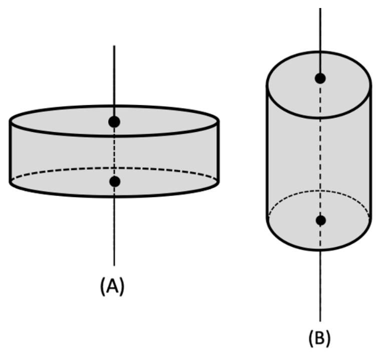
Πετρίδης Κωνσταντίνος
Μηχανική Στερεού Σώματος ΙΙ

1. Οι δύο ομογενείς κύλινδροι A και B του σχήματος έχουν την ίδια μάζα $m = 10\,\mathrm{kg}$ και ο κύλινδρος A έχει διπλάσια ακτίνα από τον B. Οι κύλινδροι περιστρέφονται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους έτσι ώστε ο κύλινδρος A να έχει διπλάσια γωνιακή ταχύτητα από τον κύλινδρο B.



i. Ποιος από τους δύο κυλίνδρους έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας;

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι δύο κύλινδροι έχουν ίσες στροφορμές αλλά η κινητική ενέργεια του A είναι διπλάσια από την κινητική ενέργεια του B. Είναι σωστοί οι ισχυρισμοί του και γιατί;

Δίνεται: Η ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως προς άξονα περιστροφής που ταυτίζεται με τον άξονά του:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Λύση:

i.

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\frac{1}{2}m_A R_A^2}{\frac{1}{2}m_B R_B^2} = \frac{m\,(2R_B)^2}{m\,R_B^2} = \frac{4R_B^2}{R_B^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad I_A = 4I_B$$

Άρα η ροπή αδράνειας του A είναι μεγαλύτερη.

ii.

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{I_A \cdot \omega_A}{I_B \cdot \omega_B} = \frac{4I_B \cdot 2\omega_B}{I_B \cdot \omega_B} = 8 \quad \Rightarrow \quad L_A = 8L_B$$

Επομένως ο ισχυρισμός του μαθητή ότι οι στροφορμές είναι ίσες είναι λανθασμένος.

Επίσης, αφού $K = \frac{1}{2}I\omega^2$,

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2}(4I_B)(2\omega_B)^2}{\frac{1}{2}I_B\omega_B^2} = \frac{4I_B \cdot 4\omega_B^2}{I_B\omega_B^2} = 16$$

Επομένως ο δεύτερος ισχυρισμός του μαθητή είναι επίσης λανθασμένος.

2. Να διατυπώσετε τους πιο κάτω ορισμούς.

i. Ροπή αδράνειας στερεού ως προς δεδομένο άξονα $z'z$.

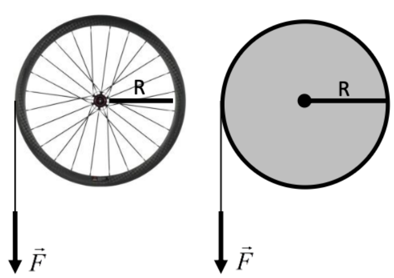
ii. Γενικευμένος δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση.

Λύση:

i. Είναι το μονόμετρο μέγεθος το μέτρο του οποίου δίνεται από το άθροισμα του γινομένου των μαζών των υλικών σημείων επί το γινόμενο των αποστάσεών τους από τον άξονα περιστροφής στο τετράγωνο.

ii. Η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής.

3. Ο τροχός και ο ομογενής δίσκος του διπλανού σχήματος έχουν ίσες μάζες και ίσες ακτίνες και είναι αρχικά ακίνητοι.



i. Αν ασκηθεί η ίδια εφαπτομενική δύναμη στα δύο σώματα, ποιο από τα δύο σώματα θα αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Αν η δύναμη του προηγούμενου ερωτήματος ασκηθεί στα δύο σώματα για τον ίδιο χρόνο t, ποιο από τα δύο σώματα θα αποκτήσει μεγαλύτερη στροφορμή και γιατί;

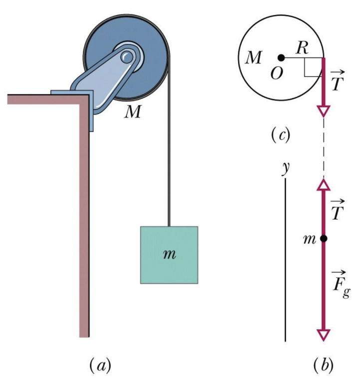
Λύση:

i. Αφού ασκείται η ίδια εφαπτομενική δύναμη, η ροπή που ασκείται στα δύο σώματα είναι η ίδια. Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι μικρότερη, επειδή η μάζα του κατανέμεται πιο κοντά στον άξονα. Επομένως η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου είναι μεγαλύτερη:

$$\vec{a}_\gamma = \frac{\sum \vec{M}}{I}$$

ii. Από τον γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η συνισταμένη ροπή είναι ίδια και στα δύο σώματα. Άρα και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι ο ίδιος. Επομένως, για τον ίδιο χρόνο t, η μεταβολή της στροφορμής είναι ίδια και τα δύο σώματα αποκτούν ίση τελική στροφορμή.

4. Μία τροχαλία μάζας $M = 3{,}00\,\mathrm{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}750\,\mathrm{m}$ είναι συνδεδεμένη μέσω αβαρούς σχοινιού με ένα σώμα μάζας $m = 4{,}00\,\mathrm{kg}$. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της O. Το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση, με την οποία κατεβαίνει το σώμα , θεωρώντας θετική φορά αυτή αντίθετη της κίνησης του συστήματος.



Λύση:

Η περιστροφή του συστήματος τροχαλίας–τυλιγμένου σχοινιού ως προς το σημείο O περιγράφεται από τον Δεύτερο Νόμο της Περιστροφικής Κίνησης:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau} = M_{\vec{F}} = I\,\alpha_\gamma = -|\vec{T}|R. \qquad (1)$$

όπου α_γ είναι η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

Εφαρμόζοντας τον Δεύτερο Νόμο για τη Μεταφορική Κίνηση:

$$|\vec{T}| - mg = m\alpha \qquad (2)$$

όπου α, η αλγεβρική τιμή της γραμμικής επιτάχυνσης του σώματος.

Για να προσδιορίσουμε τις άγνωστες μεταβλητές χρειάζεται μία τρίτη εξίσωση. Επομένως, χρησιμοποιούμε το δεδομένο ότι το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία.

Άρα, η γραμμική ταχύτητα του σημείου A του σχοινιού ισούται με:

$$v_{\sigma x} = \omega R = \frac{\Delta v_{\sigma x}}{\Delta t} = \Delta\left(\frac{\omega R}{\Delta t}\right) \Rightarrow \alpha = R\alpha_\gamma \qquad (3)$$

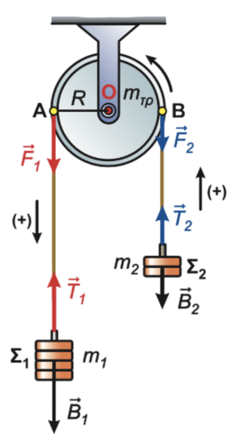
Εάν η τροχαλία συμπεριφέρεται σαν ομογενής κύλινδρος, η ροπή αδράνειάς της δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{1}{2} m_{\tau\rho} R^2.$$

Λύνοντας το σύστημα των *Εξισώσεων 1-3*,

$$\alpha = -g\frac{2m}{M+2m} = -7.13 m/s^2 \qquad \text{το πρόσημο επιβεβαιώνει την φορά κίνησης}$$

5. Μία τροχαλία μάζας $m_{\tau\rho} = 2{,}50\,\mathrm{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}750\,\mathrm{m}$ είναι συνδεδεμένη μέσω αβαρούς σχοινιού με δύο σώματα 1 και 2, με μάζες $m_1 = 25{,}5\,\mathrm{kg}$ και $m_2 = 8{,}50\,\mathrm{kg}$. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της O. Το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία. Να υπολογίσουμε την επιτάχυνση, με την οποία κινούνται τα σώματα.



Λύση:

Θεωρούμε θετική φορά , την φορά κίνησης του συστήματος.

Επειδή το σχοινί είναι αβαρές, η ροπή αδράνειας του συστήματος αυτού είναι:

$$I = \frac{1}{2} m_{\tau\rho} R^2$$

Για κάθε σώμα θεωρούμε ως θετική τη φορά της κίνησής του, και εφαρμόζουμε ξεχωριστά τον Δεύτερο Νόμο της μεταφορικής κίνησης:

$$\begin{aligned} &\text{Σώμα 1:} \quad m_1 g - |\vec{T}_1| = m_1 \alpha \qquad (1\alpha) \\ &\text{Σώμα 2:} \quad |\vec{T}_2| - m_2 g = m_2 \alpha \qquad (1\beta) \end{aligned}$$

Οι δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{F}_1$ έχουν ίσα μέτρα, επειδή το σχοινί είναι αβαρές. Ομοίως, οι δυνάμεις $\vec{T}_2$ και $\vec{F}_2$ έχουν ίσα μέτρα:

$$|\vec{T}_1| = |\vec{F}_1| \qquad \text{και} \qquad |\vec{T}_2| = |\vec{F}_2|$$

Εφαρμόζουμε τον Δεύτερο Νόμο της Περιστροφικής Κίνησης ως προς το σημείο O:

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho} = I\alpha_\gamma \Rightarrow (|\vec{T}_1| - |\vec{T}_2|)R = I\alpha_\gamma \qquad (2)$$

Οι σχέσεις 1α, 1β και 2 είναι σύστημα τριών εξισώσεων με τέσσερις άγνωστους: $|\vec{T}_1|, |\vec{T}_2|, \alpha$ και α_γ. Επειδή το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία:

$$\alpha_\gamma = \pm \frac{\alpha}{R}$$

Επειδή η τροχαλία περιστρέφεται αριστερόστροφα, επιλέγουμε τη θετική τιμή:

$$\alpha_\gamma = \frac{\alpha}{R} \qquad (3)$$

<u>Επίλιση Συστήματος:</u>

Από τις σχέσεις 1α και 1β, βρίσκουμε:

$$(m_1 - m_2)g + (|\vec{T}_2| - |\vec{T}_1|) = (m_1 + m_2)\alpha$$

Από τις σχέσεις 2 και 3, βρίσκουμε:

$$|\vec{T}_2| - |\vec{T}_1| = -\frac{I}{R^2}\alpha$$

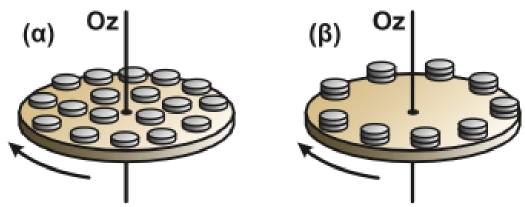
Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις:

$$(m_1 - m_2)g - I\frac{\alpha}{R^2} = (m_1 + m_2)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}g$$

Αντικαθιστώντας $I = \frac{1}{2}m_{\tau\rho}R^2$, καταλήγουμε:

$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m_{\tau\rho}}{2}}\,g = \frac{25{,}5 - 8{,}50}{25{,}5 + 8{,}50 + 1{,}25}g = 0{,}482\,g = 4{,}73\,\mathrm{m/s^2}$$

6. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται δύο αβαρείς οριζόντιοι δίσκοι, που περιέχουν στην επιφάνειά τους ίσο αριθμό σταθμών.



i. Οι δίσκοι μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφους άξονες Oz, που διέρχονται από τα κέντρα τους. Ποιος δίσκος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονά του;

ii. Οι δύο δίσκοι περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονά τους Oz. Ποιος δίσκος έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

iii. Ποιον δίσκο νομίζετε ότι είναι ευκολότερο να θέσουμε σε περιστροφή;

Λύση:

i. Ο δίσκος (β), επειδή η μάζα των σταθμών είναι κατανεμημένη στην περιφέρεια (σε μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής).

ii. Ο (β), επειδή έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.

iii. Τον (α), επειδή έχει μικρότερη ροπή αδράνειας.

7. Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, κινείται χωρίς γωνιακή επιτάχυνση. Ποιο από τα επόμενα είναι σωστό;

Α. Στο σώμα δρα μηδενική συνισταμένη εξωτερική δύναμη.

Β. Στο σώμα δρα μηδενική συνισταμένη των εξωτερικών ροπών, ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Λύση:

Α. Λάθος, υπάρχει κεντρομόλος.

Β. Σωστό, η ροπή της κεντρομόλου ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι ίση με μηδέν.

8. Να γράψετε τις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, κατ' αναλογία με τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

i. Εξίσωση Γωνίας Θέσης

ii. Εξίσωση Γωνιακής Ταχύτητας

iii. Να διατυπώσετε τον γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση στερεού σώματος.

