
Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος

Αόριστο Ολοκλήρωμα

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα πιο κάτω κλάσματα:

i. $\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$

ii. $\frac{5x+7}{2x^2+5x+2}$

iii. $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

iv. $\frac{3x-1}{x(x-1)^2}$

v. $\frac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2}$

vi. $\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$

vii. $\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$

viii. $\frac{3x^2+x+2}{x^3-1}$

ix. $\frac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

x. $\frac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$

Λύση:

(Ασχ. 1/12)

i.

$$\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$$

$$8x^2 - 19x + 2 = A(x-1)(x-4) + B(x+2)(x-4) + C(x+2)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 4, B = 1, C = 3$

$$\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$$

ii.

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{5x+7}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x+7 = A(x+2) + B(2x+1)$$

Λύνοντας: $A = 3, B = 1$

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{x+2}$$

iii.

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(x+1) + B$$

Λύνοντας: $A = 3, B = -1$

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

iv.

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x-1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Λύνοντας: $A = -1, B = 1, C = 2$

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

v.

$$\frac{5x^2 + 4x - 7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$5x^2 + 4x - 7 = A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)$$

Λύνοντας: $A = 2$, $B = 3$, $C = -1$

$$\frac{5x^2 + 4x - 7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

vi.

$$\frac{5x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$5x^2 - x + 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Λύνοντας: $A = 3$, $B = 2$, $C = 1$

$$\frac{5x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

vii.

$$\frac{3x^2 + 7x + 2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$3x^2 + 7x + 2 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+1)$$

Λύνοντας: $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{7}{2}$, $C = \frac{9}{2}$

$$\frac{3x^2 + 7x + 2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{7x+9}{2(x^2+2x+5)}$$

viii.

$$\frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - 1} = \frac{3x^2 + x + 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$3x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Λύνοντας: $A = 2$, $B = 1$, $C = 0$

$$\frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

ix.

$$\frac{x^3 - 7x^2 - 13x - 15}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{Διαίρεση: } x^3 - 7x^2 - 13x - 15 \div (x^2 - 2x - 3) = x - 5 + \frac{-20x - 30}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{-20x - 30}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1} \implies A = -\frac{45}{2}, B = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x^3 - 7x^2 - 13x - 15}{x^2 - 2x - 3} = x - 5 - \frac{45}{2(x - 3)} + \frac{5}{2(x + 1)}$$

x.

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 7x + 7}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{Διαίρεση: } 2x^3 - 9x^2 + 7x + 7 \div (x^2 - 5x + 6) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \implies A = -1, B = 1$$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 7x + 7}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Υπενθύμιση:

1. Διαφορετικοί Γραμμικοί Παράγοντες

Παρονομαστής: $(x-a)(x-b)\dots$

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Παράδειγμα: $\frac{5x+7}{(2x+1)(x+2)}$

2. Επαναλαμβανόμενοι Γραμμικοί Παράγοντες

Παρονομαστής: $(x-a)^n$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Παράδειγμα: $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

3. Αδιαίρετοι Δευτεροβάθμιοι Παράγοντες

Παρονομαστής: $x^2 + bx + c$ με $\Delta = b^2 - 4c < 0$

$$\frac{P(x)}{x^2 + bx + c} = \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

Παράδειγμα: $\frac{5x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+1)}$

4. Μη Κατάλληλα Κλάσματα (Improper Fractions)

Όταν ο βαθμός του αριθμητή \geq του παρονομαστή, διαιρούμε πρώτα:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad \deg(R) < \deg(Q)$$

Παράδειγμα: $\frac{x^3 - 7x^2 - 13x - 15}{x^2 - 2x - 3}$

2. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\int x^4 dx$	vii. $\int (u^2 - 3u + 1) du$	xiii. $\int \frac{u^4 - 5u^3 + 3u}{u^2} du$
ii. $\int x^{-2} dx$	viii. $\int (x + 2\sqrt{x} - \pi) dx$	xiv. $\int \frac{3x - x^2 + 2x^3}{x^3} dx$
iii. $\int x^{3/4} dx$	ix. $\int (e^x + 3x) dx$	xv. $\int (\sin \theta - \cos \theta) d\theta$
iv. $\int \frac{1}{u^4} du$	x. $\int (u - 5)^2 du$	xvi. $\int (3\theta - \sec^2 \theta) d\theta$
v. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	xi. $\int 2u(u^2 - 3) du$	xvii. $\int \frac{1}{1 + x^2 - 2x} dx$
vi. $\int \frac{2}{3\sqrt{u}} du$	xii. $\int \sqrt{x}(x - 2) dx$	xviii. $\int \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

Λύση:

(Ασκ. 1/25)

$$\begin{aligned}
 \text{i. } \int x^4 dx &= \frac{x^5}{5} + C \\
 \text{ii. } \int x^{-2} dx &= -\frac{1}{x} + C \\
 \text{iii. } \int x^{3/4} dx &= \frac{4}{7}x^{7/4} + C \\
 \text{iv. } \int \frac{1}{u^4} du &= -\frac{1}{3u^3} + C \\
 \text{v. } \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} + C \\
 \text{vi. } \int \frac{2}{3\sqrt{u}} du &= \frac{4}{3}\sqrt{u} + C \\
 \text{vii. } \int (u^2 - 3u + 1) du &= \frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + u + C \\
 \text{viii. } \int (x + 2\sqrt{x} - \pi) dx &= \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{3/2} - \pi x + C \\
 \text{ix. } \int (e^x + 3x) dx &= e^x + \frac{3x^2}{2} + C \\
 \text{x. } \int (u - 5)^2 du &= \frac{u^3}{3} - 5u^2 + 25u + C
 \end{aligned}$$

$$\text{xi. } \int 2u(u^2 - 3) du = \frac{u^4}{2} - 3u^2 + C$$

$$\text{xii. } \int \sqrt{x}(x - 2) dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + C$$

$$\text{xiii. } \int \frac{u^4 - 5u^3 + 3u}{u^2} du = \frac{u^3}{3} - \frac{5u^2}{2} + 3 \ln |u| + C$$

$$\text{xiv. } \int \frac{3x - x^2 + 2x^3}{x^3} dx = -\frac{3}{x} - \ln |x| + 2x + C$$

$$\text{xv. } \int (\sin \theta - \cos \theta) d\theta = -\cos \theta - \sin \theta + C$$

$$\text{xvi. } \int (3\theta - \sec^2 \theta) d\theta = \frac{3\theta^2}{2} - \tan \theta + C$$

$$\text{xvii. } \int \frac{1}{1 + x^2 - 2x} dx = -\frac{1}{x - 1} + C$$

$$\text{xviii. } \int \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 2 \arcsin(x) + C$$

3. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα, με την μέθοδο αντικατάστασης.

$$\text{i. } \int (x + 3)^2 dx \quad \text{vii. } \int 3(8x - 1)e^{4x^2 - x} dx \quad \text{xiii. } \int xe^{1 - 3x^2} dx$$

$$\text{ii. } \int \sqrt{x + 1} dx \quad \text{viii. } \int x^2(3 - 10x^3)^4 dx \quad \text{xiv. } \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{iii. } \int \frac{3}{5x + 4} dx \quad \text{ix. } \int 90x^2 \sin(2 + 6x^3) dx \quad \text{xv. } \int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$$

$$\text{iv. } \int \frac{3x}{5x^2 + 4} dx \quad \text{x. } \int \frac{4x + 3}{4x^2 + 6x - 1} dx \quad \text{xvi. } \int x \sin(x^2 + 1) dx$$

$$\text{v. } \int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx \quad \text{xi. } \int \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx \quad \text{xvii. } \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1 - e^x}} dx$$

$$\text{vi. } \int \frac{3}{1 + 9x^2} dx \quad \text{xii. } \int \sin \theta (1 + \cos \theta)^3 d\theta \quad \text{xviii. } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} dx$$

Λύση:

(Ασκ. 1/30)

i.

$$\int (x+3)^2 dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = x + 3 \Rightarrow du = dx$$

Άρα:

$$\int (x+3)^2 dx = \int u^2 du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$\frac{(x+3)^3}{3} + C$$

Προσοχή: Αυτό το ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\int f^\nu(x) d(f(x)) = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c$

ii.

$$\int \sqrt{x+1} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$$

Άρα:

$$\int \sqrt{x+1} dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$\frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + C$$

iii.

$$\int \frac{3}{5x+4} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 5x + 4 \Rightarrow du = 5 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$$

Άρα:

$$\int \frac{3}{5x+4} dx = \int \frac{3}{u} \cdot \frac{du}{5} = \frac{3}{5} \int \frac{1}{u} du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{3}{5} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{5} \ln |u| + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$\frac{3}{5} \ln |5x + 4| + C$$

iv.

$$\int \frac{3x}{5x^2 + 4} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 5x^2 + 4 \Rightarrow du = 10x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{10}$$

Άρα:

$$\int \frac{3x}{5x^2 + 4} dx = \int \frac{3}{u} \cdot \frac{du}{10} = \frac{3}{10} \int \frac{1}{u} du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{3}{10} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{10} \ln |u| + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$\frac{3}{10} \ln |5x^2 + 4| + C$$

v.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1 - 4x^2 \Rightarrow du = -8x dx \Rightarrow x dx = -\frac{du}{8}$$

Άρα:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{du}{8}\right) = -\frac{1}{8} \int u^{-1/2} du$$

Υπολογίζουμε:

$$-\frac{1}{8} \int u^{-1/2} du = -\frac{1}{8} \cdot (2u^{1/2}) + C = -\frac{1}{4} \sqrt{u} + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C$$

vi.

$$\int \frac{3}{1+9x^2} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 3x \quad \Rightarrow \quad du = 3 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{3}$$

