Μαθηματικά Β' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Συναρτήσεις - Ι

1. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτα: (Ασκ: 1/79)

i. $\left|\sqrt{5}-5\right|$

ii. $|\sin x - 1| - |1-\cos x|, \quad x \in \mathbb{R}$

iii. $|\pi - 4| - |1-\pi|$

iv. $|-\kappa^2 - 1|, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

v. $|\lambda - 2|, \quad \lambda \in [0,4]$

Λύση:

i. Επειδή $\sqrt{5}-5<0$, έχουμε
$$\left|\sqrt{5}-5\right| = 5-\sqrt{5}.$$

ii. Για κάθε x ισχύει $\sin x \leq 1$ και $\cos x \leq 1$. Άρα
$$|\sin x - 1| = 1 - \sin x \quad \text{και} \quad |1-\cos x| = 1-\cos x,$$
οπότε
$$|\sin x - 1| - |1-\cos x| = (1-\sin x) - (1-\cos x) = \cos x - \sin x.$$

iii. Επειδή $\pi < 4$ και $\pi > 1$,
$$|\pi - 4| = 4-\pi, \qquad |1-\pi| = \pi - 1,$$
άρα
$$|\pi-4| - |1-\pi| = (4-\pi) - (\pi - 1) = 5 - 2\pi.$$

iv. Έχουμε $-\kappa^2-1 = -(\kappa^2+1)$ και $\kappa^2+1 \geq 0$, οπότε
$$\left|-\kappa^2-1\right| = \kappa^2+1.$$

vi. Για $\lambda \in [0,4]$:
$$|\lambda - 2| = \begin{cases} 2-\lambda, & \lambda \in [0,2], \\ \lambda - 2, & \lambda \in [2,4]. \end{cases}$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: (Ασκ: 2/79)

$$A = \left|\sqrt{3} - 3\right| - \left|3 - \sqrt{3}\right|$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι:

$$\sqrt{3} - 3 < 0 \quad (\text{επειδή } \sqrt{3} \approx 1.73 < 3).$$

Άρα

$$\left|\sqrt{3} - 3\right| = -(\sqrt{3} - 3) = 3 - \sqrt{3}.$$

Επίσης,

$$3 - \sqrt{3} > 0,$$

οπότε

$$\left|3 - \sqrt{3}\right| = 3 - \sqrt{3}.$$

Συνεπώς,

$$A = (3 - \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{3}) = 0.$$

3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση (Ασκ: 3/79)

$$K = |x - 1| + |x - 3|, \quad 1 < x < 3,$$

είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x.

Λύση:

Έστω $1 < x < 3$. Τότε:

- Επειδή $x - 1 > 0$, έχουμε

$$|x - 1| = x - 1.$$

- Επειδή $x - 3 < 0$, έχουμε

$$|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x.$$

Άρα

$$K = (x - 1) + (3 - x) = 2 \quad \text{ανεξάρτητη της } x \text{ στο} \quad (1, 3)$$

4. Αν $a < 2 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: (Ασκ: 4/79)

i. $A = |a-2| + |\beta+2| - 7$

ii. $B = |\beta - a| - |\beta - 2| + a - 1$

Λύση:

i. Για $a < 2$ έχουμε $a - 2 < 0 \;\Rightarrow\; |a-2| = 2-a$.

Επίσης, $\beta > 2 \;\Rightarrow\; \beta + 2 > 0 \;\Rightarrow\; |\beta+2| = \beta+2$.

Άρα
$$A = (2-a) + (\beta+2) - 7 = \beta - a - 3.$$

ii. Για $\beta > a$ έχουμε $|\beta - a| = \beta - a$. Επίσης, $\beta > 2 \;\Rightarrow\; |\beta-2| = \beta-2$.

Άρα
$$B = (\beta-a) - (\beta-2) + a - 1 = \beta - a - \beta + 2 + a - 1 = 1.$$

5. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτα: (Ασκ: 5/79)

i. $A = |x+1| + |x-1| - 2x + 3$

ii. $B = |1-x| - |2-x| + x$

Λύση:

i. Θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν $x < -1$, τότε $x+1 < 0$ και $x-1 < 0$, άρα
$$|x+1| = -(x+1), \quad |x-1| = -(x-1).$$

Τότε
$$A = (-(x+1)) + (-(x-1)) - 2x + 3 = -2x - 2 - 2x + 3 = -4x + 1.$$

2. Αν $-1 \leq x < 1$, τότε $x+1 \geq 0$ και $x-1 < 0$, άρα
$$|x+1| = x+1, \quad |x-1| = -(x-1).$$

Τότε
$$A = (x+1) + (-(x-1)) - 2x + 3 = x + 1 - x + 1 - 2x + 3 = -2x + 5.$$

3. Αν $x \geq 1$, τότε $x + 1 \geq 0$ και $x - 1 \geq 0$, άρα
$$|x+1| = x+1, \quad |x-1| = x-1.$$

Τότε
$$A = (x+1) + (x-1) - 2x + 3 = 2x - 2x + 3 = 3.$$

Συνεπώς
$$A = \begin{cases} -4x+1, & x < -1, \\ -2x+5, & -1 \leq x < 1, \\ 3, & x \geq 1. \end{cases}$$

ii. Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $x \leq 1$, τότε $1 - x \geq 0$ και $2 - x \geq 1 > 0$, άρα
$$|1-x| = 1-x, \quad |2-x| = 2-x.$$

Τότε
$$B = (1-x) - (2-x) + x = 1 - x - 2 + x + x = x - 1.$$

2. Αν $x > 1$, τότε $1 - x < 0 \;\Rightarrow\; |1-x| = x-1$.

Επίσης αν $x < 2$, τότε $2 - x > 0 \;\Rightarrow\; |2-x| = 2-x$.

Αν $x \geq 2$, τότε $2 - x \leq 0 \;\Rightarrow\; |2-x| = x-2$.

- Για $1 < x < 2$:
$$B = (x-1) - (2-x) + x = x - 1 - 2 + x + x = 3x - 3.$$

- Για $x \geq 2$:
$$B = (x-1) - (x-2) + x = x - 1 - x + 2 + x = x + 1.$$

Συνεπώς
$$B = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3x-3, & 1 < x < 2, \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases}$$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις: (Ασκ: 6/79)

i. $|2x-1|=3$

ii. $|2x+4|=-4$

iii. $|x^2-2x-12|=12$

iv. $\left|\dfrac{x+5}{2-x}\right|=6$

Λύση:

i. Έχουμε

$$|2x-1|=3 \quad \Rightarrow \quad 2x-1=3 \quad ή \quad 2x-1=-3.$$
$$\Rightarrow \quad 2x=4 \;\Rightarrow\; x=2, \qquad 2x=-2 \;\Rightarrow\; x=-1.$$

Άρα η λύση είναι

$$x=2 \quad ή \quad x=-1.$$

ii. Η εξίσωση $|2x+4|=-4$ δεν έχει λύσεις, επειδή η απόλυτη τιμή είναι πάντοτε μη αρνητική.

iii. Θέτουμε

$$|x^2-2x-12|=12 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-12=12 \quad ή \quad x^2-2x-12=-12.$$

1. Αν $x^2-2x-12=12$:

$$x^2-2x-24=0.$$

Λύση με διακρίνουσα:

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-24)=4+96=100.$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\pm 10}{2}.$$

Άρα $x=6$ ή $x=-4$.