Λύση:

i. Εξίσωση Γωνίας Θέσης:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\,\alpha_\gamma(t - t_0)^2$$

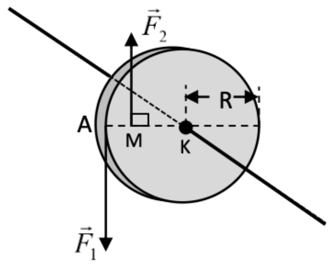
ii. Εξίσωση Γωνιακής Ταχύτητας:

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha_\gamma(t - t_0)$$

iii. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σώματος ως προς κάποιο σημείο του χώρου, ισούται με τη συνισταμένη των εξωτερικών ροπών στο σώμα, ως προς το ίδιο σημείο:

$$\sum \vec{M}_\xi = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

9. Ένας ομογενής δίσκος μάζας $m = 0{,}75\,\mathrm{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$ που αρχικά είναι ακίνητος, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο δίσκο. Στο δίσκο ασκούνται δύο δυνάμεις μέτρου $|\vec{F}_1| = 6{,}28\,\mathrm{N}$ και $|\vec{F}_2| = 3{,}14\,\mathrm{N}$, κάθετες στην ίδια ακτίνα KA, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται εφαπτομενικά στο δίσκο ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ κάθετα στο μέσο της ακτίνας.



i. Αν μετά από 20 πλήρεις περιστροφές σταματά να επιδρά η δύναμη $\vec{F}_1$, να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

ii. Ακολούθως ο δίσκος περιστρέφεται μόνο υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}_2$. Να υπολογίσετε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και να βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται για να σταματήσει να περιστρέφεται ο δίσκος.

Δίνεται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου $I = \dfrac{1}{2}mR^2$.

Λύση:

i. Μετά από 20 στροφές ο δίσκος θα έχει διαγράψει γωνιακή μετατόπιση

$$\Delta\theta = \kappa \cdot 2\pi \Rightarrow \Delta\theta = 20 \cdot 2\pi = 40\pi\,\mathrm{rad}.$$

Από τον γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\sum \vec{M} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow |\vec{F}_1|R - |\vec{F}_2|\frac{R}{2} = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{2|\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|}{mR} = \frac{2 \cdot 6{,}28\,\mathrm{N} - 3{,}14\,\mathrm{N}}{0{,}75\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m}} = 62{,}8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Από τη σχέση

$$|\omega|^2 = 2\,|a_\gamma|\,|\Delta\theta| \Rightarrow |\omega| = \sqrt{2 \cdot 62{,}8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \cdot 40\pi\,\mathrm{rad}} = 125{,}6\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

ii. Πρώτα υπολογίζουμε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση. Τώρα μόνο η $\vec{F}_2$ δρα στο δίσκο, οπότε:

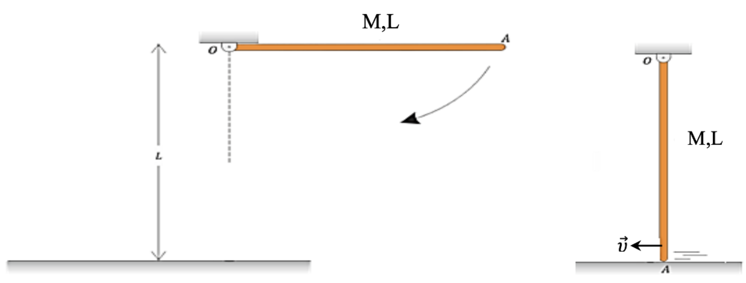
$$\sum \vec{M} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow -|\vec{F}_2|\frac{R}{2} = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = -\frac{|\vec{F}_2|}{mR} = -\frac{3{,}14\,\mathrm{N}}{0{,}75\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m}} = -20{,}9\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Η αρχική γωνιακή ταχύτητα στη φάση αυτή είναι $\omega_0 = 125{,}6\,\mathrm{rad/s}$. Από τη σχέση

Από τη σχέση

$$\omega = \omega_0 + a_\gamma t \Rightarrow 0 = 125{,}6 + (-20{,}9)t \Rightarrow t = \frac{-\omega_0}{a_\gamma} = \frac{-125{,}6\,\mathrm{rad/s}}{-20{,}9\,\mathrm{rad/s}^2} = 6{,}01\,\mathrm{s}.$$

10. Μία ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους $L = 0{,}306\,\mathrm{m}$ μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το σημείο O στο ένα άκρο της. Η ράβδος αρχικά συγκρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στην εικόνα. Όταν η ράβδος αφεθεί, αρχίζει να περιστρέφεται και τη στιγμή που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση το άκρο της A έχει γραμμική ταχύτητα υ_0.



i. Να εξηγήσετε αν διατηρείται η στροφορμή της ράβδου κατά την πτώση της.

ii. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου τη στιγμή που αυτή βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. Δίνεται: $I_{\text{ράβδου}} = \frac{1}{3}ML^2$

Λύση:

i. Η στροφορμή της ράβδου δεν διατηρείται αφού η ροπή του βάρους δεν είναι μηδέν.

ii. Θεωρούμε σημείο αναφοράς το έδαφος για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

$$E_{M(0)} = E_{M(\tau)} \;\Rightarrow\; mgL = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{L}{2}$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}81}{0{,}306}} = 9{,}81\,\mathrm{rad/s}$$

11. Να διατυπώσετε την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής.

Λύση:

Όταν το άθροισμα των εξωτερικών ροπών σε ένα σώμα/σύστημα (ως προς κάποιο σημείο του χώρου ή ως προς έναν άξονα) ισούται με μηδέν, η συνολική στροφορμή του σώματος/συστήματος (ως προς το σημείο αυτό ή ως προς τον άξονα αυτό) διατηρείται

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{0} \implies \Delta \vec{L_f} = \Delta \vec{L_i}$$

όπου

$$|\vec{L}| = |\vec{r}|\,|\vec{p}| \eta\mu(\theta) = m\,|\vec{r}|\,|\vec{v}| \eta\mu(\theta)$$

12. Να εξετάσετε και να απαντήσετε τις πιο κάτω προτάσεις.

i. Ένα σωματίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Πώς θα μεταβληθεί η στροφορμή του σωματιδίου, εάν:

A. Διπλασιασθεί η ταχύτητά του.

B. Διπλασιασθεί η γωνιακή του ταχύτητα.

Γ. Διπλασιασθεί η μάζα του.

Δ. Διπλασιασθεί η ακτίνα της τροχιάς του.

ii. Ποιο από τα επόμενα είναι σωστό, για στερεά σώματα, που περιστρέφονται γύρω από ακλόνητο άξονα:

A. Η στροφορμή κατά μήκος του άξονα είναι ανάλογη με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

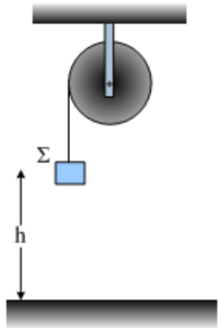
B. Η στροφορμή κατά μήκος του άξονα είναι ανάλογη με τη μάζα του σώματος.

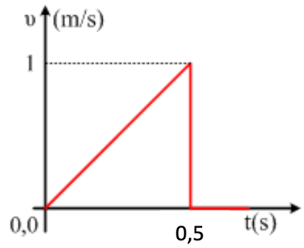
Λύση:

i. A. Διπλασιάζεται, B. Διπλασιάζεται, Γ. Διπλασιάζεται, Δ. Τετραπλασιάζεται.

ii. A. Σωστό.
B. Λάθος: Η στροφορμή είναι ανάλογη με τη ροπή αδράνειας.

13. Γύρω από μια τροχαλία ακτίνας $R = 0{,}2\,\mathrm{m}$ και μάζας $M = 10\,\mathrm{kg}$ έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου δένουμε ένα σώμα Σ, το οποίο συγκρατούμε σε ύψος h από το έδαφος, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή αφήνουμε το σώμα Σ μάζας $m = 1\,\mathrm{kg}$ να πέσει και παίρνουμε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σε συνάρτηση με το χρόνο, η μορφή της οποίας φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.





i. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

ii. Στη περίπτωση που στη θέση της τροχαλίας τοποθετήσουμε τροχό ίδιας μάζας και ακτίνας, η γραφική παράσταση της ταχύτητας θα είναι η ίδια, δηλαδή στο ίδιο χρόνο η ταχύτητα θα είναι και πάλι $1\,\mathrm{m/s}$; Δικαιολογήστε.

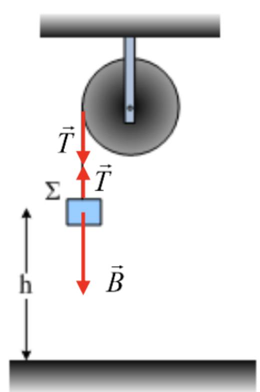
iii. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του συστήματος τη χρονική στιγμή $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

Λύση:

i. Από την κλίση της γραφικής παράστασης υπολογίζουμε την επιτάχυνση του σώματος:

$$a = \text{κλίση} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1-0}{(0{,}5-0{,}0)\,\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Αρχικά τοποθετούμε τις δυνάμεις πάνω στα σώματα και εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα τόσο για το σώμα όσο και για την τροχαλία.



Τροχαλία

$$\sum \vec{M}_{\text{εξ.}} = I\,a_\gamma \Rightarrow |\vec{T}|R = I\,a_\gamma \Rightarrow |\vec{T}|R = I\,\frac{a}{R} \Rightarrow I = \frac{|\vec{T}|R^2}{a} \tag{1}$$

Σώμα

$$\sum \vec{F}_{\text{εξ.}} = m\vec{a} \Rightarrow |\vec{B}| - |\vec{T}| = ma \Rightarrow mg - ma = |\vec{T}| \Rightarrow |\vec{T}| = 1\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1\,\text{kg}\cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7{,}81\,\text{N}.$$

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας:

$$I = \frac{|\vec{T}|R^2}{a} = \frac{7{,}81\,\text{N}\cdot(0{,}2\,\text{m})^2}{2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}156\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

ii. Επειδή η ροπή της δύναμης που προκαλεί την περιστροφή τόσο της τροχαλίας όσο και του τροχού είναι η ίδια, η γωνιακή επιτάχυνση αυτών των δύο εξαρτάται από τη ροπή αδράνειάς τους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο τροχός έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, με αποτέλεσμα να αποκτά μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση και κατ' επέκταση μικρότερη γραμμική επιτάχυνση το σώμα. Επομένως η κλίση της γραφικής παράστασης θα πρέπει να είναι μικρότερη και, συνεπώς, στο ίδιο χρονικό διάστημα η ταχύτητα θα είναι μικρότερη.

iii. Η κινητική ενέργεια του συστήματος (τροχαλία + σώμα) είναι

$$E_{K,\text{συστ.}} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2.$$

Επειδή $\upsilon = \omega R$, παίρνουμε

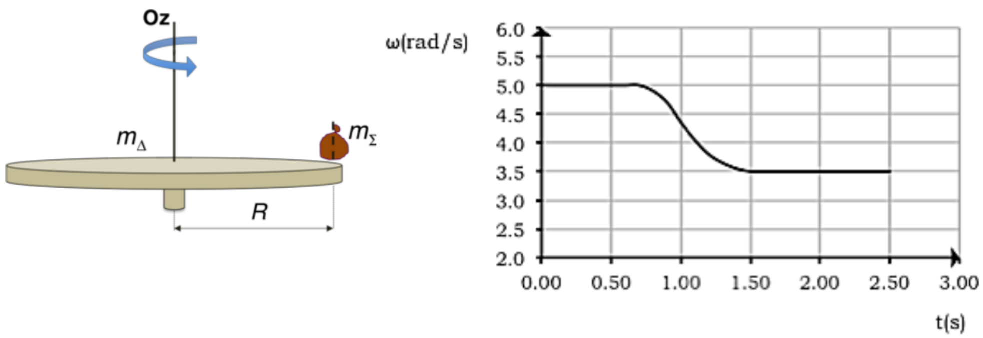
$$E_{K,\text{συστ.}} = \frac{1}{2}I\frac{\upsilon^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2.$$

Για $I = 0{,}156\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $R = 0{,}20\,\text{m}$ και $\upsilon = 1\,\text{m/s}$,

$$E_{K,\text{συστ.}} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}156\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\frac{(1\,\text{m/s})^2}{(0{,}20\,\text{m})^2} + \frac{1}{2}\cdot 1\,\text{kg}\cdot(1\,\text{m/s})^2 = 2{,}45\,\text{J}.$$

14. Ένας μαθητής διερευνά την Αρχή της Διατήρησης της Στροφορμής με τη βοήθεια ενός δίσκου μάζας $m_\Delta = 0{,}500\,\mathrm{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$. Ο δίσκος είναι οριζόντιος και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα Oz, που διέρχεται από το κέντρο του. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}00\,\mathrm{s}$ ο μαθητής θέτει τον δίσκο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\text{αρχ}} = 5{,}0\,\mathrm{rad/s}$ και κατόπιν τον αφήνει ελεύθερο. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου απεικονίζεται σαν συνάρτηση του χρόνου στην πιο κάτω γραφική παράσταση.

$$I_{\text{δίσκου}} = \frac{1}{2}MR^2$$



i. Να εξηγήσετε εάν ο δίσκος υφίσταται τριβή από τον άξονα περιστροφής στο χρονικό διάστημα $0{,}00\,\mathrm{s} - 0{,}75\,\mathrm{s}$.

ii. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}75\,\mathrm{s}$ ο μαθητής τοποθετεί πάνω στον δίσκο έναν σάκο μάζας m_Σ με άμμο. Ο σάκος αρχίζει να περιστρέφεται από ηρεμία και τη χρονική στιγμή $t = 1{,}50\,\mathrm{s}$ αποκτά την ίδια τελική γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\text{τελ}} = 3{,}5\,\mathrm{rad/s}$ με τον δίσκο.

