Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Αόριστο Ολοκλήρωμα

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα πιο κάτω κλάσματα:

i. $\dfrac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$

ii. $\dfrac{5x+7}{2x^2+5x+2}$

iii. $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

iv. $\dfrac{3x-1}{x(x-1)^2}$

v. $\dfrac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2}$

vi. $\dfrac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$

vii. $\dfrac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$

viii. $\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-1}$

ix. $\dfrac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

x. $\dfrac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$

Λύση: (Ασκ. 1/12)

i.

$$\frac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$$

$$8x^2-19x+2 = A(x-1)(x-4) + B(x+2)(x-4) + C(x+2)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 4,\ B = 1,\ C = 3$

$$\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$$

ii.

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{5x+7}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x + 7 = A(x+2) + B(2x+1)$$

Λύνοντας: $A = 3,\ B = 1$

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{x+2}$$

iii.

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$3x + 2 = A(x+1) + B$$

Λύνοντας: $A = 3,\ B = -1$

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

iv.

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x - 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Λύνοντας: $A = -1,\ B = 1,\ C = 2$

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

v.

$$\frac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$5x^2+4x-7 = A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)$$

Λύνοντας: $A = 2,\ B = 3,\ C = -1$

$$\frac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

vi.

$$\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$5x^2-x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 3,\ B = 2,\ C = 1$

$$\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

vii.

$$\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$3x^2+7x+2 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+1)$$

Λύνοντας: $A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{7}{2},\ C = \frac{9}{2}$

$$\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{7x+9}{2(x^2+2x+5)}$$

viii.

$$\frac{3x^2+x+2}{x^3-1} = \frac{3x^2+x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$3x^2+x+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 2,\ B = 1,\ C = 0$

$$\frac{3x^2+x+2}{x^3-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1}$$

ix.

$$\frac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$$

$$\text{Διαίρεση: } x^3-7x^2-13x-15 \div (x^2-2x-3) = x-5+\frac{-20x-30}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{-20x-30}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \implies A = -\frac{45}{2},\ B = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3} = x-5-\frac{45}{2(x-3)} + \frac{5}{2(x+1)}$$

x.

$$\frac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$$

$$\text{Διαίρεση: } 2x^3-9x^2+7x+7 \div (x^2-5x+6) = 2x+1+\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \implies A = -1,\ B = 1$$

$$\frac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}=2x+1-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

Υπενθύμιση:

1. Διαφορετικοί Γραμμικοί Παράγοντες
Παρονομαστής: $(x-a)(x-b)\dots$

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

Παράδειγμα: $\dfrac{5x+7}{(2x+1)(x+2)}$

2. Επαναλαμβανόμενοι Γραμμικοί Παράγοντες
Παρονομαστής: $(x-a)^n$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Παράδειγμα: $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

3. Αδιαίρετοι Δευτεροβάθμιοι Παράγοντες
Παρονομαστής: x^2+bx+c με $\Delta=b^2-4c<0$

$$\frac{P(x)}{x^2+bx+c}=\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

Παράδειγμα: $\dfrac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$

4. Μη Κατάλληλα Κλάσματα (Improper Fractions)
Όταν ο βαθμός του αριθμητή $\geq$ του παρονομαστή, διαιρούμε πρώτα:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},\quad \deg(R)<\deg(Q)$$

Παράδειγμα: $\dfrac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

2. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int x^4\,dx$

ii. $\displaystyle\int x^{-2}\,dx$

iii. $\displaystyle\int x^{3/4}\,dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{1}{u^4}\,du$

v. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

vi. $\displaystyle\int \frac{2}{3\sqrt{u}}\,du$

vii. $\displaystyle\int (u^2-3u+1)\,du$

viii. $\displaystyle\int \left(x+2\sqrt{x}-\pi\right)\,dx$

ix. $\displaystyle\int \left(e^x+3x\right)\,dx$

x. $\displaystyle\int (u-5)^2\,du$

xi. $\displaystyle\int 2u(u^2-3)\,du$

xii. $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-2)\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \frac{u^4-5u^3+3u}{u^2}\,du$

xiv. $\displaystyle\int \frac{3x-x^2+2x^3}{x^3}\,dx$

xv. $\displaystyle\int (\sin\theta-\cos\theta)\,d\theta$

xvi. $\displaystyle\int (3\theta-\sec^2\theta)\,d\theta$

xvii. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2-2x}\,dx$

xviii. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/25)

i. $$\int x^4\,dx=\frac{x^5}{5}+C$$

ii. $$\int x^{-2}\,dx=-\frac{1}{x}+C$$

iii. $$\int x^{3/4}\,dx=\frac{4}{7}x^{7/4}+C$$

iv. $$\int \frac{1}{u^4}\,du=-\frac{1}{3u^3}+C$$

v. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}+C$$

vi. $$\int \frac{2}{3\sqrt{u}}\,du=\frac{4}{3}\sqrt{u}+C$$

vii. $$\int (u^2-3u+1)\,du=\frac{u^3}{3}-\frac{3u^2}{2}+u+C$$

viii. $$\int \left(x+2\sqrt{x}-\pi\right)\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{3/2}-\pi x+C$$

ix. $$\int \left(e^x+3x\right)\,dx=e^x+\frac{3x^2}{2}C$$

x. $$\int (u-5)^2\,du=\frac{u^3}{3}-5u^2+25u+C$$

xi. $\displaystyle\int 2u(u^2-3)\,du = \frac{u^4}{2} - 3u^2 + C$

xii. $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-2)\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + C$

xiii. $\displaystyle\int \frac{u^4-5u^3+3u}{u^2}\,du = \frac{u^3}{3} - \frac{5u^2}{2} + 3\ln|u| + C$

xiv. $\displaystyle\int \frac{3x-x^2+2x^3}{x^3}\,dx = -\frac{3}{x} - \ln|x| + 2x + C$

xv. $\displaystyle\int (\sin\theta - \cos\theta)\,d\theta = -\cos\theta - \sin\theta + C$

xvi. $\displaystyle\int (3\theta - \sec^2\theta)\,d\theta = \frac{3\theta^2}{2} - \tan\theta + C$

xvii. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2-2x}\,dx = -\frac{1}{x-1} + C$

xviii. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\arcsin(x) + C$

3. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα, με την μέθοδο αντικατάστασης.

i. $\displaystyle\int (x+3)^2\,dx$

ii. $\displaystyle\int \sqrt{x+1}\,dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{3}{5x+4}\,dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{3x}{5x^2+4}\,dx$

v. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

vi. $\displaystyle\int \frac{3}{1+9x^2}\,dx$

vii. $\displaystyle\int 3(8x-1)e^{4x^2-x}\,dx$

viii. $\displaystyle\int x^2(3-10x^3)^4\,dx$

ix. $\displaystyle\int 90x^2\sin(2+6x^3)\,dx$

x. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{4x^2+6x-1}\,dx$

xi. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

xii. $\displaystyle\int \sin\theta\,(1+\cos\theta)^3\;d\theta$

xiii. $\displaystyle\int xe^{1-3x^2}\,dx$

xiv. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

xv. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

xvi. $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)\,dx$

xvii. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$

xviii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/30)

i.

$$\int (x+3)^2\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = x+3 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

Άρα:

$$\int (x+3)^2\,dx = \int u^2\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$\frac{(x+3)^3}{3} + C$$

Προσοχή: Αυτό το ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\displaystyle\int f^{\nu}(x)\,d\left(f(x)\right) = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c$

ii.

$$\int \sqrt{x+1}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = x+1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

Άρα:

$$\int \sqrt{x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$

iii.

$$\int \frac{3}{5x+4}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 5x + 4 \quad \Rightarrow \quad du = 5\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{5}$$

Άρα:

$$\int \frac{3}{5x+4}\,dx = \int \frac{3}{u} \cdot \frac{du}{5} = \frac{3}{5} \int \frac{1}{u}\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{3}{5} \int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{5} \ln|u| + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$\frac{3}{5} \ln|5x+4| + C$$

iv.

$$\int \frac{3x}{5x^2+4}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 5x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad du = 10x\,dx \quad \Rightarrow \quad x\,dx = \frac{du}{10}$$

Άρα:

$$\int \frac{3x}{5x^2+4}\,dx = \int \frac{3}{u} \cdot \frac{du}{10} = \frac{3}{10} \int \frac{1}{u}\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{3}{10} \int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{10} \ln|u| + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$\frac{3}{10} \ln|5x^2+4| + C$$

v.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -8x\,dx \quad \Rightarrow \quad x\,dx = -\frac{du}{8}$$

Άρα:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{du}{8}\right) = -\frac{1}{8} \int u^{-1/2}\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$-\frac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du = -\frac{1}{8}\cdot\left(2u^{1/2}\right) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{u} + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

vi.

$$\int \frac{3}{1+9x^2}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 3x \quad \Rightarrow \quad du = 3\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{3}$$

Άρα:

$$\int \frac{3}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{3}{1+u^2}\cdot\frac{du}{3} = \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$\arctan(3x) + C$$

vii.

$$\int 3(8x-1)\,e^{4x^2-x}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 4x^2 - x \quad \Rightarrow \quad du = (8x-1)\,dx$$

Άρα:

$$\int 3(8x-1)\,e^{4x^2-x}\,dx = \int 3e^u\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int 3e^u\,du = 3e^u + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$3e^{4x^2-x} + C$$

viii.

$$\int x^2(3-10x^3)^4\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 3 - 10x^3 \quad \Rightarrow \quad du = -30x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad x^2\,dx = -\frac{du}{30}$$

