Q_0 = 5$ και

$$Q(t) = 5\,(0{,}8)^t \qquad (t \geq 0).$$

ii.



iii. Υπολογίζουμε

$$Q(40) = 5\,(0{,}8)^{40} = 5 \cdot 0{,}0001329 = 0{,}000665 \text{ L} = 0{,}665 \text{ mL}.$$

Η ποσότητα είναι μικρότερη από 1 mL, πρακτικά μηδενική· άρα μετά από 40 εβδομάδες μένει μόνο η μυρωδιά.

65. Αν $\log_a \beta = \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma a \;\big(a, \beta, \gamma > 0,\; a \neq 1,\; \beta \neq 1,\; \gamma \neq 1\big)$, να αποδείξετε ότι

$$a = \beta \quad \text{ή} \quad a = \frac{1}{\beta}$$

Λύση: (Ασκ: 1/203)

Από τον κανόνα «αλυσίδας» των λογαρίθμων

$$\log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma a = \log_\beta a,$$

οπότε η δοθείσα ισότητα ισοδυναμεί με

$$\log_a \beta = \log_\beta a = \frac{1}{\log_a \beta}.$$

Θέτοντας $x = \log_a \beta$ παίρνουμε $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

$$x = 1 \Rightarrow \log_a \beta = 1 \Rightarrow \beta = a, \qquad x = -1 \Rightarrow \log_a \beta = -1 \Rightarrow \beta = a^{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{\beta}.$$

Άρα $a = \beta$ ή $a = \dfrac{1}{\beta}$.

66. Αν $\log_{12} 27 = a$, να βρείτε συναρτήσει του a τον αριθμό $\log_6 16$.

Λύση: (Ασκ: 2/203)

Θέτουμε $x = \ln 2,\ y = \ln 3$. Τότε

$$a = \log_{12} 27 = \frac{\ln 27}{\ln 12} = \frac{3y}{y + 2x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{3 - a}{2a}.$$

Ζητούμε:

$$\log_6 16 = \frac{\ln 16}{\ln 6} = \frac{4x}{x + y} = \frac{4\frac{x}{y}}{\frac{x}{y} + 1} = \frac{4\left(\frac{3-a}{2a}\right)}{\left(\frac{3-a}{2a}\right) + 1} = \frac{4(3 - a)}{3 + a}.$$

Άρα

$$\log_6 16 = \frac{4(3 - a)}{3 + a}$$

σε συνάρτηση του $a = \log_{12} 27$.

67. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \text{συν}\left(\log a + 2\kappa\pi \cdot \frac{\log x}{\log a}\right),$$

όπου $a > 0,\ a \neq 1$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε ότι $f(ax) = f(x)$ $(x > 0)$.

Λύση: (Ασκ: 3/203)

Για $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(ax) &= \text{συν}\left(\log a + 2\kappa\pi \cdot \frac{\log(ax)}{\log a}\right) \\ &= \text{συν}\left(\log a + 2\kappa\pi \cdot \frac{\log a + \log x}{\log a}\right) \\ &= \text{συν}\left(\big(\log a + 2\kappa\pi\big) + 2\kappa\pi \cdot \frac{\log x}{\log a}\right) \\ &= \text{συν}\left(2\kappa\pi + \left[\log a + 2\kappa\pi \cdot \frac{\log x}{\log a}\right]\right) \\ &= \text{συν}\left(\log a + 2\kappa\pi \cdot \frac{\log x}{\log a}\right) \quad (\text{επειδή } \text{συν}(\theta + 2\kappa\pi) = \text{συν}\,\theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Άρα $f(ax) = f(x)$.

68. Να απατνήσετε τα πιο κάτω,

i. Να δείξετε ότι $\log 2 = 1 - \log 5$.

ii. Να εκφράσετε τους $\log\left(\frac{125}{128}\right)$ και $\log\left(\frac{625}{512}\right)$ συναρτήσει του $\log 2$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3}{10} < \log 2 < \dfrac{4}{13}$.

Λύση: (Ασκ: 4/203)

(Όλοι οι $\log$ *στην ίδια βάση.)*

i. Από $10 = 2 \cdot 5$ έχουμε

$$\log 10 = \log(2 \cdot 5) = \log 2 + \log 5 \ \Rightarrow\ 1 = \log 2 + \log 5$$

άρα $\log 2 = 1 - \log 5$

ii.

$$\log\left(\tfrac{125}{128}\right) = \log 125 - \log 128 = 3\log 5 - 7\log 2 = 3(1-\log 2) - 7\log 2 = \ 3 - 10\log 2$$

$$\log\left(\tfrac{625}{512}\right) = \log 625 - \log 512 = 4\log 5 - 9\log 2 = 4(1-\log 2) - 9\log 2 = \ 4 - 13\log 2$$

iii. Επειδή $\frac{125}{128} < 1$, ισχύει $\log\left(\frac{125}{128}\right) < 0$.