Στο χρονικό διάστημα $1{,}50 - 2{,}50\,\mathrm{s}$ ο δίσκος και ο σάκος περιστρέφονται με σταθερή κοινή γωνιακή ταχύτητα $\omega_{\text{τελ}} = 3{,}5\,\mathrm{rad/s}$. Να εξηγήσετε γιατί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ελαττώνεται όταν τοποθετείται ο σάκος.

iii. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή που ασκείται στο δίσκο κατά την τοποθέτηση του σάκου από άμμο.

iv. Να υπολογίσετε τη μάζα του σάκου.

Λύση:

i. Δεν υφίσταται τριβή, αφού από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή.

ii. Η στροφορμή διατηρείται αφού η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν. Επομένως δεν προκαλούν ροπή.

Αρχικά έχουμε τη στροφορμή μόνο του δίσκου, ενώ τελικά αποκτούν στροφορμή τόσο ο δίσκος όσο και ο σάκος.

Για να παραμείνει η συνολική στροφορμή σταθερή, πρέπει να μειωθεί η στροφορμή του δίσκου. Αφού η ροπή αδράνειας του δίσκου παραμένει σταθερή, η μείωση της στροφορμής του σημαίνει ότι μειώνεται η γωνιακή του ταχύτητα.

iii. Αρχικά υπολογίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση από την κλίση της γραφικής παράστασης:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(3{,}50 - 5{,}00)\,\mathrm{rad/s}}{(1{,}50 - 0{,}75)\,\mathrm{s}} = \frac{-1{,}50}{0{,}75} = -2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ακολούθως υπολογίζουμε τη μέση ροπή:

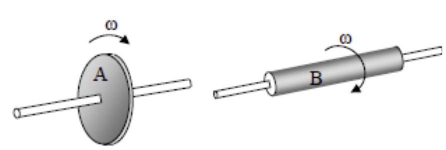
$$\bar{M}_\gamma = I\alpha_\gamma \Rightarrow \bar{M}_\gamma = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_\gamma = \frac{1}{2} \cdot 0{,}500\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}20\,\mathrm{m})^2 \cdot (-2\,\mathrm{rad/s^2}) = -0{,}02\,\mathrm{N{\cdot}m}.$$

iv. Ισχύει η διατήρηση της στροφορμής. Οπότε:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_\tau \Rightarrow I_\delta\,\omega_0 = \left(I_\delta + mR^2\right)\omega_\tau \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2(\omega_0 - \omega_\tau) = mR^2\omega_\tau \Rightarrow m = \frac{\frac{1}{2}M(\omega_0 - \omega_\tau)}{\omega_\tau}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}500\,\mathrm{kg} \cdot (5{,}00 - 3{,}50)\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{3{,}50\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} = 0{,}107\,\mathrm{kg}$$

15. Ο κύλινδρος και ο δίσκος του σχήματος, έχουν την ίδια μάζα και περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. Ποιο σώμα θα σταματήσει πιο δύσκολα;

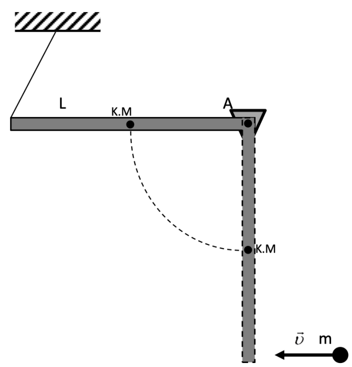


Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση:

Σωστή απάντηση είναι η α. Η ροπή αδράνειας ενός στερεού εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα περιστροφής και συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένα είναι τα υλικά σημεία του από τον άξονα περιστροφής τόσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδράνειάς του.

16. Λεπτή ομογενής ράβδος μήκους $L = 1{,}2\,\mathrm{m}$ και μάζας $M = 2{,}1\,\mathrm{kg}$ μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα γύρω από την άρθρωση A χωρίς τριβές. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια νήματος, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται.



i. Τη στιγμή που μόλις κόπηκε το νήμα να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ράβδο.

ii. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή γίνεται κατακόρυφη.

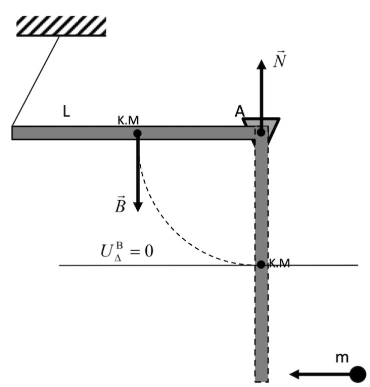
iii. Τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη τότε ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας $m = 0{,}15\,\mathrm{kg}$ που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κτυπάει πάνω στη ράβδο, κολλάει σε αυτή και την ακινητοποιεί. Να βρείτε το μέτρο αυτής της ταχύτητας.

iv. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή που ασκείται στη ράβδο αν αυτή ακινητοποιείται σε χρόνο $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$.

Δίνεται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα στο ένα άκρο της $I = \dfrac{1}{3}mL^2$.

Λύση:

i.



ii. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τη ράβδο. Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση του κέντρου μάζας όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη.

$$E_{M(\text{αρχ})} = E_{M(\text{τελ})} \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1{,}2\,\mathrm{m}}} = 4{,}95\,\mathrm{rad/s}$$

iii. Η στροφορμή στο σύστημά μας διατηρείται, επειδή η κρούση με την πλαστελίνη είναι ακαριαία και οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων στο μικρό αυτό χρονικό διάστημα μπορούν να θεωρηθούν μηδενικές.

Εφαρμόζουμε, λοιπόν, την αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής στο A.

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow I_\rho|\vec{\omega}| = m|\vec{v}|L \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{I_\rho|\vec{\omega}|}{mL} = \frac{\frac{1}{3}ML^2\,|\vec{\omega}|}{mL} = \frac{ML|\vec{\omega}|}{3m}$$

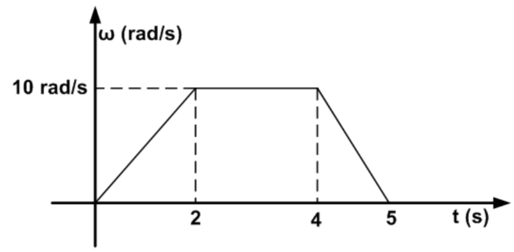
$$|\vec{v}| = \frac{2{,}1\,\mathrm{kg}\cdot 1{,}2\,\mathrm{m}\cdot 4{,}95\,\mathrm{rad/s}}{3\cdot 0{,}15\,\mathrm{kg}} = 27{,}7\,\mathrm{m/s}$$

iv. Από τον γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\sum\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}}}{\Delta t} = \frac{0 - I_\rho|\vec{\omega}|}{\Delta t} = -\frac{I_\rho|\vec{\omega}|}{\Delta t}$$

$$\sum M = -\frac{\frac{1}{3}ML^2\cdot 4{,}95\,\mathrm{rad/s}}{0{,}01\,\mathrm{s}} = -499\,\mathrm{N{\cdot}m}$$

17. Στο σχήμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ενός δίσκου που εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Δίνεται ακτίνα δίσκου $r = 0{,}5\,\text{m}$.



i. Να βρεθούν οι γωνιακές επιταχύνσεις που έχει το κινητό σε κάθε κίνηση.

ii. Να γίνει το διάγραμμα επιτάχυνσης–χρόνου για όλη την κίνηση.

iii. Να βρεθεί η συνολική γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος.

iv. Ένα σημείο A απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση $r = 0{,}2\,\text{m}$. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα του A τη χρονική στιγμή $t = 1\,\text{s}$ καθώς και τη χρονική στιγμή $t = 4{,}5\,\text{s}$.

Λύση:

i. Από τη σχέση

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$$

υπολογίζουμε την κλίση της καμπύλης στο διάγραμμα $\omega - t$:

- για το χρονικό διάστημα $0 - 2\,\text{s}$:

$$a_\gamma = \frac{10-0}{2-0} = 5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

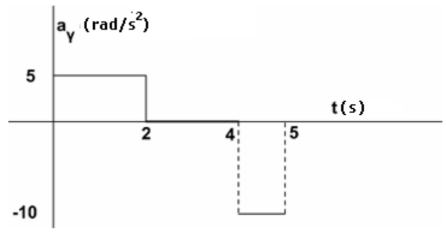
- για το χρονικό διάστημα $2 - 4\,\text{s}$:

$$a_\gamma = \frac{10-10}{4-2} = 0\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- για το χρονικό διάστημα $4 - 5\,\text{s}$:

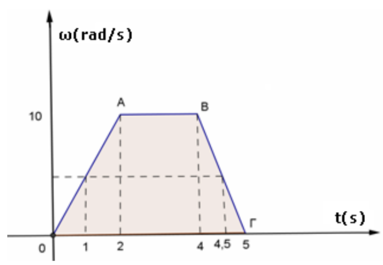
$$a_\gamma = \frac{0-10}{5-4} = -10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

ii. Το ζητούμενο διάγραμμα επιτάχυνσης–χρόνου φαίνεται παρακάτω (στις επιμέρους κινήσεις η γωνιακή επιτάχυνση a_γ είναι σταθερή):



iii. Η συνολική γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος δίνεται από το εμβαδόν της περιοχής $(OAB\Gamma O)$ στο διάγραμμα $\omega - t$. Το σχήμα είναι τραπέζιο:

$$\theta = \frac{1}{2}(5+2)\cdot 10 \Rightarrow \theta = 35\,\mathrm{rad}$$



iv. Η ταχύτητα του A δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \omega r$$

Στιγμή $t = 1\,\mathrm{s}$: Για το διάστημα $0 - 2\,\mathrm{s}$:

$$a_\gamma = 5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \omega = a_\gamma t = 5\,\mathrm{rad/s}$$

Άρα:

$$\upsilon = \omega r = 5 \cdot 0{,}2 = 1\,\mathrm{m/s}$$

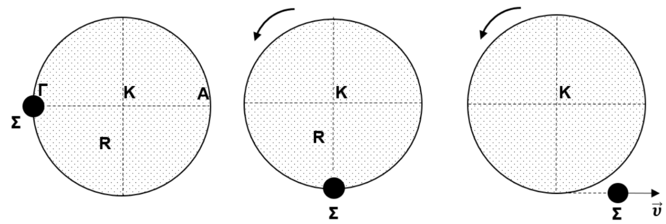
Στιγμή $t = 4{,}5\,\mathrm{s}$: Για το διάστημα $4 - 5\,\mathrm{s}$ ισχύει:

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} = -10 \Rightarrow -10 = \frac{\omega - 10}{4{,}5 - 4} \Rightarrow \omega = 5\,\mathrm{rad/s}$$

Άρα:

$$\upsilon = \omega r = 5 \cdot 0{,}2 = 1\,\mathrm{m/s}$$

18. Ο ομογενής δίσκος έχει ακτίνα $R = 0.20$ m, ροπή αδράνειας $I_\delta = 0{,}048$ kgm^2 και το επίπεδό του είναι κατακόρυφο. Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από ακλόνητο, οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του K. Στο άκρο Γ της οριζόντιας διαμέτρου $A\Gamma$ είναι στερεωμένο μικρό σώμα Σ, μάζας $m = 0{,}300\,\text{kg}$. Το σώμα Σ μπορεί να προσεγγιστεί ως υλικό σημείο της περιφέρειας του δίσκου. Το σύστημα δίσκος–σώμα Σ είναι αρχικά ακίνητο. Αν το αφήσουμε ελεύθερο, περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα που περνά από το K.



i. Να αποδείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο κατώτατο σημείο της τροχιάς του (Σχήμα 2) είναι $\omega_\delta = 4{,}4\,\text{rad/s}$.

ii. Τη στιγμή που το σώμα Σ φτάνει στο κατώτατο σημείο της τροχιάς του, εκτοξεύεται οριζόντια προς τα δεξιά (Σχήμα 3). Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ ως προς το έδαφος μετά την εκτόξευση είναι $|\vec{v}| = 3{,}6\,\text{m/s}$. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αμέσως μετά την εκτόξευση.

Λύση:

i. Θεωρούμε $h = 0$ το κατώτατο σημείο της τροχιάς του σώματος Σ.

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \quad \Rightarrow \quad mgR = \frac{1}{2}\left(I_\delta + mR^2\right)\omega_\delta^2$$

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{2mgR}{I_\delta + mR^2}}$$

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{2(0.300)(9.81)(0.20)}{0.048 + 0.300(0.20)^2}} = 4.4\,\text{rad/s}$$

ii. Στο κατώτατο σημείο ισχύει η διατήρηση της στροφορμής ως προς το σημείο K:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\left(I_\delta + mR^2\right)\omega_{\alpha\rho\chi} = I_\delta\,\omega_{\tau\varepsilon\lambda} + m|\vec{v}|R$$

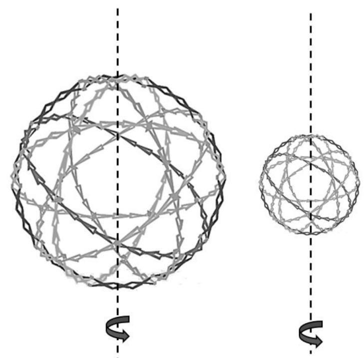
$$\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{\left(I_\delta + mR^2\right)\omega_{\alpha\rho\chi} - m|\vec{v}|R}{I_\delta}$$

$$\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{\left[0.048 + 0.300(0.20)^2\right](4.4) - (0.300)(3.6)(0.20)}{0.048}$$

$$\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = 1.0\,\text{rad/s}$$

19. Η σφαίρα του Hoberman είναι μια γεωμετρική κατασκευή, η οποία μπορεί να αυξομειώνει τις διαστάσεις της. Η σφαίρα του Σχήματος 5.1 έχει ακτίνα $R_1 = 0{,}80\,\mathrm{m}$ και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 3{,}0\,\mathrm{rad/s}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Καθώς η σφαίρα περιστρέφεται, μειώνουμε την ακτίνα της σε R_2 ασκώντας δυνάμεις κατά μήκος του άξονα περιστροφής της.