Άρα:

$$\int x^2(3-10x^3)^4\,dx = \int u^4 \cdot \left(-\frac{du}{30}\right) = -\frac{1}{30}\int u^4\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$-\frac{1}{30}\int u^4\,du = -\frac{1}{30}\cdot\frac{u^5}{5} + C = -\frac{u^5}{150} + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-\frac{(3-10x^3)^5}{150} + C$$

ix.

$$\int 90x^2\sin(2+6x^3)\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 2 + 6x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 18x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad x^2\,dx = \frac{du}{18}$$

Άρα:

$$\int 90x^2\sin(2+6x^3)\,dx = \int 90\cdot\frac{1}{18}\sin(u)\,du = \int 5\sin(u)\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int 5\sin(u)\,du = -5\cos(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-5\cos(2+6x^3) + C$$

x.

$$\int \frac{4x+3}{4x^2+6x-1}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 4x^2 + 6x - 1 \quad \Rightarrow \quad du = (8x+6)\,dx = 2(4x+3)\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2(4x+3)}$$

Άρα:

$$\int \frac{4x+3}{4x^2+6x-1}\,dx = \int \frac{4x+3}{u}\cdot\frac{du}{2(4x+3)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$\frac{1}{2}\ln|4x^2+6x-1| + C$$

xi.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 2x \quad\Rightarrow\quad du = 2\,dx \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{du}{2}$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{2}\arcsin(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$\frac{1}{2}\arcsin(2x) + C$$

xii.

$$\int \sin\theta\,(1+\cos\theta)^3\;d\theta$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1+\cos\theta \quad\Rightarrow\quad du = -\sin\theta\,d\theta \quad\Rightarrow\quad \sin\theta\,d\theta = -du$$

Άρα:

$$\int \sin\theta\,(1+\cos\theta)^3\;d\theta = \int u^3\cdot(-du) = -\int u^3\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$-\int u^3\,du = -\frac{u^4}{4} + C$$

Επιστρέφουμε στο θ:

$$-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4} + C$$

xiii.

$$\int xe^{1-3x^2}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1 - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -6x\,dx \quad \Rightarrow \quad x\,dx = -\frac{du}{6}$$

Άρα:

$$\int xe^{1-3x^2}\,dx = \int e^u \cdot \left(-\frac{du}{6}\right) = -\frac{1}{6}\int e^u\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$-\frac{1}{6}\int e^u\,du = -\frac{1}{6}e^u + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-\frac{1}{6}e^{1-3x^2} + C$$

xiv.

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad dx/x = du$$

Άρα:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \int \sin(u)\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-\cos(\ln x) + C$$

xv.

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \quad \Rightarrow \quad x = u^4, \quad dx = 4u^3\,du$$

Επιπλέον:

$$\sqrt{x} = u^2$$

Άρα:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{1-u^2}{1+u} \cdot 4u^3\,du = 4\int \frac{u^3-u^5}{1+u}\,du$$

Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\frac{u^3 - u^5}{1+u} = -u^3(u-1)$$

Άρα:

$$4\int (-u^3(u-1))\,du = -4\int (u^4 - u^3)\,du = -4\cdot\frac{u^5}{5} + 4\cdot\frac{u^4}{4} + C = -\frac{4}{5}u^5 + u^4 + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-\frac{4}{5}x^{5/4} + x + C$$

xvi.

$$\int x\sin(x^2+1)\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad x\,dx = \frac{du}{2}$$

Άρα:

$$\int x\sin(x^2+1)\,dx = \int \sin(u)\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{2}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{2}\cos(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + C$$

xvii.

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1 - e^x \quad \Rightarrow \quad du = -e^x dx \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{du}{e^x}$$

Γράφουμε:

$$e^{3x} = e^{2x}\cdot e^x$$

Άρα:

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx = -\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{u}}\,du$$

Αλλά $e^{2x} = (1-u)^2$, οπότε:

$$-\int \frac{(1-u)^2}{\sqrt{u}}\,du = -\int \frac{1-2u+u^2}{\sqrt{u}}\,du = -\int \left(u^{-1/2} - 2u^{1/2} + u^{3/2}\right) du$$

Υπολογίζουμε:

$$-2\sqrt{u} + \frac{4}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-2\sqrt{1-e^x} + \frac{4}{3}(1-e^x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1-e^x)^{5/2} + C$$

xviii.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$x = 3\sin\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 3\cos\theta\,d\theta$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{(3\sin\theta)^2\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}} \cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

Απλοποιούμε:

$$\sqrt{9-9\sin^2\theta} = 3\cos\theta$$

$$\int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\,d\theta$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{9}\int \csc^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{9}\cot\theta + C$$

Επιστρέφουμε στο x:

$$-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$$

4. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματά, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις ποιο κάτω τυποποιημένες μορφές ολοκληρωμάτων.

$$\int f(ax+\beta)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+\beta) + c \tag{1}$$

$$\int f^{\nu}(x)f'(x)\,dx = \int f^{\nu}(x)\,d(f(x)) = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c, \quad \nu \neq -1 \tag{2}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,d(f(x)) = \ln|f(x)| + c \tag{3}$$

i. $\displaystyle\int \cos 7x\,dx$

ii. $\displaystyle\int \csc^2(5x-3)\,dx$

iii. $\displaystyle\int (6x-1)^{21}\,dx$

iv. $\displaystyle\int e^{4-9x}\,dx$

v. $\displaystyle\int (e^{4x} - 2\cdot 4^{-3x})\,dx$

vi. $\displaystyle\int (\sin 4x - \sin 5x)\,dx$

vii. $\displaystyle\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx$

viii. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$

ix. $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$

x. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$

xi. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$

xii. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$

xiii. $\displaystyle\int \cot x\,dx$

xiv. $\displaystyle\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$

xv. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$

xvi. $\displaystyle\int \tan x\,dx$

xvii. $\displaystyle\int \frac{2+2\sin x}{x-\cos x}\,dx$

xviii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/34)

i. $\displaystyle\int \cos 7x\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \cos 7x\,dx = \frac{1}{7}\sin 7x + C$$

ii. $\displaystyle\int \csc^2(5x-3)\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \csc^2(5x-3)\,dx = -\frac{1}{5}\cot(5x-3) + C$$

iii. $\displaystyle\int (6x-1)^{21}\,dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{1}{6}\cdot 6(6x-1)^{21}\,dx = \frac{(6x-1)^{22}}{132} + C$$

iv. $\displaystyle\int e^{4-9x}\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int e^{4-9x}\,dx = -\frac{1}{9}e^{4-9x} + C$$

v. $\displaystyle\int (e^{4x} - 2\cdot 4^{-3x})\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int e^{4x}\,dx - 2\int 4^{-3x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{2}{3\ln 4}4^{-3x} + C$$

vi. $\displaystyle\int (\sin 4x - \sin 5x)\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \sin 4x\,dx - \int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{5}\cos 5x + C$$

vii. $\displaystyle\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx$ (Τύπος - 2)

$$\int (\arctan x)^3 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{(\arctan x)^4}{4} + C$$

viii. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$ (Τύπος - 2)

$$\int (\ln x)^6 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^7}{7} + C$$

ix. $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{2\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot 2\sin x\,dx = 4\sqrt{1-\cos x} + C$$

x. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{1}{(e^x-1)^4} \cdot e^x\,dx = -\frac{1}{3(e^x-1)^3} + C$$

xi. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \frac{1}{2+\tan x} \cdot \sec^2 x\,dx = \ln|2+\tan x| + C$$

xii. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+3| + C$$

xiii. $\displaystyle\int \cot x\,dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$$

xiv. $\displaystyle\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \frac{1}{(5x)^2+1}\,dx = \frac{1}{5}\arctan(5x) + C$$

xv. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int (2x+1)^{-5}\,dx = -\frac{1}{8(2x+1)^4} + C$$

xvi. $\displaystyle\int \tan x\,dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

xvii. $\displaystyle\int \frac{2+2\sin x}{x-\cos x}\,dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{2+2\sin x}{x-\cos x}\,dx = 2\int \frac{1+\sin x}{x-\cos x}\,dx = 2\ln|x-\cos x| + C$$

xviii. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + C$$

5. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα, με την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

i.	$\int xe^{6x}\,dx$	v.	$\int e^x\cos(x)\,dx$	ix.	$\int e^{x+\ln x}\,dx, \quad x>0$
ii.	$\int (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\,dx$	vi.	$\int x^4e^x\,dx$	x.	$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,dx$
iii.	$\int \ln(x)\,dx$	vii.	$\int (3x+x^2)\sin(2x)\,dx$	xi.	$\int x^2\cos 3x\,dx$
iv.	$\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$	viii.	$\int (4x^3-9x^2+7x+3)e^{-x}\,dx$	xii.	$\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/38)

i.

$$\int xe^{6x}dx$$

$$u=x, \quad dv=e^{6x}dx \quad \Rightarrow du=dx, \quad v=\frac{1}{6}e^{6x}$$

$$\int xe^{6x}dx = uv-\int vdu = \frac{xe^{6x}}{6}-\frac{1}{6}\int e^{6x}dx = \frac{xe^{6x}}{6}-\frac{e^{6x}}{36}+C$$

ii.

$$\int (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

$$u=3x+5, \quad dv=\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx \quad \Rightarrow du=3dx, \quad v=4\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\int (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx = uv-\int vdu$$

$$=4(3x+5)\sin\left(\frac{x}{4}\right)-\int 4\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cdot 3dx$$

$$=4(3x+5)\sin\left(\frac{x}{4}\right)-12\int \sin\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{4}\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \int (3x+5)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx = 4(3x+5)\sin\left(\frac{x}{4}\right)+48\cos\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

iii.

$$\int \ln x \, dx$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx \quad \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx, \quad v = x$$

$$\int \ln x dx = uv - \int v du = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

iv.

$$\int x^5 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$$

Θέτουμε

$$u = x^3, \qquad dv = x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$$

οπότε

$$du = 3x^2 dx, \qquad v = \frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2}.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$I = uv - \int v \, du$$

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \int \frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} \cdot 3x^2 \, dx$$

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \frac{2}{3} \int x^2(x^3 + 1)^{3/2} \, dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε

$$t = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad dt = 3x^2 dx,$$

οπότε

$$\int x^2(x^3 + 1)^{3/2} \, dx = \frac{1}{3} \int t^{3/2} \, dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} = \frac{2}{15}(x^3 + 1)^{5/2}.$$

Άρα

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{15}(x^3 + 1)^{5/2} + C$$

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \frac{4}{45}(x^3 + 1)^{5/2} + C.$$

v.