2. Αν $x^2-2x-12=-12$:

$$x^2-2x=0 \;\Rightarrow\; x(x-2)=0.$$

Άρα $x=0$ ή $x=2$.

Συνολικά:

$$x = -4,\ 0,\ 2,\ 6.$$

iv. Έχουμε

$$\left|\frac{x+5}{2-x}\right| = 6.$$

Πρέπει να ισχύει $x \neq 2$. Λύνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $\dfrac{x+5}{2-x} = 6$:

$$x+5 = 6(2-x) \ \Rightarrow\ x+5 = 12-6x \ \Rightarrow\ 7x = 7 \ \Rightarrow\ x = 1.$$

2. $\dfrac{x+5}{2-x} = -6$:

$$x+5 = -6(2-x) \ \Rightarrow\ x+5 = -12+6x \ \Rightarrow\ -5x = -17 \ \Rightarrow\ x = \tfrac{17}{5}.$$

Συνεπώς

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \tfrac{17}{5}.$$

7. Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς a και β, αναφορικά με το πρόσημό τους, αν

$$|a\beta| = -a\beta, \quad a, \beta \in \mathbb{R};$$

(Ασκ: 7/79)

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή είναι πάντοτε μη αρνητική:

$$|a\beta| \geq 0.$$

Η εξίσωση $|a\beta| = -a\beta$ δείχνει ότι το $-a\beta \geq 0 \ \Rightarrow\ a\beta \leq 0$.

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$|a\beta| = \begin{cases} a\beta, & a\beta \geq 0, \\ -(a\beta), & a\beta < 0. \end{cases}$$

Η σχέση $|a\beta| = -a\beta$ ισχύει μόνο όταν $a\beta < 0$.

Συνεπώς οι αριθμοί a και β έχουν αντίθετο πρόσημο ή ένας είναι μηδέν.

8. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση: (Ασκ: 8/79)

$$A = \frac{a}{|a|} + \frac{\beta}{|\beta|}, \quad a\beta \neq 0$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0, \end{cases} \qquad \frac{\beta}{|\beta|} = \begin{cases} 1, & \beta > 0, \\ -1, & \beta < 0. \end{cases}$$

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $a > 0$ και $\beta > 0$, τότε
$$A = 1 + 1 = 2.$$
2. Αν $a > 0$ και $\beta < 0$, τότε
$$A = 1 + (-1) = 0.$$
3. Αν $a < 0$ και $\beta > 0$, τότε
$$A = (-1) + 1 = 0.$$
4. Αν $a < 0$ και $\beta < 0$, τότε

$$A = (-1) + (-1) = -2.$$

Συνεπώς οι δυνατές τιμές της παράστασης είναι $A \in \{-2,\, 0,\, 2\}$

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις: (Ασκ: 1/86)

i. $\dfrac{3|x|+1}{2} + \dfrac{2|x|-1}{3} = \dfrac{|x|+2}{4}$

ii. $\dfrac{5-|1-3x|}{6} = 0$

iii. $x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0$

iv. $|3x-4| = 3x+5$

v. $|x^2-1| = -3|x+1|$

vi. $(x-3)^2 - 4|x-3| = 12$

Λύση:

i. Θέτουμε $t = |x| \geq 0$. Έχουμε

$$\frac{3t+1}{2} + \frac{2t-1}{3} = \frac{t+2}{4}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με 12:

$$6(3t+1) + 4(2t-1) = 3(t+2).$$

$$18t + 6 + 8t - 4 = 3t + 6 \quad \Rightarrow \quad 26t + 2 = 3t + 6.$$

$$23t = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{4}{23}.$$

Άρα

$$x = \pm\tfrac{4}{23}.$$

ii.

$$\frac{5 - |1-3x|}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad |1-3x| = 5.$$

$$1 - 3x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{4}{3}, \qquad 1 - 3x = -5 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

iii.

$$x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0.$$

- Αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$:

$$x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6 = 0.$$

$(x-3)(x+2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$ (δεκτό), $x = -2$ (όχι, γιατί $x \geq 0$).
- Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$:

$$x^2 - 3(-x) + 2x - 6 = x^2 + 3x + 2x - 6 = x^2 + 5x - 6 = 0.$$

$(x+6)(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x = -6$ (δεκτό), $x = 1$ (όχι, γιατί $x < 0$).

Συνεπώς

$$x = 3 \quad ή \quad x = -6.$$

iv.

$$|3x - 4| = 3x + 5.$$

Απαίτηση: $3x + 5 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -\tfrac{5}{3}$.

- Αν $3x - 4 \geq 0 \ \Rightarrow \ x \geq \frac{4}{3}$:

$$3x - 4 = 3x + 5 \ \Rightarrow \ -4 = 5 \quad \text{αδύνατο.}$$

- Αν $3x - 4 < 0 \ \Rightarrow \ x < \frac{4}{3}$:

$$-(3x-4) = 3x + 5 \ \Rightarrow \ -3x + 4 = 3x + 5 \ \Rightarrow \ 6x = -1 \ \Rightarrow \ x = -\tfrac{1}{6}.$$

Είναι συμβατό ($-\frac{1}{6} < \frac{4}{3}$ και $-\frac{1}{6} \geq -\frac{5}{3}$).

Άρα λύση:

$$x = -\tfrac{1}{6}.$$

v.

$$|x^2 - 1| = -3|x+1|.$$

Το RHS είναι ≤ 0, ενώ το LHS είναι ≥ 0. Η ισότητα ισχύει μόνο αν

$$|x^2 - 1| = 0 \quad \text{και} \quad -3|x+1| = 0.$$

$|x^2 - 1| = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $-3|x+1| = 0 \Rightarrow x = -1$. Κοινή λύση:

$$x = -1.$$

vi. Θέτουμε $t = |x-3| \geq 0$.

$$(x-3)^2 - 4|x-3| = 12 \ \ \Rightarrow \ \ t^2 - 4t = 12.$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0.$$

Διακρίνουσα: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$.

$$t = \frac{4 \pm 8}{2}.$$

$$t = 6 \quad \text{ή} \quad t = -2 \text{ (όχι, γιατί } t \geq 0).$$

Άρα $|x-3| = 6 \ \Rightarrow \ x - 3 = \pm 6 \ \Rightarrow \ x = 9$ ή $x = -3$.

