Ταλαντώσεις

Φυσική Γ′ Λυκείου (Ελλάδα)

Σημειώσεις

2025-2026

1.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις - Θεωρία

1.1.1 Εξισώσεις ταλάντωσης - Αρχική φάση

Τί είναι τα περιοδικά φαινόμενα;

Περίοδος:

Συχνότητα:

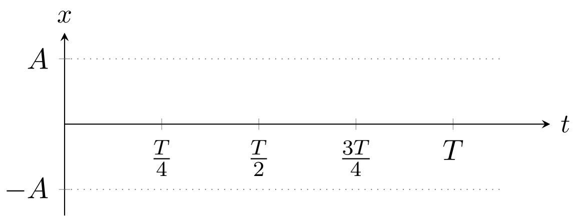
Τί είναι ταλάντωση;

Τί είναι γραμμική ταλάντωση;

Τί είναι απλή αρμονική ταλάντωση;

Απομάκρυνση:

$x =$

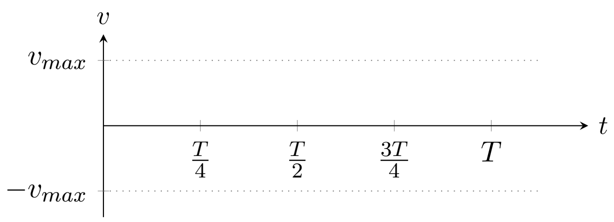


Ταχύτητα:

$v = v_{max}$συν(   )

$v_{max} =$

ή $v = v_{max}$ημ(   )

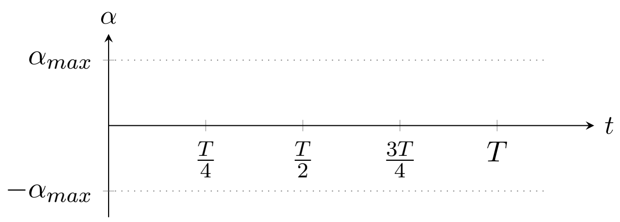


Επιτάχυνση:

$\alpha = -\alpha_{max}$ημ(   )

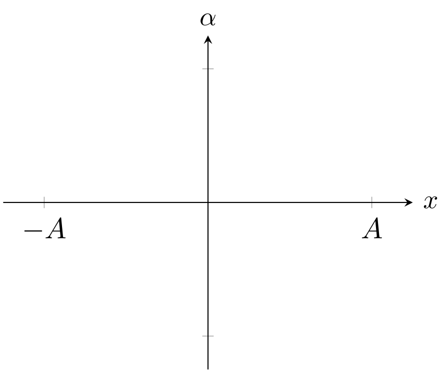
$\alpha_{max} =$ $\alpha_{max} =$

ή $a = a_{max}$ημ(   )



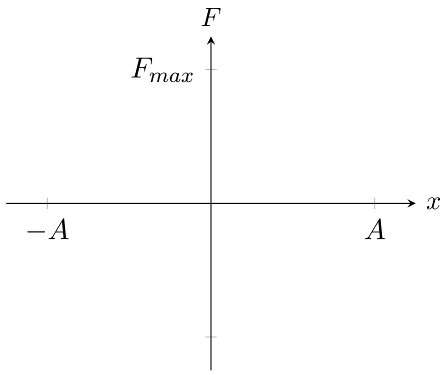
Σχέση επιτάχυνσης-απομάκρυνσης:

α =



► Τι φανερώνει η κλίση της γραφικής παράστασης α-x;

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για α.α.τ.
$F = m\alpha =$



► Τι φανερώνει η κλίση στο διάγραμμα F-x;

▷ Να αποδειχθεί η σχέση της περιόδου
$D = m\omega^2 \Leftrightarrow$

▷ Σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης $\boxed{v =}$
Απόδειξη:
Από Α.Δ.Ε.: $E = K + U \Leftrightarrow$

▷ Σχέση επιτάχυνσης - ταχύτητας $\boxed{\alpha =}$
Απόδειξη:
$v = v_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$
$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu\omega t$

▷ Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας: $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} =$

▷ Ρυθμός μεταβολής ορμής: $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} =$

▷ Ισχύει: $K + U = E \Leftrightarrow \dfrac{dK}{dt} + \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{dE}{dt} \Leftrightarrow \dfrac{dK}{dt} = -\dfrac{dU}{dt}$

▷ Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας: $\dfrac{\Delta K}{\Delta t} =$

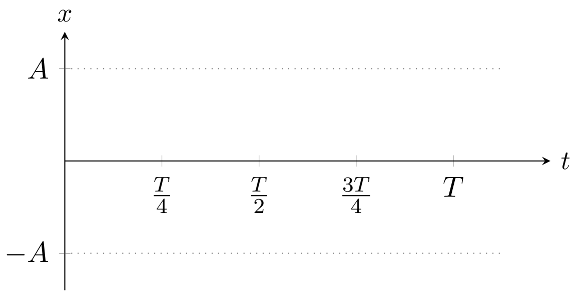
▷ Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας: $\dfrac{\Delta U}{\Delta t} =$

▷ Έργο δύναμης επαναφοράς: $W =$

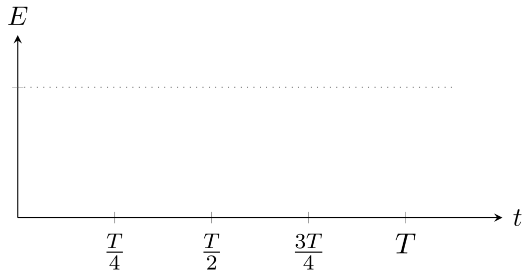
1.1.2 Ενέργειες

<u>Γραφική παράσταση $U-t, K-t, E-t$</u>

Θεωρούμε $x = A\eta\mu\omega t$, $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$



Δυναμική ενέργεια U=



Κινητική ενέργεια K=

Ολική ενέργεια E=

<u>Παρατηρήσεις:</u>
Η περίοδος της ενέργειας είναι:

Η συχνότητα της ενέργειας είναι:

► Που η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική; Πότε γίνεται αυτό;
Απόδειξη: Από την Α.Δ.Ε. στην ταλάντωση

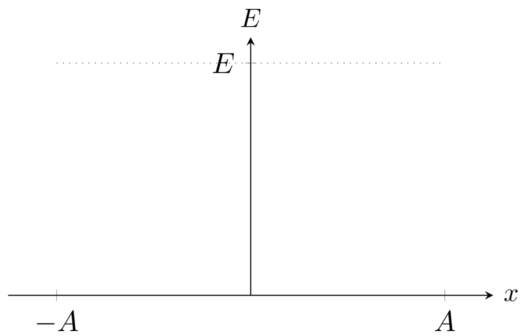
► Για ποιές τιμές της ταχύτητας η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική;
Απόδειξη: Από την Α.Δ.Ε. στην ταλάντωση

Γραφική παράσταση $U - x, K - x, E - x$

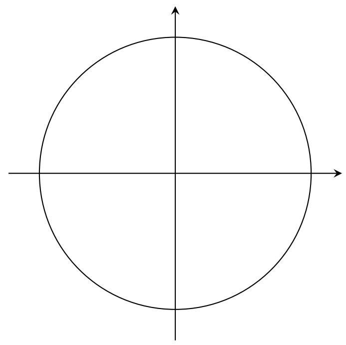
Δυναμική ενέργεια U=

Κινητική ενέργεια K=

Ολική ενέργεια E=



Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής στο προηγούμενο διάγραμμα;



