

Εκθετικές και Λογαριθμικές Εξισώσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{2-3\alpha}{1-\alpha} \right)^x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Για ποιες τιμές του α είναι εκθετική συνάρτηση;

(b) Αν $\alpha = \frac{8}{7}$, να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 16$.

Λύση:

Η βάση είναι

$$a = \frac{2-3\alpha}{1-\alpha}.$$

Απαιτείται:

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad \alpha \neq 1.$$

Λύνοντας προκύπτει:

$$\alpha < \frac{2}{3}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha > 1$$

Για $\alpha = \frac{8}{7}$:

$$a = 10 \Rightarrow 10^x = 16 \Rightarrow \boxed{x = \log 16}.$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(a)

$$\left(\frac{2}{3} \right)^{3x+1} = \frac{9}{4}$$

Λύση:

$$3x + 1 = -2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

(b)

$$\frac{\log 81}{\log 3} = x$$

Λύση:

$$\boxed{x = 4}$$

(c)

$$2 \log(x+2) - 1 = \log(x+6) - \log 5$$

Λύση:

$$(x+2)^2 = 2x+12 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

(d)

$$\log_x(\log_3 81) = 2$$

Λύση:

$$\boxed{x=2}$$

(e)

$$\log_4(1+x) = \log_4(1-x)$$

Λύση:

$$\boxed{x=0}$$

(f)

$$3^{2\sqrt{x}} - 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} = 3$$

Λύση:

$$\boxed{x=1}$$

(g)

$$\log x + \log(x-1) = \log 12$$

Λύση:

$$\boxed{x=4}$$

(h)

$$(5^{2-x})^{3x-1} = 1$$

Λύση:

$$\boxed{x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{3}}$$

(θ)

$$2^{x+1} - 2^{x+3} - 2^x + 2^{x-1} = -52$$

Λύση:

$$2^x = 8 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

(ι)

$$x^{\ln \sqrt{x}} = e^8$$

Λύση:

$$(\ln x)^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = e^4 \text{ ή } x = e^{-4}}$$

(κ)

$$(x^2 - 5x + 5)^{x^2+4x} = 1$$

Λύση:

$$\boxed{x = -4, 0, 1, 4}$$

(λ)

$$15^x + 25 = 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x$$

Λύση:

$$\boxed{x = 1}$$

(μ)

$$21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$$

Λύση:

$$\boxed{x = -1}$$

(ν)

$$6 \log_8 2 + 2 \log_x 2 = 5$$

Λύση:

$$\boxed{x = 2^{2/3}}$$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$$

Λύση:

$$\boxed{D_f = (-1, 2) \setminus \{0\}}$$

4. Αν $\alpha = \log x$ και $\beta = \log 2$, να εκφράσετε

$$\log_{5x} \sqrt[x]{x}$$

Λύση:

$$\frac{\alpha}{x(\log 5 + \alpha)}$$

5. Οι πωλήσεις

$$S(t) = 100(1 - e^{kt}), \quad k < 0$$

- (a) Αν $S(1) = 15$

Λύση:

$$k = \ln 0.85$$

- (b) Πωλήσεις στα 5 χρόνια

Λύση:

$$S(5) = 100(1 - 0.85^5)$$