Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Συνδυαστική

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμία από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε 2 διαδοχικές φάσεις. Αν η πρώτη φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με x τρόπους και για καθέναν από αυτούς η δεύτερη φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με y τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί συνολικά με $x \cdot y$ τρόπους.

ii. Επιλέγουμε ένα παιδί από 2 αγόρια και 3 κορίτσια. Η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους.

iii. Επιλέγουμε ένα αγόρι και ένα κορίτσι από 2 αγόρια και 3 κορίτσια. Η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους.

Λύση: (Ασκ. 1/29)

i. Σωστό. Από τη *Θεμελιώδη Αρχή Απαρίθμησης*, αν μια διαδικασία γίνεται σε 2 διαδοχικές φάσεις, με x και y τρόπους αντίστοιχα, τότε συνολικά υπάρχουν $x \cdot y$ τρόποι.

ii. Λάθος. Από την *Αρχή Άθροισης*, η επιλογή ενός παιδιού από 2 αγόρια ή 3 κορίτσια μπορεί να γίνει με $2 + 3 = 5$ τρόπους, όχι 6.

iii. Σωστό. Η επιλογή ενός αγοριού και ενός κοριτσιού μπορεί να γίνει με $2 \times 3 = 6$ τρόπους, σύμφωνα με τη *Θεμελιώδη Αρχή Απαρίθμησης*.

2. Με πόσους τρόπους 10 άτομα μπορούν να ορίσουν μια επιτροπή που θα αποτελείται από πρόεδρο, γραμματέα και ταμία, αν και τα 10 άτομα έχουν δικαίωμα να εκλεγούν;

Λύση: (Ασκ. 4/29)

Για τη θέση του προέδρου υπάρχουν 10 δυνατές επιλογές.
Για κάθε επιλογή προέδρου, απομένουν 9 άτομα για τη θέση του γραμματέα και στη συνέχεια 8 για τη θέση του ταμία.

Άρα, σύμφωνα με τη *Θεμελιώδη Αρχή Απαρίθμησης*, ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

3. Να υπολογίσετε το πλήθος των αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου $\Omega = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, αν αυτοί είναι:

i. διψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου

ii. διψήφιοι με επανάληψη ψηφίου

iii. τριψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου

iv. τριψήφιοι με επανάληψη ψηφίου

v. περιττοί τριψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου.

Λύση: (Ασκ. 5/30)

i. Για διψήφιους χωρίς επανάληψη, η πρώτη θέση (δεκάδες) έχει 5 επιλογές και η δεύτερη (μονάδες) 4. Άρα $5 \times 4 = 20$ αριθμοί.

ii. Με επανάληψη επιτρέπεται, οπότε και οι δύο θέσεις έχουν 5 επιλογές. Άρα $5 \times 5 = 25$ αριθμοί.

iii. Για τριψήφιους χωρίς επανάληψη, έχουμε $5 \times 4 \times 3 = 60$ αριθμούς.

iv. Με επανάληψη επιτρέπεται, άρα $5 \times 5 \times 5 = 125$ αριθμοί.

v. Για να είναι περιττός, η μονάδα πρέπει να είναι $5, 7,$ ή 9 — δηλαδή 3 επιλογές. Για κάθε τέτοια επιλογή, η δεκάδα και η εκατοντάδα επιλέγονται χωρίς επανάληψη από τα υπόλοιπα 4 ψηφία:

$$3 \times 4 \times 3 = 36$$

4. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

i. αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου

ii. αν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.

Λύση: (Ασκ. 6/30)

i. Εφόσον ο αριθμός είναι τετραψήφιος, το πρώτο ψηφίο (χιλιάδες) δεν μπορεί να είναι 0. Για την πρώτη θέση υπάρχουν 5 επιλογές $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Αφού δεν επιτρέπεται επανάληψη, για τη δεύτερη θέση (εκατοντάδες) απομένουν 5 ψηφία, για την τρίτη (δεκάδες) 4, και για την τελευταία (μονάδες) 3.

Άρα ο συνολικός αριθμός τετραψήφιων αριθμών είναι:

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$$

ii. Αν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου, η πρώτη θέση (χιλιάδες) έχει πάλι 5 επιλογές $(1-5)$, και καθεμία από τις υπόλοιπες τρεις θέσεις έχει 6 επιλογές $(0-5)$.

Άρα ο συνολικός αριθμός τετραψήφιων αριθμών είναι:

$$5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080$$

5. Αν σε 5 εργάσιμες μέρες μια τάξη έχει 3 διαφορετικά διαγωνίσματα, πόσα διαφορετικά προγράμματα μπορούν να καταρτιστούν, αν:

i. κάθε διαγώνισμα θα είναι σε διαφορετική μέρα

ii. επιτρέπεται μέχρι 2 το πολύ διαγωνίσματα σε μια μέρα;

Λύση: (Ασκ. 7/30)

i. Επιλέγουμε μέρα για το πρώτο διαγώνισμα (5 τρόποι), μετά για το δεύτερο (4 τρόποι), και μετά για το τρίτο (3 τρόποι). Με τη *Θεμελιώδη Αρχή Απαρίθμησης*:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

ii. «Το πολύ δύο την ίδια μέρα». Δύο περιπτώσεις:

— Όλα σε διαφορετικές μέρες: όπως στο (i), $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

— Δύο την ίδια μέρα και ένα σε άλλη:
5 τρόποι να διαλέξουμε τη μέρα που θα έχει τα δύο,
3 τρόποι να διαλέξουμε ποια *δύο* διαγωνίσματα θα μπουν μαζί,
2 τρόποι να ορίσουμε τη σειρά τους μέσα στην ίδια μέρα (πρωί–απόγευμα, π.χ.),
4 τρόποι να διαλέξουμε τη μέρα του τρίτου διαγωνίσματος.
Με την Αρχή Πολλαπλασιασμού:

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120.$$

Συνολικά:

$$60 + 120 = 180.$$

6. Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (x, y), με $x, y \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $x^2 + y^2 \leq 5$.

Λύση: (Ασκ. 8/30)

Εξετάζουμε τις δυνατές τιμές του x και μετράμε τις επιλογές του y (Αρχή Πολλαπλασιασμού) και κατόπιν αθροίζουμε (Αρχή Άθροισης):

— $x = 0$: τότε $y^2 \leq 5 \Rightarrow y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow 5$ ζεύγη.
— $x = \pm 1$: τότε $y^2 \leq 4 \Rightarrow y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow 5$ ανά τιμή x, άρα $2 \cdot 5 = 10$ ζεύγη.
— $x = \pm 2$: τότε $y^2 \leq 1 \Rightarrow y \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow 3$ ανά τιμή x, άρα $2 \cdot 3 = 6$ ζεύγη.

Με άθροιση:

$$5 + 10 + 6 = 21.$$

7. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάψουμε τις όψεις μιας πόρτας, έχοντας στη διάθεσή μας 3 διαφορετικά χρώματα για την εξωτερική όψη (άσπρο–μπλε–κόκκινο) και 4 διαφορετικά χρώματα για την εσωτερική όψη (άσπρο–μπλε–κίτρινο–πράσινο), αν:

i. θέλουμε να βάψουμε τις δύο όψεις της πόρτας με διαφορετικό χρώμα

ii. θέλουμε να βάψουμε τις δύο όψεις της πόρτας με το ίδιο χρώμα;

Λύση: (Ασκ. 9/30)

i. Συνολικά ζεύγη (εξωτερικό, εσωτερικό): $3 \times 4 = 12$.
Αφαιρούμε τα ζεύγη όπου τα χρώματα συμπίπτουν. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο για τα κοινά χρώματα των δύο λιστών: {άσπρο, μπλε}, άρα 2 ζεύγη.
Με την Αρχή Άθροισης/Αφαίρεσης: $12 - 2 = 10$.

ii. Για να είναι ίδιο χρώμα και στις δύο όψεις, πρέπει το χρώμα να υπάρχει και στις δύο λίστες. Τα κοινά χρώματα είναι {άσπρο, μπλε}, άρα 2 τρόποι.

8. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων A, B και Γ, όπου:

$$A = 7! - 2 \cdot 5!, \quad B = \frac{10!}{4! \cdot 6!}, \quad \Gamma = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}.$$

Λύση: (Ασκ. 1/41)

i. $A = 7! - 2 \cdot 5! = (7 \cdot 6 \cdot 5!) - 2 \cdot 5! = (42 - 2) \cdot 5! = 40 \cdot 120 = 4800.$

ii. $B = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4! \cdot 6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \dfrac{5040}{24} = 210.$

iii. $\Gamma = \dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{120} - \dfrac{1}{720} = \dfrac{30 - 6 - 1}{720} = \dfrac{23}{720}.$

9. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούν 7 διαφορετικά μαθήματα να τοποθετηθούν στο πρόγραμμα μιας ημέρας με 7 περιόδους.

Λύση: (Ασκ. 2/41)

Κάθε διάταξη των 7 διαφορετικών μαθημάτων σε 7 θέσεις αποτελεί *μετάθεση* 7 διαφορετικών αντικειμένων.