Άρα:

$$\int \frac{3}{1+9x^2} dx = \int \frac{3}{1+u^2} \cdot \frac{du}{3} = \int \frac{1}{1+u^2} du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$\arctan(3x) + C$$

vii.

$$\int 3(8x-1)e^{4x^2-x} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 4x^2 - x \quad \Rightarrow \quad du = (8x-1) dx$$

Άρα:

$$\int 3(8x-1)e^{4x^2-x} dx = \int 3e^u du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int 3e^u du = 3e^u + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$3e^{4x^2-x} + C$$

viii.

$$\int x^2(3-10x^3)^4 dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 3 - 10x^3 \Rightarrow du = -30x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = -\frac{du}{30}$$

Άρα:

$$\int x^2(3 - 10x^3)^4 dx = \int u^4 \cdot \left(-\frac{du}{30}\right) = -\frac{1}{30} \int u^4 du$$

Υπολογίζουμε:

$$-\frac{1}{30} \int u^4 du = -\frac{1}{30} \cdot \frac{u^5}{5} + C = -\frac{u^5}{150} + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-\frac{(3 - 10x^3)^5}{150} + C$$

ix.

$$\int 90x^2 \sin(2 + 6x^3) dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 2 + 6x^3 \Rightarrow du = 18x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{18}$$

Άρα:

$$\int 90x^2 \sin(2 + 6x^3) dx = \int 90 \cdot \frac{1}{18} \sin(u) du = \int 5 \sin(u) du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int 5 \sin(u) du = -5 \cos(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-5 \cos(2 + 6x^3) + C$$

x.

$$\int \frac{4x + 3}{4x^2 + 6x - 1} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 4x^2 + 6x - 1 \Rightarrow du = (8x + 6) dx = 2(4x + 3) dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2(4x + 3)}$$

Άρα:

$$\int \frac{4x + 3}{4x^2 + 6x - 1} dx = \int \frac{4x + 3}{u} \cdot \frac{du}{2(4x + 3)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$\frac{1}{2} \ln |4x^2 + 6x - 1| + C$$

xi.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2} \arcsin(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$\frac{1}{2} \arcsin(2x) + C$$

xii.

$$\int \sin \theta (1 + \cos \theta)^3 d\theta$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1 + \cos \theta \quad \Rightarrow \quad du = -\sin \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \sin \theta d\theta = -du$$

Άρα:

$$\int \sin \theta (1 + \cos \theta)^3 d\theta = \int u^3 \cdot (-du) = - \int u^3 du$$

Υπολογίζουμε:

$$- \int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C$$

Επιστρέφουμε στο θ :

$$-\frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} + C$$

xiii.

$$\int x e^{1-3x^2} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1 - 3x^2 \Rightarrow du = -6x dx \Rightarrow x dx = -\frac{du}{6}$$

Άρα:

$$\int x e^{1-3x^2} dx = \int e^u \cdot \left(-\frac{du}{6}\right) = -\frac{1}{6} \int e^u du$$

Υπολογίζουμε:

$$-\frac{1}{6} \int e^u du = -\frac{1}{6} e^u + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-\frac{1}{6} e^{1-3x^2} + C$$

xiv.

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx/x = du$$

Άρα:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(u) du$$

Υπολογίζουμε:

$$\int \sin(u) du = -\cos(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-\cos(\ln x) + C$$

xv.

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \Rightarrow x = u^4, \quad dx = 4u^3 du$$

Επιπλέον:

$$\sqrt{x} = u^2$$

Άρα:

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1 - u^2}{1 + u} \cdot 4u^3 du = 4 \int \frac{u^3 - u^5}{1 + u} du$$

Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\frac{u^3 - u^5}{1 + u} = -u^3(u - 1)$$

Άρα:

$$4 \int (-u^3(u - 1)) du = -4 \int (u^4 - u^3) du = -4 \cdot \frac{u^5}{5} + 4 \cdot \frac{u^4}{4} + C = -\frac{4}{5}u^5 + u^4 + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-\frac{4}{5}x^{5/4} + x + C$$

xvi.

$$\int x \sin(x^2 + 1) dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

Άρα:

$$\int x \sin(x^2 + 1) dx = \int \sin(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sin(u) du$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{2} \int \sin(u) du = -\frac{1}{2} \cos(u) + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C$$

xvii.

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1 - e^x}} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$u = 1 - e^x \Rightarrow du = -e^x dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{e^x}$$

Γράφουμε:

$$e^{3x} = e^{2x} \cdot e^x$$

Άρα:

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1 - e^x}} dx = - \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{u}} du$$

Αλλά $e^{2x} = (1 - u)^2$, οπότε:

$$-\int \frac{(1-u)^2}{\sqrt{u}} du = -\int \frac{1-2u+u^2}{\sqrt{u}} du = -\int (u^{-1/2} - 2u^{1/2} + u^{3/2}) du$$

Υπολογίζουμε:

$$-2\sqrt{u} + \frac{4}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-2\sqrt{1-e^x} + \frac{4}{3}(1-e^x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1-e^x)^{5/2} + C$$

xviii.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$x = 3 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad dx = 3 \cos \theta d\theta$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{1}{(3 \sin \theta)^2 \sqrt{9-(3 \sin \theta)^2}} \cdot 3 \cos \theta d\theta$$

Απλοποιούμε:

$$\begin{aligned} \sqrt{9-9 \sin^2 \theta} &= 3 \cos \theta \\ \int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta \cdot 3 \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{9} \int \csc^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{9} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{9} \cot \theta + C$$

Επιστρέφουμε στο x :

$$-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$$

4. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματά, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις πιο κάτω τυποποιημένες μορφές ολοκληρωμάτων.

$$\int f(ax + \beta) dx = \frac{1}{a} F(ax + \beta) + c \quad (1)$$

$$\int f^\nu(x) f'(x) dx = \int f^\nu(x) d(f(x)) = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c, \quad \nu \neq -1 \quad (2)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{f(x)} d(f(x)) = \ln |f(x)| + c \quad (3)$$

i. $\int \cos 7x dx$	vii. $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2} dx$	xiii. $\int \cot x dx$
ii. $\int \csc^2(5x-3) dx$	viii. $\int \frac{(\ln x)^6}{x} dx$	xiv. $\int \frac{1}{25x^2+1} dx$
iii. $\int (6x-1)^{21} dx$	ix. $\int \frac{2 \sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$	xv. $\int \frac{1}{(2x+1)^5} dx$
iv. $\int e^{4-9x} dx$	x. $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4} dx$	xvi. $\int \tan x dx$
v. $\int (e^{4x} - 2 \cdot 4^{-3x}) dx$	xi. $\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx$	xvii. $\int \frac{2+2 \sin x}{x-\cos x} dx$
vi. $\int (\sin 4x - \sin 5x) dx$	xii. $\int \frac{3x}{x^2+3} dx$	xviii. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Λύση:

(Ασκ. 1/34)

i. $\int \cos 7x dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C$$

ii. $\int \csc^2(5x-3) dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \csc^2(5x-3) dx = -\frac{1}{5} \cot(5x-3) + C$$

iii. $\int (6x-1)^{21} dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{1}{6} \cdot 6(6x-1)^{21} dx = \frac{(6x-1)^{22}}{132} + C$$

iv. $\int e^{4-9x} dx$ (Τύπος - 1)

$$\int e^{4-9x} dx = -\frac{1}{9} e^{4-9x} + C$$

v. $\int (e^{4x} - 2 \cdot 4^{-3x}) dx$ (Τύπος - 1)

$$\int e^{4x} dx - 2 \int 4^{-3x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + \frac{2}{3 \ln 4} 4^{-3x} + C$$

vi. $\int (\sin 4x - \sin 5x) dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \sin 4x dx - \int \sin 5x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{5} \cos 5x + C$$

vii. $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2} dx$ (Τύπος - 2)

$$\int (\arctan x)^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{(\arctan x)^4}{4} + C$$

viii. $\int \frac{(\ln x)^6}{x} dx$ (Τύπος - 2)

$$\int (\ln x)^6 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^7}{7} + C$$

ix. $\int \frac{2 \sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{2 \sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot 2 \sin x dx = 4\sqrt{1-\cos x} + C$$

x. $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4} dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{1}{(e^x-1)^4} \cdot e^x dx = -\frac{1}{3(e^x-1)^3} + C$$

xi. $\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \frac{1}{2+\tan x} \cdot \sec^2 x dx = \ln |2+\tan x| + C$$

xii. $\int \frac{3x}{x^2 + 3} dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 3| + C$$

xiii. $\int \cot x dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C$$

xiv. $\int \frac{1}{25x^2 + 1} dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \frac{1}{(5x)^2 + 1} dx = \frac{1}{5} \arctan(5x) + C$$

xv. $\int \frac{1}{(2x + 1)^5} dx$ (Τύπος - 1)

$$\int (2x + 1)^{-5} dx = -\frac{1}{8(2x + 1)^4} + C$$

xvi. $\int \tan x dx$ (Τύπος - 3)

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C$$

xvii. $\int \frac{2 + 2 \sin x}{x - \cos x} dx$ (Τύπος - 2)

$$\int \frac{2 + 2 \sin x}{x - \cos x} dx = 2 \int \frac{1 + \sin x}{x - \cos x} dx = 2 \ln |x - \cos x| + C$$

xviii. $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ (Τύπος - 1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} + C$$

5. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα, με την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

- | | | |
|---|--|---|
| i. $\int x e^{6x} dx$ | v. $\int e^x \cos(x) dx$ | ix. $\int e^{x+\ln x} dx, \quad x > 0$ |
| ii. $\int (3x+5) \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$ | vi. $\int x^4 e^x dx$ | x. $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx$ |
| iii. $\int \ln(x) dx$ | vii. $\int (3x+x^2) \sin(2x) dx$ | xi. $\int x^2 \cos 3x dx$ |
| iv. $\int x^5 \sqrt{x^3+1} dx$ | viii. $\int (4x^3 - 9x^2 + 7x + 3)e^{-x} dx$ | xii. $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx$ |

