Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Έλλειψη

1. Να βρείτε τις *εξισώσεις* των ελλείψεων, με:

i. Κέντρο το $(0,0)$, μεγάλο άξονα στον άξονα των τετμημένων μήκους 6 μονάδων και μικρό άξονα στον άξονα των τεταγμένων μήκους 4 μονάδων.

ii. Κέντρο το $(0,0)$, μεγάλο άξονα στον άξονα των τεταγμένων μήκους 10 μονάδων και μικρό άξονα στον άξονα των τετμημένων μήκους 8 μονάδων.

iii. Εστίες τα σημεία $(-2,0)$ και $(2,0)$ και δύο κορυφές στα σημεία $(0,1)$, $(0,-1)$.

iv. Κέντρο το $(0,0)$, λόγο των μηκών του μεγάλου άξονα προς τον μικρό άξονα ίσο με 2 μονάδες και να διέρχεται από το σημείο $(6,4)$.

Λύση: (Ασκ. 1/112)

i. Εφόσον ο μεγάλος άξονας βρίσκεται στον άξονα $x'x$, έχουμε τύπο:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $2a=6 \Rightarrow a=3$, και του μικρού άξονα $2b=4 \Rightarrow b=2$.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

ii. Τώρα ο μεγάλος άξονας είναι στον άξονα $y'y$, άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Έχουμε $2a=10 \Rightarrow a=5$, $2b=8 \Rightarrow b=4$:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

iii. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες $E(-2,0)$ και $E'(2,0)$, άρα $\gamma = 2$. Οι κορυφές είναι $(0,1)$ και $(0,-1)$, επομένως ο μικρός άξονας βρίσκεται στον άξονα $y'y$ και $b = 1$. Από τη σχέση $a^2 = b^2 + \gamma^2$ προκύπτει:

$$a^2 = 1 + 4 = 5.$$

$$\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$$

iv. Η έλλειψη έχει κέντρο $(0,0)$ και λόγο αξόνων $\frac{a}{b} = 2$, άρα $a = 2b$. Εφόσον διέρχεται από το σημείο $(6,4)$, ισχύει:

$$\frac{6^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1.$$

Αντικαθιστούμε $a = 2b$:

$$\frac{36}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{9+16}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; b^2 = 25 \;\Rightarrow\; b = 5,\; a = 10.$$

Επομένως:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

2. Δίνονται τα σημεία $E(12,0)$ και $E'(-12,0)$. Ένα σημείο T του επιπέδου κινείται έτσι ώστε $(TE) + (TE') = 26$. Να βρείτε την *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T.

Λύση: (Ασκ. 2/112)

Από τον *ορισμό* της έλλειψης, αν οι εστίες είναι $E(\gamma,0)$, $E'(-\gamma,0)$ και το σταθερό άθροισμα αποστάσεων είναι $2a$ με $a > \gamma$, τότε η εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad \beta^2 = a^2 - \gamma^2.$$

Εδώ $\gamma = 12$ και $(TE) + (TE') = 26 = 2a \Rightarrow a = 13$. Άρα

$$\beta^2 = a^2 - \gamma^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \;\Rightarrow\; \beta = 5.$$

Επομένως η ζητούμενη καμπύλη είναι έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

3. Δίνονται οι ελλείψεις με εξισώσεις:

i. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

ii. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

iii. $x^2 + 9y^2 = 9$

Σε κάθε περίπτωση, να βρείτε τις *συντεταγμένες* των *εστιών*, τις *συντεταγμένες* των *κορυφών*, την *εκκεντρότητα* τους, καθώς και τις *εξισώσεις* των *διευθετουσών* τους.

Λύση: (Ασκ. 3/112)

i. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

Μεγάλος άξονας στον $x'x$: $a = 5,\ b = 4.$

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{3}{5}.$$

Εστίες: $E(\pm 3, 0)$.

Κορυφές: $A(\pm 5, 0),\ B(0, \pm 4)$.

Διευθετούσες: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{25}{3}.$

ii. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

Μεγάλος άξονας στον $y'y$: $a = 4,\ b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{1}{2}.$$

Εστίες: $E(0, \pm 2)$.

Κορυφές: $A(0, \pm 4),\ B(\pm 2\sqrt{3}, 0)$.

Διευθετούσες: $y = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm 8.$

iii. $x^2 + 9y^2 = 9 \iff \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1.$

Μεγάλος άξονας στον $x'x$: $a = 3,\ b = 1.$

$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Εστίες: $E(\pm 2\sqrt{2}, 0)$.

Κορυφές: $A(\pm 3, 0),\ B(0, \pm 1)$.

Διευθετούσες: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{9}{2\sqrt{2}}$ ή $x = \pm\frac{9\sqrt{2}}{4}$ με ρητοποίηση.

4. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $3x^2 + 2y^2 = 12$.

i. Να υπολογίσετε το κ, $\kappa > 0$, ώστε το σημείο $A(\sqrt{2},\, \kappa)$ να ανήκει στην έλλειψη.

ii. Να υπολογίσετε τις *αποστάσεις* του σημείου A από τις δύο *εστίες* της έλλειψης.

Λύση: (Ασκ. 4/112)

Η εξίσωση γράφεται
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1,$$

άρα ο μεγάλος άξονας είναι στον $y'y$ με $a^2 = 6,\ b^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{6},\ b = 2.$

Η εστιακή απόσταση είναι
$$\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2},$$
οπότε οι εστίες είναι $E(0, \sqrt{2})$ και $E'(0, -\sqrt{2})$.

i. Το $A(\sqrt{2}, \kappa)$ ανήκει στην έλλειψη αν ικανοποιεί $3x^2 + 2y^2 = 12$:
$$3(\sqrt{2})^2 + 2\kappa^2 = 12 \ \Rightarrow\ 6 + 2\kappa^2 = 12 \ \Rightarrow\ \kappa^2 = 3 \ \Rightarrow\ \kappa = \sqrt{3}$$

ii. Με $\kappa = \sqrt{3}$, το $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Οι αποστάσεις από τις εστίες:
$$AE = \sqrt{(\sqrt{2}-0)^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+5-2\sqrt{6}} = \sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{6}-1$$
$$AE' = \sqrt{(\sqrt{2}-0)^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+5+2\sqrt{6}} = \sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{6}+1$$
(Πράγματι $AE + AE' = 2\sqrt{6} = 2a$.)

5. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Να υπολογίσετε τις *συντεταγμένες* των σημείων της, τα οποία απέχουν από την εστία E απόσταση $\dfrac{13}{5}$ μονάδες.

Λύση: (Ασκ. 5/112)

Η έλλειψη έχει μεγάλο άξονα στον $y'y$, άρα $a^2=25,\ b^2=16 \Rightarrow a=5,\ b=4$.

Η εστιακή απόσταση είναι $\gamma=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$, οπότε οι εστίες είναι $E(0,3)$, $E'(0,-3)$.

Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{a}=\dfrac{3}{5}$.
Για σημείο $T(x,y)$ της έλλειψης και για την άνω εστία $E(0,3)$ ισχύει (θεώρημα):

$$TE=a-\varepsilon y=5-\frac{3}{5}y.$$

Αν $TE=\dfrac{13}{5}$, τότε

$$5-\frac{3}{5}y=\frac{13}{5}\ \Rightarrow\ 25-3y=13\ \Rightarrow\ y=4.$$

Με $y=4$ στην εξίσωση της έλλειψης:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{16}{25}=1\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{16}=\frac{9}{25}\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{12}{5}.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι

$$T_1\left(\frac{12}{5},4\right),\qquad T_2\left(-\frac{12}{5},4\right)$$

Έλεγχος: $TE'=a+\varepsilon y=5+\frac{3}{5}\cdot 4=\frac{37}{5}$ και $TE+TE'=2a=10$.

6. Να υπολογίσετε τις *αποστάσεις* του σημείου $T\big(\sqrt{3},\,\frac{1}{2}\big)$ από τις δύο *εστίες* της έλλειψης με εξίσωση $x^2+4y^2=4$.

Λύση: (Ασκ. 6/112)

Γράφουμε

$$x^2+4y^2=4 \iff \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,$$

οπότε $a^2=4,\ b^2=1 \Rightarrow a=2,\ b=1$. Η εστιακή απόσταση είναι

$$\gamma=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}, \qquad \varepsilon=\frac{\gamma}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Εστίες: $E(\pm\sqrt{3},\,0)$.