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι ανεξαρτήτως του ποιο μέρος επιλέξουμε ως u, η παράγωγός του δεν θα εξαφανίσει το όρο. Δεν πειράζει ποιο θα επιλέξουμε, οπότε θέτουμε

$$u = \cos x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = -\sin x\,dx \qquad v = e^x$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, παίρνουμε

$$\int e^x \cos x\,dx = uv - \int v\,du = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

Τώρα, εφαρμόζουμε ξανά ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το υπόλοιπο ολοκλήρωμα. Επιλέγουμε

$$u = \sin x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = \cos x\,dx \qquad v = e^x$$

Άρα,

$$\int e^x \sin x\,dx = uv - \int v\,du = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

Παρατηρούμε ότι το ίδιο ολοκλήρωμα εμφανίζεται και στις δύο πλευρές. Προσθέτουμε το ολοκλήρωμα και στις δύο πλευρές:

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x)$$

Τέλος, διαιρούμε με 2 και παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

vi.

$$I = \int x^4 e^x dx$$

Ολοκλήρωση κατά παραγόντες:

$$u = x^4, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow du = 4x^3 dx, \quad v = e^x$$

$$I = x^4 e^x - 4\int x^3 e^x dx$$

Ορίζουμε:

$$I_1 = \int x^3 e^x dx$$

Εφαρμόζουμε πάλι ολοκλήρωση κατά παραγόντες:

$$u = x^3, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow du = 3x^2 dx, \quad v = e^x$$

$$I_1 = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$$

Ορίζουμε:

$$I_2 = \int x^2e^x dx$$

$$u = x^2, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow du = 2xdx, \quad v = e^x$$

$$I_2 = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

Ορίζουμε:

$$I_3 = \int xe^x dx$$

$$u = x, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow du = dx, \quad v = e^x$$

$$I_3 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Συνδυάζοντας όλα τα αποτελέσματα:

$$I_2 = x^2e^x - 2I_3 = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$I_1 = x^3e^x - 3I_2 = x^3e^x - 3(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x$$

$$I = x^4e^x - 4I_1 = x^4e^x - 4(x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x)$$

$$I = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

vii.

$$\int (3x + x^2)\sin 2x\, dx$$

Πρώτη ολοκλήρωση κατά μέρη για $u = 3x + x^2,\ dv = \sin 2x\, dx$

$$u = 3x + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = (3 + 2x)dx$$

$$dv = \sin 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Τότε

$$\int (3x + x^2)\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}(3x + x^2)\cos 2x + \frac{1}{2}\int (3 + 2x)\cos 2x\, dx$$

Δεύτερη ολοκλήρωση κατά μέρη για $\int (3 + 2x)\cos 2x\, dx$

$$u = 3 + 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx$$

$$dv = \cos 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Τότε

$$\int (3 + 2x)\cos 2x\, dx = (3 + 2x)\frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x\, dx = \frac{1}{2}(3 + 2x)\sin 2x - \int \sin 2x\, dx$$

Υπολογίζουμε $\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$ και συνδυάζουμε όλα τα μέρη:

$$\int (3x + x^2)\sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}(3x + x^2)\cos 2x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(3 + 2x)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right] + C$$

Απλοποιώντας:

$$\int (3x + x^2)\sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}(3x + x^2)\cos 2x + \frac{1}{4}(3 + 2x)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

viii.

$$\int (4x^3 - 9x^2 + 7x + 3)e^{-x}dx = 4\int x^3 e^{-x}dx - 9\int x^2 e^{-x}dx + 7\int xe^{-x}dx + 3\int e^{-x}dx$$

$$I_1 = \int x^3 e^{-x}dx, \quad u = x^3, \quad dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow du = 3x^2dx, \quad v = -e^{-x}$$

$$I_1 = -x^3e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x}dx$$

$$I_2 = \int x^2 e^{-x}dx, \quad u = x^2, \quad dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow du = 2xdx, \quad v = -e^{-x}$$

$$I_2 = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$$

$$I_3 = \int xe^{-x}dx, \quad u = x, \quad dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow du = dx, \quad v = -e^{-x}$$

$$I_3 = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$$

$$I_2 = -x^2e^{-x} + 2I_3 = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}, \quad I_1 = -x^3e^{-x} + 3I_2 = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\int (4x^3 - 9x^2 + 7x + 3)e^{-x}dx = -(4x^3 + 3x^2 + 13x + 16)e^{-x} + C$$

ix.

$$\int xe^x dx$$

$$u = x, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow du = dx, \quad v = e^x$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

x.

$$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$$

Επιλέγουμε ολοκλήρωση κατά μέρη

$$u=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad dv=dx$$

Υπολογίζουμε du και v

$$du=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad v=x$$

Άρα

$$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

Υπολογίζουμε το νέο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{x^2+1}$$

Τελικό αποτέλεσμα

$$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}+C$$

xi.

$$\int x^2\cos 3x dx$$

$$u=x^2, dv=\cos 3x dx \quad \Rightarrow du=2xdx, v=\frac{\sin 3x}{3}$$

$$\int x^2\cos 3x dx=\frac{x^2\sin 3x}{3}-\int\frac{2x\sin 3x}{3}dx$$

όπου

$$\int x\sin 3x dx=-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+C$$

$$\Rightarrow \int x^2\cos 3x dx=\frac{x^2\sin 3x}{3}+\frac{2x\cos 3x}{3}-\frac{2\sin 3x}{9}+C$$

xii.
$$I = \int e^{\sqrt{3x+9}} dx$$

Κάνουμε αντικατάσταση για να απλοποιήσουμε το dx:

$$t = \sqrt{3x+9} \quad \Rightarrow \quad t^2 = 3x + 9 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2t}{3} dt$$

Άρα:
$$I = \int e^{\sqrt{3x+9}} dx = \int e^t \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{3} \int te^t dt$$

Ορίζουμε:
$$I_1 = \int te^t dt$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παραγόντες για το I_1:

$$u = t, \quad dv = e^t dt \quad \Rightarrow du = dt, \quad v = e^t$$

Τότε:
$$I_1 = uv - \int v du = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

Επιστρέφουμε στο αρχικό x:

$$I = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}(te^t - e^t) + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3x+9}\, e^{\sqrt{3x+9}} - e^{\sqrt{3x+9}}\right) + C$$

Τελικό αποτέλεσμα:
$$\int e^{\sqrt{3x+9}} dx = \frac{2}{3} e^{\sqrt{3x+9}} (\sqrt{3x+9} - 1) + C$$

6. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}}\, dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}}\, dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{w + 2\sqrt{1-w} + 2}\, dw$

iv. $\displaystyle\int \frac{t-2}{t - 3\sqrt{2t-4} + 2}\, dt$

Λύση:

i. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt[3]{x-3}$$

$$x = u^3 + 3 \qquad dx = 3u^2 du$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{(u^3+3)+2}{u} 3u^2 du &= \int 3u^4 + 15u\, du \\ &= \frac{3}{5}u^5 + \frac{15}{2}u^2 + c \\ &= \frac{3}{5}(x-3)^{5/3} + \frac{15}{2}(x-3)^{2/3} + c \end{aligned}$$

ii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt{x+10} \qquad x = u^2 - 10 \qquad dx = 2u\, du$$

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}}\, dx = \int \frac{2}{u^2 - 10 - 3u}(2u)\, du = \int \frac{4u}{u^2 - 3u - 10}\, du$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{4u}{(u-5)(u+2)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u+2}$$

$$4u = A(u+2) + B(u-5)$$

$$u = -2 \qquad -8 = B(-7) \qquad B = \frac{8}{7}$$

$$u = 5 \qquad 20 = A(7) \qquad A = \frac{20}{7}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}}\, dx &= \int \frac{20}{7}\frac{1}{u-5} + \frac{8}{7}\frac{1}{u+2}\, du \\ &= \frac{20}{7}\ln|u-5| + \frac{8}{7}\ln|u+2| + c \\ &= \frac{20}{7}\ln|\sqrt{x+10}-5| + \frac{8}{7}\ln|\sqrt{x+10}+2| + c \end{aligned}$$

iii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt{1-w}$$

$$w = 1 - u^2 \qquad \Rightarrow \qquad dw = -2u\,du$$

$$\int \frac{1}{w + 2\sqrt{1-w} + 2}\,dw = \int \frac{1}{1 - u^2 + 2u + 2}(-2u)\,du = \int \frac{2u}{u^2 - 2u - 3}\,du$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{2u}{(u+1)(u-3)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-3}$$

$$2u = A(u-3) + B(u+1)$$

$$u = 3: \qquad 6 = 4B \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$u = -1: \qquad -2 = -4A \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{3}{2}$$