Συνολικές λύσεις:

$$i.\ x = \pm\tfrac{4}{23}, \qquad ii.\ x = -\tfrac{4}{3},\ 2, \qquad iii.\ x = -6,\ 3,$$
$$iv.\ x = -\tfrac{1}{6}, \qquad v.\ x = -1, \qquad vi.\ x = -3,\ 9.$$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις: (Ασκ: 2/86)

i. $|x+6|<3$

ii. $|3x-1|\geq 5$

iii. $|x-11|\geq -10$

iv. $\dfrac{1}{|x-1|}<2$

v. $|3x|<|2x-5|$

vi. $4<|x-2|<9$

Λύση:

i.

$$|x+6|<3 \;\Rightarrow\; -3<x+6<3 \;\Rightarrow\; -9<x<-3.$$

ii.

$$|3x-1|\geq 5 \;\Rightarrow\; 3x-1\geq 5 \text{ ή } 3x-1\leq -5.$$
$$3x\geq 6\Rightarrow x\geq 2,\quad 3x\leq -4\Rightarrow x\leq -\tfrac{4}{3}.$$

Άρα

$$x\leq -\tfrac{4}{3} \text{ ή } x\geq 2.$$

iii.

$$|x-11|\geq -10.$$

Η απόλυτη τιμή είναι πάντα ≥ 0. Επειδή $0\geq -10$, η ανίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

iv.

$$\frac{1}{|x-1|}<2.$$

Πρέπει $|x-1|\neq 0$. Ισοδύναμα:

$$1<2|x-1| \;\Rightarrow\; |x-1|>\tfrac{1}{2}.$$

Άρα

$$x<\tfrac{1}{2} \text{ ή } x>\tfrac{3}{2}.$$

v.

$$|3x| < |2x - 5|.$$

Θέτουμε τετράγωνα:

$$(3x)^2 < (2x-5)^2 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 < 4x^2 - 20x + 25.$$

$$5x^2 + 20x - 25 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x - 5 < 0.$$

$$(x-1)(x+5) < 0.$$

Άρα

$$-5 < x < 1.$$

vi.

$$4 < |x - 2| < 9.$$

Δύο ανισότητες:
- Από $|x-2| > 4$:

$$x - 2 > 4 \quad \Rightarrow \quad x > 6, \qquad x - 2 < -4 \quad \Rightarrow \quad x < -2.$$

- Από $|x-2| < 9$:

$$-9 < x - 2 < 9 \quad \Rightarrow \quad -7 < x < 11.$$

Συνδυάζουμε:

$$x < -2 \text{ με } -7 < x < 11 \quad \Rightarrow \quad -7 < x < -2,$$

ή

$$x > 6 \text{ και } x < 11 \quad \Rightarrow \quad 6 < x < 11.$$

Συνεπώς

$$x \in (-7, -2) \cup (6, 11).$$

11. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει (Ασκ: 3/86)

$$\sqrt{(x^2-5x+6)^2} = x^2-5x+6$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι
$$\sqrt{(x^2-5x+6)^2} = |\,x^2-5x+6\,|.$$
Άρα η ζητούμενη ισότητα είναι
$$|x^2-5x+6| = x^2-5x+6.$$
Αυτό ισχύει τότε και μόνο τότε όταν
$$x^2-5x+6 \geq 0.$$
Λύνουμε την ανίσωση:
$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3).$$
Η τριωνυμική είναι ανοδική (συντελεστής $x^2 > 0$), άρα
$$x^2-5x+6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2 \ \text{ή} \ x \geq 3.$$

Συνεπώς η ισότητα ισχύει για
$$x \in (-\infty,\, 2] \cup [3,\, \infty).$$

12. Να βρείτε τους αριθμούς a και β, αν ισχύει (Ασκ: 4/86)

$$|a-1| + |a-\beta-4| = 0.$$

Λύση:

Επειδή κάθε απόλυτη τιμή είναι μη αρνητική, το άθροισμα
$$|a-1| + |a-\beta-4| = 0$$
σημαίνει ότι
$$|a-1| = 0 \quad \text{και} \quad |a-\beta-4| = 0.$$

Από την πρώτη έχουμε:

$$a - 1 = 0 \;\Rightarrow\; a = 1.$$

Από τη δεύτερη, με $a = 1$:

$$1 - \beta - 4 = 0 \;\Rightarrow\; -\beta - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \beta = -3.$$

Συνεπώς

$$a = 1, \quad \beta = -3.$$

13. Να λύσετε το σύστημα (Σ): (Ασκ: 5/86)

$$(\Sigma) : \begin{cases} 2|x| + 3|y| = 5 \\ 3|x| - 2|y| = 1 \end{cases}$$

Λύση:

Θέτουμε

$$u = |x| \geq 0, \quad v = |y| \geq 0.$$

Τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 3u - 2v = 1 \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα:

$$2u + 3v = 5 \quad (1), \qquad 3u - 2v = 1 \quad (2).$$

Από (1): $2u = 5 - 3v \;\Rightarrow\; u = \frac{5-3v}{2}$.

Το αντικαθιστούμε στη (2):

$$3\left(\tfrac{5-3v}{2}\right) - 2v = 1 \;\Rightarrow\; \tfrac{15-9v}{2} - 2v = 1.$$

Πολλαπλασιάζουμε με 2:

$$15 - 9v - 4v = 2 \;\Rightarrow\; 15 - 13v = 2 \;\Rightarrow\; 13v = 13 \;\Rightarrow\; v = 1.$$

Τότε

$$u = \frac{5-3(1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Άρα

$$|x| = 1, \quad |y| = 1.$$

Συνεπώς οι λύσεις είναι

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1.$$

Τελικό σύνολο λύσεων:

$$\{(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)\}.$$

14. Αν $|x+2| < 2$, να αποδείξετε ότι $|3x-2| < 14$. Στη συνέχεια: (Ασκ: 6/86)

i. Να αποδείξετε ότι

$$A(x) = |4x^2 - 4x + 1| - |x^2 + x + 1| = 3x^2 - 5x.$$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$.

Λύση:

Από $|x+2| < 2$ προκύπτει

$$-2 < x + 2 < 2 \;\;\Rightarrow\;\; -4 < x < 0.$$

Για $x \in (-4, 0)$ έχουμε:

$$3x - 2 \in (-14, -2).$$

Άρα

$$|3x - 2| < 14.$$

i. Υπολογίζουμε τα επιμέρους τριώνυμα:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0,$$

οπότε

$$|4x^2 - 4x + 1| = 4x^2 - 4x + 1.$$

Επίσης

$$x^2 + x + 1 = (x + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} > 0,$$

οπότε

$$|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1.$$

Άρα

$$A(x) = (4x^2 - 4x + 1) - (x^2 + x + 1) = 3x^2 - 5x.$$

ii. Λύνουμε την εξίσωση

$$A(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 5x = 0.$$

$$x(3x - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ ή } x = \tfrac{5}{3}.$$

Όμως η συνθήκη $-4 < x < 0$ αποκλείει το $x = \frac{5}{3}$ και το $x = 0$ (δεν ανήκει στο διάστημα). Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση στο $(-4, 0)$.

Συμπέρασμα: Η εξίσωση $A(x) = 0$ δεν έχει λύσεις υπό τον περιορισμό $|x + 2| < 2$.