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο των μεταθέσεων:

$$M_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

10. Πέντε κορίτσια και τρία αγόρια θα καθίσουν σε οκτώ συνεχόμενα καθίσματα στο θέατρο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν, αν:

i. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός

ii. τα κορίτσια θα είναι σε συνεχόμενα καθίσματα;

Λύση: (Ασκ. 3/41)

i. Δεν υπάρχει περιορισμός, επομένως τα 8 άτομα μπορούν να καθίσουν με όλους τους δυνατούς τρόπους. Μεταθέσεις 8 διαφορετικών ατόμων:

$$M_8 = 8! = 40320.$$

ii. Τα 5 κορίτσια θεωρούνται ως ένα «μπλοκ», οπότε έχουμε συνολικά 4 μονάδες: το μπλοκ των κοριτσιών και τα 3 αγόρια.

Οι 4 αυτές μονάδες μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά με 4! τρόπους, ενώ τα 5 κορίτσια μέσα στο μπλοκ μπορούν να αλλάξουν θέσεις μεταξύ τους με 5! τρόπους.

Άρα, με τη *Θεμελιώδη Αρχή Απαρίθμησης*:

$$4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880.$$

11. Δίνεται η λέξη *ΛΥΚΕΙΟ*.

i. Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης;

ii. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Λ;

iii. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Λ και τελειώνουν σε Ο;

iv. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με φωνήεν;

v. Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα συνεχόμενα;

Λύση: (Ασκ. 4/41)

Τα γράμματα είναι 6 και όλα διαφορετικά: $\{\Lambda, \Upsilon, K, E, I, O\}$.

i. Όλοι οι αναγραμματισμοί: $6! = 720$.

ii. Σταθεροποιούμε το Λ στην αρχή και διατάσσουμε τα υπόλοιπα 5 γράμματα: $5! = 120$.

iii. Αρχή Λ και τέλος Ο: διατάσσουμε τα 4 ενδιάμεσα γράμματα: $4! = 24$.

iv. Φωνήεντα: $\{\Upsilon, E, I, O\}$ (4 επιλογές) για την 1η θέση και έπειτα 5! για τα υπόλοιπα: $4 \cdot 5! = 4 \cdot 120 = 480$.

v. Τα 4 φωνήεντα να είναι συνεχόμενα: θεωρούμε τα φωνήεντα ως ένα «μπλοκ». Έτσι έχουμε 3 μονάδες [φωνήεντα], Λ, K που διατάσσονται με 3! τρόπους, ενώ μέσα στο μπλοκ τα φωνήεντα διατάσσονται με 4!:

$$3! \times 4! = 6 \times 24 = 144.$$

12. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν 9 παιδιά, το ένα δίπλα στο άλλο, αν:

i. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός

ii. ένα συγκεκριμένο παιδί θα βρίσκεται στο αριστερό άκρο

iii. δύο συγκεκριμένα παιδιά θα βρίσκονται στα δύο άκρα;

Λύση: (Ασκ. 5/41)

i. Διατάξεις 9 διαφορετικών παιδιών σε σειρά: $9!$.

ii. Σταθεροποιούμε το συγκεκριμένο παιδί στο αριστερό άκρο και διατάσσουμε τα υπόλοιπα 8: $8!$.

iii. Τοποθετούμε τα δύο συγκεκριμένα παιδιά στα άκρα με 2! τρόπους (ποιος πάει αριστερά/δεξιά) και διατάσσουμε τα υπόλοιπα 7: $2! \cdot 7!$.

13. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 6 παιδιά γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι; Σε πόσους από αυτούς τους τρόπους δύο συγκεκριμένα παιδιά δεν βρίσκονται το ένα πλάι στο άλλο;

Λύση: (Ασκ. 6/41)

Ο συνολικός αριθμός κυκλικών μεταθέσεων 6 διαφορετικών ατόμων δίνεται από τον τύπο:

$$K_6 = (6-1)! = 5! = 120.$$

Αν τα δύο συγκεκριμένα παιδιά θεωρηθούν ως ένα «μπλοκ», τότε μαζί με τα υπόλοιπα 4 παιδιά έχουμε 5 μονάδες που μπορούν να καθίσουν κυκλικά με:

$$(5-1)! = 4! = 24 \text{ τρόπους}.$$

Μέσα στο «μπλοκ» τα δύο παιδιά μπορούν να αλλάξουν θέση μεταξύ τους με 2! τρόπους. Άρα, οι τρόποι που *κάθονται δίπλα* είναι:

$$24 \times 2 = 48.$$

Συνεπώς, οι τρόποι που *δεν κάθονται πλάι πλάι* είναι:

$$120 - 48 = 72.$$

14. Δίνονται τα ψηφία $4, 4, 7, 7, 9$.

i. Να υπολογίσετε το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία αυτά.

ii. Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο ψηφίο;

Λύση: (Ασκ. 7/41)

i. Έχουμε 5 ψηφία με επαναλήψεις: τα 4 και 7 εμφανίζονται από 2 φορές. Ο συνολικός αριθμός *διαφορετικών* πενταψήφιων αριθμών είναι:

$$M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30.$$

ii. Οι αριθμοί που αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο ψηφίο:

- Με τον αριθμό 4: οι ενδιάμεσες 3 θέσεις περιέχουν $\{7,7,9\}$, άρα $\dfrac{3!}{2!} = 3$ τρόποι.
- Με τον αριθμό 7: οι ενδιάμεσες 3 θέσεις περιέχουν $\{4,4,9\}$, άρα $\dfrac{3!}{2!} = 3$ τρόποι.

Σύνολο:

$$3 + 3 = 6.$$

15. i. Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης *ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ* υπάρχουν.

ii. Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

α. έχουν τελευταίο γράμμα το Σ
β. δεν περιέχουν τη λέξη *ΑΓΩΓΟΣ*
γ. έχουν τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις.

Λύση: (Ασκ. 8/41)

Η λέξη *ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ* έχει 9 γράμματα, με επαναλήψεις: A δύο φορές και Γ δύο φορές.

i. Ο συνολικός αριθμός διαφορετικών αναγραμματισμών είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{2! \cdot 2!} = \frac{362880}{4} = 90720.$$

ii(α). Αν το τελευταίο γράμμα είναι Σ, τότε διατάσσονται τα υπόλοιπα 8 γράμματα:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40320}{4} = 10080.$$

ii(β). Η λέξη *ΑΓΩΓΟΣ* έχει 6 γράμματα και θεωρείται ένα «μπλοκ». Μαζί με τα υπόλοιπα 3 γράμματα (Π, R, A) έχουμε 4 μονάδες, όπου το A επαναλαμβάνεται δύο φορές:

$$\frac{4!}{2!} = 12.$$

Άρα, οι αναγραμματισμοί που *περιέχουν* τη λέξη *ΑΓΩΓΟΣ* είναι 12, επομένως αυτοί που *δεν την περιέχουν* είναι:

$$90720 - 12 = 90708.$$

ii(γ). Τα σύμφωνα είναι $\{\Pi, R, \Gamma, \Gamma, \Sigma\}$. Αν αυτά είναι συνεχόμενα, σχηματίζουν ένα «μπλοκ». Μαζί με τα 4 φωνήεντα (A, A, Ω, O) έχουμε συνολικά 5 μονάδες.

Οι 5 μονάδες διατάσσονται με $\frac{5!}{2!} = 60$ τρόπους (επειδή τα A επαναλαμβάνονται). Τα 5 σύμφωνα μέσα στο μπλοκ διατάσσονται με $\frac{5!}{2!} = 60$ τρόπους.

Άρα συνολικά:

$$60 \times 60 = 3600.$$

16. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Μια διάταξη ν διαφορετικών αντικειμένων ανά ν είναι μια μετάθεση ν διαφορετικών αντικειμένων.

ii. Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ είναι ίσο με κ^ν.

iii. Το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης ν διαφορετικών αντικειμένων σε σειρά είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης $\nu - 1$ από τα ν διαφορετικά αντικείμενα σε σειρά.

Λύση: (Ασκ. 1/49)

i. Σωστό. Όταν $\kappa = \nu$, η διάταξη ν αντικειμένων ανά ν ταυτίζεται με μετάθεση όλων των ν αντικειμένων, άρα $\Delta^\nu_\nu = \nu!$.

ii. Λάθος. Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων δίνεται από $\delta^\nu_\kappa = \nu^\kappa$, όχι από κ^ν.

iii. Σωστό. Εφόσον $\Delta^\nu_\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\nu)!} = \nu!$ και $\Delta^\nu_{\nu-1} = \frac{\nu!}{(\nu-(\nu-1))!} = \frac{\nu!}{1!} = \nu!$, τα δύο πλήθη είναι ίσα.

17. Ο προπονητής μιας ποδοσφαιρικής ομάδας θα χρησιμοποιήσει ένα σύστημα δύο επιθετικών, με τον έναν να παίζει δεξιά και τον άλλο αριστερά. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει δύο επιθετικούς, αν έχει διαθέσιμους 5 επιθετικούς που μπορούν να παίξουν και στις δύο θέσεις.

Λύση: (Ασκ. 2/49)

Οι θέσεις *δεξιά* και *αριστερά* είναι *διακεκριμένες*, άρα η επιλογή δύο παικτών γίνεται με *διατάξεις* 5 ανά 2:

$$\Delta_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Άρα υπάρχουν 20 διαφορετικοί τρόποι.