Ελέγχουμε ότι T ανήκει στην έλλειψη: $3+4\cdot\frac{1}{4}=4$

Με το θεώρημα για έλλειψη με μεγάλο άξονα στον $x'x$,

$$TE=a-\varepsilon x_T, \qquad TE'=a+\varepsilon x_T.$$

Άρα για $x_T=\sqrt{3}$:

$$TE=2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}, \qquad TE'=2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

Έλεγχος: $TE+TE'=2a=4$.

7. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

Να βρείτε τις *πραγματικές τιμές* των κ,λ, ώστε το σημείο $T(\kappa,\lambda)$ να έχει αποστάσεις 3 και 5 μονάδες από τις εστίες E και E', αντίστοιχα.

Λύση: (Ασκ. 7/113)

Έχουμε $a^2=16\Rightarrow a=4$, $b^2=12\Rightarrow b=2\sqrt{3}$ και

$$\gamma=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-12}=2, \qquad \varepsilon=\frac{\gamma}{a}=\frac{1}{2}.$$

Οι εστίες είναι $E(2,0)$, $E'(-2,0)$ και για σημείο $T(x_1,y_1)$ της έλλειψης ισχύει

$$(TE)=a-\varepsilon x_1, \qquad (TE')=a+\varepsilon x_1.$$

Με $(TE)=3$ και $(TE')=5$ παίρνουμε:

$$4-\frac{1}{2}\kappa=3 \;\Rightarrow\; \kappa=2, \qquad 4+\frac{1}{2}\kappa=5 \;\Rightarrow\; \kappa=2 \;\; (\text{συμφωνεί}).$$

Το $T(\kappa,\lambda)$ ανήκει στην έλλειψη, άρα

$$\frac{\kappa^2}{16}+\frac{\lambda^2}{12}=1 \;\Rightarrow\; \frac{4}{16}+\frac{\lambda^2}{12}=1 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda^2}{12}=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \lambda=\pm 3$$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι

$$T_1(2,\,3) \quad \text{και} \quad T_2(2,\,-3)$$

Έλεγχος: $TE+TE'=3+5=8=2a$.

8. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$$

i. Να υπολογίσετε την τιμή του λ, $\lambda>0$, ώστε το σημείο $K(5,\lambda)$ να ανήκει στην έλλειψη.

ii. Να υπολογίσετε την *περίμετρο* του τριγώνου KEE'.

iii. Να υπολογίσετε το *εμβαδόν* του τριγώνου KEE'.

Λύση: (Ασκ. 8/113)

Η έλλειψη έχει $a^2=100 \Rightarrow a=10$, $b^2=64 \Rightarrow b=8$ και

$$\gamma=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-64}=6, \qquad \varepsilon=\frac{\gamma}{a}=\frac{3}{5}.$$

Οι εστίες είναι $E(6,0)$, $E'(-6,0)$.

i. Το $K(5,\lambda)$ ανήκει στην έλλειψη αν

$$\frac{5^2}{100}+\frac{\lambda^2}{64}=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}+\frac{\lambda^2}{64}=1 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda^2}{64}=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \lambda=\pm 4\sqrt{3}$$

ii. Για σημείο $T(x, y)$ στην έλλειψη ισχύει $TE = a - \varepsilon x$, $TE' = a + \varepsilon x$. Άρα για $K(5, 4\sqrt{3})$:

$$KE = 10 - \frac{3}{5} \cdot 5 = 7, \qquad KE' = 10 + \frac{3}{5} \cdot 5 = 13, \qquad EE' = 2\gamma = 12.$$

Η περίμετρος:

$$P_{KEE'} = KE + KE' + EE' = 7 + 13 + 12 = 32$$

Ισοδύναμα, $KE + KE' = 2a = 20 \Rightarrow P = 20 + 12 = 32$.

iii. Το EE' κείται στον άξονα $x'x$, άρα το ύψος από το K προς το EE' είναι $|y_K| = 4\sqrt{3}$.

Με $EE' = 12$:

$$E_{KEE'} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

9. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Να προσδιορίσετε τη *θέση* των σημείων $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$, $\Gamma(1, 6)$, $\Delta\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $E(0, \sqrt{5})$ και $Z\left(2, \frac{5}{3}\right)$ ως προς την έλλειψη.

Λύση: (Ασκ. 1/121)

Η θέση ενός σημείου $T(x_1, y_1)$ ως προς την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

καθορίζεται από το πρόσημο της παράστασης

$$F(x_1, y_1) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} - 1.$$

Αν $F = 0$, το σημείο ανήκει στην έλλειψη· αν $F > 0$, βρίσκεται *εκτός* της έλλειψης· αν $F < 0$, βρίσκεται *εντός* αυτής.

Εδώ $a^2 = 9$, $\beta^2 = 5$, άρα:

$$F(x_1, y_1) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{5} - 1.$$

i. Για $A(3,1)$:

$$F(3,1)=\frac{3^2}{9}+\frac{1^2}{5}-1=1+\frac{1}{5}-1=\frac{1}{5}>0 \Rightarrow \text{εκτός της έλλειψης.}$$

ii. Για $B(-1,1)$:

$$F(-1,1)=\frac{(-1)^2}{9}+\frac{1^2}{5}-1=\frac{1}{9}+\frac{1}{5}-1=\frac{14}{45}-1=-\frac{31}{45}<0 \Rightarrow \text{εντός της έλλειψης.}$$

iii. Για $\Gamma(1,6)$:

$$F(1,6)=\frac{1^2}{9}+\frac{6^2}{5}-1=\frac{1}{9}+\frac{36}{5}-1=\frac{1}{9}+\frac{64.8}{9}-1=\frac{329}{45}-1=\frac{284}{45}>0 \Rightarrow \text{εκτός της έλλειψης.}$$

iv. Για $\Delta\big(\frac{3}{2},\,\frac{5}{2}\big)$:

$$F\big(\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{2}\big)=\frac{(3/2)^2}{9}+\frac{(5/2)^2}{5}-1=\frac{9/4}{9}+\frac{25/4}{5}-1=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}-1=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \text{εκτός της έλλειψης.}$$

v. Για $E(0,\sqrt{5})$:

$$F(0,\sqrt{5})=0+\frac{(\sqrt{5})^2}{5}-1=1-1=0 \Rightarrow \text{ανήκει στην έλλειψη.}$$

vi. Για $Z\big(2,\,\frac{5}{3}\big)$:

$$F\big(2,\,\tfrac{5}{3}\big)=\frac{2^2}{9}+\frac{(5/3)^2}{5}-1=\frac{4}{9}+\frac{25/9}{5}-1=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-1=0 \Rightarrow \text{ανήκει στην έλλειψη.}$$

10. Να λύσετε *γραφικά* τις ανισώσεις:

i. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}\le 1$ ii. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}>1$

Λύση: (Ασκ. 2/121)

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο θέσης σημείου ως προς την έλλειψη:

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1. \quad \begin{cases} F(x,y)\le 0 & \text{εντός (μαζί με το σύνορο),} \\ F(x,y)>0 & \text{εκτός (χωρίς το σύνορο).} \end{cases}$$

i. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}\le 1$. Η ισότητα $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{36}=1$ είναι έλλειψη με ημιαξόνες $a=8$ (στον $x'x$) και $b=6$ (στον $y'y$).

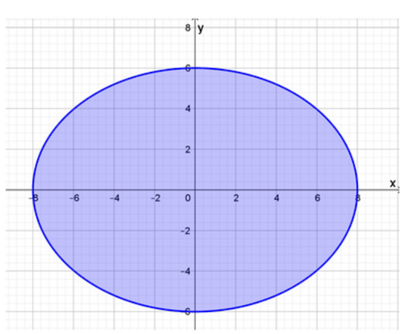
Άρα το σύνολο λύσεων είναι *το εσωτερικό της έλλειψης μαζί με το σύνορο*:

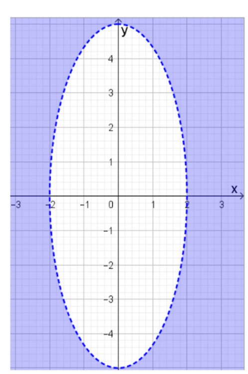
$$S_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}\le 1\right\}.$$

ii. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}>1$. Η ισότητα $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$ είναι έλλειψη με ημιαξόνες $a=2$ και $b=5$.

