Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Αόριστο Ολοκλήρωμα

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα πιο κάτω κλάσματα:

i. $\dfrac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$

ii. $\dfrac{5x+7}{2x^2+5x+2}$

iii. $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

iv. $\dfrac{3x-1}{x(x-1)^2}$

v. $\dfrac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2}$

vi. $\dfrac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$

vii. $\dfrac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$

viii. $\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-1}$

ix. $\dfrac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

x. $\dfrac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$

Λύση: (Ασκ. 1/12)

i.

$$\frac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4}$$

$$8x^2-19x+2=A(x-1)(x-4)+B(x+2)(x-4)+C(x+2)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 4,\ B = 1,\ C = 3$

$$\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$$

ii.

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{5x+7}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x + 7 = A(x+2) + B(2x+1)$$

Λύνοντας: $A = 3,\ B = 1$

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{x+2}$$

iii.

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$3x + 2 = A(x+1) + B$$

Λύνοντας: $A = 3,\ B = -1$

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

iv.

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x - 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Λύνοντας: $A = -1,\ B = 1,\ C = 2$

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

v.

$$\frac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$5x^2+4x-7 = A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)$$

Λύνοντας: $A = 2,\ B = 3,\ C = -1$

$$\frac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

vi.

$$\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$5x^2-x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 3,\ B = 2,\ C = 1$

$$\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

vii.

$$\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$3x^2+7x+2 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+1)$$

Λύνοντας: $A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{7}{2},\ C = \frac{9}{2}$

$$\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{7x+9}{2(x^2+2x+5)}$$

viii.

$$\frac{3x^2+x+2}{x^3-1} = \frac{3x^2+x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$3x^2+x+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 2,\ B = 1,\ C = 0$

$$\frac{3x^2+x+2}{x^3-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1}$$

ix.

$$\frac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$$

$$\text{Διαίρεση: } x^3-7x^2-13x-15 \div (x^2-2x-3) = x-5+\frac{-20x-30}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{-20x-30}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \implies A = -\frac{45}{2},\ B = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3} = x-5-\frac{45}{2(x-3)} + \frac{5}{2(x+1)}$$

x.

$$\frac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Διαίρεση: } 2x^3-9x^2+7x+7 \div (x^2-5x+6) = 2x+1+\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \implies A = -1,\ B = 1$$

$$\frac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}=2x+1-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

Υπενθύμιση:

1. Διαφορετικοί Γραμμικοί Παράγοντες
Παρονομαστής: $(x-a)(x-b)\dots$

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

Παράδειγμα: $\dfrac{5x+7}{(2x+1)(x+2)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x+2}$

2. Επαναλαμβανόμενοι Γραμμικοί Παράγοντες
Παρονομαστής: $(x-a)^n$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Παράδειγμα: $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}$

3. Αδιαίρετοι Δευτεροβάθμιοι Παράγοντες
Παρονομαστής: x^2+bx+c με $\Delta=b^2-4c<0$

$$\frac{P(x)}{x^2+bx+c}=\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

Παράδειγμα: $\dfrac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

4. Μη Κατάλληλα Κλάσματα (Improper Fractions)
Όταν ο βαθμός του αριθμητή $\geq$ του παρονομαστή, διαιρούμε πρώτα:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},\quad \deg(R)<\deg(Q)$$

Παράδειγμα: $\dfrac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int x^4\,dx$

(β) $\int x^{-2}\,dx$

(γ) $\int x^{\frac{3}{4}}\,dx$

(δ) $\int \frac{1}{u^4}\,du$

(ε) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(στ) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{u}}\,du$

(ζ) $\int (u^2-3u+1)\,du$

(η) $\int (x+2\sqrt{x}-\pi)\,dx$

(ϑ) $\int \left(e^x + e\,x + \frac{e}{x}\right)dx$

(ι) $\int (u-5)^2\,du$

(ια) $\int 2u(u^2-3)\,du$

(ιβ) $\int \sqrt{x}\,(x-2)\,dx$

(ιγ) $\int \frac{u^4-5u^3+3u}{u^2}\,du$

(ιδ) $\int \frac{3x-x^2+2x^3}{x^3}\,dx$

(ιε) $\int (\text{ημ}\theta - \text{συν}\theta)\,d\theta$

(ιστ) $\int (3\theta - \text{εφ}^2\theta)\,d\theta$

(ιζ) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} - 2x\right)dx$

(ιη) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/25)

(α) Κανόνας δυνάμεων:

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + c.$$

(β) x^{-2} με δύναμη:

$$\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

(γ) Κανόνας δυνάμεων:

$$\int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c.$$

(δ) u^{-4}:

$$\int \frac{1}{u^4}\,du = \int u^{-4}\,du = -\frac{1}{3}u^{-3} + c = -\frac{1}{3u^3} + c.$$

(ε) $x^{-1/2}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x} + c.$$

(στ) $u^{-1/3}$:

$$\int \frac{2}{\sqrt[3]{u}}\,du = 2\int u^{-1/3}\,du = 2\cdot\frac{u^{2/3}}{2/3} = 3\,u^{2/3} + c.$$

(ζ) Πολυώνυμο:

$$\int (u^2 - 3u + 1)\,du = \frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + u + c.$$

(η) Όρος–όρος:

$$\int (x + 2\sqrt{x} - \pi)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{3/2} - \pi x + c.$$

(ϑ) Γραμμικότητα:

$$\int \Big(e^x + e\,x + \frac{e}{x}\Big)\,dx = e^x + \frac{e}{2}x^2 + e\ln|x| + c.$$

(ι) Ανάπτυξη:

$$\int (u-5)^2\,du = \int (u^2 - 10u + 25)\,du = \frac{u^3}{3} - 5u^2 + 25u + c.$$

(ια) Απλοποίηση:

$$\int 2u(u^2 - 3)\,du = \int (2u^3 - 6u)\,du = \frac{1}{2}u^4 - 3u^2 + c.$$

(ιβ) $\sqrt{x}(x-2) = x^{3/2} - 2x^{1/2}$:

$$\int \sqrt{x}(x-2)\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + c.$$

(ιγ) Διάσπαση κλάσματος:

$$\int \frac{u^4 - 5u^3 + 3u}{u^2}\,du = \int \big(u^2 - 5u + \tfrac{3}{u}\big)\,du = \frac{u^3}{3} - \frac{5}{2}u^2 + 3\ln|u| + c.$$

(ιδ) Διάσπαση:

$$\int \frac{3x - x^2 + 2x^3}{x^3}\,dx = \int \Big(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + 2\Big)dx = -\frac{3}{x} - \ln|x| + 2x + c.$$

(ιε) Τριγωνομετρικά:

$$\int (\text{ημ}\theta - \text{συν}\theta)\,d\theta = -\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta + c.$$

(ιστ) Απλοποίηση:

$$\int (3\vartheta - \text{εφ}^2\vartheta)\,d\vartheta = 3\int \vartheta\,d\vartheta - \int \text{εφ}^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{3\vartheta^2}{2} - (\text{εφ}\,\vartheta - \vartheta) + c.$$

(ιζ) Γραμμικότητα:

$$\int\Big(\frac{1}{1+x^2}-2x\Big)\,dx = \text{τοξεφ}(x) - x^2 + c.$$

(ιη) Παράγωγος τοξημ$x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\,\text{τοξημ}(x) + c.$$

3. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int \lambda x^{\kappa-2}\,dx = 3x^5 + c.$$

Λύση: (Ασκ. 2/25)

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη:

$$\lambda x^{\kappa-2} = \frac{d}{dx}\big(3x^5 + c\big) = 15x^4.$$

Εφόσον η σχέση ισχύει για κάθε x, ταυτίζουμε εκθέτες και συντελεστές:

$$\kappa - 2 = 4 \Rightarrow \kappa = 6, \qquad \lambda = 15.$$

Έλεγχος:

$$\int 15x^{6-2}\,dx = \int 15x^4\,dx = 3x^5 + c.$$

Άρα $\kappa = 6,\ \lambda = 15$.

4. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \sqrt{6+x}\,dx$

(β) $\displaystyle\int \text{συν}(3x)\,dx$

(γ) $\displaystyle\int (2x-7)^{80}\,dx$

(δ) $\displaystyle\int x\,\text{συν}(x^2+1)\,dx$

(ε) $\displaystyle\int \text{ημ}\theta\,(1+\text{συν}\theta)^3\,d\theta$

(στ) $\displaystyle\int x\,e^{1-3x^2}\,dx$

(ζ) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

(η) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$

(ϑ) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

(ι) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+2)^3}\,dx$

(ια) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(ιβ) $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}(\ln x)}{x}\,dx$

(ιγ) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

(ιδ) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$

(ιε) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/30)

(α) Θέτουμε $u=6+x \Rightarrow du=dx$.

$$\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}+c = \frac{2}{3}(6+x)^{3/2}+c.$$

(β)

$$\int \text{συν}(3x)\,dx = \frac{1}{3}\,\text{ημ}(3x)+c.$$

(γ) Θέτουμε $u=2x-7$, $du=2dx$.

$$\int (2x-7)^{80}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{80}du = \frac{u^{81}}{162}+c = \frac{(2x-7)^{81}}{162}+c.$$

(δ) Θέτουμε $u=x^2+1$, $du=2x\,dx$.

$$\int x\,\text{συν}(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \text{συν}u\,du = \frac{1}{2}\,\text{ημ}u+c = \frac{\text{ημ}(x^2+1)}{2}+c.$$

(ε) Θέτουμε $u=1+\text{συν}\theta$, $du=-\text{ημ}\theta\,d\theta$.

$$\int \text{ημ}\theta(1+\text{συν}\theta)^3d\theta = -\int u^3du = -\frac{(1+\text{συν}\theta)^4}{4}+c.$$

(στ) Θέτουμε $u = 1 - 3x^2$, $du = -6x\,dx$.

$$\int x\,e^{\,1-3x^2}dx = -\frac{1}{6}\int e^u du = -\frac{e^{\,1-3x^2}}{6} + c.$$

(ζ) Θέτουμε $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1,\ dx = 2t\,dt$.

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = 2\int (t^2+1)^2 t^2\,dt = 2\int (t^6 + 2t^4 + t^2)\,dt = \frac{2t^7}{7} + \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + c,$$

δηλαδή

$$\frac{2(\sqrt{x-1})^7}{7} + \frac{4(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + c.$$

(η) Θέτουμε $u = x - 2 \Rightarrow x = u + 2$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx = \int \frac{u+2}{\sqrt{u}}\,du = \int (u^{1/2} + 2u^{-1/2})\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + 4u^{1/2} + c,$$

δηλαδή

$$\frac{2(\sqrt{x-2})^3}{3} + 4\sqrt{x-2} + c.$$

(ϑ) Θέτουμε $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2,\ dx = 2t\,dt$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{2t}{t+1}dt = 2\int \Big(1 - \frac{1}{t+1}\Big)dt = 2t - 2\ln(t+1) + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.$$

(ι) Θέτουμε $u = x^2 + 2$, $du = 2x\,dx$, $x^2 = u - 2$.

$$\int \frac{x^3}{(x^2+2)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u-2}{u^3}du = \frac{1}{2}\int (u^{-2} - 2u^{-3})du = -\frac{1}{2}u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-2} + c,$$

δηλαδή

$$-\frac{1}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2(x^2+2)^2} + c.$$

(ια) Θέτουμε $u = 1 + x^2$, $du = 2x\,dx$.

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1+x^2} + c.$$

(ιβ) Θέτουμε $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{\text{ημ}(\ln x)}{x} dx = \int \text{ημ} u \, du = -\text{συν} u + c = -\text{συν}(\ln x) + c.$$

(ιγ)

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, \quad u = e^x \Rightarrow du = e^x dx.$$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{τοξεφ}(u) + c = \text{τοξεφ}(e^x) + c.$$

(ιδ) Θέτουμε $u = 1 - e^x \Rightarrow du = -e^x dx$, $e^{3x} = (1-u)^3$.

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} dx = -\int \frac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} \, du = -\int \left(u^{-1/2} - 3u^{1/2} + 3u^{3/2} - u^{5/2}\right) du$$

$$= -\left(2u^{1/2} - 2u^{3/2} + \tfrac{6}{5}u^{5/2} - \tfrac{2}{7}u^{7/2}\right) + c = -2\sqrt{u} + \frac{4}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + c,$$

δηλαδή

$$-\frac{2(\sqrt{1-e^x})^5}{5} + \frac{4(\sqrt{1-e^x})^3}{3} - 2\sqrt{1-e^x} + c.$$

(ιε) Θέτουμε $t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow x = t^4, \; \sqrt{x} = t^2, \; dx = 4t^3 dt$.

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1-t^2}{1+t} \, 4t^3 dt = 4\int t^3(1-t) \, dt = 4\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right) + c = t^4 - \frac{4}{5}t^5 + c = x - \frac{4}{5}x^{5/4} + c.$$

5. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας την υποκατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση:

i. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \, dx, \qquad x = 3\,\text{ημ}\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} \, dx, \qquad x = 3\,\text{ημ}\theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Λύση: (Ασκ. 2/30)

i. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$$x = 3\,\text{ημ}\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 3\,\text{συν}\theta\,d\theta, \quad \sqrt{9-x^2} = 3\,\text{συν}\theta.$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{3\,\text{συν}\theta}\,3\,\text{συν}\theta\,d\theta = \int d\theta = \theta + c.$$

Επιστρέφοντας στη μεταβλητή x:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

ii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$$x = 3\,\text{ημ}\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 3\,\text{συν}\theta\,d\theta, \quad x^2 = 9\,\text{ημ}^2\theta, \quad \sqrt{9-x^2} = 3\,|\text{συν}\theta| = -3\,\text{συν}\theta,$$

επειδή συν$\theta < 0$ για $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{9\,\text{ημ}^2\theta\,(-3\,\text{συν}\theta)} \cdot (3\,\text{συν}\theta)\,d\theta = -\frac{1}{9}\int \frac{1}{\text{ημ}^2\theta}\,d\theta.$$

Επειδή $\dfrac{d}{d\theta}(\text{σφ}\,\theta) = -\dfrac{1}{\text{ημ}^2\theta}$,

$$-\frac{1}{9}\int \frac{1}{\text{ημ}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{9}\,\text{σφ}\,\theta + c.$$

Επιστρέφουμε στη μεταβλητή x:

$$\text{σφ}\,\theta = \frac{\text{συν}\,\theta}{\text{ημ}\,\theta} = \frac{-\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}}{\text{ημ}\,\theta} = \frac{-\sqrt{9-x^2}/3}{x/3} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$$

6. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \text{συν}(7x)\,dx$

ii. $\displaystyle\int \text{στεμ}^2(5x-3)\,dx$

iii. $\displaystyle\int (6x-1)^{21}\,dx$

iv. $\displaystyle\int e^{4-9x}\,dx$

v. $\displaystyle\int \left(e^{4x} - 2\cdot 4^{-3x}\right)dx$

vi. $\displaystyle\int \left(\text{ημ}4x - \text{ημ}5x\right)dx$

vii. $\displaystyle\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$

viii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

ix. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$

x. $\displaystyle\int x(x^2-3)^{17}\,dx$

xi. $\displaystyle\int \frac{(\text{τοξεφ}\,x)^3}{1+x^2}\,dx$

xii. $\displaystyle\int \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \frac{2\,\text{ημ}x}{\sqrt{1-\text{συν}x}}\,dx$

xiv. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$

xv. $\displaystyle\int \frac{\text{τεμ}^2 x}{2+\text{εφ}x}\,dx$

xvi. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$

xvii. $\displaystyle\int \text{σφ}\,x\,dx$

xviii. $\displaystyle\int \frac{2+2\,\text{ημ}x}{x-\text{συν}x}\,dx$

xix. $\displaystyle\int \frac{6x+15}{x^2+5x-1}\,dx$

xx. $\displaystyle\int \text{στεμ}\,x\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/34)

i. $\displaystyle\int \text{συν}(7x)\,dx$

Θέτουμε $u = 7x \Rightarrow du = 7\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{7}$

$$\int \text{συν}(7x)\,dx = \frac{1}{7}\int \text{συν}(u)\,du = \frac{1}{7}\text{ημ}(u) + c = \frac{\text{ημ}(7x)}{7} + c.$$

ii. $\displaystyle\int \text{στεμ}^2(5x-3)\,dx$

$u = 5x-3 \Rightarrow du = 5\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$

$$\int \text{στεμ}^2(5x-3)\,dx = \frac{1}{5}\int \text{στεμ}^2(u)\,du = -\frac{1}{5}\text{σφ}(u) + c = -\frac{\text{σφ}(5x-3)}{5} + c.$$

iii. $\displaystyle\int (6x-1)^{21}\,dx$

$u = 6x-1 \Rightarrow du = 6\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{6}$

$$\int (6x-1)^{21}\,dx = \frac{1}{6}\int u^{21}du = \frac{u^{22}}{132} + c = \frac{(6x-1)^{22}}{132} + c.$$

iv. $\displaystyle\int e^{4-9x}\,dx$

$u = 4 - 9x \Rightarrow du = -9\,dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{9}$

$$\int e^{4-9x}\,dx = -\frac{1}{9}\int e^{u}\,du = -\frac{e^{u}}{9} + c = -\frac{e^{4-9x}}{9} + c.$$