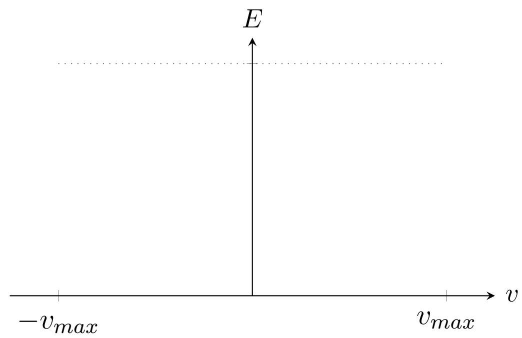
Σε ποιές θέσεις στο περιστρεφόμενο διάγραμμα αντιστοιχούν;

Γραφική παράσταση $U - v, K - v, E - v$

Δυναμική ενέργεια U=

Κινητική ενέργεια K=

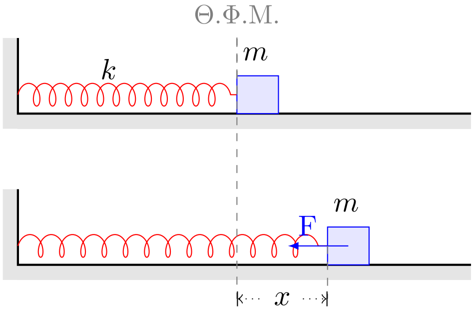
Ολική ενέργεια E=



Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής στο προηγούμενο διάγραμμα;

1.1.3 Ελατήρια

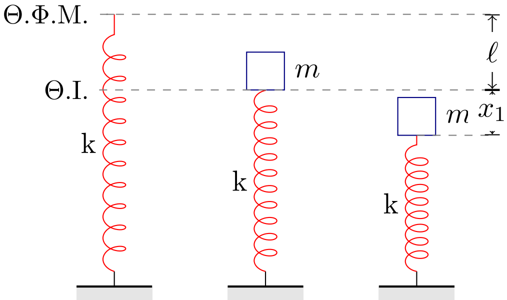
Περί ελατηρίων και ταλαντώσεων



- Το ελατήριο δεν ασκεί δύναμη όταν βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.
- Η δύναμη ελατηρίου έχει μέτρο $F_{ελ} = kx$ και φορά πάντα προς τη Θ.Φ.Μ.
- Δυναμική ενέργεια ελατηρίου: $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$ όπου το x είναι μετρημένο από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου

- Σε οριζόντιο ελατήριο: η Θ.Φ.Μ. ταυτίζεται με τη Θ.Ι. της ταλάντωσης (*όταν δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις στο σώμα, κάτι που θα το θεωρήσουμε ότι ισχύει και στα παρακάτω*). Τότε σε απομάκρυνση x: $\Sigma F = -kx$, επομένως το σώμα κάνει α.α.τ. με $D = k$. Αποδεικνύουμε ότι το σώμα κάνει α.α.τ. μόνο αν μας το ζητάει η άσκηση.
- Σε οριζόντιο ελατήριο: Αν συμπιέσουμε (ή τραβήξουμε) το ελατήριο κατά d από τη Θ.Ι. και την $t = 0$ αφήσουμε το σώμα ελεύθερο, τότε $A = d$ γιατί την στιγμή που το σώμα ξεκινάει δεν έχει ταχύτητα ($v = 0$), άρα βρίσκεται σε ακραία θέση.
- Σε οριζόντιο ελατήριο: Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου και η δυναμική ταλάντωσης ταυτίζονται κάθε χρονική στιγμή και σε κάθε θέση.
- Σε οριζόντιο ελατήριο: Η δύναμη ελατηρίου και η δύναμη επαναφοράς ταυτίζονται σε κάθε θέση.

Σε κατακόρυφο ή πλάγιο ελατήριο:

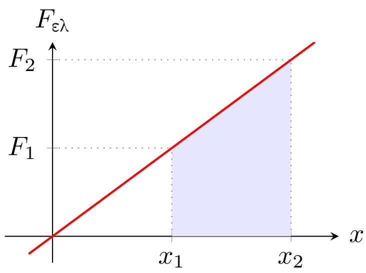


- Όταν ισορροπεί η μάζα m το ελατήριο δεν βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.
- Στη δύναμη ελατηρίου $F_{ελ} = kx$, το x είναι μετρημένο από τη Θ.Φ.Μ.
- Στη Θ.Ι.: $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k\ell = mg \Leftrightarrow \ell = \frac{mg}{k}$.
- Στην τυχαία απομάκρυνση x_1: $\Sigma F = mg - k(\ell + x_1) = mg - k\ell - kx_1 = -kx_1$, άρα το σώμα κάνει α.α.τ. με σταθερά $D = k$.

- Όλα τα μεγέθη της ταλάντωσης τα μετράμε από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι.
- Όλα τα μεγέθη του ελατηρίου τα μετράμε από τη θέση φυσικού μήκους Θ.Φ.Μ.
- Η δύναμη επαναφοράς δεν ταυτίζεται με τη δύναμη ελαατηρίου. Π.χ. στο σχήμα στη θέση x_1 η δύναμη επαναφοράς είναι $F_{επ} = kx_1$, η δύναμη ελατηρίου είναι $F_{ελ} = k(\ell + x_1)$.
- Δυναμική ενέργεια ελατηρίου στη θέση x_1: $U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\ell + x_1)^2$ (μετρημένη από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου) ενώ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι $U_{ταλ} = \frac{1}{2}kx_1^2$ (μετρημένη από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης).
- Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U = \frac{1}{2}kx^2$ είναι η μόνη δυναμική ενέργεια που θεωρούμε ότι υπάρχει στο σώμα. Δεν βάζουμε και την δυναμική βαρύτητας $U_{βαρ} = mgh$, γιατί είναι ήδη μέσα στην U.

Έργο δύναμης ελατηρίου

Η $F_{ελ}$ είναι μεταβλητή με την απόσταση x άρα το έργο της θα βρεθεί με το εμβαδό της γραφικής παράστασης $F-x$. Το μέτρο της δύναμης είναι $F = kx$



Για μετατόπιση από παραμόρφωση x_1 σε παραμόρφωση x_2 έχουμε:
$W = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)k(x_1 + x_2) \Leftrightarrow$
$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$

- <u>Δυναμική ενέργεια ελατηρίου</u>

Από την προηγούμενη σχέση φαίνεται ότι μπορούμε να αποδώσουμε δυναμική ενέργεια $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$ σε ελατήριο με παραμόρφωση x από τη θέση φυσικού μήκους του (Θ.Φ.Μ.). Η έκφραση είναι ίδια με την δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U_T = \frac{1}{2}Dx^2$, όταν έχουμε ελατήριο όπου $D = k$ αλλά για την δυναμική ταλάντωσης U_T το x *είναι μετρημένο από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι. της ταλάντωσης*.
Χρησιμοποιώντας τον γενικό ορισμό της δυναμικής ενέργειας δύναμης $W_F = -\Delta U$ ή $W_F = U_{αρχ} - U_{τελ}$ βρίσκουμε τον γενικότερο τύπο του έργου ελατηρίου:

$$\boxed{W_{ελ} = \frac{1}{2}kx_{αρχ}^2 - \frac{1}{2}kx_{τελ}^2} \qquad (1.1)$$

όπου $x_{αρχ}$ και $x_{τελ}$ είναι μετρημένα από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου. Ο παραπάνω τύπος μας δίνει αυτόματα και το πρόσημο του έργου ελατηρίου.