Η σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί ως λεπτός σφαιρικός φλοιός με ροπή αδράνειας $I = \frac{2}{3}mR^2$.



i. Να εξηγήσετε γιατί διατηρείται η στροφορμή της σφαίρας.

ii. Εάν η νέα γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι $\omega_2 = 12{,}0\,\mathrm{rad/s}$, να υπολογίσετε τη νέα ακτίνα R_2.

Λύση:

i. Η στροφορμή διατηρείται διότι οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι κατά μήκος του άξονα περιστροφής της και η ροπή τους είναι μηδενική.

ii. Κατά μήκος του άξονα περιστροφής ισχύει

$$\sum M_{\text{εξωτερικών}} = 0 \;\Rightarrow\; L_{\text{αρχική}} = L_{\text{τελική}} \;\Rightarrow\; I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Επομένως:

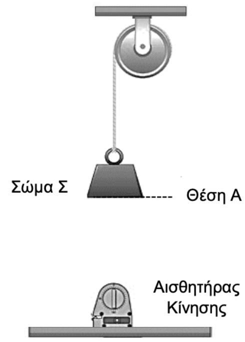
$$\frac{2}{3}mR_1^2\omega_1 = \frac{2}{3}mR_2^2\omega_2$$

$$R_2^2 = \frac{\omega_1}{\omega_2}R_1^2 \;\Rightarrow\; R_2 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\,R_1.$$

Άρα

$$R_2 = \sqrt{\frac{3{,}0\,\mathrm{rad/s}}{12{,}0\,\mathrm{rad/s}}} \cdot 0{,}80\,\mathrm{m} = 0{,}40\,\mathrm{m}.$$

20. Τροχαλία ακτίνας $R = 0{,}050\,\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από ακλόνητο, οριζόντιο άξονα. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας, στο άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σώμα Σ μάζας $m = 0{,}400\,\text{kg}$. Αφήνουμε το σώμα Σ να κινηθεί από τη θέση A κατακόρυφα προς τα κάτω.

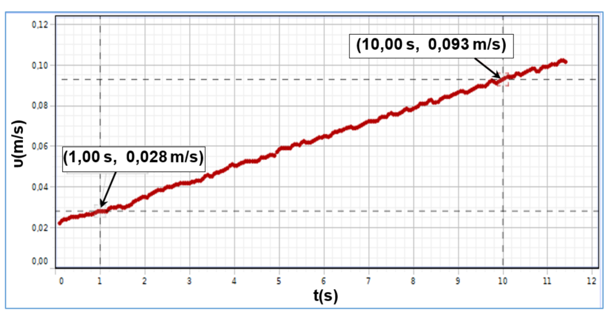


i. Να αποδείξετε ότι η γραμμική επιτάχυνση του σώματος Σ καθώς κατεβαίνει δίνεται από τη σχέση

$$\alpha = \frac{m\,g\,R^2}{I + mR^2}.$$

Να θεωρήσετε ότι το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία και I είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της.

ii. Με τη βοήθεια ενός αισθητήρα κίνησης που βρίσκεται ακριβώς κάτω από το σώμα Σ καταγράφουμε την ταχύτητά του σαν συνάρτηση του χρόνου.



a. Χρησιμοποιώντας δεδομένα από τη γραφική παράσταση, να υπολογίσετε τη γραμμική επιτάχυνση του σώματος Σ.

b. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας.

c. Αν υπήρχε τριβή στον άξονα της τροχαλίας, να εξηγήσετε κατά πόσο η τιμή της ροπής αδράνειας που θα υπολογίζατε θα ήταν μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίδια με αυτήν που υπολογίσατε στο ερώτημα (b).

Λύση:

i. Εφαρμόζουμε τον Δεύτερο Νόμο της Περιστροφικής Κίνησης.

Τροχαλία:

$$\sum M_K = |\vec{T}|R = I\,\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\alpha}{R} \Rightarrow |\vec{T}|R = I\frac{\alpha}{R} \Rightarrow |\vec{T}|R^2 = I\alpha. \tag{1}$$

Για το σώμα Σ:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow |\vec{B}_\Sigma| - |\vec{T}| = ma \Rightarrow |\vec{T}| = mg - ma. \tag{2}$$

Από τις Σχέσεις (1) και (2):

$$(mg - ma)R^2 = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{mgR^2}{I + mR^2}.$$

ii.

a. Υπολογισμός γραμμικής επιτάχυνσης:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0{,}093 - 0{,}028)\,\mathrm{m/s}}{(10{,}00 - 1{,}00)\,\mathrm{s}} = 7{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}.$$

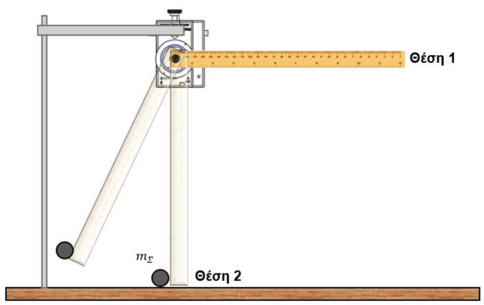
b. Ροπή αδράνειας τροχαλίας:

$$\alpha = \frac{mgR^2}{I + mR^2} \Rightarrow I = \frac{(mg - ma)R^2}{a}$$

$$I = \frac{[(0{,}400)(9{,}81) - (0{,}400)(7{,}2 \times 10^{-3})](0{,}050)^2}{(7{,}2 \times 10^{-3})} = 1{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}.$$

c. Η τριβή στον άξονα προκαλεί ροπή αντίθετη στην περιστροφή, άρα θα μειώσει τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και τη γραμμική επιτάχυνση του σώματος Σ. Επομένως, η ροπή αδράνειας που θα υπολογίζαμε θα ήταν μεγαλύτερη.

21. Ένας ομογενής ξύλινος χάρακας μήκους 30 cm και μάζας 15 g είναι στερεωμένος σε αισθητήρα περιστροφικής κίνησης. Ο χάρακας αφήνεται ελεύθερος να περιστρέφεται από την οριζόντια θέση 1, όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.1 και στην κατακόρυφη θέση 2 συγκρούεται με ακίνητη σφαίρα από πλαστελίνη μάζας $m_\Sigma = 0{,}10\,\mathrm{kg}$. Μετά την σύγκρουση χάρακας και σφαίρα περιστρέφονται μαζί. Θεωρήστε τη σφαίρα σημειακή.



Ο αισθητήρας περιστροφικής κίνησης κατέγραψε ότι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του χάρακα όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση (θέση 2) είναι 5,72 rad/s.

i. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας την Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας, ότι η ροπή αδράνειας του χάρακα ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο του είναι

$$I_x = 1{,}35 \times 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2.$$

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του χάρακα στη Θέση 2 και να αναφέρετε αν η κατεύθυνση της στροφορμής του χάρακα είναι προς τον αναγνώστη $\odot$ ή προς τη σελίδα $\otimes$.

iii. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος χάρακας–σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.

Λύση:

i.

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\mathrm{K}\iota\nu} + \Delta U_{\beta\alpha\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2} I_x \omega_{\tau\varepsilon\lambda.}^2 - \frac{m_p g dx}{2} = 0 \Rightarrow I_x = \frac{m_p g dx}{\omega_{\tau\varepsilon\lambda.}^2}$$

$$I_x = \frac{(15\times 10^{-3}\,\mathrm{kg})(9{,}81\,\mathrm{m/s^2})(0{,}30\,\mathrm{m})}{(5{,}72\,\mathrm{rad/s})^2} = 1{,}35 \times 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2$$

ii.

$$|L_x| = I_x|\omega_{\tau\varepsilon\lambda.}| = (1{,}35\times 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2)\times(5{,}72\,\mathrm{rad/s}) = 7{,}72\times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}}\otimes$$

iii. Συστήματος χάρακας–σφαίρας:

$$L_{\text{συστ.,αρχ.}} = L_{\text{συστ.,τελ.}}$$

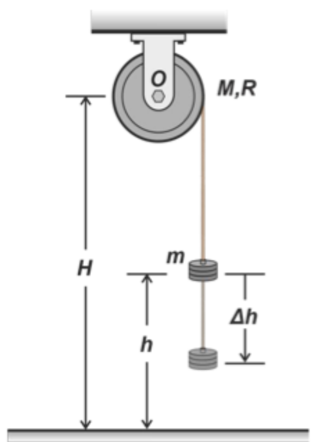
Αντικατάσταση ορθών στροφορμών για τα δύο σώματα:

$$|L_x| = (I_x + I_\Sigma)|\omega| \Rightarrow |\omega| = \frac{|L_x|}{m_\Sigma r^2 + I_x}$$

$$|\omega| = \frac{7{,}72 \times 10^{-3}\,\text{kgm}^2/\text{s}}{(0{,}10\,\text{kg}) \times (0{,}30\,\text{m})^2 + (1{,}35 \times 10^{-3}\,\text{kgm}^2)} = 0{,}75\,\text{rad/s}$$

22. Μία τροχαλία, μάζας M και ακτίνας R, η οποία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό οριζόντιο άξονα χωρίς τριβές. Ένα αβαρές σχοινί είναι περιτυλιγμένο γύρω από την τροχαλία και ένα σώμα μάζας $m = \frac{M}{4}$ είναι προσαρτημένο στο άκρο του σχοινιού. Το σύστημα συγκρατείται αρχικά σε ηρεμία και στη συνέχεια το σώμα αφήνεται να κατέλθει. Το τυλιγμένο σχοινί περιστρέφεται μαζί με την τροχαλία χωρίς να ολισθαίνει ως προς αυτή.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{\tau\rho} = \dfrac{1}{2}MR^2$.



i. Να δείξετε ότι το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας είναι:

$$|a_\gamma| = \frac{g}{3R}$$

ii. Η μάζα του σώματος είναι $m = 12\,\text{kg}$ και η ακτίνα της τροχαλίας είναι $R = 0{,}20\,\text{m}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας όταν το σώμα έχει κατέλθει κατά $\Delta h = 0{,}50\,\text{m}$.

Λύση:

i. Εφαρμογή Νόμου Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση του σώματος:

$$\sum \vec{F}_\xi = m\vec{a} \Rightarrow m|\vec{g}| - |\vec{T}| = m|\vec{a}| \Rightarrow |\vec{T}| = m|\vec{g}| - m|\vec{a}|$$

Επειδή $m = \frac{M}{4}$:

$$|\vec{T}| = \frac{M}{4}|\vec{g}| - \frac{M}{4}|\vec{a}| \tag{1}$$

Εφαρμογή Νόμου Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας:

$$\sum \vec{M}_\xi = I_{\tau\rho}\,\vec{a}_\gamma \Rightarrow |\vec{T}|R = \frac{1}{2}MR^2|\vec{a}_\gamma| \tag{2}$$

Σχέση μεταξύ γραμμικής και γωνιακής επιτάχυνσης (χωρίς ολίσθηση σχοινιού):

$$|\vec{a}| = R|\vec{a}_\gamma| \tag{3}$$

Επίλυση συστήματος εξισώσεων (1–3):

$$|\vec{T}|R = \frac{1}{2}MR^2|\vec{a}_\gamma| \Rightarrow \left(\frac{M}{4}|\vec{g}| - \frac{M}{4}|\vec{a}|\right)R = \frac{1}{2}MR^2|\vec{a}_\gamma|$$

Από τη σχέση (3) έχουμε $|\vec{a}| = R|\vec{a}_\gamma|$, οπότε:

$$\left(\frac{M}{4}|\vec{g}| - \frac{M}{4}R|\vec{a}_\gamma|\right)R = \frac{1}{2}MR^2|\vec{a}_\gamma|$$

$$\Rightarrow \frac{M}{4}|\vec{g}|R = \frac{1}{2}MR^2|\vec{a}_\gamma| + \frac{M}{4}R^2|a_\gamma| \Rightarrow \frac{M}{4}|\vec{g}|R = \left(\frac{1}{2}M + \frac{M}{4}\right)R^2|\vec{a}_\gamma|$$

$$\Rightarrow \frac{M}{4}|\vec{g}|R = \frac{3}{4}MR^2|\vec{a}_\gamma| \Rightarrow |\vec{a}_\gamma| = \frac{g}{3R}$$

Εναλλακτικά:

Το σύστημα σωμάτων περιστρέφεται $\Rightarrow \sum M_\xi = I_{\sigma\upsilon\sigma}\,a_\gamma$

