Επανάληψη -Ασκήσεις

Μέθοδος

Για να λύσουμε οποιαδήποτε άσκηση φυσική ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Κάνουμε το σχήμα που οπτικοποιεί την εκφώνηση το πολύ μέχρι το πρώτο ερώτημα. Προσοχή, σε κάθε ερώτημα μπορεί να χρειάζεται να ζωγραφίζουμε και άλλο σχήμα. Καλό είναι να το κάνουμε όταν απαιτείται και να φαίνεται και στην λύση μας για να δείχνουμε στον διορθωτή ότι αντιλαμβανόμαστε φυσικά το πρόβλημα αλλά και για να βοηθιόμαστε και εμείς οι ίδιοι.

2. Αφού κάνουμε το σχήμα βρίσκουμε τι κίνηση εκτελεί το σώμα ή τα σώματα στην άσκηση και γράφουμε τον Νόμο του Νεύτωνα για το κάθε σώμα καθώς και τις εξισώσεις ταχύτητας και κίνησης που το περιγράφουν.

3. Βλέπουμε στο σχήμα ποια δεδομένα μας δίνει η άσκηση για να καταλάβουμε από ποια εξίσωση ή από ποια σχέση που βγαίνει από το σχήμα θα αρχίσουμε να λύνουμε την άσκηση.

Γενική Άσκηση 1

Ένα σώμα A αφήνεται να πέσει από ύψος H=125m από το έδαφος και στην συνέχεια αφήνεται να πέσει ένα σώμα B από ύψος H=80m μετά από 2 s. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα

α. Τι κίνηση κάνει το σώμα Α και τι κίνηση το σώμα Β;

β. Να γράψετε τις εξισώσεις ταχύτητα και κίνησης του κάθε σώματος ξεχωριστά.

γ. Να βρείτε τον χρόνο που κάνει το σώμα Α και το σώμα Β να φτάσουν στο έδαφος καθώς και τις αντίστοιχες ταχύτητες.

δ. Να σχεδιάσετε σε διαφορετικά διαγράμματα τις γραφικές παραστάσεις $\upsilon_A - t$, $\upsilon_B - t$.

ε. Να σχεδιάσετε σε κοινό διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις $h_A - t$, $h_B - t$.

στ. Να βρείτε την συνάρτηση d=d(t) που περιγράφει την απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων κάθε χρονική στιγμή t και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

ζ. Πόσο απέχουν τα σώματα την χρονική στιγμή t=3s;

η. Θα συναντηθούν κάποια στιγμή τα δύο σώματα; Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

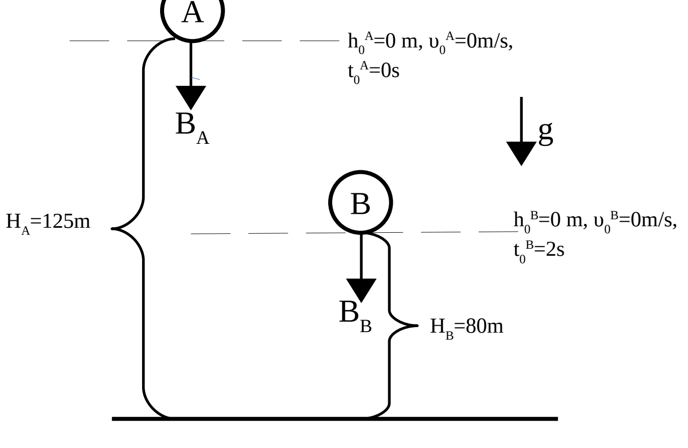
θ. Να βρείτε το χρόνο όταν το σώμα Α βρίσκεται σε απόσταση 40 m από το έδαφος.

ι. Να βρείτε τη χρονική που το σώμα Β έχει διανύσει το $\frac{1}{4}$ της απόσταση του από το έδαφος.

ια. Να βρείτε την απόσταση που διένυσε και την μεταβολή της ταχύτητας του σώματος Α κατά το τρίτο δευτερόλεπτο της κίνησης του.

Δίνεται $g = 10\,m/s^2$

Λύση



α. Και τα δύο σώματα εκτελούν ελεύθερη πτώση.

Βήμα Μεθόδου (δεν ζητείται στην άσκηση οπότε πάει στο πρόχειρο)

Για το σώμα Α ο νόμος του Νεύτωνα είναι:

$$\Sigma\vec{F}=m_A\vec{\alpha}_A \Rightarrow \vec{B}_A=m_A\vec{\alpha}_A \Rightarrow m_A\vec{g}=m_A\vec{\alpha}_A \Rightarrow \vec{g}=\vec{\alpha}_A$$

Ανάλογα για το σώμα Β ο νόμος του Νεύτωνα είναι:

$$\Sigma\vec{F}=m_B\vec{\alpha}_B \Rightarrow \vec{B}_B=m_B\vec{\alpha}_B \Rightarrow m_B\vec{g}=m_B\vec{\alpha}_B \Rightarrow \vec{g}=\vec{\alpha}_B$$

β. Για το σώμα Α οι εξισώσεις ταχύτητας και κίνησης είναι:

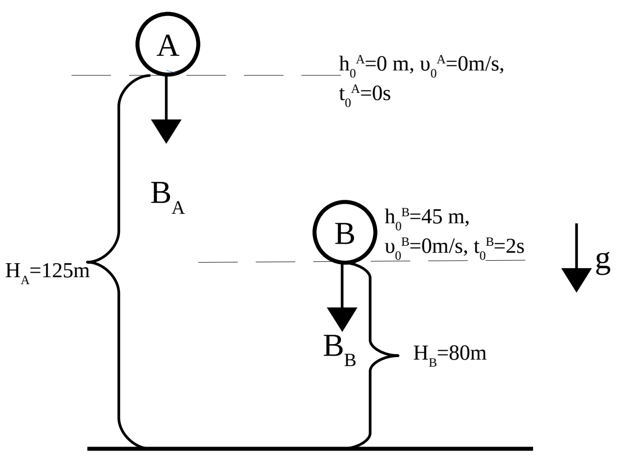
$$\upsilon_A=10t$$
$$h_A=5t^2$$

Για το σώμα Β οι εξισώσεις ταχύτητας και κίνησης είναι:

$$\upsilon_B=10(t-2)$$
$$h_B=5(t-2)^2$$

$1^{ος}$ τρόπος

Εδώ χρειάζεται μεγάλη προσοχή γιατί μπορεί να σκεφτούμε πως αφού το σώμα Β αρχίζει παρακάτω από το Α γιατί $h_0^B=0$; Η απάντηση είναι απλή: Ανάλογα το σημείο ή τη θέση που έχουμε επιλέξει ως αρχή του άξονα κίνησης γράφουμε τις εξισώσεις μας. Εμείς επιλέξαμε για κάθε σώμα να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό άξονα κίνησης, δηλαδή σαν να χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικού χάρακες έναν για το σώμα Α και έναν για τον Β. Αν κάποιος ήθελε να χρησιμοποιήσει μόνο έναν άξονα κίνησης (έναν χάρακα) τότε θα μπορούσε κάλλιστα να γράψει τις εξισώσεις με το αντίστοιχο σχήμα ως εξής:

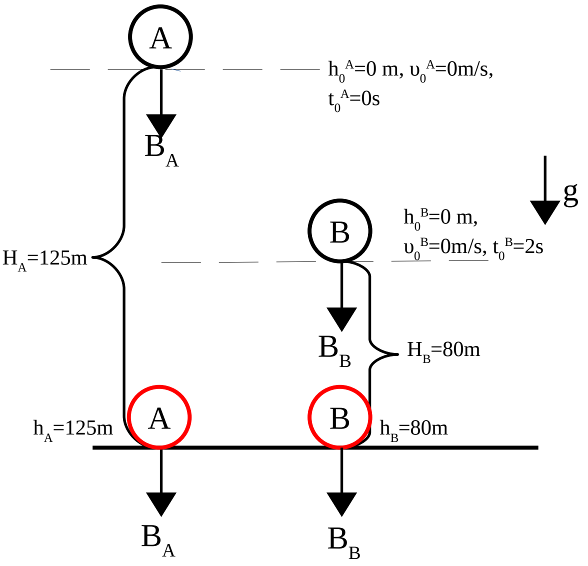


$$\left.\begin{array}{l}\upsilon_A=10t\\ h_A=5t^2\\ \upsilon_B=10(t-2)\\ h_B=45+5(t-2)^2\end{array}\right\}\ 2^{ος}\text{ τρόπος}$$

Με αυτές τις εξισώσεις καταλαβαίνουμε ότι το h_A και h_B αρχίζουν να μετράνε από την θέση που αφήνουμε το Α ελεύθερο. Οπότε και τα δύο σωστά είναι, το σημαντικό είναι να ξέρουμε τι εκφράζει φυσικά αυτό που έχουμε γράψει για μην απαντάμε παράλογα πράγματα στα παρακάτω ερωτήματα. Για να γίνει ακόμα πιο κατανοητή η παραπάνω κατάσταση όλα τα παρακάτω ερωτήματα που ακολουθούν θα λυθούν και με τα δύο σετ εξισώσεων.

γ.

$1^{ος}$ Τρόπος



$$υ_A = 10t$$
$$h_A = 5t^2$$
$$υ_B = 10(t-2)$$
$$h_B = 5(t-2)^2$$

Με κόκκινο είναι ζωγραφισμένες οι καινούργιες θέσεις των σωμάτων όταν φτάνουν στο έδαφος

Όταν το σώμα A έχει φτάσει στο έδαφος βρίσκεται στην θέση $h_A = 125\,m$, οπότε:

$h_A = 5t^2 \Rightarrow 125 = 5t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{125}{5} \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = \pm 5$, δεχόμαστε το t=5s.

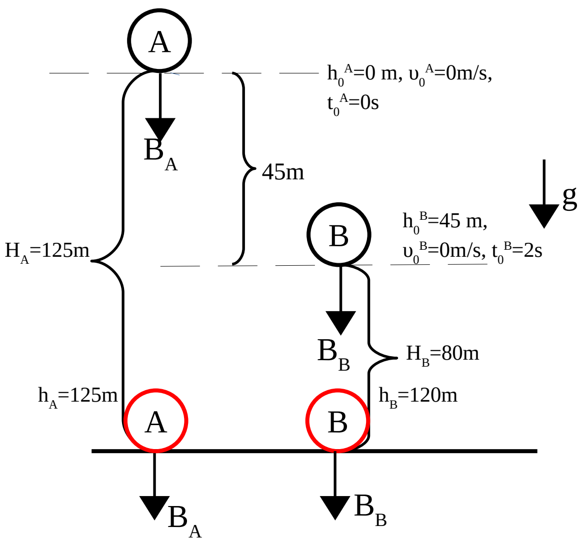
Όταν έχει περάσει χρόνος t=5s, η ταχύτητα θα είναι $υ_A = 10t \Rightarrow υ_A = 10 \cdot 5 \Rightarrow υ_A = 50\,m/s^2$

Όταν το σώμα B έχει φτάσει στο έδαφος βρίσκεται στην θέση $h_B = 80\,m$, οπότε:

$$\begin{aligned}&h_B = 5(t-2)^2 \Rightarrow 80 = 5(t-2)^2 \Rightarrow (t-2)^2 = \frac{80}{5} \Rightarrow (t-2)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{(t-2)^2} = \sqrt{16} \Rightarrow |t-2| = 4 \Rightarrow \\ &t-2 = 4 \text{ ή } t-2 = -4 \\ &t = 6\,s \text{ ή } t = -2\,s\end{aligned}$$
, δεχόμαστε το t=6s.