15. Αν $|x| \leq 7$ και $|y| \leq 10$, να δείξετε ότι (Ασκ: 1/90)

$$|2x + 3y| \leq 44.$$

Λύση:

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα τριγώνου:

$$|2x + 3y| \leq |2x| + |3y| = 2|x| + 3|y|.$$

Από τις υποθέσεις δίνεται:

$$|x| \leq 7, \quad |y| \leq 10.$$

Άρα

$$2|x| + 3|y| \leq 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 = 14 + 30 = 44.$$

Συνεπώς

$$|2x + 3y| \leq 44.$$

16. Να βρείτε αριθμό $a \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει (Ασκ: 2/90)

$$|a-1|+|3-3a|=8.$$

Λύση:

Η εξίσωση περιέχει δύο απόλυτες τιμές: $|a-1|$ και $|3-3a|=3|a-1|$.

Άρα

$$|a-1|+|3-3a|=|a-1|+3|a-1|=4|a-1|.$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$4|a-1|=8 \quad \Rightarrow \quad |a-1|=2.$$

Αυτό σημαίνει

$$a-1=2 \quad \text{ή} \quad a-1=-2.$$

$$a=3 \quad \text{ή} \quad a=-1.$$

Συνεπώς οι λύσεις είναι

$$a=-1 \quad \text{ή} \quad a=3.$$

17. Αν $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -1$ και (Ασκ: 3/90)

$$\left|\frac{x+4}{x+1}\right|=2,$$

να αποδείξετε ότι $|x|=2$.

Λύση:

Η εξίσωση γράφεται

$$\left|\frac{x+4}{x+1}\right|=2 \quad \Leftrightarrow \quad |x+4|=2|x+1|.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Αν $x \geq -1$, τότε $|x+4|=x+4$, $|x+1|=x+1$. Η εξίσωση γίνεται:

$$x+4=2(x+1) \quad \Rightarrow \quad x+4=2x+2 \quad \Rightarrow \quad x=2.$$

2. Αν $x < -1$, τότε $|x+4| = -(x+4)$, $|x+1| = -(x+1)$. Η εξίσωση γίνεται:

$$-(x+4) = 2(-(x+1)) \;\;\Rightarrow\;\; -x-4 = -2x-2.$$

$$-x-4 = -2x-2 \;\;\Rightarrow\;\; x = -2.$$

Συνεπώς

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2 \implies |x| = 2.$$

18. Αν (Ασκ: 4/90)

$$\left|\frac{2a+3\beta}{3a+2\beta}\right| \leq 1, \quad a \neq 0,$$

να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{\beta}{a}\right| \leq 1.$$

Λύση:

Θέτουμε

$$t = \frac{\beta}{a}, \quad a \neq 0.$$

Τότε η δεδομένη σχέση γράφεται:

$$\left|\frac{2a+3\beta}{3a+2\beta}\right| = \left|\frac{2+3t}{3+2t}\right| \leq 1.$$

Η ανίσωση ισοδυναμεί με:

$$(2+3t)^2 \leq (3+2t)^2.$$

Αναπτύσσουμε:

$$4+12t+9t^2 \leq 9+12t+4t^2.$$

Απλοποιούμε:

$$9t^2-4t^2+12t-12t+4-9 \leq 0,$$

$$5t^2-5 \leq 0 \;\;\Rightarrow\;\; 5(t^2-1) \leq 0.$$

Άρα

$$t^2 \leq 1 \;\;\Rightarrow\;\; |t| \leq 1.$$

Θυμόμαστε ότι $t = \dfrac{\beta}{a}$, οπότε

$$\left|\frac{\beta}{a}\right| \leq 1.$$

19. Αν $a^2 < 16\beta^2$ με $a\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι: (Ασκ: 5/90)

i. $\left|\frac{a}{\beta}\right| < 4$

ii. $\left|\frac{a}{\beta}\right| - \left|\frac{\beta}{a}\right| < \frac{15}{4}$

Λύση:

Θέτουμε

$$t = \frac{a}{\beta}, \quad \beta \neq 0.$$

Η συνθήκη $a^2 < 16\beta^2$ ισοδυναμεί με

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^2 < 16 \quad \Rightarrow \quad t^2 < 16.$$

i. Από $t^2 < 16$ έχουμε

$$|t| < 4.$$

Δηλαδή

$$\left|\frac{a}{\beta}\right| < 4.$$

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$|t| - \left|\frac{1}{t}\right| < \tfrac{15}{4}, \quad t \neq 0.$$

- Αν $|t| < 4$, τότε $\left|\frac{1}{t}\right| > \frac{1}{4}$. Άρα

$$|t| - \left|\tfrac{1}{t}\right| < |t| - \tfrac{1}{4}.$$

Επειδή $|t| < 4$, έχουμε

$$|t| - \tfrac{1}{4} < 4 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{15}{4}.$$

Συνεπώς

$$|t| - \tfrac{1}{|t|} < \tfrac{15}{4}.$$

Άρα πράγματι ισχύει:

$$\left|\frac{a}{\beta}\right| - \left|\frac{\beta}{a}\right| < \tfrac{15}{4}.$$

20. Να αποδείξετε ότι (Ασκ: 6/90)

$$|a-\beta| \le |a| + |\beta|, \quad \forall a, \beta \in \mathbb{R}.$$

Λύση:

Η ανισότητα τριγώνου μας δίνει:

$$|x+y| \le |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Θέτουμε $x = a$ και $y = -\beta$. Τότε

$$|a-\beta| = |a + (-\beta)| \le |a| + |-\beta|.$$

Επειδή $|-\beta| = |\beta|$, προκύπτει

$$|a-\beta| \le |a| + |\beta|.$$

Η ανισότητα ισχύει για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$.

21. Να αποδείξετε ότι (Ασκ: 7/90)

$$|2a+\beta|^2 + |a-2\beta|^2 = 5\big(|a|^2 + |\beta|^2\big), \quad \forall a, \beta \in \mathbb{R}.$$

Λύση:

Επειδή $|x|^2 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(2a+\beta)^2 + (a-2\beta)^2 = 5(a^2+\beta^2).$$

Υπολογίζουμε:

$$(2a+\beta)^2 = 4a^2 + 4a\beta + \beta^2,$$
$$(a-2\beta)^2 = a^2 - 4a\beta + 4\beta^2.$$

Προσθέτουμε:

$$(2a+\beta)^2 + (a-2\beta)^2 = (4a^2 + 4a\beta + \beta^2) + (a^2 - 4a\beta + 4\beta^2).$$

Απλοποιούμε:

$$= 4a^2 + a^2 + 4a\beta - 4a\beta + \beta^2 + 4\beta^2.$$
$$= 5a^2 + 5\beta^2.$$

Άρα

$$|2a + \beta|^2 + |a - 2\beta|^2 = 5(a^2 + \beta^2) = 5(|a|^2 + |\beta|^2).$$

22. Έστω $a, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Ασκ: 8/90)

i. Αν $||a| - |\beta|| = |a + \beta|$, να αποδείξετε ότι οι a, β είναι ετερόσημοι.

ii. Αν $|a + \beta| = |a| + |\beta|$, να αποδείξετε ότι οι a, β είναι ομόσημοι.