v. $\displaystyle\int \left(e^{4x} - 2\cdot 4^{-3x}\right)dx$

$$\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x}, \qquad \int 4^{-3x}\,dx = \frac{4^{-3x}}{-3\ln 4}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{4x}}{4} + \frac{2}{3\ln 4}4^{-3x} + c.$$

vi. $\displaystyle\int \left(\text{ημ}4x - \text{ημ}5x\right)dx$

$$\int \text{ημ}4x\,dx = -\frac{\text{συν}4x}{4}, \quad \int \text{ημ}5x\,dx = -\frac{\text{συν}5x}{5}.$$

$$f(x) = -\frac{\text{συν}4x}{4} + \frac{\text{συν}5x}{5} + c.$$

vii. $\displaystyle\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{dx}{(5x)^2+1} = \frac{1}{5}\text{τοξεφ}(5x) + c.$$

viii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{τοξημ}\frac{x}{a} + c \quad \Rightarrow \quad \text{τοξημ}\frac{x}{2} + c.$$

ix. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$

$u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{1}{2}\int u^{-5}\,du = -\frac{1}{8u^4} + c = -\frac{1}{8(2x+1)^4} + c.$$

x. $\displaystyle\int x(x^2-3)^{17}\,dx$

$u = x^2 - 3 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{1}{2}\int u^{17}\,du = \frac{u^{18}}{36} + c = \frac{(x^2-3)^{18}}{36} + c.$$

xi. $\displaystyle\int \frac{(\text{τοξεφ}\,x)^3}{1+x^2}\,dx$

$u = \text{τοξεφ}\,x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\text{τοξεφ}\,x)^4}{4} + c.$$

xii. $\displaystyle\int \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\int u^6\,du = \frac{u^7}{7} + c = \frac{(\ln x)^7}{7} + c.$$

xiii. $\displaystyle\int \frac{2\,\text{ημ}x}{\sqrt{1-\text{συν}x}}\,dx$

$u = 1 - \text{συν}x \Rightarrow du = \text{ημ}x\,dx$

$$2\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 4\sqrt{u} + c = 4\sqrt{1-\text{συν}x} + c.$$

xiv. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$

$u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x\,dx$

$$\int u^{-4}\,du = -\frac{1}{3u^3} + c = -\frac{1}{3(e^x-1)^3} + c.$$

xv. $\displaystyle\int \frac{\text{τεμ}^2 x}{2+\text{εφ}x}\,dx$

$u = 2 + \text{εφ}x \Rightarrow du = \text{τεμ}^2 x\,dx$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|2+\text{εφ}x| + c.$$

xvi. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$

$u = x^2 + 3 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + c = \frac{3}{2}\ln|x^2+3| + c.$$

xvii. $\displaystyle\int \text{σφ}\,x\,dx$

$$\int \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}\,dx = \ln|\text{ημ}x| + c.$$

xviii. $\displaystyle\int \frac{2+2\,\text{ημ}x}{x-\text{συν}x}\,dx$

$u = x - \text{συν}x \Rightarrow du = (1+\text{ημ}x)\,dx$

$$2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + c = 2\ln|x-\text{συν}x| + c.$$

xix. $\displaystyle\int \frac{6x+15}{x^2+5x-1}\,dx$

Παρατηρούμε $(x^2+5x-1)' = 2x+5,\ 6x+15 = 3(2x+5)$

$$3\int \frac{2x+5}{x^2+5x-1}\,dx = 3\ln|x^2+5x-1| + c.$$

xx. $\displaystyle\int \text{στεμ}\,x\,dx$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $\text{στεμ}x + \text{σφ}x$:

$$\int \text{στεμ}\,x\,dx = \int \text{στεμ}\,x \cdot \frac{\text{στεμ}x + \text{σφ}x}{\text{στεμ}x + \text{σφ}x}\,dx = \int \frac{\text{στεμ}^2 x + \text{στεμ}x\,\text{σφ}x}{\text{στεμ}x + \text{σφ}x}\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(\text{στεμ}x + \text{σφ}x)' = \text{στεμ}x\,\text{τεμ}x + \text{τεμ}^2 x + 1 = \text{στεμ}^2 x + \text{στεμ}x\,\text{σφ}x.$$

Άρα:

$$\int \text{στεμ}\,x\,dx = -\int \frac{-(\text{στεμ}x + \text{σφ}x)'}{\text{στεμ}x + \text{σφ}x}\,dx = -\ln|\text{στεμ}x + \text{σφ}x| + c.$$

7. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις πιο κάτω τυποποιημένες μορφές ολοκληρωμάτων.

$$\int f(ax+\beta)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+\beta)+c \tag{1}$$

$$\int f^{\nu}(x)f'(x)\,dx = \int f^{\nu}(x)\,d(f(x)) = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}+c, \quad \nu \neq -1 \tag{2}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,d(f(x)) = \ln|f(x)|+c \tag{3}$$

i.	$\int \text{συν}\, 7x\,dx$	vii.	$\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx$	xiii.	$\int \text{σφ}\, x\,dx$
ii.	$\int \text{στεμ}^2(5x-3)\,dx$	viii.	$\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$	xiv.	$\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$
iii.	$\int (6x-1)^{21}\,dx$	ix.	$\int \frac{2\,\text{ημ}\, x}{\sqrt{1-\text{συν}\, x}}\,dx$	xv.	$\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$
iv.	$\int e^{4-9x}\,dx$	x.	$\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$	xvi.	$\int \text{εφ}\, x\,dx$
v.	$\int (e^{4x}-2\cdot 4^{-3x})\,dx$	xi.	$\int \frac{\text{τεμ}^2 x}{2+\text{εφ}\, x}\,dx$	xvii.	$\int \frac{2+2\,\text{ημ}\, x}{x-\text{συν}\, x}\,dx$
vi.	$\int (\text{ημ}\, 4x-\text{ημ}\, 5x)\,dx$	xii.	$\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$	xviii.	$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Λύση:

i. $\int \text{συν}\, 7x\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int \text{συν}\, 7x\,dx = \frac{1}{7}\,\text{ημ}\, 7x + c$$

ii. $\int \text{σ}\tau\varepsilon\mu^2(5x-3)\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int \text{σ}\tau\varepsilon\mu^2(5x-3)\,dx = -\frac{1}{5}\,\sigma\varphi(5x-3)+c$$

iii. $\int (6x-1)^{21}\,dx$ (Τύπος 2)

$$\int (6x-1)^{21}\,dx = \frac{(6x-1)^{22}}{132}+c$$

iv. $\int e^{4-9x}\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int e^{4-9x}\,dx = -\frac{1}{9}e^{4-9x}+c$$

v. $\int (e^{4x}-2\cdot 4^{-3x})\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int e^{4x}\,dx - 2\int 4^{-3x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x}+\frac{2}{3\ln 4}\,4^{-3x}+c$$

vi. $\int (\eta\mu\,4x-\eta\mu\,5x)\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int \eta\mu\,4x\,dx - \int \eta\mu\,5x\,dx = -\frac{1}{4}\,\sigma\upsilon\nu\,4x+\frac{1}{5}\,\sigma\upsilon\nu\,5x+c$$

vii. $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx$ (Τύπος 2)

$$\int (\arctan x)^3\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{(\arctan x)^4}{4}+c$$

viii. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$ (Τύπος 2)

$$\int (\ln x)^6 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^7}{7} + c$$

ix. $\displaystyle\int \frac{2\,\text{ημ}\,x}{\sqrt{1-\text{συν}\,x}}\,dx$ (Τύπος 2)

$$\int \frac{2\,\text{ημ}\,x}{\sqrt{1-\text{συν}\,x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\text{συν}\,x}}\,2\,\text{ημ}\,x\,dx = 4\sqrt{1-\text{συν}\,x} + c$$

x. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$ (Τύπος 2)

$$\int \frac{1}{(e^x-1)^4}\cdot e^x\,dx = -\frac{1}{3(e^x-1)^3} + c$$

xi. $\displaystyle\int \frac{\text{τεμ}^2 x}{2+\text{εφ}\,x}\,dx$ (Τύπος 3)

$$\int \frac{1}{2+\text{εφ}\,x}\cdot \text{τεμ}^2 x\,dx = \ln|2+\text{εφ}\,x| + c$$

xii. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$ (Τύπος 3)

$$\int \frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+3| + c$$

xiii. $\displaystyle\int \text{σφ}\,x\,dx$ (Τύπος 3)

$$\int \frac{\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x}\,dx = \ln|\text{ημ}\,x| + c$$

xiv. $\displaystyle\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int \frac{1}{(5x)^2+1}\,dx = \frac{1}{5}\tan^{-1}(5x) + c$$

xv. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int (2x+1)^{-5}\,dx = -\frac{1}{8(2x+1)^4} + c$$

xvi. $\displaystyle\int \text{εφ}\,x\,dx$ (Τύπος 3)

$$\int \text{εφ}\,x\,dx = \int \frac{\text{ημ}\,x}{\text{συν}\,x}\,dx = -\ln|\text{συν}\,x| + c = \ln|\text{τεμ}\,x| + c$$

xvii. $\displaystyle\int \frac{2+2\,\text{ημ}\,x}{x-\text{συν}\,x}\,dx$ (Τύπος 2)

$$\int \frac{2+2\,\text{ημ}\,x}{x-\text{συν}\,x}\,dx = 2\int \frac{1+\text{ημ}\,x}{x-\text{συν}\,x}\,dx = 2\ln|x-\text{συν}\,x| + c$$

xviii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (Τύπος 1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + c$$

8. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα (μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες όπου χρειάζεται):

i.	$\displaystyle\int x\,\text{ημ}(2x)\,dx$	v.	$\displaystyle\int e^{x+\ln x}\,dx,\ x>0$	ix.	$\displaystyle\int x^2\,\text{συν}(3x)\,dx$
ii.	$\displaystyle\int \frac{x}{\text{συν}^2 x}\,dx$	vi.	$\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$	x.	$\displaystyle\int e^x\,\text{συν}x\,dx$
iii.	$\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx,\ x>0$	vii.	$\displaystyle\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$	xi.	$\displaystyle\int e^{-x}\,\text{ημ}(2x)\,dx$
iv.	$\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx,\ x>0$	viii.	$\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$	xii.	$\displaystyle\int e^{2x}\,\text{συν}(3x)\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/38)

i. $\int x\,\text{ημ}(2x)\,dx$

Θέτουμε $u = x,\ dv = \text{ημ}(2x)\,dx \Rightarrow du = dx,\ v = -\frac{1}{2}\text{συν}(2x)$

$$\int x\,\text{ημ}(2x)\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= -\frac{x}{2}\text{συν}(2x) + \frac{1}{2}\int \text{συν}(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\text{συν}(2x) + \frac{1}{4}\text{ημ}(2x) + c$$

ii. $\int \frac{x}{\text{συν}^2 x}\,dx = \int x\,\text{τεμ}^2 x\,dx$

Θέτουμε $u = x,\ dv = \text{τεμ}^2 x\,dx \Rightarrow du = dx,\ v = \text{εφ}x$

$$\int x\,\text{τεμ}^2 x\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= x\,\text{εφ}x - \int \text{εφ}x\,dx = x\,\text{εφ}x + \ln|\text{συν}x| + c$$

iii. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx, \quad x > 0$

Θέτουμε $u = \ln x,\ dv = x^{-2}\,dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = -x^{-1}$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \int x^{-2}\,dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + c$$

iv. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx, \quad x > 0$

Θέτουμε $u = \ln x,\ dv = x^{-3}\,dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = -\frac{1}{2}x^{-2}$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx = -\frac{2\ln x + 1}{4x^2} + c$$

v. $\int e^{x+\ln x}\,dx, \quad x > 0$

Παρατηρούμε ότι $e^{x+\ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = xe^x$.

$$\int e^{x+\ln x}\,dx = \int xe^x\,dx$$

Θέτουμε $u = x,\ dv = e^x\,dx \Rightarrow du = dx,\ v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + c$$

vi. $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$

Θέτουμε $u = x^2,\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow du = 2x\,dx,\ v = -e^{-x}$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = uv - \int v\,du = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$

Υπολογίζουμε $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$:

$$u = x,\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow du = dx,\ v = -e^{-x}$$

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

vii. $\displaystyle\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$

Θέτουμε $t = \sqrt{3x+9} \Rightarrow dt = \frac{3}{2\sqrt{3x+9}}\,dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{3}\,dt$

$$\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx = \frac{2}{3}\int te^t\,dt$$

Θέτουμε $u = t,\ dv = e^t\,dt \Rightarrow du = dt,\ v = e^t$

$$\frac{2}{3}\int te^t\,dt = \frac{2}{3}(te^t - \int e^t\,dt) = \frac{2}{3}e^t(t-1) + c$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9} - 1) + c$$

viii. $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

Θέτουμε $u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ dv=dx \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},\ v=x$

$$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = uv-\int v\,du$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

Θέτουμε $t=x^2+1 \Rightarrow dt=2x\,dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt=\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+c$$

ix. $\displaystyle\int x^2\,\text{συν}(3x)\,dx$

Θέτουμε $u=x^2,\ dv=\text{συν}(3x)\,dx \Rightarrow du=2x\,dx,\ v=\frac{1}{3}\text{ημ}(3x)$

$$\int x^2\text{συν}(3x)\,dx=\frac{x^2}{3}\text{ημ}(3x)-\frac{2}{3}\int x\,\text{ημ}(3x)\,dx$$

Για $\displaystyle\int x\,\text{ημ}(3x)\,dx$:

$$u=x,\ dv=\text{ημ}(3x)\,dx \Rightarrow du=dx,\ v=-\tfrac{1}{3}\text{συν}(3x)$$

$$\int x\,\text{ημ}(3x)\,dx=-\frac{x}{3}\text{συν}(3x)+\frac{1}{9}\text{ημ}(3x)$$

$$\Rightarrow \int x^2\text{συν}(3x)\,dx=\frac{x^2}{3}\text{ημ}(3x)+\frac{2x}{9}\text{συν}(3x)-\frac{2}{27}\text{ημ}(3x)+c$$

x. $\displaystyle\int e^x\,\text{συν}x\,dx$

Θέτουμε $u=e^x,\ dv=\text{συν}x\,dx \Rightarrow du=e^x\,dx,\ v=\text{ημ}x$

$$\int e^x\text{συν}x\,dx=e^x\text{ημ}x-\int e^x\text{ημ}x\,dx$$

Θέτουμε $u=e^x,\ dv=\text{ημ}x\,dx \Rightarrow du=e^x\,dx,\ v=-\text{συν}x$

$$\int e^x\text{ημ}x\,dx=-e^x\text{συν}x+\int e^x\text{συν}x\,dx$$

$$2\int e^x \text{συν}x\,dx = e^x(\text{ημ}x + \text{συν}x) \Rightarrow \int e^x \text{συν}x\,dx = \frac{e^x}{2}(\text{ημ}x + \text{συν}x) + c$$

xi. $\displaystyle\int e^{-x}\,\text{ημ}(2x)\,dx$

Θέτουμε $u = e^{-x},\ dv = \text{ημ}(2x)\,dx \Rightarrow du = -e^{-x}\,dx,\ v = -\frac{1}{2}\text{συν}(2x)$

$$\int e^{-x}\text{ημ}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\text{συν}(2x) - \frac{1}{2}\int e^{-x}\text{συν}(2x)\,dx$$

Θέτουμε $u = e^{-x},\ dv = \text{συν}(2x)\,dx \Rightarrow du = -e^{-x}\,dx,\ v = \frac{1}{2}\text{ημ}(2x)$

$$\int e^{-x}\text{συν}(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-x}\text{ημ}(2x) + \frac{1}{2}\int e^{-x}\text{ημ}(2x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\text{ημ}(2x)\,dx = e^{-x}\left(-\frac{2}{5}\text{συν}(2x) - \frac{1}{5}\text{ημ}(2x)\right) + c$$

xii. $\displaystyle\int e^{2x}\,\text{συν}(3x)\,dx$

Θέτουμε $I = \int e^{2x}\text{συν}(3x)\,dx$.

$$u = e^{2x}, \quad dv = \text{συν}(3x)\,dx \ \Rightarrow\ du = 2e^{2x}\,dx,\ v = \tfrac{1}{3}\text{ημ}(3x)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{3}\text{ημ}(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x}\text{ημ}(3x)\,dx$$

Θέτουμε $J = \int e^{2x}\text{ημ}(3x)\,dx$:

$$u = e^{2x}, \quad dv = \text{ημ}(3x)\,dx \ \Rightarrow\ du = 2e^{2x}\,dx,\ v = -\tfrac{1}{3}\text{συν}(3x)$$

$$J = -\frac{e^{2x}}{3}\text{συν}(3x) + \frac{2}{3}\int e^{2x}\text{συν}(3x)\,dx = -\frac{e^{2x}}{3}\text{συν}(3x) + \frac{2}{3}I$$

Επιστρέφοντας στο I:

$$I = \frac{e^{2x}}{3}\text{ημ}(3x) - \frac{2}{3}J = \frac{e^{2x}}{3}\text{ημ}(3x) - \frac{2}{3}\left(-\frac{e^{2x}}{3}\text{συν}(3x) + \frac{2}{3}I\right)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{3}\text{ημ}(3x) + \frac{2e^{2x}}{9}\text{συν}(3x) - \frac{4}{9}I \ \Rightarrow\ \frac{13}{9}I = \frac{e^{2x}}{9}\big(3\,\text{ημ}(3x) + 2\,\text{συν}(3x)\big)$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{13}\big(3\,\text{ημ}(3x) + 2\,\text{συν}(3x)\big) + c$$

9. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}\,dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}}\,dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2}\,dw$

iv. $\displaystyle\int \frac{t-2}{t-3\sqrt{2t-4}+2}\,dt$

Λύση:

i. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt[3]{x-3}$$

$$x = u^3 + 3 \qquad dx = 3u^2 du$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int \frac{(u^3+3)+2}{u}3u^2du &= \int 3u^4 + 15u\,du \\ &= \frac{3}{5}u^5 + \frac{15}{2}u^2 + c \\ &= \frac{3}{5}(x-3)^{5/3} + \frac{15}{2}(x-3)^{2/3} + c\end{aligned}$$

ii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt{x+10} \qquad x = u^2 - 10 \qquad dx = 2u\,du$$

$$\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}}\,dx = \int \frac{2}{u^2-10-3u}(2u)\,du = \int \frac{4u}{u^2-3u-10}\,du$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{4u}{(u-5)(u+2)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u+2}$$

$$4u = A(u+2) + B(u-5)$$

$$u = -2 \qquad -8 = B(-7) \qquad B = \frac{8}{7}$$

$$u = 5 \qquad 20 = A(7) \qquad A = \frac{20}{7}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}}\,dx &= \int \frac{20}{7}\frac{1}{u-5}+\frac{8}{7}\frac{1}{u+2}\,du\\ &= \frac{20}{7}\ln|u-5|+\frac{8}{7}\ln|u+2|+c\\ &= \frac{20}{7}\ln|\sqrt{x+10}-5|+\frac{8}{7}\ln|\sqrt{x+10}+2|+c\end{aligned}$$

iii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u=\sqrt{1-w}$$

$$w=1-u^2 \qquad \Rightarrow \qquad dw=-2u\,du$$

$$\int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2}\,dw = \int \frac{1}{1-u^2+2u+2}(-2u)\,du = \int \frac{2u}{u^2-2u-3}\,du$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{2u}{(u+1)(u-3)} = \frac{A}{u+1}+\frac{B}{u-3}$$

$$2u = A(u-3)+B(u+1)$$

$$u=3: \qquad 6=4B \qquad \Rightarrow \qquad A=\frac{1}{2}$$

$$u=-1: \qquad -2=-4A \qquad \Rightarrow \qquad B=\frac{3}{2}$$

Επομένως,

$$\int \frac{2u}{(u+1)(u-3)}\,du = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{u-3}\,du = \frac{1}{2}\ln|u+1|+\frac{3}{2}\ln|u-3|+c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2}\,dw = \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1-w}+1|+\frac{3}{2}\ln|\sqrt{1-w}-3|+c$$

iv. Θέτω αντικατάσταση

$$u=\sqrt{2t-4}$$

$$t=\frac{1}{2}u^2+2 \qquad \Rightarrow \qquad dt=u\,du$$

$$\int \frac{t-2}{t-3\sqrt{2t-4}+2}\,dt = \int \frac{\frac{1}{2}u^2+2-2}{\frac{1}{2}u^2+2-3u+2}(u)\,du = \int \frac{u^3}{u^2-6u+8}\,du$$

$$\frac{u^3}{u^2-6u+8} = u+6+\frac{28u-48}{(u-2)(u-4)}$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{28u-48}{(u-2)(u-4)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u-4}$$

$$28u-48 = A(u-4)+B(u-2)$$

$$u=4: \quad 64 = 2B \quad \Rightarrow \quad A=-4$$

$$u=2: \quad 8=-2A \quad \Rightarrow \quad B=32$$

Επομένως,

$$\int \frac{u^3}{u^2-6u+8}\,du = \int u+6-\frac{4}{u-2}+\frac{32}{u-4}\,du = \frac{1}{2}u^2+6u-4\ln|u-2|+32\ln|u-4|+c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{u^3}{u^2-6u+8}\,du = t-2+6\sqrt{2t-4}-4\ln|\sqrt{2t-4}-2|+32\ln|\sqrt{2t-4}-4|+c$$

10. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\int \text{ημ}^2 x\,dx$

ii. $\int \text{συν}^3 x\,dx$

iii. $\int \text{συν}^4 x\,dx$

iv. $\int \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{συν}x}\,dx$

v. $\int \text{ημ}^4 x\,\text{συν}^3 x\,dx$

vi. $\int (\text{ημ}^2 x+\text{συν}^4 x)\,\text{ημ}x\,dx$

vii. $\int (\text{ημ}^3 x\,\text{συν}x-\text{ημ}x\,\text{συν}^3 x)\,dx$

viii. $\int \text{τεμ}^4 x\,dx$

ix. $\int \text{τεμ}^3 x\,dx$

x. $\int \text{εφ}^3 x\,\text{τεμ}x\,dx$

xi. $\int \text{ημ}2x\,\text{συν}x\,dx$

xii. $\int \text{ημ}5x\,\text{ημ}7x\,dx$

xiii. $\int \sqrt{1+\text{ημ}2x}\,dx, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

xiv. $\int \frac{\ln(\text{τεμ}x)}{\text{συν}^2 x}\,dx, \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

Λύση (Ασκ. 1/41)

i. $\displaystyle\int ημ^2 x\,dx$

$$ημ^2 x = \frac{1-συν2x}{2} \;\Rightarrow\; \int ημ^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{ημ2x}{4} + c.$$

ii. $\displaystyle\int συν^3 x\,dx$

$$\int συν^2 x\,συνx\,dx = \int (1-ημ^2 x)\,d(ημx) = ημx - \frac{ημ^3 x}{3} + c.$$

iii. $\displaystyle\int συν^4 x\,dx$

$$συν^4 x = \left(\frac{1+συν2x}{2}\right)^2 = \frac{3+4συν2x+συν4x}{8} \Rightarrow \int συν^4 x\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{ημ2x}{4} + \frac{ημ4x}{32} + c.$$

iv. $\displaystyle\int \frac{ημ^3 x}{συνx}\,dx$

$$\int (1-συν^2 x)\,\frac{ημx}{συνx}\,dx,\; u = συνx \Rightarrow du = -ημx\,dx$$
$$= -\int\left(\frac{1}{u} - u\right)du = -\ln|συνx| + \frac{συν^2 x}{2} + c.$$

v. $\displaystyle\int ημ^4 x\,συν^3 x\,dx$

$$συν^3 x = (1-ημ^2 x)συνx,\; u = ημx,\; du = συνx\,dx \Rightarrow \int (u^4-u^6)\,du = \frac{ημ^5 x}{5} - \frac{ημ^7 x}{7} + c.$$

vi. $\displaystyle\int (ημ^2 x + συν^4 x)\,ημx\,dx$

$$u = συνx,\; du = -ημx\,dx,\; ημ^2 x = 1-u^2 \Rightarrow -\int (1-u^2+u^4)\,du = -συνx + \frac{συν^3 x}{3} - \frac{συν^5 x}{5} + c.$$

vii. $\int (\text{ημ}^3 x\,\text{συν}x - \text{ημ}x\,\text{συν}^3 x)\,dx$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{ημ}^4 x}{4}\right) = \text{ημ}^3 x\,\text{συν}x, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{συν}^4 x}{4}\right) = -\text{ημ}x\,\text{συν}^3 x$$

$$\Rightarrow \int \cdots\,dx = \frac{\text{ημ}^4 x + \text{συν}^4 x}{4} + c.$$

viii. $\int \text{τεμ}^4 x\,dx$

$$\text{τεμ}^4 x = (1+\text{εφ}^2 x)\text{τεμ}^2 x,\ u = \text{εφ}x,\ du = \text{τεμ}^2 x\,dx \Rightarrow \int (1+u^2)\,du = \text{εφ}x + \frac{\text{εφ}^3 x}{3} + c.$$

ix. $\int \text{τεμ}^3 x\,dx$

$$I = \int \text{τεμ}^3 x\,dx = \int \text{τεμ}x\,\text{τεμ}^2 x\,dx.\ \text{Μέρη:}\ u = \text{τεμ}x,\ dv = \text{τεμ}^2 x\,dx \Rightarrow v = \text{εφ}x$$

$$I = \text{τεμ}x\,\text{εφ}x - \int \text{εφ}x\,\text{τεμ}x\,\text{εφ}x\,dx = \text{τεμ}x\,\text{εφ}x - \int \text{τεμ}x(\text{τεμ}^2 x - 1)\,dx$$

$$= \text{τεμ}x\,\text{εφ}x - I + \int \text{τεμ}x\,dx \Rightarrow 2I = \text{τεμ}x\,\text{εφ}x + \ln|\text{τεμ}x + \text{εφ}x|$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\text{τεμ}x\,\text{εφ}x + \frac{1}{2}\ln|\text{τεμ}x + \text{εφ}x| + c.$$

x. $\int \text{εφ}^3 x\,\text{τεμ}x\,dx$

$$\text{εφ}^3 x\,\text{τεμ}x = (\text{εφ}^2 x)\,(\text{εφ}x\,\text{τεμ}x) = (\text{τεμ}^2 x - 1)\,d(\text{τεμ}x) \Rightarrow \int (\text{τεμ}^2 x - 1)\,d(\text{τεμ}x) = \frac{\text{τεμ}^3 x}{3} - \text{τεμ}x + c.$$

xi. $\int \text{ημ}2x\,\text{συν}x\,dx$

$$\text{ημ}2x = 2\text{ημ}x\,\text{συν}x \Rightarrow \int 2\text{ημ}x\,\text{συν}^2 x\,dx,\ u = \text{συν}x,\ du = -\text{ημ}x\,dx \Rightarrow -2\int u^2\,du = -\frac{2}{3}\text{συν}^3 x + c.$$

xii. $\displaystyle\int \text{ημ}5x\,\text{ημ}7x\,dx$

$$\text{ημ}A\,\text{ημ}B = \tfrac{1}{2}\big(\text{συν}(A-B) - \text{συν}(A+B)\big) \Rightarrow \frac{\text{ημ}2x}{4} - \frac{\text{ημ}12x}{24} + c.$$

xiii. $\displaystyle\int \sqrt{1+\text{ημ}2x}\,dx,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

$$1+\text{ημ}2x = (\text{ημ}x+\text{συν}x)^2 \Rightarrow \int (\text{ημ}x+\text{συν}x)\,dx = -\text{συν}x + \text{ημ}x + c.$$

xiv. $\displaystyle\int \frac{\ln(\text{τεμ}x)}{\text{συν}^2 x}\,dx,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

$$t = \text{εφ}x \Rightarrow dt = \text{τεμ}^2 x\,dx = \frac{dx}{\text{συν}^2 x}, \quad \text{τεμ}x = \sqrt{1+t^2}$$

$$\int \frac{\ln(\text{τεμ}x)}{\text{συν}^2 x}dx = \int \ln\big(\sqrt{1+t^2}\big)\,dt = \frac{1}{2}\int \ln(1+t^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[t\ln(1+t^2) - 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\Big] = \frac{1}{2}\big[t\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t\big] + c$$

$$= \text{εφ}x\ \ln(\text{τεμ}x) - \text{εφ}x + x + c.$$

11. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \text{ημ}^5 x\,dx$

ii. $\displaystyle\int \text{ημ}^6 x\,\text{συν}^3 x\,dx$

iii. $\displaystyle\int \text{ημ}^2 x\,\text{συν}^2 x\,dx$

iv. $\displaystyle\int \text{συν}(15x)\,\text{συν}(4x)\,dx$

v. $\displaystyle\int \text{τεμ}^9 x\,\text{εφ}^5 x\,dx$

vi. $\displaystyle\int \text{εφ}^3 x\,dx$

vii. $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^7 x}{\text{συν}^4 x}\,dx$

viii. $\displaystyle\int \text{ημ}^3\big(\tfrac{2}{3}x\big)\ \text{συν}^4\big(\tfrac{2}{3}x\big)\ dx$

ix. $\displaystyle\int \text{συν}^4(2t)\,dt$

x. $\displaystyle\int \frac{2+7\,\text{ημ}^3(z)}{\text{συν}^2(z)}\,dz$

xi. $\displaystyle\int \text{εφ}^3(6x)\,\text{τεμ}^{10}(6x)\,dx$

xii. $\displaystyle\int \text{συν}(3t)\,\text{ημ}(8t)\,dt$

Λύση:

i.
$$\int \eta\mu^5 x\,dx = \int (\eta\mu^2 x)^2\,\eta\mu x\,dx$$
Χρήση της ταυτότητας $\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$:
$$\int \eta\mu^5 x\,dx = \int (1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^2\,\eta\mu x\,dx.$$
Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = -\eta\mu x\,dx$:
$$-\int (1-u^2)^2\,du = -\int (1-2u^2+u^4)\,du = -\left(u - \tfrac{2}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5\right) + c$$
$$= -\sigma\upsilon\nu x + \tfrac{2}{3}\sigma\upsilon\nu^3 x - \tfrac{1}{5}\sigma\upsilon\nu^5 x + c.$$

ii.
$$\int \eta\mu^6 x\,\sigma\upsilon\nu^3 x\,dx = \int \eta\mu^6 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int \eta\mu^6 x(1-\eta\mu^2 x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx.$$
Θέτουμε $u = \eta\mu x,\ du = \sigma\upsilon\nu x\,dx$:
$$\int u^6(1-u^2)\,du = \int (u^6 - u^8)\,du = \tfrac{1}{7}\eta\mu^7 x - \tfrac{1}{9}\eta\mu^9 x + c.$$

iii.
$$\int \eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \tfrac{1}{4}\int (1-\sigma\upsilon\nu^2(2x))\,dx = \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\eta\mu(4x) + c.$$
(Ίδιο αποτέλεσμα με χρήση της $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$.)

iv.
$$\int \sigma\upsilon\nu(15x)\,\sigma\upsilon\nu(4x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int [\sigma\upsilon\nu(11x) + \sigma\upsilon\nu(19x)]\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\eta\mu(11x)}{11} + \tfrac{\eta\mu(19x)}{19}\right) + c.$$

v.
$$\int \tau\epsilon\mu^9 x\,\epsilon\varphi^5 x\,dx = \int \tau\epsilon\mu^8 x\,(\tau\epsilon\mu^2 x - 1)^2\,\epsilon\varphi x\,\tau\epsilon\mu x\,dx.$$
Θέτουμε $u = \tau\epsilon\mu x,\ du = \tau\epsilon\mu x\,\epsilon\varphi x\,dx$:
$$\int u^8(u^2-1)^2\,du = \int (u^{12} - 2u^{10} + u^8)\,du = \tfrac{1}{13}\tau\epsilon\mu^{13} x - \tfrac{2}{11}\tau\epsilon\mu^{11} x + \tfrac{1}{9}\tau\epsilon\mu^9 x + c.$$

vi.
$$\int \text{εφ}^3 x\,dx = \int \text{εφ}x\,(\text{τεμ}^2 x - 1)\,dx = \int \text{εφ}x\,\text{τεμ}^2 x\,dx \;-\; \int \text{εφ}x\,dx.$$

Πρώτος όρος: Θέτουμε $u = \text{εφ}x \Rightarrow du = \text{τεμ}^2 x\,dx$:
$$\int \text{εφ}x\,\text{τεμ}^2 x\,dx = \int u\,du = \tfrac{1}{2}u^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{εφ}^2 x.$$

Δεύτερος όρος:
$$\int \text{εφ}x\,dx = -\ln|\text{συν}x| = \ln|\text{τεμ}x| + C.$$

Άρα,
$$\int \text{εφ}^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}\,\text{εφ}^2 x \;-\; \big(-\ln|\text{συν}x|\big) + C = \tfrac{1}{2}\,\text{εφ}^2 x + \ln|\text{συν}x| + C.$$

Ισοδύναμη μορφή (με $\ln|\text{συν}x| = -\ln|\text{τεμ}x|$):

vii.
$$\int \frac{\text{ημ}^7 x}{\text{συν}^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\text{συν}^2 x)^3}{\text{συν}^4 x}\,\text{ημ}x\,dx.$$

Θέτουμε $u = \text{συν}x,\ du = -\text{ημ}x\,dx$:
$$-\int \big(u^{-4} - 3u^{-2} + 3 - u^2\big)du = \frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} - 3u + \frac{1}{3}u^3 + c$$

Επόμενος,
$$\int \frac{\text{ημ}^7 x}{\text{συν}^4 x}\,dx = \frac{1}{3\text{συν}^3 x} - \frac{3}{\text{συν}x} - 3\text{συν}x + \frac{1}{3}\text{συν}^3 x + c.$$

viii.
$$\int \text{ημ}^3\big(\tfrac{2}{3}x\big)\,\text{συν}^4\big(\tfrac{2}{3}x\big)\,dx = -\tfrac{3}{2}\int (1-u^2)u^4\,du = \tfrac{3}{14}\text{συν}^7\big(\tfrac{2}{3}x\big) - \tfrac{3}{10}\text{συν}^5\big(\tfrac{2}{3}x\big) + c.$$

ix.
$$\int \text{συν}^4(2t)\,dt$$
Χρησιμοποιούμε τη γνωστή σχέση:
$$\text{συν}^4\theta = \frac{3+4\text{συν}(2\theta)+\text{συν}(4\theta)}{8}.$$
Για $\theta = 2t$:
$$\text{συν}^4(2t) = \frac{3+4\text{συν}(4t)+\text{συν}(8t)}{8}.$$

Ολοκληρώνουμε κατά όρους:

$$\int \text{συν}^4(2t)\,dt = \frac{3}{8}\int dt + \frac{1}{8}\int \text{συν}(4t)\,dt + \frac{1}{8}\int \frac{\text{συν}(8t)}{8}\,dt.$$
Επομένως:
$$\int \text{συν}^4(2t)\,dt = \frac{3}{8}t + \frac{1}{8}\text{ημ}(4t) + \frac{1}{64}\text{ημ}(8t) + c.$$

x.
$$\int \frac{2+7\text{ημ}^3 z}{\text{συν}^2 z}\,dz$$
Αναλύουμε:
$$= 2\int \frac{1}{\text{συν}^2 z}\,dz + 7\int \frac{\text{ημ}^3 z}{\text{συν}^2 z}\,dz = 2\int \text{τεμ}^2 z\,dz + 7\int \frac{\text{ημ}^3 z}{\text{συν}^2 z}\,dz.$$

Ο πρώτος όρος:
$$2\int \text{τεμ}^2 z\,dz = 2\,\text{εφ}z.$$

Για τον δεύτερο όρο, γράφουμε $\text{ημ}^3 z = (1-\text{συν}^2 z)\text{ημ}z$.