Λύση:

(Ασχ. 1/38)

i.

$$\int x e^{6x} dx$$

$$u = x, \quad dv = e^{6x} dx \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad v = \frac{1}{6} e^{6x}$$

$$\int x e^{6x} dx = uv - \int v du = \frac{x e^{6x}}{6} - \frac{1}{6} \int e^{6x} dx = \frac{x e^{6x}}{6} - \frac{e^{6x}}{36} + C$$

ii.

$$\int (3x+5) \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

$$u = 3x+5, \quad dv = \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx \quad \Rightarrow \quad du = 3dx, \quad v = 4 \sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \int (3x+5) \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx &= uv - \int v du \\ &= 4(3x+5) \sin\left(\frac{x}{4}\right) - \int 4 \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cdot 3dx \\ &= 4(3x+5) \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 12 \int \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx \\ &\quad \int \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx = -4 \cos\left(\frac{x}{4}\right) \\ \Rightarrow \int (3x+5) \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx &= 4(3x+5) \sin\left(\frac{x}{4}\right) + 48 \cos\left(\frac{x}{4}\right) + C \end{aligned}$$

iii.

$$\int \ln x \, dx$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

$$\int \ln x \, dx = uv - \int v \, du = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

iv.

$$\int x^5 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$$

Θέτουμε

$$u = x^3, \quad dv = x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$$

οπότε

$$du = 3x^2 dx, \quad v = \frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2}.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$I = uv - \int v \, du$$

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \int \frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} \cdot 3x^2 \, dx$$

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \frac{2}{3} \int x^2(x^3 + 1)^{3/2} \, dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε

$$t = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad dt = 3x^2 dx,$$

οπότε

$$\int x^2(x^3 + 1)^{3/2} \, dx = \frac{1}{3} \int t^{3/2} \, dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} = \frac{2}{15}(x^3 + 1)^{5/2}.$$

Άρα

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{15}(x^3 + 1)^{5/2} + C$$

$$I = \frac{2}{9}x^3(x^3 + 1)^{3/2} - \frac{4}{45}(x^3 + 1)^{5/2} + C.$$

v.

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι ανεξαρτήτως του ποιο μέρος επιλέξουμε ως u , η παράγωγός του δεν θα εξαφανίσει το όρο. Δεν πειράζει ποιο θα επιλέξουμε, οπότε θέτουμε

$$u = \cos x \quad dv = e^x dx$$

$$du = -\sin x \, dx \quad v = e^x$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, παίρνουμε

$$\int e^x \cos x \, dx = uv - \int v \, du = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

Τώρα, εφαρμόζουμε ξανά ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το υπόλοιπο ολοκλήρωμα. Επιλέγουμε

$$\begin{aligned} u &= \sin x & dv &= e^x dx \\ du &= \cos x \, dx & v &= e^x \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int e^x \sin x \, dx = uv - \int v \, du = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Παρατηρούμε ότι το ίδιο ολοκλήρωμα εμφανίζεται και στις δύο πλευρές. Προσθέτουμε το ολοκλήρωμα και στις δύο πλευρές:

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\cos x + \sin x)$$

Τέλος, διαιρούμε με 2 και παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

vi.

$$I = \int x^4 e^x \, dx$$

Ολοκλήρωση κατά παραγόντες:

$$u = x^4, \quad dv = e^x \, dx \quad \Rightarrow \quad du = 4x^3 \, dx, \quad v = e^x$$

$$I = x^4 e^x - 4 \int x^3 e^x \, dx$$

Ορίζουμε:

$$I_1 = \int x^3 e^x \, dx$$

Εφαρμόζουμε πάλι ολοκλήρωση κατά παραγόντες:

$$u = x^3, \quad dv = e^x \, dx \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2 \, dx, \quad v = e^x$$

$$I_1 = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

Ορίζουμε:

$$I_2 = \int x^2 e^x dx$$

$$u = x^2, \quad dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x dx, \quad v = e^x$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Ορίζουμε:

$$I_3 = \int x e^x dx$$

$$u = x, \quad dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, \quad v = e^x$$

$$I_3 = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

Συνδυάζοντας όλα τα αποτελέσματα:

$$I_2 = x^2 e^x - 2I_3 = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

$$I_1 = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x$$

$$I = x^4 e^x - 4I_1 = x^4 e^x - 4(x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x)$$

$$I = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

vii.

$$\int (3x + x^2) \sin 2x dx$$

Πρώτη ολοκλήρωση κατά μέρη για $u = 3x + x^2$, $dv = \sin 2x dx$

$$u = 3x + x^2 \Rightarrow du = (3 + 2x) dx$$

$$dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

Τότε

$$\int (3x + x^2) \sin 2x dx = -\frac{1}{2}(3x + x^2) \cos 2x + \frac{1}{2} \int (3 + 2x) \cos 2x dx$$

Δεύτερη ολοκλήρωση κατά μέρη για $\int (3 + 2x) \cos 2x dx$

$$u = 3 + 2x \Rightarrow du = 2 dx$$

$$dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Τότε

$$\int (3 + 2x) \cos 2x dx = (3 + 2x) \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x dx = \frac{1}{2}(3 + 2x) \sin 2x - \int \sin 2x dx$$

Υπολογίζουμε $\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$ και συνδυάζουμε όλα τα μέρη:

$$\int (3x + x^2) \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}(3x + x^2) \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(3 + 2x) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right] + C$$

Απλοποιώντας:

$$\int (3x + x^2) \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}(3x + x^2) \cos 2x + \frac{1}{4}(3 + 2x) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

viii.

$$\int (4x^3 - 9x^2 + 7x + 3)e^{-x} \, dx = 4 \int x^3 e^{-x} \, dx - 9 \int x^2 e^{-x} \, dx + 7 \int x e^{-x} \, dx + 3 \int e^{-x} \, dx$$

$$I_1 = \int x^3 e^{-x} \, dx, \quad u = x^3, \quad dv = e^{-x} \, dx \Rightarrow du = 3x^2 \, dx, \quad v = -e^{-x}$$

$$I_1 = -x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 e^{-x} \, dx$$

$$I_2 = \int x^2 e^{-x} \, dx, \quad u = x^2, \quad dv = e^{-x} \, dx \Rightarrow du = 2x \, dx, \quad v = -e^{-x}$$

$$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \, dx$$

$$I_3 = \int x e^{-x} \, dx, \quad u = x, \quad dv = e^{-x} \, dx \Rightarrow du = dx, \quad v = -e^{-x}$$

$$I_3 = -x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -x e^{-x} - e^{-x} = -(x + 1)e^{-x}$$

$$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2I_3 = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}, \quad I_1 = -x^3 e^{-x} + 3I_2 = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\int (4x^3 - 9x^2 + 7x + 3)e^{-x} \, dx = -(4x^3 + 3x^2 + 13x + 16)e^{-x} + C$$

ix.

$$\int x e^x \, dx$$

$$u = x, \quad dv = e^x \, dx \Rightarrow du = dx, \quad v = e^x$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

x.

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

Επιλέγουμε ολοκλήρωση κατά μέρη

$$u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad dv = dx$$

Υπολογίζουμε du και v

$$du = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad v = x$$

Άρα

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Υπολογίζουμε το νέο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1}$$

Τελικό αποτέλεσμα

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$$

xi.

$$\int x^2 \cos 3x dx$$

$$u = x^2, dv = \cos 3x dx \Rightarrow du = 2x dx, v = \frac{\sin 3x}{3}$$

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{x^2 \sin 3x}{3} - \int \frac{2x \sin 3x}{3} dx$$

όπου

$$\int x \sin 3x dx = -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{\sin 3x}{9} + C$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos 3x dx = \frac{x^2 \sin 3x}{3} + \frac{2x \cos 3x}{3} - \frac{2 \sin 3x}{9} + C$$

xii.

$$I = \int e^{\sqrt{3x+9}} dx$$

Κάνουμε αντικατάσταση για να απλοποιήσουμε το dx :

$$t = \sqrt{3x+9} \Rightarrow t^2 = 3x+9 \Rightarrow dx = \frac{2t}{3} dt$$

Άρα:

$$I = \int e^{\sqrt{3x+9}} dx = \int e^t \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{3} \int te^t dt$$

Ορίζουμε:

$$I_1 = \int te^t dt$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παραγόντες για το I_1 :

$$u = t, \quad dv = e^t dt \Rightarrow du = dt, \quad v = e^t$$

Τότε:

$$I_1 = uv - \int v du = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

Επιστρέφουμε στο αρχικό x :

$$I = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} (te^t - e^t) + C = \frac{2}{3} \left(\sqrt{3x+9} e^{\sqrt{3x+9}} - e^{\sqrt{3x+9}} \right) + C$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\int e^{\sqrt{3x+9}} dx = \frac{2}{3} e^{\sqrt{3x+9}} (\sqrt{3x+9} - 1) + C$$

6. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}} dx$

ii. $\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}} dx$

iii. $\int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2} dw$

iv. $\int \frac{t-2}{t-3\sqrt{2t-4}+2} dt$

Λύση:

i. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt[3]{x-3}$$

$$x = u^3 + 3 \quad dx = 3u^2 du$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{(u^3 + 3) + 2}{u} 3u^2 du &= \int 3u^4 + 15u du \\ &= \frac{3}{5}u^5 + \frac{15}{2}u^2 + c \\ &= \frac{3}{5}(x-3)^{5/3} + \frac{15}{2}(x-3)^{2/3} + c \end{aligned}$$

ii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt{x+10} \quad x = u^2 - 10 \quad dx = 2u du$$

$$\int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}} dx = \int \frac{2}{u^2 - 10 - 3u} (2u) du = \int \frac{4u}{u^2 - 3u - 10} du$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{4u}{(u-5)(u+2)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u+2}$$

$$4u = A(u+2) + B(u-5)$$

$$u = -2 \quad -8 = B(-7) \quad B = \frac{8}{7}$$

$$u = 5 \quad 20 = A(7) \quad A = \frac{20}{7}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x - 3\sqrt{x+10}} dx &= \int \frac{20}{7} \frac{1}{u-5} + \frac{8}{7} \frac{1}{u+2} du \\ &= \frac{20}{7} \ln |u-5| + \frac{8}{7} \ln |u+2| + c \\ &= \frac{20}{7} \ln |\sqrt{x+10} - 5| + \frac{8}{7} \ln |\sqrt{x+10} + 2| + c \end{aligned}$$

iii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt{1-w}$$

$$w = 1 - u^2 \quad \Rightarrow \quad dw = -2u \, du$$

$$\int \frac{1}{w + 2\sqrt{1-w} + 2} dw = \int \frac{1}{1 - u^2 + 2u + 2} (-2u) \, du = \int \frac{2u}{u^2 - 2u - 3} \, du$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{2u}{(u+1)(u-3)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-3}$$

$$2u = A(u-3) + B(u+1)$$

$$u = 3 : \quad 6 = 4B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$u = -1 : \quad -2 = -4A \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{2}$$

Επομένως,

$$\int \frac{2u}{(u+1)(u-3)} \, du = \int \frac{1}{2} \frac{1}{u+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{u-3} \, du = \frac{1}{2} \ln |u+1| + \frac{3}{2} \ln |u-3| + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{w + 2\sqrt{1-w} + 2} dw = \frac{1}{2} \ln |\sqrt{1-w} + 1| + \frac{3}{2} \ln |\sqrt{1-w} - 3| + c$$

iv. Θέτω αντικατάσταση

$$u = \sqrt{2t-4}$$

$$t = \frac{1}{2}u^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad dt = u \, du$$

$$\int \frac{t-2}{t-3\sqrt{2t-4}+2} dt = \int \frac{\frac{1}{2}u^2+2-2}{\frac{1}{2}u^2+2-3u+2} (u) \, du = \int \frac{u^3}{u^2-6u+8} \, du$$

$$\frac{u^3}{u^2-6u+8} = u + 6 + \frac{28u-48}{(u-2)(u-4)}$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{28u-48}{(u-2)(u-4)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u-4}$$

$$28u-48 = A(u-4) + B(u-2)$$

$$u = 4 : \quad 64 = 2B \quad \Rightarrow \quad A = -4$$

$$u = 2 : \quad 8 = -2A \quad \Rightarrow \quad B = 32$$

Επομένως,

$$\int \frac{u^3}{u^2 - 6u + 8} du = \int u + 6 - \frac{4}{u-2} + \frac{32}{u-4} du = \frac{1}{2}u^2 + 6u - 4 \ln |u-2| + 32 \ln |u-4| + c$$

$$\implies \int \frac{u^3}{u^2 - 6u + 8} du = t - 2 + 6\sqrt{2t-4} - 4 \ln |\sqrt{2t-4} - 2| + 32 \ln |\sqrt{2t-4} - 4| + c$$

7. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i. $\int \sin^5 x \, dx$

v. $\int \sec^9 x \tan^5 x \, dx$

ix. $\int \cos^4(2t) \, dt$

ii. $\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx$

vi. $\int \tan^3 x \, dx$

x. $\int \frac{2 + 7 \sin^3(z)}{\cos^2(z)} \, dz$

iii. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

vii. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} \, dx$

xi. $\int \tan^3(6x) \sec^{10}(6x) \, dx$

iv. $\int \cos(15x) \cos(4x) \, dx$

viii. $\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) \, dx$

xii. $\int \cos(3t) \sin(8t) \, dt$

Λύση:

i.

$$\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx$$

Χρήση τριγωνομετρικής ιδιότητας,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx \\ &= \int \sin^5 x \, dx = - \int (1 - u^2)^2 \, du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = - \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right) + c \\ &= - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
 \int \sin^6 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x \, dx \\
 &= \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \quad u = \sin x \\
 &= \int u^6 (1 - u^2) \, du = \int u^6 - u^8 \, du \\
 &= \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + c
 \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \right) \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \right) dx = \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2(2x) \, dx \\
 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4} \int 1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(4x)) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x) \, dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin(4x) \right) + c \\
 &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin(4x) + c
 \end{aligned}$$

Εναλλακτική λύση,

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{2} \sin(2x) \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2(2x) dx \\
 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{8} \int 1 - \cos(4x) \, dx \\
 &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin(4x) + c
 \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}
 \int \cos(15x) \cos(4x) \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos(11x) + \cos(19x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11} \sin(11x) + \frac{1}{19} \sin(19x) \right) + c
 \end{aligned}$$

v.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^9 x \tan^5 x \, dx &= \int \sec^8 x \tan^4 x \tan x \sec x \, dx \\
 &= \int \sec^8 x (\sec^2 x - 1)^2 \tan x \sec x \, dx \quad u = \sec x \\
 &= \int u^8 (u^2 - 1)^2 du = \int u^{12} - 2u^{10} + u^8 \, du \\
 &= \frac{1}{13} \sec^{13} x - \frac{2}{11} \sec^{11} x + \frac{1}{9} \sec^9 x + c
 \end{aligned}$$

vi.

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3 x \, dx &= \int \tan x \tan^2 x \, dx \\
 &= \int \tan x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\sec x| + c
 \end{aligned}$$

vii.

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} \, dx = \int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x} \sin x \, dx = \int \frac{(\sin^2 x)^3}{\cos^4 x} \sin x \, dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^3}{\cos^4 x} \sin x \, dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = \cos x$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} \, dx &= - \int \frac{(1 - u^2)^3}{u^4} \, du = - \int u^{-4} - 3u^{-2} + 3 - u^2 \, du \\
 &= - \left(-\frac{1}{3} u^{-3} - 3u^{-1} + 3u - \frac{1}{3} u^3 \right) + c \\
 &= \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{3}{\cos x} - 3 \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c
 \end{aligned}$$

viii.

$$\int \sin^3 \left(\frac{2}{3} x \right) \cos^4 \left(\frac{2}{3} x \right) \, dx = \int \sin^2 \left(\frac{2}{3} x \right) \cos^4 \left(\frac{2}{3} x \right) \sin \left(\frac{2}{3} x \right) \, dx$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ μετατρέπουμε το ημίτονο σε συνημίτονο.

$$\int \sin^3 \left(\frac{2}{3} x \right) \cos^4 \left(\frac{2}{3} x \right) \, dx = \int \left(1 - \cos^2 \left(\frac{2}{3} x \right) \right) \cos^4 \left(\frac{2}{3} x \right) \sin \left(\frac{2}{3} x \right) \, dx$$

Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $u = \cos\left(\frac{2}{3}x\right)$,

$$\begin{aligned}\int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) dx &= -\frac{3}{2} \int (1-u^2)u^4 du \\ &= -\frac{3}{2} \int u^4 - u^6 du = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7\right) + c \\ \int \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right) \cos^4\left(\frac{2}{3}x\right) dx &= \frac{3}{14} \cos^7\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{3}{10} \cos^5\left(\frac{2}{3}x\right) + c\end{aligned}$$

ix.

$$\begin{aligned}\int \cos^4(2t) dt &= \int (\cos^2(2t))^2 dt \\ \int \cos^4(2t) dt &= \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos(4t))\right]^2 dt = \int \frac{1}{4}(1 + 2\cos(4t) + \cos^2(4t)) dt\end{aligned}$$

με χρήση της ταυτότητας, $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$$\begin{aligned}\int \cos^4(2t) dt &= \frac{1}{4} \int 1 + 2\cos(4t) + \frac{1}{2}[1 + \cos(8t)] dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{3}{2} + 2\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(8t) dt\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int \cos^4(2t) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\sin(4t) + \frac{1}{16}\sin(8t)\right) + c = \frac{3}{8}t + \frac{1}{8}\sin(4t) + \frac{1}{64}\sin(8t) + c$$

x.

$$\begin{aligned}\int \frac{2 + 7\sin^3(z)}{\cos^2(z)} dz &= \int \frac{2}{\cos^2(z)} dz + \int \frac{7\sin^3(z)}{\cos^2(z)} dz = \int \frac{2}{\cos^2(z)} dz + \int \frac{7\sin^3(z)}{\cos^2(z)} dz \\ &= \int 2\sec^2(z) dz + 7 \int \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)} \sin(z) dz\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\int \frac{2 + 7\sin^3(z)}{\cos^2(z)} dz = \int 2\sec^2(z) dz + 7 \int \frac{1 - \cos^2(z)}{\cos^2(z)} \sin(z) dz$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = \cos(z)$

$$\begin{aligned} \int \frac{2 + 7 \sin^3(z)}{\cos^2(z)} dz &= 2 \tan(z) - 7 \int \frac{1 - u^2}{u^2} du \\ &= 2 \tan(z) - 7 \int u^{-2} - 1 du = 2 \tan(z) - 7(-u^{-1} - u) + c \\ &= 2 \tan(z) + 7 \frac{1}{\cos(z)} + 7 \cos(z) + c = 2 \tan(z) + 7 \sec(z) + 7 \cos(z) + c \end{aligned}$$

xi.

$$\int \tan^3(6x) \sec^{10}(6x) dx = \int \tan^2(6x) \sec^9(6x) \tan(6x) \sec(6x) dx$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$,

$$\int \tan^3(6x) \sec^{10}(6x) dx = \int [\sec^2(6x) - 1] \sec^9(6x) \tan(6x) \sec(6x) dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = \sec(6x)$,

$$\begin{aligned} \int \tan^3(6x) \sec^{10}(6x) dx &= \frac{1}{6} \int [u^2 - 1] u^9 du \\ &= \frac{1}{6} \int u^{11} - u^9 du = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{12} u^{12} - \frac{1}{10} u^{10} \right) + c \\ \int \tan^3(6x) \sec^{10}(6x) dx &= \frac{1}{72} \sec^{12}(6x) - \frac{1}{60} \sec^{10}(6x) + c \end{aligned}$$

xii.