Λύση:

i. Ξέρουμε ότι γενικά ισχύει η τριγωνική ανισότητα:

$$|a + \beta| \leq |a| + |\beta|.$$

Επίσης ισχύει και η αντισυμμετρική μορφή:

$$||a| - |\beta|| \leq |a + \beta|.$$

Η ισότητα $||a| - |\beta|| = |a + \beta|$ σημαίνει ότι το a και το β έχουν αντίθετα πρόσημα. Δηλαδή:

$$a\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{οι } a, \beta \text{ είναι ετερόσημοι.}$$

ii. Αντίστοιχα, η ισότητα $|a + \beta| = |a| + |\beta|$ στην ανισότητα τριγώνου συμβαίνει μόνο όταν a και β έχουν το ίδιο πρόσημο. Δηλαδή:

$$a\beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{οι } a, \beta \text{ είναι ομόσημοι.}$$

23. Να υπολογίσετε τις τιμές που αναγράφονται δίπλα από κάθε συνάρτηση f. (Ασκ: 1/96)

i. $f(x) = 3x^2 + 2x - 4, \;\; f(0)$

ii. $f(x) = -2x^2 + x - 1, \;\; f(2)$

iii. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \;\; f(t)$

iv. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}, \;\; f(-t)$

Λύση:

i. Για $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$:

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 4 = -4.$$

ii. Για $f(x) = -2x^2 + x - 1$:

$$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 2 - 1 = -8 + 2 - 1 = -7.$$

iii. Για $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$f(t) = \frac{t}{t^2+1}.$$

iv. Για $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$:

$$f(-t) = \frac{(-t)^2 - 1}{(-t)^2 + 4} = \frac{t^2-1}{t^2+4}.$$

24. Αν $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 4x - 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$, να υπολογίσετε την τιμή του $A \in \mathbb{R}$. (Ασκ: 2/96)

Λύση:

Από τον ορισμό έχουμε:

$$f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 4x - 5.$$

Για $x = 2$:

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + A \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 5.$$

Υπολογίζουμε:

$$f(2) = 16 + 4A + 8 - 5 = 4A + 19.$$

Δίνεται ότι $f(2) = 5$, άρα:

$$4A + 19 = 5 \quad \Rightarrow \quad 4A = -14 \quad \Rightarrow \quad A = -\tfrac{14}{4} = -\tfrac{7}{2}.$$

Συνεπώς

$$A = -\tfrac{7}{2}.$$

25. Αν (Ασκ: 3/96)

$$g(x) = \frac{3x+8}{2x-B}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\tfrac{B}{2}\}$$

και $g(0) = 2$, να υπολογίσετε την τιμή του $B \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Αντικαθιστούμε $x = 0$ στη συνάρτηση:

$$g(0) = \frac{3 \cdot 0 + 8}{2 \cdot 0 - B} = \frac{8}{-B} = -\frac{8}{B}.$$

Δίνεται ότι $g(0) = 2$, άρα:

$$-\frac{8}{B} = 2.$$

Πολλαπλασιάζουμε:

$$-8 = 2B \implies B = -4.$$

26. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $100\,\mathrm{m}$ και η μία πλευρά του έχει μήκος $x\,\mathrm{m}$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x, όπου $x > 0$.

i. Να χρησιμοποιήσετε την πιο πάνω συνάρτηση, για να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν. (Ασκ: 4/96)

Λύση:

Έστω οι πλευρές του ορθογωνίου x και y. Δίνεται ότι η περίμετρος είναι

$$2x + 2y = 100 \quad \Rightarrow \quad y = 50 - x.$$

Το εμβαδόν είναι:

$$E(x) = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2, \quad x > 0.$$

i. Η συνάρτηση είναι

$$E(x) = 50x - x^2, \quad x \in (0, 50).$$

Αυτή είναι παραβολή με συντελεστή $-1 < 0$, άρα μέγιστο στο

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \cdot (-1)} = 25.$$

Τότε

$$y = 50 - x = 25.$$

Άρα το μέγιστο εμβαδόν είναι

$$E_{\max} = 25 \cdot 25 = 625\,\mathrm{m}^2.$$

Συνεπώς το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι τετράγωνο πλευράς $25\,\mathrm{m}$.

27. Δίνεται η συνάρτηση (Ασκ: 5/96)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός,} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2,5),\ f(\sqrt{2}),\ f(\pi),\ f\left(\frac{3}{5}\right),\ f(0,888\ldots)$.

Λύση:

- Για $x = -2,5 = -\frac{5}{2}$, είναι ρητός. Άρα

$$f(-2,5) = 1.$$

- Για $x = \sqrt{2}$, είναι άρρητος. Άρα

$$f(\sqrt{2}) = 0.$$

- Για $x = \pi$, είναι άρρητος. Άρα

$$f(\pi) = 0.$$

- Για $x = \frac{3}{5}$, είναι ρητός. Άρα

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = 1.$$

- Για $x = 0,888\ldots$, επειδή είναι δεκαδικός περιοδικός αριθμός ($0,\overline{8} = \frac{8}{9}$), είναι ρητός. Άρα

$$f(0,888\ldots) = 1.$$

28. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Κάθε αντιστοιχία είναι συνάρτηση.

ii. Η σχέση $y = f(x)$ δεν παριστάνει συνάρτηση, όταν ισχύουν $f(-2) = 8$ και $f(-2) = 0$.

iii. Η σχέση μεταξύ της περιμέτρου P ενός ισόπλευρου τριγώνου και του μήκους της πλευράς του a είναι συνάρτηση.

iv. Η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $(2, 0)$ και $(0, 3)$ είναι της μορφής

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει συνάρτηση. (Ασκ: 1/103)

Λύση:

i. ΛΑΘΟΣ. Κάθε αντιστοιχία δεν είναι συνάρτηση, διότι στη συνάρτηση απαιτείται κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού να αντιστοιχεί σε *μοναδικό* στοιχείο του πεδίου τιμών. Υπάρχουν αντιστοιχίες που παραβιάζουν αυτή την ιδιότητα.

ii. ΣΩΣΤΟ. Αν για την ίδια τιμή $x = -2$ ισχύει $f(-2) = 8$ και $f(-2) = 0$, τότε το $x = -2$ αντιστοιχίζεται σε δύο διαφορετικές τιμές. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό της συνάρτησης.

iii. ΣΩΣΤΟ. Για ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει $P = 3a$. Σε κάθε τιμή της πλευράς a αντιστοιχεί μία μόνο τιμή της περιμέτρου P, άρα πρόκειται για συνάρτηση.

iv. ΣΩΣΤΟ. Η εξίσωση $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ μπορεί να γραφεί ως

$$y = -\tfrac{3}{2}x + 3,$$

που είναι συνάρτηση πρώτου βαθμού (ευθεία), άρα παριστάνει συνάρτηση.