Θέτουμε $u = \text{συν}z \Rightarrow du = -\text{ημ}z\,dz$:
$$7\int \frac{(1-\text{συν}^2 z)\text{ημ}z}{\text{συν}^2 z}\,dz = -7\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du = -7\int (u^{-2}-1)\,du.$$
Υπολογίζουμε:
$$-7\int (u^{-2}-1)\,du = -7(-u^{-1}-u) + c = 7\left(\frac{1}{u}+u\right) + c = 7\,\text{τεμ}z + 7\,\text{συν}z + c.$$

Άρα:

$$\int \frac{2+7\,\text{ημ}^3 z}{\text{συν}^2 z}\,dz = 2\,\text{εφ}z + 7\,\text{τεμ}z + 7\,\text{συν}z + c.$$

xi.

$$\int \text{εφ}^3(6x)\,\text{τεμ}^{10}(6x)\,dx$$

Χρησιμοποιούμε $\text{εφ}^2\theta = \text{τεμ}^2\theta - 1$:

$$\text{εφ}^3(6x)\,\text{τεμ}^{10}(6x) = (\text{τεμ}^2(6x) - 1)\,\text{τεμ}^9(6x)\,[\text{εφ}(6x)\,\text{τεμ}(6x)].$$

Θέτουμε $u = \text{τεμ}(6x) \Rightarrow du = 6\,\text{τεμ}(6x)\,\text{εφ}(6x)\,dx$

$$\Rightarrow \text{τεμ}(6x)\,\text{εφ}(6x)\,dx = \tfrac{1}{6}\,du.$$

Επομένως:

$$\int \text{εφ}^3(6x)\,\text{τεμ}^{10}(6x)\,dx = \frac{1}{6}\int (u^{11} - u^9)\,du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^{12}}{12} - \frac{u^{10}}{10}\right) + c.$$

Άρα:

$$\int \text{εφ}^3(6x)\,\text{τεμ}^{10}(6x)\,dx = \frac{1}{72}\text{τεμ}^{12}(6x) - \frac{1}{60}\text{τεμ}^{10}(6x) + c.$$

xii.

$$\int \text{συν}(3t)\,\text{ημ}(8t)\,dt$$

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ταυτότητα γινομένου σε άθροισμα:

$$\text{ημ}A\,\text{συν}B = \tfrac{1}{2}\big[\text{ημ}(A+B) + \text{ημ}(A-B)\big].$$

Με $A = 8t$, $B = 3t$:

$$\text{συν}(3t)\,\text{ημ}(8t) = \frac{1}{2}\big[\text{ημ}(11t) + \text{ημ}(5t)\big].$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\int \text{συν}(3t)\,\text{ημ}(8t)\,dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{\text{συν}(11t)}{11} - \frac{\text{συν}(5t)}{5}\right) + c.$$

12. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx, \qquad x = 4\,\text{ημ}\theta, \quad -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

ii. $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,dx, \qquad x = 2\,\text{εφ}\theta, \quad \tfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx, \qquad x = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\text{ημ}\theta, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

iv. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx, \qquad x = 2\,\text{εφ}\theta, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

v. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx, \qquad x = \text{εφ}\theta, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

Λύση (Ασκ. 1/45)

i. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx, \qquad x = 4\,\text{ημ}\,\theta,\ -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}$

$$dx = 4\,\text{συν}\theta\,d\theta, \quad \sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-16\,\text{ημ}^2\theta} = 4\,|\text{συν}\theta| = 4\,\text{συν}\theta$$

(διότι $\theta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \text{συν}\theta > 0$). Άρα

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = \int \frac{4\,\text{συν}\theta}{4\,\text{συν}\theta}\,d\theta = \int 1\,d\theta = \theta + c = \arcsin\!\left(\frac{x}{4}\right) + c.$$

ii. $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,dx, \qquad x = 2\,\text{εφ}\,\theta,\ \tfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$dx = 2\,\text{τεμ}^2\theta\,d\theta, \qquad \sqrt{4+x^2} = 2\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta} = 2\,|\text{τεμ}\theta|.$$

Στο $(\tfrac{\pi}{2}, \pi)$ ισχύει $\text{τεμ}\theta < 0$, άρα $|\text{τεμ}\theta| = -\text{τεμ}\theta$ και

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = \int 4\,|\text{τεμ}\theta|\,\text{τεμ}^2\theta\,d\theta = -4\int \text{τεμ}^3\theta\,d\theta.$$

Γνωστό ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int \text{τεμ}^3\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\big(\text{τεμ}\theta\,\text{εφ}\theta + \ln|\text{τεμ}\theta + \text{εφ}\theta|\big)$. Άρα

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = -2\Big(\text{τεμ}\theta\,\text{εφ}\theta + \ln|\text{τεμ}\theta + \text{εφ}\theta|\Big) + c.$$

Επιστρέφουμε σε x: $\text{εφ}\theta = \dfrac{x}{2}$, $|\text{τεμ}\theta| = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ και στο δοθέν διάστημα $\text{τεμ}\theta = -\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{2}$. Τότε

$$-2\,\text{τεμ}\theta\,\text{εφ}\theta = -2\left(-\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\cdot\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2},$$

ενώ

$$-2\ln|\text{τεμ}\theta+\text{εφ}\theta| = -2\ln\left|\frac{-\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right| = 2\ln\bigl(x+\sqrt{4+x^2}\bigr)+C$$

(χρησιμοποιώντας $(\sqrt{4+x^2}-x)(\sqrt{4+x^2}+x)=4$). Άρα

$$\int\sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2}+2\ln\bigl(x+\sqrt{4+x^2}\bigr)+c$$

iii. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx,\qquad x=\tfrac{1}{\sqrt3}\,\text{ημ}\,\theta,\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}$

$$dx=\tfrac{1}{\sqrt3}\,\text{συν}\theta\,d\theta,\qquad \sqrt{1-3x^2}=\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}=\text{συν}\theta\ (>0).$$

Άρα

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}=\int\frac{\frac{1}{\sqrt3}\text{συν}\theta\,d\theta}{\text{συν}\theta}=\frac{1}{\sqrt3}\int d\theta=\frac{\theta}{\sqrt3}+c=\frac{1}{\sqrt3}\arcsin(\sqrt3\,x)+c.$$

iv. $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx,\qquad x=2\,\text{εφ}\,\theta,\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}$

$$dx=2\,\text{τεμ}^2\theta\,d\theta,\qquad (x^2+4)^3=\bigl(4\,\text{τεμ}^2\theta\bigr)^3=64\,\text{τεμ}^6\theta.$$

Άρα

$$\int\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\int\frac{2\,\text{τεμ}^2\theta}{64\,\text{τεμ}^6\theta}\,d\theta=\frac{1}{32}\int\text{τεμ}^{-4}\theta\,d\theta=\frac{1}{32}\int\text{συν}^4\theta\,d\theta.$$

Χρησιμοποιούμε $\text{συν}^4\theta=\dfrac{3+4\,\text{συν}2\theta+\text{συν}4\theta}{8}$:

$$\int\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\frac{1}{32}\left(\frac{3\theta}{8}+\frac{\text{ημ}2\theta}{4}+\frac{\text{ημ}4\theta}{32}\right)+c=\frac{3\theta}{256}+\frac{\text{ημ}2\theta}{128}+\frac{\text{ημ}4\theta}{1024}+c.$$

Επιστρέφουμε σε x: $\theta=\arctan\frac{x}{2},\ \ \text{ημ}2\theta=\dfrac{4x}{x^2+4},\ \ \text{ημ}4\theta=\dfrac{8x(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.

Τότε

$$\int\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\frac{3}{256}\arctan\frac{x}{2}+\frac{x}{32(x^2+4)}+\frac{x(4-x^2)}{128\,(x^2+4)^2}+c$$

v. $\displaystyle\int\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx,\qquad x=\text{εφ}\,\theta,\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}$

Με $x = \text{εφ}\theta$: $dx = \text{τεμ}^2\theta\, d\theta$ και

$$\frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\text{τεμ}^2\theta\, d\theta}{\text{εφ}\theta\, \text{τεμ}^2\theta} = \frac{1}{\text{εφ}\theta}\, d\theta = \frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}\, d\theta.$$

Άρα

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}\, d\theta = \ln|\text{ημ}\theta| + c.$$

Επειδή $\theta = \arctan x$ και $\text{ημ}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (στο $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$),

$$\ln|\text{ημ}\theta| = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

13. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx,\qquad x+1 = 2\,\text{ημ}\theta,\ 0<\theta<\pi$

ii. $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+12x+8}\, dx,\qquad x+3 = \sqrt{5}\,\text{τεμ}\theta,\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx,\qquad x-1 = \sqrt{2}\,\text{ημ}\theta,\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}$

iv. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx,\qquad x = \text{ημ}^2\theta,\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}$

v. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\, dx,\qquad x = \text{τεμ}\theta,\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}$

Λύση: (Ασκ. 2/45)

i. Παρατηρούμε ότι $3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2$. Θέτουμε $u = x+1$. Τότε:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{4-u^2}\, du.$$

Με γνωστό τύπο:

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c.$$

Άρα

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{2} + c.$$

ii. Έχουμε:

$$2x^2+12x+8=2\big[(x+3)^2-5\big].$$

Θέτουμε $u=x+3$. Τότε:

$$\int\sqrt{2x^2+12x+8}\,dx=\sqrt{2}\int\sqrt{u^2-5}\,du.$$

Χρησιμοποιούμε:

$$\int\sqrt{u^2-a^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\big|u+\sqrt{u^2-a^2}\big|+c.$$

Άρα

$$\int\sqrt{2x^2+12x+8}\,dx=\frac{(x+3)}{2}\sqrt{2x^2+12x+8}-\frac{5\sqrt{2}}{2}\ln\big(x+3+\sqrt{(x+3)^2-5}\big)+c.$$

iii. Παρατηρούμε ότι:

$$1+2x-x^2=2-(x-1)^2.$$

Με $x-1=\sqrt{2}\,\text{ημ}\theta$ έχουμε $dx=\sqrt{2}\,\text{συν}\theta\,d\theta$, $\sqrt{1+2x-x^2}=\sqrt{2}\,\text{συν}\theta$. Άρα:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}=\int\frac{\sqrt{2}\,\text{συν}\theta}{\sqrt{2}\,\text{συν}\theta}\,d\theta=\int d\theta=\theta+c=\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

iv. Με $x=\text{ημ}^2\theta$ έχουμε $dx=2\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta\,d\theta$, και

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}=\text{εφ}\theta.$$

Άρα:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\int 2\,\text{εφ}\theta\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta\,d\theta=2\int\text{ημ}^2\theta\,d\theta=\int(1-\text{συν}2\theta)\,d\theta=\theta-\frac{1}{2}\text{ημ}2\theta+c.$$

Επειδή $\theta=\arcsin\sqrt{x}$ και $\text{ημ}2\theta=2\sqrt{x(1-x)}$, έχουμε:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}+c.$$

v. Θέτουμε $x=\text{τεμ}\theta$. Τότε:

$$dx=\text{τεμ}\theta\,\text{εφ}\theta\,d\theta,\quad \sqrt{x^2-1}=\text{εφ}\theta,\quad \frac{1}{x^2}=\text{συν}^2\theta.$$

Άρα:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx = \int \text{εφ}\theta\,\text{συν}^2\theta \cdot \text{τεμ}\theta\,\text{εφ}\theta\,d\theta = \int \text{συν}\theta\,\text{εφ}^2\theta\,d\theta.$$

Επειδή $\text{εφ}^2\theta = \text{τεμ}^2\theta - 1$:

$$\int \text{συν}\theta\,\text{εφ}^2\theta\,d\theta = \int (\text{τεμ}\theta - \text{συν}\theta)\,d\theta = \ln|\text{τεμ}\theta + \text{εφ}\theta| - \text{ημ}\theta + c.$$

Μετάβαση σε x: $\text{τεμ}\theta = x,\ \text{εφ}\theta = \sqrt{x^2-1},\ \text{ημ}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Άρα:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx = \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c.$$

14. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,dx$ iv. $\displaystyle\int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx$ vii. $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+5x-14}\,dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}\,dx$ v. $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx$ viii. $\displaystyle\int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3}\,dt$

iii. $\displaystyle\int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)}\,dx$ vi. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$ ix. $\displaystyle\int \frac{8}{3x^3+7x^2+4x}\,dx$

Λύση:

i. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$3x+11 = A(x+2)+B(x-3)$$

$$x=-2: \quad 5 = A(0)+B(-5) \implies B=-1$$

$$x=3: \quad 20 = A(5)+B(0) \implies A=4$$

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{4}{x-3}-\frac{1}{x+2}\,dx = \int \frac{4}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = 4\ln|x-3| - \ln|x+2| + c$$

ii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2+4}{x(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-2}$$

$$x^2+4 = A(x+2)(3x-2) + Bx(3x-2) + Cx(x+2)$$

$$x=0: \quad 4 = A(2)(-2) \implies A=-1$$
$$x=-2: \quad 8 = B(-2)(-8) \implies B=\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{2}{3}: \quad \frac{40}{9} = C\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) \implies C = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} + \frac{5}{2}\frac{1}{3x-2}\right)dx$$
$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{5}{6}\ln|3x-2| + c$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$x^2-29x+5 = A(x-4)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x-4)^2$$
$$x^2-29x+5 = (A+C)x^3 + (-4A+B-8C+D)x^2 + (3A+16C-8D)x - 12A + 3B + 16D$$

Εύρεση συντελεστών,

$$\begin{array}{ll} x^3: & A+C=0 \\ x^2: & -4A+B-8C+D=1 \\ x^1: & 3A+16C-8D=-29 \\ x^0: & -12A+3B+16D=5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A=1, \quad B=-5, \quad C=-1, \quad D=2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{5}{(x-4)^2} - \frac{x}{x^2+3} + \frac{2}{x^2+3} \right) dx \\ &= \ln|x-4| + \frac{5}{x-4} - \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c \end{aligned}$$

iv. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

$$\begin{aligned} x^3+10x^2+3x+36 &= A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1) \\ = (A+B)x^4 + (C-B)x^3 &+ (8A+4B-C+D)x^2 + (-4B+4C-D+E)x + 16A - 4C - E \end{aligned}$$

Εύρεση συντελεστών,

$$\begin{array}{ll} x^4: & A+B=0 \\ x^3: & C-B=1 \\ x^2: & 8A+4B-C+D=10 \\ x^1: & -4B+4C-D+E=3 \\ x^0: & 16A-4C-E=36 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A=2,\ B=-2,\ C=-1,\ D=1,\ E=0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{-2x-1}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2} dx \\ &= \int \frac{2}{x-1}dx - \int \frac{2x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx + \int \frac{x}{(x^2+4)^2}dx \\ &= 2\ln|x-1| - \ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4} + c \end{aligned}$$

v. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}=x-2-\frac{18}{x^3-3x^2}$$

$$\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx=\int x-2-\frac{18}{x^3-3x^2}\,dx=\int x-2\,dx-\int \frac{18}{x^3-3x^2}\,dx$$

$$\frac{18}{x^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}$$

$$18=Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2$$

$$\begin{gathered} x=0: \quad 18=B(-3) \implies B=-6 \\ x=3: \quad 18=C(9) \implies C=2 \\ x=1: \quad 18=A(-2)+B(-2)+C=-2A+14 \implies A=-2 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx&=\int x-2\,dx-\int\left(\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{2}{x-3}\right)dx \\ &=\frac{1}{2}x^2-2x+2\ln|x|-\frac{6}{x}-2\ln|x-3|+c \end{aligned}$$

vi.