Ζητείται *το εξωτερικό της έλλειψης χωρίς το σύνορο*:

$$S_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}>1\right\}.$$





11. Να λύσετε *γραφικά* το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 > 0 \\ 4x^2 + y^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

Λύση: (Ασκ. 3/121)

Η καμπύλη $x^2 + 4y^2 = 16$ είναι έλλειψη $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

$$x^2 + 4y^2 - 16 > 0 \iff \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} > 1 \quad \text{(εξωτερικό της έλλειψης, } \textit{χωρίς} \text{ το σύνορο).}$$

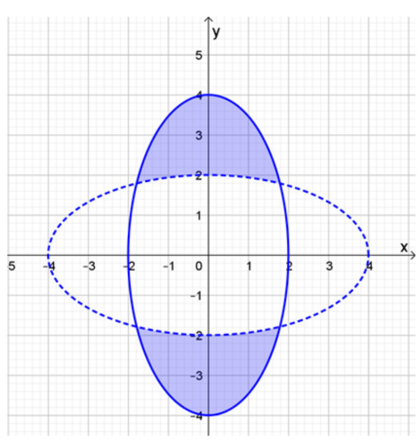
Η καμπύλη $4x^2 + y^2 = 16$ είναι έλλειψη $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

$$4x^2 + y^2 - 16 \leq 0 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \quad \text{(εσωτερικό της έλλειψης, } \textit{μαζί} \text{ με το σύνορο).}$$

Άρα ζητούμε το κοινό μέρος: *έξω* από την έλλειψη $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ και *μέσα* στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Σε περιγραφή με ανισότητες:

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} > 1 \ \text{ και } \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}.$$



12. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $-x+2y=10$ εφάπτεται της έλλειψης

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε τις *συντεταγμένες* του *σημείου επαφής*.

Λύση: (Ασκ. 4/121)

Γράφουμε την ευθεία ως $y=\frac{x}{2}+5$ και την αντικαθιστούμε στην έλλειψη:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{\left(\frac{x}{2}+5\right)^2}{9}=1.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 576 (Ε.Κ.Π. των $64, 9$):

$$9x^2+64\left(\frac{x^2}{4}+5x+25\right)=576 \implies 9x^2+16x^2+320x+1600=576$$

$$\implies \quad 25x^2+320x+1024=0.$$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=320^2-4\cdot 25\cdot 1024=102\,400-102\,400=0,$$

άρα η ευθεία είναι *εφαπτομένη* της έλλειψης.

Το x-συντεταγμένο του σημείου επαφής:

$$x_T=\frac{-320}{2\cdot 25}=-\frac{32}{5}.$$

Με $y=\frac{x}{2}+5$:

$$y_T=\frac{-\frac{32}{5}}{2}+5=-\frac{16}{5}+\frac{25}{5}=\frac{9}{5}.$$

Επομένως, το *σημείο επαφής* είναι

$$T\left(-\frac{32}{5},\frac{9}{5}\right)$$

13. Να βρείτε τη *θέση* των πιο κάτω ευθειών ως προς την έλλειψη $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{81}=1$:

i. $y=x+4$

ii. $x+2y=20$

iii. $x=6$

iv. $y=6$.

Λύση: (Ασκ. 5/121)

Εξετάζουμε κάθε ευθεία ως προς το σύστημα με την έλλειψη. Αν η εξίσωση που προκύπτει έχει $\Delta>0 \Rightarrow$ *τέμνει* σε δύο σημεία, $\Delta=0\Rightarrow$ *εφάπτεται*, $\Delta<0\Rightarrow$ *δεν τέμνει.*

i. $y=x+4$.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{81}=1\\ y=x+4\end{cases} \implies \frac{x^2}{36}+\frac{(x+4)^2}{81}=1 \implies 13x^2+32x-260=0$$

$$\Delta=32^2-4\cdot 13\cdot(-260)=1024+13520=14544>0.$$

Επομένως, η ευθεία *τέμνει* την έλλειψη σε δύο διαφορετικά σημεία.

ii. $x+2y=20 \iff y=10-\frac{x}{2}$.

$$\frac{x^2}{36}+\frac{(10-\frac{x}{2})^2}{81}=1 \implies 5x^2-20x+38=0$$

$$\Delta=(-20)^2-4\cdot 5\cdot 38=400-760=-360<0.$$

Άρα η ευθεία *δεν τέμνει* την έλλειψη (είναι εξωτερική).

iii. $x=6$.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{81}=1\\ x=6\end{cases} \implies 1+\frac{y^2}{81}=1 \implies y^2=0\Rightarrow y=0.$$

Μοναδική λύση $\Rightarrow$ η ευθεία *εφάπτεται* της έλλειψης (στο $(6,0)$).

iv. $y=6$.

$$\frac{x^2}{36}+\frac{36}{81}=1 \implies \frac{x^2}{36}=\frac{5}{9} \implies x^2=20 \ (\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{5}).$$

Δύο λύσεις $\Rightarrow$ η ευθεία *τέμνει* την έλλειψη σε δύο σημεία.

14. Δίνεται η έλλειψη (E) με εξίσωση $3x^2 + y^2 = 4$. Να υπολογίσετε:

i. τις τιμές της παραμέτρου $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = -2x + \beta$ να *εφάπτεται* της έλλειψης (E).

ii. τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $ax + y = 4$ να *τέμνει* την έλλειψη (E).

Λύση: (Ασκ. 6/121)

i. Θέλουμε μοναδική λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 \\ y = -2x + \beta \end{cases} \implies 3x^2 + (-2x+\beta)^2 = 4 \implies 7x^2 - 4\beta x + (\beta^2 - 4) = 0.$$

Για εφαπτομένη: $\Delta = 0$.

$$\Delta = (-4\beta)^2 - 4 \cdot 7(\beta^2 - 4) = 16\beta^2 - 28\beta^2 + 112 = -12\beta^2 + 112 = 0$$

$$\Rightarrow \ \beta^2 = \frac{112}{12} = \frac{28}{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

ii. Γράφουμε $y = -ax + 4$ και λύνουμε

$$3x^2 + (-ax + 4)^2 = 4 \implies (a^2 + 3)x^2 - 8ax + 12 = 0.$$

Για δύο διαφορετικά σημεία τομής: $\Delta > 0$.

$$\Delta = (-8a)^2 - 4(a^2+3) \cdot 12 = 64a^2 - 48a^2 - 144 = 16(a^2 - 9) > 0$$

$$\Rightarrow \ |a| > 3$$

Σημείωση: $|a| = 3 \Rightarrow$ εφαπτομένη, $|a| < 3 \Rightarrow$ δεν τέμνει.

15. Να βρείτε την *εξίσωση της εφαπτομένης* και της *κάθετης* της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο $(3, 1)$

ii. $4x^2 + 9y^2 = 72$ στο σημείο $(3, -2)$

iii. $2x^2 + y^2 = 4$ στο σημείο $(-1, \kappa)$ με $\kappa < 0$.

Λύση: (Ασκ. 1/131)

Για έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ισχύει, με *παραγώγιση κατά* x, ότι:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Άρα η *κλίση* της εφαπτομένης στο σημείο $T(x_1, y_1)$ είναι

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

ενώ της κάθετης

$$\lambda_{\kappa\alpha\vartheta} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon\varphi}}.$$

i. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1,\; T(3, 1)$

Έχουμε $a^2 = 12,\; b^2 = 4$, οπότε:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{4 \cdot 3}{12 \cdot 1} = -1, \qquad \lambda_{\kappa\alpha\vartheta} = 1.$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y - 1 = -1(x - 3) \;\Rightarrow\; y = -x + 4.$$

Εξίσωση κάθετης:

$$y - 1 = 1(x - 3) \;\Rightarrow\; y = x - 2.$$

ii. $4x^2 + 9y^2 = 72 \iff \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1,\; T(3, -2)$

Έχουμε $a^2 = 18,\; b^2 = 8$, άρα:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{8 \cdot 3}{18 \cdot (-2)} = \frac{2}{3}, \qquad \lambda_{\kappa\alpha\vartheta} = -\frac{3}{2}.$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y+2=\frac{2}{3}(x-3) \;\Rightarrow\; y=\frac{2}{3}x-4.$$

Εξίσωση κάθετης:

$$y+2=-\frac{3}{2}(x-3) \;\Rightarrow\; y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}.$$

iii. $2x^2+y^2=4 \iff \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1,\ T(-1,\kappa),\ \kappa<0$

Επειδή $2(-1)^2+\kappa^2=4$, έχουμε $\kappa^2=2 \Rightarrow \kappa=-\sqrt{2}$.