29. Η συνάρτηση h με τύπο (Ασκ: 2/103)

$$h(x) = 20 - 4,9x^2, \quad x \in [0, +\infty),$$

περιγράφει το ύψος (σε μέτρα) από το έδαφος στο οποίο βρίσκεται ένα αντικείμενο, όταν αυτό πέφτει από ένα βράχο ύψους $20\,\mathrm{m}$ (x είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα).

i. Ποια είναι η απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος, ύστερα από:

a. 1 δευτερόλεπτο

b. 1,1 δευτερόλεπτα

ii. Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα το αντικείμενο θα απέχει από το έδαφος:

a. 15 μέτρα

b. 10 μέτρα

c. 5 μέτρα

iii. Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα το αντικείμενο θα κτυπήσει στο έδαφος;

Λύση:

i. Υπολογίζουμε:

$$h(1) = 20 - 4,9 \cdot 1^2 = 20 - 4,9 = 15,1\,\mathrm{m}.$$
$$h(1,1) = 20 - 4,9 \cdot (1,1)^2 = 20 - 4,9 \cdot 1,21 = 20 - 5,929 = 14,071\,\mathrm{m}.$$

ii. Λύνουμε τις εξισώσεις $h(x) = y$ για κάθε ύψος y.

- Για $h(x) = 15$:

$$20 - 4,9x^2 = 15 \quad\Rightarrow\quad 4,9x^2 = 5 \quad\Rightarrow\quad x^2 = \tfrac{5}{4,9} \approx 1,020 \quad\Rightarrow\quad x \approx 1,01\,s.$$

- Για $h(x) = 10$:

$$20 - 4,9x^2 = 10 \quad\Rightarrow\quad 4,9x^2 = 10 \quad\Rightarrow\quad x^2 = \tfrac{10}{4,9} \approx 2,041 \quad\Rightarrow\quad x \approx 1,43\,s.$$

- Για $h(x) = 5$:

$$20 - 4,9x^2 = 5 \quad\Rightarrow\quad 4,9x^2 = 15 \quad\Rightarrow\quad x^2 = \tfrac{15}{4,9} \approx 3,061 \quad\Rightarrow\quad x \approx 1,75\,s.$$

iii. Το αντικείμενο κτυπά στο έδαφος όταν $h(x) = 0$:

$$20 - 4,9x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 4,9x^2 = 20 \quad\Rightarrow\quad x^2 = \tfrac{20}{4,9} \approx 4,082 \quad\Rightarrow\quad x \approx 2,02\,s.$$

Συνεπώς:

$$h(1) = 15,1\,\mathrm{m}, \quad h(1,1) = 14,07\,\mathrm{m},$$
$$h(x) = 15 \quad\Rightarrow\quad x \approx 1,01\,s,$$
$$h(x) = 10 \quad\Rightarrow\quad x \approx 1,43\,s,$$
$$h(x) = 5 \quad\Rightarrow\quad x \approx 1,75\,s,$$

και το αντικείμενο φτάνει στο έδαφος σε περίπου $2,02\,s$.

30. Μερικές συναρτήσεις έχουν την εξής ιδιότητα: (Ασκ: 3/103)

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

i. Ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις έχουν αυτή την ιδιότητα;

a. $f_1(x) = 2x$

b. $f_2(x) = x^2$

c. $f_3(x) = 5x - 2$

d. $f_4(x) = \frac{1}{x}$

ii. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f ισχύει:

a. $f(0) = 0$

b. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c. $f(3x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Λύση:

i. Ελέγχουμε μία–μία τις συναρτήσεις:

a. Για $f_1(x) = 2x$ έχουμε

$$f_1(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = f_1(a) + f_1(b),$$

άρα η ιδιότητα ισχύει.

b. Για $f_2(x) = x^2$ έχουμε

$$f_2(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \neq f_2(a) + f_2(b),$$

άρα η ιδιότητα δεν ισχύει.

c. Για $f_3(x) = 5x - 2$ έχουμε

$$f_3(a+b) = 5(a+b) - 2 = 5a + 5b - 2,$$

ενώ

$$f_3(a) + f_3(b) = (5a-2) + (5b-2) = 5a + 5b - 4,$$

άρα η ιδιότητα δεν ισχύει.

d. Για $f_4(x) = \frac{1}{x}$ έχουμε

$$f_4(a+b) = \frac{1}{a+b}, \quad f_4(a) + f_4(b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

που γενικά είναι διαφορετικά, άρα η ιδιότητα δεν ισχύει.

Συμπέρασμα: μόνο η συνάρτηση $f_1(x) = 2x$ ικανοποιεί την ιδιότητα.

ii. Από τη δοσμένη ιδιότητα $f(a+b) = f(a) + f(b)$:

a. Θέτουμε $a = b = 0$:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \;\; \Rightarrow \;\; f(0) = 2f(0) \;\; \Rightarrow \;\; f(0) = 0.$$

b. Θέτουμε $a = x$, $b = -x$:

$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \;\; \Rightarrow \;\; f(0) = f(x) + f(-x).$$

Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε

$$f(-x) = -f(x).$$

c. Θέτουμε $a = 2x$, $b = x$:

$$f(3x) = f(2x + x) = f(2x) + f(x).$$

Εφαρμόζουμε ξανά την ιδιότητα για $f(2x)$:

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Άρα

$$f(3x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x).$$

31. Να εξετάσετε αν τα γραφήματα που δίνονται ορίζουν συναρτήσεις. Στην περίπτωση που ορίζεται συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Ασκ: 5/104)

i. $\{(2,1), (-2,5), (0,4), (1,-7)\}$

ii. $\{(1,8), (-4,-5), (-3,3), (1,1)\}$

iii. $\{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$

iv. $\{(2,4), (-6,0), (-3,0), (4,-2), (2,2)\}$

Λύση:

i. Κάθε x εμφανίζεται μία φορά. Άρα είναι συνάρτηση. Πεδίο ορισμού: $D = \{-2, 0, 1, 2\}$ Σύνολο τιμών: $T = \{-7, 1, 4, 5\}$

ii. Το $x = 1$ αντιστοιχίζεται στις τιμές 8 και 1. Άρα δεν είναι συνάρτηση.

iii. Κάθε x εμφανίζεται μία φορά, άρα είναι συνάρτηση. Πεδίο ορισμού: $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Σύνολο τιμών: $T = \{1\}$

iv. Το $x = 2$ αντιστοιχίζεται στις τιμές 4 και 2. Άρα δεν είναι συνάρτηση.