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx=\int 1+\frac{1}{x^2-1}\,dx=\int dx+\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$1=A(x+1)+B(x-1)$$

$$x=-1: \quad 1=B(-2) \implies B=-\frac{1}{2}$$
$$x=1: \qquad 1=A(2) \implies A=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2-1}dx &= \int dx + \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c\end{aligned}$$

vii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{4}{(x+7)(x-2)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-2}$$

$$4 = A(x-2) + B(x+7)$$

$$x=2: \quad 4=9B \implies B=\frac{4}{9}$$
$$x=-7: \quad 4=-9A \implies A=-\frac{4}{9}$$

$$\int \frac{4}{(x+7)(x-2)}\,dx = \int \frac{-4/9}{x+7} + \frac{4/9}{x-2}\,dx = \frac{4}{9}\ln|x-2| - \frac{4}{9}\ln|x+7| + c$$

viii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3} = \frac{A}{2t+3} + \frac{B}{5t-1}$$

$$8-3t = A(5t-1) + B(2t+3)$$

$$t=\frac{1}{5}: \quad \frac{37}{5}=\frac{17}{5}B \implies B=\frac{37}{17}$$
$$t=-\frac{3}{2}: \quad \frac{25}{2}=-\frac{17}{2}A \implies A=-\frac{25}{17}$$

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3}=\frac{-\frac{25}{17}}{2t+3}+\frac{\frac{37}{17}}{5t-1}$$

$$\int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3}\,dt=\int\left(-\frac{25}{17}\frac{1}{2t+3}+\frac{37}{17}\frac{1}{5t-1}\right)dt$$
$$=\frac{37}{85}\ln|5t-1|-\frac{25}{34}\ln|2t+3|+c$$

ix. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8}{x(3x+4)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{3x+4}+\frac{C}{x+1}$$

$$8=A(3x+4)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(3x+4)$$

$$x=-\frac{4}{3}: \quad 8=\frac{4}{9}B \implies B=18$$
$$x=-1: \quad 8=-C \implies C=-8$$
$$x=0: \quad 8=4A \implies A=2$$

$$\int \frac{8}{x(3x+4)(x+1)}\,dx=\int \frac{2}{x}+\frac{18}{3x+4}-\frac{8}{x+1}\,dx=2\ln|x|+6\ln|3x+4|-8\ln|x+1|+c$$

15. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2-4}\,dx$ iv. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-9}\,dx$ vii. $\displaystyle\int \frac{6x-4}{x^2-6x+13}\,dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{2x-7}{x^2-7x+3}\,dx$ v. $\displaystyle\int \frac{5x}{(x^2+4)(x+1)}\,dx$ viii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+10x+29}\,dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx$ vi. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+6}{x^2+x-2}\,dx$ ix. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$

x. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-2x+10}\,dx$ xi. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx$ xii. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \frac{8}{3+5\,\text{ημ}\,2x}\,dx,\ x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)$ xiv. $\displaystyle\int \frac{10}{3\,\text{ημ}x+4\,\text{συν}x}\,dx,\ x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)$ xv. $\displaystyle\int \frac{1}{5+3\,\text{συν}x}\,dx,$

Λύση: (Ασκ. 1/51)

i. Παρατηρούμε $(x^2-4)'=2x$.

$$\int \frac{6x}{x^2-4}\,dx = 3\ln|x^2-4|+c.$$

ii. Θέτουμε $u=x^2-7x+3 \Rightarrow u'=2x-7$.

$$\int \frac{2x-7}{x^2-7x+3}\,dx = \ln|x^2-7x+3|+c.$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2} \;\Rightarrow\; 1=A(x+2)+Bx.$$

Θέτοντας $x=0 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$ και $x=-2 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{1}{x^2+2x}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+c.$$

iv. $(x^2-9)=(x-3)(x+3)$. Ζητούμε $\displaystyle\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$.

$$2=A(x+3)+B(x-3).$$

$x = 3 \Rightarrow 2 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad x = -3 \Rightarrow 2 = -6B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}.$

$$\int \frac{2}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{3}\ln|x+3| + c.$$

v. Ζητούμε

$$\frac{5x}{(x^2+4)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Οπότε

$$5x = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2 + (B+C)x + (4A+C).$$

Σύστημα: $A+B=0,\ B+C=5,\ 4A+C=0 \Rightarrow A=-1,\ B=1,\ C=4.$

$$\int \frac{5x}{(x^2+4)(x+1)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4}\right)dx$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 2\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$$

vi. Πολυωνυμική διαίρεση:

$$\frac{x^3+2x+6}{x^2+x-2} = x-1 + \frac{5x+4}{x^2+x-2},$$

επειδή $x^3+2x+6 = (x-1)(x^2+x-2) + (5x+4)$. Ανάλυση στο υπόλοιπο:

$$\frac{5x+4}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 5x+4 = A(x+2) + B(x-1).$$

$x = 1 \Rightarrow 9 = 3A \Rightarrow A = 3, \quad x = -2 \Rightarrow -6 = -3B \Rightarrow B = 2.$ Άρα

$$\int \frac{x^3+2x+6}{x^2+x-2}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int\left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-1| + 2\ln|x+2| + c.$$

vii. Γράφουμε $x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4$ και

$$\frac{6x-4}{x^2-6x+13} = \frac{3(2x-6)}{(x-3)^2+4} + \frac{14}{(x-3)^2+4}.$$

Έτσι
$$\int \frac{6x-4}{x^2-6x+13}\,dx = 3\ln\big((x-3)^2+4\big) + 7\,\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c.$$

viii. Πλήρες τετράγωνο: $x^2+10x+29=(x+5)^2+4$.
$$\int \frac{1}{x^2+10x+29}\,dx = \frac{1}{2}\,\tan^{-1}\left(\frac{x+5}{2}\right) + c.$$

ix. Παραγοντοποίηση $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Ζητούμε
$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$
Ισοδυναμεί με
$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1).$$
Εξισώνοντας συντελεστές παίρνουμε $A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4},\ C=0,\ D=-\frac{1}{2}$. Άρα
$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c.$$

x. $x^2-2x+10=(x-1)^2+9$ και $2x=2(x-1)+2$.
$$\int \frac{2x}{x^2-2x+10}\,dx = \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+9}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2+9}\,dx$$
$$= \ln\big((x-1)^2+9\big) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + c.$$

xi. Μερικά κλάσματα με αύξουσες δυνάμεις:
$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$
Ισοδυναμεί με
$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3.$$
Εξισώνοντας συντελεστές: $D=-1,\ A=1,\ B=-1,\ C=1$. Δηλαδή
$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1},$$

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c.$$

xii. Ζητούμε

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας:

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x.$$

Εξίσωση συντελεστών δίνει $A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=-1,\ E=0$. Άρα

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c.$$

xiii. Θέτουμε $u = \tan x \Rightarrow \text{ημ}\,2x = \dfrac{2u}{1+u^2},\ dx = \dfrac{du}{1+u^2}.$

$$\int \frac{8}{3+5\,\text{ημ}\,2x}\,dx = \int \frac{8}{3+\frac{10u}{1+u^2}}\cdot\frac{du}{1+u^2} = \int \frac{8}{3u^2+10u+3}\,du.$$

Ανάλυση:

$$\frac{8}{3u^2+10u+3} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+\frac{1}{3}} \Rightarrow 8 = A\big(u+\tfrac{1}{3}\big) + B(u+3).$$

$u=-3 \Rightarrow 8 = B\cdot 0 + A\big(-3+\frac{1}{3}\big) = -\frac{8}{3}A \Rightarrow A=-3$. $u=-\frac{1}{3} \Rightarrow 8 = B\big(-\frac{1}{3}+3\big) = \frac{8}{3}B \Rightarrow B=3$. Άρα

$$\int \frac{8}{3+5\,\text{ημ}\,2x}\,dx = \int \left(\frac{-3}{u+3} + \frac{3}{u+\frac{1}{3}}\right)du = \ln\left|\frac{u+\frac{1}{3}}{u+3}\right| + c = \ln\left|\frac{\tan x+\frac{1}{3}}{\tan x+3}\right| + c.$$

xiv. Γράφουμε $3\,\text{ημ}x + 4\,\text{συν}x = 5\,\text{ημ}(x+\alpha)$ με $\cos\alpha = \frac{3}{5},\ \sin\alpha = \frac{4}{5}$.

$$\int \frac{10}{3\,\text{ημ}x + 4\,\text{συν}x}\,dx = 2\int \csc(x+\alpha)\,dx = 2\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right| + c.$$

xv. Τυπικός τύπος με $t = \tan\frac{x}{2}$ (ή γνωστός τύπος για $a + b\,\text{συν}x$). Για $a=5,\ b=3$:

$$\int \frac{1}{5+3\,\text{συν}x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) + c.$$

16. Να αποδείξετε τους πιο κάτω αναγωγικούς τύπους.

i. $\displaystyle\int x^\nu e^x\,dx \;=\; x^\nu e^x \;-\; \nu\int x^{\nu-1}e^x\,dx, \qquad \nu\in\mathbb{N}$

ii. $I_\nu = \dfrac{1}{2}x^2(\ln x)^\nu - \dfrac{\nu}{2}\,I_{\nu-1},\quad \nu>1,\quad$ όπου $I_\nu = \displaystyle\int x(\ln x)^\nu\,dx,\ \nu\in\mathbb{N}$

iii. $I_\nu = \dfrac{\text{εφ}^{\nu-1}x}{\nu-1} - I_{\nu-2},\quad \nu\geq 2,\quad$ όπου $I_\nu = \displaystyle\int \text{εφ}^{\nu}x\,dx,\ \nu\in\mathbb{N}_0$

Λύση: (Ασκ. 1/54)

i. Θέτουμε $u = x^\nu$, $dv = e^x\,dx$. Τότε $du = \nu x^{\nu-1}\,dx$ και $v = e^x$.

$$\int x^\nu e^x\,dx = x^\nu e^x - \int \nu x^{\nu-1}e^x\,dx = x^\nu e^x - \nu\int x^{\nu-1}e^x\,dx.$$

ii. Θέτουμε $u = (\ln x)^\nu$, $dv = x\,dx$. Τότε $du = \nu(\ln x)^{\nu-1}\frac{1}{x}\,dx$ και $v = \frac{x^2}{2}$.

$$I_\nu = \int x(\ln x)^\nu\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^\nu - \int \frac{x^2}{2}\,\nu(\ln x)^{\nu-1}\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^\nu - \frac{\nu}{2}\int x(\ln x)^{\nu-1}\,dx,$$

δηλαδή

$$I_\nu = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^\nu - \frac{\nu}{2}\,I_{\nu-1} \quad (\nu>1).$$

iii. Γράφουμε $\text{εφ}^{\nu}x = \text{εφ}^{\nu-2}x\,\text{εφ}^2x = \text{εφ}^{\nu-2}x\,(\sec^2 x - 1)$. Άρα

$$I_\nu = \int \text{εφ}^{\nu}x\,dx = \int \text{εφ}^{\nu-2}x\,\sec^2 x\,dx - \int \text{εφ}^{\nu-2}x\,dx.$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = \text{εφ}\,x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx$:

$$\int \text{εφ}^{\nu-2}x\,\sec^2 x\,dx = \int u^{\nu-2}\,du = \frac{u^{\nu-1}}{\nu-1} = \frac{\text{εφ}^{\nu-1}x}{\nu-1}.$$

Έτσι

$$I_\nu = \frac{\text{εφ}^{\nu-1}x}{\nu-1} - \int \text{εφ}^{\nu-2}x\,dx = \frac{\text{εφ}^{\nu-1}x}{\nu-1} - I_{\nu-2}, \qquad \nu\geq 2.$$

17. Έστω
$$I_\nu = \int x^\nu \,\text{ημ}\, 2x\, dx, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0.$$
Να βρεθούν τα I_0, I_1 και να δειχθεί ότι
$$I_\nu = -\frac{1}{2}x^\nu \,\text{συν}\, 2x + \frac{\nu}{4}\, x^{\nu-1} \,\text{ημ}\, 2x - \frac{\nu(\nu-1)}{4}\, I_{\nu-2}, \qquad \nu \geq 2.$$
Στη συνέχεια, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^4 \,\text{ημ}\, 2x\, dx$.

Λύση: (Ασκ. 2/54)

i. $I_0 = \int \text{ημ}\, 2x\, dx = -\frac{1}{2}\,\text{συν}\, 2x + c.$

Για $I_1 = \int x \,\text{ημ}\, 2x\, dx$ με μέρη:
$$u = x, \quad dv = \text{ημ}\, 2x\, dx \;\Rightarrow\; du = dx, \quad v = -\tfrac{1}{2}\,\text{συν}\, 2x.$$
Άρα
$$I_1 = x\big(-\tfrac{1}{2}\,\text{συν}\, 2x\big) - \int \big(-\tfrac{1}{2}\,\text{συν}\, 2x\big)\, dx = -\tfrac{1}{2}\, x \,\text{συν}\, 2x + \tfrac{1}{2}\int \text{συν}\, 2x\, dx = -\tfrac{1}{2}\, x \,\text{συν}\, 2x + \tfrac{1}{4}\,\text{ημ}\, 2x + c.$$

ii. (Αναγωγικός τύπος) Με μέρη στο I_ν:
$$u = x^\nu, \quad dv = \text{ημ}\, 2x\, dx \;\Rightarrow\; du = \nu x^{\nu-1} dx, \quad v = -\tfrac{1}{2}\,\text{συν}\, 2x.$$
Τότε
$$I_\nu = \int x^\nu \text{ημ}\, 2x\, dx = -\tfrac{1}{2}x^\nu \text{συν}\, 2x + \frac{\nu}{2}\int x^{\nu-1}\text{συν}\, 2x\, dx.$$
Θέτουμε
$$J_{\nu-1} := \int x^{\nu-1}\text{συν}\, 2x\, dx$$
και ξανά μέρη:
$$u = x^{\nu-1}, \quad dv = \text{συν}\, 2x\, dx \;\Rightarrow\; du = (\nu-1)x^{\nu-2} dx, \quad v = \tfrac{1}{2}\,\text{ημ}\, 2x,$$
οπότε
$$J_{\nu-1} = \tfrac{1}{2}x^{\nu-1}\text{ημ}\, 2x - \frac{\nu-1}{2}\int x^{\nu-2}\text{ημ}\, 2x\, dx = \tfrac{1}{2}x^{\nu-1}\text{ημ}\, 2x - \frac{\nu-1}{2}\, I_{\nu-2}.$$
Επιστρέφοντας στο I_ν:
$$I_\nu = -\tfrac{1}{2}x^\nu \text{συν}\, 2x + \frac{\nu}{2}\Big(\tfrac{1}{2}x^{\nu-1}\text{ημ}\, 2x - \frac{\nu-1}{2} I_{\nu-2}\Big) = -\frac{1}{2}x^\nu \text{συν}\, 2x + \frac{\nu}{4}x^{\nu-1}\text{ημ}\, 2x - \frac{\nu(\nu-1)}{4}\, I_{\nu-2}.$$

iii. (Εφαρμογή για $\nu = 4$) Χρησιμοποιούμε τον τύπο δύο φορές.

$$I_2 = -\tfrac{1}{2}x^2\text{συν}\,2x + \tfrac{2}{4}x\,\text{ημ}\,2x - \tfrac{2\cdot 1}{4}I_0 = -\tfrac{1}{2}x^2\text{συν}\,2x + \tfrac{1}{2}x\,\text{ημ}\,2x + \tfrac{1}{4}\text{συν}\,2x.$$

Έπειτα

$$I_4 = -\tfrac{1}{2}x^4\text{συν}\,2x + \tfrac{4}{4}x^3\text{ημ}\,2x - \tfrac{4\cdot 3}{4}I_2 = -\tfrac{1}{2}x^4\text{συν}\,2x + x^3\text{ημ}\,2x - 3I_2.$$

Άρα

$$\int x^4\text{ημ}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}x^4\text{συν}\,2x + x^3\text{ημ}\,2x + \frac{3}{2}x^2\text{συν}\,2x - \frac{3}{2}x\,\text{ημ}\,2x - \frac{3}{4}\text{συν}\,2x + c$$

18. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) = 3x - 2, \quad f(1) = 1$

ii. $f'(x) = \sqrt{x-2}, \quad f(3) = 2$

iii. $f''(x) = 2 - 6x, \quad f'(0) = 4, \quad f(0) = 1$

iv. $f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'(1) = 1, \quad f(1) = 1$

v. $f''(x) = 2, \quad f(1) = f(3) = 0$

vi. $f'(x)e^{f(x)} = 2 + \ln x$ και η γραφική παράσταση της f να περνά από το σημείο $(e, 0)$.

