Solved Problems - Page 78

1. Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα:

(α)

$$\int (x^5 - x^3 + x)\, dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$$

(β)

$$\int (7 - 5x^2 + 3x^4 + x^6)\, dx = 7x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + C$$

(γ)

$$\int \left(\frac{9}{7}x^8 - \frac{5}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1\right)\, dx = \frac{x^9}{7} - \frac{x^5}{3} - \frac{x^3}{2} - x + C$$

(δ)

$$\int 3(x^4 - \pi x)\, dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{3\pi}{2}x^2 + C$$

(ε)

$$\int \frac{x^3 - 4x}{5}\, dx = \frac{x^4}{20} - \frac{2}{5}x^2 + C$$

(στ)

$$\int 3x(1 - 2x^2)\, dx = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^4 + C$$

(ζ)

$$\int 2(x+2)^2\, dx = \frac{2}{3}(x+2)^3 + C$$

(η)

$$\int -3x^3(1 - x^3)^2\, dx = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{6}{7}x^7 - \frac{3}{10}x^{10} + C$$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ, ώστε:

$$\int \kappa x^{\kappa+\lambda}\, dx = 2x^4 + C$$

Υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \kappa x^{\kappa+\lambda}\, dx = \kappa \cdot \frac{x^{\kappa+\lambda+1}}{\kappa+\lambda+1} + C \quad (\kappa+\lambda \neq -1)$$

Για να ισχύει:

$$\kappa \cdot \frac{x^{\kappa+\lambda+1}}{\kappa+\lambda+1} = 2x^4$$

πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

- Ισότητα εκθετών:

$$\kappa+\lambda+1 = 4 \;\Rightarrow\; \kappa+\lambda = 3$$

- Ισότητα συντελεστών:

$$\frac{\kappa}{\kappa+\lambda+1} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{\kappa}{4} = 2 \;\Rightarrow\; \kappa = 8$$

Από τη σχέση $\kappa+\lambda = 3$ προκύπτει:

$$\lambda = 3 - 8 = -5$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\kappa = 8 \quad \text{και} \quad \lambda = -5$$

5. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f'(x) = ax+4,\ \forall x \in R$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(2,5)$.
Αφού υπάρχει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$, ισχύει:

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2.$$

Άρα

$$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + C.$$

Από $f(2) = 5$:

$$-4 + 8 + C = 5 \Rightarrow C = 1.$$

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 4x + 1}$$

6. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f'(x) = 2 - x,\ \forall x \in R$ και μέγιστη τιμή 8.

$$f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Το μέγιστο εμφανίζεται όταν $f'(x) = 0$:

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Από $f(2) = 8$:

$$4 - 2 + C = 8 \Rightarrow C = 6.$$

$$\boxed{f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + 6}$$

7. Για την πολυωνυμική συνάρτηση $y = f(x)$ ισχύει $f'(x) = 4x + 8$.
(i) Αν $f(-1) = -5$:

$$f(x) = 2x^2 + 8x + C.$$

$$2 - 8 + C = -5 \Rightarrow C = 1.$$

$$\boxed{f(x) = 2x^2 + 8x + 1}$$

(ii) Από $f'(x) = 0$:

$$4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$f(-2) = -7.$$

Ελάχιστο στο σημείο $\boxed{(-2,-7)}$.

8. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f''(x) = 3-2x$, που περνά από το $A(1,2)$ και έχει εφαπτομένη στο A με κλίση -1.

$$f'(x) = 3x - x^2 + C_1.$$

Από $f'(1) = -1$:

$$3 - 1 + C_1 = -1 \Rightarrow C_1 = -3.$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3x + C_2.$$

Από $f(1) = 2$:
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - 3 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{23}{6}.$$
$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{23}{6}}$$

9. Δίνεται $D(t) = 200(10 - t)$ και $V'(t) = -D(t)$.
(i)
$$V'(t) = -2000 + 200t \Rightarrow V(t) = V_0 - 2000t + 100t^2.$$
(ii) Αν $V(10) = 0$:
$$0 = V_0 - 20000 + 10000 \Rightarrow \boxed{V_0 = 10000}.$$

10. Δίνεται $m(x) = 10 + 3x^2$ και $K'(x) = m(x)$.
$$K(x) = 10x + x^3 + C.$$
Από $K(3) = 56$:
$$30 + 27 + C = 56 \Rightarrow C = -1.$$
$$K(10) = 100 + 1000 - 1 = \boxed{1099}.$$

11. Δίνεται $V'(t) = 5t(4 - t)$, $R = 5$ και αρχικό ύψος 2 m.
(i)
$$V(t) = 10t^2 - \frac{5}{3}t^3 + 50\pi.$$
(ii)
$$V(4) = \frac{160}{3} + 50\pi.$$
Από $V = 25\pi\nu$:
$$\nu(4) = 2 + \frac{32}{15\pi} \text{ m}.$$

12. Το κέρδος $P(x)$ μιας επιχείρησης σε ένα χρόνο είναι συνάρτηση του αριθμού x των προϊόντων που παράγει. Δίνεται ότι
$$P'(x) = -\frac{3x^2}{100} + 24x - 2000$$
και τα λειτουργικά έξοδα της επιχείρησης με μηδενική παραγωγή είναι €10000. Να υπολογίσετε το κέρδος (ή ζημιά) της επιχείρησης, όταν κατασκευάζει 500 υπολογιστές.
Από $P'(x)$ βρίσκουμε το $P(x)$:
$$P(x) = \int \left(-\frac{3x^2}{100} + 24x - 2000\right) dx = -\frac{x^3}{100} + 12x^2 - 2000x + C.$$
Με μηδενική παραγωγή, το κέρδος είναι αρνητικό και ίσο με τα έξοδα:
$$P(0) = -10000 \Rightarrow C = -10000.$$

Άρα

$$P(x) = -\frac{x^3}{100} + 12x^2 - 2000x - 10000.$$

Υπολογίζουμε για $x = 500$:

$$P(500) = -\frac{500^3}{100} + 12 \cdot 500^2 - 2000 \cdot 500 - 10000.$$

$$500^3 = 125000000 \Rightarrow -\frac{125000000}{100} = -1250000, \quad 12 \cdot 500^2 = 12 \cdot 250000 = 3000000.$$

$$P(500) = -1250000 + 3000000 - 1000000 - 10000 = 740000.$$

$$\boxed{P(500) = 740000 \text{ €}}$$