Με $a^2=2,\ b^2=4,\ T(-1,-\sqrt{2})$:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{4\cdot(-1)}{2\cdot(-\sqrt{2})}=-\sqrt{2}, \qquad \lambda_{\kappa\alpha\vartheta}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$$y+\sqrt{2}=-\sqrt{2}(x+1) \;\Rightarrow\; y=-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}.$$

Εξίσωση κάθετης:

$$y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1) \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

16. Να αποδείξετε ότι η *εξίσωση της εφαπτομένης* της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \qquad a>\beta,$$

στο τυχαίο σημείο της $P(x_1,y_1)$ (με P πάνω στην έλλειψη) είναι

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{\beta^2}=1.$$

Λύση : (Ασκ. 2/131)

Παραγωγίζουμε *έμμεσα* ως προς x:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{\beta^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \;\Longrightarrow\; \frac{dy}{dx}=-\frac{\beta^2 x}{a^2 y}.$$

Η *κλίση* της εφαπτομένης στο $P(x_1, y_1)$ είναι

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} = -\frac{\beta^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης (σημειακή μορφή) είναι

$$y - y_1 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_1) = -\frac{\beta^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

Πολλαπλασιάζουμε με $a^2 y_1$ και αναπτύσσουμε:

$$a^2 y_1(y - y_1) = -\beta^2 x_1(x - x_1) \iff a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -\beta^2 x_1 x + \beta^2 x_1^2.$$

Μεταφέρουμε όρους στο ίδιο μέλος:

$$\beta^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 y_1^2 + \beta^2 x_1^2.$$

Επειδή το $P(x_1, y_1)$ *ανήκει* στην έλλειψη, ισχύει $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{\beta^2} = 1 \implies a^2 y_1^2 + \beta^2 x_1^2 = a^2\beta^2$. Άρα

$$\beta^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2\beta^2 \iff \frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{\beta^2} = 1.$$

Έτσι αποδείχθηκε ότι η εφαπτομένη στο $P(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{\beta^2} = 1$$

17. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 8$. Να βρείτε τις *εξισώσεις των εφαπτομένων* της έλλειψης που άγονται από το σημείο $T(0, 3)$.

Λύση: (Ασκ. 3/131)

Γράφουμε την έλλειψη σε κανονική μορφή:

$$x^2 + 2y^2 = 8 \iff \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

οπότε $a^2 = 8,\ \beta^2 = 4$.

Η *εφαπτομένη* στο σημείο $P(x_1, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση

$$\frac{x\,x_1}{8} + \frac{y\,y_1}{4} = 1.$$

Εφόσον διέρχεται από το $T(0,3)$, προκύπτει

$$0 + \frac{3y_1}{4} = 1 \;\Rightarrow\; y_1 = \frac{4}{3}.$$

Επειδή το $P(x_1, y_1)$ *ανήκει* στην έλλειψη,

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x_1^2}{8} + \frac{(4/3)^2}{4} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x_1^2}{8} + \frac{4}{9} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x_1^2}{8} = \frac{5}{9} \;\Rightarrow\; x_1^2 = \frac{40}{9} \;\Rightarrow\; x_1 = \pm\frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες είναι

$$\frac{x\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)}{8} + \frac{y\left(\frac{4}{3}\right)}{4} = 1 \iff \frac{\sqrt{10}}{12}\,x + \frac{1}{3}y = 1 \iff \sqrt{10}\,x + 4y = 12$$

και

$$\frac{x\left(-\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)}{8} + \frac{y\left(\frac{4}{3}\right)}{4} = 1 \iff -\frac{\sqrt{10}}{12}\,x + \frac{1}{3}y = 1 \iff -\sqrt{10}\,x + 4y = 12$$

Ισοδύναμα, σε μορφή $y = mx + b$:

$$y = 3 - \frac{\sqrt{10}}{4}\,x \qquad \text{και} \qquad y = 3 + \frac{\sqrt{10}}{4}\,x$$

Έλεγχος: Και οι δύο ευθείες διέρχονται από το $T(0,3)$ και είναι εφαπτόμενες της $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

18. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad a > \beta,$$

και το σημείο της $P(a\,\text{συν}\theta,\ \beta\,\text{ημ}\theta)$. Η εφαπτομένη στο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Δ. Αν το σημείο Z είναι η προβολή του P πάνω στον άξονα των τετμημένων, να αποδείξετε ότι

$$(O\Delta)(OZ) = a^2$$

όπου O η αρχή των αξόνων.

Λύση: (Ασκ. 4/131)

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο $P(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{\beta^2} = 1.$$

Για $x_1 = a\,\text{συν}\theta,\ y_1 = \beta\,\text{ημ}\theta$ παίρνουμε

$$\frac{x\,(a\,\text{συν}\theta)}{a^2} + \frac{y\,(\beta\,\text{ημ}\theta)}{\beta^2} = 1 \iff \frac{\text{συν}\theta}{a}\,x + \frac{\text{ημ}\theta}{\beta}\,y = 1.$$

Θέτοντας $y = 0$ (τομή με $x'x$) βρίσκουμε την τετμημένη του Δ:

$$\frac{\text{συν}\theta}{a}\,x = 1 \implies x_\Delta = \frac{a}{\text{συν}\theta}, \qquad (\theta \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi).$$

Άρα

$$(O\Delta) = |x_\Delta| = \frac{a}{|\text{συν}\theta|}.$$

Η ορθογώνια προβολή του P στον άξονα $x'x$ είναι

$$Z(a\,\text{συν}\theta,\ 0) \ \Rightarrow\ (OZ) = \big|a\,\text{συν}\theta\big|.$$

Επομένως,

$$(O\Delta)(OZ) = \frac{a}{|\text{συν}\theta|} \cdot \big|a\,\text{συν}\theta\big| = a^2.$$

Άρα πράγματι

$$(O\Delta)(OZ) = a^2$$

19. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 10$, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x + 2y + 7 = 0$.

Λύση: (Ασκ. 5/131)

Παράλληλες προς την $3x + 2y + 7 = 0$ έχουν μορφή $3x + 2y = c$. Λύνουμε ως προς y: $y = \dfrac{-3x + c}{2}$ και την αντικαθιστούμε στην έλλειψη:

$$x^2 + 2\left(\frac{-3x + c}{2}\right)^2 = 10 \iff x^2 + \frac{(-3x + c)^2}{2} = 10.$$

Πολλαπλασιάζουμε με 2:

$$2x^2 + (-3x + c)^2 = 20 \iff 2x^2 + 9x^2 - 6cx + c^2 = 20 \iff 11x^2 - 6c\,x + (c^2 - 20) = 0.$$

Για εφαπτομένη η δευτεροβάθμια έχει $\Delta = 0$:

$$\Delta = (-6c)^2 - 4 \cdot 11\,(c^2 - 20) = 36c^2 - 44c^2 + 880 = -8c^2 + 880 = 0$$

$$\Rightarrow\ c^2 = 110\ \Rightarrow\ c = \pm\sqrt{110}.$$

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι

$$3x + 2y = \sqrt{110} \qquad \text{και} \qquad 3x + 2y = -\sqrt{110}$$

20. Η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο της έλλειψης $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τις εφαπτόμενες στις κορυφές $A(3, 0)$ και $A'(-3, 0)$ στα σημεία Γ και Δ, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

i. $(A\Gamma)(A'\Delta) = 4$

ii. Η γωνία $\Gamma E \Delta$ είναι ορθή, όπου E η εστία της έλλειψης στον θετικό ημιάξονά της.

Λύση: (Ασκ. 6/131)

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $P(x_1, y_1)$ της έλλειψης. Η εφαπτομένη στο P έχει εξίσωση

$$\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1.$$

Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα $A(3,0)$ και $A'(-3,0)$ είναι, αντίστοιχα, οι κατακόρυφες

$$x = 3 \qquad \text{και} \qquad x = -3.$$

Συντεταγμένες τομών:

Για $x = 3$ στην εφαπτομένη του P:

$$\frac{3x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \implies \frac{x_1}{3} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \implies y_\Gamma = \frac{4}{y_1}\Big(1 - \frac{x_1}{3}\Big).$$

Άρα $\Gamma\big(3,\ y_\Gamma\big)$. Για $x = -3$:

$$-\frac{x_1}{3} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \implies y_\Delta = \frac{4}{y_1}\Big(1 + \frac{x_1}{3}\Big),$$

οπότε $\Delta\big(-3,\ y_\Delta\big)$.

i. Υπολογισμός γινομένου μηκών.