Λύση: Ασκ.(1/56)

i. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x-2)\,dx$$

$$f(x) = \int 3x\,dx - \int 2\,dx = \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(1) = 1$

$$f(1) = \frac{3(1)^2}{2} - 2(1) + C = \frac{3}{2} - 2 + C = -\frac{1}{2} + C$$

$$-\frac{1}{2} + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$$

ii. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \sqrt{x-2}\,dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = x - 2$

$$f(x) = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$\implies f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(3) = 2$

$$f(3) = \frac{2}{3}(3-2)^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1)^{3/2} + C = \frac{2}{3} + C$$

$$\frac{2}{3} + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4}{3}$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + \frac{4}{3}$$

iii. Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (2-6x)\,dx$$

$$f'(x) = \int 2\,dx - \int 6x\,dx = 2x - 3x^2 + C_1$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f'(0) = 4$

$$f'(0) = 2(0) - 3(0)^2 + C_1 = C_1 = 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 3x^2 + 4$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x - 3x^2 + 4)\,dx$$

$$f(x) = \int 2x\,dx - \int 3x^2\,dx + \int 4\,dx = x^2 - x^3 + 4x + C_2$$

Γνωρίζοντας το $f(0)$=1 μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή C_2

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + C_2 = 1$$

Άρα η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 1$$

iv. Ολοκλήρωση για να βρούμε το $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int \frac{2}{x^3}\,dx = \int 2x^{-3}\,dx$$

$$f'(x) = 2\int x^{-3}\,dx = 2\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C_1 = -x^{-2} + C_1$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f'(1) = 1$

$$f'(1) = -1 + C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\,dx = \int -x^{-2}\,dx + \int 2\,dx$$

$$f(x) = x^{-1} + 2x + C_2 = \frac{1}{x} + 2x + C_2$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(1) = 1$

$$f(1) = 1 + 2 + C_2 = 3 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2$$

v. Ολοκλήρωση για να βρούμε το $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x + C_1$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x + C_1)\,dx = x^2 + C_1 x + C_2$$

Χρήση των αρχικών συνθηκών $f(1) = 0$ και $f(3) = 0$

$$f(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -1$$
$$f(3) = 9 + 3C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3C_1 + C_2 = -9$$

Λύση του συστήματος για C_1, C_2:

$$(3C_1 + C_2) - (C_1 + C_2) = -9 - (-1) \quad \Rightarrow \quad 2C_1 = -8 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -4$$
$$C_2 = -1 - C_1 = -1 - (-4) = 3$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

vi. Γραμμική αντικατάσταση για ολοκλήρωση

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{d}{dx}\big(e^{f(x)}\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(e^{f(x)}\big) = 2 + \ln x$$

Ολοκλήρωση και εύρεση $e^{f(x)}$

$$\int d\big(e^{f(x)}\big) = \int (2 + \ln x)\, dx$$
$$e^{f(x)} = \int 2\, dx + \int \ln x\, dx + C$$

Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων

$$\int 2\, dx = 2x, \quad \int \ln x\, dx = x \ln x - x$$
$$\Rightarrow e^{f(x)} = 2x + (x \ln x - x) + C = x \ln x + x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(e) = 0$

$$e^{f(e)} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = e \ln e + e + C = e \cdot 1 + e + C = 2e + C$$
$$C = 1 - 2e$$

Τελική μορφή της συνάρτησης

$$e^{f(x)} = x \ln x + x + 1 - 2e$$

Ισοδύναμα, λογαριθμίζοντας:

$$f(x) = \ln\big(x \ln x + x + 1 - 2e\big)$$

19. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, της οποίας η γραφική παράσταση έχει *οριζόντια εφαπτομένη* στην αρχή των αξόνων και ισχύει

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση: (Ασκ. 2/56)

Η φράση «οριζόντια εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων» σημαίνει ότι

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 2\,\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

Άρα, ολοκληρώνοντας μία φορά,

$$f'(x) = 2\,\frac{x}{x^2+1} + C_1.$$

Με την αρχική συνθήκη $f'(0) = 0$ παίρνουμε $C_1 = 0$, οπότε

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά:

$$f(x) = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln\bigl(x^2+1\bigr) + C_2.$$

Με $f(0) = 0$ προκύπτει $C_2 = 0$. Επομένως,

$$f(x) = \ln\bigl(1+x^2\bigr)$$

20. Αν $f''(x) = 4x^3 + 2x,\ x \in \mathbb{R}$ και $f'(1) = 4$, να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση: (Ασκ. 3/56)

Ολοκληρώνουμε τη δεύτερη παράγωγο για να βρούμε την $f'(x)$:

$$f'(x) = \int \bigl(4x^3 + 2x\bigr)\,dx = x^4 + x^2 + C.$$

Από την αρχική συνθήκη $f'(1) = 4$ προκύπτει

$$1 + 1 + C = 4 \;\Rightarrow\; C = 2,$$

οπότε

$$f'(x) = x^4 + x^2 + 2.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^4 \geq 0$ και $x^2 \geq 0$, άρα

$$f'(x) = x^4 + x^2 + 2 \geq 2 > 0.$$

Επομένως η f' δεν μηδενίζεται πουθενά και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

21. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(α) $\displaystyle\int 9x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$ (β) $\displaystyle\int \left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)dx$ (γ) $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^3(x)}{\text{συν}^2(x)}\,dx$

(δ) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ (στ) $\displaystyle\int \text{συν}\big(\sqrt{x}\big)\,dx$ (η) $\displaystyle\int 4x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

(ϑ) $\displaystyle\int \text{ημ}^7(x)\,\text{συν}^3(x)\,dx$ (ι) $\displaystyle\int \text{ημ}(7x)\,\text{συν}(3x)\,dx$ (ιβ) $\displaystyle\int \text{ημ}(2x)\,\text{συν}^6(x)\,dx$

(ια) $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^4(x)}{\text{συν}^6(x)}\,dx$ (ιγ) $\displaystyle\int \sqrt{1-\text{ημ}(2x)}\,dx, \quad x \in \big(0, \tfrac{\pi}{4}\big)$ (ιδ) $\displaystyle\int (x^2+1)e^x\,dx$

(ιε) $\displaystyle\int e^{ax}\text{ημ}(\beta x)\,dx$ (ιζ) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$ (ιστ) $\displaystyle\int \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x)\,dx$

(ιν) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+10}\,dx$ (κ) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\text{ημ}(x)}\,dx$ (κα) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\text{συν}(2x)-\text{ημ}(2x)}\,dx$

(κβ) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (κυ) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/57)

(α) Θέτουμε $u = x^3 + 5 \Rightarrow du = 3x^2dx$.

$$\int 9x^2\sqrt{x^3+5}\,dx = 3\int \sqrt{u}\,du = 3 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + c = 2(x^3+5)^{3/2} + c.$$

(β) $\dfrac{d}{dx}\ln(e^x+1) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$. Για το δεύτερο μέρος θέτουμε $t = \sqrt{\ln x} \Rightarrow \ln x = t^2,\ dx = 2t\,dt/x$:

$$\int \left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \ln(e^x+1) - \int 2t^2\,dt = \ln(e^x+1) - \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c.$$

(γ)

$$\int \frac{\text{ημ}^3(x)}{\text{συν}^2(x)}\,dx = \int \text{ημ}(x)\left(\frac{1}{\text{συν}^2(x)} - 1\right) dx.$$

Με $u = \text{συν}(x),\ du = -\text{ημ}(x)\,dx$:

$$-\int \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) du = \frac{1}{u} + u + c = \text{τεμ}(x) + \text{συν}(x) + c.$$

(δ)

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx, \quad u = e^x \Rightarrow du = e^x dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \tau o\xi\varepsilon\varphi(e^x) + c.$$

(στ) $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

$$\int \text{συν}\big(\sqrt{x}\big)\,dx = 2\int t\,\text{συν}(t)\,dt = 2\big(t\,\text{ημ}(t) + \text{συν}(t)\big) + c = 2\big(\sqrt{x}\,\text{ημ}\sqrt{x} + \text{συν}\sqrt{x}\big) + c.$$

(η) $u = x^2,\ du = 2x\,dx$.

$$\int 4x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = 2\int u\sqrt{1+u}\,du = 2\int \big((1+u)^{3/2} - (1+u)^{1/2}\big)\,du = \frac{4}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(1+x^2)^{3/2} + c.$$

(ϑ) $\text{συν}^3(x) = (1 - \text{ημ}^2(x))\,\text{συν}(x)$. Με $u = \text{ημ}(x),\ du = \text{συν}(x)\,dx$:

$$\int \text{ημ}^7(x)\,\text{συν}^3(x)\,dx = \int u^7(1-u^2)\,du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} + c = \frac{\text{ημ}^8(x)}{8} - \frac{\text{ημ}^{10}(x)}{10} + c.$$

(ι) Τύπος γινομένου σε άθροισμα: $\text{ημ}A\,\text{συν}B = \frac{1}{2}[\text{ημ}(A+B) + \text{ημ}(A-B)]$.

$$\int \text{ημ}(7x)\,\text{συν}(3x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int \big(\text{ημ}(10x) + \text{ημ}(4x)\big)\,dx = -\frac{\text{συν}(10x)}{20} - \frac{\text{συν}(4x)}{8} + c.$$

(ιβ) $\text{ημ}(2x) = 2\text{ημ}(x)\text{συν}(x)$. Με $u = \text{συν}(x)$, $du = -\text{ημ}(x)\,dx$:

$$\int \text{ημ}(2x)\,\text{συν}^6(x)\,dx = 2\int \text{ημ}(x)\,\text{συν}^7(x)\,dx = -2\int u^7\,du = -\frac{\text{συν}^8(x)}{4} + c.$$

(ια)

$$\int \frac{\text{ημ}^4(x)}{\text{συν}^6(x)}\,dx = \int \text{εφ}^4(x)\,\text{τεμ}^2(x)\,dx = \int \text{εφ}^4(x)\,d(\text{εφ}(x)) = \frac{\text{εφ}^5(x)}{5} + c.$$

(ιγ) $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \text{εφ}(x) > 0$. Θέτουμε $t = \text{εφ}(x) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ και $\text{ημ}(2x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$:

$$\int \sqrt{1 - \text{ημ}(2x)}\,dx = \int \frac{1-t}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt = \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + c = \text{ημ}(x) + \text{συν}(x) + c.$$

(ιδ) Κανόνας $\int P(x)e^x dx = e^x(P - P' + P'' - \cdots)$ για πολυώνυμο P:

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2 - 2x + 3)e^x + c.$$

(ιε) Τυπικός τύπος:

$$\int e^{ax}\text{ημ}(\beta x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+\beta^2}\big(a\,\text{ημ}(\beta x) - \beta\,\text{συν}(\beta x)\big) + c.$$

(ιζ) Μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + c.$$

(ιστ) Μερική ολοκλήρωση: $u = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x)$, $dv = dx$.

$$\int \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x)\,dx = x\ \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x) - \sqrt{1-x^2} + c.$$

(ιν) $u = x+1 \Rightarrow x-1 = u-2,\ x^2+2x+10 = u^2+9$:

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{u-2}{u^2+9}\,du = \frac{1}{2}\ln(u^2+9) - \frac{2}{3}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\Big(\frac{u}{3}\Big) + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\big((x+1)^2+9\big) - \frac{2}{3}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) + c.$$

(κ) Πολλαπλασιάζουμε με $\dfrac{1-\text{ημ}(x)}{1-\text{ημ}(x)}$:

$$\int \frac{1}{1+\text{ημ}(x)}\,dx = \int \frac{1-\text{ημ}(x)}{\text{συν}^2(x)}\,dx = \int \text{τεμ}^2(x)\,dx - \int \text{εφ}(x)\,\text{τεμ}(x)\,dx$$
$$= \text{εφ}(x) - \text{τεμ}(x) + c.$$

Με τύπο ημιγωνίας $t = \text{εφ}\big(\frac{x}{2}\big)$ παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\int \frac{1}{1+\text{ημ}(x)}\,dx = -\frac{2}{1+\text{εφ}\big(\frac{x}{2}\big)} + c.$$

(κα) $t = \text{εφ}(x) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\text{συν}(2x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\text{ημ}(2x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$:

$$3 + 2\text{συν}(2x) - \text{ημ}(2x) = \frac{(t-1)^2+4}{1+t^2}.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{3+2\text{συν}(2x)-\text{ημ}(2x)}\,dx = \int \frac{dt}{(t-1)^2+4} = \frac{1}{2}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t-1}{2}\right) + c$$
$$= \frac{1}{2}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\text{εφ}(x)-1}{2}\right) + c.$$

(κβ) $x = \text{εφ}(\theta) \Rightarrow dx = \text{τεμ}^2(\theta)\,d\theta,\ \sqrt{1+x^2} = \text{τεμ}(\theta)$:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\text{τεμ}^2\theta}{\text{εφ}^2\theta\,\text{τεμ}\theta}\,d\theta = \int \frac{\text{τεμ}\theta}{\text{εφ}^2\theta}\,d\theta = \int \text{συνεφ}(\theta)\,\text{συνκ}(\theta)\,d\theta = -\text{συνκ}(\theta) + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$

(κυ) $x+3 = \dfrac{1}{t} \Rightarrow dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$ και $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x(x+3)} = \dfrac{\sqrt{1-3t}}{t}$:

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}}\,dx = \int -\frac{1}{\sqrt{1-3t}}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{1-3t} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}} + c.$$

22. Να δείξετε ότι

$$\int f''(x)\,g(x)\,dx \;=\; f'(x)g(x) \;-\; f(x)g'(x) \;+\; \int f(x)\,g''(x)\,dx.$$

Ακολούθως, να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 e^x\,dx$$

Λύση: (Ασκ. 2/57)

Χρησιμοποιούμε μερική ολοκλήρωση,

$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$. Θέτουμε $u' = f''(x)$, $v = g(x) \Rightarrow u = f'(x)$. Τότε

$$\int f''(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)\,dx.$$

Εφαρμόζουμε ξανά με $u' = f'(x)$, $v = g'(x) \Rightarrow u = f(x)$:

$$\int f'(x)g'(x)\,dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g''(x)\,dx.$$

Άρα

$$\int f''(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + \int f(x)g''(x)\,dx$$

Υπολογίζουμε $\int x^2 e^x\,dx$ με δύο φορές μερική ολοκλήρωση.

Πρώτα $u = x^2$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x\,dx$, $v = e^x$:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx.$$

Ξανά στο δεύτερο: $u = 2x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2\,dx$, $v = e^x$:

$$\int 2x e^x\,dx = 2x e^x - \int 2e^x\,dx = 2x e^x - 2e^x.$$

Συνεπώς

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c.$$

$$\int x^2 e^x\,dx = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$

23. Να δείξετε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

i. Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Λύση: (Ασκ. 3/58)

Γράφουμε

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x\left(x^2+1\right)^{-1/2}.$$

Παράγωγος με κανόνα γινομένου–αλυσίδας:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot(x^2+1)^{-1/2} + x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-3/2}\cdot(2x) \\ &= (x^2+1)^{-1/2} - x^2(x^2+1)^{-3/2} = \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

i. Θέτουμε με μερική ολοκλήρωση στη μορφή $\int v\,du = uv - \int u\,dv$:

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad du = \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \ \ (\text{από το } (\alpha)),$$

$$v = \text{τοξεφ}(x), \qquad dv = \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Τότε

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{x\,\text{τοξεφ}(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $w = x^2+1 \Rightarrow dw = 2x\,dx$:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int w^{-3/2}\,dw = -w^{-1/2} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Άρα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{x\,\text{τοξεφ}(x)+1}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

24. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}\,dx$.

i. Να βρείτε τις σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\text{συν}(x) \;\equiv\; a\big(\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)\big) \;+\; \beta\big(2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)\big).$$

ii. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{\text{συν}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}\,dx$.

Λύση: (Ασκ. 4/58)

Θέτουμε

$$u = \text{συν}(x)+2\text{ημ}(x) \quad\Rightarrow\quad du = \big(-\text{ημ}(x)+2\text{συν}(x)\big)\,dx = (2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x))\,dx.$$

Τότε

$$\int \frac{2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\big|\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)\big| + c$$

i. Εξισώνουμε συντελεστές σε συν(x) και ημ(x):

$$a\big(\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)\big) + \beta\big(2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)\big) = (a+2\beta)\text{συν}(x) + (2a-\beta)\text{ημ}(x).$$

Θέλουμε $(a+2\beta)=1$ και $2a-\beta=0$. Άρα

$$\beta = 2a, \qquad a+4a=1 \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{5},\quad \beta=\frac{2}{5}.$$

Έτσι

$$\text{συν}(x) \equiv \frac{1}{5}\big(\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)\big) + \frac{2}{5}\big(2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)\big)$$

ii. Χρησιμοποιούμε την (i):

$$\frac{\text{συν}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\,\frac{2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}.$$

Ολοκληρώνουμε και εφαρμόζουμε την αρχική απόδειξη:

$$\int \frac{\text{συν}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}\,dx = \frac{1}{5}\,x + \frac{2}{5}\int \frac{2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}\,dx = \frac{1}{5}\,x + \frac{2}{5}\ln\bigl|\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)\bigr| + c$$

25. Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό.

i. $\displaystyle\int_{x\in(1,+\infty)} \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}}\,dx,$

ii. $\displaystyle\int_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^x}{(e^x+1)\,\ln(e^x+1)}\,dx,$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx, \quad \text{με } x=\sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta$

iv. $\displaystyle\int_{\theta\in(0,\pi/2)} \sqrt{\text{εφ}\,\theta}\;d\theta, \quad \text{με } t=\sqrt{\text{εφ}\,\theta}.$

Λύση: (Ασκ. 5/58)

i. Θέτουμε $u=\sqrt{\ln x}$. Τότε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}},$$

άρα

$$\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}}\,dx = 7\int du = 7\sqrt{\ln x} + c$$

ii. Θέτουμε $u=\ln(e^x+1) \Rightarrow du = \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx.$

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)\,\ln(e^x+1)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln\bigl(\ln(e^x+1)\bigr) + c$$

iii. Θέτουμε $x=\sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta$ ($\Rightarrow x>\sqrt{2}$). Τότε

$$dx = \sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta\,\text{εφ}\,\theta\,d\theta, \qquad \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2}\,\text{εφ}\,\theta, \qquad x^4 = 4\,\text{τεμ}^4\theta.$$

Επομένως

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta\,\text{εφ}\,\theta}{4\,\text{τεμ}^4\theta\cdot\sqrt{2}\,\text{εφ}\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \text{τεμ}^{-3}\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int \text{συν}^3\theta\,d\theta.$$

Υπολογίζουμε

$$\int \text{συν}^3\theta\,d\theta = \int \text{συν}\theta\,(1-\text{ημ}^2\theta)\,d\theta = \text{ημ}\theta - \frac{1}{3}\text{ημ}^3\theta + c.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx = \frac{1}{4}\text{ημ}\theta - \frac{1}{12}\text{ημ}^3\theta + c.$$

Επαναφέρουμε: $\text{συν}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \text{ημ}\theta = \sqrt{1-\frac{2}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}$.

