

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2\nu = \nu(\nu + 1)$$

2. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(i)

$$\frac{\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \eta\mu\beta$$

(ii)

$$\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\eta\mu\alpha \eta\mu\beta} = \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta$$

(iii)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\tau\epsilon\mu\beta} - \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(i)

$$|2x - 1| = 3$$

(ii)

$$|2x + 4| = -4$$

(iii)

$$|x^2 - 2x - 12| = 12$$

4. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(i)

$$|x + 6| < 3$$

(ii)

$$|3x - 1| \geq 5$$

5. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, ποιες περιττές και ποιες ούτε άρτιες ούτε περιττές:

(i)

$$f(x) = 3x^2 + 5x^4, \quad x \in \mathbb{R}$$

(ii)

$$f(x) = 3|x| + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

(iii)

$$f(x) = |x + 1|, \quad x \in \mathbb{R}$$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i)

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - 1}$$

(ii)

$$f(x) = \sqrt{x + 2}$$

(iii)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$$

7. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$ και $f - g$, όταν

$$f(x) = 2x - 5 \quad \text{και} \quad g(x) = x + 3.$$

8. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1)$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x) \sigma\upsilon\nu(5x)}{x}$$

9. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu(3x)}{x}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\eta\mu(4x)}$$

10. Να εξετάσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια:

(i)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(ii)

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-16x}, & x < -1 \\ 4, & x = -1 \\ |x - 3|, & x > -1 \end{cases}$$

11. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω ακολουθίες:

(i)

$$a_\nu = 3\nu - 5, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

(ii)

$$a_\nu = 4^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

12. Να υπολογίσετε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i)

$$a_\nu = 4\nu - 2, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

(ii)

$$a_\nu = \frac{3\nu + 1}{2\nu + 1}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

13. Σε γεωμετρική πρόοδο, δίνεται ότι $a_5 - a_1 = 15$ και $a_2 - a_4 = 6$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της προόδου και το άθροισμα των άπειρων όρων της.