Επειδή $A(3,0)$ και $\Gamma(3, y_\Gamma)$ έχουν ίδια τετμημένη,

$$(A\Gamma) = |y_\Gamma|, \qquad (A'\Delta) = |y_\Delta|.$$

Άρα

$$(A\Gamma)(A'\Delta) = |y_\Gamma y_\Delta| = \left|\frac{16}{y_1^2}\Big(1 - \frac{x_1^2}{9}\Big)\right|.$$

Επειδή P ανήκει στην έλλειψη, $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{y_1^2}{4} = 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{x_1^2}{9} = \dfrac{y_1^2}{4}$. Άρα

$$(A\Gamma)(A'\Delta) = \left|\frac{16}{y_1^2} \cdot \frac{y_1^2}{4}\right| = 4.$$

ii. Κάθετο τρίγωνο $\Gamma E\Delta$.

Για την έλλειψη με $a=3,\ b=2$ έχουμε $\gamma=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, άρα $E(\sqrt{5},0)$. Οι κλίσεις των $E\Gamma$ και $E\Delta$ είναι

$$m_{E\Gamma}=\frac{y_\Gamma-0}{3-\sqrt{5}}=\frac{y_\Gamma}{3-\sqrt{5}},\qquad m_{E\Delta}=\frac{y_\Delta-0}{-3-\sqrt{5}}=\frac{y_\Delta}{-3-\sqrt{5}}.$$

Το γινόμενό τους:

$$m_{E\Gamma}\,m_{E\Delta}=\frac{y_\Gamma y_\Delta}{(3-\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})}.$$

Από το (i) έχουμε $y_\Gamma y_\Delta=4$ (χωρίς απόλυτη τιμή), ενώ $(3-\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})=-4$. Έτσι

$$m_{E\Gamma}\,m_{E\Delta}=\frac{4}{-4}=-1,$$

άρα οι ευθείες $E\Gamma$ και $E\Delta$ είναι *κάθετες*.

$$\angle\Gamma E\Delta=90^\circ$$

21. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

i. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο $P\big(5\,\text{συν}\theta,\ 3\,\text{ημ}\theta\big)$ τέμνει τους άξονες στα Δ και Z, να βρείτε την *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ΔZ.

ii. Αν η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τους άξονες στα H και Θ, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου N του $H\Theta$ είναι έλλειψη με ίδια εκκεντρότητα με την αρχική.

Λύση: (Ασκ. 7/132)

Η εφαπτομένη της $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ στο $P(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x\,x_1}{25}+\frac{y\,y_1}{9}=1.$$

Στο $P\big(5\,\text{συν}\theta,\ 3\,\text{ημ}\theta\big)$ γίνεται

$$\frac{\text{συν}\theta}{5}\,x+\frac{\text{ημ}\theta}{3}\,y=1.$$

i. Τόπος του μέσου M της ΔZ.

Για τομή με $x'x$ θέτουμε $y=0$: $x_\Delta = \dfrac{5}{\text{συν}\theta}$.

Για τομή με $y'y$ θέτουμε $x=0$: $y_Z = \dfrac{3}{\text{ημ}\theta}$.

Άρα
$$M\Big(\frac{x_\Delta}{2}, \frac{y_Z}{2}\Big) = \left(\frac{5}{2\,\text{συν}\theta}, \frac{3}{2\,\text{ημ}\theta}\right).$$

Θέτοντας $x = \dfrac{5}{2\,\text{συν}\theta} \Rightarrow \text{συν}\theta = \dfrac{5}{2x}$ και $y = \dfrac{3}{2\,\text{ημ}\theta} \Rightarrow \text{ημ}\theta = \dfrac{3}{2y}$, χρησιμοποιούμε $(\text{συν}\theta)^2 + (\text{ημ}\theta)^2 = 1$:
$$\Big(\frac{5}{2x}\Big)^2 + \Big(\frac{3}{2y}\Big)^2 = 1 \iff \frac{25}{x^2} + \frac{9}{y^2} = 4.$$
Επομένως, ο τόπος του M δίνεται από
$$\frac{25}{x^2} + \frac{9}{y^2} = 4$$

ii. Τόπος του μέσου N του $H\Theta$ για την κάθετη στο P.

Η κλίση της εφαπτομένης στο $P(5\,\text{συν}\theta, 3\,\text{ημ}\theta)$ είναι
$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{b\,\text{συν}\theta}{a\,\text{ημ}\theta} = -\frac{3\,\text{συν}\theta}{5\,\text{ημ}\theta},$$
άρα της *κάθετης*:
$$\lambda_{\kappa\alpha\vartheta} = \frac{5\,\text{ημ}\theta}{3\,\text{συν}\theta}.$$
Εξίσωση κάθετης στο P:
$$y - 3\,\text{ημ}\theta = \frac{5\,\text{ημ}\theta}{3\,\text{συν}\theta}\,(x - 5\,\text{συν}\theta).$$
Για $y=0$ (τομή με $x'x$):
$$x_H = 5\,\text{συν}\theta - \frac{3\,\text{συν}\theta}{5\,\text{ημ}\theta}\,(3\,\text{ημ}\theta) = \Big(5 - \frac{9}{5}\Big)\text{συν}\theta = \frac{16}{5}\,\text{συν}\theta.$$
Για $x=0$ (τομή με $y'y$):
$$y_\Theta = 3\,\text{ημ}\theta - \frac{5\,\text{ημ}\theta}{3\,\text{συν}\theta}\,(5\,\text{συν}\theta) = \Big(3 - \frac{25}{3}\Big)\text{ημ}\theta = -\frac{16}{3}\,\text{ημ}\theta.$$

Το μέσο N του $H\Theta$ έχει

$$N\Big(\frac{x_H}{2},\,\frac{y_\Theta}{2}\Big)=\Big(\frac{8}{5}\,\text{συν}\theta,\ -\frac{8}{3}\,\text{ημ}\theta\Big).$$

Θέτοντας $x=\frac{8}{5}\,\text{συν}\theta,\ y=-\frac{8}{3}\,\text{ημ}\theta$ και χρησιμοποιώντας ξανά $(\text{συν}\theta)^2+(\text{ημ}\theta)^2=1$, προκύπτει

$$\frac{x^2}{(8/5)^2}+\frac{y^2}{(8/3)^2}=1 \iff \frac{x^2}{64/25}+\frac{y^2}{64/9}=1$$

Πρόκειται για *έλλειψη* με ημιαξόνες

$$a'=\frac{8}{3},\qquad b'=\frac{8}{5}.$$

Η εκκεντρότητά της είναι

$$\varepsilon'=\sqrt{1-\frac{(b')^2}{(a')^2}}=\sqrt{1-\frac{64/25}{64/9}}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}.$$

Για την αρχική έλλειψη $a=5,\ b=3$ έχουμε

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}.$$

Άρα $\varepsilon'=\varepsilon$.

$$\text{Ο τόπος του } N \text{ είναι έλλειψη με ίδια εκκεντρότητα } \frac{4}{5} \text{ όπως η αρχική.}$$

22. Δίνονται τα σημεία $K(1,0)$ και $\Lambda(-1,0)$. Ένα σημείο T του επιπέδου των K και Λ κινείται, έτσι ώστε να ισχύει $(TK)+(T\Lambda)=\sqrt{8}$. Να δείξετε ότι το σημείο T κινείται πάνω σε *έλλειψη* και να βρείτε την *εξίσωσή* της.

Λύση: (Ασκ. 1/133)

Θέτουμε $T(x,y)$. Τότε, σύμφωνα με την υπόθεση:

$$(TK)+(T\Lambda)=\sqrt{8}.$$

Οι αποστάσεις των σημείων είναι:

$$TK=\sqrt{(x-1)^2+y^2},\qquad T\Lambda=\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

Άρα:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{8}.$$

Το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία K και Λ (τα οποία απέχουν 2 μονάδες) είναι σταθερό και ίσο με $\sqrt{8}$.

Επομένως, σύμφωνα με τον *ορισμό της έλλειψης*, το σημείο $T(x,y)$ κινείται πάνω σε έλλειψη με εστίες $K(1,0)$, $\Lambda(-1,0)$ και σταθερό άθροισμα αποστάσεων $2a=\sqrt{8}$.

Άρα $a=\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$. Η εστιακή απόσταση είναι $\gamma=1$.

Από τη σχέση $b^2=a^2-\gamma^2$ προκύπτει:

$$b^2=2-1=1.$$

Η εξίσωση της έλλειψης είναι:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2}+y^2=1.$$

23. Αν P είναι τυχαίο σημείο στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1,$$

όπου οι εστίες είναι $E(8,0)$ και $E'(-8,0)$:

i. Να υπολογίσετε την *περίμετρο* του τριγώνου PEE'.

ii. Να βρείτε τις *συντεταγμένες* του σημείου P της έλλειψης, ώστε το *εμβαδόν* του τριγώνου PEE' να είναι 24 τετραγωνικές μονάδες.