18. Σε ένα σχολείο ενδιαφέρονται 10 κορίτσια και 5 αγόρια για την θεατρική παράσταση. Στο σενάριο υπάρχουν 4 ρόλοι για κορίτσια και 2 ρόλοι για αγόρια. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διανεμηθούν οι ρόλοι στα παιδιά, αν:

i. κάθε παιδί θα επιλεγεί για έναν ακριβώς ρόλο

ii. ένα συγκεκριμένο κορίτσι θα επιλεγεί για τον ρόλο της πρωταγωνίστριας

iii. ένα συγκεκριμένο κορίτσι και ένα συγκεκριμένο αγόρι *δεν* θα επιλεγούν.

Λύση: (Ασκ. 3/49)

i. Οι ρόλοι είναι *διακεκριμένοι* (διαφορετικοί). Άρα για τα κορίτσια έχουμε απλές διατάξεις 10 ανά 4:

$$\Delta_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

Για τα αγόρια: $\Delta_2^5 = 5 \cdot 4$. Συνολικά:

$$\Delta_4^{10} \cdot \Delta_2^5 = (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)(5 \cdot 4) = 100800$$

ii. Η πρωταγωνίστρια είναι προκαθορισμένη (1 τρόπος). Απομένουν 3 γυναικείοι ρόλοι για 9 κορίτσια:

$$\Delta_3^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Για τα αγόρια: $\Delta_2^5 = 20$. Συνολικά:

$$504 \cdot 20 = 10080$$

iii. Αποκλείουμε ένα συγκεκριμένο κορίτσι και ένα συγκεκριμένο αγόρι. Άρα διαθέσιμα 9 κορίτσια για 4 ρόλους: $\Delta_4^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. Και 4 αγόρια για 2 ρόλους: $\Delta_2^4 = 4 \cdot 3 = 12$. Συνολικά:

$$3024 \cdot 12 = 36288$$

19. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, αν:

i. δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου

ii. επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου

iii. είναι μεγαλύτεροι από το 5000 και δεν επαναλαμβάνεται ψηφίο

iv. είναι άρτιοι, μεγαλύτεροι από το 5000, και δεν επαναλαμβάνεται ψηφίο.

Λύση: (Ασκ. 4/49)

i. Δεν επιτρέπεται επανάληψη. Για την πρώτη θέση (χιλιάδες) έχουμε 7 επιλογές, για τη δεύτερη 6, για την τρίτη 5, και για την τελευταία 4:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

ii. Αν επιτρέπεται επανάληψη, κάθε θέση έχει 7 επιλογές:

$$7^4 = 2401$$

iii. Για να είναι μεγαλύτεροι από το 5000, η πρώτη θέση (χιλιάδες) έχει 3 επιλογές: $5, 6, 7$. Χωρίς επανάληψη, για τις επόμενες θέσεις έχουμε $6, 5, 4$ επιλογές αντίστοιχα:

$$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$$

iv. Άρτιοι και μεγαλύτεροι από 5000 χωρίς επανάληψη. Το τελευταίο ψηφίο (μονάδες) πρέπει να είναι άρτιο: $2, 4, 6$ (3 επιλογές).

Για κάθε περίπτωση εξετάζουμε:

- Αν η μονάδα είναι 2 ή 4, η χιλιάδα πρέπει να είναι $5, 6, 7$ (3 επιλογές).
- Αν η μονάδα είναι 6, η χιλιάδα μπορεί να είναι $5, 7$ (2 επιλογές).

Άρα σύνολο επιλογών για χιλιάδες και μονάδες:

$$(2 \times 3) + (1 \times 2) = 8$$

Για τις δύο ενδιάμεσες θέσεις απομένουν 5 και 4 επιλογές. Τελικός αριθμός:

$$8 \cdot 5 \cdot 4 = 160$$

20. Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε δεκαψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας και τα 10 ψηφία από μία φορά μόνο το καθένα, έτσι ώστε το πρώτο ψηφίο να είναι *μεγαλύτερο από το* 1 και το τελευταίο *μικρότερο από το* 8;

Λύση: (Ασκ. 5/49)

Πρώτο ψηφίο από $\{2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow 8$ επιλογές. Τελευταίο από $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, χωρίς επανάληψη. Διακρίνουμε:

$$\begin{array}{ll} \text{αν 1ο} \in \{2,3,4,5,6,7\} \text{ (6 περιπτώσεις)}, & \text{τότε το 10ο έχει 7 επιλογές;} \\ \text{αν 1ο} \in \{8,9\} \text{ (2 περιπτώσεις)}, & \text{τότε το 10ο έχει 8 επιλογές.} \end{array}$$

Άρα τα άκρα τοποθετούνται με $6 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 42 + 16 = 58$ τρόπους. Τα υπόλοιπα 8 ψηφία τοποθετούνται στις ενδιάμεσες θέσεις με 8! τρόπους.

$$58 \cdot 8! = 58 \cdot 40320 = 2\,338\,560$$

21. Ένας κωδικός ασφαλείας σχηματίζεται από 1 *ή* 2 αριθμητικά ψηφία που ακολουθούνται από 4 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Πόσους διαφορετικούς κωδικούς μπορούμε να σχηματίσουμε, αν:

i. δεν επιτρέπεται η επανάληψη ούτε των αριθμητικών ψηφίων, ούτε των γραμμάτων

ii. επιτρέπεται η επανάληψη των αριθμητικών ψηφίων, αλλά όχι των γραμμάτων

iii. επιτρέπεται η επανάληψη των γραμμάτων, αλλά όχι των αριθμητικών ψηφίων

iv. επιτρέπεται η επανάληψη *και* των γραμμάτων *και* των αριθμητικών ψηφίων;

Λύση: (Ασκ. 6/50)

Θεωρούμε 10 ψηφία και 24 γράμματα. Ο κωδικός έχει είτε 1 είτε 2 ψηφία (διακεκριμένες θέσεις) και κατόπιν 4 γράμματα.

i. Χωρίς επανάληψη σε καμία ομάδα:

$$10 \cdot (24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21) \ + \ (10 \cdot 9) \cdot (24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21) = (10 + 90) \cdot 255{,}024 = 25{,}502{,}400$$

ii. Επανάληψη *ψηφίων* επιτρέπεται, *γράμματα* χωρίς επανάληψη:

$$(10 + 10^2) \cdot (24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21) = 110 \cdot 255{,}024 = 28{,}052{,}640$$

iii. Επανάληψη *γραμμάτων* επιτρέπεται: $24^4 = 331{,}776$. Ψηφία χωρίς επανάληψη:

$$(10 + 10 \cdot 9) \cdot 24^4 = 100 \cdot 331{,}776 = 33{,}177{,}600$$

iv. Επιτρέπεται επανάληψη και στα ψηφία και στα γράμματα:

$$(10 + 10^2) \cdot 24^4 = 110 \cdot 331{,}776 = 36{,}495{,}360$$

22. Δέκα τουρίστες πρόκειται να μπουν τυχαία σε 3 λεωφορεία. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν οι 10 τουρίστες στα 3 λεωφορεία, αν επιτρέπεται να μπουν όλοι στο ίδιο λεωφορείο.

Λύση: (Ασκ. 7/50)

Κάθε τουρίστας επιλέγει ανεξάρτητα ένα από τα 3 *διακεκριμένα* λεωφορεία. Άρα, για καθέναν υπάρχουν 3 επιλογές και συνολικά:

$$\delta_{10}^3 = 3^{10} = 59\,049.$$

23. Μια εξέταση πολλαπλής επιλογής περιέχει 10 ερωτήσεις, με 5 πιθανές απαντήσεις η κάθε μία. Ένας μαθητής απαντά στην τύχη σε όλες τις ερωτήσεις. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι απαντήσεων υπάρχουν;

Λύση: (Ασκ. 8/50)

Για κάθε ερώτηση υπάρχουν 5 επιλογές απάντησης. Επειδή υπάρχουν 10 ερωτήσεις και κάθε επιλογή είναι ανεξάρτητη, ο συνολικός αριθμός διαφορετικών τρόπων απαντήσεων είναι:

$$5^{10} = 9\,765\,625.$$

24. Να υπολογίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων αριθμών μικρότερων του 1000, έτσι ώστε το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου ψηφίου να είναι 13.

Λύση: (Ασκ. 9/50)

Οι αριθμοί μικρότεροι του 1000 είναι οι τριψήφιοι (από 100 έως 999). Έστω $\overline{ABC}$ ο αριθμός, με A, B, C τα ψηφία του. Η συνθήκη είναι:

$$A + C = 13.$$

Τα ψηφία A και C είναι μεταξύ 0 και 9, ενώ $A \neq 0$.

Οι δυνατοί συνδυασμοί (A, C) που ικανοποιούν $A + C = 13$ είναι:

$$(4,9),\ (5,8),\ (6,7),\ (7,6),\ (8,5),\ (9,4).$$

Άρα υπάρχουν 6 δυνατά ζεύγη (A, C). Το μεσαίο ψηφίο B μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις 10 τιμές $(0-9)$.

Συνολικά:

$$6 \times 10 = 60.$$

25. Να υπολογίσετε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών, ώστε το πρώτο τους ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το δεύτερο και το δεύτερο τους ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το τρίτο.