Άρα $3 - 10\log 2 < 0 \Rightarrow \dfrac{3}{10} < \log 2$.

Επίσης $\frac{625}{512} > 1 \Rightarrow \log\left(\frac{625}{512}\right) > 0$.

Άρα $4 - 13\log 2 > 0 \Rightarrow \log 2 < \dfrac{4}{13}$. Συνδυάζοντας: $\dfrac{3}{10} < \log 2 < \dfrac{4}{13}$.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a(\log x)^4 + 8(\log x)^2\log(100x)$, με $a \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.

i. Αν $f(10) = 25$, να δείξετε ότι $a = 1$.

ii. Αν $a = 1$, να δείξετε ότι $f(x) = \big((\log x)^2 + 4\log x\big)^2$.

iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τετμημένων.

Λύση: (Ασκ: 5/203)

(Όλοι οι $\log$ *στην ίδια βάση, π.χ. δεκαδική.)*

i. $\log 10 = 1$, $\log(100\cdot 10) = \log 1000 = 3$. Άρα

$$f(10) = a\cdot 1^4 + 8\cdot 1^2\cdot 3 = a + 24.$$

Δίνεται $f(10) = 25 \Rightarrow a + 24 = 25 \Rightarrow a = 1$.

ii. Με $a = 1$ και $\log(100x) = \log 100 + \log x = 2 + \log x$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log x)^4 + 8(\log x)^2(2+\log x) \\ &= (\log x)^4 + 8(\log x)^3 + 16(\log x)^2 \\ &= \big((\log x)^2 + 4\log x\big)^2. \end{aligned}$$

iii. Τομή με x-άξονα: $f(x) = 0$.

$$\big((\log x)^2 + 4\log x\big)^2 = 0 \implies (\log x)^2 + 4\log x = 0 \implies \log x\big(\log x + 4\big) = 0.$$

Άρα $\log x = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $\log x = -4 \Rightarrow x = 10^{-4}$. Σημεία τομής:

$$(1, 0) \text{ και } \big(10^{-4},\, 0\big)$$

70. Να λύσετε στο διάστημα $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ την εξίσωση

$$\frac{1}{\log\big(1 + \text{συν}\, 2x\big)} = \log_{\text{ημ}\, 2x} 10.$$

Λύση: (Ασκ: 6/203)

Πεδίο. Για $x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ ισχύουν $\text{ημ}\, 2x > 0$ και $1 + \text{συν}\, 2x > 0$. Επιπλέον $\text{ημ}\, 2x \neq 1$ και $1 + \text{συν}\, 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$, ώστε οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

Με αλλαγή βάσης,

$$\log_{\text{ημ}\, 2x} 10 = \frac{\log 10}{\log(\text{ημ}\, 2x)} = \frac{1}{\log(\text{ημ}\, 2x)}.$$

Άρα, για $x \neq \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{1}{\log\big(1 + \text{συν}\, 2x\big)} = \frac{1}{\log(\text{ημ}\, 2x)} \implies \log\big(1 + \text{συν}\, 2x\big) = \log(\text{ημ}\, 2x) \implies 1 + \text{συν}\, 2x = \text{ημ}\, 2x.$$

Επειδή $1 + \text{συν}\, 2x = 2\cos^2 x$ και $\text{ημ}\, 2x = 2\sin x \cos x$, με $\cos x > 0$ στο $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ παίρνουμε

$$2\cos^2 x = 2\sin x \cos x \implies \cos x = \sin x \implies x = \tfrac{\pi}{4}.$$

Όμως $x = \frac{\pi}{4}$ *αποκλείεται* από το πεδίο (θα είχαμε $\log 1 = 0$ στους παρονομαστές).

Συμπέρασμα: η εξίσωση *δεν έχει λύση* στο $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$.