Λύση: (Ασκ. 2/133)

Η έλλειψη έχει $a^2=100\Rightarrow a=10,\quad b^2=36\Rightarrow b=6.$

Η εστιακή απόσταση είναι

$$\gamma=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-36}=8,$$

άρα οι εστίες είναι $E(8,0)$ και $E'(-8,0)$.

i. Το τυχαίο σημείο P της έλλειψης γράφεται παραμετρικά:

$$P(10\,\text{συν}\theta,\ 6\,\text{ημ}\theta).$$

Οι αποστάσεις του P από τις εστίες E και E' είναι:

$$PE = a(1 - \varepsilon\,\text{συν}\theta), \qquad PE' = a(1 + \varepsilon\,\text{συν}\theta),$$

όπου $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{a} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

Άρα

$$PE + PE' = a(1 - \varepsilon\,\text{συν}\theta) + a(1 + \varepsilon\,\text{συν}\theta) = 2a = 20.$$

Το τρίγωνο PEE' έχει βάση $EE' = 16$ και πλευρές PE, PE', οπότε η *περίμετρος* του είναι:

$$\Pi = EE' + PE + PE' = 16 + 20 = 36.$$

ii. Το τρίγωνο PEE' είναι *ισοσκελές* ως προς τον άξονα $x'x$, και το ύψος του είναι η τεταγμένη του σημείου P, δηλαδή $y_P = 6\,\text{ημ}\theta$. Η βάση του είναι $EE' = 16$.

Άρα το *εμβαδόν* του είναι:

$$E_{\triangle PEE'} = \frac{1}{2} \cdot EE' \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6\,|\text{ημ}\theta| = 48\,|\text{ημ}\theta|.$$

Αν $E_{\triangle PEE'} = 24$, τότε

$$48\,|\text{ημ}\theta| = 24 \;\Rightarrow\; |\text{ημ}\theta| = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, $\text{ημ}\theta = \pm\frac{1}{2}$.

Για $\text{ημ}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{συν}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, έχουμε:

$$P_1(10 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ 6 \cdot \tfrac{1}{2}) \Rightarrow P_1(5\sqrt{3},\ 3).$$

Για $\text{ημ}\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{συν}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, έχουμε:

$$P_2(10 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ 6 \cdot (-\tfrac{1}{2})) \Rightarrow P_2(5\sqrt{3},\ -3).$$

24. Να βρείτε τις *εξισώσεις των εφαπτομένων* της έλλειψης με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

οι οποίες σχηματίζουν *γωνία* $135°$ με τον άξονα των τετμημένων.

Λύση: (Ασκ. 3/133)

Η κλίση λ της ευθείας που σχηματίζει γωνία $135°$ με τον άξονα των x είναι:

$$\lambda = \text{εφ}(135°) = \text{εφ}(180° - 45°) = -\text{εφ}(45°) = -1.$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = -x + c.$$

Για να εφάπτεται της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, θα πρέπει το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = -x + c \end{cases}$$

να έχει *μία μόνο λύση*.

Αντικαθιστούμε το y στην εξίσωση της έλλειψης:

$$\frac{x^2}{4} + (-x + c)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4} + x^2 - 2cx + c^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5x^2}{4} - 2cx + (c^2 - 1) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να έχει *μία μόνο λύση* $\Longrightarrow$ η διακρίνουσα είναι μηδέν:

$$\Delta = (-2c)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot (c^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; 4c^2 - 5(c^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; 4c^2 - 5c^2 + 5 = 0 \;\Rightarrow\; -c^2 + 5 = 0 \;\Rightarrow\; c^2 = 5.$$

Άρα $c = \pm\sqrt{5}$.

Επομένως, οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$$y = -x + \sqrt{5}, \qquad y = -x - \sqrt{5}.$$

25. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Αν A και A' είναι οι κορυφές της έλλειψης στον άξονα των τετμημένων και το $P(2\,\text{συν}\theta,\ \sqrt{3}\,\text{ημ}\theta)$, $\theta\in[0,2\pi)$ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης, να δείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο *γεωμετρικός τόπος του ορθοκέντρου* του τριγώνου APA' ανήκει στην έλλειψη με εξίσωση:

$$4x^2+3y^2=16.$$

Λύση: (Ασκ. 4/133)

Η δεδομένη έλλειψη έχει $a^2=4,\ b^2=3$, άρα:

$$A(2,0),\quad A'(-2,0).$$

Το τυχαίο σημείο της έλλειψης είναι:

$$P(2\,\text{συν}\theta,\ \sqrt{3}\,\text{ημ}\theta).$$

Το τρίγωνο APA' έχει κορυφές:

$$A(2,0),\quad A'(-2,0),\quad P(2\,\text{συν}\theta,\ \sqrt{3}\,\text{ημ}\theta).$$

Επειδή η βάση AA' βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$, το ύψος του τριγώνου από την κορυφή P είναι κάθετο στον άξονα $x'x$, επομένως η εξίσωσή του είναι:

$$x=2\,\text{συν}\theta.$$

Η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην PA έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{\lambda_{PA}}$. Αρχικά βρίσκουμε την κλίση της PA:

$$\lambda_{PA}=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\frac{\sqrt{3}\,\text{ημ}\theta-0}{2\,\text{συν}\theta-2}=\frac{\sqrt{3}\,\text{ημ}\theta}{2(\text{συν}\theta-1)}.$$

Άρα η εξίσωση της κάθετης από το A είναι:

$$y=m(x-2)\quad \text{όπου}\quad m=-\frac{1}{\lambda_{PA}}=-\frac{2(\text{συν}\theta-1)}{\sqrt{3}\,\text{ημ}\theta}$$

Το ορθόκεντρο H του τριγώνου APA' είναι το σημείο τομής των δύο υψών, δηλαδή των ευθειών:

$$\begin{cases} x = 2\,\text{συν}\theta, \\ y = -\dfrac{2(\text{συν}\theta - 1)}{\sqrt{3}\,\text{ημ}\theta}(x-2) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε το $x = 2\,\text{συν}\theta$:

$$y = -\frac{2(\text{συν}\theta - 1)}{\sqrt{3}\,\text{ημ}\theta}\big(2\,\text{συν}\theta - 2\big) = \frac{4(\text{συν}\theta - 1)^2}{\sqrt{3}\,\text{ημ}\theta}.$$

Έτσι, το ορθόκεντρο $H(x,y)$ έχει συντεταγμένες:

$$H\left(2\,\text{συν}\theta,\ \frac{4(\text{συν}\theta - 1)^2}{\sqrt{3}\,\text{ημ}\theta}\right).$$

Με πράξεις (εξάλειψη της θ) αποδεικνύεται ότι τα σημεία H ικανοποιούν τη σχέση:

$$4x^2 + 3y^2 = 16.$$

26. Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x - 2,\ \lambda \in \mathbb{R}$ τέμνει την έλλειψη με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

στα σημεία K και Λ.

i. Να δείξετε ότι το σημείο με συντεταγμένες (x,y) του μέσου M του $K\Lambda$ είναι

$$x = \frac{8\lambda}{4\lambda^2+1}, \qquad y = -\frac{2}{4\lambda^2+1}.$$

ii. Να βρείτε την *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M, όταν μεταβάλλεται το λ.

Λύση: (Ασκ. 5/133)

i. Αντικαθιστούμε $y = \lambda x - 2$ στην $x^2 + 4y^2 = 16$:

$$x^2 + 4(\lambda x - 2)^2 = 16 \ \Rightarrow\ (1+4\lambda^2)x^2 - 16\lambda x = 0.$$

Άρα οι τετμημένες των K, Λ είναι $x_1 = 0$ και $x_2 = \dfrac{16\lambda}{4\lambda^2+1}$. Το μέσο $M(x,y)$ έχει

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{8\lambda}{4\lambda^2+1}, \qquad y = \lambda x - 2 = -\frac{2}{4\lambda^2+1}.$$

ii. Από $x = \dfrac{8\lambda}{4\lambda^2+1}$ παίρνουμε $4\lambda^2+1 = \dfrac{8\lambda}{x}$. Με $y = -\dfrac{2}{4\lambda^2+1} \Rightarrow \lambda = -\dfrac{x}{4y}$. Αντικαθιστούμε:

$$4\left(\frac{x^2}{16y^2}\right)+1 = \frac{8(-x)}{x\cdot 4y} \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4y^2}+1 = -\frac{2}{y}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί y^2:

$$\frac{x^2}{4}+y^2+2y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4}+(y+1)^2 = 1.$$

27. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$9x^2+25y^2 = 225.$$

i. Να δείξετε ότι το σχήμα στο οποίο ανήκει ο *γεωμετρικός τόπος των μέσων* των χορδών της έλλειψης με κλίση λ, $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$, είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = -\frac{9}{25\lambda}x.$$

ii. Αν η ευθεία (ε) τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία, να δείξετε ότι η *εφαπτομένη* της έλλειψης σε οποιοδήποτε από αυτά τα σημεία έχει κλίση λ.