Λύση: (Ασκ. 10/50)

Αν θεωρήσουμε τα τρία ψηφία ως $A > B > C$, τότε πρέπει να είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να επιλεγούν από το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Για κάθε επιλογή 3 διαφορετικών ψηφίων, υπάρχει ακριβώς *ένας* τρόπος να τα τοποθετήσουμε φθίνουσα (ώστε $A > B > C$).

Άρα το πλήθος αυτών των αριθμών είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών 3 διαφορετικών ψηφίων από τα 10:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Όμως, το πρώτο ψηφίο A δεν μπορεί να είναι 0, γιατί τότε ο αριθμός δεν θα ήταν τριψήφιος.

Αν το 0 περιλαμβάνεται στα τρία ψηφία, τότε το A θα είναι το μεγαλύτερο από τα υπόλοιπα δύο, και το 0 θα είναι το C. Αυτοί οι αριθμοί είναι αποδεκτοί, αφού το $A > 0$.

Συνεπώς, *όλοι* οι συνδυασμοί 3 διαφορετικών ψηφίων από τα 10 οδηγούν σε έγκυρους τριψήφιους αριθμούς.

$$120 \text{ τριψήφιοι αριθμοί.}$$

26. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Το πλήθος των συνδυασμών 9 διαφορετικών αντικειμένων ανά 2 είναι το ίδιο με το πλήθος των συνδυασμών 9 διαφορετικών αντικειμένων ανά 7.

ii. Το πλήθος των διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ είναι ίσο με $\kappa!$ φορές το πλήθος των συνδυασμών ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ.

Λύση: (Ασκ. 1/56)

i. Σωστό. Ισχύει ότι $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$. Άρα $\binom{9}{2} = \binom{9}{9-2} = \binom{9}{7}$.

ii. Σωστό. Από τον ορισμό των διατάξεων και συνδυασμών έχουμε:

$$\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} \quad \text{και} \quad \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}.$$

Άρα:

$$\Delta_\kappa^\nu = \kappa! \cdot \binom{\nu}{\kappa}.$$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\binom{\nu}{\nu-2} = 15$

ii. $\binom{\nu+5}{\nu+2} + \binom{\nu+4}{3} = 6(\nu+4)$

Λύση: (Ασκ. 2/56)

i. Ισχύει ότι $\binom{\nu}{\nu-2} = \binom{\nu}{2}$. Άρα:

$$\binom{\nu}{2} = 15 \Rightarrow \frac{\nu(\nu-1)}{2} = 15 \Rightarrow \nu(\nu-1) = 30.$$

Λύνοντας:

$$\nu^2 - \nu - 30 = 0 \Rightarrow (\nu-6)(\nu+5) = 0 \Rightarrow \nu = 6.$$

ii. Από την ιδιότητα $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ προκύπτει:

$$\binom{\nu+5}{\nu+2} = \binom{\nu+5}{3}.$$

Άρα:

$$\binom{\nu+5}{3} + \binom{\nu+4}{3} = 6(\nu+4).$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Pascal:

$$\binom{\nu+5}{3} = \binom{\nu+4}{3} + \binom{\nu+4}{2}.$$

Επομένως:

$$(\binom{\nu+4}{3} + \binom{\nu+4}{2}) + \binom{\nu+4}{3} = 6(\nu+4) \Rightarrow 2\binom{\nu+4}{3} + \binom{\nu+4}{2} = 6(\nu+4).$$

Αναπτύσσουμε:

$$2 \cdot \frac{(\nu+4)(\nu+3)(\nu+2)}{6} + \frac{(\nu+4)(\nu+3)}{2} = 6(\nu+4).$$

Απλοποιούμε:

$$(\nu+4)\left[\frac{(\nu+3)(\nu+2)}{3} + \frac{(\nu+3)}{2}\right] = 6(\nu+4).$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $(\nu+4)$ (εφόσον $\nu \neq -4$):

$$\frac{(\nu+3)(\nu+2)}{3} + \frac{(\nu+3)}{2} = 6.$$

Παίρνουμε κοινό παρονομαστή 6:

$$(\nu+3)\left(\frac{2(\nu+2)+3}{6}\right) = 6.$$

Πολλαπλασιάζουμε επί 6:

$$(\nu+3)(2\nu+7) = 36.$$

Αναπτύσσουμε:

$$2\nu^2 + 13\nu + 21 = 36 \Rightarrow 2\nu^2 + 13\nu - 15 = 0.$$

Λύνοντας την εξίσωση:

$$\nu = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{4} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{-13 \pm 17}{4}.$$

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = -7.5 \implies \nu = 1$$

28. Πόσες χειραψίες μπορούν να ανταλλάξουν μεταξύ τους 9 άτομα, αν όλοι κάνουν μεταξύ τους χειραψία από μία φορά;

Λύση: (Ασκ. 3/56)

Κάθε χειραψία πραγματοποιείται ανάμεσα σε *δύο* διαφορετικά άτομα. Άρα το πλήθος των χειραψιών είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων επιλογής 2 ατόμων από τα 9:

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

29. Σε μια υπηρεσία πρόκειται να προσληφθούν 5 από 10 υποψηφίους. Αν οι υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και 3 γυναίκες, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η πρόσληψη, αν θα προσληφθούν:

i. 3 άνδρες και 2 γυναίκες

ii. τουλάχιστον 3 άνδρες

iii. το πολύ 2 γυναίκες;

Λύση: (Ασκ. 4/56)

i. Επιλέγουμε 3 άνδρες από 7 και 2 γυναίκες από 3:

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2} = 35 \cdot 3 = 105.$$

ii. «Τουλάχιστον 3 άνδρες» σημαίνει ότι μπορεί να έχουμε:

$$(3 \text{ άνδρες},\ 2 \text{ γυναίκες}) \qquad (4 \text{ άνδρες},\ 1 \text{ γυναίκα}) \qquad (5 \text{ άνδρες},\ 0 \text{ γυναίκες}).$$

Άρα:

$$\binom{7}{3}\binom{3}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{1} + \binom{7}{5}\binom{3}{0} = (35 \cdot 3) + (35 \cdot 3) + (21 \cdot 1) = 105 + 105 + 21 = 231.$$

iii. «Το πολύ 2 γυναίκες» σημαίνει 0, 1, ή 2 γυναίκες:

$$\binom{7}{5}\binom{3}{0} + \binom{7}{4}\binom{3}{1} + \binom{7}{3}\binom{3}{2} = (21 \cdot 1) + (35 \cdot 3) + (35 \cdot 3) = 21 + 105 + 105 = 231.$$

30. Πενταμελής επιτροπή θα σχηματιστεί από μια ομάδα ατόμων, η οποία αποτελείται από 9 άνδρες και 7 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η συγκεκριμένη επιτροπή, αν:

i. δεν υπάρχει περιορισμός

ii. μια συγκεκριμένη γυναίκα θα συμπεριλαμβάνεται στην επιτροπή

iii. θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 άνδρες και 2 γυναίκες

iv. θα υπάρχουν το πολύ 2 άντρες;

Λύση: (Ασκ. 5/56)

i. Η επιτροπή σχηματίζεται από 16 άτομα συνολικά $(9+7)$, χωρίς περιορισμό:

$$\binom{16}{5} = 4368.$$

ii. Μια συγκεκριμένη γυναίκα είναι ήδη μέλος, άρα απομένουν 15 άτομα (8 άνδρες + 7 γυναίκες) για να επιλεγούν ακόμη 4:

$$\binom{15}{4} = 1365.$$

iii. ≪Τουλάχιστον 2 άνδρες και 2 γυναίκες≫ σημαίνει ότι οι δυνατοί συνδυασμοί είναι:

$$(2 \text{ άνδρες},\ 3 \text{ γυναίκες}) \qquad (3 \text{ άνδρες},\ 2 \text{ γυναίκες}).$$

Άρα:

$$\binom{9}{2}\binom{7}{3} + \binom{9}{3}\binom{7}{2} = (36 \cdot 35) + (84 \cdot 21) = 1260 + 1764 = 3024.$$

iv. ≪Το πολύ 2 άνδρες≫ σημαίνει 0, 1, ή 2 άνδρες:

$$\binom{9}{0}\binom{7}{5} + \binom{9}{1}\binom{7}{4} + \binom{9}{2}\binom{7}{3} = (1 \cdot 21) + (9 \cdot 35) + (36 \cdot 35)$$
$$= 21 + 315 + 1260 = 1596.$$

31. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 10 φορές. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν 7 φορές «κορώνα» και 3 φορές «γράμματα»;

Λύση: (Ασκ. 6/56)

Η σειρά των ρίψεων έχει συνολικά 10 θέσεις. Πρέπει να επιλέξουμε ποιες από αυτές τις 10 θέσεις θα αντιστοιχούν σε «κορώνα» (ή ισοδύναμα σε «γράμματα»).