Ρυθμοί μεταβολής στην ταλάντωση

- Ρυθμός μεταβολής απομάκρυνσης = ταχύτητα

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{1.2}$$

- Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας = επιτάχυνση

$$\frac{dv}{dt} = a \tag{1.3}$$

- Ρυθμός μεταβολής ορμής = συνισταμένη δύναμη (από β′ νόμο Newton)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F} \tag{1.4}$$

  και αλγεβρικά:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx \tag{1.5}$$

- Ρυθμός μεταβολής φάσης = κυκλική συχνότητα

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \tag{1.6}$$

- Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας = ισχύς συνισταμένης δύναμης

$$\frac{dK}{dt} = P_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot v = -Dxv \tag{1.7}$$

  (Από Α′ Λυκείου: Στιγμιαία ισχύς δύναμης $P = F \cdot v$)

- Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = Dxv \tag{1.8}$$

  (Γιατί $K + U = E \Leftrightarrow dK + dU = 0 \Leftrightarrow dU = -dK \ldots$)

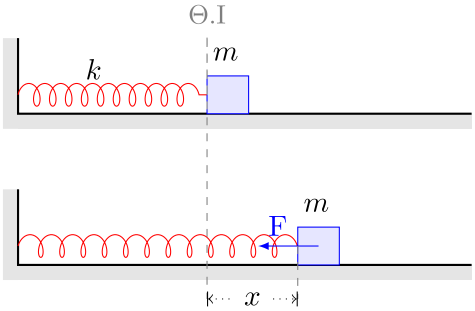
- Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ελατηρίου

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda} \cdot v = kxv \tag{1.9}$$

  (Από τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας:
  $dU = -dW \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dW}{dt} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -F_{\varepsilon\lambda} \cdot v \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = kxv$.
  Το x είναι μετρημένο από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου. Τα x και v μπαίνουν με πρόσημα, δηλαδή είναι οι αλγεβρικές τιμές τους)

Όλοι οι ρυθμοί μεταβολής είναι *στιγμιαία μεγέθη*. θα μας ζητάνε να τα υπολογίσουμε κάποια χρονική στιγμή της ταλάντωσης, ή όταν το σώμα βρίσκεται σε μία συγκεκριμένη θέση, κ.τ.λ.

▷ Οριζόντιο ελατήριο



▷ Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα κάνει α.α.τ. αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει το σώμα α.α.τ. είναι η συνισταμένη δύναμη που δέχεται να είναι την μορφής ''δύναμη επαναφοράς'' $\Sigma F = -Dx$

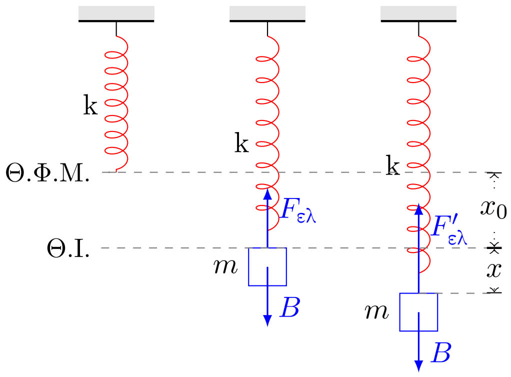
Η θέση φυσικού μήκους είναι και θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

Στην τυχαία απομάκρυνση x:

$\Sigma F =$

Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ Κατακόρυφο ελατήριο



Απόδειξη ότι το σώμα κάνει α.α.τ.

Στη θέση ισορροπίας:

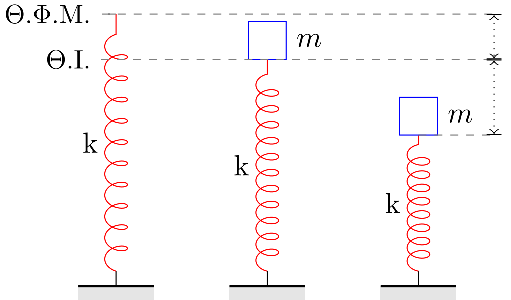
$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$

Στην τυχαία απομάκρυνση x η συνισταμένη δύναμη είναι

$\Sigma F_y =$

Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ Κατακόρυφο ελατήριο (β΄)



Απόδειξη ότι το σώμα κάνει α.α.τ.

Στη θέση ισορροπίας:

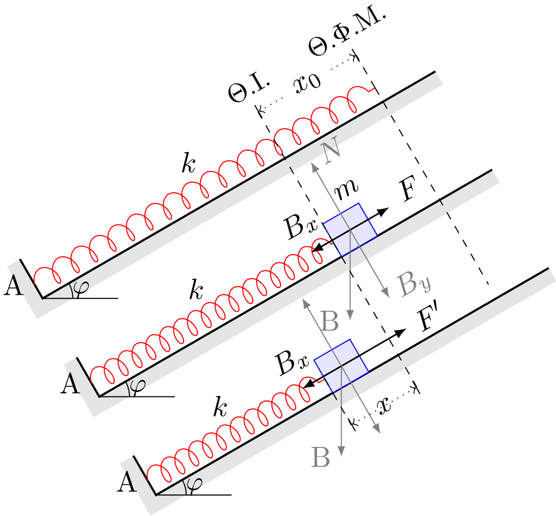
$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$

Στην τυχαία απομάκρυνση x

$\Sigma F_y =$

Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ <u>Ελατήριο με σώμα σε κεκλιμένο</u>



Για να δείξουμε ότι θα κάνει α.α.τ. αρκεί να δείξουμε ότι η ΣF στο σώμα έχει τη μορφή δύναμης επαναφοράς $\Sigma F = -Dx$, με D=σταθερά, αφού αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη της ταλάντωσης.

Αναλύουμε το βάρος B του σώματος:

$B_x =$

$B_y =$

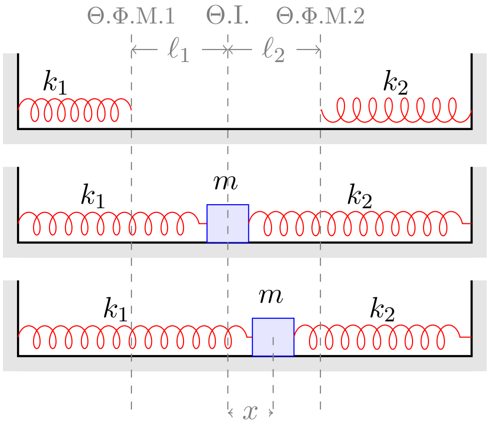
Στη θέση ισορροπίας $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow$

Στη θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. θα ισχύει:

$\Sigma F_x =$

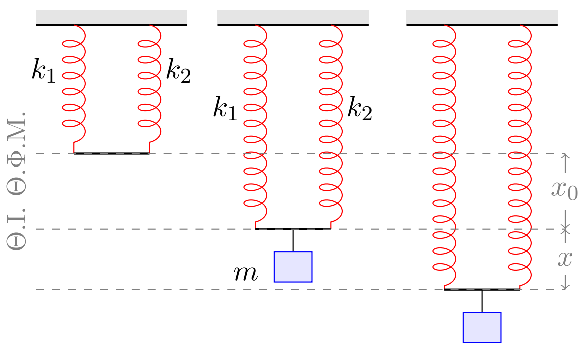
Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ <u>Δύο ελατήρια σε σώμα</u>: Περίπτωση (α′).