Επομένως,

$$\int \frac{2u}{(u+1)(u-3)}\,du = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{u-3}\,du = \frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{3}{2}\ln|u-3| + c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{1}{w + 2\sqrt{1-w} + 2}\,dw = \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1-w} + 1| + \frac{3}{2}\ln|\sqrt{1-w} - 3| + c$$

iv. Θέτω αντικατάσταση

$$u = \sqrt{2t-4}$$

$$t = \frac{1}{2}u^2 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad dt = u\,du$$

$$\int \frac{t-2}{t - 3\sqrt{2t-4} + 2}\,dt = \int \frac{\frac{1}{2}u^2 + 2 - 2}{\frac{1}{2}u^2 + 2 - 3u + 2}(u)\,du = \int \frac{u^3}{u^2 - 6u + 8}\,du$$

$$\frac{u^3}{u^2 - 6u + 8} = u + 6 + \frac{28u - 48}{(u-2)(u-4)}$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{28u - 48}{(u-2)(u-4)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u-4}$$

$$28u - 48 = A(u-4) + B(u-2)$$

$$u = 4: \quad 64 = 2B \quad \Rightarrow \quad A = -4$$

$$u = 2: \quad 8 = -2A \quad \Rightarrow \quad B = 32$$

Επομένως,

$$\int \frac{u^3}{u^2-6u+8}\,du = \int u+6-\frac{4}{u-2}+\frac{32}{u-4}\,du = \frac{1}{2}u^2+6u-4\ln|u-2|+32\ln|u-4|+c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{u^3}{u^2-6u+8}\,du = t-2+6\sqrt{2t-4}-4\ln|\sqrt{2t-4}-2|+32\ln|\sqrt{2t-4}-4|+c$$

7. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i.	$\int \sin^5 x\,dx$	v.	$\int \sec^9 x \tan^5 x\,dx$	ix.	$\int \cos^4(2t)\,dt$
ii.	$\int \sin^6 x \cos^3 x\,dx$	vi.	$\int \tan^3 x\,dx$	x.	$\int \frac{2+7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\,dz$
iii.	$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$	vii.	$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\,dx$	xi.	$\int \tan^3(6x)\sec^{10}(6x)\,dx$
iv.	$\int \cos(15x)\cos(4x)\,dx$	viii.	$\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right)\cos^4\left(\frac{2}{3}x\right)\,dx$	xii.	$\int \cos(3t)\sin(8t)\,dt$

Λύση:

i.

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx$$

Χρήση τριγωνομετρικής ιδιότητας,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x$$

Επομένως,

$$\int \sin^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$$

$$\int \sin^5 x\,dx = -\int (1-u^2)^2\,du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right)\,du = -\left(u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right)+c$$

$$= -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c$$

ii.

$$\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x \, dx$$
$$= \int \sin^6 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \, dx \qquad u = \sin x$$
$$= \int u^6 (1 - u^2) \, du = \int u^6 - u^8 \, du$$
$$= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + c$$

iii.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\right) \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\right) dx = \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2(2x) \, dx$$
$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int 1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(4x)) \, dx$$
$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x) \, dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin(4x)\right) + c$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin(4x) + c$$

Εναλλακτική λύση,

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2(2x) dx$$
$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int 1 - \cos(4x) \, dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin(4x) + c$$

iv.

$$\int \cos(15x) \cos(4x) \, dx = \frac{1}{2} \int \cos(11x) + \cos(19x) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11} \sin(11x) + \frac{1}{19} \sin(19x)\right) + c$$

v.

$$\int \sec^9 x \tan^5 x \, dx = \int \sec^8 x \tan^4 x \tan x \sec x \, dx$$

$$= \int \sec^8 x \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \tan x \sec x \, dx \qquad u = \sec x$$

$$= \int u^8 (u^2 - 1)^2 du = \int u^{12} - 2u^{10} + u^8 \, du$$

$$= \frac{1}{13} \sec^{13} x - \frac{2}{11} \sec^{11} x + \frac{1}{9} \sec^9 x + c$$

vi.

$$\int \tan^3 x \, dx = \int \tan x \tan^2 x \, dx$$

$$= \int \tan x \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\sec x| + c$$

vii.

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x} \sin x \, dx = \int \frac{(\sin^2 x)^3}{\cos^4 x} \sin x \, dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^3}{\cos^4 x} \sin x \, dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = \cos x$,

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{(1 - u^2)^3}{u^4} du = -\int u^{-4} - 3u^{-2} + 3 - u^2 \, du$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}u^{-3} - 3u^{-1} + 3u - \frac{1}{3}u^3\right) + c$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{3}{\cos x} - 3\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

viii.

$$\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) dx = \int \sin^2\left(\frac{2}{3}x\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) \sin\left(\frac{2}{3}x\right) dx$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ μετατρέπουμε το ημίτονο σε συνημίτονο.

$$\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) dx = \int \left(1 - \cos^2\left(\frac{2}{3}x\right)\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) \sin\left(\frac{2}{3}x\right) dx$$

Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $u = \cos\left(\frac{2}{3}x\right)$,

$$\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right)\cos^4\left(\frac{2}{3}x\right)dx = -\frac{3}{2}\int (1-u^2)u^4\,du$$

$$= -\frac{3}{2}\int u^4 - u^6 du = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7\right) + c$$

$$\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right)\cos^4\left(\frac{2}{3}x\right)dx = \frac{3}{14}\cos^7\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{3}{10}\cos^5\left(\frac{2}{3}x\right) + c$$

ix.

$$\int \cos^4(2t)\,dt = \int \left(\cos^2(2t)\right)^2 dt$$

$$\int \cos^4(2t)\,dt = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos(4t))\right]^2 dt = \int \frac{1}{4}(1 + 2\cos(4t) + \cos^2(4t))\,dt$$

με χρήση της ταυτότητας, $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$$\int \cos^4(2t)\,dt = \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos(4t) + \frac{1}{2}[1+\cos(8t)]dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3}{2} + 2\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(8t)dt$$

Επομένως,

$$\int \cos^4(2t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\sin(4t) + \frac{1}{16}\sin(8t)\right) + c = \frac{3}{8}t + \frac{1}{8}\sin(4t) + \frac{1}{64}\sin(8t) + c$$

x.

$$\int \frac{2+7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\,dz = \int \frac{2}{\cos^2(z)}\,dz + \int \frac{7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\,dz = \int \frac{2}{\cos^2(z)}\,dz + \int \frac{7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\,dz$$

$$= \int 2\sec^2(z)\,dz + 7\int \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}\sin(z)\,dz$$

Χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\int \frac{2+7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\,dz = \int 2\sec^2(z)\,dz + 7\int \frac{1-\cos^2(z)}{\cos^2(z)}\sin(z)\,dz$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = \cos(z)$

$$\int \frac{2 + 7\sin^3(z)}{\cos^2(z)}\, dz = 2\tan(z) - 7\int \frac{1 - u^2}{u^2} du$$

$$= 2\tan(z) - 7\int u^{-2} - 1\, du = 2\tan(z) - 7\left(-u^{-1} - u\right) + c$$

$$= 2\tan(z) + 7\frac{1}{\cos(z)} + 7\cos(z) + c = 2\tan(z) + 7\sec(z) + 7\cos(z) + c$$

xi.

$$\int \tan^3(6x)\sec^{10}(6x)\, dx = \int \tan^2(6x)\sec^9(6x)\tan(6x)\sec(6x)\, dx$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$,

$$\int \tan^3(6x)\sec^{10}(6x)\, dx = \int [\sec^2(6x) - 1]\sec^9(6x)\tan(6x)\sec(6x)\, dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = \sec(6x)$,

$$\int \tan^3(6x)\sec^{10}(6x)\, dx = \frac{1}{6}\int [u^2 - 1]u^9 du$$

$$= \frac{1}{6}\int u^{11} - u^9 du = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{12}u^{12} - \frac{1}{10}u^{10}\right) + c$$

$$\int \tan^3(6x)\sec^{10}(6x)\, dx = \frac{1}{72}\sec^{12}(6x) - \frac{1}{60}\sec^{10}(6x) + c$$

xii.

$$\int \cos(3t)\sin(8t)\, dt = \int \frac{1}{2}\left[\sin(8t - 3t) + \sin(8t + 3t)\right]\, dt = \frac{1}{2}\int \sin(5t) + \sin(11t)\, dt$$

$$\int \cos(3t)\sin(8t)\, dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos(5t) - \frac{1}{11}\cos(11t)\right) + c = -\frac{1}{10}\cos(5t) - \frac{1}{22}\cos(11t) + c$$

8. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\displaystyle\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}\,dx$

iii. $\displaystyle\int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)}\,dx$

iv. $\displaystyle\int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx$

v. $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx$

vi. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$

vii. $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+5x-14}\,dx$

viii. $\displaystyle\int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3}\,dt$

ix. $\displaystyle\int \frac{8}{3x^3+7x^2+4x}\,dx$

Λύση:

i. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$3x+11 = A(x+2)+B(x-3)$$

$$\begin{aligned} x=-2: &\quad 5 = A(0)+B(-5) \implies B=-1 \\ x=3: &\quad 20 = A(5)+B(0) \implies A=4 \end{aligned}$$