Λύση: (Ασκ. 6/133)

Η εξίσωση της έλλειψης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1.$$

i. Θεωρούμε μια χορδή της έλλειψης με κλίση λ, δηλαδή ευθεία της μορφής:

$$y = \lambda x + c.$$

Η χορδή αυτή τέμνει την έλλειψη, άρα το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1, \\ y = \lambda x + c \end{cases}$$

έχει δύο κοινά σημεία.

Αντικαθιστούμε το y και πολλαπλασιάζουμε με 225:

$$9x^2 + 25(\lambda x + c)^2 = 225 \;\Rightarrow\; (9 + 25\lambda^2)x^2 + 50\lambda c x + (25c^2 - 225) = 0.$$

Αν τα σημεία τομής είναι $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_2, y_2)$, το x του μέσου M είναι:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{B}{2A} = -\frac{50\lambda c}{2(9 + 25\lambda^2)} = -\frac{25\lambda c}{9 + 25\lambda^2}.$$

Αντίστοιχα:

$$y_M = \lambda x_M + c = \lambda\left(-\frac{25\lambda c}{9 + 25\lambda^2}\right) + c = c\left(1 - \frac{25\lambda^2}{9 + 25\lambda^2}\right) = \frac{9c}{9 + 25\lambda^2}.$$

Απαλείφουμε το c:

$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{\dfrac{9c}{9 + 25\lambda^2}}{-\dfrac{25\lambda c}{9 + 25\lambda^2}} = -\frac{9}{25\lambda}.$$

Άρα τα σημεία $M(x_M, y_M)$ ανήκουν στην ευθεία:

$$y = -\frac{9}{25\lambda}x.$$

ii. Η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Παραγωγίζοντας ως προς x:

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{9}\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{25y}.$$

Η κλίση της εφαπτομένης είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\dfrac{9x}{25y}$.

Για σημείο (x, y) της ευθείας $(\varepsilon) : y = -\dfrac{9}{25\lambda}x$:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{9x}{25(-\frac{9}{25\lambda}x)} = \lambda.$$

28. Να βρείτε τις *εξισώσεις των εφαπτομένων* της έλλειψης με εξίσωση

$$9x^2 + 25y^2 = 225,$$

οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(5, 6)$.

Λύση: (Ασκ. 7/134)

Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται στη μορφή:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Η γενική εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης είναι:

$$\frac{xx_1}{25} + \frac{yy_1}{9} = 1,$$

όπου το σημείο $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη:

$$\frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1.$$

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(5, 6)$, ικανοποιεί:

$$\frac{5x_1}{25} + \frac{6y_1}{9} = 1.$$

Το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{25} + \dfrac{y_1^2}{9} = 1, \\ \dfrac{5x_1}{25} + \dfrac{6y_1}{9} = 1 \end{cases}$$

πρέπει να λυθεί ως προς x_1, y_1.

Από τη δεύτερη εξίσωση:

$$\frac{x_1}{5} + \frac{2y_1}{3} = 1 \ \Rightarrow \ x_1 = 5 - \frac{10y_1}{3}.$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη:

$$\frac{(5 - \frac{10y_1}{3})^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1.$$

Πολλαπλασιάζουμε επί 225:

$$9(5 - \tfrac{10y_1}{3})^2 + 25y_1^2 = 225.$$

Αναπτύσσουμε:

$$9(25 - \tfrac{100y_1}{3} + \tfrac{100y_1^2}{9}) + 25y_1^2 = 225 \;\Rightarrow\; 225 - 300y_1 + 100y_1^2 + 25y_1^2 = 225.$$

Απλοποιούμε:

$$125y_1^2 - 300y_1 = 0 \;\Rightarrow\; 25y_1(5y_1 - 12) = 0.$$

Άρα $y_1 = 0$ ή $y_1 = \dfrac{12}{5} = 2.4$.

Για $y_1 = 0: \quad x_1 = 5$. Για $y_1 = 2.4: \quad x_1 = 5 - \frac{10(2.4)}{3} = 5 - 8 = -3$.

Επομένως τα σημεία επαφής είναι:

$$P_1(5, 0), \qquad P_2(-3,\, \tfrac{12}{5}).$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $P(x_1, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση:

$$\frac{xx_1}{25} + \frac{yy_1}{9} = 1.$$

Για $P_1(5, 0)$:

$$\frac{5x}{25} = 1 \;\Rightarrow\; x = 5.$$

Για $P_2(-3,\, \frac{12}{5})$:

$$\frac{-3x}{25} + \frac{y(\frac{12}{5})}{9} = 1 \;\Rightarrow\; -\frac{3x}{25} + \frac{4y}{15} = 1 \;\Rightarrow\; 9x - 20y + 75 = 0.$$

29. Να βρείτε τις *εξισώσεις των ελλείψεων* που διέρχονται από το σημείο $A(4, -1)$ και *εφάπτονται* της ευθείας $x + 4y - 10 = 0$.

Λύση: (Ασκ. 8/134)

Θεωρούμε έλλειψη με κέντρο την αρχή και άξονες στους $x'x,\ y'y$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b > 0).$$

Το σημείο $A(4,-1)$ ανήκει στην έλλειψη, άρα:

$$\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Η ευθεία $x+4y-10=0 \iff x+4y=10$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης, οπότε έχει μορφή:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

όπου το σημείο $P(x_1,y_1)$ ανήκει στην έλλειψη:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

Ταυτίζοντας τους συντελεστές με την $x+4y=10$ προκύπτει:

$$\frac{x_1}{a^2}=\frac{1}{10}, \qquad \frac{y_1}{b^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow\ x_1=\frac{a^2}{10}, \quad y_1=\frac{2b^2}{5}.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της έλλειψης:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{a^2}{100}+\frac{4b^2}{25}=1 \Rightarrow a^2+16b^2=100. \qquad (2)$$

Από (1) και (2):

$$\begin{cases} \dfrac{16}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1, \\ a^2+16b^2=100. \end{cases}$$

Θέτουμε $a^2=A,\ b^2=B$:

$$\frac{16}{A}+\frac{1}{B}=1 \Rightarrow AB-A-16B=0.$$

Αντικαθιστούμε $A=100-16B$:

$(100-16B)B-(100-16B)-16B=0 \Rightarrow 16B^2-100B+100=0 \Rightarrow 4B^2-25B+25=0.$

$$B=\frac{25\pm 15}{8} \Rightarrow B_1=5, \quad B_2=\frac{5}{4}.$$

Για $B_1 = 5 \Rightarrow A = 20$, για $B_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow A = 80$.

Άρα οι ζητούμενες ελλείψεις είναι:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1.$$

Και οι δύο ικανοποιούν το $A(4, -1)$ και εφάπτονται της ευθείας $x + 4y - 10 = 0$.

30. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

και τυχαίο σημείο της $T(a\sigma\upsilon\nu\theta,\ \beta\eta\mu\theta)$, με $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Από την κορυφή της $A(a, 0)$ φέρουμε *παράλληλη* προς την εφαπτομένη στο T, η οποία τέμνει την OT στο σημείο Σ (O η αρχή των αξόνων). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι:

$$\frac{x}{a} + \frac{ay^2}{\beta^2 x} = 1.$$

Λύση: (Ασκ. 9/134)

Το σημείο $T(a\sigma\upsilon\nu\theta,\ \beta\eta\mu\theta)$ ανήκει στην έλλειψη:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Η *εφαπτομένη* της στο σημείο T έχει εξίσωση:

$$\frac{x\, a\sigma\upsilon\nu\theta}{a^2} + \frac{y\, \beta\eta\mu\theta}{\beta^2} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{x\, \sigma\upsilon\nu\theta}{a} + \frac{y\, \eta\mu\theta}{\beta} = 1.$$

Η παράλληλη από την κορυφή $A(a, 0)$ έχει την ίδια κλίση, δηλαδή την ίδια μορφή:

$$\frac{x\, \sigma\upsilon\nu\theta}{a} + \frac{y\, \eta\mu\theta}{\beta} = k.$$

Επειδή διέρχεται από το $A(a, 0)$:

$$\frac{a\, \sigma\upsilon\nu\theta}{a} + \frac{0}{\beta} = k \Rightarrow k = \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας αυτής είναι:

$$\frac{x\,\text{συν}\theta}{a}+\frac{y\,\text{ημ}\theta}{\beta}=\text{συν}\theta.$$