$$\begin{aligned} \int \cos(3t) \sin(8t) dt &= \int \frac{1}{2} [\sin(8t - 3t) + \sin(8t + 3t)] dt = \frac{1}{2} \int \sin(5t) + \sin(11t) dt \\ \int \cos(3t) \sin(8t) dt &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \cos(5t) - \frac{1}{11} \cos(11t) \right) + c = -\frac{1}{10} \cos(5t) - \frac{1}{22} \cos(11t) + c \end{aligned}$$

8. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & \int \frac{3x+11}{x^2-x-6} dx & \text{iv.} & \int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2} dx & \text{vii.} & \int \frac{4}{x^2+5x-14} dx \\ \text{ii.} & \int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x} dx & \text{v.} & \int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2} dx & \text{viii.} & \int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3} dt \\ \text{iii.} & \int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)} dx & \text{vi.} & \int \frac{x^2}{x^2-1} dx & \text{ix.} & \int \frac{8}{3x^3+7x^2+4x} dx \end{array}$$

Λύση:

i. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\begin{aligned} \frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \\ \frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} &= \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} \end{aligned}$$

$$3x+11 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$x = -2: \quad 5 = A(0) + B(-5) \implies B = -1$$

$$x = 3: \quad 20 = A(5) + B(0) \implies A = 4$$

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6} dx = \int \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+2} dx = \int \frac{4}{x-3} dx - \int \frac{1}{x+2} dx = 4 \ln|x-3| - \ln|x+2| + c$$

ii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2+4}{x(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-2}$$

$$x^2+4 = A(x+2)(3x-2) + Bx(3x-2) + Cx(x+2)$$

$$x = 0 : \quad 4 = A(2)(-2) \implies A = -1$$

$$x = -2 : \quad 8 = B(-2)(-8) \implies B = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3} : \quad \frac{40}{9} = C \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{8}{3} \right) \implies C = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4}{3x^3 + 4x^2 - 4x} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+2} + \frac{5}{2} \frac{1}{3x-2} \right) dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + \frac{5}{6} \ln|3x-2| + c \end{aligned}$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$x^2 - 29x + 5 = A(x-4)(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)(x-4)^2$$

$$x^2 - 29x + 5 = (A+C)x^3 + (-4A+B-8C+D)x^2 + (3A+16C-8D)x - 12A+3B+16D$$

Εύρεση συντελεστών,

$$x^3 : \quad A + C = 0$$

$$x^2 : \quad -4A + B - 8C + D = 1$$

$$x^1 : \quad 3A + 16C - 8D = -29$$

$$x^0 : \quad -12A + 3B + 16D = 5$$

$$\implies \quad A = 1, \quad B = -5, \quad C = -1, \quad D = 2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)} dx &= \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{5}{(x-4)^2} - \frac{x}{x^2+3} + \frac{2}{x^2+3} \right) dx \\ &= \ln|x-4| + \frac{5}{x-4} - \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) + c \end{aligned}$$

iv. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 10x^2 + 3x + 36 &= A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1) \\ &= (A+B)x^4 + (C-B)x^3 + (8A+4B-C+D)x^2 + (-4B+4C-D+E)x + 16A-4C-E \end{aligned}$$

Εύρεση συντελεστών,

$$x^4: A+B=0$$

$$x^3: C-B=1$$

$$x^2: 8A+4B-C+D=10 \quad \Rightarrow \quad A=2, B=-2, C=-1, D=1, E=0$$

$$x^1: -4B+4C-D+E=3$$

$$x^0: 16A-4C-E=36$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} dx &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{-2x-1}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2} dx \\ &= \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{2x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx + \int \frac{x}{(x^2+4)^2} dx \\ &= 2 \ln|x-1| - \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4} + c \end{aligned}$$

v. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} = x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2}$$

$$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} dx = \int x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2} dx = \int x - 2 dx - \int \frac{18}{x^3 - 3x^2} dx$$

$$\frac{18}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3}$$

$$18 = Ax(x-3) + B(x-3) + Cx^2$$

$$x = 0 : \quad 18 = B(-3) \implies B = -6$$

$$x = 3 : \quad 18 = C(9) \implies C = 2$$

$$x = 1 : \quad 18 = A(-2) + B(-2) + C = -2A + 14 \implies A = -2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} dx &= \int x - 2 dx - \int \left(\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x-3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \ln |x| - \frac{6}{x} - 2 \ln |x-3| + c \end{aligned}$$

vi.

$$\int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \int 1 + \frac{1}{x^2-1} dx = \int dx + \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = -1 : \quad 1 = B(-2) \implies B = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 : \quad 1 = A(2) \implies A = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2-1} dx &= \int dx + \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + c \end{aligned}$$

vii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{4}{(x+7)(x-2)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-2}$$

$$4 = A(x-2) + B(x+7)$$

$$x = 2 : \quad 4 = 9B \implies B = \frac{4}{9}$$

$$x = -7 : \quad 4 = -9A \implies A = -\frac{4}{9}$$

$$\int \frac{4}{(x+7)(x-2)} dx = \int \frac{-4/9}{x+7} + \frac{4/9}{x-2} dx = \frac{4}{9} \ln|x-2| - \frac{4}{9} \ln|x+7| + c$$

viii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3} = \frac{A}{2t+3} + \frac{B}{5t-1}$$

$$8-3t = A(5t-1) + B(2t+3)$$

$$t = \frac{1}{5} : \quad \frac{37}{5} = \frac{17}{5}B \implies B = \frac{37}{17}$$

$$t = -\frac{3}{2} : \quad \frac{25}{2} = -\frac{17}{2}A \implies A = -\frac{25}{17}$$

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3} = \frac{-\frac{25}{17}}{2t+3} + \frac{\frac{37}{17}}{5t-1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3} dt &= \int \left(-\frac{25}{17} \frac{1}{2t+3} + \frac{37}{17} \frac{1}{5t-1} \right) dt \\ &= \frac{37}{85} \ln|5t-1| - \frac{25}{34} \ln|2t+3| + c \end{aligned}$$

ix. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8}{x(3x+4)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+4} + \frac{C}{x+1}$$

$$8 = A(3x+4)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(3x+4)$$

$$x = -\frac{4}{3} : \quad 8 = \frac{4}{9}B \implies B = 18$$

$$x = -1 : \quad 8 = -C \implies C = -8$$

$$x = 0 : \quad 8 = 4A \implies A = 2$$

$$\int \frac{8}{x(3x+4)(x+1)} dx = \int \frac{2}{x} + \frac{18}{3x+4} - \frac{8}{x+1} dx = 2 \ln |x| + 6 \ln |3x+4| - 8 \ln |x+1| + c$$

9. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

i. $f'(x) = 3x - 2, \quad f(1) = 1$

ii. $f'(x) = \sqrt{x-2}, \quad f(3) = 2$

iii. $f''(x) = 2 - 6x, \quad f'(0) = 4, \quad f(0) = 1$

iv. $f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'(1) = 1, \quad f(1) = 1$

v. $f''(x) = 2, \quad f(1) = f(3) = 0$

vi. $f'(x)e^{f(x)} = 2 + \ln x$ και η γραφική παράσταση της f να περνά από το σημείο $(e, 0)$.

Λύση:

i. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x - 2) dx$$

$$f(x) = \int 3x dx - \int 2 dx = \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(1) = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{3(1)^2}{2} - 2(1) + C = \frac{3}{2} - 2 + C = -\frac{1}{2} + C \\ -\frac{1}{2} + C &= 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2} \\ f(x) &= \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ii. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sqrt{x-2} dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση $u = x - 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{2}{3} (x-2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(3) = 2$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{2}{3} (3-2)^{3/2} + C = \frac{2}{3} (1)^{3/2} + C = \frac{2}{3} + C \\ \frac{2}{3} + C &= 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{2}{3} (x-2)^{3/2} + \frac{4}{3}$$

iii. Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x) dx = \int (2 - 6x) dx \\ f'(x) &= \int 2 dx - \int 6x dx = 2x - 3x^2 + C_1 \end{aligned}$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f'(0) = 4$

$$\begin{aligned} f'(0) &= 2(0) - 3(0)^2 + C_1 = C_1 = 4 \\ \Rightarrow f'(x) &= 2x - 3x^2 + 4 \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 3x^2 + 4) dx$$

$$f(x) = \int 2x dx - \int 3x^2 dx + \int 4 dx = x^2 - x^3 + 4x + C_2$$

Γνωρίζοντας το $f(0)=1$ μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή C_2

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + C_2 = 1$$

Άρα η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 1$$

iv. Ολοκλήρωση για να βρούμε το $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int \frac{2}{x^3} dx = \int 2x^{-3} dx$$

$$f'(x) = 2 \int x^{-3} dx = 2 \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right) + C_1 = -x^{-2} + C_1$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f'(1) = 1$

$$f'(1) = -1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + 2 \right) dx = \int -x^{-2} dx + \int 2 dx$$

$$f(x) = x^{-1} + 2x + C_2 = \frac{1}{x} + 2x + C_2$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(1) = 1$

$$f(1) = 1 + 2 + C_2 = 3 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = -2$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2$$

v. Ολοκλήρωση για να βρούμε το $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2 dx = 2x + C_1$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x + C_1) dx = x^2 + C_1x + C_2$$

Χρήση των αρχικών συνθηκών $f(1) = 0$ και $f(3) = 0$

$$f(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -1$$

$$f(3) = 9 + 3C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow 3C_1 + C_2 = -9$$