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+2}\,dx = \int \frac{4}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = 4\ln|x-3| - \ln|x+2| + c$$

ii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2+4}{x(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-2}$$

$$x^2+4 = A(x+2)(3x-2) + Bx(3x-2) + Cx(x+2)$$

$$
\begin{aligned}
x = 0: &\quad 4 = A(2)(-2) \implies A = -1 \\
x = -2: &\quad 8 = B(-2)(-8) \implies B = \frac{1}{2} \\
x = \frac{2}{3}: &\quad \frac{40}{9} = C\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) \implies C = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} + \frac{5}{2}\frac{1}{3x-2}\right) dx \\
&= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{5}{6}\ln|3x-2| + c
\end{aligned}
$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$
\frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}
$$

$$
x^2-29x+5 = A(x-4)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x-4)^2
$$

$$
x^2-29x+5 = (A+C)x^3 + (-4A+B-8C+D)x^2 + (3A+16C-8D)x - 12A + 3B + 16D
$$

Εύρεση συντελεστών,

$$
\begin{array}{ll}
x^3: & A+C=0 \\
x^2: & -4A+B-8C+D=1 \\
x^1: & 3A+16C-8D=-29 \\
x^0: & -12A+3B+16D=5
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad A=1, \quad B=-5, \quad C=-1, \quad D=2
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{5}{(x-4)^2} - \frac{x}{x^2+3} + \frac{2}{x^2+3}\right) dx \\
&= \ln|x-4| + \frac{5}{x-4} - \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c
\end{aligned}
$$

iv. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

$$\begin{aligned} x^3+10x^2+3x+36 &= A(x^2+4)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+4)+(Dx+E)(x-1) \\ &= (A+B)x^4+(C-B)x^3+(8A+4B-C+D)x^2+(-4B+4C-D+E)x+16A-4C-E \end{aligned}$$

Εύρεση συντελεστών,

$$\begin{array}{ll} x^4: & A+B=0 \\ x^3: & C-B=1 \\ x^2: & 8A+4B-C+D=10 \qquad \Rightarrow \quad A=2,\ B=-2,\ C=-1,\ D=1,\ E=0 \\ x^1: & -4B+4C-D+E=3 \\ x^0: & 16A-4C-E=36 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x-1}+\frac{-2x-1}{x^2+4}+\frac{x}{(x^2+4)^2}dx \\ &= \int \frac{2}{x-1}dx-\int \frac{2x}{x^2+4}dx-\int \frac{1}{x^2+4}dx+\int \frac{x}{(x^2+4)^2}dx \\ &= 2\ln|x-1|-\ln|x^2+4|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4}+c \end{aligned}$$

v. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}=x-2-\frac{18}{x^3-3x^2}$$

$$\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx=\int x-2-\frac{18}{x^3-3x^2}\,dx=\int x-2\,dx-\int \frac{18}{x^3-3x^2}\,dx$$

$$\frac{18}{x^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}$$

$$18=Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2$$

$$x=0: \quad 18=B(-3) \implies B=-6$$
$$x=3: \quad 18=C(9) \implies C=2$$
$$x=1: \quad 18=A(-2)+B(-2)+C=-2A+14 \implies A=-2$$

$$\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx = \int x-2\,dx - \int \left(\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{2}{x-3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x+2\ln|x|-\frac{6}{x}-2\ln|x-3|+c$$

vi.
$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int 1+\frac{1}{x^2-1}\,dx = \int dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$1=A(x+1)+B(x-1)$$

$$x=-1: \quad 1=B(-2) \implies B=-\frac{1}{2}$$
$$x=1: \quad 1=A(2) \implies A=\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int dx + \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$$

vii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{4}{(x+7)(x-2)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-2}$$

$$4 = A(x-2) + B(x+7)$$

$$x = 2: \quad 4 = 9B \implies B = \frac{4}{9}$$
$$x = -7: \quad 4 = -9A \implies A = -\frac{4}{9}$$

$$\int \frac{4}{(x+7)(x-2)}\,dx = \int \frac{-4/9}{x+7} + \frac{4/9}{x-2}\,dx = \frac{4}{9}\ln|x-2| - \frac{4}{9}\ln|x+7| + c$$

viii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3} = \frac{A}{2t+3} + \frac{B}{5t-1}$$

$$8 - 3t = A(5t-1) + B(2t+3)$$

$$t = \frac{1}{5}: \quad \frac{37}{5} = \frac{17}{5}B \implies B = \frac{37}{17}$$
$$t = -\frac{3}{2}: \quad \frac{25}{2} = -\frac{17}{2}A \implies A = -\frac{25}{17}$$

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3} = \frac{-\frac{25}{17}}{2t+3} + \frac{\frac{37}{17}}{5t-1}$$

$$\int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3}\,dt = \int \left(-\frac{25}{17}\frac{1}{2t+3} + \frac{37}{17}\frac{1}{5t-1}\right)dt$$
$$= \frac{37}{85}\ln|5t-1| - \frac{25}{34}\ln|2t+3| + c$$

ix. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8}{x(3x+4)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+4} + \frac{C}{x+1}$$

$$8 = A(3x+4)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(3x+4)$$

$$\begin{aligned} x = -\frac{4}{3}: &\quad 8 = \frac{4}{9}B \implies B = 18 \\ x = -1: &\quad 8 = -C \implies C = -8 \\ x = 0: &\quad 8 = 4A \implies A = 2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{8}{x(3x+4)(x+1)}\,dx = \int \frac{2}{x} + \frac{18}{3x+4} - \frac{8}{x+1}\,dx = 2\ln|x| + 6\ln|3x+4| - 8\ln|x+1| + c$$

9. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) = 3x - 2, \quad f(1) = 1$

ii. $f'(x) = \sqrt{x-2}, \quad f(3) = 2$

iii. $f''(x) = 2 - 6x, \quad f'(0) = 4, \quad f(0) = 1$

iv.$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'(1) = 1, \quad f(1) = 1$

v. $f''(x) = 2, \quad f(1) = f(3) = 0$

vi. $f'(x)e^{f(x)} = 2 + \ln x$ και η γραφική παράσταση της f να περνά από το σημείο $(e, 0)$.

Λύση:

i. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x-2)\,dx$$

$$f(x) = \int 3x\,dx - \int 2\,dx = \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(1) = 1$

$$f(1) = \frac{3(1)^2}{2} - 2(1) + C = \frac{3}{2} - 2 + C = -\frac{1}{2} + C$$

$$-\frac{1}{2} + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$$

ii. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \sqrt{x-2}\,dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = x - 2$

$$f(x) = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$\Longrightarrow \ f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(3) = 2$

$$f(3) = \frac{2}{3}(3-2)^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1)^{3/2} + C = \frac{2}{3} + C$$

$$\frac{2}{3} + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4}{3}$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + \frac{4}{3}$$

iii. Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (2-6x)\,dx$$

$$f'(x) = \int 2\,dx - \int 6x\,dx = 2x - 3x^2 + C_1$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f'(0) = 4$

$$f'(0) = 2(0) - 3(0)^2 + C_1 = C_1 = 4$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 3x^2 + 4$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x - 3x^2 + 4)\,dx$$

$$f(x) = \int 2x\,dx - \int 3x^2\,dx + \int 4\,dx = x^2 - x^3 + 4x + C_2$$

Γνωρίζοντας το $f(0)$=1 μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή C_2

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + C_2 = 1$$

Άρα η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 1$$

iv. Ολοκλήρωση για να βρούμε το $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int \frac{2}{x^3}\,dx = \int 2x^{-3}\,dx$$

$$f'(x) = 2\int x^{-3}\,dx = 2\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C_1 = -x^{-2} + C_1$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f'(1) = 1$

$$f'(1) = -1 + C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\,dx = \int -x^{-2}\,dx + \int 2\,dx$$

$$f(x) = x^{-1} + 2x + C_2 = \frac{1}{x} + 2x + C_2$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(1) = 1$

$$f(1) = 1 + 2 + C_2 = 3 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2$$

v. Ολοκλήρωση για να βρούμε το $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x + C_1$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x + C_1)\,dx = x^2 + C_1 x + C_2$$

Χρήση των αρχικών συνθηκών $f(1) = 0$ και $f(3) = 0$

$$f(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -1$$

$$f(3) = 9 + 3C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3C_1 + C_2 = -9$$

Λύση του συστήματος για C_1, C_2:

$$(3C_1 + C_2) - (C_1 + C_2) = -9 - (-1) \quad \Rightarrow \quad 2C_1 = -8 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -4$$

$$C_2 = -1 - C_1 = -1 - (-4) = 3$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

vi. Γραμμική αντικατάσταση για ολοκλήρωση

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{d}{dx}\big(e^{f(x)}\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\big(e^{f(x)}\big) = 2 + \ln x$$

Ολοκλήρωση και εύρεση $e^{f(x)}$

$$\int d\big(e^{f(x)}\big) = \int (2 + \ln x)\,dx$$

$$e^{f(x)} = \int 2\,dx + \int \ln x\,dx + C$$

Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων

$$\int 2\,dx = 2x, \qquad \int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} = 2x + (x\ln x - x) + C = x\ln x + x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(e) = 0$

$$e^{f(e)} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = e\ln e + e + C = e \cdot 1 + e + C = 2e + C$$

$$C = 1 - 2e$$

Τελική μορφή της συνάρτησης

$$e^{f(x)} = x\ln x + x + 1 - 2e$$

Ισοδύναμα, λογαριθμίζοντας:

$$f(x) = \ln\big(x\ln x + x + 1 - 2e\big)$$

10. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(α) $\displaystyle\int 9x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$ (β) $\displaystyle\int\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)dx$ (γ) $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^3(x)}{\text{συν}^2(x)}\,dx$

(δ) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ (στ) $\displaystyle\int \text{συν}\big(\sqrt{x}\big)\,dx$ (η) $\displaystyle\int 4x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

(ϑ) $\displaystyle\int \text{ημ}^7(x)\,\text{συν}^3(x)\,dx$ (ι) $\displaystyle\int \text{ημ}(7x)\,\text{συν}(3x)\,dx$ (ιβ) $\displaystyle\int \text{ημ}(2x)\,\text{συν}^6(x)\,dx$