Η OT (διάμετρος) έχει εξίσωση:

$$y=\frac{\beta\,\text{ημ}\theta}{a\,\text{συν}\theta}\,x.$$

Για το σημείο τομής $\Sigma(x,y)$, αντικαθιστούμε την y της OT στην ευθεία της $A\Sigma$:

$$\frac{x\,\text{συν}\theta}{a}+\frac{(\frac{\beta\,\text{ημ}\theta}{a\,\text{συν}\theta}x)\text{ημ}\theta}{\beta}=\text{συν}\theta.$$

Απλοποιούμε:

$$\frac{x\,\text{συν}\theta}{a}+\frac{x\,\text{ημ}^2\theta}{a\,\text{συν}\theta}=\text{συν}\theta\;\Rightarrow\;x\left(\frac{\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta}{a\,\text{συν}\theta}\right)=\text{συν}\theta\;\Rightarrow\;x=a\,\text{συν}^2\theta.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της OT:

$$y=\frac{\beta\,\text{ημ}\theta}{a\,\text{συν}\theta}\,x=\frac{\beta\,\text{ημ}\theta}{a\,\text{συν}\theta}\,a\text{συν}^2\theta=\beta\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta.$$

Έτσι, το σημείο Σ έχει συντεταγμένες:

$$\Sigma\big(a\text{συν}^2\theta,\;\beta\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta\big).$$

Για να βρούμε την εξίσωση της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου του Σ:

$$x=a\text{συν}^2\theta\Rightarrow\text{συν}^2\theta=\frac{x}{a}.$$

Και επειδή $\text{ημ}^2\theta=1-\text{συν}^2\theta=\frac{a-x}{a}$, έχουμε:

$$y=\beta\text{ημ}\theta\text{συν}\theta=\beta\sqrt{\frac{x}{a}\cdot\frac{a-x}{a}}\;\Rightarrow\;\frac{\beta^2y^2}{x^2}=\frac{a-x}{a}.$$

Μετά από πράξεις:

$$\frac{x}{a}+\frac{ay^2}{\beta^2x}=1.$$

31. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $x^2 + 4y^2 = 1$ και τυχαίο σημείο της P. Από το σημείο P φέρουμε *κάθετη* προς την ευθεία $x = 2$ και έστω N το ίχνος της κάθετης. Να δείξετε ότι η *εξίσωση* της καμπύλης στην οποία ανήκει ο *γεωμετρικός τόπος* του μέσου M του PN, όταν το P κινείται πάνω στην έλλειψη, είναι *κύκλος*.

Λύση: (Ασκ. 10/134)

Θέτουμε $P(x, y)$ σημείο της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 1$. Η ευθεία $x = 2$ είναι *κατακόρυφη*, άρα η κάθετη σε αυτή είναι *οριζόντια*. Επομένως η κάθετη από το P έχει εξίσωση $y = y_P = y$ και τέμνει την $x = 2$ στο

$$N(2,\, y).$$

Το *μέσο* M του PN έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x+2}{2},\, y\right).$$

Θέτοντας

$$X = \frac{x+2}{2}, \qquad Y = y \quad \Longrightarrow \quad x = 2X - 2,\;\; y = Y,$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση της έλλειψης παίρνουμε:

$$(2X-2)^2 + 4Y^2 = 1 \iff 4X^2 - 8X + 4 + 4Y^2 = 1 \iff 4\big[(X-1)^2 + Y^2\big] - 1 = 0.$$

Άρα

$$(X-1)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}.$$

Επομένως ο *γεωμετρικός τόπος* του M είναι *κύκλος* με *κέντρο* $(1, 0)$ και *ακτίνα* $\frac{1}{2}$:

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

32. Να βρείτε την *εξίσωση της εφαπτομένης* της έλλειψης

$$\beta^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 \beta^2$$

η οποία *αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες ίσα τμήματα.*

Λύση: (Ασκ. 1/135)

Η έλλειψη γράφεται στη μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Έστω ότι η ζητούμενη εφαπτομένη αποκόπτει *ίσα* και *θετικά* τμήματα p από τους άξονες. Τότε έχει εξίσωση στη μορφή *διεπαφών*:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p} = 1 \iff x + y = p, \qquad p > 0.$$

Για να είναι εφαπτομένη, το σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ y = p - x \end{cases}$$

πρέπει να έχει *μία* λύση. Αντικαθιστούμε $y = p - x$ στην έλλειψη:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(p-x)^2}{\beta^2} = 1 \iff (\beta^2 + a^2)x^2 - 2a^2px + a^2p^2 - a^2\beta^2 = 0.$$

Για εφαπτομένη, η διακρίνουσα μηδενίζεται:

$$\Delta = (2a^2p)^2 - 4(\beta^2 + a^2)(a^2p^2 - a^2\beta^2) = 0 \iff p^2 = a^2 + \beta^2.$$

Επειδή $p > 0$, παίρνουμε $p = \sqrt{a^2 + \beta^2}$.

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$$x + y = \sqrt{a^2 + \beta^2}.$$

33. Ο κύκλος $K_1 : (\Lambda, \rho)$ είναι εσωτερικός του κύκλου $K_2 : (K, R)$. Μεταβλητός κύκλος K_3 κέντρου M κινείται, έτσι ώστε να *εφάπτεται εσωτερικά* του κύκλου K_2 και *εξωτερικά* του κύκλου K_1. Να εξηγήσετε γιατί ο *γεωμετρικός τόπος* του κέντρου M είναι έλλειψη και να προσδιορίσετε τις *δύο εστίες* της.

Λύση: (Ασκ. 2/135)

Θέτουμε ακτίνα του K_3 ίση με $r > 0$. Οι συνθήκες εφαπτομένης γράφονται:

$$(\text{εσωτερική στο } K_2) \quad KM + r = R \;\Rightarrow\; r = R - KM,$$

$$(\text{εξωτερική στο } K_1) \quad M\Lambda = r + \rho.$$

Αντικαθιστούμε το r από την πρώτη στη δεύτερη:

$$M\Lambda = (R - KM) + \rho \iff KM + M\Lambda = R + \rho = \text{σταθ.}$$

Το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου M από τα δύο σταθερά σημεία K και Λ είναι *σταθερό* και ίσο με $2a = R + \rho$ (και πράγματι $R + \rho \geq K\Lambda + \rho > K\Lambda$, αφού ο K_1 είναι εσωτερικός του K_2).

Άρα, *από τον ορισμό της έλλειψης*, ο τόπος του M είναι έλλειψη με

$$\text{εστίες τα σημεία } K \text{ και } \Lambda, \qquad 2a = R + \rho.$$

Συνεπώς, οι δύο εστίες της έλλειψης είναι τα κέντρα K και Λ των δύο δοθέντων κύκλων.

34. Να δείξετε ότι η καμπύλη με εξίσωση

$$4x^2 + 9y^2 + 16x - 54y + 61 = 0$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$$

και να εξηγήσετε τι παριστάνει, κάνοντας τη γραφική της παράσταση.

Λύση: (Ασκ. 3/135)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$4(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 = 0 \;\Rightarrow\; 4\big[(x+2)^2 - 4\big] + 9\big[(y-3)^2 - 9\big] + 61 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4(x+2)^2 + 9(y-3)^2 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; 4(x+2)^2 + 9(y-3)^2 = 36.$$

Διαίρεση με 36:

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Άρα πρόκειται για *έλλειψη* με

$$\text{κέντρο } (-2,\,3), \qquad a^2=9 \Rightarrow a=3, \qquad \beta^2=4 \Rightarrow \beta=2,$$

με μεγάλο ημιάξονα παράλληλο στον $x'x$.

Κορυφές: $(-2\pm 3,\,3)=(-5,\,3),\ (1,\,3)$.

Συν-κορυφές: $(-2,\,3\pm 2)=(-2,\,5),\ (-2,\,1)$.

Εστιακή απόσταση: $\gamma=\sqrt{a^2-\beta^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, άρα εστίες $(-2\pm\sqrt{5},\,3)$.

Γραφική παράσταση: Έλλειψη με κέντρο $(-2,3)$, οριζόντιο μεγάλο ημιάξονα μήκους 3 και κατακόρυφο μικρό ημιάξονα μήκους 2, που διέρχεται από τα σημεία $(-5,3),\ (1,3),\ (-2,5),\ (-2,1)$.