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2-2}}{6x^3} + c$$

iv. Θέτουμε $t = \sqrt{\text{εφ}\,\theta} \Rightarrow \text{εφ}\,\theta = t^2$. Τότε $d(\text{εφ}\,\theta) = \text{τεμ}^2\theta\,d\theta = 2t\,dt$ και $\text{τεμ}^2\theta = 1+\text{εφ}^2\theta = 1+t^4$. Άρα

$$d\theta = \frac{2t}{1+t^4}\,dt, \qquad \int \sqrt{\text{εφ}\,\theta}\,d\theta = \int t\cdot\frac{2t}{1+t^4}\,dt = \int \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt.$$

Γράφουμε $1+t^4 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$ και με μερικά κλάσματα προκύπτει

$$\int \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}\right) + c.$$

Επαναφέρουμε $t = \sqrt{\text{εφ}\,\theta}$:

$$\int \sqrt{\text{εφ}\,\theta}\ d\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\text{εφ}\,\theta - \sqrt{2\,\text{εφ}\,\theta}+1}{\text{εφ}\,\theta + \sqrt{2\,\text{εφ}\,\theta}+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{\text{εφ}\,\theta - 1}{\sqrt{2\,\text{εφ}\,\theta}}\right) + c$$

26. Να αποδείξετε ότι:

i.
$$\int x\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2\,dx = \frac{1}{2}\,(x^2+1)\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - x\,\text{τοξεφ}(x) + \ln\big(\sqrt{x^2+1}\big) + c.$$

ii.
$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$$

Λύση: (Ασκ. 6/58)

i. Θέτουμε
$$I = \int x\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2\,dx.$$

Μερική ολοκλήρωση με $u = \big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 \Rightarrow du = 2\,\text{τοξεφ}(x)\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$, $dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$:
$$I = \frac{x^2}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - \int \frac{x^2\,\text{τοξεφ}(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Γράφουμε $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$:
$$I = \frac{x^2}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - \int \text{τοξεφ}(x)\,dx + \int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Στο τελευταίο, θέτουμε $t = \text{τοξεφ}(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$:
$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{1+x^2}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2.$$

Άρα
$$I = \frac{x^2+1}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - \int \text{τοξεφ}(x)\,dx.$$

Υπολογίζουμε $\int \text{τοξεφ}(x)\,dx$ με Μ.Ο.: $u = \text{τοξεφ}(x),\ dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = x.$
$$\int \text{τοξεφ}(x)\,dx = x\,\text{τοξεφ}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\text{τοξεφ}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

Συνεπώς
$$I = \frac{x^2+1}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - x\,\text{τοξεφ}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \frac{1}{2}(x^2+1)\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - x\,\text{τοξεφ}(x) + \ln\big(\sqrt{x^2+1}\big) + c,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Θέτουμε $t = x+1 \Rightarrow x = t-1,\ dx = dt$:

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx = \int \frac{(t-1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right)dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά δύναμη:

$$= \ln|t| + \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2} + c = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

27. Αν

$$I_\nu = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}\,dx, \qquad \nu \in \mathbb{N},\ a > 0,$$

τότε:

i. Να αποδείξετε τον αναγωγικό τύπο

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{2\nu-1}{2\nu a^2}\, I_\nu.$$

ii. Να βρείτε τα I_2 και I_3.

Λύση: (Ασκ. 7/59)

i. Ξεκινάμε από

$$I_{\nu+1} = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \left[\frac{1}{(x^2+a^2)^\nu} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\right]dx = \frac{1}{a^2}\Big(I_\nu - J\Big),$$

όπου $J = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\,dx$. Υπολογίζουμε το J με μερική ολοκλήρωση θέτοντας

$$u = x, \qquad dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\,dx \ \Rightarrow\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{2\nu}\frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}.$$

Τότε

$$J = u\,v - \int v\,du = -\frac{x}{2\nu}\frac{1}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}\,dx = -\frac{x}{2\nu(x^2+a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu}I_\nu.$$

Άρα

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{a^2}\left(I_\nu - \left[-\frac{x}{2\nu(x^2+a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu}I_\nu\right]\right) = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{2\nu-1}{2\nu a^2}\, I_\nu,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Βάση:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c.$$

Για $\nu = 1$:

$$I_2 = \frac{1}{2\cdot 1\,a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{2\cdot 1 - 1}{2\cdot 1\,a^2}\,I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c$$

Για $\nu = 2$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\,I_2 \\ &= \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left[\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big)\right] \\ &= \frac{x(3x^2+5a^2)}{8a^4(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^5}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c. \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{x(3x^2+5a^2)}{8a^4(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^5}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c$$

28. Να βρεθεί συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, η γραφική της να διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και να έχει κλίση στο σημείο A ίση με 3.

Λύση: (Ασκ. 8/59)

Από $f''(x) = -x^{-2}$ παίρνουμε

$$f'(x) = \int -x^{-2}\,dx = \frac{1}{x} + C_1.$$

Η κλίση στο $A(1,3)$ είναι $f'(1) = 3 \Rightarrow 1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 2$. Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

Ολοκληρώνοντας ξανά,

$$f(x) = \int\left(\frac{1}{x} + 2\right)dx = \ln x + 2x + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε $f(1) = 3$: $0 + 2 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 1$. Επομένως

$$f(x) = 2x + \ln x + 1, \quad x > 0$$

29. Αν η f είναι παραγώγιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ, να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x\big(f(x)+f'(x)\big)\,dx.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x\big(\text{ημ}(x)+\text{συν}(x)\big)\,dx.$$

Λύση: (Ασκ. 9/59)

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου:

$$\frac{d}{dx}\big(e^x f(x)\big)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\big(f(x)+f'(x)\big).$$

Άρα,

$$\int e^x\big(f(x)+f'(x)\big)\,dx=e^x f(x)+c$$

για κάθε παραγώγιμη f.

Για $\int e^x\big(\text{ημ}(x)+\text{συν}(x)\big)\,dx$ θέτουμε $f(x)=\text{ημ}(x)$ (οπότε $f'(x)=\text{συν}(x)$). Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο,

$$\int e^x\big(\text{ημ}(x)+\text{συν}(x)\big)\,dx=e^x\,\text{ημ}(x)+c$$

(έλεγχος: $\frac{d}{dx}[e^x\text{ημ}(x)]=e^x\text{ημ}(x)+e^x\text{συν}(x)$).

30. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων και για κάθε $x>0$ ισχύει $f^2(x)\,f'(x)=x^2+1$.

ii. $xf'(x)=e^x-f(x)$, $x\neq 0$, και $f(2)=0$.

iii. $2xf'(x)+x^2f''(x)=2x+1$, $x\neq 0$, και $f'(1)=f(1)=2$.

Λύση: (Ασκ. 10/59)

i. Για $x>0$:

$$f^2(x)f'(x)=x^2+1 \implies f^2\,df=(x^2+1)\,dx.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\frac{1}{3}f^3(x)=\frac{x^3}{3}+x+C.$$

Από $f(0)=0$ (διέρχεται από την αρχή) παίρνουμε $C=0$.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x}, \qquad x\geq 0$$

ii. Γραμμική Δ.Ε.:

$$xf'(x)+f(x)=e^x \iff f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{e^x}{x}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x)=e^{\int(1/x)dx}=x$. Άρα $(xf(x))'=e^x$ και

$$xf(x)=e^x+C \implies f(x)=\frac{e^x}{x}+\frac{C}{x}.$$

Με $f(2)=0$ βρίσκουμε $C=-e^2$.

$$f(x)=\frac{e^x-e^2}{x}, \qquad x\neq 0$$

iii. Παρατηρούμε ότι $\frac{d}{dx}\big(x^2f'(x)\big)=2xf'(x)+x^2f''(x)$. Άρα

$$\big(x^2f'(x)\big)'=2x+1 \implies x^2f'(x)=x^2+x+C_1.$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}.$$

Με $f'(1)=2$ προκύπτει $C_1=0$, οπότε $f'(x)=1+\frac{1}{x}$. Ολοκληρώνουμε:

$$f(x)=x+\ln|x|+C_2.$$

Με $f(1)=2$ παίρνουμε $C_2=1$. Επομένως (στο $(0,+\infty)$):

$$f(x)=x+\ln x+1$$

31. Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4,4)$ και ισχύει

$$f''(x)=\frac{2}{(x-3)^3}, \qquad x\neq 3.$$

Λύση: (Ασκ. 11/59)

Από την υπόθεση

$$f''(x)=\frac{2}{(x-3)^3}$$

ολοκληρώνουμε μία φορά:

$$f'(x) = \int \frac{2}{(x-3)^3}\,dx = 2 \cdot \frac{(x-3)^{-2}}{-2} + C_1 = -\frac{1}{(x-3)^2} + C_1.$$

Εφόσον στο $A(4,4)$ υπάρχει τοπικό ακρότατο, πρέπει $f'(4) = 0$. Άρα

$$0 = f'(4) = -\frac{1}{(4-3)^2} + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 1,$$

οπότε

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά:

$$f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx = x - \int (x-3)^{-2}\,dx = x + \frac{1}{x-3} + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε ότι το σημείο $A(4,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση: $f(4) = 4$.

$$4 = 4 + \frac{1}{1} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -1.$$

Άρα

$$f(x) = x + \frac{1}{x-3} - 1, \qquad x \neq 3.$$

(Επιπλέον $f''(4) = 2 > 0$, άρα το ακρότατο στο $x = 4$ είναι ελάχιστο.)

32. Δίνεται ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad f'(0) = 3,\; f(0) = 2.$$

Να αποδειχθούν/βρεθούν τα παρακάτω:

i. Αν $u(x) = f'(x) - f(x)$, να δείξετε ότι $u'(x) - 2u(x) = 0$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της u.

iii. Να δείξετε ότι $\left(e^{-x} f(x)\right)' = e^x$ και να βρείτε τη f.

Λύση: (Ασκ. 12/59)

i. Με $u = f' - f$ έχουμε $u' = f'' - f'$. Άρα

$$u' - 2u = (f'' - f') - 2(f' - f) = f'' - 3f' + 2f = 0,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Η Δ.Ε. είναι $u' - 2u = 0 \Rightarrow u(x) = Ce^{2x}$. Από $u(0) = f'(0) - f(0) = 3 - 2 = 1$ προκύπτει $C = 1$. Επομένως

$$u(x) = e^{2x}$$

iii. Υπολογίζουμε

$$\big(e^{-x} f(x)\big)' = e^{-x}\big(f'(x) - f(x)\big) = e^{-x} u(x) = e^{-x} \cdot e^{2x} = e^{x}.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$e^{-x} f(x) = \int e^{x}\, dx = e^{x} + C \;\Rightarrow\; f(x) = e^{2x} + Ce^{x}.$$

Με $f(0) = 2$ παίρνουμε $1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$. Άρα

$$f(x) = e^{2x} + e^{x}$$

(Έλεγχος: $f'(0) = 2 + 1 = 3$ και $f'' - 3f' + 2f = 0$.)

33. Να βρείτε μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = |3x - 6|$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: (Ασκ. 1/60)

Θέτουμε $u = 3x - 6 \Rightarrow du = 3\,dx$ και $dx = \dfrac{du}{3}$. Τότε

$$\int |3x - 6|\, dx = \frac{1}{3}\int |u|\, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\, u|u| + c = \frac{1}{6}\,(3x - 6)\,|3x - 6| + c$$

(Έλεγχος: $\dfrac{d}{dx}\big[\frac{1}{6}(3x - 6)|3x - 6|\big] = |3x - 6|$.)

Ισοδύναμα, κατά τμήματα:

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 6 + c, & x \leq 2, \\ \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 6 + c, & x \geq 2, \end{cases}$$

που ικανοποιεί $F'(x) = |3x - 6|$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

34. Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει πάντα παράγουσα στο Δ. Να δείξετε ότι το *αντίστροφο* δεν ισχύει, χρησιμοποιώντας ως αντιπαράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2x\,\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\text{συν}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Λύση: (Ασκ. 2/60)

Θέτουμε

$$F(x)=\begin{cases}x^2\,\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Για $x\neq 0$, με κανόνα γινομένου–αλυσίδας,

$$F'(x)=2x\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\,\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)-\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)=f(x).$$

Στο $x=0$,

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0).$$

Άρα F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $F'(x)=f(x)$ για όλα τα x. Επομένως η f *έχει* παράγουσα (είναι παράγωγος της F).

Δείχνουμε τώρα ότι η f *δεν* είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, παίρνουμε τις ακολουθίες

$$x_n=\frac{1}{2\pi n}\ \Rightarrow\ f(x_n)=2x_n\text{ημ}(2\pi n)-\text{συν}(2\pi n)=0-1=-1,$$

$$y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}\ \Rightarrow\ f(y_n)=2y_n\text{ημ}((2n+1)\pi)-\text{συν}((2n+1)\pi)=0-(-1)=1.$$

Άρα $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=-1$ ενώ $\lim_{n\to\infty}f(y_n)=1$.

Η $\lim_{x\to 0}f(x)$ δεν υπάρχει, συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Συμπέρασμα: Υπάρχει συνάρτηση f που *είναι* παράγωγος κάποιας F (άρα έχει παράγουσα) αλλά *δεν* είναι συνεχής.

Άρα το αντίστροφο του θεωρήματος "η συνέχεια συνεπάγεται ύπαρξη παραγώγου" δεν ισχύει.

35. Να δείξετε ότι οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της

$$f(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2}, & x < 0, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2} - 5, & x < 0. \end{cases}$$

Γιατί είναι λάθος να γράψουμε

$$\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x^2} + c, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \ ?$$

Λύση: (Ασκ. 3/60)

Απόδειξη ότι F και G είναι παράγουσες. Για $x \neq 0$ ισχύει

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} = f(x).$$

Άρα, για $x > 0$ και για $x < 0$,

$$F'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = f(x), \qquad G'(x) = \left(\frac{1}{x^2} \pm 5\right)' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = f(x),$$

εφόσον η παράγωγος σταθεράς είναι 0.

Επομένως και οι δύο συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Γιατί η γραφή με ένα μόνο c είναι λανθασμένη;

Ο *αόριστος ολοκληρωμένος* ορίζεται «μέχρι σταθερά» σε *συνεκτικό* διάστημα. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ είναι *ένωση δύο* διαστημάτων, άρα η γενική παράγουσα επιτρέπεται να έχει *διαφορετικές* σταθερές σε καθένα από αυτά:

$$\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + C_1, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2} + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Αν γράψουμε μία μόνο σταθερά c, αποκλείουμε έγκυρες παραγώγους όπως η

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2} - 5, & x < 0, \end{cases}$$

η οποία έχει διαφορετικές σταθερές στις δύο συνιστώσες του πεδίου ορισμού.

Επομένως η σχέση $\int (-2/x^3)\,dx = \frac{1}{x^2} + c$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι λανθασμένη: χρειάζονται δύο ανεξάρτητες σταθερές.