(ια) $\displaystyle\int \frac{\text{ημ}^4(x)}{\text{συν}^6(x)}\,dx$ (ιγ) $\displaystyle\int \sqrt{1-\text{ημ}(2x)}\,dx, \quad x \in \big(0, \tfrac{\pi}{4}\big)$ (ιδ) $\displaystyle\int (x^2+1)e^x\,dx$

(ιε) $\displaystyle\int e^{ax}\text{ημ}(\beta x)\,dx$ (ιζ) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$ (ιστ) $\displaystyle\int \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x)\,dx$

(ιν) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+10}\,dx$ (κ) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\text{ημ}(x)}\,dx$ (κα) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\text{συν}(2x)-\text{ημ}(2x)}\,dx$

(κβ) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (κυ) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}}\,dx$

Λύση: (Ασκ. 1/57)

(α) Θέτουμε $u = x^3 + 5 \Rightarrow du = 3x^2dx$.

$$\int 9x^2\sqrt{x^3+5}\,dx = 3\int \sqrt{u}\,du = 3 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + c = 2(x^3+5)^{3/2} + c.$$

(β) $\dfrac{d}{dx}\ln(e^x+1) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$. Για το δεύτερο μέρος θέτουμε $t = \sqrt{\ln x} \Rightarrow \ln x = t^2,\ dx = 2t\,dt/x$:

$$\int \left(\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \ln(e^x+1) - \int 2t^2\,dt = \ln(e^x+1) - \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c.$$

(γ)

$$\int \frac{\text{ημ}^3(x)}{\text{συν}^2(x)}\,dx = \int \text{ημ}(x)\left(\frac{1}{\text{συν}^2(x)} - 1\right)dx.$$

Με $u = \text{συν}(x),\ du = -\text{ημ}(x)\,dx$:

$$-\int \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)du = \frac{1}{u} + u + c = \text{τεμ}(x) + \text{συν}(x) + c.$$

(δ)

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx, \quad u = e^x \Rightarrow du = e^x dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \tau o\xi\varepsilon\varphi(e^x) + c.$$

(στ) $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

$$\int \text{συν}\big(\sqrt{x}\big)\,dx = 2\int t\text{συν}(t)\,dt = 2\big(t\,\text{ημ}(t) + \text{συν}(t)\big) + c = 2\big(\sqrt{x}\,\text{ημ}\sqrt{x} + \text{συν}\sqrt{x}\big) + c.$$

(η) $u = x^2,\ du = 2x\,dx$.

$$\int 4x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = 2\int u\sqrt{1+u}\,du = 2\int \big((1+u)^{3/2} - (1+u)^{1/2}\big)\,du = \frac{4}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(1+x^2)^{3/2} + c.$$

(ϑ) $\text{συν}^3(x) = (1 - \text{ημ}^2(x))\,\text{συν}(x)$. Με $u = \text{ημ}(x),\ du = \text{συν}(x)\,dx$:

$$\int \text{ημ}^7(x)\,\text{συν}^3(x)\,dx = \int u^7(1-u^2)\,du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} + c = \frac{\text{ημ}^8(x)}{8} - \frac{\text{ημ}^{10}(x)}{10} + c.$$

(ι) Τύπος γινομένου σε άθροισμα: $\text{ημ}A\,\text{συν}B = \frac{1}{2}[\text{ημ}(A{+}B) + \text{ημ}(A{-}B)]$.

$$\int \text{ημ}(7x)\,\text{συν}(3x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int \big(\text{ημ}(10x) + \text{ημ}(4x)\big)\,dx = -\frac{\text{συν}(10x)}{20} - \frac{\text{συν}(4x)}{8} + c.$$

(ιβ) $\text{ημ}(2x) = 2\text{ημ}(x)\text{συν}(x)$. Με $u = \text{συν}(x)$, $du = -\text{ημ}(x)\,dx$:

$$\int \text{ημ}(2x)\,\text{συν}^6(x)\,dx = 2\int \text{ημ}(x)\,\text{συν}^7(x)\,dx = -2\int u^7\,du = -\frac{\text{συν}^8(x)}{4} + c.$$

(ια)

$$\int \frac{\text{ημ}^4(x)}{\text{συν}^6(x)}\,dx = \int \text{εφ}^4(x)\,\text{τεμ}^2(x)\,dx = \int \text{εφ}^4(x)\,d(\text{εφ}(x)) = \frac{\text{εφ}^5(x)}{5} + c.$$

(ιγ) $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \text{εφ}(x) > 0$. Θέτουμε $t = \text{εφ}(x) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ και $\text{ημ}(2x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$:

$$\int \sqrt{1 - \text{ημ}(2x)}\,dx = \int \frac{1-t}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt = \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + c = \text{ημ}(x) + \text{συν}(x) + c.$$

(ιδ) Κανόνας $\int P(x)e^x dx = e^x(P - P' + P'' - \cdots)$ για πολυώνυμο P:

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2 - 2x + 3)e^x + c.$$

(ιε) Τυπικός τύπος:

$$\int e^{ax}\text{ημ}(\beta x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+\beta^2}\big(a\,\text{ημ}(\beta x) - \beta\,\text{συν}(\beta x)\big) + c.$$

(ιζ) Μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + c.$$

(ιστ) Μερική ολοκλήρωση: $u = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x)$, $dv = dx$.

$$\int \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x)\,dx = x\ \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(x) - \sqrt{1-x^2} + c.$$

(ιν) $u = x+1 \Rightarrow x-1 = u-2,\ x^2+2x+10 = u^2+9$:

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{u-2}{u^2+9}\,du = \frac{1}{2}\ln(u^2+9) - \frac{2}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\Big(\frac{u}{3}\Big) + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\big((x+1)^2+9\big) - \frac{2}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) + c.$$

(κ) Πολλαπλασιάζουμε με $\dfrac{1-\text{ημ}(x)}{1-\text{ημ}(x)}$:

$$\int \frac{1}{1+\text{ημ}(x)}\,dx = \int \frac{1-\text{ημ}(x)}{\text{συν}^2(x)}\,dx = \int \text{τεμ}^2(x)\,dx - \int \text{εφ}(x)\,\text{τεμ}(x)\,dx$$
$$= \text{εφ}(x) - \text{τεμ}(x) + c.$$

Με τύπο ημιγωνίας $t = \text{εφ}\big(\frac{x}{2}\big)$ παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\int \frac{1}{1+\text{ημ}(x)}\,dx = -\frac{2}{1+\text{εφ}\big(\frac{x}{2}\big)} + c.$$

(κα) $t = \text{εφ}(x) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\text{συν}(2x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\text{ημ}(2x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$:

$$3 + 2\text{συν}(2x) - \text{ημ}(2x) = \frac{(t-1)^2+4}{1+t^2}.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{3+2\text{συν}(2x)-\text{ημ}(2x)}\,dx = \int \frac{dt}{(t-1)^2+4} = \frac{1}{2}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t-1}{2}\right) + c$$
$$= \frac{1}{2}\,\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\text{εφ}(x)-1}{2}\right) + c.$$

(κβ) $x = \text{εφ}(\theta) \Rightarrow dx = \text{τεμ}^2(\theta)\, d\theta,\ \sqrt{1+x^2} = \text{τεμ}(\theta)$:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\text{τεμ}^2\theta}{\text{εφ}^2\theta\,\text{τεμ}\theta}\,d\theta = \int \frac{\text{τεμ}\theta}{\text{εφ}^2\theta}\,d\theta = \int \text{συνεφ}(\theta)\,\text{συνκ}(\theta)\,d\theta = -\text{συνκ}(\theta) + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$

(κυ) $x + 3 = \dfrac{1}{t} \Rightarrow dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$ και $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x(x+3)} = \dfrac{\sqrt{1-3t}}{t}$:

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}}\,dx = \int -\frac{1}{\sqrt{1-3t}}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{1-3t} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}} + c.$$

11 Να δείξετε ότι

$$\int f''(x)\,g(x)\,dx \;=\; f'(x)g(x) \;-\; f(x)g'(x) \;+\; \int f(x)\,g''(x)\,dx.$$

Ακολούθως, να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 e^x\,dx$$

Λύση: (Ασκ. 2/57)

Χρησιμοποιούμε μερική ολοκλήρωση,

$\displaystyle\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$. Θέτουμε $u' = f''(x)$, $v = g(x) \Rightarrow u = f'(x)$. Τότε

$$\int f''(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)\,dx.$$

Εφαρμόζουμε ξανά με $u' = f'(x)$, $v = g'(x) \Rightarrow u = f(x)$:

$$\int f'(x)g'(x)\,dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g''(x)\,dx.$$

Άρα

$$\int f''(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + \int f(x)g''(x)\,dx$$

Υπολογίζουμε $\int x^2 e^x \, dx$ με δύο φορές μερική ολοκλήρωση.