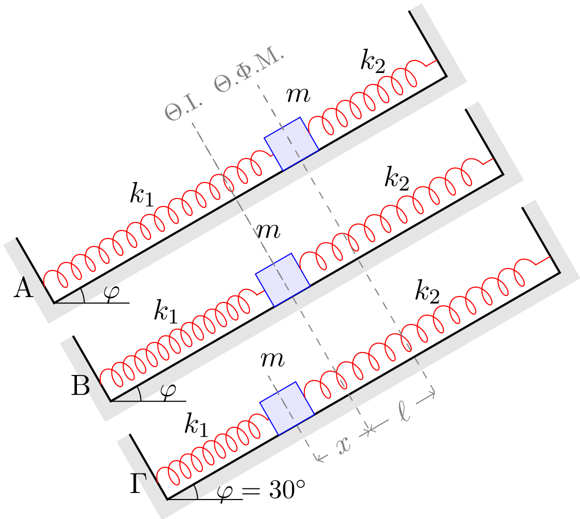


Η σταθερά επαναφοράς βρίσκεται να είναι $D = k_1 + k_2$.
Στη θέση ισορροπίας $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow$
Στη θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. θα ισχύει:
$\Sigma F_x =$

▷ <u>Δύο ελατήρια σε σώμα</u>



Η λεπτή ράβδος που συνδέει τα δύο ελατήρια είναι αμελητέας μάζας και δεν περιστρέφεται.
Το σύστημα αυτό είναι το ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση (α′).
Η σταθερά επαναφοράς βρίσκεται πάλι να είναι $D = k_1 + k_2$.



▷ Το σώμα κρατείται στη θέση του σχήματος όπου τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Κάποια στιγμή το σώμα αφήνεται ελεύθερο. Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

▷ Δύο ελατήρια σε σώμα: Περίπτωση (β΄).

Τα ελατήρια ασκούν την ίδια δύναμη, αλλά έχουν διαφορετικές παραμορφώσεις x_1 και x_2.

Η συνολική σταθερά επαναφοράς βρίσκεται $\dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ ή $D = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

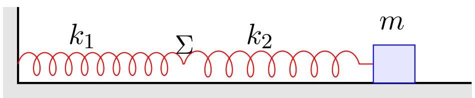
Απόδειξη:

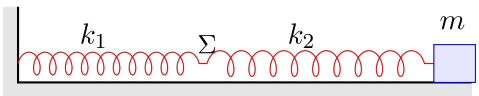
Η συνολική μετατόπιση του σώματος είναι $x = x_1 + x_2$.

Το σημείο Σ δεν έχει μάζα, άρα οι δυνάμεις που δέχεται είναι αντίθετες, $F_1 = F_2 = F$. Το σώμα δέχεται την δύναμη $F_2 = F$.

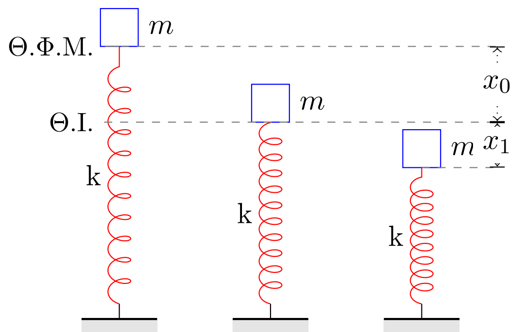
Ισχύουν $x_1 = \frac{F}{k_1}$, $x_2 = \frac{F}{k_2}$, $x = \frac{F}{D}$

$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow$





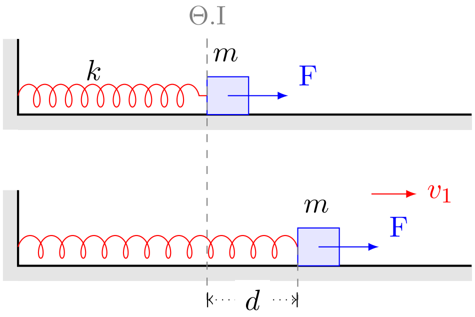
▷ Σώμα m αφήνεται σε ελατήριο



Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m, που βρίσκεται στη Θ.Φ.Μ. του, αφήνεται σώμα μάζας $m = 1$ Kg χωρίς αρχική ταχύτητα.
Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A =$
γιατί
Βρίσκουμε το x_0:
Στη θέση ισορροπίας $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης φ_0:
Την $t = 0$ $x = +A \Leftrightarrow +A = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow$
Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης $x =$
Όταν το σώμα βρεθεί σε απομάκρυνση $x_1 = -\dfrac{A}{2}$ τότε:
▷ Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα (δύναμη επαναφοράς) είναι $\Sigma F =$
▷ Η δύναμη του ελατηρίου είναι $F_{\varepsilon\lambda} =$
▷ Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι $U =$
▷ Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι $U_{\varepsilon\lambda} =$

▷ Δύναμη που προσφέρει ενέργεια στο σύστημα k-m



Σώμα μάζας $m = 1$ Kg είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m και το σύστημα ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 10$ N μέχρι να μετατοπιστεί κατά $d = 5$ cm, όπου η δύναμη καταργείται και το σύστημα κάνει α.α.τ.

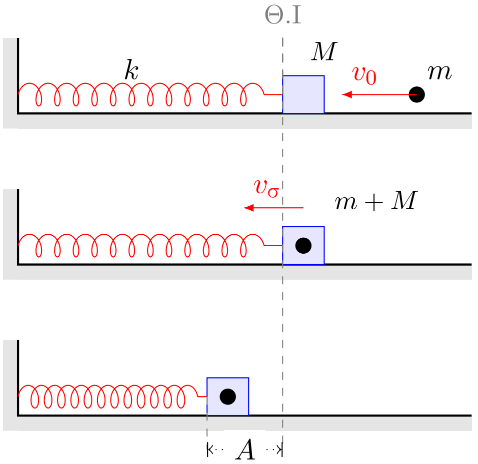
1. Να βρεθεί το έργο της δύναμης F και η ολική ενέργεια και το πλάτος της ταλάντωσης.
2. Να βρεθεί η ταχύτητα v_1 όταν καταργείται η δύναμη F.