Άρα, ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων είναι ο αριθμός των συνδυασμών:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

32. Πόσα υποσύνολα με πληθικό αριθμό 3 υπάρχουν σε ένα σύνολο με 11 στοιχεία;

Λύση: (Ασκ. 7/56)

Κάθε υποσύνολο με 3 στοιχεία προκύπτει επιλέγοντας 3 από τα 11 διαφορετικά στοιχεία του συνόλου. Ο αριθμός αυτών των υποσυνόλων δίνεται από:

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

33. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

i. Πόσα υποσύνολα υπάρχουν με πληθικό αριθμό 4;

ii. Σε πόσα από αυτά τα υποσύνολα περιέχεται το 1;

iii. Σε πόσα από αυτά δεν περιέχεται το 1;

Λύση: (Ασκ. 8/56)

i. Υπάρχουν συνολικά 7 στοιχεία. Ο αριθμός των υποσυνόλων με 4 στοιχεία είναι:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

ii. Αν το 1 περιλαμβάνεται, απομένουν 6 στοιχεία από τα οποία επιλέγουμε τα υπόλοιπα 3:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20.$$

iii. Αν το 1 *δεν* περιλαμβάνεται, επιλέγουμε 4 από τα 6 υπόλοιπα στοιχεία:

$$\binom{6}{4} = 15.$$

34. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Πάνω στην ε_1 υπάρχουν τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και πάνω στην ε_2 υπάρχουν τα σημεία Z, H, Θ, I. Να υπολογίσετε το πλήθος των διαφορετικών:

i. τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές σημεία που δίνονται από τις πιο πάνω ευθείες

ii. τετραπλεύρων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές σημεία που δίνονται από τις πιο πάνω ευθείες.

Λύση: (Ασκ. 9/57)

Συνολικά σημεία: $5 + 4 = 9$.

i. Για να σχηματιστεί τρίγωνο, πρέπει να επιλέξουμε 3 μη συνευθειακά σημεία. Αν όλα τα σημεία ήταν συνευθειακά, δεν θα σχηματιζόταν τρίγωνο.

Ο συνολικός αριθμός τριγώνων είναι:

$$\binom{9}{3} - \binom{5}{3} - \binom{4}{3} = 84 - 10 - 4 = 70.$$

ii. Για τετράπλευρο, πρέπει να επιλεγούν 4 σημεία που δεν είναι όλα πάνω στην ίδια ευθεία. Άρα:

$$\binom{9}{4} - \binom{5}{4} - \binom{4}{4} = 126 - 5 - 1 = 120.$$

35. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ (οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 30). Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν τρεις διαφορετικοί αριθμοί από το σύνολο A, έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι διαιρετό με το 3;

Λύση: (Ασκ. 10/57)

Οι φυσικοί αριθμοί $1–30$ όταν διαιρεθούν με 3 αφήνουν υπόλοιπα $0, 1$, ή 2. Υπάρχουν 10 αριθμοί με κάθε υπόλοιπο:

$$0: \ 3, 6, 9, \ldots, 30 \quad (10 \text{ αριθμοί})$$

$$1:\ 1,4,7,\dots,28 \quad (10 \text{ αριθμοί})$$
$$2:\ 2,5,8,\dots,29 \quad (10 \text{ αριθμοί})$$

Για να είναι το άθροισμα διαιρετό με 3, τα υπόλοιπα πρέπει να δίνουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 3. Οι δυνατοί συνδυασμοί υπολοίπων είναι:

$$(0,0,0),\quad (1,1,1),\quad (2,2,2),\quad (0,1,2).$$

Για κάθε περίπτωση:

$$\binom{10}{3}+\binom{10}{3}+\binom{10}{3}+10\cdot 10\cdot 10 = 3\cdot 120+1000 = 1360.$$

Άρα, υπάρχουν 1360 διαφορετικοί τρόποι.

36. Αν $\nu,\kappa\in\mathbb{N}$, να δείξετε ότι:

i. $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu-1}{\kappa-1}+\binom{\nu-1}{\kappa}, \quad \nu>\kappa$

ii. $\binom{\nu}{\kappa}=\dfrac{\nu}{\kappa}\binom{\nu-1}{\kappa-1}, \quad \nu\geq\kappa$

Λύση: (Ασκ. 11/57)

i. Από τον ορισμό του συνδυασμού:

$$\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}.$$

Υπολογίζουμε:

$$\binom{\nu-1}{\kappa-1}+\binom{\nu-1}{\kappa}=\frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!\,(\nu-\kappa)!}+\frac{(\nu-1)!}{\kappa!\,(\nu-\kappa-1)!}.$$

Φέρνουμε σε κοινό παρονομαστή:

$$=\frac{(\nu-1)!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}\big[\kappa+(\nu-\kappa)\big]=\frac{(\nu-1)!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}\cdot\nu=\frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}=\binom{\nu}{\kappa}.$$

ii. Από τον ορισμό του συνδυασμού:

$$\binom{\nu-1}{\kappa-1}=\frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!\,(\nu-\kappa)!}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{\nu}{\kappa}$:

$$\frac{\nu}{\kappa}\binom{\nu-1}{\kappa-1} = \frac{\nu}{\kappa} \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\kappa-1)!\,(\nu-\kappa)!} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!} = \binom{\nu}{\kappa}.$$

37. Πόσους τετραψήφιους περιττούς ακέραιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε;

Λύση: (Ασκ. 1/58)

Για να είναι ο αριθμός *τετραψήφιος*, το πρώτο ψηφίο (χιλιάδες) δεν μπορεί να είναι 0. Για να είναι *περιττός*, το τελευταίο ψηφίο πρέπει να είναι ένα από τα $1, 3, 5, 7, 9$, δηλαδή έχουμε 5 επιλογές.

Αφού επιλέξουμε το τελευταίο ψηφίο, για την πρώτη θέση (χιλιάδες) έχουμε 8 επιλογές, γιατί μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε από τα $1-9$, εκτός από αυτό που χρησιμοποιήθηκε στο τέλος.

Για τη δεύτερη θέση έχουμε 8 διαθέσιμα ψηφία (10 συνολικά μείον τα 2 που ήδη χρησιμοποιήθηκαν), και για την τρίτη θέση 7 διαθέσιμα.

Άρα το πλήθος των ζητούμενων αριθμών είναι:

$$5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240.$$

38. Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μεγαλύτερους του 21300 μπορούμε να σχηματίσουμε με διαφορετικά ψηφία από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

Λύση: (Ασκ. 2/58)

Όλοι οι πενταψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται από τα ψηφία $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ με διαφορετικά ψηφία είναι $5! = 120$.

Θέλουμε όσους είναι *μεγαλύτεροι του* 21300.

<u>Περίπτωση 1:</u> Το πρώτο ψηφίο είναι $3, 4, 5$.

Κάθε τέτοια επιλογή δίνει $4!$ αριθμούς, άρα:

$$3 \times 4! = 3 \times 24 = 72.$$

<u>Περίπτωση 2:</u> Το πρώτο ψηφίο είναι 2.

Αν το δεύτερο ψηφίο είναι 1, έχουμε 21___. Για να είναι ο αριθμός μεγαλύτερος του 21300, το τρίτο ψηφίο πρέπει να είναι $3, 4$ ή 5:

- Αν το τρίτο ψηφίο είναι 3: τα υπόλοιπα $4, 5$ μπορούν να μπουν με $2!$ τρόπους $\rightarrow 2$ αριθμοί.
- Αν το τρίτο ψηφίο είναι 4 ή 5: κάθε περίπτωση δίνει $2!$ αριθμούς $\rightarrow 2 \times 2 = 4$ αριθμοί.

Σύνολο για δεύτερο ψηφίο 1: $2 + 4 = 6$.

Αν το δεύτερο ψηφίο είναι $3, 4$ ή 5, τότε ο αριθμός είναι σίγουρα μεγαλύτερος του 21300, οπότε για κάθε τέτοιο έχουμε $3!$ δυνατούς σχηματισμούς:

$$3 \times 3! = 18.$$

Σύνολο για πρώτο ψηφίο 2: $6 + 18 = 24$.

Συνολικά:

$$72 + 24 = 96.$$

39. Ένας ελαιοχρωματιστής θα βάψει τους τέσσερις τοίχους σε ένα δωμάτιο. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να βάψει το δωμάτιο, αν οι δύο τοίχοι πρέπει να είναι $\mu\pi\lambda\epsilon$ και οι άλλοι δύο *πράσινοι.*

Λύση: (Ασκ. 3/58)

Για να είναι δύο τοίχοι μπλε και δύο πράσινοι, αρκεί να επιλέξουμε ποιοι δύο από τους 4 τοίχους θα βαφτούν μπλε. Οι υπόλοιποι δύο θα βαφτούν πράσινοι.

Το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

40. Ένας βιβλιοθηκάριος θα κωδικοποιήσει τα 60,000 βιβλία μιας βιβλιοθήκης με τετραψήφιους κωδικούς. Τα πρώτα 2 ψηφία θα είναι γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και τα άλλα 2 ψηφία θα είναι αριθμοί. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν αρκετοί κωδικοί για την κωδικοποίηση των βιβλίων.

Λύση: (Ασκ. 4/58)

Το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 γράμματα. Άρα για τα δύο πρώτα γράμματα έχουμε:

$$24 \times 24 = 24^2 = 576 \text{ δυνατούς συνδυασμούς.}$$

Για τα δύο αριθμητικά ψηφία (από 0 έως 9) έχουμε:

$$10 \times 10 = 10^2 = 100 \text{ δυνατούς συνδυασμούς.}$$

Συνολικά οι διαφορετικοί τετραψήφιοι κωδικοί είναι:

$$24^2 \times 10^2 = 576 \times 100 = 57600$$

Συμπέρασμα: Επειδή $57{,}600 > 60{,}000$ είναι *λίγο μικρότερο*, άρα δεν επαρκούν οι κωδικοί για την κωδικοποίηση όλων των βιβλίων.