Πρώτα $u = x^2$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x \, dx$, $v = e^x$:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx.$$

Ξανά στο δεύτερο: $u = 2x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2 \, dx$, $v = e^x$:

$$\int 2xe^x \, dx = 2xe^x - \int 2e^x \, dx = 2xe^x - 2e^x.$$

Συνεπώς

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) = e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + c.$$

$$\int x^2 e^x \, dx = e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$

12. Να δείξετε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

i. Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \, dx.$$

Λύση: (Ασκ. 3/58)

Γράφουμε

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x \left(x^2+1\right)^{-1/2}.$$

Παράγωγος με κανόνα γινομένου–αλυσίδας:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (x^2+1)^{-1/2} + x \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \left(x^2+1\right)^{-3/2} \cdot (2x) \\ &= (x^2+1)^{-1/2} - x^2(x^2+1)^{-3/2} = \frac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

i. Θέτουμε με μερική ολοκλήρωση στη μορφή $\int v \, du = uv - \int u \, dv$:

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad du = \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \ \text{(από το (α))},$$

$$v = \text{τοξεφ}(x), \qquad dv = \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Τότε

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{x\,\text{τοξεφ}(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $w = x^2+1 \Rightarrow dw = 2x\,dx$:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int w^{-3/2}\,dw = -w^{-1/2} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Άρα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{x\,\text{τοξεφ}(x)+1}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

13. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x)}{\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)}\,dx.$

i. Να βρείτε τις σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\text{συν}(x) \;\equiv\; a\big(\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)\big) \;+\; \beta\big(2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x)\big).$$

ii. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{\text{συν}(x)}{\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)}\,dx.$

Λύση: (Ασκ. 4/58)

Θέτουμε

$$u = \text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x) \quad\Rightarrow\quad du = \big(-\text{ημ}(x) + 2\text{συν}(x)\big)\,dx = (2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x))\,dx.$$

Τότε

$$\int \frac{2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x)}{\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\big|\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)\big| + c$$

i. Εξισώνουμε συντελεστές σε συν(x) και ημ(x):

$$a\big(\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)\big) + \beta\big(2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x)\big) = (a+2\beta)\text{συν}(x) + (2a-\beta)\text{ημ}(x).$$

Θέλουμε $(a+2\beta) = 1$ και $2a - \beta = 0$. Άρα

$$\beta = 2a, \qquad a + 4a = 1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{2}{5}.$$

Έτσι

$$\text{συν}(x) \equiv \frac{1}{5}\big(\text{συν}(x) + 2\text{ημ}(x)\big) + \frac{2}{5}\big(2\text{συν}(x) - \text{ημ}(x)\big)$$

ii. Χρησιμοποιούμε την (i):

$$\frac{\text{συν}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)} = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}\,\frac{2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}.$$

Ολοκληρώνουμε και εφαρμόζουμε την αρχική απόδειξη:

$$\int \frac{\text{συν}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}\,dx = \frac{1}{5}\,x+\frac{2}{5}\int \frac{2\text{συν}(x)-\text{ημ}(x)}{\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)}\,dx = \frac{1}{5}\,x+\frac{2}{5}\ln\big|\text{συν}(x)+2\text{ημ}(x)\big|+c$$

14. Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό.

i. $\displaystyle\int_{x\in(1,+\infty)} \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}}\,dx,$

ii. $\displaystyle\int_{x\in\mathbb{R}} \frac{e^x}{(e^x+1)\,\ln(e^x+1)}\,dx,$

iii. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx$, iv. $\displaystyle\int_{\theta\in(0,\pi/2)} \sqrt{\text{εφ}\,\theta}\;d\theta,\quad$ με $t=\sqrt{\text{εφ}\,\theta}$.

Λύση: (Ασκ. 5/58)

i. Θέτουμε $u=\sqrt{\ln x}$. Τότε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}},$$

άρα

$$\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}}\,dx = 7\int du = 7\sqrt{\ln x}+c$$

ii. Θέτουμε $u=\ln(e^x+1) \Rightarrow du = \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx.$

$$\int \frac{e^x}{(e^x+1)\,\ln(e^x+1)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln\big(\ln(e^x+1)\big)+c$$

iii. Θέτουμε $x=\sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta$ ($\Rightarrow x>\sqrt{2}$). Τότε

$$dx=\sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta\,\text{εφ}\,\theta\,d\theta,\qquad \sqrt{x^2-2}=\sqrt{2}\,\text{εφ}\,\theta,\qquad x^4=4\,\text{τεμ}^4\theta.$$

Επομένως

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{2}\,\text{τεμ}\,\theta\,\text{εφ}\,\theta}{4\,\text{τεμ}^4\theta \cdot \sqrt{2}\,\text{εφ}\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \text{τεμ}^{-3}\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int \text{συν}^3\theta\,d\theta.$$

Υπολογίζουμε

$$\int \text{συν}^3\theta\,d\theta = \int \text{συν}\theta\,(1-\text{ημ}^2\theta)\,d\theta = \text{ημ}\theta - \frac{1}{3}\text{ημ}^3\theta + c.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx = \frac{1}{4}\text{ημ}\theta - \frac{1}{12}\text{ημ}^3\theta + c.$$

Επαναφέρουμε: $\text{συν}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \text{ημ}\theta = \sqrt{1-\frac{2}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}.$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\,dx = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2-2}}{6x^3} + c$$

iv. Θέτουμε $t = \sqrt{\text{εφ}\,\theta} \Rightarrow \text{εφ}\,\theta = t^2$. Τότε $d(\text{εφ}\,\theta) = \text{τεμ}^2\theta\,d\theta = 2t\,dt$ και $\text{τεμ}^2\theta = 1+\text{εφ}^2\theta = 1+t^4$. Άρα

$$d\theta = \frac{2t}{1+t^4}\,dt, \qquad \int \sqrt{\text{εφ}\,\theta}\,d\theta = \int t\cdot\frac{2t}{1+t^4}\,dt = \int \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt.$$

Γράφουμε $1+t^4 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)$ και με μερικά κλάσματα προκύπτει

$$\int \frac{2t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}\right) + c.$$

Επαναφέρουμε $t = \sqrt{\text{εφ}\,\theta}$:

$$\int \sqrt{\text{εφ}\,\theta}\;d\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\text{εφ}\,\theta - \sqrt{2\,\text{εφ}\,\theta}+1}{\text{εφ}\,\theta + \sqrt{2\,\text{εφ}\,\theta}+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{\text{εφ}\,\theta - 1}{\sqrt{2\,\text{εφ}\,\theta}}\right) + c$$

15. Να αποδείξετε ότι:

i.
$$\int x\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2\,dx = \frac{1}{2}\,(x^2+1)\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - x\,\text{τοξεφ}(x) + \ln\big(\sqrt{x^2+1}\big) + c.$$

ii.
$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$$

Λύση: (Ασκ. 6/58)

i. Θέτουμε
$$I = \int x\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2\,dx.$$

Μερική ολοκλήρωση με $u = \big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 \Rightarrow du = 2\,\text{τοξεφ}(x)\,\dfrac{1}{1+x^2}\,dx,\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$:

$$I = \frac{x^2}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - \int \frac{x^2\,\text{τοξεφ}(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Γράφουμε $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$:

$$I = \frac{x^2}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - \int \text{τοξεφ}(x)\,dx + \int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{1+x^2}\,dx.$$

Στο τελευταίο, θέτουμε $t = \text{τοξεφ}(x) \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$:

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{1+x^2}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2.$$

Άρα
$$I = \frac{x^2+1}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - \int \text{τοξεφ}(x)\,dx.$$

Υπολογίζουμε $\displaystyle\int \text{τοξεφ}(x)\,dx$ με Μ.Ο.: $u = \text{τοξεφ}(x),\ dv = dx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = x.$

$$\int \text{τοξεφ}(x)\,dx = x\,\text{τοξεφ}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\text{τοξεφ}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{x^2+1}{2}\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - x\,\text{τοξεφ}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \frac{1}{2}(x^2+1)\big(\text{τοξεφ}(x)\big)^2 - x\,\text{τοξεφ}(x) + \ln\big(\sqrt{x^2+1}\big) + c,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Θέτουμε $t = x+1 \Rightarrow x = t-1,\ dx = dt$:

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx = \int \frac{(t-1)^2}{t^3}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right)dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά δύναμη:

$$= \ln|t| + \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2} + c = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

16. Αν

$$I_\nu = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}\,dx, \qquad \nu \in \mathbb{N},\ a > 0,$$

τότε:

i. Να αποδείξετε τον αναγωγικό τύπο

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{2\nu-1}{2\nu a^2}\,I_\nu.$$

ii. Να βρείτε τα I_2 και I_3.

Λύση: (Ασκ. 7/59)

i. Ξεκινάμε από

$$I_{\nu+1} = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \left[\frac{1}{(x^2+a^2)^\nu} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\right]dx = \frac{1}{a^2}\Big(I_\nu - J\Big),$$

όπου $J = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\,dx$. Υπολογίζουμε το J με μερική ολοκλήρωση θέτοντας

$$u = x, \qquad dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^{\nu+1}}\,dx \ \Rightarrow\ du = dx, \quad v = -\frac{1}{2\nu}\frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}.$$

Τότε

$$J = u\,v - \int v\,du = -\frac{x}{2\nu}\frac{1}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}\,dx = -\frac{x}{2\nu(x^2+a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu}I_\nu.$$

Άρα

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{a^2}\left(I_\nu - \Big[-\frac{x}{2\nu(x^2+a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu}I_\nu\Big]\right) = \frac{1}{2\nu a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{2\nu-1}{2\nu a^2}\,I_\nu,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Βάση:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c.$$

Για $\nu = 1$:

$$I_2 = \frac{1}{2\cdot 1\,a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1\,a^2}\,I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c$$

Για $\nu = 2$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\,I_2 \\ &= \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left[\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big)\right] \\ &= \frac{x(3x^2+5a^2)}{8a^4(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^5}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c. \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{x(3x^2+5a^2)}{8a^4(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^5}\,\text{τοξεφ}\Big(\frac{x}{a}\Big) + c$$

17. Να βρεθεί συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, η γραφική της να διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και να έχει κλίση στο σημείο A ίση με 3.