Λύση του συστήματος για C_1, C_2 :

$$(3C_1 + C_2) - (C_1 + C_2) = -9 - (-1) \Rightarrow 2C_1 = -8 \Rightarrow C_1 = -4$$

$$C_2 = -1 - C_1 = -1 - (-4) = 3$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

vi. Γραμμική αντικατάσταση για ολοκλήρωση

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{d}{dx}(e^{f(x)}) \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = 2 + \ln x$$

Ολοκλήρωση και εύρεση $e^{f(x)}$

$$\int d(e^{f(x)}) = \int (2 + \ln x) dx$$

$$e^{f(x)} = \int 2 dx + \int \ln x dx + C$$

Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων

$$\int 2 dx = 2x, \quad \int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} = 2x + (x \ln x - x) + C = x \ln x + x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης $f(e) = 0$

$$e^{f(e)} = e^0 = 1 \Rightarrow 1 = e \ln e + e + C = e \cdot 1 + e + C = 2e + C$$

$$C = 1 - 2e$$

Τελική μορφή της συνάρτησης

$$e^{f(x)} = x \ln x + x + 1 - 2e$$

Ισοδύναμα, λογαριθμίζοντας:

$$f(x) = \ln(x \ln x + x + 1 - 2e)$$

10. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \int 9x^2 \sqrt{x^3 + 5} \, dx & (\beta) \int \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx & (\gamma) \int \frac{\eta\mu^3(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(x)} \, dx \\ (\delta) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx & (\sigma\tau) \int \sigma\upsilon\nu(\sqrt{x}) \, dx & (\eta) \int 4x^3 \sqrt{1 + x^2} \, dx \\ (\vartheta) \int \eta\mu^7(x) \sigma\upsilon\nu^3(x) \, dx & (\iota) \int \eta\mu(7x) \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx & (\iota\beta) \int \eta\mu(2x) \sigma\upsilon\nu^6(x) \, dx \\ (\iota\alpha) \int \frac{\eta\mu^4(x)}{\sigma\upsilon\nu^6(x)} \, dx & (\iota\gamma) \int \sqrt{1 - \eta\mu(2x)} \, dx, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4}) & (\iota\delta) \int (x^2 + 1)e^x \, dx \\ (\iota\epsilon) \int e^{ax} \eta\mu(\beta x) \, dx & (\iota\zeta) \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} \, dx & (\iota\sigma\tau) \int \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu(x) \, dx \\ (\iota\nu) \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 10} \, dx & (\chi) \int \frac{1}{1 + \eta\mu(x)} \, dx & (\chi\alpha) \int \frac{1}{3 + 2\sigma\upsilon\nu(2x) - \eta\mu(2x)} \, dx \\ (\chi\beta) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} \, dx & (\chi\upsilon) \int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2 + 3x}} \, dx & \end{array}$$

Λύση:

(Ασκ. 1/57)

(α) Θέτουμε $u = x^3 + 5 \Rightarrow du = 3x^2 dx$.

$$\int 9x^2 \sqrt{x^3 + 5} \, dx = 3 \int \sqrt{u} \, du = 3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + c = 2(x^3 + 5)^{3/2} + c.$$

(β) $\frac{d}{dx} \ln(e^x + 1) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. Για το δεύτερο μέρος θέτουμε $t = \sqrt{\ln x} \Rightarrow \ln x = t^2, dx = 2t dt/x$:

$$\int \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \ln(e^x + 1) - \int 2t^2 dt = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c.$$

(γ)

$$\int \frac{\eta\mu^3(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(x)} dx = \int \eta\mu(x) \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x)} - 1 \right) dx.$$

Με $u = \sigma\upsilon\nu(x), du = -\eta\mu(x) dx$:

$$-\int \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) du = \frac{1}{u} + u + c = \tau\epsilon\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x) + c.$$

(δ)

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx, \quad u = e^x \Rightarrow du = e^x dx = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(e^x) + c.$$

(στ) $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t dt$.

$$\int \sigma\upsilon\nu(\sqrt{x}) dx = 2 \int t \sigma\upsilon\nu(t) dt = 2(t \eta\mu(t) + \sigma\upsilon\nu(t)) + c = 2(\sqrt{x} \eta\mu\sqrt{x} + \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}) + c.$$

(η) $u = x^2, du = 2x dx$.

$$\int 4x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 2 \int u \sqrt{1+u} du = 2 \int ((1+u)^{3/2} - (1+u)^{1/2}) du = \frac{4}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(1+x^2)^{3/2} + c.$$

(θ) $\sigma\upsilon\nu^3(x) = (1 - \eta\mu^2(x)) \sigma\upsilon\nu(x)$. Με $u = \eta\mu(x), du = \sigma\upsilon\nu(x) dx$:

$$\int \eta\mu^7(x) \sigma\upsilon\nu^3(x) dx = \int u^7 (1 - u^2) du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} + c = \frac{\eta\mu^8(x)}{8} - \frac{\eta\mu^{10}(x)}{10} + c.$$

(ι) Τύπος γινομένου σε άθροισμα: $\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2}[\eta\mu(A+B) + \eta\mu(A-B)]$.

$$\int \eta\mu(7x) \sigma\upsilon\nu(3x) dx = \frac{1}{2} \int (\eta\mu(10x) + \eta\mu(4x)) dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu(10x)}{20} - \frac{\sigma\upsilon\nu(4x)}{8} + c.$$

(ιβ) $\eta\mu(2x) = 2\eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu(x)$. Με $u = \sigma\upsilon\nu(x)$, $du = -\eta\mu(x) dx$:

$$\int \eta\mu(2x) \sigma\upsilon\nu^6(x) dx = 2 \int \eta\mu(x) \sigma\upsilon\nu^7(x) dx = -2 \int u^7 du = -\frac{\sigma\upsilon\nu^8(x)}{8} + c.$$

(ια)

$$\int \frac{\eta\mu^4(x)}{\sigma\upsilon\nu^6(x)} dx = \int \varepsilon\varphi^4(x) \tau\epsilon\mu^2(x) dx = \int \varepsilon\varphi^4(x) d(\varepsilon\varphi(x)) = \frac{\varepsilon\varphi^5(x)}{5} + c.$$

(ιγ) $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \varepsilon\varphi(x) > 0$. Θέτουμε $t = \varepsilon\varphi(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$ και $\eta\mu(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$:

$$\int \sqrt{1 - \eta\mu(2x)} dx = \int \frac{1-t}{(1+t^2)^{3/2}} dt = \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + c = \eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x) + c.$$

(ιδ) Κανόνας $\int P(x)e^x dx = e^x(P - P' + P'' - \dots)$ για πολυώνυμο P :

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = (x^2 - 2x + 3)e^x + c.$$

(ιε) Τυπικός τύπος:

$$\int e^{ax} \eta\mu(\beta x) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \beta^2} (a \eta\mu(\beta x) - \beta \sigma\upsilon\nu(\beta x)) + c.$$

(ιζ) Μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + c.$$

(ιστ) Μερική ολοκλήρωση: $u = \tau\omicron\xi\sigma\nu\nu(x)$, $dv = dx$.

$$\int \tau\omicron\xi\sigma\nu\nu(x) dx = x \tau\omicron\xi\sigma\nu\nu(x) - \sqrt{1-x^2} + c.$$

(ιν) $u = x + 1 \Rightarrow x - 1 = u - 2$, $x^2 + 2x + 10 = u^2 + 9$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+2x+10} dx &= \int \frac{u-2}{u^2+9} du = \frac{1}{2} \ln(u^2+9) - \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{u}{3}\right) + c \\ &= \frac{1}{2} \ln((x+1)^2+9) - \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

(κ) Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1-\eta\mu(x)}{1-\eta\mu(x)}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\eta\mu(x)} dx &= \int \frac{1-\eta\mu(x)}{\sigma\nu\nu^2(x)} dx = \int \tau\varepsilon\mu^2(x) dx - \int \varepsilon\varphi(x) \tau\varepsilon\mu(x) dx \\ &= \varepsilon\varphi(x) - \tau\varepsilon\mu(x) + c. \end{aligned}$$

Με τύπο ημιγωνίας $t = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\int \frac{1}{1+\eta\mu(x)} dx = -\frac{2}{1+\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} + c.$$

(κα) $t = \varepsilon\varphi(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sigma\nu\nu(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\eta\mu(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$:

$$3 + 2\sigma\nu\nu(2x) - \eta\mu(2x) = \frac{(t-1)^2+4}{1+t^2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3+2\sigma\nu\nu(2x)-\eta\mu(2x)} dx &= \int \frac{dt}{(t-1)^2+4} = \frac{1}{2} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t-1}{2}\right) + c \\ &= \frac{1}{2} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi(x)-1}{2}\right) + c. \end{aligned}$$

$$(κβ) \quad x = \varepsilon\varphi(\theta) \Rightarrow dx = \tau\varepsilon\mu^2(\theta) d\theta, \quad \sqrt{1+x^2} = \tau\varepsilon\mu(\theta):$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{\tau\varepsilon\mu^2\theta}{\varepsilon\varphi^2\theta \tau\varepsilon\mu\theta} d\theta = \int \frac{\tau\varepsilon\mu\theta}{\varepsilon\varphi^2\theta} d\theta = \int \sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi(\theta) \sigma\upsilon\nu\chi(\theta) d\theta = -\sigma\upsilon\nu\chi(\theta) + c \\ &= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c. \end{aligned}$$

$$(κ\upsilon) \quad x+3 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \text{ και } \sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x(x+3)} = \frac{\sqrt{1-3t}}{t}:$$

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}} dx = \int -\frac{1}{\sqrt{1-3t}} dt = \frac{2}{3}\sqrt{1-3t} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}} + c.$$

11 Να δείξετε ότι

$$\int f''(x)g(x) dx = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + \int f(x)g''(x) dx.$$

Ακολούθως, να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 e^x dx$$

Λύση:

(Ασκ. 2/57)

Χρησιμοποιούμε μερική ολοκλήρωση,

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx. \text{ Θέτουμε } u' = f''(x), v = g(x) \Rightarrow u = f'(x). \text{ Τότε}$$

$$\int f''(x)g(x) dx = f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x) dx.$$

Εφαρμόζουμε ξανά με $u' = f'(x)$, $v = g'(x) \Rightarrow u = f(x)$:

$$\int f'(x)g'(x) dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g''(x) dx.$$

Άρα

$$\int f''(x)g(x) dx = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + \int f(x)g''(x) dx$$

Υπολογίζουμε $\int x^2 e^x dx$ με δύο φορές μερική ολοκλήρωση.