Το έργο της δύναμης F είναι $W_F = Fd =$
Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι ίση με το έργο της δύναμης που διεγείρει το σύστημα, άρα $E_T = W_F =$
Επομένως $\frac{1}{2}kA^2 =$

Η ταχύτητα μπορεί να βρεθεί με Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από τη Θ.Ι. μέχρι τη θέση d.
$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ολ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = W_F - W_{\text{ελ}} \Leftrightarrow$

1.1.4 Ελατήρια και κρούσεις

▷ Οριζόντιο ελατήριο



Αφού σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής θα έχουμε

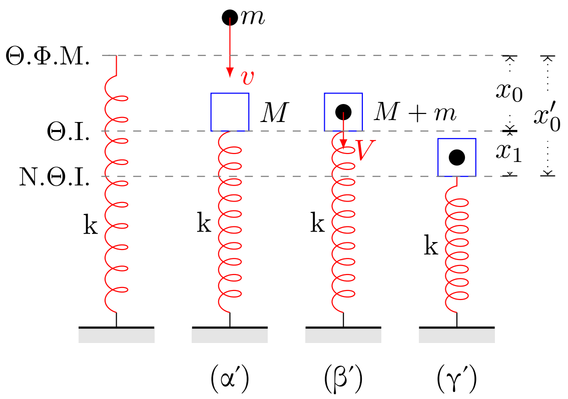
$p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Leftrightarrow$

Αρα $v_\sigma =$

Η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει οπότε η ταχύτητα v_σ είναι η

Επομένως $A =$

▷ Κατακόρυφη κρούση



Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m, ισορροπεί σώμα μάζας $M = 3$ Kg. Βλήμα μάζας $m = 1$ Kg κινείται κατακόρυφα με $v = 10$ m/s και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M. (σχήματα α′ και β′).

Το συσσωμάτωμα στο σχήμα β′ δεν βρίσκεται σε ακραία θέση γιατί

Βρίσκουμε το x_0: $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$

Βρίσκουμε το x_0': $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$

άρα $x_1 =$

Έχουμε πλαστική κρούση άρα ισχύει η Α.Δ.Ο. $p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow$

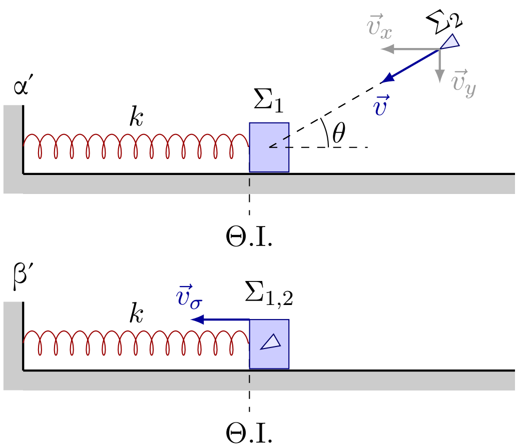
$\Leftrightarrow V =$

Το συσσωμάτωμα στη θέση β′ βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και έχει ταχύτητα V άρα

$K + U = E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A =$

▷ Πλάγια κρούση



Σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m, ισορροπεί δεμένο σώμα Σ_1 μάζας $M = 3$ Kg. Βλήμα Σ_2 μάζας $m = 1$ Kg κινείται πλάγια με γωνία θ (ημ$\theta = 0,8$, συν$\theta = 0,6$) και ταχύτητα $v = 20$ m/s και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M. (σχήματα α′ και β′).

Αναλύουμε την ταχύτητα του βλήματος σε άξονες $x - y$ όπου ο $x'x$ άξονας είναι παράλληλος με το επίπεδο κίνησης του συσσωματώματος.

Βρίσκουμε το v_x: $v_x = v\text{συν}\theta \Leftrightarrow$

Το συσσωμάτωμα στο σχήμα β′ βρίσκεται στη Θ.Ι.γιατί βρισμόμαστε σε οριζόντιο επίπεδο.

Η Α.Δ.Ο. ισχύει μόνο στον $x'x$ άξονα αφού το συσσωμάτωμα δεν μπορεί να κινηθεί στον $y'y$ άξονα λόγω του εδάφους.
άρα $p_{\text{αρχ,x}} = p_{\text{τελ,x}} \Leftrightarrow$

Το συσσωμάτωμα στη θέση β′ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και έχει ταχύτητα v_σ άρα αυτή θα είναι η

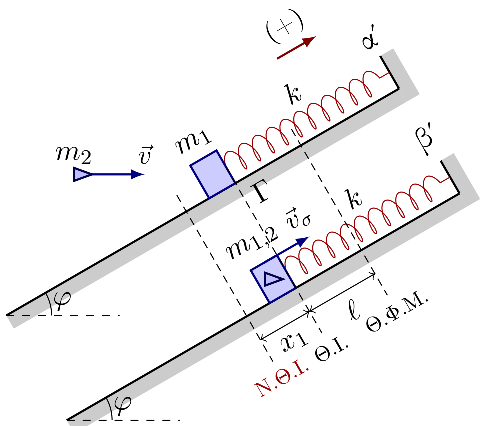
Βρίσκουμε την νέα συχνότητα ταλάντωσης $\omega' = \sqrt{\dfrac{K}{M+m}} =$

$v_\sigma = \omega' A \Leftrightarrow$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Δ.Ε.Τ. στη Θ.Ι.: $K + U = E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A =$

▷ Πλάγια κρούση σε κεκλιμένο επίπεδο



Σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία θ (ημ$\theta = 0,8$, συν$\theta = 0,6$) βρίσκεται ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m, και στο κάτω άκρο του ισορροπεί σώμα μάζας $m_1 = 3$ Kg. Βλήμα μάζας $m_2 = 1$ Kg κινείται οριζόντια και ταχύτητα $v = 2,5\sqrt{3}$m/s και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1. (σχήματα α′ και β′).

Χρησιμοποιούμε σύστημα αξόνων x και y με τον $x'x$ παράλληλο στο κεκλιμένο και αναλύουμε τη ταχύτητα $\vec{v}$ του βλήματος στους άξονες:

$v_x = v\text{συν}\theta \Leftrightarrow$

Το συσσωμάτωμα στο σχήμα β′ μετά την κρούση δεν βρίσκεται στη Θ.Ι. γιατί άλλαξε η μάζα. Επομένως η v_σ δεν είναι η $v_{\max}$ της ταλάντωσης.
Υπολογίζουμε την αρχική παραμόρφωση ℓ του ελατηρίου: $\Sigma F_{\Theta\text{I}} = 0 \Leftrightarrow$

Υπολογίζουμε την θέση όπου θα ισορροπήσει το συσσωμάτωμα (Ν.Θ.Ι.):
$\Sigma F_{\text{N}\Theta\text{I}} = 0 \Leftrightarrow k(\ell + x_1) = (m_1 + m_2)g \Leftrightarrow$

Άρα $x_1 =$

Η Α.Δ.Ο. ισχύει μόνο στον $x'x$ άξονα αφού το συσσωμάτωμα δεν μπορεί να κινηθεί στον $y'y$ άξονα λόγω του εδάφους.
Α.Δ.Ο.: $p_{\text{αρχ,x}} = p_{\text{τελ,x}} \Leftrightarrow$

Το συσσωμάτωμα στη θέση β′ βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 από τη νέα θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και έχει ταχύτητα v_σ. Αυτή δεν είναι η $v_{\max}$, άρα Δ.Ε.Τ.