Εφαρμογή νόμου Νεύτωνα στο σύστημα σωμάτων

$$|\vec{B}_\xi|R = (I_{\tau\rho} + I_\sigma)\,|a_\gamma| \Rightarrow \frac{M|\vec{g}|}{4}R = \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{M}{4}R^2\right)|a_\gamma|$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_\gamma| = \frac{g}{3R}$$

ii. Εφαρμογή Αρχής Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας:

$$m|\vec{g}|\Delta h - \left(\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + \frac{1}{2}I_{\tau\rho}|\vec{\omega}|^2\right) = 0$$

$$m|\vec{g}|\Delta h = \frac{1}{2}mR^2|\omega|^2 + \frac{1}{4}MR^2|\omega|^2$$

$$\Rightarrow |\omega|^2 = \frac{2\,m|\vec{g}|\Delta h}{mR^2 + \frac{1}{2}MR^2} = \frac{2|\vec{g}|\Delta h}{R^2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 4\right)} = \frac{2|\vec{g}|\Delta h}{3R^2}$$

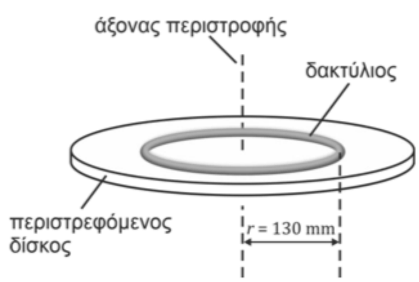
$$|\omega| = \sqrt{\frac{2|\vec{g}|\Delta h}{3R^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|\Delta h}$$

$$|\omega| = \frac{1}{0{,}20}\sqrt{\frac{2}{3}(9{,}81)\cdot 0{,}50} \simeq 9{,}0\,\mathrm{rad/s}$$

<u>Εναλλακτικά:</u>

$$|\omega|^2 = |\omega_0|^2 + 2|a_\gamma|\Delta\theta \Rightarrow |\omega|^2 = 2\left(\frac{|\vec{g}|}{3R}\right)\left(\frac{\Delta h}{R}\right) \Rightarrow |\omega| = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|\Delta h}$$

23. Αρχικά ο δίσκος περιστρέφεται, με αμελητέες τριβές, με γωνιακή ταχύτητα $12\,\mathrm{rad/s}$. Στη συνέχεια, ένας λεπτός δακτύλιος, μάζας $m = 75\,\mathrm{g}$ και ακτίνας $r = 130\,\mathrm{mm}$, πέφτει απαλά πάνω στον δίσκο από χαμηλό ύψος. Τα δύο σώματα συσσωματώνονται, ώστε ο δακτύλιος να είναι ομόκεντρος με τον δίσκο.



i. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος, αμέσως μετά τη συσσωμάτωση δακτυλίου – δίσκου. Η ροπή αδράνειας του λεπτού δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I_{\delta\alpha\kappa} = mr^2$.

ii. Να υπολογίσετε την απώλεια περιστροφικής κινητικής ενέργειας του συστήματος, κατά τη συσσωμάτωση δακτυλίου – δίσκου.

Λύση:

i.

$$\sum M_{\xi,z} = 0 \Rightarrow \Delta L_{\sigma\upsilon\sigma,z} = 0$$

$$I_{\delta\text{ίσκου}}|\vec{\omega}_{\alpha\rho\chi}| = \left(I_{\delta\text{ίσκου}} + mr^2\right)|\vec{\omega}_{\tau\epsilon\lambda}| \Rightarrow |\vec{\omega}_{\tau\epsilon\lambda}| = \left(\frac{I_{\delta\text{ίσκου}}}{I_{\delta\text{ίσκου}} + mr^2}\right)|\vec{\omega}_{\alpha\rho\chi}|$$

$$|\vec{\omega}_{\tau\epsilon\lambda}| = \frac{9{,}2 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}{9{,}2 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + (0{,}075\,\text{kg})(130 \times 10^{-3}\,\text{m})^2}\,(12\,\text{rad/s})$$

$$|\vec{\omega}_{\tau\epsilon\lambda}| \simeq 10{,}5\,\text{rad/s}$$

ii.

$$(\text{Απώλεια } E_{\kappa\iota\nu}) = |\Delta E_{\kappa\iota\nu}| = |E_{\kappa\iota\nu,\tau\epsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu,\alpha\rho\chi}|$$

$$(\text{Απώλεια } E_{\kappa\iota\nu}) = \left|\frac{1}{2}\left(I_{\delta\text{ίσκου}} + mr^2\right)|\vec{\omega}_{\tau\epsilon\lambda}|^2 - \frac{1}{2}I_{\delta\text{ίσκου}}|\vec{\omega}_{\alpha\rho\chi}|^2\right|$$

$$(\text{Απώλεια } E_{\kappa\iota\nu}) = 8{,}5 \times 10^{-2}\,\text{J}$$

24. Να εξετάσετε τις πιο κάτω προτάσεις.

i. Επειδή η Ροπή δύναμης, το Έργο δύναμης και η Ενέργεια έχουν ως μονάδα μέτρησης το $N \cdot m$, είναι όλα μονόμετρα μεγέθη.

ii. Η ροπή μιας δύναμης είναι πάντα η ίδια ως προς διαφορετικά σημεία του χώρου.

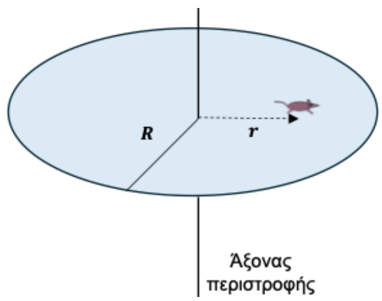
iii. Όταν το σημείο εφαρμογής μιας δύναμης μετακινείται πάνω στον φορέα της, η ροπή της δύναμης ως προς ένα σημείο του χώρου παραμένει σταθερή.

iv. Μπορούμε να επιταχύνουμε το Κέντρο Μάζας ενός σώματος ασκώντας σε αυτό μόνο ένα ζεύγος δυνάμεων.

v. Δύο σώματα ίσης μάζας τα οποία περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, έχουν πάντοτε την ίδια περιστροφική κινητική ενέργεια.

Λύση: i. Λάθος, ii. Λάθος, iii. Σωστό, iv. Λάθος, v. Λάθος

25. Ένα μικρό ποντίκι με μάζα m βρίσκεται πάνω σε έναν οριζόντιο, κυκλικό, ομογενή δίσκο με μάζα M οκταπλάσια από τη μάζα του ποντικιού ($M = 8m$) και ακτίνα R. Ο δίσκος περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από τον κεντρικό κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 1{,}75\,\mathrm{rad/s}$. Το ποντίκι βρίσκεται αρχικά σε απόσταση $r = 0{,}600R$ από το κέντρο του δίσκου, αλλά μετά περπατά και σταματά στην περιφέρεια του δίσκου. Να θεωρήσετε το ποντίκι ως υλικό σημείο. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$.



i. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου, όταν το ποντίκι βρίσκεται στην τελική του θέση.

ii. Να δικαιολογήσετε κατά πόσο η κινητική ενέργεια περιστροφής του δίσκου, όταν το ποντίκι βρίσκεται στην αρχική του θέση, είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την κινητική ενέργεια περιστροφής του δίσκου, όταν το ποντίκι βρίσκεται στην τελική του θέση.

Λύση:

i. Διατήρηση της στροφορμής:

$$\sum M_\xi = 0 \Rightarrow \Delta\vec{L} = 0$$

$$(I_\Delta + I_\pi)\omega_1 = (I_\Delta + I'_\pi)\omega_2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_1 = \left(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(8m)R^2 + m(0{,}600R)^2\right)\omega_1 = \left(\tfrac{1}{2}(8m)R^2 + mR^2\right)\omega_2$$

$$\left(4mR^2 + 0{,}36mR^2\right)\omega_1 = \left(4mR^2 + mR^2\right)\omega_2$$

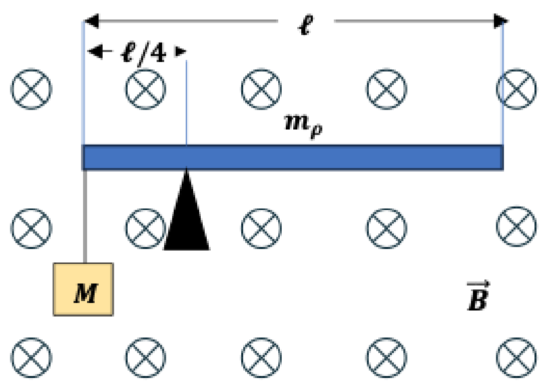
$$4{,}36\,\omega_1 = 5\,\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{4{,}36}{5}\,\omega_1$$

$$\omega_2 = 1{,}53\,\mathrm{rad/s}$$

ii. Από τη σχέση υπολογισμού της περιστροφικής κινητικής ενέργειας, για $I_\Delta = \text{σταθ.}$ και $\omega_2 < \omega_1$, προκύπτει ότι:

$$E_{\text{κιν},2} < E_{\text{κιν},1}$$

26. Ομογενής, αγώγιμη ράβδος μήκους ℓ και μάζας m_p είναι τοποθετημένη σε στήριγμα, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $\ell/4$ από το αριστερό άκρο της ράβδου. Η ράβδος βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $|\vec{B}|$, με κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένα σώμα μάζας M, πέντε φορές μεγαλύτερης από τη μάζα της ράβδου m_p ($M = 5m_p$), κρέμεται από το αριστερό άκρο της ράβδου. Τη ράβδο διαρρέει ηλεκτρικό ρεύμα με αποτέλεσμα να ισορροπεί οριζόντια. (Τα καλώδια που τροφοδοτούν τη ράβδο με ηλεκτρικό ρεύμα και ασκούν αμελητέες δυνάμεις σε αυτή δεν φαίνονται στο σχήμα).

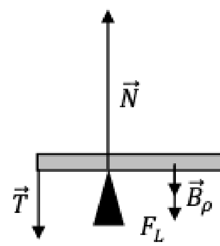


Να καθορίσετε τη φορά και να υπολογίσετε την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που θα πρέπει να διαρρέει τη ράβδο, έτσι ώστε να ισορροπεί οριζόντια στο στήριγμα. Η απάντησή σας να δοθεί ως συνάρτηση των μεγεθών $\ell, m_p, |\vec{B}|$ και g.

Λύση: Ορθός καθορισμός της φοράς της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος:

$$M > m_p, \quad \frac{d_M}{} > \frac{d_{B_p}}{} \Rightarrow |\vec{M}_T| > |\vec{M}_{B_p}|$$

$$\Rightarrow \vec{F}_L : \text{Έχει φορά προς τα κάτω και προκαλεί δεξιόστροφη περιστροφή.}$$



Καθορισμός της φοράς της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού:

$$I : \text{Από δεξιά προς αριστερά}$$

Ορθή εφαρμογή της συνθήκης ισορροπίας:

$$\sum M_\xi = 0 \Rightarrow \vec{M}_T + \vec{M}_{B_p} + \vec{M}_{F_L} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\vec{M}_T| - |\vec{M}_{B_p}| - |\vec{M}_{F_L}| = 0$$

Αντικατάσταση με τον ορθό μοχλοβραχίονα κάθε δύναμης:

$$\frac{5m_p g\,\ell}{4} - \frac{m_p g\,\ell}{4} - |\vec{F}_L|\,\ell = 0$$

Εξαγωγή της σχέσης για το μέτρο της $\vec{F}_L$:

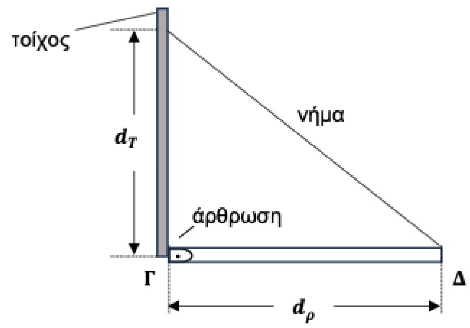
$$|\vec{F}_L| = 4m_p g$$

Εξαγωγή της σχέσης υπολογισμού της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος:

$$|\vec{B}|\,I\,\ell = 4m_p g$$

$$I = \frac{4m_p g}{|\vec{B}|\,\ell}$$

27. Μια λεπτή, οριζόντια ομογενής ράβδος ΓΔ, μήκους $d_p = 3{,}0\,\mathrm{m}$ και μάζας $m_p = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, ισορροπεί με τη βοήθεια αβαρούς νήματος δεμένου στο άκρο της Δ. Το άκρο Γ της ράβδου είναι στερεωμένο μέσω άρθρωσης σε κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το νήμα είναι δεμένο στον τοίχο σε σημείο που απέχει κατακόρυφα από την άρθρωση απόσταση $d_T = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από την άρθρωση και είναι κάθετος προς τη διεύθυνση της ράβδου, δίνεται από τη σχέση:

$$I_p = \frac{1}{3} m_p d_p^2$$

Α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.

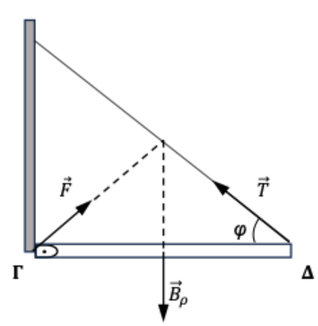
Β. Τη στιγμή $t = 0$ κόβεται το νήμα.

i. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, τη στιγμή που κόβεται το νήμα.

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου Δ της ράβδου όταν γίνεται, για πρώτη φορά, κατακόρυφη.

Λύση:

Α.