Όταν έχει περάσει χρόνος t=6s, η ταχύτητα θα είναι $υ_B = 10(t-2) \Rightarrow υ_A = 10 \cdot (6-2) \Rightarrow υ_A = 40\,m/s^2$

$2^{ος}$ Τρόπος



$$υ_A = 10t$$
$$h_A = 5t^2$$
$$υ_B = 10(t-2)$$
$$h_B = 45 + 5(t-2)^2$$

Με κόκκινο είναι ζωγραφισμένες οι καινούργιες θέσεις των σωμάτων όταν φτάνου στο έδαφος

Όταν το σώμα Α έχει φτάσει στο έδαφος βρίσκεται στην θέση $h_A = 125\,m$, οπότε:

$$h_A = 5t^2 \Rightarrow 125 = 5t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{125}{5} \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = \pm 5$$, δεχόμαστε το t=5s.

Όταν έχει περάσει χρόνος t=5s, η ταχύτητα θα είναι $\upsilon_A = 10t \Rightarrow \upsilon_A = 10 \cdot 5 \Rightarrow \upsilon_A = 50\,m/s^2$

Όταν το σώμα Β έχει φτάσει στο έδαφος βρίσκεται στην θέση $h_B = 120\,m$ γιατί όπως είπαμε η εξίσωση του h_B χρησιμοποιεί σαν αρχή του άξονα κίνησης τη θέση από το σημείο που αφήνεται ελεύθερο το Α και όχι όπως πριν που μέτραγε από το σημείο που αφήνεται ελεύθερο το Β, οπότε:

$$\begin{aligned}
&h_B = 45 + 5(t-2)^2 \Rightarrow 125 = 45 + 5(t-2)^2 \Rightarrow 125 - 45 = 5(t-2)^2 \Rightarrow 80 = 5(t-2)^2 \Rightarrow \\
&(t-2)^2 = \frac{80}{5} \Rightarrow (t-2)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{(t-2)^2} = \sqrt{16} \Rightarrow |t-2| = 4 \Rightarrow \\
&t-2 = 4 \text{ ή } t-2 = -4 \\
&t = 6\,s \text{ ή } t = -2\,s
\end{aligned}$$,

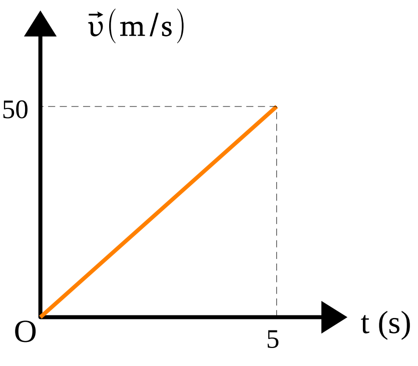
δεχόμαστε το t=6s.

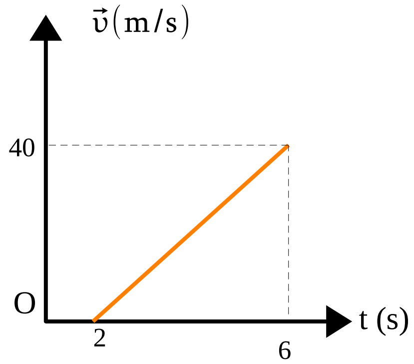
Όταν έχει περάσει χρόνος t=6s, η ταχύτητα θα είναι $\upsilon_B = 10(t-2) \Rightarrow \upsilon_B = 10 \cdot (6-2) \Rightarrow \upsilon_A = 40\,m/s^2$

δ) **1^{ος} τρόπος -2^{ος} τρόπος**

Και στους δύο τρόπους έκφρασης οι εξισώσεις των ταχυτήτων μένουν ίδιες. Το μόνο που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι για το σώμα Β η κίνηση αρχίζει μετά το δεύτερο δευτερόλεπτο.

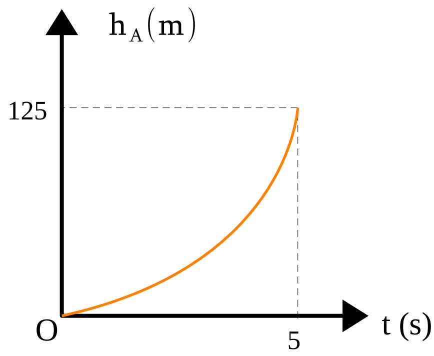
$$\begin{aligned}
&\upsilon_A = 10t \\
&\upsilon_B = 10(t-2)
\end{aligned}$$

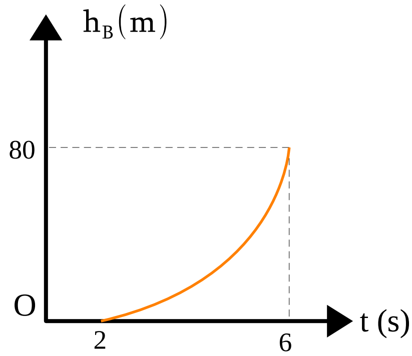




ε) Επειδή στον πρώτο τρόπο χρησιμοποιούμε δύο άξονες δεν γίνεται να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο διάγραμμα οπότε θα χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικά

$$\begin{aligned}
&h_A = 10t^2 \\
&h_B = 10(t-2)^2
\end{aligned}$$

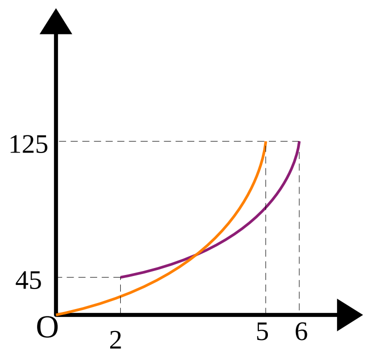




Στο δεύτερο τρόπο που χρησιμοποιούμε έναν άξονα κίνησης και για τα δύο σώματα, μπορούμε να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο γράφημα.

$h_A = 10t^2$
$h_B = 45 + 10(t-2)^2$

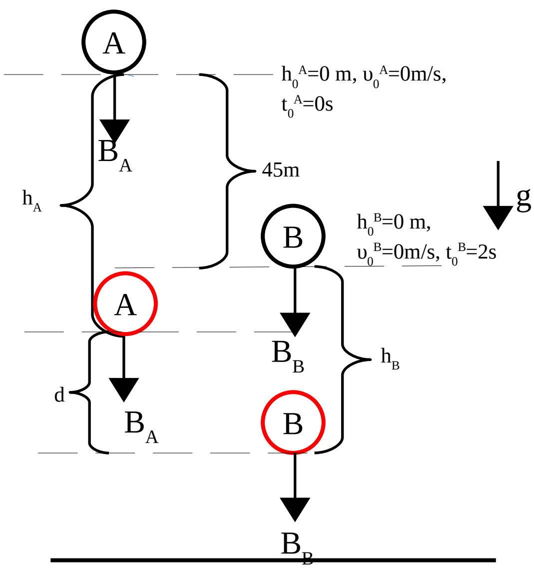
Πορτοκαλί: h_A
Μωβ: h_B



στ. Για να βρούμε τη συνάρτηση της απόστασης d=d(t) πρέπει να κάνουμε καινούργιο σχήμα. Απλά για να γίνει σωστό το σχήμα πρέπει να καταλάβουμε αν θα προπορεύεται το σώμα Α ή το σώμα Β. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να ελέγξουμε αν όταν αρχίζει το σώμα Β να κινείται, δηλαδή την χρονική στιγμή t=2s το σώμα Α το έχει ήδη προσπεράσει. Το βήμα αυτό πρέπει να γίνει όποιο σετ εξισώσεων και να διαλέξουμε.

Άρα έχουμε $h_A = 5t^2 \Rightarrow h_A = 5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 \Rightarrow h_A = 20\,m$ οπότε καταλαβαίνουμε ότι θα προπορεύετε το σώμα Β.

1ος Τρόπος



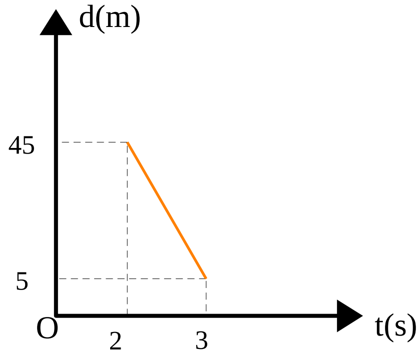
$\upsilon_A = 10t$
$h_A = 5t^2$
$\upsilon_B = 10(t-2)$
$h_B = 5(t-2)^2$

Με κόκκινο είναι οι θέσεις των σωμάτων μία χρονική στιγμή t. Βλέποντας όλα τα ευθύγραμμα τμήματα στο σχήμα βγάζουμε την σχέση ότι:

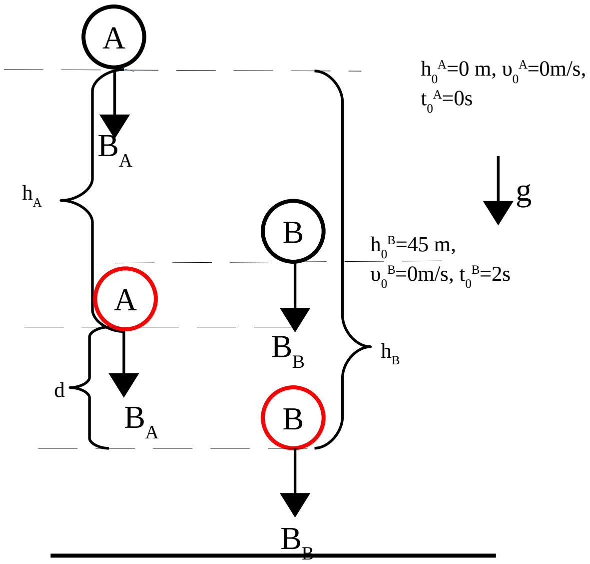
$$h_A + d = 45 + h_B \Rightarrow d = 45 + h_B - h_A \Rightarrow d = 45 + 5(t-2)^2 - 5t^2 \Rightarrow d = 45 + 5(t^2 - 4t + 4) - 5t^2 \Rightarrow$$
$$d = 45 + 5t^2 - 20t + 20 - 5t^2 \Rightarrow d = 65 - 20t$$

Επειδή μιλάμε για απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων και τα δύο σώματα πρέπει να κινούνται η γραφική παράσταση θα αρχίζει από την χρονική στιγμή t=2s και έπειτα.