Δ.Ε.Τ. στη θέση ακριβώς μετά την κρούση: $K + U = E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A =$

Βρίσκουμε την νέα συχνότητα ταλάντωσης $\omega' = \sqrt{\dfrac{K}{m_1+m_2}} =$

$v_\sigma = \omega' A \Leftrightarrow$

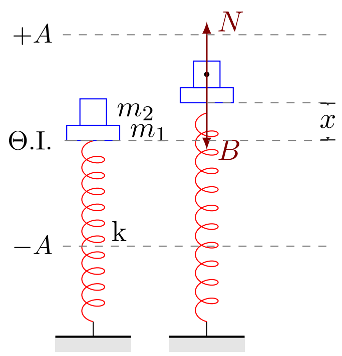
Υπολογίζουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης

$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0} x_1 = A\eta\mu(\varphi_0) \Leftrightarrow$

Γράφουμε την εξίσωση $x = f(t)$: $x =$

1.1.5 Χάσιμο επαφής σωμάτων

▷ Κατακόρυφη ταλάντωση



Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k, βρίσκεται στερεωμένο σώμα μάζας m_1 και πάνω του βρίσκεται δεύτερο σώμα m_2. Τα σώματα πιέζονται προς τα κάτω κατά A και αφήνονται ελεύθερα να κάνουν ταλάντωση.

Σε ποια θέση το σώμα m_2 θα χάσει τη επαφή του με το σώμα m_1;

Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση προς τα κάτω ($A_{\max}$) για την οποία το σώμα m_2 δεν χάνει την επαφή του κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης;

Και τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m_2 είναι $D_2 = m_2\omega^2$ και αφού και αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$
Από το σχήμα έχουμε:

$$\Sigma F = -D_2 x \Leftrightarrow N - B = -D_2 x$$
$$N = m_2 g - m_2\omega^2 x$$

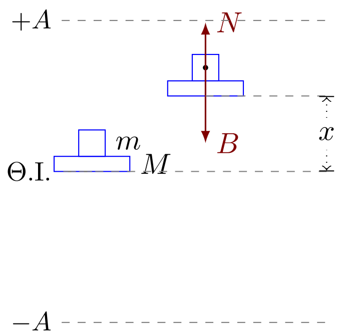
Όμως για να μην χαθεί η επαφή πρέπει να ισχύει $N \geq 0$ επομένως

$$m_2 g - m_2\omega^2 x \geq 0$$
$$x \leq \frac{g}{\omega^2}$$

Άρα η επαφή θα χαθεί αν το σώμα φτάσει σε απομάκρυνση $x = \frac{g}{\omega^2}$.
Και επειδή $x \in [-A, +A]$ αν θέλουμε το μέγιστο πλάτος για το οποίο δεν χάνεται η επαφή θα πρέπει:

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \tag{1.10}$$

▷ Κατακόρυφη ταλάντωση β′



Σώμα μάζας M μπορεί να εκτελεί α.α.τ. σταθερού πλάτους A και ρυθμιζόμενης συχνότητας ω Πάνω στο σώμα M βρίσκεται σε επαφή δεύτερο σώμα m.
Σε ποια θέση το σώμα m θα χάσει τη επαφή του με το σώμα M;
Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα που μπορούμε να πετύχουμε για την οποία το σώμα m δεν χάνει την επαφή του κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης;

Και τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{D}{M+m}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m είναι $D_2 = m\omega^2$ και αφού και αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$

Από το σχήμα έχουμε:

$$\Sigma F = -D_2 x \Leftrightarrow N - B = -D_2 x$$
$$N = m_2 g - m_2 \omega^2 x$$

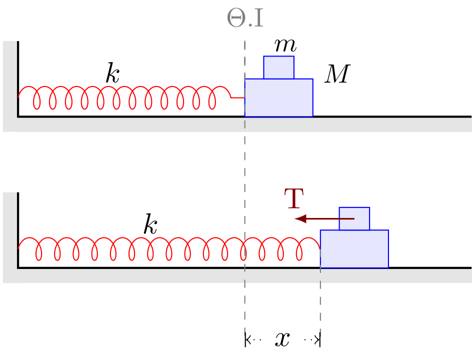
Όμως για να μην χαθεί η επαφή πρέπει να ισχύει $N \geq 0$ επομένως

$$m_2 g - m_2 \omega^2 x \geq 0$$
$$x \leq \frac{g}{\omega^2}$$

Άρα η επαφή θα χαθεί όταν (αν) το σώμα φτάσει σε απομάκρυνση $x = \dfrac{g}{\omega^2}$.
Και επειδή $x \in [-A, +A]$ αν θέλουμε τη μέγιστη συχνότητα για την οποία δεν χάνεται η επαφή θα πρέπει:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{A}} \tag{1.11}$$

▷ Ολίσθηση σώματος



Στο διπλανό σχήμα το σώμα m βρίσκεται πάνω στο σώμα M που είναι δεμένο σε ελατήριο στ-θεράς k. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ, ενώ το έδαφος είναι λείο. Το σώμα M μετατοπίζεται κατά x και το σύστημα αφήνεται να κάνει α.α.τ.
Ποια είναι η μέγιστη μετατόπιση του σώματος M για την οποία το σώμα m δεν ολισθαίνει;

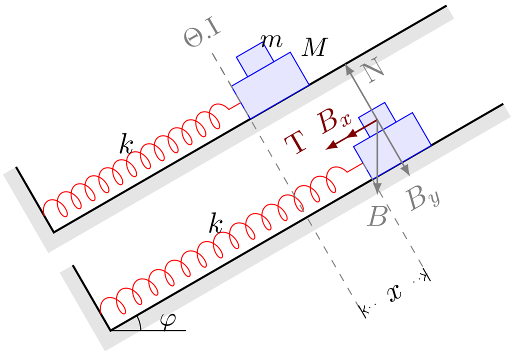
Και τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m είναι $D_2 = m\omega^2$ και αφού και αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$
Στη θέση με απομάκρυνση x το σύστημα έχει επιτάχυνση α προς τη θ.Ι. της ταλάντωσης. Επομένως

$$-T = -m_2 \alpha$$
$$T = m\omega^2 x$$

Όμως για τη στατική τριβή ισχύει $T \leq \mu N \Leftrightarrow T \leq \mu m g$ άρα

$$m\omega^2 x \leq \mu m g$$
$$x \leq \frac{\mu g}{\omega^2}$$
$$x \leq \frac{\mu(m+M)g}{K} \tag{1.12}$$

▷ Ολίσθηση σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο



Στο διπλανό σχήμα το σώμα m βρίσκεται πάνω στο σώμα M που είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ, ενώ το έδαφος είναι λείο. Το σώμα M μετατοπίζεται κατά x και το σύστημα αφήνεται να κάνει α.α.τ.
Ποια είναι η μέγιστη μετατόπιση του σώματος M για την οποία το σώμα m δεν ολισθαίνει;

Όσο τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. ως ένα σώμα έχουν κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m είναι $D_2 = m\omega^2$ και αφού καί αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$
Από την ανάλυση του βάρους σε άξονες έχουμε

$$B_x = -mg\eta\mu\varphi$$
$$B_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