Υπολογισμός της γωνίας κλίσης του νήματος:

$$\tan\varphi = \frac{d_T}{d_p} = \frac{4{,}0\,\mathrm{m}}{3{,}0\,\mathrm{m}} \Rightarrow \varphi = 53^\circ$$

Εφαρμογή συνθήκης ισορροπίας ροπών ως προς την άρθρωση:

$$\sum M_\xi = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}} + \vec{M}_{\vec{B}\rho} + \vec{M}_{\vec{T}} = \vec{0}$$

Υπολογισμός:

$$(|\vec{T}|\sin\varphi)d_p - m_p g\frac{d_p}{2} = 0 \Rightarrow |\vec{T}| = \frac{m_p g}{2\sin\varphi}$$

$$|\vec{T}| = \frac{(2{,}0\,\mathrm{kg})(9{,}81\,\mathrm{m/s^2})}{2\sin 53^\circ} \Rightarrow |\vec{T}| = 12{,}3\,\mathrm{N}$$

B.

i. Υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής στροφορμής:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \sum \vec{M}_\xi = \vec{M}_{B_p}$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = -|\vec{B}_p|\frac{d_p}{2}$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = -\frac{m_p g\, d_p}{2} \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = -29{,}43\,\frac{\mathrm{kg{\cdot}m^2}}{\mathrm{s^2}}$$

ii. Θεώρημα διατήρησης της ενέργειας: $W_{\xi f} = W_{B_p} \Rightarrow \Delta E_{\text{μηχ}} = 0$

$$\Delta E_{\text{μηχ}} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{κιν}} + \Delta U_{B_p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I_p\omega_{\text{τελ}}^2 - \frac{m_p g\, d_p}{2} = 0 \Rightarrow \omega_{\text{τελ}} = \sqrt{\frac{m_p g\, d_p}{I_p}} = \sqrt{\frac{3g}{d_p}} \Rightarrow \omega_{\text{τελ}} = 3{,}132\,\mathrm{rad/s}$$

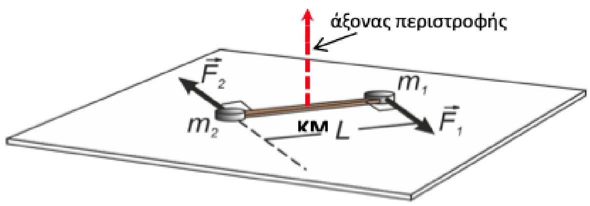
Χρήση της σχέσης $v_{\text{τελ}} = \omega_{\text{τελ}} d_p$:

$$v_{\text{τελ}} = \sqrt{\frac{3g}{d_p}}\, d_p = \sqrt{3g\, d_p}$$

Υπολογισμός του τελικού αποτελέσματος:

$$|v| = \sqrt{3 \times (9{,}81\,\mathrm{m/s^2}) \times (3{,}0\,\mathrm{m})} \Rightarrow |v| = 9{,}40\,\mathrm{m/s}$$

28. Δύο σώματα αμελητέων διαστάσεων με μάζες $m_1 = m_2 = m$ είναι στερεωμένα στα άκρα λεπτής ράβδου μήκους L και αμελητέας μάζας. Το σύστημα σωμάτων – ράβδου αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούνται στα σώματα οι οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ για χρονικό διάστημα Δt, οι οποίες έχουν ίδια και σταθερά μέτρα, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$, είναι παράλληλες και διαρκώς κάθετες στην ευθεία που ορίζει η ράβδος. Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δt, το σύστημα περιστρέφεται ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας των σωμάτων (ΚΜ), με γωνιακή επιτάχυνση α_γ.



i. Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος (μέτρο και κατεύθυνση).

ii. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης α_γ του συστήματος σωμάτων – ράβδου.

Λύση:

i. Η συνολική ροπή του ζεύγους δυνάμεων έχει μέτρο:

$$|\Sigma\vec{M}| = |\vec{M}_1| + |\vec{M}_2| = L\,|\vec{F}|$$

Η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο περιστροφής με φορά προς τα κάτω.

ii. Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από το ΚΜ. Επομένως τα δύο σώματα έχουν ροπή αδράνειας:

$$I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2}$$

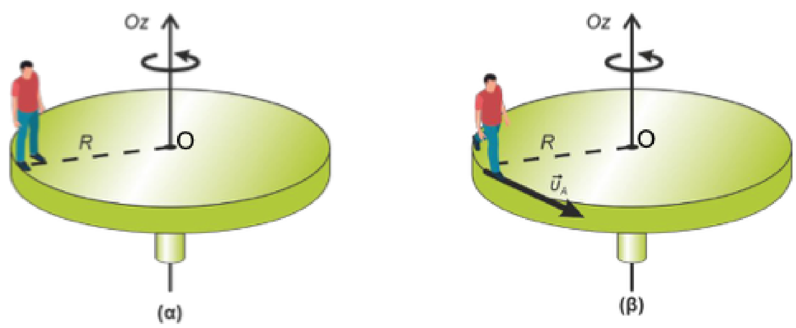
Από τον νόμο της περιστροφικής κίνησης:

$$\Sigma\vec{M} = I\,\alpha_\gamma \;\Rightarrow\; -L|\vec{F}| = \frac{mL^2}{2}\,\alpha_\gamma$$

$$\Rightarrow\; \alpha_\gamma = -\frac{2|\vec{F}|}{mL}$$

29. Ένας άνθρωπος μάζας $m = 80\,\text{kg}$ βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια ενός οριζόντιου ομογενούς δίσκου μάζας $M = 300\,\text{kg}$ και ακτίνας $R = 1{,}5\,\text{m}$. Το σύστημα δίσκου – ανθρώπου περιστρέφεται αριστερόστροφα, χωρίς τριβές, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του δίσκου Oz, που διέρχεται από το κέντρο του O, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $|\omega| = 2\,\text{rad/s}$. Να θεωρήσετε τον άνθρωπο ως υλικό σημείο. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση:

$$I_\delta = \frac{1}{2}MR^2.$$



i. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της στροφορμής του συστήματος δίσκου – ανθρώπου κατά μήκος του άξονα Oz.

ii. Να αναφέρετε αν θα μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου, αν κάποια χρονική στιγμή ο άνθρωπος εγκαταλείψει τον δίσκο με ευαπωστευτική ταχύτητα $|\vec{u}_A| = |\vec{\omega}|R$ ως προς το έδαφος.

iii. Να δικαιολογήσετε την απάντηση που δώσατε στο ερώτημα (ii.).

Λύση:

i. Η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα Oz είναι:

$$L_{\sigma\upsilon\sigma,z} = L_{\delta,z} + L_{A,z}$$

$$L_{\sigma\upsilon\sigma,z} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

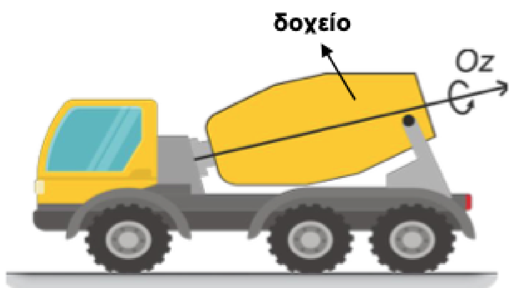
$$L_{\sigma\upsilon\sigma,z} = \left[\frac{1}{2}(300)(1{,}5)^2 + (80)(1{,}5)^2\right]\cdot 2$$

$$L_{\sigma\upsilon\sigma,z} = 1035\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

ii. Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου δεν θα μεταβληθεί.

iii. Εφόσον $\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi,z} = \vec{0}$, η στροφορμή του συστήματος κατά μήκος του άξονα Oz διατηρείται σταθερή. Αφού η στροφορμή του ανθρώπου παραμένει σταθερή όταν εγκαταλείπει τον δίσκο, η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου δεν μεταβάλλεται.

30. Ένα φορτηγό μπετονιέρα έχει ένα μεγάλο άδειο δοχείο στο πίσω μέρος του για να αναδεύει το σκυρόδεμα (μπετόν), όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το δοχείο περιστρέφεται δεξιόστροφα, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, γύρω από τον άξονα συμμετρίας του (άξονας Oz), εκτελώντας μία πλήρη περιστροφή κάθε 5,7 s. Η ροπή αδράνειας του δοχείου ως προς τον άξονα Oz είναι $19000\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$.



i. Να υπολογίσετε το μέτρο τιμή της στροφορμής του δοχείου κατά μήκος του άξονα Oz.

ii. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της μέσης, συνολικής ροπής κατά μήκος του άξονα Oz, που θα δεχθεί το δοχείο αν διπλασιαστεί η γωνιακή του ταχύτητα σε χρονικό διάστημα 4,0 s.

Λύση:

i. Υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{-2\pi\,\mathrm{rad}}{5{,}7\,\mathrm{s}} \simeq -1{,}1\,\mathrm{rad/s}$$

Υπολογισμός της στροφορμής:

$$L = I \cdot \omega = (19000\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}) \times (-1{,}1\,\mathrm{rad/s})$$

$$L = -20900\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$$

ii. Υπολογισμός μέσης ροπής:

$$\sum M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{2L - L}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \sum M = \frac{-20900\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}}{4{,}0\,\mathrm{s}} = -5225\,\mathrm{N{\cdot}m}$$

31. Ένα απομονωμένο ομογενές αστέρι, σφαιρικού σχήματος μάζας m και ακτίνας R_0, περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0. Το αστέρι συρρικνώνεται διατηρώντας το σφαιρικό του σχήμα και την αρχική του μάζα. Σε κάποιο στάδιο της συρρίκνωσής του η ακτίνα του υποδιπλασιάζεται, $R_1 = \frac{R_0}{2}$, και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αυξάνεται σε ω_1.

Η ροπή αδράνειας ομογενούς συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

i. Να εξηγήσετε με βάση τον δεύτερο γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα τη μεταβολή στη γωνιακή ταχύτητα του αστεριού.

ii. Να δείξετε ότι ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων περιστροφής του αστεριού πριν και μετά τη συρρίκνωσή του ισούται με $\dfrac{\omega_0}{\omega_1} = \dfrac{1}{4}$.

Λύση:

i. Εφόσον το ομογενές αστέρι είναι απομονωμένο, η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής είναι συνεχώς μηδέν. Επομένως, με βάση τον δεύτερο γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα η στροφορμή του αστεριού κατά μήκος του άξονα περιστροφής διατηρείται. Επειδή η ροπή αδράνειας του αστεριού μειώνεται καθώς συρρικνώνεται, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής αυξάνεται έτσι ώστε η στροφορμή ($I\omega$) να παραμένει σταθερή.

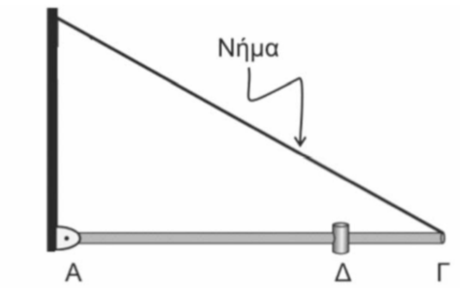
ii. Διατήρηση στροφορμής:

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1 \Rightarrow \frac{2}{5}mR_0^2\omega_0 = \frac{2}{5}mR_1^2\omega_1$$

Αντικατάσταση του $R_1 = \frac{R_0}{2}$:

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0/2}{R_0}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

32. Ένα σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m = 3\,\mathrm{kg}$ είναι στερεωμένο πάνω σε ομογενή ράβδο $A\Gamma$ μήκους $L = 3\,\mathrm{m}$ και μάζας $M = 6\,\mathrm{kg}$. Το σώμα βρίσκεται στη θέση Δ, η οποία απέχει απόσταση $\Delta\Gamma = \frac{L}{3}$ από το άκρο Γ της ράβδου. Η ράβδος στηρίζεται με το άκρο της A σε κατακόρυφο τοίχο μέσω άρθρωσης. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια αβαρούς νήματος, το οποίο συνδέει το άκρο Γ με τον κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το σύστημα ράβδος – σώμα μπορεί να περιστρέφεται ως προς άξονα ο οποίος διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετος στη ράβδο και στο επίπεδο της σελίδας.



i. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος – σώμα, ως προς τον άξονα περιστροφής.

ii. Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα και το σύστημα αρχίζει να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από τον άξονα περιστροφής. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του σώματος μάζας m τη στιγμή που το σύστημα ράβδος – σώμα διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση.