Επειδή η γραφική παράσταση αναπαρίσταται από μία ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία για να την αναπαραστήσουμε.
Την t=2s έχουμε ότι $d = 65 - 20 \cdot 2 = 65 - 20 = 45$
Την t=3s τα δύο σώματα απέχουν απόσταση $d = 65 - 20 \cdot 3 = 65 - 60 = 5\,m$



2ος Τρόπος

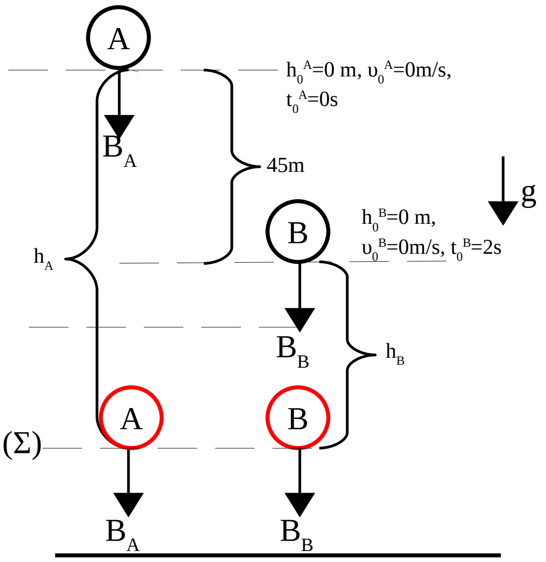


$$υ_A = 10t$$
$$h_A = 5t^2$$
$$υ_B = 10(t-2)$$
$$h_B = 45 + 5(t-2)^2$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $h_B = h_A + d \Rightarrow d = h_B - h_A \Rightarrow d = 45 + 5(t-2)^2 - 5t^2$
Αν κάνουμε τις πράξει θα δούμε ότι βγαίνει πάλι d=65-20t και έχει ακριβώς την ίδια γραφική παράσταση.

ζ. Τα προβλήματα συνάντησης λύνονται σωστά μόνο μέσα από τα σχήματα, οπότε κάνουμε πάλι ένα καινούργιο σχήμα όπου με κόκκινο συμβολίζουμε τη θέση των σωμάτων στο σημείο συνάντησης.

1ος Τρόπος

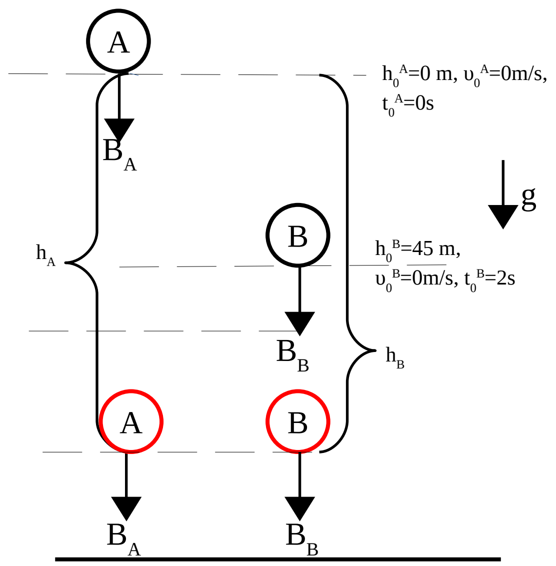


$$υ_A = 10t$$
$$h_A = 5t^2$$
$$υ_B = 10(t-2)$$
$$h_B = 5(t-2)^2$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι για να συναντηθούν τα σώματα πρέπει:

$$h_A = 45 + h_B \Rightarrow 5t^2 = 45 + 5(t-2)^2 \Rightarrow 5t^2 = 45 + 5(t^2 - 4t + 4) \Rightarrow 5t^2 = 45 + 5t^2 - 20t + 20 \Rightarrow$$
$$45 + 5t^2 - 20t + 20 - 5t^2 \Rightarrow 65 - 20t = 0 \Rightarrow 20t = 65 \Rightarrow t = \frac{65}{20} = \frac{13}{4}\,s$$

2ος Τρόπος



$$υ_A = 10t$$
$$h_A = 5t^2$$
$$υ_B = 10(t-2)$$
$$h_B = 45 + 5(t-2)^2$$

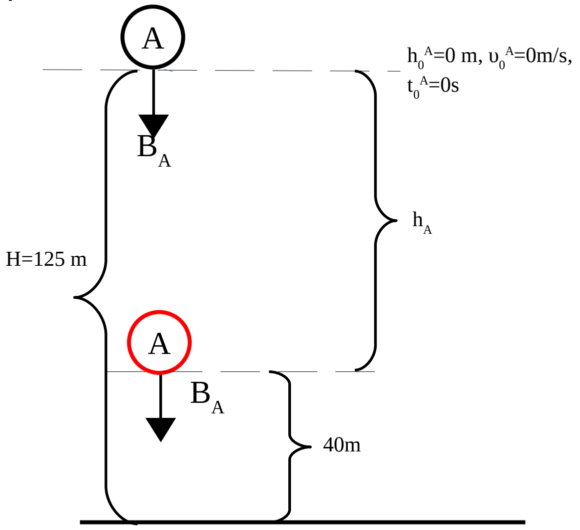
Από το σχήμα βλέπουμε ότι $h_A = h_B \Rightarrow 5t^2 = 45 + 5(t-2)^2$. Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε πάλι ότι ο χρόνο συνάντησης είναι $t = \frac{13}{4}\,s$.

Αν μας ζητούσαν και τη θέση του σημείου συνάντησης τότε μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε σε κάποια από τις δύο εξισώσεις κίνηση το $t = \frac{13}{4}\,s$. Συμβουλευτικά προτείνω να χρησιμοποιειται την εξίσωση που μετράει από την αρχή του μεγαλύτερου ύψους όπου εδώ είναι η h_A

$$h_A=5t^2 \Rightarrow h_A=5\left(\frac{13}{4}\right)^2 \Rightarrow h_A=\frac{5\cdot 169}{16} \Rightarrow h_A=52{,}8\,m$$

Άρα το σημείο συνάντησης (Σ) βρίσκεται σε ύψος 52,8 m.

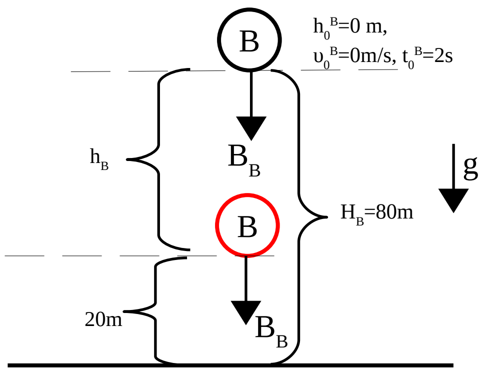
η.



$$h_A=125-40 \Rightarrow h_A=85\,m \Rightarrow 5t^2=85 \Rightarrow t^2=\frac{85}{5} \Rightarrow t^2=17 \Rightarrow t=\pm\sqrt{17}$$, δεχόμαστε το $t=\sqrt{17}$.

ι. Το σώμα Β απέχει 80 m από το έδαφος, άρα το $\frac{1}{4}$ της απόστασης του από το έδαφος είναι το $\frac{1}{4}\cdot 80=20\,m$.

1^{ος} Τρόπος



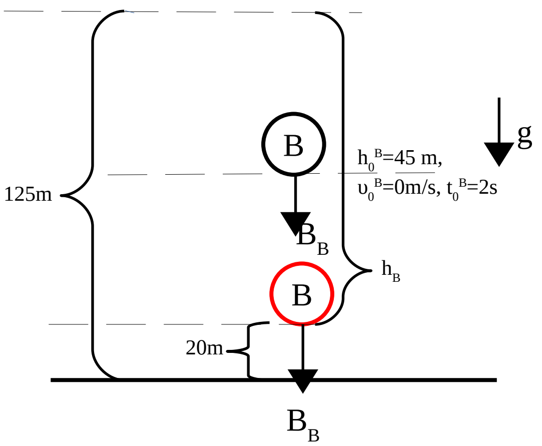
$$υ_B=10(t-2)$$
$$h_B=5(t-2)^2$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι:

$$h_B=80-20 \Rightarrow h_B=60\,m \Rightarrow =5(t-2)^2=60 \Rightarrow (t-2)^2=\frac{60}{5} \Rightarrow t-2=\pm\sqrt{12} \Rightarrow t-2=\pm 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$t=2\sqrt{3}+2$ ή $t=-2\sqrt{3}+2$, δεχόμαστε την λύση $t=2\sqrt{3}+2$.

$2^{ος}$ Τρόπος



$υ_B = 10(t-2)$
$h_B = 45 + 5(t-2)^2$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι
$h_B + 20 = 125 \Rightarrow h_B = 120 - 20 \Rightarrow = h_b = 105 \Rightarrow 45 + 5(t-2)^2 = 105 \Rightarrow 5(t-2)^2 = 105 - 45 \Rightarrow 5(t-2)^2 = 60 \Rightarrow$
$(t-2)^2 = \frac{60}{5}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι καταλήγουμε στην ίδια εξίσωση που έχει λύση την $t = 2\sqrt{3} + 2$.

ια. Η διάρκεια του τρίτου δευτερολέπτου είναι μέχρι το ρολόι να κινηθεί από το 2ο στο 3ο δευτερόλεπτο. Οπότε για να βρούμε την μεταβολή της ταχύτητα υπολογίζουμε από την εξίσωση $υ_A = 10t$:

$υ_A^2 = 10 \cdot 2 = 20\, m/s$ και $υ_A^3 = 10 \cdot 3 = 30\, m/s$ οπότε $\vec{\Delta υ} = υ_A^3 - υ_A^2 = 30 - 20 = 10\, m/s$
(Ότι η μεταβολή της ταχύτητας έχει θετικό πρόσημο σημαίνει ότι η ταχύτητα αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου)

Αντίστοιχα για να βρούμε το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα από την εξίσωση $h_A = 5t^2$ έχουμε:
$h_A^2 = 5 \cdot 4 = 20\, m$ και $h_A^3 = 5 \cdot 3^2 = 45\, m$ οπότε η απόσταση που έχει διανύσει το σώμα είναι s= $h_A^3 - h_A^2 = 45 - 20 = 25\, m$

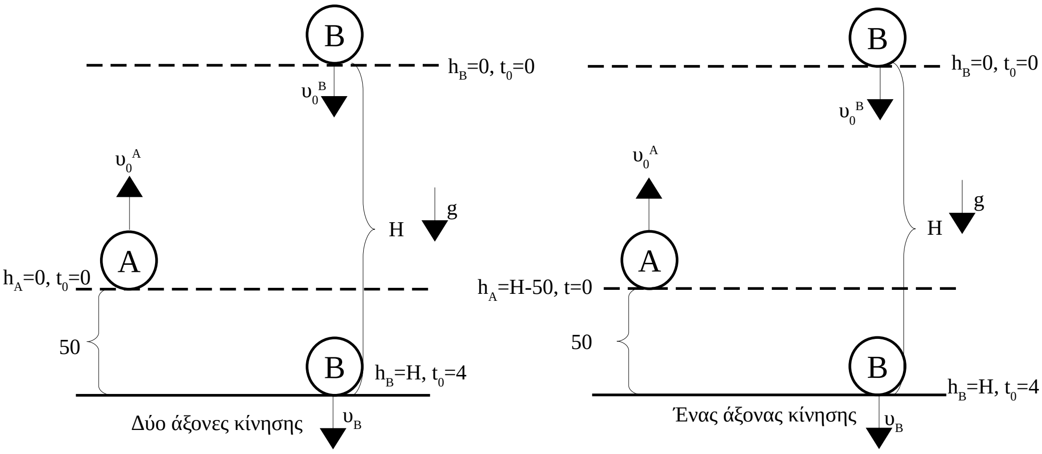
Γενική Άσκηση 2

Ένα σώμα Α βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω από ύψος h=50m από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $υ_0^A = 40\, m/s$. Ταυτόχρονα δίπλα βάλλεται από ύψος Η προς τα κάτω ένα σώμα Β με αρχική ταχύτητα $υ_0^B = 5\, m/s$. Το σώμα Β φτάνει στο έδαφος σε χρόνο t=4s.