32. Αν το σημείο $(3, 8)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις: (Ασκ: 7/105)

i. $g(x) = x^2 + a$

ii. $g(x) = ax + 2$

Λύση:

i. Αντικαθιστούμε το σημείο $(3, 8)$:

$$g(3) = 3^2 + a = 9 + a.$$

Επειδή $g(3) = 8$, έχουμε

$$9 + a = 8 \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

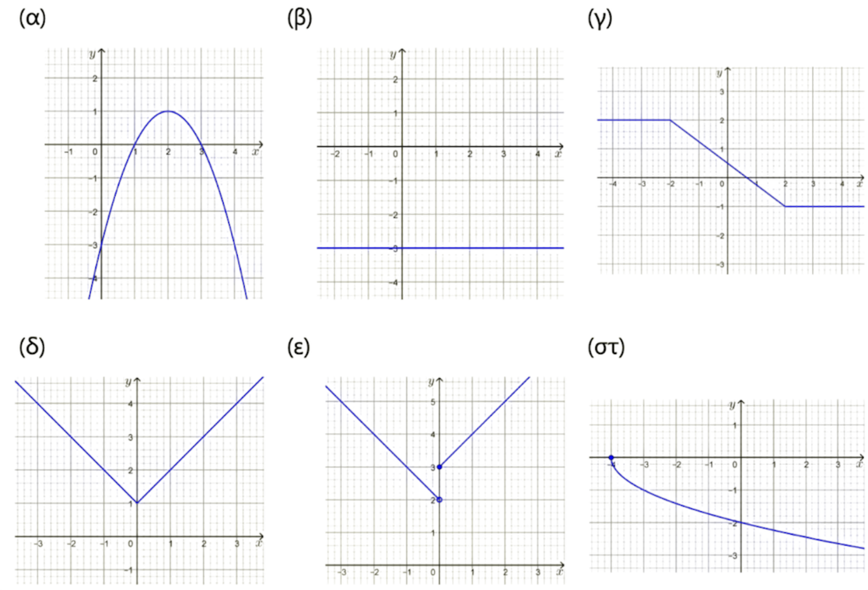
ii. Αντικαθιστούμε το σημείο $(3, 8)$:

$$g(3) = a \cdot 3 + 2 = 3a + 2.$$

Επειδή $g(3) = 8$, έχουμε

$$3a + 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad 3a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

33. Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού και το Σύνολο Τιμών των συναρτήσεων που παρουσιάζονται πιο κάτω μέσο γραφικών παραστάσεων. (Ασκ: 8/105)



Λύση:

(α) Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R}$, Σύνολο Τιμών: $(-\infty, 1]$

(β) Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R}$, Σύνολο Τιμών: $\{-3\}$

(γ) Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R}$, Σύνολο Τιμών: $[-1, 2]$

(δ) Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R}$, Σύνολο Τιμών: $[1, +\infty)$

(ε) Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R}$, Σύνολο Τιμών: $(2, +\infty)$

(ς) Πεδίο Ορισμού: $[-4, +\infty)$, Σύνολο Τιμών: $(-\infty, 0]$

34. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σχέσεις ορίζουν συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το x. (Ασκ: 9/105)

i. $y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $y = x^5,\ x \in \mathbb{R}$

iii. $y = \frac{1}{x},\ x \neq 0$

iv. $y^2 = 16 - x^2,\ x \in [-4, 4]$

v. $y^2 = x,\ x \geq 0$

vi. $x + 2y = 1,\ x \in \mathbb{R}$

Λύση:

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται μοναδικό $y = x^2$. Άρα είναι συνάρτηση.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται μοναδικό $y = x^5$. Άρα είναι συνάρτηση.

iii. Για κάθε $x \neq 0$, ορίζεται μοναδικό $y = \frac{1}{x}$. Άρα είναι συνάρτηση.

iv. Η εξίσωση $y^2 = 16 - x^2$ δίνει $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$. Για κάθε x υπάρχουν δύο τιμές του y, άρα δεν είναι συνάρτηση.

v. Η εξίσωση $y^2 = x$, με $x \geq 0$, δίνει $y = \pm\sqrt{x}$. Για κάθε $x > 0$ υπάρχουν δύο τιμές του y, άρα δεν είναι συνάρτηση.

vi. Από τη σχέση $x + 2y = 1$ έχουμε $y = \frac{1-x}{2}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό y, άρα είναι συνάρτηση.

35. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Ασκ: 1/116)

i. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια.

ii. Αν μια άρτια συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο $(\rho, 0)$, $\rho > 0$, τότε θα τον τέμνει και στο $(-\rho, 0)$.

iii. Η συνάρτηση $f(x) = x + x^{-2},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι πολυωνυμική.

iv. Η συνάρτηση $f(x) = |x| - x,\ x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή συνάρτηση.

v. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (x-1)^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ είναι ταυτοτική.

Λύση:

i. Για $f(x) = 3x^2$ έχουμε
$$f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x),$$
άρα η συνάρτηση είναι άρτια. ΣΩΣΤΟ

ii. Αν f είναι άρτια και $f(\rho) = 0$, τότε $f(-\rho) = f(\rho) = 0$. Άρα το γράφημα τέμνει τον άξονα και στο $(-\rho, 0)$. ΣΩΣΤΟ

iii. Η συνάρτηση $f(x) = x + x^{-2}$ περιέχει όρο με αρνητικό εκθέτη, άρα δεν είναι πολυωνυμική. ΛΑΘΟΣ

iv. Για $x \geq 0$ έχουμε $f(x) = x - x = 0$. Για $x < 0$ έχουμε $f(x) = -x - x = -2x$, που δεν είναι σταθερό. Άρα η συνάρτηση δεν είναι σταθερή. ΛΑΘΟΣ

v. Υπολογίζουμε:
$$f(x) = x^2 - (x-1)^2 - x + 1 = x^2 - (x^2 - 2x + 1) - x + 1 = 2x - 1 - x + 1 = x.$$
Άρα $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι η ταυτοτική. ΣΩΣΤΟ

36. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, ποιες περιττές και ποιες ούτε άρτιες ούτε περιττές. (Ασκ: 2/116)

i. $f(x) = 3x^2 + 5x^4,\ x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = 3|x| + 1,\ x \in \mathbb{R}$

iii. $f(x) = |x+1|,\ x \in \mathbb{R}$

iv. $f(x) = x^3 - 3x^5,\ x \in \mathbb{R}$

v. $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

vi. $f(x) = |x-2| + |x+2|,\ x \in \mathbb{R}$

Λύση:

i. Έχουμε
$$f(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f(x).$$
Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

ii. Έχουμε

$$f(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f(x).$$

Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

iii. Έχουμε

$$f(-x) = |-x+1| = |1-x|,$$

που δεν ισούται γενικά ούτε με $f(x) = |x+1|$ ούτε με $-f(x)$. Άρα η συνάρτηση είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

iv. Έχουμε

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -x^3 + 3x^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f(x).$$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

v. Έχουμε

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1+(-x)^2} = \frac{-x^3}{1+x^2} = -\frac{x^3}{1+x^2} = -f(x).$$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

vi. Έχουμε

$$f(-x) = |-x-2| + |-x+2| = |x+2| + |x-2| = f(x).$$

Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

37. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή καμία από τα δύο και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Ασκ: 4/117)

i. $f(x) = \sqrt{x-4},\ x \in [4, +\infty)$

ii. $g(x) = 3x^3 + x,\ x \in \mathbb{R}$

iii. $h(x) = x^6 - x^4,\ x \in \mathbb{R}$

Λύση:

i. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-4}$ έχει πεδίο ορισμού $[4, +\infty)$. Για να είναι άρτια, θα έπρεπε αν $x \in D(f)$ τότε και $-x \in D(f)$, κάτι που δεν ισχύει. Άρα η συνάρτηση είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

ii. Έχουμε

$$g(-x) = 3(-x)^3 + (-x) = -3x^3 - x = -(3x^3 + x) = -g(x).$$

Άρα η συνάρτηση είναι περιττή.