Λύση: (Ασκ. 8/59)

Από $f''(x) = -x^{-2}$ παίρνουμε

$$f'(x) = \int -x^{-2}\,dx = \frac{1}{x} + C_1.$$

Η κλίση στο $A(1,3)$ είναι $f'(1) = 3 \Rightarrow 1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 2$. Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

Ολοκληρώνοντας ξανά,

$$f(x) = \int\Big(\frac{1}{x}+2\Big)\,dx = \ln x + 2x + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε $f(1) = 3$: $0 + 2 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 1$. Επομένως

$$f(x) = 2x + \ln x + 1, \quad x > 0$$

18. Αν η f είναι παραγώγιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ, να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x \big(f(x) + f'(x)\big)\, dx.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x \big(\text{ημ}(x) + \text{συν}(x)\big)\, dx.$$

Λύση: (Ασκ. 9/59)

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου:

$$\frac{d}{dx}\big(e^x f(x)\big) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \big(f(x) + f'(x)\big).$$

Άρα,

$$\int e^x \big(f(x) + f'(x)\big)\, dx = e^x f(x) + c$$

για κάθε παραγώγιμη f.

Για $\displaystyle\int e^x \big(\text{ημ}(x) + \text{συν}(x)\big)\, dx$ θέτουμε $f(x) = \text{ημ}(x)$ (οπότε $f'(x) = \text{συν}(x)$). Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο,

$$\int e^x \big(\text{ημ}(x) + \text{συν}(x)\big)\, dx = e^x\, \text{ημ}(x) + c$$

(έλεγχος: $\frac{d}{dx}[e^x \text{ημ}(x)] = e^x \text{ημ}(x) + e^x \text{συν}(x)$).

19. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f^2(x)\, f'(x) = x^2 + 1$.

ii. $xf'(x) = e^x - f(x)$, $x \neq 0$, και $f(2) = 0$.

iii. $2xf'(x) + x^2 f''(x) = 2x + 1$, $x \neq 0$, και $f'(1) = f(1) = 2$.

Λύση: (Ασκ. 10/59)

i. Για $x > 0$:

$$f^2(x) f'(x) = x^2 + 1 \implies f^2\, df = (x^2 + 1)\, dx.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\frac{1}{3} f^3(x) = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Από $f(0) = 0$ (διέρχεται από την αρχή) παίρνουμε $C = 0$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}, \qquad x \geq 0$$

ii. Γραμμική Δ.Ε.:

$$xf'(x) + f(x) = e^x \iff f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x) = e^{\int (1/x)dx} = x$. Άρα $(xf(x))' = e^x$ και

$$xf(x) = e^x + C \implies f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Με $f(2) = 0$ βρίσκουμε $C = -e^2$.

$$f(x) = \frac{e^x - e^2}{x}, \qquad x \neq 0$$

iii. Παρατηρούμε ότι $\frac{d}{dx}\big(x^2 f'(x)\big) = 2xf'(x) + x^2 f''(x)$. Άρα

$$\big(x^2 f'(x)\big)' = 2x + 1 \implies x^2 f'(x) = x^2 + x + C_1.$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Με $f'(1) = 2$ προκύπτει $C_1 = 0$, οπότε $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Ολοκληρώνουμε:

$$f(x) = x + \ln|x| + C_2.$$

Με $f(1) = 2$ παίρνουμε $C_2 = 1$. Επομένως (στο $(0, +\infty)$):

$$f(x) = x + \ln x + 1$$

11. Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4, 4)$ και ισχύει

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}, \qquad x \neq 3.$$

Λύση: (Ασκ. 11/59)

Από την υπόθεση

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$$

ολοκληρώνουμε μία φορά:

$$f'(x) = \int \frac{2}{(x-3)^3}\,dx = 2 \cdot \frac{(x-3)^{-2}}{-2} + C_1 = -\frac{1}{(x-3)^2} + C_1.$$

Εφόσον στο $A(4,4)$ υπάρχει τοπικό ακρότατο, πρέπει $f'(4) = 0$. Άρα

$$0 = f'(4) = -\frac{1}{(4-3)^2} + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 1,$$

οπότε

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά:

$$f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx = x - \int (x-3)^{-2}\,dx = x + \frac{1}{x-3} + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε ότι το σημείο $A(4,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση: $f(4) = 4$.

$$4 = 4 + \frac{1}{1} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -1.$$

Άρα

$$f(x) = x + \frac{1}{x-3} - 1, \qquad x \neq 3.$$

(Επιπλέον $f''(4) = 2 > 0$, άρα το ακρότατο στο $x = 4$ είναι ελάχιστο.)

20. Δίνεται ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad f'(0) = 3,\; f(0) = 2.$$

Να αποδειχθούν/βρεθούν τα παρακάτω:

i. Αν $u(x) = f'(x) - f(x)$, να δείξετε ότι $u'(x) - 2u(x) = 0$.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της u.

iii. Να δείξετε ότι $\left(e^{-x} f(x)\right)' = e^x$ και να βρείτε τη f.

Λύση: (Ασκ. 12/59)

i. Με $u = f' - f$ έχουμε $u' = f'' - f'$. Άρα

$$u' - 2u = (f'' - f') - 2(f' - f) = f'' - 3f' + 2f = 0,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Η Δ.Ε. είναι $u' - 2u = 0 \Rightarrow u(x) = Ce^{2x}$. Από $u(0) = f'(0) - f(0) = 3 - 2 = 1$ προκύπτει $C = 1$. Επομένως

$$u(x) = e^{2x}$$

iii. Υπολογίζουμε

$$\big(e^{-x}f(x)\big)' = e^{-x}\big(f'(x) - f(x)\big) = e^{-x}u(x) = e^{-x} \cdot e^{2x} = e^{x}.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$e^{-x}f(x) = \int e^{x}\,dx = e^{x} + C \;\Rightarrow\; f(x) = e^{2x} + Ce^{x}.$$

Με $f(0) = 2$ παίρνουμε $1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$. Άρα

$$f(x) = e^{2x} + e^{x}$$

(Έλεγχος: $f'(0) = 2 + 1 = 3$ και $f'' - 3f' + 2f = 0$.)

21. Να βρείτε μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = |3x - 6|$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: (Ασκ. 1/60)

Θέτουμε $u = 3x - 6 \Rightarrow du = 3\,dx$ και $dx = \dfrac{du}{3}$. Τότε

$$\int |3x-6|\,dx = \frac{1}{3}\int |u|\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,u|u| + c = \frac{1}{6}\,(3x-6)\,|3x-6| + c$$

(Έλεγχος: $\dfrac{d}{dx}\big[\frac{1}{6}(3x-6)|3x-6|\big] = |3x-6|$.)

Ισοδύναμα, κατά τμήματα:

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 6 + c, & x \le 2, \\ \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 6 + c, & x \ge 2, \end{cases}$$

που ικανοποιεί $F'(x) = |3x - 6|$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

22. Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει πάντα παράγουσα στο Δ. Να δείξετε ότι το *αντίστροφο* δεν ισχύει, χρησιμοποιώντας ως αντιπαράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \text{συν}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Λύση: (Ασκ. 2/60)

Θέτουμε

$$F(x) = \begin{cases} x^2\,\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Για $x \neq 0$, με κανόνα γινομένου–αλυσίδας,

$$F'(x) = 2x\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\,\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{συν}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

Στο $x = 0$,

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\,\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Άρα F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $F'(x) = f(x)$ για όλα τα x. Επομένως η f *έχει* παράγουσα (είναι παράγωγος της F).

Δείχνουμε τώρα ότι η f *δεν* είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, παίρνουμε τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \ \Rightarrow\ f(x_n) = 2x_n\text{ημ}(2\pi n) - \text{συν}(2\pi n) = 0 - 1 = -1,$$

$$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \ \Rightarrow\ f(y_n) = 2y_n\text{ημ}((2n+1)\pi) - \text{συν}((2n+1)\pi) = 0 - (-1) = 1.$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -1$ ενώ $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$.

Η $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Συμπέρασμα: Υπάρχει συνάρτηση f που *είναι* παράγωγος κάποιας F (άρα έχει παράγουσα) αλλά *δεν* είναι συνεχής.

Άρα το αντίστροφο του θεωρήματος "η συνέχεια συνεπάγεται ύπαρξη παραγώγου" δεν ισχύει.

23. Να δείξετε ότι οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της

$$f(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2}, & x < 0, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2} - 5, & x < 0. \end{cases}$$

Γιατί είναι λάθος να γράφουμε

$$\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x^2} + c, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \ ?$$

Λύση: (Ασκ. 3/60)

Απόδειξη ότι F και G είναι παράγουσες. Για $x \neq 0$ ισχύει

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} = f(x).$$

Άρα, για $x > 0$ και για $x < 0$,

$$F'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = f(x), \qquad G'(x) = \left(\frac{1}{x^2} \pm 5\right)' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = f(x),$$

εφόσον η παράγωγος σταθεράς είναι 0.

Επομένως και οι δύο συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Γιατί η γραφή με ένα μόνο c είναι λανθασμένη;

Ο *αόριστος ολοκληρωμένος* ορίζεται «μέχρι σταθερά» σε *συνεκτικό* διάστημα. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ είναι *ένωση δύο* διαστημάτων, άρα η γενική παράγουσα επιτρέπεται να έχει *διαφορετικές* σταθερές σε καθένα από αυτά:

$$\int \left(-\frac{2}{x^3}\right) dx = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + C_1, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2} + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Αν γράψουμε μία μόνο σταθερά c, αποκλείουμε έγκυρες παραγώγους όπως η

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2} - 5, & x < 0, \end{cases}$$

η οποία έχει διαφορετικές σταθερές στις δύο συνιστώσες του πεδίου ορισμού.

Επομένως η σχέση $\int (-2/x^3)\, dx = \frac{1}{x^2} + c$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι **λανθασμένη**: χρειάζονται δύο ανεξάρτητες σταθερές.