α. Να γράψετε τι κίνηση κάνει το κάθε σώμα καθώς και τις εξισώσεις κίνησης και ταχύτητας τους.
β. Να βρείτε το ύψος Η από το οποίο βάλλεται το σώμα Β.
γ. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα Α και ποιος ο χρόνος ανόδου του;
δ. Να βρείτε τον ολικό χρόνο κίνησης του σώματος Α και τον αντίστοιχο χρόνο καθόδου.
ε. Να βρείτε την χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σώμα Α και Β αντίστοιχα απέχουν 20m από το έδαφος;
στ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητα και θέσης για τα δύο σώματα.
ζ. Θα βρίσκονται κάποια στιγμή τα δύο σώματα στο ίδιο ύψος; Αν ναι, βρείτε το σημείο συνάντησης και τις ταχύτητες τους εκείνη τη στιγμή.
η. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις που διανύουν τα δύο σώματα το τελευταίο δευτερόλεπτο τις κίνησης τους.

Δίνεται $g = 10\, m/s^2$ και ότι οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Λύση
Από την στιγμή που η άσκηση ισχυρίζεται ότι οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες καταλαβαίνουμε ότι στα σώματα θα ασκείται μόνο το βάρος του, οπότε και τα δύο θα κινούνται με επιτάχυνση/επιβράδυνση, την επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$.



Επειδή έχουμε πει ότι σαν αρχή του άξονα κίνηση χρησιμοποιούμε το σημείο βολής εδώ θα χρησιμοποιήσουμε δύο άξονες κίνησης, έναν για κάθε σώμα. Η μόνη περίπτωση που θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε κοινό άξονα κίνησης είναι αν η άσκηση μας ζητούσε να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των θέσεων σε κοινό διάγραμμα. Για εξάσκηση θα λύσουμε την άσκηση και με κοινό άξονα κίνησης παράλληλα με του δύο άξονες. Σαν αρχή του κοινού άξονα θα πάρουμε το σημείο βολής του Β. Να προτιμάτε δύο άξονες γιατί γίνεται πολύ δύσκολο στην κατακόρυφη βολή να έχουμε κοινό άξονα. Απαιτεί μεγάλη εξοικείωση με τα διανύσματα. Παρόλα αυτά διαβάστε το σε αυτήν την άσκηση γιατί είναι πολύ διδακτικό.

α. Το σώμα Α εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0^A=40\,m/s$ ενώ το σώμα Β εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0^B=5\,m/s$

<u>Δύο άξονες Κίνησης:</u>

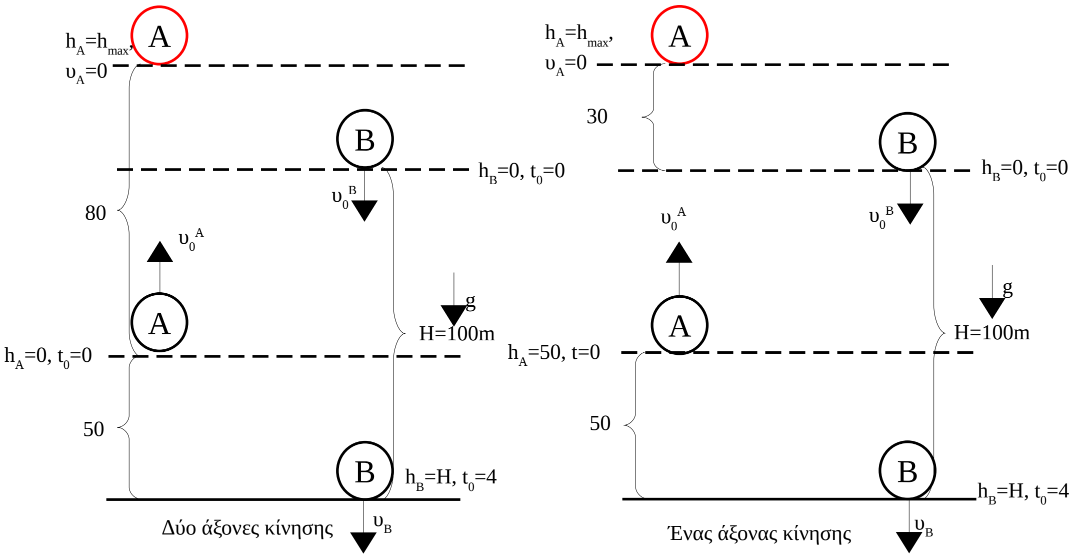
- ➔ Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα Α είναι $\upsilon_A=\upsilon_0^A-g\,t\Rightarrow\upsilon_A=40-10\,t$ ενώ η εξίσωση κίνησης είναι $h_A=\upsilon_0^A\,t-\frac{1}{2}g\,t^2\Rightarrow h_A=40\,t-5\,t^2$
- ➔ Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα Β είναι $\upsilon_B=\upsilon_0^B+g\,t\Rightarrow\upsilon_A=5+10\,t$ ενώ η εξίσωση κίνησης είναι $h_B=\upsilon_0^B\,t+\frac{1}{2}g\,t^2\Rightarrow h_B=5\,t+5\,t^2$

<u>Ένας άξονας κίνησης:</u>
Όταν έχουμε ένα άξονα κίνησης πρέπει να είμαστε πάρα πολύ προσεκτικοί με τα πρόσημα των διανυσμάτων. Εμείς σε αυτήν την άσκηση για κοινό άξονα κίνησης υιοθετήσαμε τον άξονα κίνησης του σώματος Β που εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω. Σύμφωνα με αυτό τον άξονα θετικό πρόσημο έχουν τα διανύσματα που πηγαίνουν προς τα κάτω. Με βάση λοιπόν αυτή τη σύμβαση το υ_0^A είναι αρνητικό ενώ τα υ_0^B και $\vec{g}$ θετικά, άρα οι εξισώσεις γίνονται ως εξής

- ➔ Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα Α είναι $\upsilon_A=-\upsilon_0^A+g\,t\Rightarrow\upsilon_A=-40+10\,t$ ενώ η εξίσωση κίνησης είναι $h_A=H-50-\upsilon_0^A\,t+\frac{1}{2}g\,t^2\Rightarrow h_A=H-50-40\,t+5\,t^2$
- ➔ Η εξίσωση της ταχύτητας για το σώμα Β είναι $\upsilon_B=\upsilon_0^B+g\,t\Rightarrow\upsilon_A=5+10\,t$ ενώ η εξίσωση κίνησης είναι $h_B=\upsilon_0^B\,t+\frac{1}{2}g\,t^2\Rightarrow h_B=5\,t+5\,t^2$

β. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, όταν το σώμα Β έχει διανύσει απόσταση Η, τότε έχει περάσει χρόνος t=4s οπότε: $h_B = 5t + 5t^2 \Rightarrow H = 5\cdot 4 + 5\cdot 16 \Rightarrow H = 20 + 80 \Rightarrow H = 100\,m$

γ. **Όταν το σώμα Α φτάνει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του, τότε μηδενίζεται η ταχύτητα του**.



<u>Δύο άξονες κίνησης:</u>

$$\upsilon_A = 40 - 10t \Rightarrow 0 = 40 - 10t_{ανόδου} \Rightarrow 10t_{ανόδου} = 40 \Rightarrow t_{ανόδου} = \frac{40}{10} \Rightarrow t_{ανόδου} = 4\,s$$

Για $t = t_{ανόδου}$ το $h_A = h_{max}$, οπότε:

$$h_A = 40t - 5t^2 \Rightarrow h_{max} = 40t_{ανόδου} - 5t^2_{ανόδου} \Rightarrow h_{max} = 40\cdot 4 - 5\cdot 16 \Rightarrow h_{max} = 80\,m$$

Άρα το μέγιστο ύψος που βρίσκεται το σώμα είναι <u>στη θέση</u> 80 m από το σημείο βολής ή <u>σε απόσταση</u> 50+80=130 m από το έδαφος.

<u>Ένας άξονες κίνησης:</u>

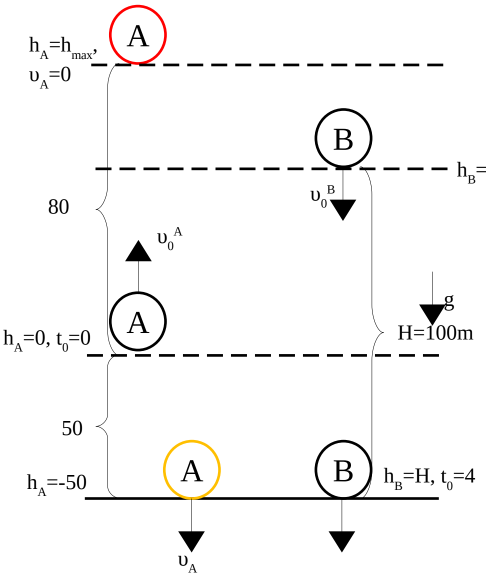
$$\upsilon_A = -40 + 10t \Rightarrow 0 = -40 + 10t_{ανόδου} \Rightarrow 10t_{ανόδου} = 40 \Rightarrow t_{ανόδου} = \frac{40}{10} \Rightarrow t_{ανόδου} = 4\,s$$

Για $t = t_{ανόδου}$ το $h_A = h_{max}$, οπότε:

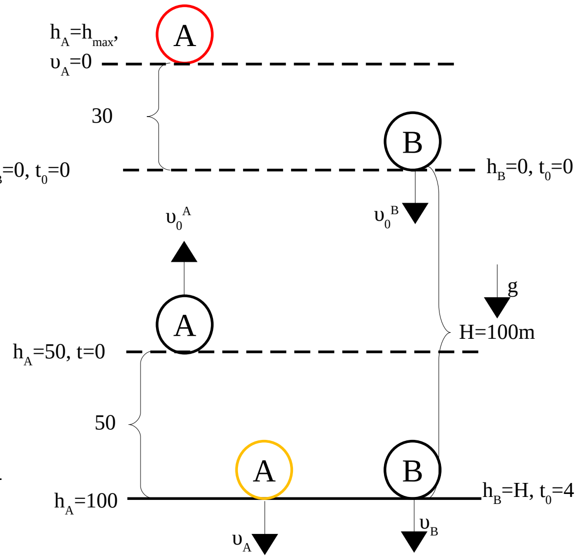
$$h_A = 50 - 40t + 5t^2 \Rightarrow h_{max} = 50 - 40t_{ανόδου} + 5t^2_{ανόδου} \Rightarrow h_{max} = 50 - 40\cdot 4 + 5\cdot 16 \Rightarrow h_{max} = 50 - 160 + 80\,m$$
$$h_{max} = -30\,m$$

Άρα το μέγιστο ύψος βρίσκεται <u>στη θέση</u> $h_A = -30\,m$ από το σημείο βολής του Β (αρχή του κοινού άξονα ή <u>σε απόσταση</u> 30+50=80m από το σημείο βολής του Α ή <u>σε απόσταση</u> 100+30=130m από το έδαφος.