41. Πέντε ανδρόγυνα θα καθίσουν τυχαία γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι σύζυγοι να καθίσουν ο ένας πλάι στον άλλο;

Λύση: (Ασκ. 5/58)

Θεωρούμε κάθε ζευγάρι ως μία ενιαία «μονάδα». Έτσι, έχουμε συνολικά 5 μονάδες που θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι.

Οι 5 μονάδες μπορούν να τοποθετηθούν κυκλικά με:

$$(5-1)! = 4! = 24 \text{ τρόπους.}$$

Μέσα σε κάθε ζευγάρι οι δύο σύζυγοι μπορούν να αλλάξουν θέση μεταξύ τους με 2 τρόπους. Όμως, τα ζευγάρια θεωρούνται πανομοιότυποι (όμοια ανδρόγυνα), οπότε λαμβάνουμε υπόψη έναν μόνο παράγοντα 2 για τη διάταξη των δύο ατόμων.

Άρα συνολικά:

$$4! \times 2 = 24 \times 2 = 48.$$

42. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3\binom{2\nu}{3} = 22\,\Delta_2^{\nu}.$$

Λύση: (Ασκ. 6/58)

Αντικαθιστούμε τους τύπους:

$$\Delta_2^{\nu} = \frac{\nu!}{(\nu-2)!} = \nu(\nu-1), \quad \binom{2\nu}{3} = \frac{(2\nu)!}{3!(2\nu-3)!} = \frac{(2\nu)(2\nu-1)(2\nu-2)}{6}.$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$3 \cdot \frac{(2\nu)(2\nu-1)(2\nu-2)}{6} = 22 \cdot \nu(\nu-1).$$

Απλοποιούμε:

$$\frac{(2\nu)(2\nu-1)(2\nu-2)}{2} = 22\nu(\nu-1).$$

Διαίρουμε και τα δύο μέλη με $\nu(\nu-1)$, με $\nu > 1$:

$$\frac{2(2\nu-1)(\nu-1)}{2(\nu-1)} = 22 \Rightarrow (2\nu-1) = 11.$$

Άρα:

$$2\nu - 1 = 11 \Rightarrow 2\nu = 12 \Rightarrow \nu = 6.$$

43. Μια εταιρεία εργοδοτεί 8 άντρες και 12 γυναίκες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια επιτροπή 5 ατόμων από τους υπαλλήλους της εταιρείας, αν σε αυτήν πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον ένας άντρας και τουλάχιστον μία γυναίκα;

Λύση: (Ασκ. 7/58)

Ο συνολικός αριθμός τρόπων για να επιλέξουμε 5 άτομα από τους 20 (8+12) υπαλλήλους είναι:

$$\binom{20}{5}.$$

Πρέπει να αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη:
— όλες γυναίκες (5 από 12): $\binom{12}{5}$
— όλοι άντρες (5 από 8): $\binom{8}{5}$

Άρα,

$$\binom{20}{5} - \binom{12}{5} - \binom{8}{5} = 15504 - 792 - 56 = 14656.$$

44. Δίνονται τα γράμματα $A, A, A, B, \Gamma, \Gamma, \Delta, E, Z$.

i. Πόσοι συνδυασμοί τριών γραμμάτων μπορούν να γίνουν με αυτά;

ii. Πόσες λέξεις τριών γραμμάτων μπορούν να γίνουν με αυτά;

Λύση: (Ασκ. 8/58)

i. Συνδυασμοί (χωρίς σειρά επιλογής).
Έχουμε διαθέσιμα 9 γράμματα με επαναλήψεις:

$$A(3),\ \Gamma(2),\ B(1),\ \Delta(1),\ E(1),\ Z(1).$$

Χωρίζουμε σε περιπτώσεις:

– Τρία ίδια γράμματα: μόνο $AAA \Rightarrow 1$ τρόπος.
– Δύο ίδια και ένα διαφορετικό:

$$AAx,\ x \in \{\Gamma, B, \Delta, E, Z\} \Rightarrow 5 \text{ τρόποι}, \quad \Gamma\Gamma x,\ x \in \{A, B, \Delta, E, Z\} \Rightarrow 5 \text{ τρόποι}.$$

Σύνολο 10 τρόποι.
– Τρία διαφορετικά γράμματα:

$$\binom{6}{3} = 20.$$

Άρα συνολικά:

$$1 + 10 + 20 = 31 \text{ συνδυασμοί}.$$

ii. Λέξεις (με σειρά).
Εξετάζουμε πάλι τις ίδιες περιπτώσεις:

– Τρία ίδια: $AAA \Rightarrow 1$ λέξη.
– Δύο ίδια και ένα διαφορετικό:

$$AAx \text{ ή } \Gamma\Gamma x \Rightarrow 5 + 5 = 10 \text{ επιλογές, καθεμία με } \frac{3!}{2!} = 3 \text{ διατάξεις}.$$

Άρα $10 \times 3 = 30$ λέξεις.
– Τρία διαφορετικά:

$$\binom{6}{3} = 20 \text{ επιλογές, κάθε μία με } 3! = 6 \text{ διατάξεις} \Rightarrow 20 \times 6 = 120.$$

Συνολικά:

$$1 + 30 + 120 = 151 \text{ λέξεις}.$$

45. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 12 διαφορετικά δώρα εξίσου:

i. σε 3 παιδιά;

ii. σε 4 παιδιά;

Λύση: (Ασκ. 9/58)

i. Σε 3 παιδιά.
Κάθε παιδί θα πάρει $\frac{12}{3} = 4$ δώρα.
Ο αριθμός των τρόπων για να χωρίσουμε 12 διαφορετικά δώρα σε 3 ομάδες των 4 είναι:

$$\frac{12!}{(4!)^3}.$$

Επειδή τα παιδιά είναι διακεκριμένα, κάθε κατανομή μπορεί να γίνει με 3! τρόπους. Άρα:

$$N_1 = \frac{12!}{(4!)^3} = 34\,650.$$

ii. Σε 4 παιδιά.
Κάθε παιδί θα πάρει $\frac{12}{4} = 3$ δώρα.
Ανάλογα, ο αριθμός των τρόπων είναι:

$$N_2 = \frac{12!}{(3!)^4} = 369\,600.$$

46. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια ομάδα ποδοσφαίρου με 11 άτομα και μια ομάδα καλαθοσφαίρας με 5 άτομα από μια τάξη 25 μαθητών, αν:

i. κανένας μαθητής δεν μπορεί να βρίσκεται και στις δύο ομάδες;
ii. οποιοσδήποτε μαθητής μπορεί να βρίσκεται και στις δύο ομάδες;
iii. το πολύ ένας μαθητής μπορεί να βρίσκεται και στις δύο ομάδες;

Λύση: (Ασκ. 10/59)

i. Καμία επικάλυψη (διακριτές ομάδες).
Πρώτα επιλέγουμε τους 11 για ποδόσφαιρο, έπειτα 5 από τους υπόλοιπους 14 για καλαθοσφαίριση:

$$N_i = \binom{25}{11}\binom{14}{5} = 8\,923\,714\,800.$$

ii. Επιτρέπεται οποιαδήποτε επικάλυψη.
Οι δύο επιλογές είναι ανεξάρτητες:

$$N_{ii} = \binom{25}{11}\binom{25}{5} = 236\,821\,662\,000.$$

iii. Το πολύ ένας κοινός μαθητής.
Περίπτωση $k = 0$ (καμία επικάλυψη): $\binom{25}{11}\binom{14}{5}$.
Περίπτωση $k = 1$: διαλέγουμε τον κοινό μαθητή $\binom{25}{1}$, έπειτα 10 ακόμη για ποδόσφαιρο από τους 24: $\binom{24}{10}$, και τέλος 4 για καλαθοσφαίριση από τους 14 που απέμειναν: $\binom{14}{4}$.

$$N_{iii} = \binom{25}{11}\binom{14}{5} + \binom{25}{1}\binom{24}{10}\binom{14}{4} = 58\,004\,146\,200.$$

47. Ένας ειδικευόμενος γιατρός πρόκειται να εργαστεί σε ένα νοσοκομείο για πέντε ημέρες κατά τον μήνα Μάρτιο. Η διεύθυνση του νοσοκομείου δεν επιτρέπει στον ειδικευόμενο γιατρό να εργάζεται δύο συνεχόμενες ημέρες στο νοσοκομείο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο γιατρός να επιλέξει τις πέντε ημέρες που θα εργαστεί στο νοσοκομείο;

Λύση: (Ασκ. 11/59)

Ο Μάρτιος έχει 31 ημέρες. Πρέπει να επιλεγούν 5 ημέρες χωρίς καμία να είναι συνεχόμενη.