Η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L, ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της και είναι κάθετος στη ράβδο δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{3}ML^2$

Λύση:

i. Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι:

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau,A} = I_{\rho\beta,A} + I_{\sigma\mu,A} = \frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 = \frac{L^2}{9}(3M + 4m)$$

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau,A} = 1\,\mathrm{m}^2 \times (18\,\mathrm{kg} + 12\,\mathrm{kg}) = 30\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$$

ii. Μετά την κοπή του νήματος, οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα και παράγουν έργο είναι τα βάρη του σώματος και της ράβδου. Δεν υπάρχουν τριβές και η δύναμη του άξονα δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, άρα ισχύει διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu,\sigma\upsilon\sigma\tau} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho,\sigma\upsilon\sigma\tau}$$

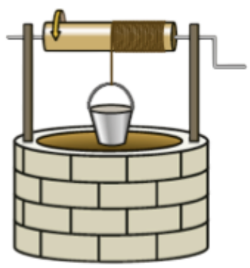
$$\frac{1}{2}I_{\sigma\upsilon\sigma\tau,A}\,\omega^2 = -\left(-Mg\frac{L}{2} - mg\frac{2L}{3}\right) = \frac{1}{6}Lg(3M + 4m)$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{Lg(3M+4m)}{I_{\sigma\upsilon\sigma\tau,A}}} = \sqrt{\frac{3,0\,g}{L}} = 3{,}13\,\mathrm{rad/s}$$

Η φορά της γωνιακής ταχύτητας είναι αρνητική (δεξιόστροφη), άρα:

$$\omega = -3{,}13\,\mathrm{rad/s}$$

33. Ένας κουβάς μάζας m είναι αναρτημένος πάνω από πηγάδι μέσω ενός σχοινιού αμελητέας μάζας, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα (όχι υπό κλίμακα). Το σχοινί είναι τυλιγμένο γύρω από κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R. Το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς τον κύλινδρο. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου γύρω από τον οριζόντιο άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Ο κουβάς αφήνεται από την ηρεμία. Οι δυνάμεις αντίστασης είναι αμελητέες. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κουβά δίνεται από τη σχέση:

$$a = \frac{mg}{m+\frac{M}{2}}$$

Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, αν η μάζα του κουβά είναι $m = 2{,}4\,\mathrm{kg}$, η μάζα του κυλίνδρου είναι $M = 36\,\mathrm{kg}$ και η ακτίνα του κυλίνδρου είναι $R = 0{,}20\,\mathrm{m}$.

Λύση:

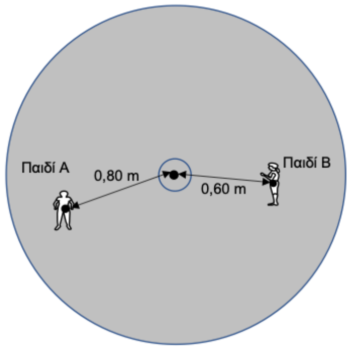
Από τη σχέση $a = a_\gamma R$ προκύπτει ότι $a_\gamma = \frac{a}{R}$. Άρα:

$$\sum \vec{M}_\xi = I\,a_\gamma \Rightarrow |\vec{M}_\xi| = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa$$

$$a = \frac{mg}{m+\frac{M}{2}} \Rightarrow |\vec{M}_\xi| = \frac{1}{2}MR\frac{mg}{m+\frac{M}{2}}$$

$$|\vec{M}_\xi| = \frac{1}{2}(36\,\mathrm{kg})(0{,}20\,\mathrm{m})\frac{(2{,}4\,\mathrm{kg})(9{,}81\,\mathrm{m/s^2})}{20{,}4\,\mathrm{kg}} = 4{,}2\,\mathrm{N{\cdot}m}$$

34. Περιστρεφόμενη παιδική πλατφόρμα έχει ροπή αδράνειας ως προς τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής της $94\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Δύο παιδιά Α και Β στέκονται στην πλατφόρμα η οποία περιστρέφεται ελεύθερα, χωρίς τριβές, με 36 στροφές το λεπτό. Τα παιδιά μπορούν να θεωρηθούν σημειακές μάζες με τιμές $m_A = 40\,\text{kg}$ και $m_B = 30\,\text{kg}$ αντίστοιχα. Οι αποστάσεις του κάθε παιδιού από τον άξονα περιστροφής είναι $R_A = 0{,}80\,\text{m}$ και $R_B = 0{,}60\,\text{m}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. (Το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα).



Α. Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος πλατφόρμας και παιδιών γύρω από τον άξονα περιστροφής.

Β. Τα παιδιά μετακινούνται προς το κέντρο της πλατφόρμας έτσι ώστε να απέχουν και τα δύο απόσταση $0{,}30\,\text{m}$ από τον άξονα περιστροφής. Αυτό έχει ως συνέπεια να αλλάξει η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος σε $100\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

i. Το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων κατά μήκος του άξονα είναι μηδέν. Να εξηγήσετε γιατί αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας καθώς τα παιδιά μετακινούνται προς τον άξονα περιστροφής.

ii. Να υπολογίσετε τη νέα γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας.

Λύση:

Α. Η συνολική ροπή αδράνειας είναι:

$$I_\Sigma = (94\,\text{kg}\cdot\text{m}^2) + (40\,\text{kg})(0{,}80\,\text{m})^2 + (30\,\text{kg})(0{,}60\,\text{m})^2 = 130{,}4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Β.

i. Η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών μηδενίζεται, επομένως η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Η ροπή αδράνειας του συστήματος μειώνεται, επομένως η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται ώστε να παραμείνει σταθερή η σχέση $L = I\omega$.

ii. Η αρχική γωνιακή ταχύτητα είναι:

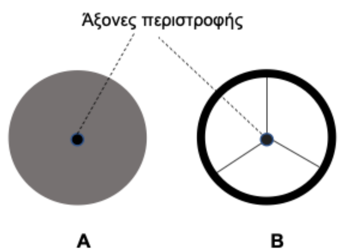
$$\omega_1 = 2\pi f = 2\pi \times \frac{36}{60} = 3{,}77\,\mathrm{rad/s}$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow I_{\Sigma\,\text{αρχ}}\omega_1 = I_{\Sigma\,\text{τελ}}\omega_2$$

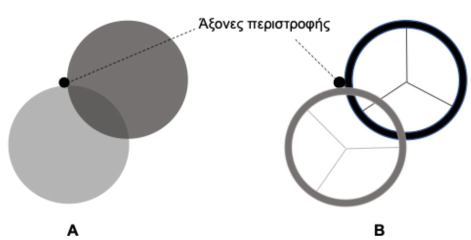
$$\omega_2 = \frac{I_{\Sigma\,\text{αρχ}}\omega_1}{I_{\Sigma\,\text{τελ}}} = \frac{(130{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^2})(3{,}77\,\mathrm{rad/s})}{100\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}} = 4{,}92\,\mathrm{rad/s}$$

35. Τα στερεά σώματα του πιο κάτω σχήματος έχουν την ίδια μάζα και περιστρέφονται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο τους, κάθετο στο επίπεδο τους, με την ίδια σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Τα σώματα Α και Β έχουν την ίδια ακτίνα R, αλλά στο Β η μάζα είναι κατανεμημένη στην περιφέρειά του ενώ στο Α είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σ' όλη την έκτασή του.
Α.



Να εξηγήσετε ποιο σώμα έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής τους και ποιο σώμα έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.

Β. Θεωρούμε τώρα ότι τα σώματα Α και Β κρατούνται αρχικά ακίνητα. Τα δύο σώματα αφήνονται ελεύθερα και περιστρέφονται γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα που βρίσκεται στον άκρο της οριζόντιας διαμέτρου τους, κάθετο στο επίπεδό τους.



Να συγκρίνετε τις κινητικές ενέργειες των δύο σωμάτων όταν φτάνουν στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς τους. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

Α. Το σώμα Β γιατί η μάζα του κατανέμεται πιο μακριά από τον άξονα περιστροφής από ό,τι του σώματος Α.

Η κινητική ενέργεια περιστροφής είναι

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

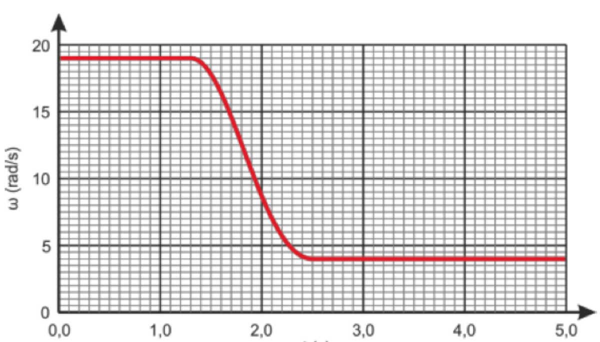
Αφού η ροπή αδράνειας του Β είναι μεγαλύτερη από του Α και η γωνιακή ταχύτητα είναι η ίδια, τότε το Β έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.

Β. Για τη μετακίνηση των σωμάτων προς το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς τους ισχύει:

$$E_{\mu\chi,\text{αρχ}} = E_{\mu\chi,\text{τελ}} \Rightarrow \Delta E_{\text{κιν,περ}} = -\Delta U_{\beta\alpha\varrho}$$

Επειδή το κέντρο μάζας του κάθε σώματος μετατοπίζεται στην ίδια κατακόρυφη απόσταση, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι η ίδια και για τα δύο σώματα. Επομένως και η $\Delta E_{\text{κιν,περ}}$ είναι ίδια. Τα δύο σώματα θα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια.

36. Σε πείραμα επιβεβαίωσης της αρχής διατήρησης της στροφορμής, ένας κυλινδρικός δακτύλιος αφήνεται να πέσει από μικρό ύψος σε περιστρεφόμενο κυκλικό δίσκο. Ο κυκλικός δίσκος έχει ροπή αδράνειας $I_{\text{δισκ}} = 1{,}3 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$ ως προς τον άξονα περιστροφής του. Κατά την πραγματοποίηση του πειράματος λήφθηκε η πιο κάτω γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο, $\omega = f(t)$. Ο κυλινδρικός δακτύλιος έχει ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, ίση με $I_{\text{δακτ}} = 5{,}0 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$.



i. Να εξηγήσετε γιατί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ελαττώνεται όταν τοποθετούμε τον δακτύλιο.

ii. Να διερευνήσετε αν επιβεβαιώνεται η αρχή διατήρησης της στροφορμής με ακρίβεια πρώτου δεκαδικού ψηφίου.

Λύση:

i. Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, αφού

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi.} = \vec{0}$$

Μέρος της στροφορμής του δίσκου μεταφέρεται στον δακτύλιο και, άρα, η στροφορμή του δίσκου ελαττώνεται. Κατά συνέπεια η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ελαττώνεται

ii. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η αρχική γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι

$$\omega_{\alpha\rho\chi} = 19{,}0\,\mathrm{rad/s},$$

ενώ η τελική κοινή γωνιακή ταχύτητα δίσκου–δακτυλίου είναι

$$\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = 4{,}0\,\mathrm{rad/s}.$$

Αρχική στροφορμή (μόνο ο δίσκος):

$$L_{\alpha\rho\chi,z} = I_{\delta\iota\sigma\kappa}\,\omega_{\alpha\rho\chi} = \left(1{,}3\times10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}\right)(19{,}0\,\mathrm{rad/s}) = 2{,}47\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}} \simeq 2{,}5\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}.$$

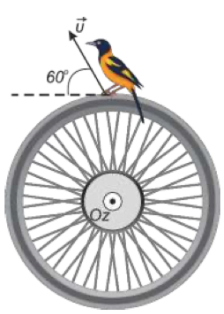
Τελική στροφορμή (δίσκος + δακτύλιος):

$$L_{\tau\varepsilon\lambda,z} = (I_{\delta\iota\sigma\kappa} + I_{\delta\alpha\kappa\tau})\,\omega_{\tau\varepsilon\lambda} = \left(1{,}3\times10^{-4} + 5{,}0\times10^{-4}\right)\mathrm{kg\,m^2}\cdot 4{,}0\,\mathrm{rad/s}$$

$$L_{\tau\varepsilon\lambda,z} = 2{,}52\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}} \simeq 2{,}5\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}.$$

Οι τιμές $L_{\alpha\rho\chi,z}$ και $L_{\tau\varepsilon\lambda,z}$ συμφωνούν με ακρίβεια πρώτου δεκαδικού ψηφίου, άρα η αρχή διατήρησης της στροφορμής επιβεβαιώνεται πειραματικά για το σύστημα δίσκου–δακτυλίου.

37. Ένας τροχός ακτίνας $R = 36\,\mathrm{cm}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα Oz, που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Στο ανώτατο σημείο του τροχού κάθεται ένα πουλί, αμελητέων διαστάσεων, μάζας $m_\pi = 0{,}10\,\mathrm{kg}$. Το σύστημα είναι ακίνητο.



Κάποια στιγμή, το πουλί εγκαταλείπει τον τροχό με ταχύτητα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τον τροχό, έχει μέτρο $10\,\mathrm{m/s}$ ως προς το έδαφος και σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση. Αμέσως μετά, ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $3{,}0\,\mathrm{rad/s}$.

i. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του.

ii. Να υπολογίσετε τη μέση ροπή (μέτρο και κατεύθυνση) που ασκήθηκε από τα πόδια του πουλιού στον τροχό, αν η χρονική διάρκεια της αναπήδησης του πουλιού είναι $0{,}10\,\mathrm{s}$.