δ. Ο ολικός χρόνος είναι αυτός που κάνει το σώμα Α για πέσει στο έδαφος. Επειδή εδώ **το σημείο βολής δεν είναι ίδιο με το σημείο επιστροφής** $t_{ανόδου} \neq t_{καθόδου}$



Δύο άξονες κίνησης



Ένας άξονας κίνησης

Δύο άξονες Κίνησης:

Όταν το σώμα φτάνει στο έδαφος βρίσκεται στη θέση h_A=-50m σύμφωνα με τον άξονα κίνησης του όπως φαίνεται και στο σχήμα, οπότε

$$h_A=40t-5t^2\Rightarrow -50=40t_{\text{ολικό}}-5t^2_{\text{ολικό}}\Rightarrow -10=8t_{\text{ολικό}}-t^2_{\text{ολικό}}\Rightarrow t^2_{\text{ολικό}}-8t_{\text{ολικό}}-10=0$$

$$\Delta+\beta^2-4\alpha\gamma\Rightarrow\Delta=64+40=104\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{104}$$

$$t_{\text{ολικό}}=\frac{8+\sqrt{104}}{2}\ \text{ή}\ t_{\text{ολικό}}=\frac{8-\sqrt{104}}{2}$$

Δεχόμαστε την λύση $t_{\text{ολικό}}=\frac{8+\sqrt{104}}{2}$ γιατί

$$100<104<144\Rightarrow\sqrt{100}<\sqrt{104}<\sqrt{144}\Rightarrow 10<\sqrt{104}<12\Rightarrow -10>-\sqrt{104}>-12\Rightarrow 8-10>4-\sqrt{104}>8-12\Rightarrow$$
$$-2>4-\sqrt{104}>-4\Rightarrow -\frac{2}{2}>\frac{4-\sqrt{104}}{2}>\frac{-4}{2}\Rightarrow -1>\frac{4-\sqrt{104}}{2}>-2$$

Οπότε καταλαβαίνουμε ότι η άλλη λύση είναι αρνητική:

Αφού λοιπόν $t_{\text{ολικό}}=4+\frac{8+\sqrt{104}}{2}\Rightarrow$ $t_{\text{καθόδου}}=t_{\text{ολικό}}-t_{\text{ανόδου}}\Rightarrow t_{\text{καθόδου}}=\frac{8+\sqrt{104}}{2}-4=\frac{\sqrt{104}}{2}\,s$

Ένας άξονας Κίνησης:

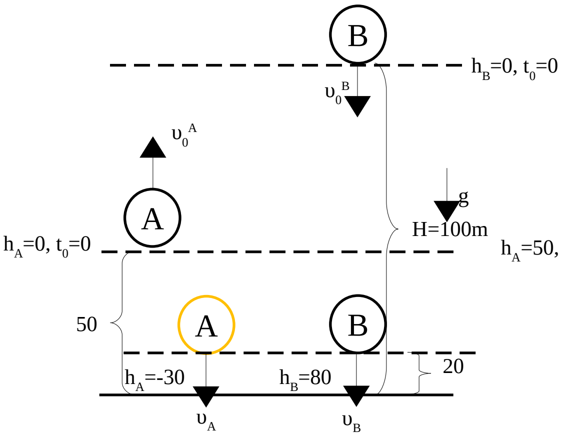
Όταν το σώμα φτάνει στο έδαφος βρίσκεται στη θέση h_A=100m σύμφωνα με τον άξονα κίνησης του όπως φαίνεται και στο σχήμα, οπότε

$$100=50-40t+5t^2\Rightarrow 100-50=-40t_{\text{ολικό}}+5t^2_{\text{ολικό}}\Rightarrow -50=-40t_{\text{ολικό}}+t^2_{\text{ολικό}}\Rightarrow 50=-40t_{\text{ολικό}}+t^2_{\text{ολικό}}\Rightarrow$$
$$t^2_{\text{ολικό}}-8t_{\text{ολικό}}-10=0$$

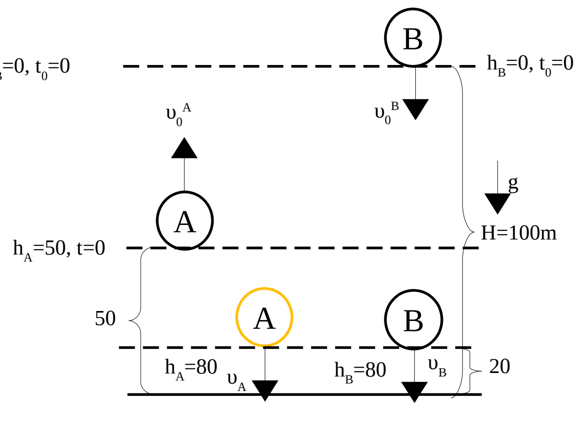
Βλέπουμε ότι καταλήγουμε στη ίδια εξίσωση όπως και πριν με τους δύο άξονες, οπότε βρίσκουμε όπως και προηγουμένως ότι :

$$t_{ολικό}=\frac{8+\sqrt{104}}{2} \quad και \quad t_{καθόδου}=\frac{\sqrt{104}}{2}$$

ε.



Δύο άξονες κίνησης



Ένας άξονας κίνησης

<u>Δύο άξονες κίνησης:</u>

Όταν το σώμα Α βρίσκεται <u>σε απόσταση</u> 20m πάνω από το έδαφος τότε επί της ουσίας βρίσκεται <u>στη θέση</u> $h_A=-30\,m$ ενώ το σώμα Β όταν βρίσκεται <u>σε απόσταση</u> 20m πάνω από το έδαφος τότε επί της ουσίας βρίσκεται <u>στη θέση</u> $h_B=80\,m$.

<u>Σώμα Α:</u> $h_A=40t-5t^2 \Rightarrow -30=40t-5t^2 \Rightarrow 5t^2-40t-30=0 \Rightarrow t^2-8t-6=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4(1)(-6) \Rightarrow \Delta=64+24=78 \Rightarrow sqrt\Delta=\sqrt{78}$

$t=\frac{8\pm\sqrt{78}}{2}$, δεχόμαστε την λύση $t=\frac{8+\sqrt{78}}{2}$, γιατί :

$64<78<81 \Rightarrow \sqrt{64}<\sqrt{78}<\sqrt{81} \Rightarrow 8<\sqrt{78}<9 \Rightarrow -8>\sqrt{78}>-9 \Rightarrow 8-8>8-\sqrt{78}>8-9 \Rightarrow$

$0>8-\sqrt{78}>0 \Rightarrow 8-\sqrt{78}<0 \Rightarrow \frac{8-\sqrt{78}}{2}<0$

<u>Σώμα Β</u>: $h_B=5t+5t^2 \Rightarrow 80=5t+5t^2 \Rightarrow 5t^2+5t=80 \Rightarrow t^2+t=16 \Rightarrow t^2+t-16=0$

$\Delta=1^2-4(1)(-16) \Rightarrow \Delta=1+64 \Rightarrow \Delta=64 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{65}$

$t=\frac{8\pm\sqrt{65}}{2}$, δεχόμαστε την λύση $t=\frac{8+\sqrt{65}}{2}$ γιατί

$64<65<81 \Rightarrow \sqrt{64}<\sqrt{65}<\sqrt{81} \Rightarrow 8<\sqrt{65}<9 \Rightarrow -8>-\sqrt{65}>-9 \Rightarrow -8-8>8-\sqrt{65}>8-9 \Rightarrow 8-\sqrt{65}<0 \Rightarrow$
$\frac{8-\sqrt{65}}{2}<0$

<u>Ένας άξονας κίνησης:</u>

Όταν έχουμε έναν άξονα κίνησης όπως φαίνεται και στο σχήμα το $h_A=h_B=80\,m$ όποτε για το:

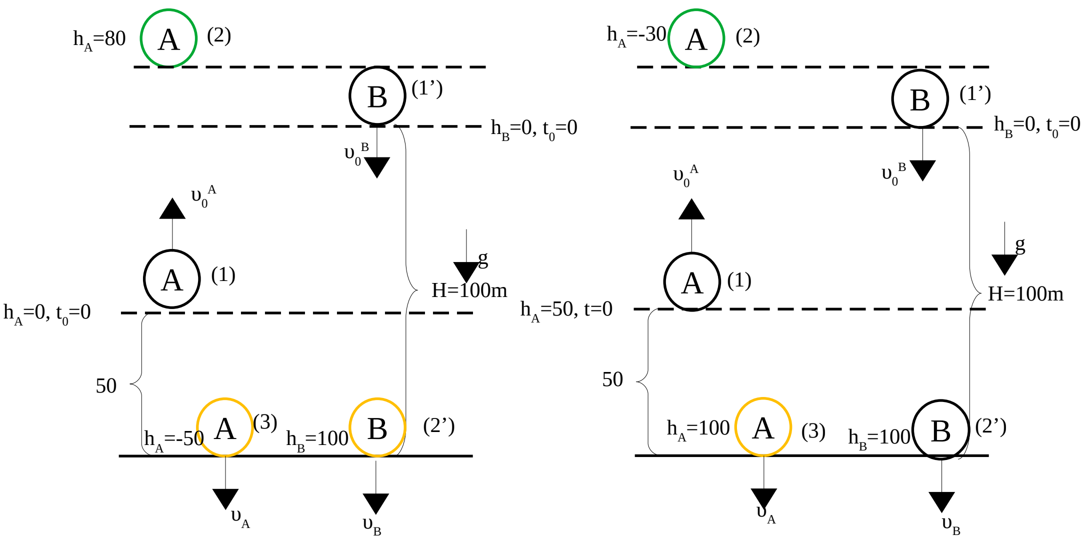
Σώμα Α: $h_A=50-40t+5t^2 \Rightarrow 80=50-40t+5t^2 \Rightarrow 80-50=-40t+5t^2 \Rightarrow 30=-40t+5t^2 \Rightarrow 5t^2-40t-30 \Rightarrow t^2-8t-6=0$

Σώμα Β:

$$h_B=5t+5t^2 \Rightarrow 80=5t+5t^2 \Rightarrow 5t^2+5t-80 \Rightarrow t^2+t-16=0$$

Βλέπουμε ότι και για τα δύο σώματα καταλήξαμε στις ίδιες εξισώσεις οπότε οι χρόνοι που τα σώματα βρίσκονται σε απόσταση 20m από το έδαφος είναι οι ίδιοι που βρήκαμε στην περίπτωση των δύο αξόνων.