71. Σε αρχαιολογική ανασκαφή βρέθηκαν ίχνη καμένου δέντρου μαζί με οστά. Τα ίχνη ξύλου περιείχαν κατά προσέγγιση 1,67% της αρχικής ποσότητας άνθρακα–14 (C^{14}). Αν ο χρόνος ημιζωής του C^{14} είναι 5730 χρόνια και η ζωή t του C^{14} ακολουθεί τον νόμο $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, να υπολογίσετε πότε το δέντρο κόπηκε και κάηκε.

Λύση: (Ασκ: 7/203)

Από την ημιζωή: $Q(5730) = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow e^{k\cdot 5730} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \dfrac{\ln(1/2)}{5730} = -\dfrac{\ln 2}{5730} < 0$. Η μετρούμενη αναλογία είναι $Q(t) = 0{,}0167\, Q_0$, άρα

$$0{,}0167 = e^{kt} \implies t = \frac{\ln(0{,}0167)}{k} = 5730\, \frac{\ln(0{,}0167)}{\ln(1/2)}.$$

Υπολογίζοντας,

$$t \approx 5730 \cdot \frac{-4{,}092}{-0{,}693} \approx 5{,}90 \cdot 5730 \approx 3{,}38 \times 10^4 \text{ χρόνια.}$$

Επομένως, το δέντρο κόπηκε και κάηκε πριν περίπου $3{,}4 \times 10^4$ χρόνια.

72. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

i. $\begin{cases} xy = a^2 \\ \log^2 x + \log^2 y = \dfrac{5}{2}\,\log^2 a \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x + y = 2 + \sqrt{2} \\ \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Λύση: (Ασκ: 8/203)

i. *(Όλοι οι* $\log$ *στην ίδια βάση,* $x > 0,\ y > 0,\ a > 0$*).* Θέτουμε $u = \log x,\ v = \log y,\ L = \log a$. Από $xy = a^2$ παίρνουμε

$$u + v = \log(xy) = \log a^2 = 2L.$$

Επίσης $u^2 + v^2 = \frac{5}{2}L^2$. Άρα

$$u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv \implies \tfrac{5}{2}L^2 = 4L^2 - 2uv \implies uv = \tfrac{3}{4}L^2.$$

Οι u, v είναι ρίζες της $t^2 - 2Lt + \frac{3}{4}L^2 = 0$, άρα

$$\{u, v\} = \left\{\tfrac{L}{2},\ \tfrac{3L}{2}\right\}.$$

Επομένως

$$(\log x, \log y) = \left(\tfrac{L}{2}, \tfrac{3L}{2}\right) \text{ ή } \left(\tfrac{3L}{2}, \tfrac{L}{2}\right) \implies (x, y) = \left(a^{1/2}, a^{3/2}\right) \text{ ή } \left(a^{3/2}, a^{1/2}\right).$$

(Για $a = 1$ δίνει $x = y = 1$.)

ii. Θέτουμε $t = \log_y x$. Τότε $\log_x y = \dfrac{1}{t}$ και

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \implies 2t^2 - 5t + 2 = 0 \implies t \in \left\{2,\ \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Άρα είτε $x = y^2$ είτε $x = \sqrt{y}$. Με $x+y = 2+\sqrt{2}$: - Αν $x = y^2$, τότε $y^2+y = 2+\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$, οπότε $x = 2$. - Αν $x = \sqrt{y}$, τότε $x^2 + x = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$, οπότε $y = 2$. Τελικά

$$(x, y) = (2, \sqrt{2}) \text{ ή } (\sqrt{2}, 2)$$

73. Στον οργανισμό ενός πειραματόζωου εισάγονται 1000 μικρόβια και παρατηρείται ότι διπλασιάζονται σε μία μέρα.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τον αριθμό μικροβίων μετά από t ώρες.

ii. Να βρείτε τον αριθμό μικροβίων μετά από μία εβδομάδα.

iii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και από αυτήν να βρείτε πότε θα υπάρχουν 1 000 000 μικρόβια.

Λύση: (Ασκ: 9/203)

i. Κάθε 24 ώρες ο πληθυσμός διπλασιάζεται, άρα

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{t/24}, \qquad N_0 = 1000,\ t \geq 0$$

ή ισοδύναμα $N(t) = 1000\, e^{(\ln 2/24)\, t}$. Επομένως

$$N(t) = 1000 \cdot 2^{t/24}, \quad t \geq 0.$$

ii. Μία εβδομάδα $= 7 \cdot 24 = 168$ ώρες:

$$N(168) = 1000 \cdot 2^{168/24} = 1000 \cdot 2^7 = 1000 \cdot 128 = 128\,000.$$

iii. Η $N(t) = 1000 \cdot 2^{t/24}$ είναι γνησίως αύξουσα εκθετική, με $N(0) = 1000$ και οριζόντια ασύμπτωτη $y = 0$ προς τα πίσω στον χρόνο. Για $N(t) = 10^6$:

$$1000 \cdot 2^{t/24} = 10^6 \iff 2^{t/24} = 1000 \iff \frac{t}{24} = \log_2 1000 \implies t = 24 \log_2 1000 = 24 \frac{\ln 1000}{\ln 2}$$
$$= 239{,}2 \text{ ώρες}.$$

Δηλαδή περίπου 9,97 ημέρες (≈ 10 ημέρες).