Λύση:

i.

$$\sum \vec{M}_{\xi z} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

$$\Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = -I_{\tau\rho} \cdot |\vec{\omega}| + m_\pi |\vec{\upsilon}_\pi| R \cdot \eta\mu 30^\circ$$

$$\Rightarrow I_{\tau\rho} = \frac{m_\pi |\vec{\upsilon}_\pi| R \cdot \eta\mu 30^\circ}{|\vec{\omega}|} = \frac{0{,}10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}36\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5}{3{,}0\,\mathrm{rad/s}} = 0{,}06\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$$

ii. Η ροπή που δέχθηκε ο τροχός από το πουλί είναι η συνολική ροπή $\sum \vec{M}_{\xi z}$ που ασκήθηκε στον τροχό. Η μέση ροπή έχει μέτρο:

$$|\sum \vec{M}_{\xi z}| = \frac{|\Delta \vec{L}_{\tau\rho}|}{\Delta t} \Rightarrow |\sum \vec{M}_{\xi z}| = \frac{|I_{\tau\rho}\omega - 0|}{\Delta t} = \frac{|0{,}06\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} \cdot (-3{,}0\,\mathrm{rad/s})|}{0{,}10\,\mathrm{s}} = 1{,}8\,\mathrm{Nm}$$

Κατεύθυνση: $\otimes$

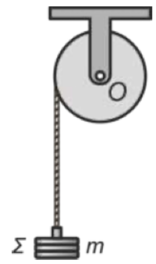
<u>Εναλλακτικά</u>

$$|\vec{\alpha}_{\gamma\,\tau\rho}| = \frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t} = \frac{|-3{,}0\,\mathrm{rad/s} - 0|}{0{,}10\,\mathrm{s}} = 30\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

$$|\sum \vec{M}_{\xi z}| = I_{\tau\rho} |\vec{\alpha}_{\gamma\,\tau\rho}| = 0{,}06\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} \cdot 30\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}8\,\mathrm{Nm}$$

Κατεύθυνση: $\otimes$

38. Μια τροχαλία μάζας $M = 4\,\mathrm{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}4\,\mathrm{m}$ είναι συνδεδεμένη μέσω αβαρούς σχοινιού με ένα σώμα Σ μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$. Η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Το σχοινί δεν ολισθαίνει ως προς την τροχαλία.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί. Το σώμα κινείται με επιτάχυνση $\alpha = 4{,}91\,\mathrm{m/s^2}$.

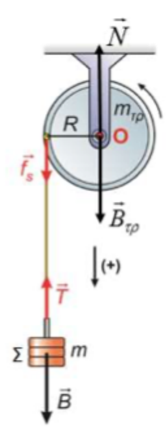
i. Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων και να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και στην τροχαλία.

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας στην τροχαλία.

iii. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος κατά μήκος του άξονα περιστροφής της τροχαλίας.

Λύση:

i. Στο σώμα δρουν το βάρος του $\vec{B}$ και η τάση $\vec{T}$ του τυλιγμένου σχοινιού. Στην τροχαλία δρουν μια δύναμη στατικής τριβής f_s από το τυλιγμένο σχοινί, το βάρος της $\vec{B}_{\tau\rho}$ και μία αντίρροπη δύναμη $\vec{N}$ από το σημείο στήριξης O.



ii.

$$\text{Για το σώμα } \Sigma: \quad \sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m \cdot g - |\vec{T}| = m \cdot |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{T}| = m(g - |\vec{a}|)$$

$$|\vec{T}| = 2\,\mathrm{kg}\left(9{,}81\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 4{,}91\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 9{,}8\,\mathrm{N}$$

Το κέντρο μάζας της τροχαλίας δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση και, αφού $|\vec{f_s}| = |\vec{T}|$, έχουμε:

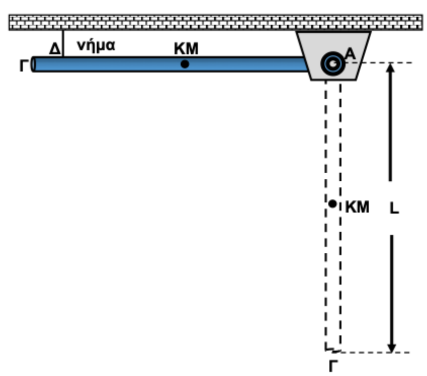
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow |\vec{N}| - |\vec{T}| - Mg = 0 \Rightarrow |\vec{N}| = |\vec{T}| + Mg$$

$$|\vec{N}| = 9{,}8\,\mathrm{N} + 4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow |\vec{N}| = 49{,}06\,\mathrm{N}$$

iii. Για το σύστημα των σωμάτων η μόνη εξωτερική δύναμη που προκαλεί ροπή είναι το βάρος του σώματος Σ.

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau,\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{\Delta \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta L_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}{\Delta t} = mgR = 7{,}85\,\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

39. Μια ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας $M = 3\,\mathrm{kg}$ και μήκους $L = 1{,}5\,\mathrm{m}$ είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α και ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι δεμένο στο σημείο Δ της ράβδου. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το άκρο της Α, δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{3}ML^2$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα.



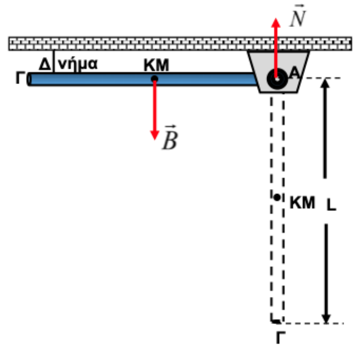
i. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο τη χρονική στιγμή που κόβεται το νήμα.

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη χρονική στιγμή της έναρξης της κίνησής της.

iii. Να εξηγήσετε πόση θα είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, όταν αυτή διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.

Λύση:

i.



ii.

$$\sum M_{\text{άρθρωση}} = I \cdot \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow \left|\vec{B}\right| \frac{L}{2} = \frac{1}{3} M L^2 \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{3} M L^2 \alpha_{\text{γων}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{3g}{2L} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = 9{,}81\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

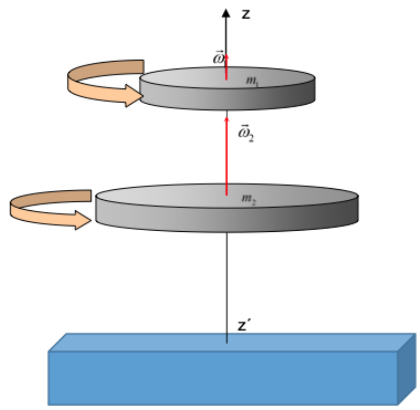
iii. Στην κατακόρυφη θέση η ροπή του βάρους ως προς τον άξονα που διέρχεται από την άρθρωση είναι μηδέν, άρα $\sum M_{\text{άρθρωση}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{γων}} = 0$

40. Οι δύο ομογενείς δίσκοι του σχήματος είναι οριζόντιοι και περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από τον κατακόρυφο άξονα zz' που διέρχεται από το ΚΜ τους με γωνιακές ταχύτητες $\omega_1 = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και $\omega_2 = 40\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Οι ροπές αδράνειας των δύο δίσκων ως προς τον άξονα περιστροφής zz' είναι $I_1 = 0{,}2\,\text{kgm}^2$ και $I_2 = 0{,}4\,\text{kgm}^2$ αντίστοιχα. Κάποια στιγμή ο δίσκος μάζας m_1 αφήνεται να πέσει πάνω στον δίσκο μάζας m_2. Οι δύο δίσκοι έρχονται σε επαφή με αποτέλεσμα να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα.

i. Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής στροφορμής του συστήματος των δύο δίσκων.

ii. Να υπολογίσετε την τελική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής των δύο δίσκων.

iii. Να εξηγήσετε γιατί δεν διατηρείται ξεχωριστά η στροφορμή του κάθε δίσκου κατά μήκος του άξονα zz'.



Λύση:

i.

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi,z} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \Rightarrow |\vec{L}_{\alpha\rho\chi,z}| = I_1|\vec{\omega}_1| + I_2|\vec{\omega}_2| \Rightarrow$$

$$|\vec{L}_{\alpha\rho\chi,z}| = 0{,}2\,\mathrm{kgm^2} \times 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} + 0{,}4\,\mathrm{kgm^2} \times 40\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 18\,\mathrm{kgm^2}\frac{1}{\mathrm{s}}$$

ii.

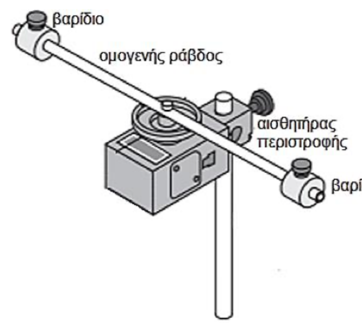
$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi\omega\tau,z} = 0 \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi,z} = L_{\tau\varepsilon\lambda,z} \Rightarrow I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = I_1\omega_\kappa + I_2\omega_\kappa = (I_1 + I_2)\omega_\kappa$$

$$\Rightarrow \omega_\kappa = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} = \frac{18\,\mathrm{kgm^2}\frac{1}{\mathrm{s}}}{0{,}6\,\mathrm{kgm^2}} = 30\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

iii. Ανάμεσα στους δύο δίσκους αναπτύσσονται δυνάμεις κινητικής τριβής μέχρι να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα.

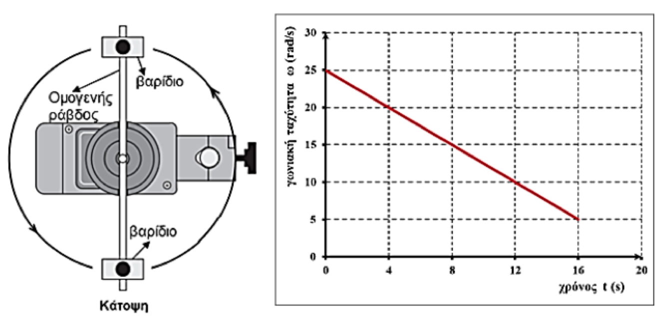
Οι δυνάμεις αυτές είναι εσωτερικές στο σύστημα των δύο δίσκων, και εξωτερικές στον κάθε δίσκο ξεχωριστά. Επομένως, όταν θεωρούμε ξεχωριστά τον κάθε δίσκο, υπάρχουν μη μηδενικές εξωτερικές ροπές ως προς το κέντρο του δίσκου που μεταβάλλουν την στροφορμή των δίσκων.

41. Δυο όμοια μικρά βαράκια μάζας $m_\beta = 75 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ το καθένα, στερεώνονται σε απόσταση $0{,}18\,\mathrm{m}$ εκατέρωθεν του μέσου μιας ομογενούς ράβδου μάζας $M = 27 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ και μήκους $L = 0{,}38\,\mathrm{m}$. Η ράβδος προσαρμόζεται σε αισθητήρα περιστροφικής κίνησης όπως φαίνεται στην πειραματική διάταξη του σχήματος. Το σύστημα ράβδος–βαράκια μπορεί να περιστρέφεται οριζόντια γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσο της ράβδου. Η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσο της και είναι κάθετος στη ράβδο δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{12}ML^2$.



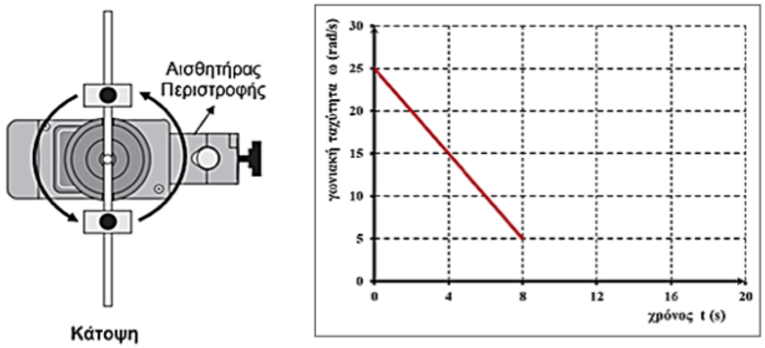
i. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος – βαράκια ως προς τον άξονα περιστροφής του, θεωρώντας τα βαράκια υλικά σημεία.

ii. Θέτουμε το σύστημα ράβδος – βαράκια σε αριστερόστροφη περιστροφή και το αφήνουμε ελεύθερο να περιστρέφεται, όπως φαίνεται στο σχήμα Α. Στον άξονα περιστροφής ασκείται τριβή, η οποία είναι συνεχώς σταθερή. Στην οθόνη του ηλεκτρονικού υπολογιστή παίρνουμε τη γραφική παράσταση ω = f(t) της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – βαράκια σε σχέση με τον χρόνο που φαίνεται στο σχήμα Α.



Σχήμα Α

Μεταφέρουμε και στερεώνουμε τα βαράκια πιο κοντά στον άξονα περιστροφής, όπως φαίνεται στο σχήμα Β, και επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα θέτοντας το σύστημα ράβδος – βαράκια σε αριστερόστροφη περιστροφή με την ίδια αρχική γωνιακή ταχύτητα. Να θεωρήσετε ότι η τριβή στον άξονα περιστροφής είναι η ίδια με την τριβή στην προηγούμενη περίπτωση. Να εξηγήσετε γιατί η γραφική παράσταση παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα Β.



Σχήμα Β

Λύση:

i.

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = I_\rho + m_\beta r^2 + m_\beta r^2 = \frac{1}{12}ML^2 + 2m_\beta r^2$$

$$\Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{12} \times 27 \times 10^{-3}\,\text{kg} \times (38 \times 10^{-2}\,\text{m})^2 + 2 \times 75 \times 10^{-3}\,\text{kg} \times (0{,}18\,\text{m})^2$$

$$\Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 5{,}2 \times 10^{-3}\,\text{kgm}^2$$

ii. Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση προκύπτει ότι

$$\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\sum M_{\varepsilon\xi\omega\tau}}{I} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{M_f}{I}.$$

Όταν τα βαράκια μεταφερθούν πιο κοντά στον άξονα περιστροφής η ροπή αδράνειας του συστήματος γίνεται μικρότερη. Η ροπή της τριβής από τον άξονα περιστροφής στη ράβδο είναι ίδια. Άρα το σύστημα θα αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση.

Στη γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας – χρόνου η κλίση είναι ίση με τη γωνιακή επιτάχυνση ($\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$) και επομένως η γραφική παράσταση θα είναι ίδιας μορφής αλλά με μεγαλύτερη κλίση.