Διαγνωστικό Δοκίμιο - Κύκλος Α' Μέρος

Όνομα: ______________________________ **Βαθμός:** __________

- Εξίσωση κύκλου
- Θέση ευθείας και κύκλου
- Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο του κύκλου
- Εφαπτομένες κύκλου από σημείο εκτός αυτού
- Θέση δύο κύκλων
- ~~Μήκος Εφαπτόμενου Τμήματος, Θέση και Δύναμη σημείου ως προς κύκλο~~
- ~~Παραμετρικές Εξισώσεις Κύκλου~~

---

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και [**2μ**]
α) διέρχεται από το σημείο $A(2\sqrt{2},1)$.
β) εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon:\ x-2y+5=0$.

Λύση:

α) Για την ακτίνα ρ του ζητούμενου κύκλου ισχύει:

$$\rho=(OA)=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{9}=3,$$

οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση:

$$x^2+y^2=3^2=9.$$

β) Για την ακτίνα ρ του ζητούμενου κύκλου ισχύει:

$$\rho=d(O,\varepsilon)=\frac{|0-2\cdot 0+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}.$$

Ο κύκλος έχει εξίσωση:

$$x^2+y^2=(\sqrt{5})^2=5.$$

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στις παρακάτω περιπτώσεις: **[2μ]**

α) Ο κύκλος έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

β) Ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $E(3,1)$, $Z(-1,3)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon : y = 3x - 2$.

Λύση:

α) Επειδή το τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου, το κέντρο του K θα είναι το μέσο του AB. Είναι:

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{και} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4,$$

άρα $K(-1,4)$.

Για την ακτίνα ρ του κύκλου ισχύει:

$$\rho = (KA) = \sqrt{(1+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5},$$

οπότε η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5.$$

β) Επειδή το K ισαπέχει από τα E, Z, βρίσκεται στη μεσοκάθετο μ του EZ. Για το μέσο M του EZ έχουμε:

$$x_M = \frac{x_E + x_Z}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{και} \quad y_M = \frac{y_E + y_Z}{2} = \frac{1+3}{2} = 2,$$

άρα $M(1,2)$. Οι συντελεστές διεύθυνσης της EZ είναι:

$$\lambda_{EZ} = \frac{3-1}{1-3} = -\frac{1}{2}.$$

Είναι μ ⊥ EZ $\implies \lambda_\mu \lambda_{EZ} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\lambda_\mu = -1 \Rightarrow \lambda_\mu = 2$. Η ευθεία μ έχει εξίσωση:

$$y - 2 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x.$$

Επειδή το κέντρο K του κύκλου βρίσκεται στις ευθείες ε, μ, οι συντεταγμένες του είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους,

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3x - 2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2 \quad \text{και} \quad y = 2 \cdot 2 = 4,$$

άρα $K(2,4)$.
Για την ακτίνα ρ του κύκλου ισχύει:

$$\rho = (KE) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10},$$

οπότε η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{10})^2 = 10.$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2+y^2-4x-4y-17=0$ που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 4x-3y+12=0$. **[2μ]**

Λύση:

$C: x^2+y^2-4x-4y-17=0 \Leftrightarrow$
$x^2-4x+4+y^2-4y+4=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=5^2$.

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(2,2)$ και ακτίνα $\rho=5$.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3}$.

Αν ε_1 είναι η εφαπτομένη του κύκλου που είναι κάθετη στην ε, τότε: $\lambda\cdot\lambda_1=-1 \Leftrightarrow \lambda_1=-\frac{3}{4}$ και η ε_1 έχει εξίσωση της μορφής:

$$y=-\frac{3}{4}x+\beta \Rightarrow 3x+4y-4\beta=0$$

Είναι

$$d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \left|\frac{3\cdot 2+4\cdot 2-4\beta}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=5 \Leftrightarrow |14-4\beta|=25 \Leftrightarrow 14-4\beta=\pm 25$$

$14-4\beta=25 \Leftrightarrow 14-25=4\beta \Leftrightarrow \beta=-\frac{11}{4}$ ή $14-4\beta=-25 \Leftrightarrow 14+25=4\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{39}{4}$

Άρα $\varepsilon_1: 3x+4y-4\left(-\frac{11}{4}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+4y+11=0$ ή $3x+4y-4\cdot\frac{39}{4}=0 \Leftrightarrow 3x+4y-39=0$.

4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου **[2μ]**

$$(C): \; x^2 + y^2 = 10$$

που άγονται προς αυτόν από το σημείο $A(-4, -2)$.