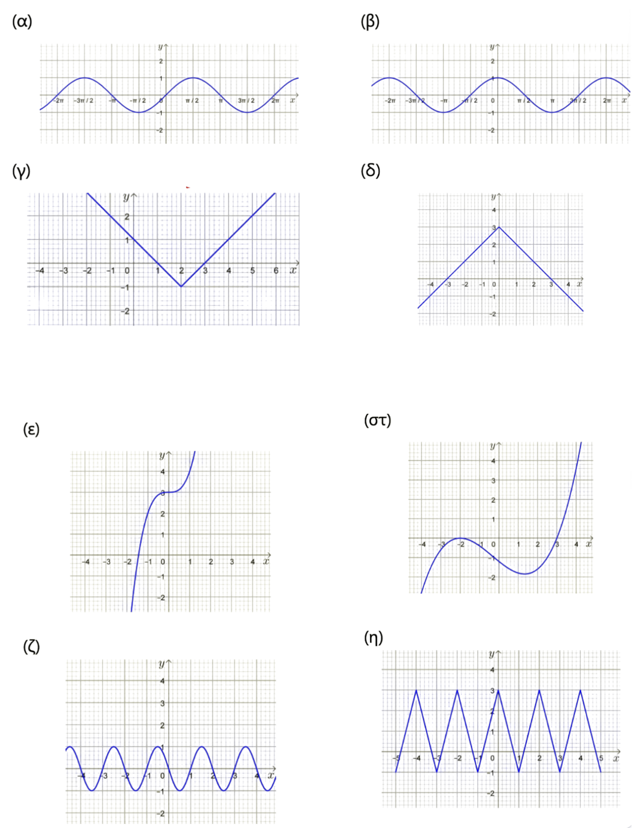
iii. Έχουμε
$$h(-x) = (-x)^6 - (-x)^4 = x^6 - x^4 = h(x).$$
Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

38. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = 2,\ x \in \mathbb{R}$ είναι άρτια ή περιττή. (Ασκ: 5/117)

Λύση:

Έχουμε
$$f(-x) = 2 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \to \text{άρτια.}$$

39. Να διερευνήσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις που απεικονίζονται είναι Άρτιες ή Περιττές ή τίποτα από τα δυο. (Ασκ: 6/117)



Λύση:

α. Περίττή

β. Ἀρτια

γ. Ούτε άρτια, ούτε περιττή

δ. Ἀρτια

ε. Ούτε άρτια, ούτε περιττή

στ. Ούτε άρτια, ούτε περιττή

ζ. Περίττή

η. Ἀρτια

40. Δίνεται ότι η συνάρτηση $g(x) = (x+2)^2 + f(x),\ x \in \mathbb{R}$ είναι ταυτοτική. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f. (Ασκ: 7/118)

Λύση:

Αφού η $g(x)$ είναι ταυτοτική, ισχύει:

$$g(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα:

$$x = (x+2)^2 + f(x).$$

Αναπτύσσουμε:

$$x = (x^2 + 4x + 4) + f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = x - (x^2 + 4x + 4).$$

Επομένως:

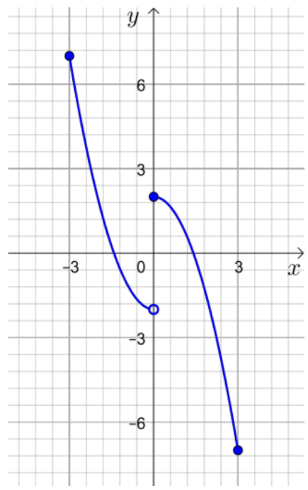
$$f(x) = -x^2 - 3x - 4.$$

41. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & -3 \leq x < 0, \\ 2 - x^2, & 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

(Ασκ: 8/118)

Λύση:



42. Έστω η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 2, \\ 3x - a, & x > 2 \end{cases}$$

(Ασκ: 9/118)

i. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε το διάγραμμα της συνάρτησης να περνά από το σημείο $A(3, 4)$.

ii. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση:

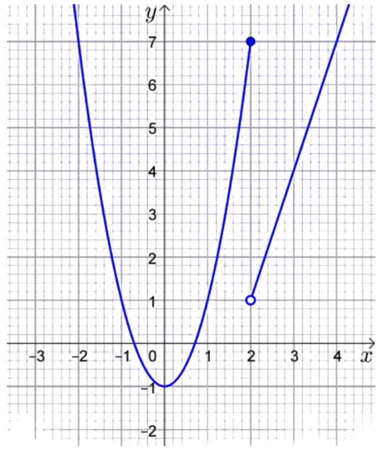
i. Εφόσον το σημείο $A(3, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση και $x = 3 > 2$, ισχύει:

$$f(3) = 3 \cdot 3 - a = 9 - a.$$

Επειδή $f(3) = 4$, έχουμε:

$$9 - a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 5.$$

ii. Η γραφική παράσταση της f.



43. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και να τις παραστήσετε γραφικά. (Ασκ: 10/118)

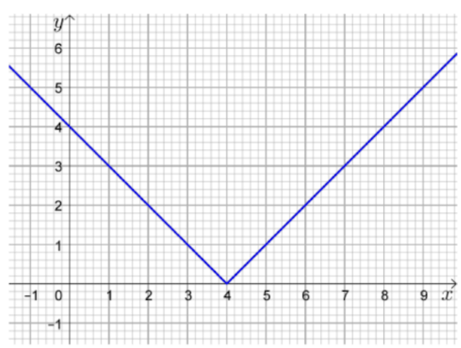
α. $f(x) = |x-4|,\ x \in \mathbb{R}$

β. $g(x) = |x-4| + x,\ x \in \mathbb{R}$

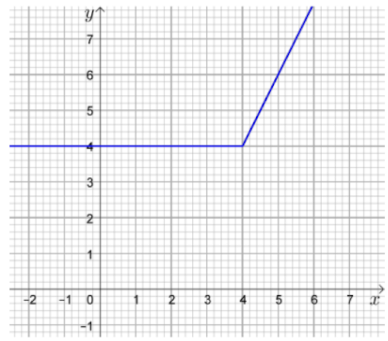
γ. $h(x) = |x^2+1|,\ x \in \mathbb{R}$

Λύση:

(α) Είναι τμηματική



(β) Είναι τμηματική



(γ) Δεν είναι τμηματική