στ)

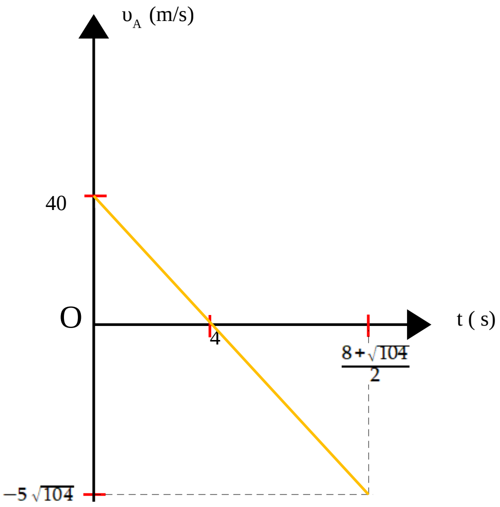


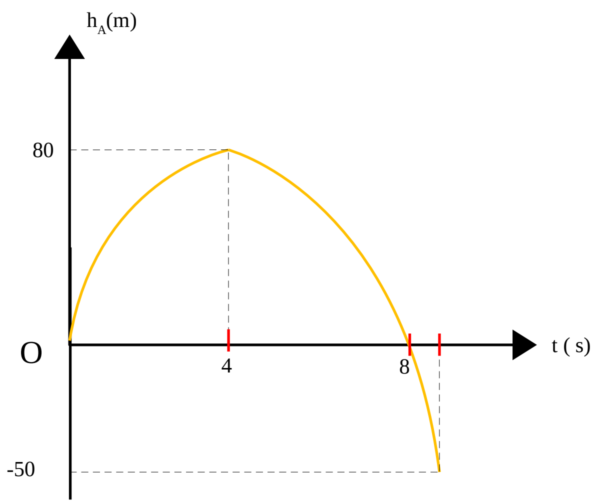
Δύο άξονες κίνησης Ένας άξονας κίνησης

Δύο άξονες κίνησης:

Για το σώμα Α οι κύριες θέσεις από τις οποίες περνάει είναι οι (1), (2) και (3).

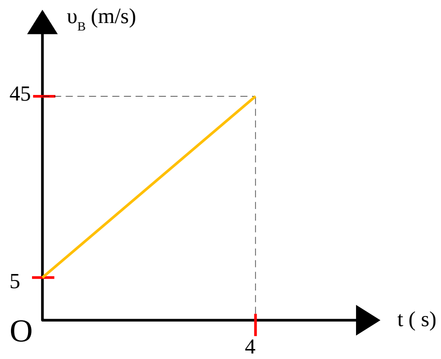
- ➔ Στην θέση (1) το σώμα βρίσκεται στην θέση $h_A=0$, την χρονική στιγμή t=0 και έχει ταχύτητα $υ_0^A=40\,m/s$
- ➔ Στην θέση (2) το σώμα βρίσκεται στην θέση $h_A=80$, την χρονική στιγμή t=4s και έχει ταχύτητα $υ_A=0\,m/s$
- ➔ Στην θέση (3) το σώμα βρίσκεται στην θέση $h_A=-50$, την χρονική στιγμή $t_{ολικό}=\frac{8+\sqrt{104}}{2}$ και έχει ταχύτητα $υ_A=40-10t=40-10\cdot\frac{8+\sqrt{104}}{2} \Rightarrow υ_A=-5\sqrt{104}\,m/s$

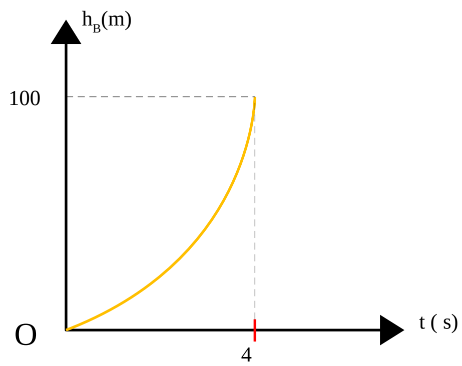




Για το <u>σώμα Β</u> οι κύριες θέσεις από τις οποίες περνάει είναι οι (1’) και (2’).

- ➔ Στην θέση (1’) το σώμα βρίσκεται <u>στην θέση</u> $h_B=0$, την χρονική στιγμή t=0 και έχει <u>ταχύτητα</u> $\upsilon_0^B=5\,m/s$
- ➔ Στην θέση (2’) το σώμα βρίσκεται <u>στην θέση</u> $h_B=100\,m$, την χρονική στιγμή t=4s και έχει <u>ταχύτητα</u> $\upsilon_B=5+10\,t=5+40\Rightarrow\upsilon_B=45\,m/s$





<u>Ένας άξονας κίνησης:</u>

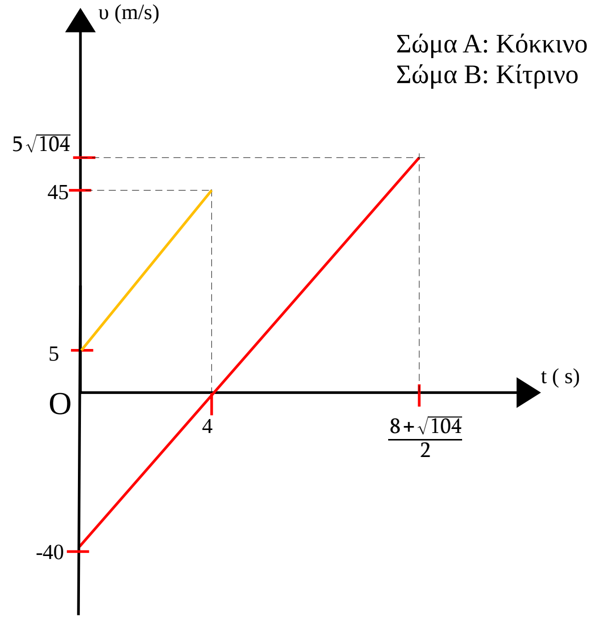
Για το <u>σώμα Α</u> οι κύριες θέσεις από τις οποίες περνάει είναι οι (1), (2) και (3).

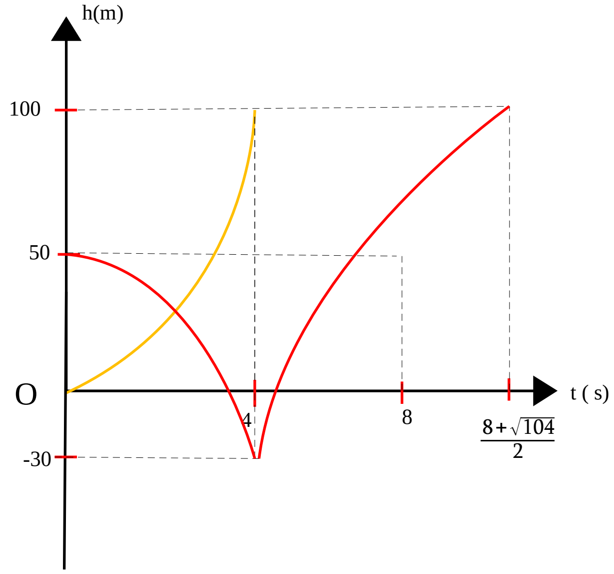
- ➔ Στην θέση (1) το σώμα βρίσκεται <u>στην θέση</u> $h_A=50$, την χρονική στιγμή t=0 και έχει <u>ταχύτητα</u> $\upsilon_0^A=-40\,m/s$
- ➔ Στην θέση (2) το σώμα βρίσκεται <u>στην θέση</u> $h_A=-30$, την χρονική στιγμή t=4s και έχει <u>ταχύτητα</u> $\upsilon_A=0\,m/s$
- ➔ Στην θέση (3) το σώμα βρίσκεται <u>στην θέση</u> $h_A=100$, την χρονική στιγμή $t_{ολικό}=\frac{8+\sqrt{104}}{2}$ και έχει <u>ταχύτητα</u> $\upsilon_A=-40+10\,t=-40+10\cdot\frac{8+\sqrt{104}}{2}\Rightarrow\upsilon_A=5\sqrt{104}\,m/s$

Για το <u>σώμα Β</u> οι κύριες θέσεις από τις οποίες περνάει είναι οι (1’) και (2’).

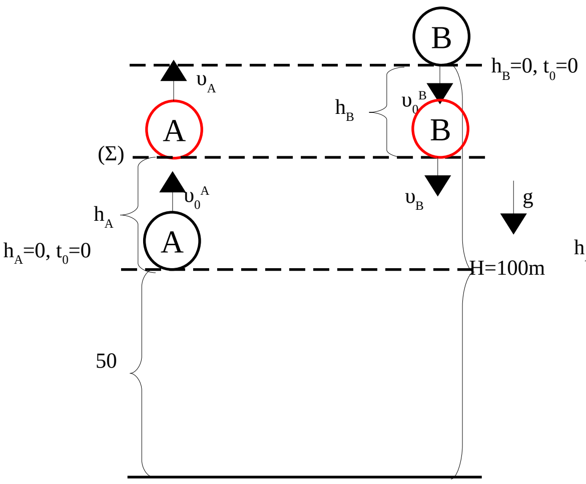
- ➔ Στην θέση (1’) το σώμα βρίσκεται <u>στην θέση</u> $h_B=0$, την χρονική στιγμή t=0 και έχει <u>ταχύτητα</u> υ_0^B=5m/s

➔ Στην θέση (2’) το σώμα βρίσκεται <u>στην θέση</u> $h_B = 100\,m$, την χρονική στιγμή t=4s και έχει <u>ταχύτητα</u> $\upsilon_B = 5 + 10\,t = 5 + 40 \Rightarrow \upsilon_B = 45\,m/s$

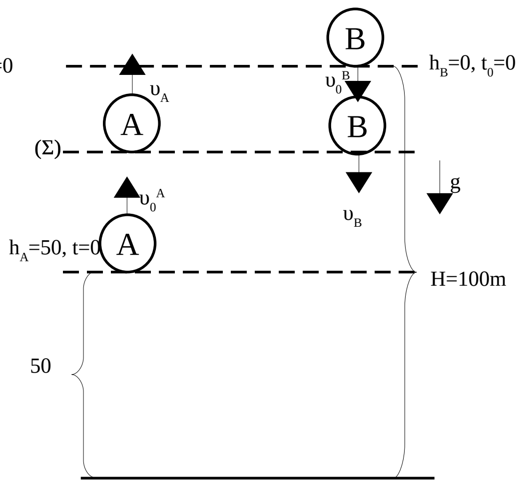




ζ. Για να δούμε αν θα βρεθούν στο ίδιο ύψος τα σώματα πρέπει να σκεφτούμε λίγο έξυπνα πριν φτιάξουμε το σχήμα. Ξέρουμε ότι στα 4s το σώμα Α έχει ανέβει στο μέγιστο ύψος και το σώμα Β έχει φτάσει στο έδαφος, οπότε αν γίνει συνάντηση θα γίνει κατά την διάρκεια που το σώμα Α ανεβαίνει προς τα πάνω.



Δύο άξονες κίνησης



Ένας άξονας κίνησης

<u>Δύο άξονες Κίνησης:</u>

Έστω (Σ) το ύψος το οποίο συναντώνται, τότε από το σχήμα βλέπουμε ότι:

$$h_A + h_B = 50 \Rightarrow 40\,t_\Sigma - 5\,t_\Sigma^2 + 5\,t_\Sigma + 5\,t_\Sigma^2 = 50 \Rightarrow 45\,t_\Sigma = 50 \Rightarrow t_\Sigma = \frac{50}{45} \Rightarrow t_\Sigma = \frac{10}{9}$$

Το σημείο συνάντησης είναι το $h_A = 40\,t - 5\,t^2 \Rightarrow h_A = \frac{40 \cdot 10}{9} - \frac{5 \cdot 100}{81} \Rightarrow h_A = \frac{3100}{81} \simeq 38{,}3\,m$

Άρα το σημείο συνάντησης βρίσκεται σε <u>απόσταση</u> 38,3+50=88,3m από το έδαφος.