Πρώτα $u = x^2$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x dx$, $v = e^x$:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx.$$

Ξανά στο δεύτερο: $u = 2x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2 dx$, $v = e^x$:

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x.$$

Συνεπώς

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) = e^x (x^2 - 2x + 2) + c.$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

12. Να δείξετε ότι

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

i. Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Λύση:

(Ασκ. 3/58)

Γράφουμε

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x (x^2 + 1)^{-1/2}.$$

Παράγωγος με κανόνα γινομένου-αλυσίδας:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (x^2 + 1)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + 1)^{-3/2} \cdot (2x) \\ &= (x^2 + 1)^{-1/2} - x^2 (x^2 + 1)^{-3/2} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

i. Θέτουμε με μερική ολοκλήρωση στη μορφή $\int v du = uv - \int u dv$:

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad du = \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \quad (\text{από το (α)}),$$

$$v = \text{τοξεφ}(x), \quad dv = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Τότε

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x \text{τοξεφ}(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $w = x^2 + 1 \Rightarrow dw = 2x dx$:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int w^{-3/2} dw = -w^{-1/2} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Άρα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x \text{τοξεφ}(x) + 1}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

13. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx$.

i. Να βρείτε τις σταθερές $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sigma\upsilon\nu(x) \equiv a(\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)) + \beta(2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)).$$

ii. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx$.

Λύση:

(Ασχ. 4/58)

Θέτουμε

$$u = \sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x) \Rightarrow du = (-\eta\mu(x) + 2\sigma\upsilon\nu(x)) dx = (2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)) dx.$$

Τότε

$$\int \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)| + c$$

i. Εξισώνουμε συντελεστές σε $\sigma\upsilon\nu(x)$ και $\eta\mu(x)$:

$$a(\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)) + \beta(2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)) = (a + 2\beta)\sigma\upsilon\nu(x) + (2a - \beta)\eta\mu(x).$$

Θέλουμε $(a + 2\beta) = 1$ και $2a - \beta = 0$. Άρα

$$\beta = 2a, \quad a + 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{2}{5}.$$

Έτσι

$$\sigma\upsilon\nu(x) \equiv \frac{1}{5}(\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)) + \frac{2}{5}(2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x))$$

ii. Χρησιμοποιούμε την (i):

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)}.$$

Ολοκληρώνουμε και εφαρμόζουμε την αρχική απόδειξη:

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx = \frac{1}{5} x + \frac{2}{5} \int \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx = \frac{1}{5} x + \frac{2}{5} \ln|\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)| + c$$

14. Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό.

i. $\int_{x \in (1, +\infty)} \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}} dx,$

ii. $\int_{x \in \mathbb{R}} \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln(e^x + 1)} dx,$

iii. $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx,$ iv. $\int_{\theta \in (0, \pi/2)} \sqrt{\varepsilon\varphi \theta} d\theta, \quad \mu\epsilon \ t = \sqrt{\varepsilon\varphi \theta}.$

Λύση:

(Ασκ. 5/58)

i. Θέτουμε $u = \sqrt{\ln x}$. Τότε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}},$$

άρα

$$\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}} dx = 7 \int du = 7\sqrt{\ln x} + c$$

ii. Θέτουμε $u = \ln(e^x + 1) \Rightarrow du = \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$

$$\int \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln(e^x + 1)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln(\ln(e^x + 1)) + c$$

iii. Θέτουμε $x = \sqrt{2} \tau\epsilon\mu \theta$ ($\Rightarrow x > \sqrt{2}$). Τότε

$$dx = \sqrt{2} \tau\epsilon\mu \theta \varepsilon\varphi \theta d\theta, \quad \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2} \varepsilon\varphi \theta, \quad x^4 = 4 \tau\epsilon\mu^4 \theta.$$

Επομένως

$$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx = \int \frac{\sqrt{2} \tau \epsilon \mu \theta \epsilon \varphi \theta}{4 \tau \epsilon \mu^4 \theta \cdot \sqrt{2} \epsilon \varphi \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \tau \epsilon \mu^{-3} \theta d\theta = \frac{1}{4} \int \sigma \upsilon \nu^3 \theta d\theta.$$

Υπολογίζουμε

$$\int \sigma \upsilon \nu^3 \theta d\theta = \int \sigma \upsilon \nu \theta (1 - \eta \mu^2 \theta) d\theta = \eta \mu \theta - \frac{1}{3} \eta \mu^3 \theta + c.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{1}{4} \eta \mu \theta - \frac{1}{12} \eta \mu^3 \theta + c.$$

Επαναφέρουμε: $\sigma \upsilon \nu \theta = \frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \eta \mu \theta = \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}.$

$$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{6x^3} + c$$

iv. Θέτουμε $t = \sqrt{\epsilon \varphi \theta} \Rightarrow \epsilon \varphi \theta = t^2$. Τότε $d(\epsilon \varphi \theta) = \tau \epsilon \mu^2 \theta d\theta = 2t dt$ και $\tau \epsilon \mu^2 \theta = 1 + \epsilon \varphi^2 \theta = 1 + t^4$. Άρα

$$d\theta = \frac{2t}{1 + t^4} dt, \quad \int \sqrt{\epsilon \varphi \theta} d\theta = \int t \cdot \frac{2t}{1 + t^4} dt = \int \frac{2t^2}{1 + t^4} dt.$$

Γράφουμε $1 + t^4 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$ και με μερικά κλάσματα προκύπτει

$$\int \frac{2t^2}{1 + t^4} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \omicron \xi \epsilon \varphi \left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}t} \right) + c.$$

Επαναφέρουμε $t = \sqrt{\epsilon \varphi \theta}$:

$$\int \sqrt{\epsilon \varphi \theta} d\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\epsilon \varphi \theta - \sqrt{2\epsilon \varphi \theta} + 1}{\epsilon \varphi \theta + \sqrt{2\epsilon \varphi \theta} + 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \omicron \xi \epsilon \varphi \left(\frac{\epsilon \varphi \theta - 1}{\sqrt{2\epsilon \varphi \theta}} \right) + c$$

15. Να αποδείξετε ότι:

i.

$$\int x(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - x \operatorname{τοξεφ}(x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1}) + c.$$

ii.

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$$

Λύση:

(Ασκ. 6/58)

i. Θέτουμε

$$I = \int x(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 dx.$$

Μερική ολοκλήρωση με $u = (\operatorname{τοξεφ}(x))^2 \Rightarrow du = 2 \operatorname{τοξεφ}(x) \frac{1}{1+x^2} dx$, $dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$:

$$I = \frac{x^2}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - \int \frac{x^2 \operatorname{τοξεφ}(x)}{1+x^2} dx.$$

Γράφουμε $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$:

$$I = \frac{x^2}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - \int \operatorname{τοξεφ}(x) dx + \int \frac{\operatorname{τοξεφ}(x)}{1+x^2} dx.$$

Στο τελευταίο, θέτουμε $t = \operatorname{τοξεφ}(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$:

$$\int \frac{\operatorname{τοξεφ}(x)}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2.$$

Άρα

$$I = \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - \int \operatorname{τοξεφ}(x) dx.$$

Υπολογίζουμε $\int \operatorname{τοξεφ}(x) dx$ με Μ.Ο.: $u = \operatorname{τοξεφ}(x)$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$.

$$\int \operatorname{τοξεφ}(x) dx = x \operatorname{τοξεφ}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{τοξεφ}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - x \operatorname{τοξεφ}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = \frac{1}{2}(x^2+1)(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - x \operatorname{τοξεφ}(x) + \ln(\sqrt{x^2+1}) + c,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Θέτουμε $t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1, dx = dt$:

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \int \frac{(t-1)^2}{t^3} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά δύναμη:

$$= \ln |t| + \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2} + c = \ln |x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

16. Αν

$$I_\nu = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} dx, \quad \nu \in \mathbb{N}, a > 0,$$

τότε:

i. Να αποδείξετε τον αναγωγικό τύπο

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{2\nu - 1}{2\nu a^2} I_\nu.$$

ii. Να βρείτε τα I_2 και I_3 .

Λύση:

(Ασκ. 7/59)

i. Ξεκινάμε από

$$I_{\nu+1} = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx = \frac{1}{a^2} \int \left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} - \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} \right] dx = \frac{1}{a^2} (I_\nu - J),$$

όπου $J = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx$. Υπολογίζουμε το J με μερική ολοκλήρωση θέτοντας

$$u = x, \quad dv = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx \Rightarrow du = dx, \quad v = -\frac{1}{2\nu} \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu}.$$

Τότε

$$J = uv - \int v du = -\frac{x}{2\nu} \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} dx = -\frac{x}{2\nu(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu} I_\nu.$$

Άρα

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{a^2} \left(I_\nu - \left[-\frac{x}{2\nu(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu} I_\nu \right] \right) = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{2\nu - 1}{2\nu a^2} I_\nu,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Βάση:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Για $\nu = 1$:

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 a^2} I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Για $\nu = 2$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 \\ &= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \left[\frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) \right] \\ &= \frac{x(3x^2 + 5a^2)}{8a^4(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c. \\ I_3 &= \frac{x(3x^2 + 5a^2)}{8a^4(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c \end{aligned}$$

17. Να βρεθεί συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, η γραφική της να διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ και να έχει κλίση στο σημείο A ίση με 3.