Θέματα Εξετάσεων

1. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς a, β και γ, για τους οποίους να ισχύει:

$$\int (ae^x - \beta\text{ημ}2x + \gamma)\,dx = e^x + \text{συν}2x - x + c$$

Λύση: 2025

$$(e^x + \text{συν}2x - x)' = e^x - 2\text{ημ}2x - 1$$

Επομένως, $a = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1.$

Εναλλακτικά:

$$\int (ae^x - \beta\text{ημ}2x + \gamma)\,dx = ae^x + \frac{\beta}{2}\text{συν}2x + \gamma x + c$$

Επομένως, $a = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1.$

2. Έστω συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 4$ και $f(0) = 1$.

i. Αν $u(x) = f'(x) - 2f(x)$, να αποδείξετε ότι $u'(x) - 3u(x) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $u(x) = 2e^{3x}$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\left(e^{-2x}f(x)\right)' = 2e^x$.

iv. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση: 2025

i. Βρίσκουμε την παράγωγο της u:

$$u'(x) = f''(x) - 2f'(x).$$

Άρα

$$u'(x) - 3u(x) = \big(f''(x) - 2f'(x)\big) - 3\big(f'(x) - 2f(x)\big) = f''(x) - 5f'(x) + 6f(x).$$

Δεδομένου ότι $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι

$$u'(x) - 3u(x) = 0.$$

ii. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με e^{-3x}:

$$u'(x) - 3u(x) = 0 \implies u'(x)e^{-3x} - 3e^{-3x}u(x) = 0 \implies \big(e^{-3x}u(x)\big)' = 0.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$e^{-3x}u(x) = c \implies u(x) = c\,e^{3x}.$$

Για $x = 0$:

$$u(0) = f'(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2 \;\Rightarrow\; c = 2.$$

Άρα

$$u(x) = 2e^{3x}$$

iii. Έχουμε

$$\big(e^{-2x}f(x)\big)' = (e^{-2x})'\,f(x) + e^{-2x}\,f'(x) = -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x)$$
$$= e^{-2x}\big(f'(x) - 2f(x)\big) = e^{-2x}u(x) = e^{-2x}\cdot 2e^{3x} = 2e^{x}.$$

iv. Από το προηγούμενο:

$$\big(e^{-2x}f(x)\big)' = 2e^{x} \implies \int \big(e^{-2x}f(x)\big)'\,dx = \int 2e^{x}\,dx \implies e^{-2x}f(x) = 2e^{x} + c_1.$$

Πολλαπλασιάζοντας με e^{2x}:

$$f(x) = 2e^{3x} + c_1e^{2x}.$$

Με τη συνθήκη $f(0) = 1$:

$$1 = f(0) = 2e^{0} + c_1e^{0} = 2 + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = -1.$$

Άρα ο ζητούμενος τύπος είναι

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{2x}$$

3. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$$

Λύση: 2024

Αρχικά, αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{(x-1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $x(x-1)^2$ προκύπτει:

$$1 \equiv A(x-1)^2 + Bx(x-1) + \Gamma x.$$

Δίνοντας τιμές στο x παίρνουμε:

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A \quad \text{και} \quad x = 1 \Rightarrow 1 = \Gamma.$$

Εξισώνοντας συντελεστές ίσων δυνάμεων του x:

$$0 = A + B \;\Rightarrow\; B = -A = -1.$$

Άρα το αρχικό κλάσμα γράφεται ως:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int (x-1)^{-2}\,dx.$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|, \quad \int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|, \quad \int (x-1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{x-1}.$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το σημείο $A(0, 1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει κλίση

$$\lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Λύση: 2024

Από την κλίση της εφαπτομένης προκύπτει

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \implies f(x)\, f'(x) = e^{2x}.$$

Ολοκληρώνουμε και στα δύο μέλη:

$$\int f(x) f'(x)\, dx = \int e^{2x}\, dx \implies \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + c \implies \big(f(x)\big)^2 = e^{2x} + c_1.$$

Από $A(0, 1)$ έχουμε $f(0) = 1$, οπότε

$$1^2 = e^0 + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = 0.$$

Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε x, παίρνουμε τη θετική ρίζα:

$$f(x) = e^x.$$

5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \text{τοξημ}\, t\, dt}{\text{συν}\, x - 1}.$$

Λύση: 2024

Θέτουμε $F(x) = \displaystyle\int_0^x \text{τοξημ}\, t\, dt$. Η $\text{τοξημ}\, x$ είναι συνεχής στο $x = 0$, άρα και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = \text{τοξημ}\, x, \qquad F(0) = \int_0^0 \text{τοξημ}\, t\, dt = 0.$$

Επίσης, $\lim_{x\to 0}(\text{συν}\, x - 1) = 1 - 1 = 0$. Άρα το αρχικό όριο έχει αόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \text{τοξημ}\, t\, dt}{\text{συν}\, x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\int_0^x \text{τοξημ}\, t\, dt)'}{(\text{συν}\, x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}\, x}{-\text{ημ}\, x}.$$

Και πάλι προκύπτει μορφή $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζουμε εκ νέου De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{τοξημ}\,x}{-\text{ημ}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\text{τοξημ}\,x)'}{(-\text{ημ}\,x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\text{συν}\,x}=\frac{1}{1}\cdot(-1)=-1.$$

6. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f''(x)=f(x)\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι:

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx=\frac{f'(x)\,\text{ημ}x-f(x)\,\text{συν}x}{2}+c,\qquad c\in\mathbb{R}.$$

ii. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\,\text{ημ}x\,dx.$$

Λύση: 2024

i.

Α Τρόπος:

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx=\int f(x)\,d(-\text{συν}x)=f(x)\,(-\text{συν}x)-\int f'(x)\,(-\text{συν}x)\,dx$$

$$=-f(x)\,\text{συν}x+\int f'(x)\,\text{συν}x\,dx=-f(x)\,\text{συν}x+\int f'(x)\,d(\text{ημ}x)$$

$$=-f(x)\,\text{συν}x+f'(x)\,\text{ημ}x-\int f''(x)\,\text{ημ}x\,dx.$$

Άρα,

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx=f'(x)\,\text{ημ}x-f(x)\,\text{συν}x-\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx$$

(επειδή $f''=f$).

$$\Rightarrow\quad 2\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx=f'(x)\,\text{ημ}x-f(x)\,\text{συν}x$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \frac{f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x}{2} + c.$$

<u>Β Τρόπος:</u>

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \int f''(x)\,\text{ημ}x\,dx = \int \text{ημ}x\,d\big(f'(x)\big)$$

$$= f'(x)\,\text{ημ}x - \int f'(x)\,\text{συν}x\,dx = f'(x)\,\text{ημ}x - \int \text{συν}x\,d\big(f(x)\big)$$

$$= f'(x)\,\text{ημ}x - \Big[f(x)\,\text{συν}x - \int f(x)\,(-\text{ημ}x)\,dx\Big]$$

$$= f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x - \int f(x)\,\text{ημ}x\,dx,$$

οπότε όπως πριν

$$\int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \frac{f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x}{2} + c.$$

<u>Γ Τρόπος :</u>

$$\left(\frac{f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x}{2} + c\right)' = \frac{1}{2}\big[f''(x)\,\text{ημ}x + f'(x)\,\text{συν}x - f'(x)\,\text{συν}x - f(x)\,(-\text{ημ}x)\big]$$

$$= \frac{1}{2}\big[f''(x)\,\text{ημ}x + f(x)\,\text{ημ}x\big] = \frac{1}{2}\big[f(x)\,\text{ημ}x + f(x)\,\text{ημ}x\big] = f(x)\,\text{ημ}x.$$

Άρα ο τύπος του (i.) ισχύει.

ii. Θέτουμε $f(x) = e^{-x}$. Τότε

$$f'(x) = -e^{-x}, \qquad f''(x) = e^{-x} = f(x),$$

άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις και με χρήση του (i.) έχουμε:

$$\int e^{-x}\,\text{ημ}x\,dx = \int f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \frac{f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x}{2} + c = \frac{-e^{-x}\,\text{ημ}x - e^{-x}\,\text{συν}x}{2} + c.$$

Δηλαδή

$$\int e^{-x}\,\text{ημ}x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\,\big(\text{ημ}x + \text{συν}x\big) + c$$

7. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x \left(1+e^x\right)^4 dx$$

Λύση: 2023

A' τρόπος

$$\int e^x\,(1+e^x)^4\,dx = \int (1+e^x)^4\,d(1+e^x) = \frac{(1+e^x)^5}{5} + c.$$

B' τρόπος

$$u = 1+e^x \;\Rightarrow\; du = e^x\,dx$$
$$\int e^x\,(1+e^x)^4\,dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(1+e^x)^5}{5} + c.$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ}\,x,\; x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\; \forall x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \text{τοξεφ}\,x\,dx$.

Λύση: 2023

i. Θέτουμε $y = \text{τοξεφ}\,x$. Τότε $x = \text{εφ}\,y$ με $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$1 = \text{τεμ}^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y}.$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\text{τεμ}^2 y = 1 + \text{εφ}^2 y$ προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \;\Longrightarrow\; f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\; \forall x \in \mathbb{R}$$

ii. Με ολοκλήρωση κατά μέρη, θέτουμε

$$u = \text{τοξεφ}\, x, \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\, dx, \; v = x.$$

Τότε

$$\int \text{τοξεφ}\, x\, dx = x \cdot \text{τοξεφ}\, x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \cdot \text{τοξεφ}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \; x \cdot \text{τοξεφ}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

9. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx$

ii. $\displaystyle\int \left(\text{εφ}^5 x + \text{εφ}^7 x\right) dx, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση: 2022

i. Γράφουμε

$$\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx = \int e^{2x}\, dx + \int 4x\, dx - \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + 2x^2 - \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x^2 - x - \text{τοξεφ}\, x + c.$$

ii. Παραγοντοποιούμε:

$$\int \left(\text{εφ}^5 x + \text{εφ}^7 x\right) dx = \int \text{εφ}^5 x\, (1 + \text{εφ}^2 x)\, dx.$$

Επειδή $1 + \text{εφ}^2 x = \text{τεμ}^2 x$, θέτουμε

$$u = \text{εφ}\, x \quad \Rightarrow \quad du = \text{τεμ}^2 x\, dx.$$

Τότε

$$\int \text{εφ}^5 x\, (1 + \text{εφ}^2 x)\, dx = \int \text{εφ}^5 x\, \text{τεμ}^2 x\, dx = \int u^5\, du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{\text{εφ}^6 x}{6} + c.$$

10. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int (3x^2 - e^x + \text{συν}\, x - \pi)\, dx$$

Λύση: 2021

$$\int (3x^2 - e^x + \text{συν}\, x - \pi)\, dx = \int 3x^2\, dx - \int e^x\, dx + \int \text{συν}\, x\, dx - \int \pi\, dx$$
$$= \frac{3x^3}{3} - e^x + \text{ημ}\, x - \pi x + c \;=\; x^3 - e^x + \text{ημ}\, x - \pi x + c$$

11. Με την υπόθεση ότι $1 - \text{ημ}\, 2x + 2\text{συν}\, 2x \neq 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, και χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{1 - \text{ημ}\, 2x + 2\text{συν}\, 2x}, \qquad t = \text{εφ}\, x,\;\; x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Λύση: 2021

Αν $t = \text{εφ}\, x$, τότε

$$\text{ημ}\, 2x = \frac{2t}{t^2+1}, \qquad \text{συν}\, 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Επομένως:

$$I = \int \frac{dx}{1 - \text{ημ}\, 2x + 2\text{συν}\, 2x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{t^2+1} + 2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}.$$

Ενοποιούμε τους παρονομαστές:

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2-2t+2(1-t^2)} = \int \frac{dt}{-t^2-2t+3}.$$

Άρα

$$I = -\int \frac{dt}{(t+3)(t-1)}.$$

Γράφουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{(t+3)(t-1)} \equiv \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(t+3)(t-1)$:

$$1 = A(t-1) + B(t+3) \Rightarrow 1 = (A+B)t + (-A+3B).$$

Συγκρίνοντας συντελεστές:

$$A + B = 0, \qquad -A + 3B = 1.$$

Από το πρώτο $A = -B$. Το αντικαθιστούμε στο δεύτερο:

$$-(-B) + 3B = 1 \Rightarrow 4B = 1 \Rightarrow B = \tfrac{1}{4},\ A = -\tfrac{1}{4}.$$

Άρα

$$I = -\int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{t+3} + \frac{\frac{1}{4}}{t-1} \right) dt = \tfrac{1}{4}\int \frac{dt}{t+3} - \tfrac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1}.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$I = \tfrac{1}{4}\ln|t+3| - \tfrac{1}{4}\ln|t-1| + c = \tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{t+3}{t-1}\right| + c.$$

Επαναφέρουμε $t = \text{εφ}\, x$:

$$I = \tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{\text{εφ}\, x + 3}{\text{εφ}\, x - 1}\right| + c.$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι:

i) $g''(x)e^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^2 e^{g(x)} = 2$

ii) $g(1) = 0$ και $g'(1) = 1$

(α) Να δείξετε ότι: $g'(x)e^{g(x)} = 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(β) Να βρείτε συνάρτηση g που να ικανοποιεί τις συνθήκες i) και ii)

Λύση: 2021

(α)

$$g''(x)e^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^2 e^{g(x)} = 2 \ \Rightarrow \ \int \Big(g''(x)e^{g(x)} + \big(g'(x)\big)^2 e^{g(x)}\Big)\, dx = \int 2\, dx$$

$$\int \big(g'(x)e^{g(x)}\big)'\, dx = \int 2\, dx \ \Rightarrow \ g'(x)e^{g(x)} = 2x + c_1$$

Για $x = 1 \Rightarrow g'(1)e^{g(1)} = 2 + c_1 \Rightarrow 1 = 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1$

$$\Rightarrow \quad g'(x)e^{g(x)} = 2x - 1$$

(β)

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = \int (2x-1)\,dx \Rightarrow \int (e^{g(x)})'\,dx = \int (2x-1)\,dx \Rightarrow e^{g(x)} = x^2 - x + c_2$$

Για $x = 1 \Rightarrow e^{g(1)} = 1 - 1 + c_2 \Rightarrow 1 = c_2 \Rightarrow e^{g(x)} = x^2 - x + 1$

$x^2 - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, άρα:

$$g(x) = \ln(x^2 - x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

13. Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = 3x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση περνά από το σημείο $A(2, 6)$.

Λύση: 2020

Η αρχική συνθήκη είναι $f(2) = 6$. Έχουμε ότι:

$$f(x) = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + c.$$

Από την αρχική συνθήκη:

$$6 = \frac{3 \cdot 2^2}{2} + c \ \Rightarrow\ 6 = \frac{12}{2} + c \ \Rightarrow\ 6 = 6 + c \ \Rightarrow\ c = 0.$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2}$$

14. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2\,dx.$$

Λύση: 2020

1$^{o\varsigma}$ τρόπος

$$\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2\,dx = \int \left(\eta\mu^2 x + 2\,\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x\right)dx = \int (1 + \eta\mu\,2x)\,dx = x - \frac{\sigma\upsilon\nu\,2x}{2} + c.$$

2^{ος} τρόπος

$$\int (\text{ημ}x + \text{συν}x)^2\, dx = \int \left(\text{ημ}^2 x + 2\,\text{ημ}x\,\text{συν}x + \text{συν}^2 x\right) dx = \int (1 + 2\,\text{ημ}x\,\text{συν}x)\, dx$$

$$= x + 2\int \text{ημ}x\, d(\text{ημ}x) = x + 2\cdot\frac{\text{ημ}^2 x}{2} + c = x + \text{ημ}^2 x + c.$$

15. Δίνεται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο ανοικτό διάστημα A.

i. Να αποδείξετε ότι στο A ισχύει

$$\int \left[f(x) + f''(x)\right] \text{ημ}x\, dx = f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x + c.$$

ii. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $(0, +\infty)$,

$$\int \left(\ln x - \frac{1}{x^2}\right) \text{ημ}x\, dx.$$

Λύση: 2020

i.

1^{ος} τρόπος

$$\int \left[f(x) + f''(x)\right] \text{ημ}x\, dx = \int f(x)\text{ημ}x\, dx + \int f''(x)\text{ημ}x\, dx = \int f(x)\text{ημ}x\, dx + \int \text{ημ}x\, d\big(f'(x)\big)$$

$$= \int f(x)\text{ημ}x\, dx + \text{ημ}x\, f'(x) - \int f'(x)\text{συν}x\, dx = \int f(x)\text{ημ}x\, dx + \text{ημ}x\, f'(x) - \int \text{συν}x\, d\big(f(x)\big)$$

$$= \int f(x)\text{ημ}x\, dx + \text{ημ}x\, f'(x) - \left(\text{συν}x\, f(x) - \int f(x)\,(-\text{ημ}x)\, dx\right)$$

$$= f'(x)\,\text{ημ}x - f(x)\,\text{συν}x + c.$$

2^{ος} τρόπος

$$\left[f'(x)\text{ημ}x - f(x)\text{συν}x + c\right]' = f''(x)\text{ημ}x + f'(x)\text{συν}x - f'(x)\text{συν}x + f(x)\text{ημ}x = \left[f(x) + f''(x)\right]\text{ημ}x.$$

Άρα ισχύει ο ζητούμενος τύπος.

ii. Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln x$ έχει

$$f'(x)=\frac{1}{x},\qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2},$$

και f'' συνεχής στο $(0,+\infty)$. Επομένως, από το (α) για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$,

$$\int\left(\ln x-\frac{1}{x^2}\right)\etaμx\,dx=\int\big[f(x)+f''(x)\big]\etaμx\,dx=f'(x)\etaμx-f(x)\sigmaυνx+c=\frac{\etaμx}{x}-\ln x\,\sigmaυνx+c.$$

16. Να απαντήσετε τα πιο κάτω,

i. Να δείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ γράφεται ως άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)=\frac{\ln x}{(x+1)^3},\quad x\in(0,+\infty),\qquad \text{και}\qquad f(1)=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}.$$

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Λύση: 2020

i.

$$\frac{1}{x(x+1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{(x+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $x(x+1)^2$:

$$1\equiv A(x+1)^2+Bx(x+1)+\Gamma x.$$

Για $x=0\Rightarrow 1=A$. Για $x=-1\Rightarrow 1=\Gamma(-1)\Rightarrow\Gamma=-1$.

$$0=A+B\Rightarrow B=-1.$$

Άρα:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

ii. Δίνεται $f'(x) = \dfrac{\ln x}{(x+1)^3}$. Ολοκληρώνουμε:

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{(x+1)^3}\, dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη: $u = \ln x,\ dv = \frac{dx}{(x+1)^3} \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = -\frac{1}{2(x+1)^2}$.

$$f(x) = u\, v - \int v\, du = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

Από το (i) έχουμε:

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$$

Για $x > 0$: $|x| = x,\ |x+1| = x+1$.

$$f(x) = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right) + c.$$

Από $f(1) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}$:

$$f(1) = -\frac{\ln 1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}\right) + c = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} + c \Rightarrow c = 0.$$

Άρα:

$$f(x) = -\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\left(\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)$$

iii. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)}\right).$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+1} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

17. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(6x^2 + \text{ημ}x + \frac{4}{x} - 2\right) dx.$$

Λύση: 2019

$$\begin{aligned}\int \left(6x^2 + \text{ημ}x + \frac{4}{x} - 2\right) dx &= \int 6x^2\, dx + \int \text{ημ}x\, dx + \int \frac{4}{x}\, dx - \int 2\, dx \\ &= 2x^3 - \text{συν}x + 4\ln|x| - 2x + c. \\ f(x) &= 2x^3 - \text{συν}x + 4\ln|x| - 2x + c.\end{aligned}$$