74. Να αποδείξετε ότι για $a, \beta > 0$ με $a \neq \beta$ ισχύει

$$a^a \beta^\beta > a^\beta \beta^a.$$

Λύση: (Ασκ: 10/204)

Παίρνουμε λογάριθμο και συγκρίνουμε:

$$\ln\big(a^a\beta^\beta\big) - \ln\big(a^\beta\beta^a\big) = \big(a\ln a + \beta\ln\beta\big) - \big(\beta\ln a + a\ln\beta\big) = (a-\beta)\big(\ln a - \ln\beta\big).$$

Επειδή η ln είναι γνησίως αύξουσα, για $a \neq \beta$ έχουμε

$$(a-\beta)\big(\ln a - \ln\beta\big) > 0.$$

Άρα

$$\ln\big(a^a\beta^\beta\big) > \ln\big(a^\beta\beta^a\big) \implies a^a\beta^\beta > a^\beta\beta^a.$$

(Ισότητα θα είχαμε μόνο όταν $a = \beta$.)

75. Να αποδείξετε ότι $\log_2 3 > \log_6 9$.

Λύση: (Ασκ: 11/204)

Με αλλαγή βάσης (όλοι οι λογάριθμοι στο ln):

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}, \qquad \log_6 9 = \frac{\ln 9}{\ln 6} = \frac{2\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}.$$

Επειδή $\ln 3 > 0$, η ανισότητα

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{2\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}$$

ισοδυναμεί με

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{2}{\ln 2 + \ln 3} \iff \ln 2 + \ln 3 > 2\ln 2 \iff \ln 3 > \ln 2,$$

που είναι αληθές γιατί $3 > 2$. Άρα $\log_2 3 > \log_6 9$.

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x^2-5x+3}$, $x \in [2,3]$. Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[e,\, e^2]$.

Λύση: (Ασκ: 12/204)

Θέτουμε $\varphi(x) = 2x^2-5x+3$. Τότε $\varphi'(x) = 4x-5$. Για $x \in [2,3]$ ισχύει $\varphi'(x) \geq \varphi'(2) = 3 > 0$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$. Επομένως

$$\varphi([2,3]) = [\varphi(2),\, \varphi(3)] = [\,2\cdot 4 - 5\cdot 2 + 3,\; 2\cdot 9 - 5\cdot 3 + 3\,] = [1,\, 6].$$

Η e^x είναι επίσης γνησίως αύξουσα, άρα

$$f([2,3]) = e^{\varphi([2,3])} = [\,e^1,\, e^6\,] = [e,\, e^6].$$

Παρατήρηση: Από τον υπολογισμό προκύπτει ότι το σύνολο τιμών είναι $[e,\, e^6]$. Το $[e,\, e^2]$ φαίνεται να είναι τυπογραφικό σφάλμα.

77. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

i. $(x+1)^{\log(x+1)} \geq 100(x+1)$

ii. $10\, x^{\log x} \leq x^2\sqrt{x}$

iii. $\dfrac{1}{\log_{0.5}(x-4)} \leq \dfrac{1}{\log_{0.5}(x-2)}$.

Λύση: (Ασκ: 13/204)

i. Θέτουμε $t = x+1 > 0$. Και οι δύο πλευρές είναι > 0, άρα παίρνουμε λογάριθμο:

$$\log\big(t^{\log t}\big) \geq \log(100t) \iff (\log t)^2 \geq 2 + \log t.$$

Θέτοντας $y = \log t$:

$$y^2 - y - 2 \geq 0 \iff (y-2)(y+1) \geq 0 \implies y \leq -1 \text{ ή } y \geq 2.$$