Λύση:

(Ασκ. 8/59)

Από $f''(x) = -x^{-2}$ παίρνουμε

$$f'(x) = \int -x^{-2} dx = \frac{1}{x} + C_1.$$

Η κλίση στο $A(1, 3)$ είναι $f'(1) = 3 \Rightarrow 1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 2$. Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

Ολοκληρώνοντας ξανά,

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx = \ln x + 2x + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε $f(1) = 3$: $0 + 2 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 1$. Επομένως

$$f(x) = 2x + \ln x + 1, \quad x > 0$$

18. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ , να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x (\eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x)) dx.$$

Λύση:

(Ασκ. 9/59)

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγωγίσισης γινομένου:

$$\frac{d}{dx}(e^x f(x)) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x (f(x) + f'(x)).$$

Άρα,

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + c$$

για κάθε παραγωγίσιμη f .

Για $\int e^x (\eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x)) dx$ θέτουμε $f(x) = \eta\mu(x)$ (οπότε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu(x)$). Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο,

$$\int e^x (\eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x)) dx = e^x \eta\mu(x) + c$$

(έλεγχος: $\frac{d}{dx}[e^x \eta\mu(x)] = e^x \eta\mu(x) + e^x \sigma\upsilon\nu(x)$).

19. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i. $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f^2(x) f'(x) = x^2 + 1$.

ii. $x f'(x) = e^x - f(x)$, $x \neq 0$, και $f(2) = 0$.

iii. $2x f'(x) + x^2 f''(x) = 2x + 1$, $x \neq 0$, και $f'(1) = f(1) = 2$.

Λύση:

(Ασκ. 10/59)

i. Για $x > 0$:

$$f^2(x) f'(x) = x^2 + 1 \implies f^2 df = (x^2 + 1) dx.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\frac{1}{3} f^3(x) = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Από $f(0) = 0$ (διέρχεται από την αρχή) παίρνουμε $C = 0$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}, \quad x \geq 0$$

ii. Γραμμική Δ.Ε.:

$$xf'(x) + f(x) = e^x \iff f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x) = e^{\int (1/x)dx} = x$. Άρα $(xf(x))' = e^x$ και

$$xf(x) = e^x + C \implies f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Με $f(2) = 0$ βρίσκουμε $C = -e^2$.

$$f(x) = \frac{e^x - e^2}{x}, \quad x \neq 0$$

iii. Παρατηρούμε ότι $\frac{d}{dx}(x^2 f'(x)) = 2xf'(x) + x^2 f''(x)$. Άρα

$$(x^2 f'(x))' = 2x + 1 \implies x^2 f'(x) = x^2 + x + C_1.$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Με $f'(1) = 2$ προκύπτει $C_1 = 0$, οπότε $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Ολοκληρώνουμε:

$$f(x) = x + \ln|x| + C_2.$$

Με $f(1) = 2$ παίρνουμε $C_2 = 1$. Επομένως (στο $(0, +\infty)$):

$$f(x) = x + \ln x + 1$$

11. Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4, 4)$ και ισχύει

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}, \quad x \neq 3.$$

Λύση:

(Ασκ. 11/59)

Από την υπόθεση

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$$

ολοκληρώνουμε μία φορά:

$$f'(x) = \int \frac{2}{(x-3)^3} dx = 2 \cdot \frac{(x-3)^{-2}}{-2} + C_1 = -\frac{1}{(x-3)^2} + C_1.$$

Εφόσον στο $A(4, 4)$ υπάρχει τοπικό ακρότατο, πρέπει $f'(4) = 0$. Άρα

$$0 = f'(4) = -\frac{1}{(4-3)^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 1,$$

οπότε

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά:

$$f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx = x - \int (x-3)^{-2} dx = x + \frac{1}{x-3} + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε ότι το σημείο $A(4, 4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση: $f(4) = 4$.

$$4 = 4 + \frac{1}{1} + C_2 \Rightarrow C_2 = -1.$$

Άρα

$$f(x) = x + \frac{1}{x-3} - 1, \quad x \neq 3.$$

(Επιπλέον $f''(4) = 2 > 0$, άρα το ακρότατο στο $x = 4$ είναι ελάχιστο.)

20. Δίνεται ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f'(0) = 3, \quad f(0) = 2.$$

Να αποδειχθούν/βρεθούν τα παρακάτω:

- i. Αν $u(x) = f'(x) - f(x)$, να δείξετε ότι $u'(x) - 2u(x) = 0$.
- ii. Να βρεθεί ο τύπος της u .
- iii. Να δείξετε ότι $(e^{-x}f(x))' = e^x$ και να βρείτε τη f .

Λύση:

(Ασκ. 12/59)

i. Με $u = f' - f$ έχουμε $u' = f'' - f'$. Άρα

$$u' - 2u = (f'' - f') - 2(f' - f) = f'' - 3f' + 2f = 0,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Η Δ.Ε. είναι $u' - 2u = 0 \Rightarrow u(x) = Ce^{2x}$. Από $u(0) = f'(0) - f(0) = 3 - 2 = 1$ προκύπτει $C = 1$. Επομένως

$$u(x) = e^{2x}$$

iii. Υπολογίζουμε

$$(e^{-x}f(x))' = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}u(x) = e^{-x} \cdot e^{2x} = e^x.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$e^{-x}f(x) = \int e^x dx = e^x + C \Rightarrow f(x) = e^{2x} + Ce^x.$$

Με $f(0) = 2$ παίρνουμε $1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$. Άρα

$$f(x) = e^{2x} + e^x$$

(Έλεγχος: $f'(0) = 2 + 1 = 3$ και $f'' - 3f' + 2f = 0$.)

21. Να βρείτε μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = |3x - 6|$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

(Ασχ. 1/60)

Θέτουμε $u = 3x - 6 \Rightarrow du = 3 dx$ και $dx = \frac{du}{3}$. Τότε

$$\int |3x - 6| dx = \frac{1}{3} \int |u| du = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} u|u| + c = \frac{1}{6} (3x - 6) |3x - 6| + c$$

(Έλεγχος: $\frac{d}{dx} [\frac{1}{6}(3x - 6)|3x - 6|] = |3x - 6|$.)

Ισοδύναμα, κατά τμήματα:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6 + c, & x \leq 2, \\ \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 + c, & x \geq 2, \end{cases}$$

που ικανοποιεί $F'(x) = |3x - 6|$ σε όλο το \mathbb{R} .

22. Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει πάντα παράγουσα στο Δ . Να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, χρησιμοποιώντας ως αντιπαράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Λύση:

(Ασκ. 2/60)

Θέτουμε

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Για $x \neq 0$, με κανόνα γινομένου-αλυσίδας,

$$F'(x) = 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

Στο $x = 0$,

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Άρα F είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $F'(x) = f(x)$ για όλα τα x . Επομένως η f έχει παράγουσα (είναι παράγωγος της F).

Δείχνουμε τώρα ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, παίρνουμε τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow f(x_n) = 2x_n \eta\mu(2\pi n) - \sigma\upsilon\nu(2\pi n) = 0 - 1 = -1,$$

$$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \Rightarrow f(y_n) = 2y_n \eta\mu((2n+1)\pi) - \sigma\upsilon\nu((2n+1)\pi) = 0 - (-1) = 1.$$

Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -1$ ενώ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$.

Η $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει, συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Συμπέρασμα: Υπάρχει συνάρτηση f που είναι παράγωγος κάποιας F (άρα έχει παράγουσα) αλλά δεν είναι συνεχής.

Άρα το αντίστροφο του θεωρήματος “η συνέχεια συνεπάγεται ύπαρξη παραγώγου” δεν ισχύει.

23. Να δείξετε ότι οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της

$$f(x) = -\frac{2}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x < 0, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2} - 5, & x < 0. \end{cases}$$

Γιατί είναι λάθος να γράψουμε

$$\int \left(-\frac{2}{x^3} \right) dx = \frac{1}{x^2} + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) ?$$

Λύση:

(Ασχ. 3/60)

Απόδειξη ότι F και G είναι παράγουσες. Για $x \neq 0$ ισχύει

$$\left(\frac{1}{x^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} = f(x).$$

Άρα, για $x > 0$ και για $x < 0$,

$$F'(x) = \left(\frac{1}{x^2} \right)' = f(x), \quad G'(x) = \left(\frac{1}{x^2} \pm 5 \right)' = \left(\frac{1}{x^2} \right)' = f(x),$$

εφόσον η παράγωγος σταθεράς είναι 0.

Επομένως και οι δύο συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Γιατί η γραφή με ένα μόνο c είναι λανθασμένη;

Ο αόριστος ολοκληρωμένος ορίζεται «μέχρι σταθερά» σε συνεκτικό διάστημα. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ είναι ένωση δύο διαστημάτων, άρα η γενική παράγουσα επιτρέπεται να έχει διαφορετικές σταθερές σε καθένα από αυτά:

$$\int \left(-\frac{2}{x^3} \right) dx = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + C_1, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2} + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Αν γράψουμε μία μόνο σταθερά c , αποκλείουμε έγκυρες παραγώγους όπως η

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2} - 5, & x < 0, \end{cases}$$

η οποία έχει διαφορετικές σταθερές στις δύο συνιστώσες του πεδίου ορισμού.

Επομένως η σχέση $\int (-2/x^3) dx = \frac{1}{x^2} + c$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι λανθασμένη: χρειάζονται δύο ανεξάρτητες σταθερές.