και

$$\Sigma F_y =$$
$$B_y = N$$

Στη θέση με απομάκρυνση x το σύστημα έχει επιτάχυνση α προς τη θ.Ι. της ταλάντωσης. Αν $\alpha \geq B_x/m$ ή $x \geq \frac{g\eta\mu\varphi}{\omega^2}$ τότε η τριβή έχει τη φορά της $\vec{B}_x$. Επομένως

$$\Sigma F_x = m\alpha$$
$$-T - mg\eta\mu\varphi = -m\alpha$$
$$T = m\omega^2 x - mg\eta\mu\varphi$$

Όμως για τη στατική τριβή ισχύει $T \leq \mu N \Leftrightarrow T \leq \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ άρα

$$m\omega^2 x - mg\eta\mu\varphi \leq \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$
$$x \leq \frac{\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi + g\eta\mu\varphi}{\omega^2}$$
$$x \leq \frac{(m+M)(\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi + g\eta\mu\varphi)}{K} \tag{1.13}$$

Αν στην αρχική θέση ισχύει Αν $\alpha \leq B_x$ ή ή $x \leq \frac{g\eta\mu\varphi}{\omega^2}$ τότε η φορά της στατικής τριβής είναι αντίθετη αυτής της $\vec{B}_x$ και στο τελικό αποτέλεσμα θα έχουμε

$$x \geq \frac{(m+M)(g\eta\mu\varphi - \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi)}{K} \tag{1.14}$$

Όταν το σώμα περάσει τη Θ.Ι. η επιτάχυνση αλλάζει φορά και είναι αντίθετη της $\vec{B}_x$. Τότε σίγουρα η στατική τριβή έχει της φορά της επιτάχυνσης (θετική) και με τον ίδιο τρόπο προκύπτει:

$$x \leq \frac{(m+M)(\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi - g\eta\mu\varphi)}{K} \tag{1.15}$$

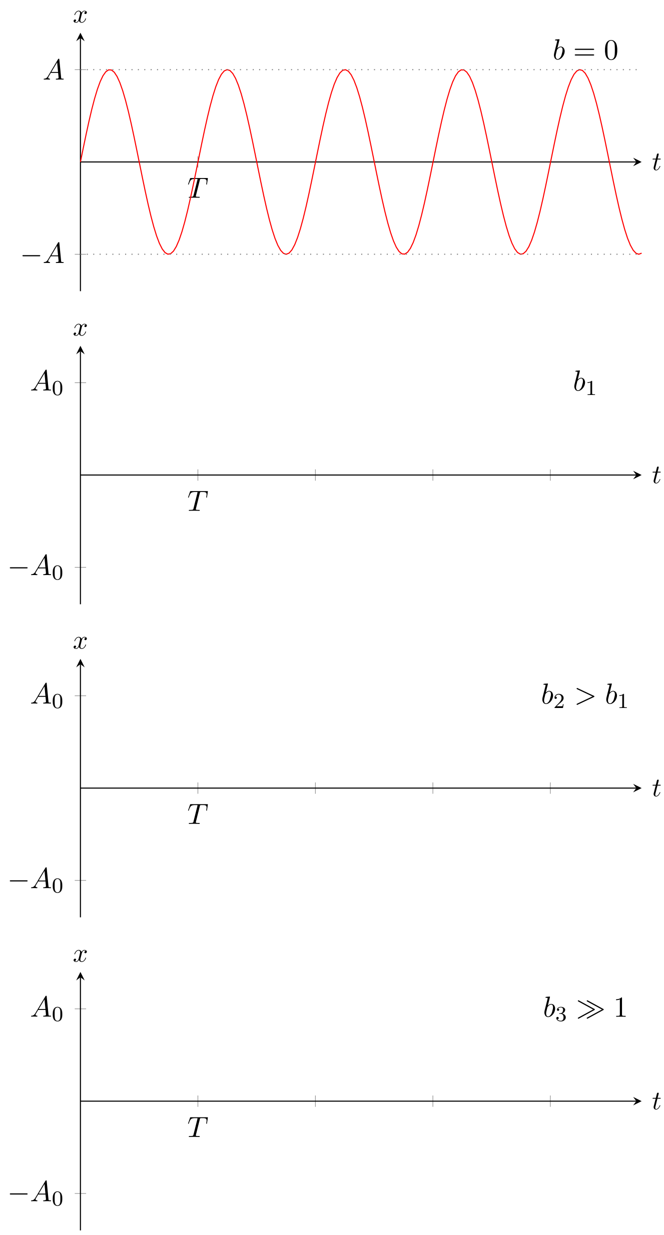
Από τις (1.13) και (1.15) προκύπτει ότι το μέγιστο x θα δίνεται από τη σχέση (1.15).

1.2 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

Τι μορφή έχει η δύναμη αντίστασης σε μία φθίνουσα ταλάντωση;

Τι ξέρουμε για την περίοδο σε μία φθίνουσα ταλάντωση με δεδομένη σταθερά απόσβεσης b;

Να συμπληρωθούν οι καμπύλες για τις παρακάτω φθίνουσες ταλαντώσεις στο ίδιο σύστημα για τις διάφορες τιμές της σταθερά απόσβεσης b.



Πώς ονομάζεται η κίνηση του συστήματος όταν $b \gg 1$;

Η εξίσωση που δίνει το πλάτος σε μία φθίνουσα ταλάντωση είναι: $A =$

Ο λόγος των πλατών στο τέλος της $1^{ης}$, $2^{ης}$, ... περιόδου είναι: $\dfrac{A_0}{A_1} =$

Ο λόγος των ενεργειών ταλάντωσης στο τέλος της $1^{ης}$, $2^{ης}$, ... περιόδου είναι: $\dfrac{E_0}{E_1} =$

Η εξίσωση που δίνει την εκθετική μείωση της ενέργειας σε μία φθίνουσα ταλάντωση είναι: $E =$

Η σταθερά Λ εξαρτάται από (α) και (β)

Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις τον ρόλο της σταθεράς απόσβεσης b τον παίζει:

Το έργο της αντίστασης μπορεί να βρεθεί με τη μείωση της
$W_{\mathrm{F'}} =$

Ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της ενέργειας ταλάντωσης είναι ίσος με τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας από την δύναμη αντίστασης, επομένως
$\dfrac{\Delta E_{\alpha\pi}}{\Delta t} = P_{\mathrm{F'}} =$

Αν E_0 είναι η ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ και κάποια άλλη χρονική στιγμή η ενέργεια είναι E τότε το ποσοστό απώλειας ενέργειας είναι:
$\pi\% =$
ενώ το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι:
$\pi\% =$
Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας που έγινε θερμότητα λόγω της αντίστασης είναι:
$\pi\% =$

1.3 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

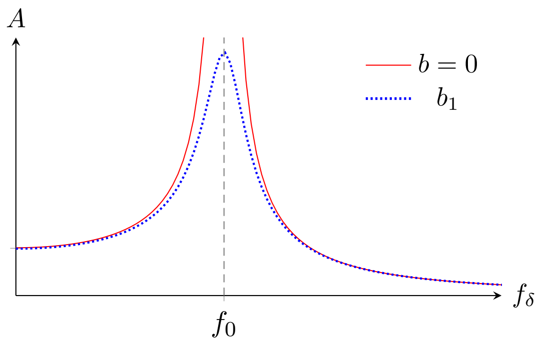
Ποιος είναι ο λόγος που συχνά χρησιμοποιούμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις;

Τι είδους δύναμη πρέπει να δρα στο σύστημα ώστε να έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση;

Ένα σύστημα έχει ιδιοσυχνότητα f_0, δέχεται δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$ και κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με τον διεγέρτη να έχει συχνότητα f_δ. Με ποια συχνότητα κάνει ταλάντωση το σύστημα;

Τι κάνει το πλάτος της ταλάντωσης στην εξαναγκασμένη ταλάντωση για μία δεδομένη τιμή της συχνότητας f_δ; Πως εξηγείται αυτό ενεργειακά;

Να συμπληρωθούν οι καμπύλες για σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις στο ίδιο σύστημα για τις διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης b μεγαλύτερες της b_1.