Λύση:

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0, -1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Έστω ότι η εφαπτομένη από το $A(6, 1)$ έχει κλίση m:

$$y - 1 = m(x - 6) \iff mx - y - 6m + 1 = 0.$$

Η απόσταση του $O(0, -1)$ από την ευθεία είναι

$$d = \frac{|m \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) - 6m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|2 - 6m|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Για εφαπτομένη $d = R = 2\sqrt{5}$, άρα

$$\frac{(2 - 6m)^2}{m^2 + 1} = 20 \iff 36m^2 - 24m + 4 = 20m^2 + 20 \iff 2m^2 - 3m - 2 = 0.$$

Λύνουμε:

$$(2m + 1)(m - 2) = 0 \;\Rightarrow\; m = 2 \text{ ή } m = -\tfrac{1}{2}.$$

Οι αντίστοιχες εφαπτόμενες (που περνούν από το $A(6, 1)$) είναι

$$y - 1 = 2(x - 6) \iff 2x - y - 11 = 0,$$

$$y - 1 = -\tfrac{1}{2}(x - 6) \iff x + 2y - 8 = 0.$$

Σημεία επαφής (έλεγχος):

Για $m = 2$ η ακτίνα έχει κλίση $-\frac{1}{2}$: $y = -1 - \frac{x}{2}$. Τομή με $y = 2x - 11$ δίνει $T_1(4, -3)$.

Για $m = -\frac{1}{2}$ η ακτίνα έχει κλίση 2: $y = 2x - 1$. Τομή με $y = -\frac{x}{2} + 4$ δίνει $T_2(2, 3)$.

Και τα δύο σημεία ικανοποιούν $x^2 + (y + 1)^2 = 20$.

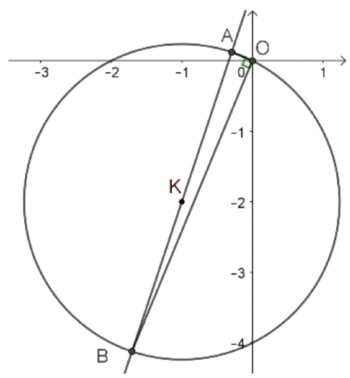
Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι:

$$2x - y - 11 = 0 \qquad \text{και} \qquad x + 2y - 8 = 0.$$

5. Θεωρούμε τον κύκλο **[2μ]**

$$x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y + \kappa - 1 = 0.$$

Να βρεθούν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $y = 3x + 1$ τέμνει τον κύκλο σε σημεία A και B έτσι ώστε η γωνία AOB να είναι ορθή, όπου O η αρχή των αξόνων.



Λύση: 2022

Α′ Λύση:

Ο κύκλος διέρχεται από το $(0, 0)$, άρα:

$$\kappa - 1 = 0 \Rightarrow \kappa = 1.$$

Η εγγεγραμμένη γωνία AOB είναι ορθή, άρα η AB είναι διάμετρος και το κέντρο του κύκλου $K\left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$ ανήκει στην ευθεία $y = 3x + 1$.

$$\lambda = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} + 1 \Rightarrow \lambda = -2$$

Β′ Λύση:

Ο κύκλος διέρχεται από το $(0, 0)$, άρα $\kappa = 1$.

Η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται. Η εξίσωση του συστήματος είναι:

$$\phi(x) = x^2 + (3x + 1)^2 - \lambda x - 2\lambda(3x + 1) + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x) = x^2 + 9x^2 + 6x + 1 - \lambda x - 6\lambda x - 2\lambda = 0 \Rightarrow \phi(x) = 10x^2 + (6 - 7\lambda)x + 1 - 2\lambda = 0 \quad (1)$$

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα σημεία τομής. Αφού AOB είναι ορθή, τότε AB διάμετρος του κύκλου, και επομένως το κέντρο του κύκλου είναι,

$$K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Από την (1) προκύπτει:

$$x_1 + x_2 = -\frac{6 - 7\lambda}{10}$$

και από την $y = 3x + 1$:

$$y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) + 2 = \frac{21\lambda + 2}{10}$$

Άρα:

$$K = \left(\frac{7\lambda - 6}{20}, \frac{21\lambda + 2}{20} \right)$$

Από την εξίσωση του κύκλου:

$$K = (-g, -f) = \left(\frac{\lambda}{2}, \lambda \right)$$

Συνεπώς:

$$\frac{7\lambda - 6}{20} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 7\lambda - 6 = 10\lambda \Rightarrow 3\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -2$$