Την χρονική στιγμή t_Σ το σώμα Α έχει ταχύτητα $\upsilon_A = 40 - 10\,t \Rightarrow \upsilon_A = 40 - 10 \cdot \frac{10}{9} \Rightarrow \upsilon_A = \frac{260}{9}\,m/s$

Την χρονική στιγμή t_Σ το σώμα Β έχει ταχύτητα

$\upsilon_B = 5 + 10\,t \Rightarrow \upsilon_B = 5 + 10 \cdot \frac{10}{9} \Rightarrow \upsilon_A = \frac{145}{9}\,m/s$

<u>Ένας άξονας Κίνησης:</u>

Όταν έχω έναν άξονα κίνησης τότε στην ουσία για να συναντηθούν τα σώματα πρέπει $h_A = h_B \Rightarrow 5\,t_\Sigma + 5\,t_\Sigma^2 = 50 - 40\,t_\Sigma + 5\,t_\Sigma^2 \Rightarrow 45\,t_\Sigma = 50$. Βλέπουμε ότι καταλήγουμε στην ίδια εξίσωση οπότε τα αποτελέσματα είναι αυτά που βρήκαμε παραπάνω

η. Το σώμα Α κινείται για χρόνο $\frac{8 + \sqrt{104}}{2}$, οπότε για να βρούμε την απόσταση που διένυσε το τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησης του πρέπει να βρούμε το h_A^1 για t_1 = $\frac{8 + \sqrt{104}}{2} - 1$ και το h_A^2 για t_2 = $\frac{8 + \sqrt{104}}{2}$ και μετά να βρούμε την διαφορά τους $s_A = |h_A^2 - h_A^1|$

<u>Δύο άξονες Κίνησης:</u>

$$h_A = 40\,t - 5\,t^2 \Rightarrow h_A^1 = 40\left(\frac{8 + \sqrt{104}}{2} - 1\right) - 5\left(\frac{8 + \sqrt{104}}{2} - 1\right)^2 \Rightarrow h_A^1 = 40\left(\frac{6 + \sqrt{104}}{2}\right) - 5\left(\frac{6 + \sqrt{104}}{2}\right)^2 \Rightarrow h_A^1 \simeq -4\,m$$

Ήδη ξέρουμε ότι την χρονική στιγμή t= $\frac{8 + \sqrt{104}}{2}$ το $h_A^2 = -50\,m$ οπότε:

$s = |-50 - (-4)| \Rightarrow s = |-46|\,m \Rightarrow s = 46\,m$.

<u>Ένας άξονας Κίνησης:</u>

$$h_A = 50 - 40\,t + 5\,t^2 \Rightarrow h_A^1 = 50 - 40\left(\frac{8 + \sqrt{104}}{2} - 1\right) + 5\left(\frac{8 + \sqrt{104}}{2} - 1\right)^2 \Rightarrow$$

$$h_A^1 = 50 - 40\left(\frac{6 + \sqrt{104}}{2}\right) + 5\left(\frac{6 + \sqrt{104}}{2}\right)^2 \Rightarrow h_A^1 \simeq 54\,m$$

Ήδη ξέρουμε ότι την χρονική στιγμή t= $\frac{8 + \sqrt{104}}{2}$ το $h_A^2 = 100\,m$ οπότε: $s = |100 - 54| \Rightarrow s = 46\,m$.

Το σώμα Β κινείται για t=4s , οπότε για να βρούμε την απόσταση που διένυσε το τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησης του πρέπει να βρούμε το h_B^1 για t_1 =3s και το h_B^2 για t_2 =4s και μετά να βρούμε την διαφορά τους $s_B = |h_B^2 - h_B^1|$

$h_B = 5\,t + 5\,t^2 \Rightarrow h_B^1 = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 9 = 60\,m$

Ήδη ξέρουμε ότι την χρονική στιγμή t=4s το $h_B^2 = 100\,m$, οπότε $s_B = |h_B^2 - h_B^1| = |100 - 60| = 40\,m$

Γενική Άσκηση 3

Ένα σώμα Α μάζα m=1 Kg βάλλεται προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_A^0 = 10\,m/s$ από ύψος H=150 m και φτάνει στο έδαφος μετά από χρόνο t=6s.

[A] α. Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα ; Αν όχι βρείτε την αντίσταση του αέρα.

β. Τι κίνηση κάνει το σώμα; Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στο έδαφος.
γ. Να φτιάξετε τα φτιάξετε τα διαγράμματα F-t, h-t, υ-t για το σώμα Α.

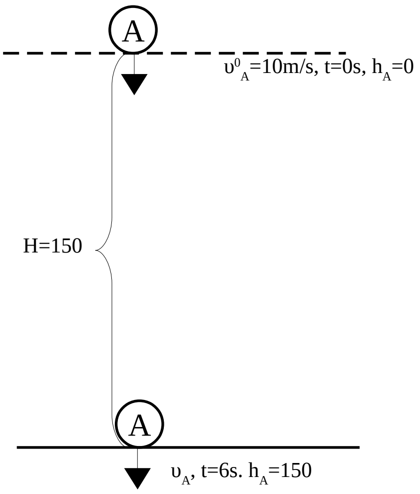
[Β] Σε απόσταση 80 m δεξιά από τον κατακόρυφο άξονα, στο έδαφος υπάρχει ένα σώμα Β που ξεκινά από την ηρεμία με επιτάχυνση $\vec{\alpha}=10\,m/s$.

α) Τι κίνηση κάνει το σώμα Β;
β) Ποιος πρέπει να είναι ο αρχικός χρόνος εκκίνησης του σώματος Β ώστε τα δύο σώματα να συναντηθούν;
γ) Να γράψετε τις εξισώσεις ταχύτητας και θέσης που περιγράφουν τη κίνηση του σώματος Β και να κάνετε τα διαγράμματα τους.
δ) Πόση είναι η απόσταση των δύο σωμάτων ένα δευτερόλεπτο πριν τη συνάντηση τους;

Δίνεται $\vec{g}=10\,m/s^2$

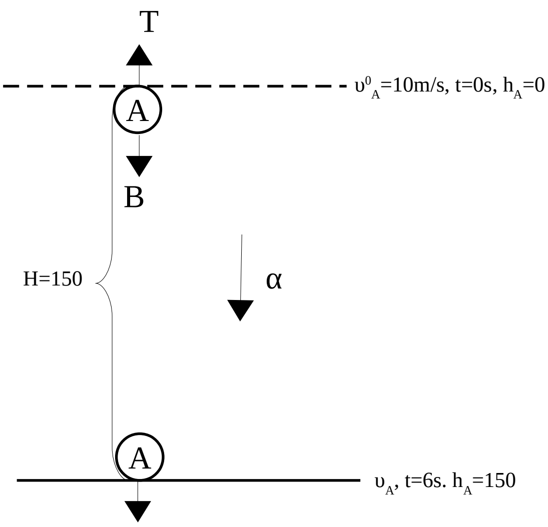
Λύση

Α' Μέρος



α) Έστω ότι δεν ασκείται η αντίσταση του αέρα, τότε στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος του το οποίο σημαίνει ότι το σώμα πέφτει με την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Τότε η εξίσωση κίνηση είναι
$h_A=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}g t^2 \Rightarrow h_A=10t+5t^2$
Για t=6 έχουμε: $h_A=10\cdot 6+5\cdot 36=60+180=240\neq 150$

Άρα καταλαβαίνουμε ότι στο σώμα ασκείται η αντίσταση του αέρα. Για να βρούμε την αντίσταση του αέρα χρησιμοποιούμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα : $\Sigma F=ma \Rightarrow B-T=1\cdot a \Rightarrow mg-T=a \Rightarrow 10-T=a$



Για να βρούμε την αντίσταση του αέρα πρέπει να βρούμε την επιτάχυνση. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος έχουμε:

$$h_A = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 150 = 10 \cdot 6 + \frac{1}{2} a 6^2 \Rightarrow 150 = 60 + 18a \Rightarrow 18a = 150 - 60 \Rightarrow 18a = 90 \Rightarrow a = \frac{90}{18} \Rightarrow a = 5\,m/s^2$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση του Νεύτωνα την επιτάχυνση έχουμε:

$$10 - T = \alpha \Rightarrow 10 - T = 5 \Rightarrow T = 5N$$

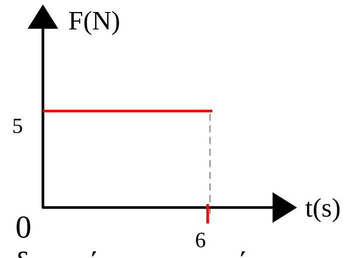
β. Το σώμα κάνει κατακόρυφη επιταχυνόμενη κίνηση η οποία όμως δεν είναι κατακόρυφη βολή προς τα κάτω γιατί το σώμα δεν πέφτει με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση είναι:

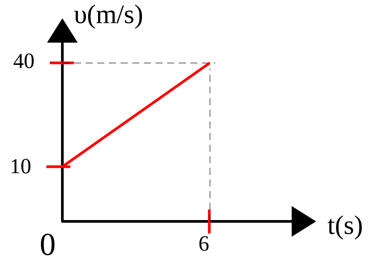
1. Η εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon_A = \upsilon_0 + \alpha t \Rightarrow \upsilon_A = 10 + 5t$
2. Η εξίσωση της κίνησης $h_A = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow h_A = 10t + \frac{5}{2} t^2$

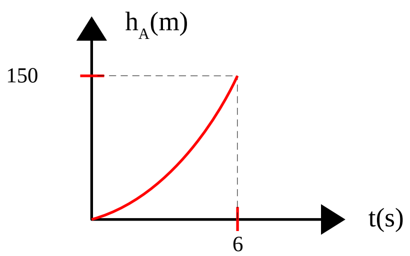
Το σώμα φτάνει στο έδαφος την χρονική στιγμή t=6s οπότε η ταχύτητα θα είναι:
$\upsilon_A = 10 + 5 \cdot 6 \Rightarrow \upsilon_A = 40\,m/s$

γ. Για να φτιάξουμε το διάγραμμα F-t πρέπει να υπολογίσουμε την συνισταμένη δύναμη, οπότε
$\Sigma F = ma \Rightarrow \Sigma F = 1 \cdot 5 \Rightarrow \Sigma F = 5\,N$

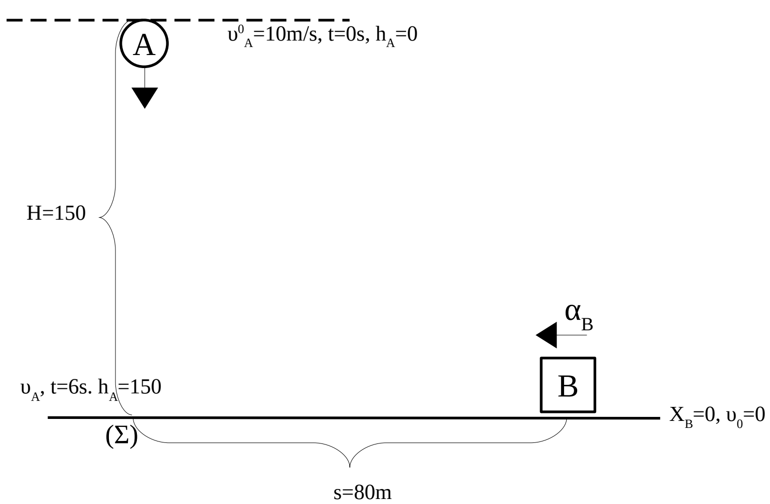


Τα διαγράμματα ταχύτητας και θέση είναι αντίστοιχα





[B]