Αν τοποθετήσουμε $x_1, x_2, \ldots, x_5$ τις εργάσιμες ημέρες και $y_1, y_2, \ldots, y_6$ τα διαστήματα ανάμεσα (και στα άκρα), τότε:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 31 - 5 = 26.$$

Επειδή μεταξύ δύο εργάσιμων ημερών πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα κενό, θέτουμε:

$$y_2', y_3', y_4', y_5' \geq 1, \quad y_1', y_6' \geq 0.$$

Άρα αφαιρούμε 4 υποχρεωτικά κενά:

$$y_1' + y_2' + y_3' + y_4' + y_5' + y_6' = 22.$$

Ο αριθμός των λύσεων είναι:

$$\binom{22+6-1}{6-1} = \binom{27}{5} = 80\,730.$$

Άρα ο γιατρός μπορεί να επιλέξει τις ημέρες του με 80 730 διαφορετικούς τρόπους.

48. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 9 όμοιες μπάλες σε 3 διαφορετικά κουτιά A, B και Γ, αν:

i. κάποιο ή κάποια κουτιά μπορεί να μείνουν άδεια;
ii. το κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα;

Λύση: (Ασκ. 12/59)

i. Κάποια κουτιά μπορεί να είναι άδεια.
Θεωρούμε ότι x_1, x_2, x_3 είναι οι μπάλες στα κουτιά A, B, Γ. Τότε:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9, \quad x_i \geq 0.$$

Ο αριθμός των λύσεων δίνεται από τον τύπο των διανομών:

$$\binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55.$$

ii. Κανένα κουτί δεν είναι άδειο.
Τώρα $x_1, x_2, x_3 \geq 1$. Θέτουμε $x_i' = x_i - 1$, οπότε:

$$x_1' + x_2' + x_3' = 6.$$

Άρα:

$$\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28.$$

49. Να αποδείξετε ότι κάθε σύνολο με ν στοιχεία έχει 2^ν υποσύνολα.

i. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \cdots + \binom{\nu}{\nu} = 2^\nu.$$

Λύση: (Ασκ. 1/60)

Έστω A σύνολο με ν στοιχεία. Κάθε στοιχείο του A μπορεί είτε να ανήκει είτε να μην ανήκει σε ένα υποσύνολο του A.
Άρα για κάθε στοιχείο υπάρχουν 2 δυνατές επιλογές (να περιλαμβάνεται ή όχι).

Επειδή οι επιλογές είναι ανεξάρτητες για τα ν στοιχεία, ο συνολικός αριθμός υποσυνόλων είναι:

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^\nu.$$

ii. Ο αριθμός των υποσυνόλων με $0, 1, 2, \ldots, \nu$ στοιχεία είναι αντίστοιχα:

$$\binom{\nu}{0},\ \binom{\nu}{1},\ \binom{\nu}{2},\ \ldots,\ \binom{\nu}{\nu}.$$

Αθροίζοντας όλους αυτούς τους αριθμούς, βρίσκουμε τον συνολικό αριθμό όλων των υποσυνόλων του συνόλου:

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \cdots + \binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu}.$$

Άρα η ταυτότητα αποδείχθηκε.

50. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 θετικούς ακέραιους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ από το σύνολο

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 499, 500\},$$

έτσι ώστε οι ακέραιοι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ να αποτελούν όρους αύξουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο θετικό ακέραιο αριθμό;

Λύση: (Ασκ. 14/58)

Οι τέσσερις όροι μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $r > 0$ είναι:

$$\alpha,\ \alpha r,\ \alpha r^2,\ \alpha r^3.$$

Όλοι πρέπει να είναι ακέραιοι και μικρότεροι ή ίσοι του 500. Άρα πρέπει να ισχύει:

$$\alpha r^3 \le 500.$$

Για κάθε ακέραιο λόγο r, μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυνατές τιμές του α.

Για $r = 1$: Όλοι οι όροι είναι ίσοι $\implies$ όχι αύξουσα πρόοδος $\implies$ απορρίπτεται.

Για $r = 2$: $\alpha \le \dfrac{500}{8} = 62$. Άρα α παίρνει 62 τιμές.

Για $r = 3$: $\alpha \le \dfrac{500}{27} \Rightarrow \alpha \le 18$. Άρα 18 τιμές.

Για $r = 4$: $\alpha \le \dfrac{500}{64} \Rightarrow \alpha \le 7$. Άρα 7 τιμές.

Για $r = 5$: $\alpha \le \dfrac{500}{125} \Rightarrow \alpha \le 4$. Άρα 4 τιμές.

Για $r = 6$: $\alpha \le \dfrac{500}{216} \Rightarrow \alpha \le 2$. Άρα 2 τιμές.

Για $r = 7$: $\alpha \le \dfrac{500}{343} \Rightarrow \alpha \le 1$. Άρα 1 τιμή.

Για $r \geq 8$ δεν υπάρχει $\alpha \geq 1$ ώστε $\alpha r^3 \leq 500$.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:

$$62 + 18 + 7 + 4 + 2 + 1 = 94.$$

51. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και το σύνολο $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Να βρείτε:

i. το πλήθος των συναρτήσεων $f : A \to B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε,
ii. το πλήθος των συναρτήσεων $f : B \to A$ που μπορούμε να σχηματίσουμε,
iii. το πλήθος των 1–1 συναρτήσεων $f : A \to B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε,
iv. το πλήθος των συναρτήσεων $f : A \to B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε, τέτοιες ώστε $f(1) = 7$,
v. το πλήθος των συναρτήσεων $f : A \to B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε, τέτοιες ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα,
vi. το πλήθος των *επί* συναρτήσεων $f : B \to A$ που μπορούμε να σχηματίσουμε.

Λύση: (Ασκ. 15/58)

i. Κάθε στοιχείο του A έχει 5 δυνατές εικόνες στο B. Άρα:

$$N_1 = 5^4 = 625.$$

ii. Αντίστροφα, κάθε στοιχείο του B έχει 4 δυνατές εικόνες στο A:

$$N_2 = 4^5 = 1\,024.$$

iii. Για να είναι f 1–1, κάθε στοιχείο του A πρέπει να αντιστοιχιστεί σε διαφορετικό στοιχείο του B. Ο αριθμός τέτοιων συναρτήσεων είναι:

$$N_3 = P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120.$$

iv. Αν $f(1) = 7$, το πρώτο ζεύγος είναι καθορισμένο, ενώ τα υπόλοιπα 3 στοιχεία του A έχουν 5 δυνατές εικόνες το καθένα:

$$N_4 = 5^3 = 125.$$

v. Για να είναι f γνησίως αύξουσα, οι τιμές των $f(1), f(2), f(3), f(4)$ πρέπει να είναι τέσσερις διαφορετικοί αριθμοί του B, με αύξουσα διάταξη. Η επιλογή γίνεται επιλέγοντας 4 στοιχεία από τα 5:

$$N_5 = \binom{5}{4} = 5.$$

vi. Για τις *επί* συναρτήσεις $f : B \to A$, χρησιμοποιούμε τον τύπο του εγκλεισμού–αποκλεισμού:

$$N_6 = 4^5 - \binom{4}{1}3^5 + \binom{4}{2}2^5 - \binom{4}{3}1^5.$$

Υπολογίζουμε:

$$N_6 = 1\,024 - 4 \cdot 243 + 6 \cdot 32 - 4 \cdot 1 = 240.$$

Άρα: $N_1 = 625,\ N_2 = 1\,024,\ N_3 = 120,\ N_4 = 125,\ N_5 = 5,\ N_6 = 240.$

Θέματα Εξετάσεων

---

1. Δίνονται τα ψηφία: $1, 1, 2, 3, 3, 4$.

i. Να υπολογίσετε το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία.

ii. Πόσοι από αυτούς έχουν τα δύο τριάρια σε διαδοχικές θέσεις (*παράδειγμα ενός τέτοιου αριθμού είναι:* 133241);

iii. Πόσοι από τους εξαψήφιους αριθμούς του υποερωτήματος (i.) δεν περιέχουν τον αριθμό έντεκα;

Λύση: 2025

i.

$$M_6^{\varepsilon} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$$

ii.

$$M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$$

iii.

$$M_6^{\varepsilon} - M_5^{\varepsilon} = 180 - 60 = 120$$

2. Πάνω σε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ορίζουμε 10 σημεία, όλα διαφορετικά από τις κορυφές του A, B, Γ, Δ. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές από τα 40 αυτά σημεία.

Λύση: 2023

Α' τρόπος

Όλες οι τριάδες που σχηματίζονται από τα 40 σημεία είναι:

$$\binom{40}{3} = \frac{40!}{(40-3)!\,3!} = 9880$$

Από αυτές, αφαιρούμε τις τριάδες των συνευθειακών σημείων σε κάθε πλευρά του τετραγώνου:

$$4\binom{10}{3} = 4 \cdot \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = 480$$

Άρα έχουμε συνολικά:

$$9880 - 480 = 9400 \text{ τρίγωνα.}$$

Β' τρόπος

- Περίπτωση 1 (Κάθε κορυφή του τριγώνου βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του τετραγώνου)

  Από τις 4 πλευρές του τετραγώνου επιλέγω τις τρεις και από κάθε πλευρά παίρνω ένα σημείο:

  $$\binom{4}{3}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4000$$

- Περίπτωση 2 (Οι δύο κορυφές του τριγώνου βρίσκονται στην ίδια πλευρά του τετραγώνου, ενώ η τρίτη κορυφή βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά)

  Από τις 4 πλευρές του τετραγώνου επιλέγω τη μία και από αυτήν επιλέγω τις 2 κορυφές του τριγώνου, και στη συνέχεια από τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του τετραγώνου επιλέγω τη μία και από αυτήν επιλέγω την τρίτη κορυφή:

  $$\binom{4}{1}\binom{10}{2}\binom{3}{1}\binom{10}{1} = 4 \cdot \frac{10!}{(10-2)!\,2!} \cdot 3 \cdot 10 = 5400$$

  Άρα έχουμε συνολικά:

  $$4000 + 5400 = 9400 \text{ τρίγωνα.}$$

3. Δίνεται η λέξη *ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ.*

i. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

ii. Σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

a. τα δύο «Ε» είναι σε συνεχόμενες θέσεις και ταυτόχρονα τα δύο «Ι» είναι σε μη συνεχόμενες θέσεις.

b. υπάρχουν ακριβώς δύο γράμματα μεταξύ των δύο «Ε» τα οποία είναι και τα δύο σύμφωνα.