Άρα $t \leq 10^{-1}$ ή $t \geq 10^2$. Επιστρέφοντας σε x:

$$x \in \left(-1, -\tfrac{9}{10}\right] \;\cup\; [99, +\infty)$$

ii. $x > 0$. Γράφουμε $x^2\sqrt{x} = x^{5/2}$ και θέτουμε $y = \log x$ $(x = 10^y)$:

$$10\,x^{\log x} \le x^{5/2} \iff 10 \cdot 10^{y^2} \le 10^{\frac{5}{2}y} \iff 1 + y^2 \le \tfrac{5}{2}y.$$

Ισοδύναμα

$$2y^2 - 5y + 2 \le 0 \iff (2y-1)(y-2) \le 0 \implies \tfrac{1}{2} \le y \le 2.$$

Επομένως

$$x \in \left[10^{1/2},\, 10^2\right] = \left[\sqrt{10},\, 100\right]$$

iii. Ορισμός: $x > 4$ και $\log_{0.5}(x-4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$. Για $4 < x < 5$: $\log_{0.5}(x-4) > 0$ και $\log_{0.5}(x-2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_{0.5}(x-4)} > 0 > \frac{1}{\log_{0.5}(x-2)}$ — άτοπο με την ανίσωση. Για $x > 5$: και οι δύο παρονομαστές είναι αρνητικοί· τότε

$$\frac{1}{A} \le \frac{1}{B} \text{ με } A, B < 0 \iff A \ge B.$$

Άρα ζητάμε $\log_{0.5}(x-4) \ge \log_{0.5}(x-2)$. Επειδή η $\log_{0.5}$ είναι γνησίως *φθίνουσα* και $x - 4 < x - 2$, ισχύει $\log_{0.5}(x-4) > \log_{0.5}(x-2)$ για κάθε $x > 5$. Συνεπώς

$$x \in (5, +\infty)$$

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$. Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Λύση: (Ασκ: 14/204)

Θέτουμε $y = f(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$ με $x \in \mathbb{R}$. Τότε $0 < y < 1$ και

$$y(1+2^x) = 2^x \implies y = 2^x(1-y) \implies 2^x = \frac{y}{1-y} \quad (0 < y < 1).$$

Παίρνουμε λογάριθμο με βάση 2:

$$x = \log_2\left(\frac{y}{1-y}\right).$$

Άρα η αντίστροφη είναι

$$f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \in (0,1)$$

Επομένως $D_{f^{-1}} = (0,1)$ και $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

79. Έστω η συνάρτηση $f_a(x) = a^{x^2+1}$, $a > 1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών των f_a και της $g = f_a + f_\beta$, με $a, \beta > 1$.

ii. Να επιλύσετε την εξίσωση $f_2(x) + f_5(x) = 7$.

Λύση: (Ασκ: 15/204)

Θέτουμε $\varphi(x) = x^2 + 1 \geq 1$ με ελάχιστο στο $x = 0$.

i. Για $a > 1$ η $t \mapsto a^t$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$f_a([-\infty, +\infty]) = a^{\varphi(\mathbb{R})} = a^{[1,+\infty)} = [a, +\infty).$$

Για $g(x) = a^{\varphi(x)} + \beta^{\varphi(x)}$ και $t = \varphi(x) \geq 1$, η $h(t) = a^t + \beta^t$ είναι γνησίως αύξουσα σε $[1, +\infty)$. Ελάχιστο στο $t = 1$:

$$g(\mathbb{R}) = [a + \beta, +\infty).$$

ii. Θέτουμε $t = x^2 + 1 \geq 1$. Η εξίσωση γράφεται

$$2^t + 5^t = 7.$$

Η συνάρτηση $H(t) = 2^t + 5^t$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και $H(1) = 2 + 5 = 7$. Άρα η μοναδική λύση είναι $t = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$.

80. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\log_2 3$ είναι άρρητος.

Λύση: (Ασκ: 16/204)

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$. Τότε υπάρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ με $\gcd(m, n) = 1$ και $n > 0$ τέτοια ώστε

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}.$$

Άρα

$$2^{m/n} = 3 \implies 2^m = 3^n.$$

Η αριστερή πλευρά είναι δύναμη του 2 (άρα έχει μοναδικό πρώτο παράγοντα τον 2), ενώ η δεξιά πλευρά είναι δύναμη του 3 (μοναδικός πρώτος παράγοντας ο 3). Από την *μοναδικότητα* της παραγοντοποίησης σε πρώτους προκύπτει ότι αυτό είναι αδύνατο εκτός αν $m = n = 0$, που δεν ισχύει. Άτοπο.

Επομένως $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$, δηλαδή ο $\log_2 3$ είναι άρρητος.