B’ Μέρος

α. Το σώμα Β κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

β. Για να συναντηθούν τα δύο σώματα πρέπει όταν το σώμα Α φτάνει στο έδαφος να συναντήσει το σώμα Β. Το σώμα Α όμως φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή t=6s. Την ίδια στιγμή θα πρέπει το σώμα Β να έχει διανύσει 80 m

Η εξίσωση κίνησης για το σώμα Β είναι $x=x_0+\upsilon_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

Επειδή $x_0=\upsilon_0=0$ έχουμε $x=5(t-t_0)^2$. Αφού πρέπει την χρονική στιγμή t=6s το σώμα να βρίσκεται στην θέση x=80 m έχουμε: $x=5(t-t_0)^2 \Rightarrow 80=5(6-t_0)^2 \Rightarrow (6-t_0)^2=\frac{80}{5} \Rightarrow (6-t_0)^2$

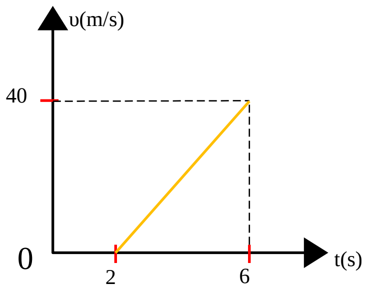
$\Rightarrow \sqrt{(6-t_0)^2}=\sqrt{16} \Rightarrow |6-t_0|=4 \Rightarrow 6-t_0=4 \text{ ή } 6-t_0=-4 \Rightarrow t_0=2 \text{ ή } t_0=10$

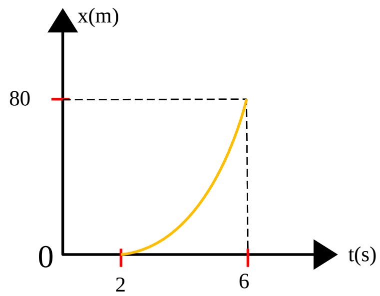
Δεχόμαστε την λύση $t_0=2$ γιατί είναι μικρότερο από 6 που κάνει το σώμα Α για να φτάσει στο έδαφος.

γ) Άρα οι εξισώσεις ταχύτητα και κίνησης για το σώμα Β είναι:
1) $\upsilon=\upsilon_0+\alpha(t-t_0) \Rightarrow \upsilon=10(t-2)$ και
2) $x=5(t-t_0)^2 \Rightarrow x=5(t-2)^2$

Για να κάνουμε τα διαγράμματα χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο σημεία. Εδώ δύο σημεία μας τα δίνει η άσκηση. Το πρώτο είναι το σημείο εκκίνησης του σώματος Β και το δεύτερο τ οσημείο συνάντησης.

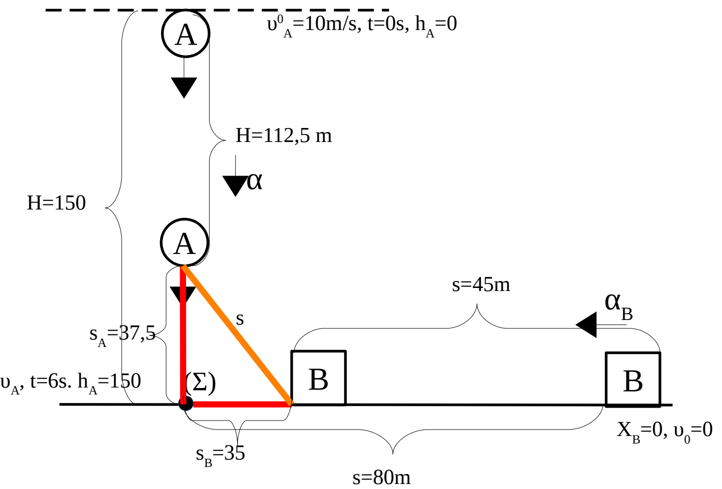
Στο σημείο εκκίνησης $x_B=0\,m, t_0=2\,s, \upsilon_0=0\,m/s$
Στο σημείο συνάντησης $x_B=80\,m, t=6\,s, \upsilon=10(6-2) \Rightarrow \upsilon=40\,m/s$





δ. <u>Σημείωση:</u> Στην άσκηση αυτή μπορούμε να πάμε μόνο με δύο άξονες κίνηση γιατί η μία κίνηση είναι κατακόρυφη και η άλλη οριζόντια.

Ένα δευτερόλεπτο πριν την κίνηση το σώμα Α έχει διανύσει απόσταση
$h_A=10\,t+\frac{5}{2}t^2 \Rightarrow h_A=10\cdot5+\frac{5}{2}5^2 \Rightarrow h_A=50+62{,}5 \Rightarrow h_A=112{,}5\,m$ και το σώμα Β έχει διανύσει
$x_B=5(t-2)^2 \Rightarrow x_B=5(5-2)^2 \Rightarrow x_B=45\,m$



Αφού το Α έχει διανύσει 112,5m θα απέχει από το σημείο συνάντησης απόσταση s_A=150-112,5=37,5 . Επίσης το σώμα Β θα απέχει απόσταση το σημείο συνάντησης s_B=35m. **Η απόσταση των δύο σωμάτων επειδή οι άξονες κίνησης τους είναι κάθετοι μεταξύ τους θα βρεθούν από την υποτείνουσα s του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζεται**.

$$s=\sqrt{s_A^2+s_B^2}\Rightarrow s=\sqrt{37,5^2+35^2}\Rightarrow s=\sqrt{2631.25}\Rightarrow s\simeq 51,3\,m$$

Ασκήσεις

<u>Άσκηση 1</u>: Να ξαναλύσετε την γενική άσκηση 2 χρησιμοποιώντας κοινό άξονα κίνησης και ως αρχή του άξονα το σημείο βολής του σώματος Α.

<u>Άσκηση 2</u>: Ένα σώμα Α αφήνεται να πέσει από ύψος 80m ενώ ένα δεύτερο σώμα Β βάλλεται κατακόρυφα από ύψος 40 m με αρχική ταχύτητα $υ_0$=10m/s . Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.
α) Τι κίνηση κάνει το σώμα Α και τι κίνηση κάνει το σώμα Β
β) Να βρείτε την χρονική στιγμή που πρέπει να ξεκινήσει το σώμα Β ώστε τα δύο σώματα να συναντηθούν σε ύψος 40m από το έδαφος
γ) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης και ταχύτητας για το κάθε σώμα ξεχωριστά
δ) Να βρείτε την συνάρτηση d=d(t) που περιγράφει την απόσταση των δύο σωμάτων κάθε χρονική στιγμή t και να κάνετε την γραφική της παράσταση.
ε) Να βρείτε τις ταχύτητες των σωμάτων την στιγμή της συνάντησης
στ) Πότε φτάνει το σώμα Α και πότε το σώμα Β στο έδαφος. Να βρείτε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων για τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.
ζ) Να γίνουν τα διαγράμματα των εξισώσεων κίνησης και ταχύτητας για τα σώματα Α και Β.
η) Να βρείτε τον χρόνο όπου το σώμα Α βρίσκεται 10 m πάνω από το έδαφος
θ) Να βρείτε την απόσταση που διένυσε το σώμα Β κατά το προτελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησης του.
Δίνεται $g=10\,m/s^2$

<u>Άσκηση 3</u>: Δύο σώματα Α και Β βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Το σώμα Α αφήνεται να πέσει από ύψος 180m από το έδαφος ενώ ταυτόχρονα το σώμα Β βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $υ_0$=30m/s. Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.
α) Τι κίνηση κάνει το σώμα Α και τι κίνηση κάνει το σώμα Β;
β) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης και ταχύτητας για το κάθε σώμα
γ) Να βρείτε το χρόνο και το σημείο συνάντησης των δύο σωμάτων:
i) Χρησιμοποιώντας δύο άξονες κίνησης
ii) Χρησιμοποιώντας κοινό άξονα κίνησης

δ) Να παραστήσετε σε κοινό διάγραμμα τις εξισώσεις ταχύτητας των δύο σωμάτων.
ε) Να παραστήσετε σε κοινό διάγραμμα τις εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων.
Δίνεται $g=10\,m/s^2$

Άσκηση 4: Ένα σώμα Α αφήνεται να πέσει από ύψος 180 m από το έδαφος ενώ ταυτόχρονα ένα σώμα Β ξεκινάει να κινείται οριζόντια σε απόσταση 160 m από την κατακόρυφο και σε απόσταση 100 m από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $υ_0$=20m/s και σταθερή επιτάχυνση α=10m/s^2. ι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.
α) Τι κίνηση κάνει το σώμα Α και τι το σώμα Β
β) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν το κάθε σώμα.
γ) Να βρείτε το χρόνο και το σημείο που τα δύο σώματα θα συγκρουστούν
δ) Να βρείτε την απόσταση τον σωμάτων ένα δευτερόλεπτο πριν τη σύγκρουσή τους.
[Β] Μετά την σύγκρουση το σώμα Α κινείται προς τα πάνω με την ταχύτητα που είχε κατά τη διάρκεια της σύγκρουση ενώ το σώμα Β κινείται προς τα κάτω με την ταχύτητα που είχε κατά την διάρκεια της σύγκρουση
α) Ποιες κινήσεις εκτελούν τώρα τα σώματα Α και Β
β) Να γράψετε τις καινούργιες εξισώσεις ταχύτητας και κίνησης
γ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα Β
δ) Πότε φτάνει το σώμα Β στο έδαφος;
ε) Πότε φτάνει το σώμα Α στο έδαφος;
Δίνεται $g=10\,m/s^2$

Άσκηση 5: Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφη προς τα πάνω από ύψος h=100m από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $υ_0$=10m/s. Το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος από το το σημείο βολής του που είναι τα 25m μετά από χρόνο 5s.
α) Υπάρχει αντίσταση του αέρα
β) Να βρείτε την επιβράδυνση με την οποία κινείται το σώμα.
γ) Τι κίνηση κάνει το σώμα;
δ) Να βρείτε τον χρόνο ανόδου του σώματος.
ε) Να βρείτε τον χρόνο που το σώμα φτάνει στο έδαφος καθώς και τον χρόνο καθόδου.
στ) Να βρείτε τον χρόνο στον οποίο το σώμα περνάει πάλι από το επίπεδο βολής του και την ταχύτητα του εκείνη την χρονική στιγμή.
ζ) Να βρείτε την απόσταση που διανύει το σώμα κατά το έκτο δευτερόλεπτο της κίνησης του.
η) Να βρείτε το χρόνο και την ταχύτητα όταν το σώμα απέχει 50m από του έδαφος.

Μαθηματικός-Φυσικός:
Προκόπου-Χουλιάρα-Μαρία-Ιωάννα