Λύση: 2023

i. Έχουμε 9 γράμματα από τα οποία τα δύο είναι E και τα δύο είναι I, άρα το πλήθος των αναγραμματισμών είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{2! \cdot 2!} = 90720$$

ii.a. Θα υπολογίσουμε πρώτα το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης που έχουν τα δύο E συνεχόμενα. Θεωρώντας τα δύο E ως ένα αντικείμενο έχουμε συνολικά 8 γράμματα, από τα οποία τα δύο I είναι ίδια. Άρα το πλήθος τους είναι:

$$\frac{8!}{2!} = 20160$$

Από τους αναγραμματισμούς που έχουν τα δύο E συνεχόμενα θα υπολογίσουμε αυτούς που έχουν τα δύο I επίσης συνεχόμενα. Θεωρώντας τα δύο E ως ένα αντικείμενο και τα δύο I ως άλλο αντικείμενο, έχουμε συνολικά 7 γράμματα, άρα το πλήθος τους είναι:

$$7! = 5040$$

Επομένως, το σύνολο των ζητούμενων αναγραμματισμών είναι όλοι οι αναγραμματισμοί που έχουν τα δύο E μαζί εκτός από αυτούς που έχουν και τα δύο I μαζί:

$$20160 - 5040 = 15120$$

<u>Εναλλακτικά</u>

Θεωρώντας τα δύο E ως ένα αντικείμενο:

$$\_(EE)\_\Pi\_T\_X\_\Upsilon\_\Sigma\_$$

Έχουμε μεταθέσεις 6 διαφορετικών αντικειμένων. Δημιουργούνται 7 κενές θέσεις, από τις οποίες θα επιλεγούν 2 για να τοποθετηθούν τα δύο I. Το πλήθος αυτών είναι:

$$6! \cdot \binom{7}{2} = 6! \cdot \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = 15120$$

ii.b. Από τα 4 σύμφωνα Π, T, Q, Σ επιλέγω τα 2 για να τοποθετηθούν ανάμεσα στα δύο E. Τα οποία μπορούν να μετατεθούν με:

$$\binom{4}{2} \cdot 2! = 12 \text{ τρόπους.}$$

Θεωρούμε την τετράδα αυτή ως ένα αντικείμενο και μαζί με τα υπόλοιπα 5 γράμματα (από τα οποία τα δύο είναι I) έχουμε συνολικά 6 γράμματα, τα οποία μετατίθενται με:

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ τρόπους.}$$

Άρα έχουμε συνολικά:

$$12 \cdot 360 = 4320 \text{ τρόπους.}$$

4. Πενταμελής επιτροπή θα σχηματιστεί από μια ομάδα μαθητών η οποία αποτελείται από 5 κορίτσια και 7 αγόρια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή αν:

i. η επιτροπή περιλαμβάνει 2 κορίτσια και 3 αγόρια.

ii. δύο συγκεκριμένα αγόρια της ομάδας, ο A και ο B, αρνούνται να τοποθετηθούν ταυτόχρονα στην επιτροπή.

Λύση: 2023

i.

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = 10 \cdot 35 = 350$$

ii. Έστω A και B τα δύο συγκεκριμένα αγόρια. Η επιλογή των αγοριών μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους:

i. Επιλέγεται ο A ή ο B και τέσσερα άλλα παιδιά:

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{10}{4} = 2 \cdot \frac{10!}{4!6!} = 420$$

ii. Δεν επιλέγονται οι A και B:

$$\binom{10}{5} = 252$$

Συνολικά:

$$420 + 252 = 672$$

Εναλλακτικά

Όλες οι περιπτώσεις εκτός από τις περιπτώσεις στις οποίες οι A και B βρίσκονται ταυτόχρονα στην επιτροπή:

$$\binom{12}{5} - \binom{10}{3} = 792 - 120 = 672$$

5. Δίνεται η λέξη «*ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ*».

i. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

ii. Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με τη λέξη «ΑΞΙΟΣ».

iii. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ» στους οποίους το «Α» προηγείται του «Λ» και το «Λ» προηγείται του «Σ».

Λύση: 2022

i.

$$M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{2! \cdot 2!} = 907200 \text{ αναγραμματισμοί.}$$

ii. Στο υπόλοιπο μέρος των αναγραμματισμών (μετά το «ΑΞΙΟΣ») έχουμε μεταθέσεις των 5 γραμμάτων Λ, O, Γ, H, H με επανάληψη, δηλαδή οι αναγραμματισμοί αυτοί είναι:

$$M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$$

iii.

Οι μεταθέσεις (αναγραμματισμοί) των 3 γραμμάτων A, Λ, Σ είναι $M_3 = 3!$ Όμως μας ενδιαφέρει μόνο μία περίπτωση και συνεπώς οι ζητούμενοι αναγραμματισμοί είναι:

$$\frac{M_{10}^{\varepsilon}}{M_3} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 151200$$

Εναλλακτικά

Σε πρώτη φάση επιλέγουμε 3 από τις 10 θέσεις κατά $\binom{10}{3}$ τρόπους και τοποθετούμε τα γράμματα A, Λ, Σ με αυτή τη διάταξη.

Σε δεύτερη φάση τοποθετούμε τα υπόλοιπα 7 γράμματα $\Xi, I, \Gamma, O, O, H, H$ στις 7 θέσεις που έμειναν κατά M_7^{ε} τρόπους.

Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή, οι ζητούμενοι αναγραμματισμοί είναι:

$$\binom{10}{3} \cdot M_7^{\varepsilon} = \frac{10!}{7!\,3!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 151200$$

6. Για να παρακολουθήσουν πέντε φοιτητές ένα σεμινάριο, με φυσική παρουσία, θα πρέπει να υποβληθούν σε έναν από τους παρακάτω τρεις ελέγχους:

A. μοριακό έλεγχο

B. ρινικό έλεγχο ταχείας ανίχνευσης

C. έλεγχο ταχείας ανίχνευσης με δείγμα σάλιου

i. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να πραγματοποιηθούν οι έλεγχοι αυτοί;

ii. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να πραγματοποιηθούν οι έλεγχοι αυτοί, αν δύο συγκεκριμένοι φοιτητές θα υποβληθούν σε μοριακό έλεγχο;

Λύση: 2021

i.

$$\delta_5^3 = 3^5 = 243 \text{ τρόποι}$$

<u>Εναλλακτικά:</u>

Φ1	Φ2	Φ3	Φ4	Φ5
3	3	3	3	3

Από αρχή της απαρίθμησης $\Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ τρόποι

ii.

$$\delta_2^1 \cdot \delta_3^3 = 1^2 \cdot 3^3 = 1 \cdot 27 = 27 \text{ τρόποι}$$

<u>Εναλλακτικά:</u>

Φ1	Φ2	Φ3	Φ4	Φ5
1	1	3	3	3

Από αρχή της απαρίθμησης $\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ τρόποι

7. Δίνονται τα ψηφία

$$1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4.$$

i. Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί 9-ψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία αυτά.

ii. Να βρείτε πόσοι από τους 9-ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (i) έχουν όλα τα 2 σε συνεχόμενες θέσεις.

iii. Να βρείτε πόσοι από τους 9-ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (i) έχουν τα ψηφία $1, 1, 3$ σε άρτιες θέσεις (δηλαδή στην 2η, 4η, 6η, 8η θέση).

Λύση: 2019

i. Είναι επαναληπτικές μεταθέσεις των εννέα ψηφίων. Επομένως όλοι οι 9-ψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται είναι:

$$M_\varepsilon^9 = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 4!} = 3780$$

ii. Θεωρούμε όλα τα 2 σαν μία ομάδα και έχουμε επαναληπτικές μεταθέσεις των έξι ψηφίων. Επομένως όλοι οι 9-ψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται είναι:

$$M_\varepsilon^6 \cdot M_4^4 = \frac{6!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{4!} = 180$$

iii. Τα ψηφία $1, 1, 3$ τοποθετούνται στις άρτιες θέσεις με

$$\binom{4}{3} \cdot \frac{3!}{2!} = 12 \text{ τρόπους}$$

και τα υπόλοιπα έξι ψηφία τοποθετούνται στις υπόλοιπες έξι θέσεις με

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15 \text{ τρόπους}$$

Επομένως το πλήθος των 9-ψήφιων αριθμών που σχηματίζονται είναι

$$\binom{4}{3} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 12 \cdot 15 = 180$$