Πότε έχουμε συντονισμό σε ένα σύστημα που κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση;

Με ποιο τρόπο πετυχαίνουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση σε ένα RLC κύκλωμα;

Γιατί έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους στον συντονισμό;

Ένα σύστημα έχει ιδιοσυχνότητα f_0 (ω_0) και κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με τον διεγέρτη να έχει συχνότητα f_δ. Με ποια συχνότητα ω κάνει ταλάντωση το σύστημα;

Ποια είναι τότε η μέγιστη ταχύτητα όταν περνάει από τη Θ.Ι.;

Ποια είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{\max}$ τότε;

Η ιδιοσυχνότητα f_0 ενός συστήματος δίνεται από τον τύπο $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{D}{m}}$ επομένως ισχύει πάλι $D = m\omega_0^2$. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια $U_{\max}$ του συστήματος θα είναι:

Τι παρατηρούμε για τις μέγιστες ενέργειες $K_{\max}$ και $U_{\max}$ στην εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν $\omega_0 \neq \omega_\delta$;

Ισχύει για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις η γνωστή σχέση $E = K + U$, όπου $E = K_{\max}$ ή $E = U_{\max}$; Πότε ισχύει $K_{\max} = U_{\max}$;

1.4 Σύνθεση Ταλαντώσεων

▷ Ταλάντωση με ίδια συχνότητα ...
Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις

$$x_1 = A_1 ημωt$$
$$x_2 = A_2 ημ(ωt + φ)$$

Σύμφωνα με την αρχή της η απομάκρυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή θα είναι

$$x = x_1 + x_2 \tag{1.16}$$

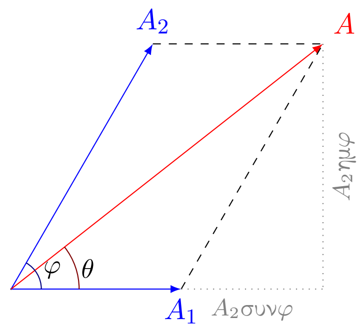
και η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\boxed{x = Aημ(ωt + θ)} \tag{1.17}$$

όπου:

$$A = \sqrt{\qquad} \tag{1.18}$$

$$εφθ = \frac{\qquad}{\qquad} \tag{1.19}$$



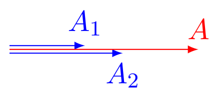
Η θέση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η φάση της ταλάντωσης x_2 είναι μεγαλύτερη κατά $φ$ από αυτή της x_1.

Η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι $θ$ σε σχέση με την φάση της x_1.

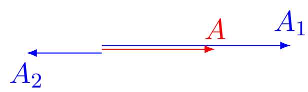
Από το ορθογώνιο τρίγωνο φαίνεται η εξήγηση του τύπου εύρεσης του πλάτους αλλά και της φάσης $θ$ της συνισταμένης ταλάντωσης.

Ειδικές περιπτώσεις

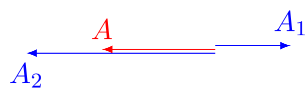
- Όταν $φ = 0$ τότε $\begin{cases} A = A_1 + A_2 \\ θ = 0 \end{cases}$



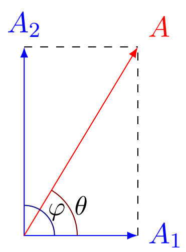
- Όταν $φ = π$ και $A_1 > A_2 \Rightarrow \begin{cases} A = A_1 - A_2 \\ θ = 0 \end{cases}$



- Όταν $φ = π$ και $A_1 < A_2 \Rightarrow \begin{cases} A = A_2 - A_1 \\ θ = π \end{cases}$



- Όταν $φ = \frac{π}{2}$ δηλαδή $\begin{cases} x_1 = A_1 ημωt \\ x_2 = A_2 ημ(ωt + \frac{π}{2}) \end{cases}$



τότε:

$A =$

$εφθ =$

▷ Ταλάντωση με ίδια πλάτη και διαφορετικές συχνότητες ...
Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις

$$x_1 = Aημω_1 t$$
$$x_2 = Aημω_2 t$$

Τότε η απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{x = \qquad\qquad\qquad} \tag{1.20}$$

▷ Ταλάντωση με ίδια πλάτη και παραπλήσιες συχνότητες ...(διακρότημα)
Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις

$$x_1 = Aημω_1 t$$
$$x_2 = Aημω_2 t$$

όπου $ω_1 \approx ω_2$.
Τότε η απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{x = A' ημ\bar{ω}t} \tag{1.21}$$

Όπου: $A' =$

και $\bar{ω} =$

Το πλάτος A' της σύνθετης ταλάντωσης μεταβάλλεται αργά από μέχρι και η κίνηση λέμε ότι παρουσιάζει *διακροτήματα*.

Περίοδος διακροτήματος $T_δ$ ονομάζεται ο χρόνος

και ισχύει: $T_δ =$

ενώ η συχνότητα των διακροτημάτων είναι $f_δ =$

▷ Πόσες πλήρεις ταλαντώσεις κάνει το σώμα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους:
Η Συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f = \bar{f} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ άρα η περίοδος $T = \dfrac{2}{f_1 + f_2}$ ενώ η περίοδος διακροτήματος $T_δ = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$.
Επειδή $T_δ = NT$ θα είναι:
$N =$

1.5 Βασικές ερωτήσεις - ασκήσεις

1.5.1 Εξισώσεις ταλάντωσης - Αρχική φάση

1. Να βρεθεί η αρχική φάση της ταλάντωσης όταν το σώμα που κάνει α.α.τ. τη χρονική στιγμή $t = 0$
   (α΄) Περνάει από τη Θ.Ι. με αρνητική ταχύτητα.
   (β΄) Βρίσκεται στην θέση $x = -A$.
   (γ΄) Βρίσκεται στην θέση $x = \frac{A}{2}$ με $\upsilon > 0$.
   (δ΄) Βρίσκεται στην θέση $x = -\frac{A}{2}$ με $\upsilon < 0$.
   (ε΄) Βρίσκεται στην θέση $x = \frac{\sqrt{2}}{2}A$ με $\upsilon < 0$.
   (Ϛ΄) Βρίσκεται στην θέση $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$ με $\upsilon > 0$.
   (ζ΄) Βρίσκεται στην θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$ με $\upsilon < 0$.

2. Η απόσταση δύο ακραίων θέσεων ταλάντωσης ενός σώματος είναι 30 cm και ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί από την μία ακραία θέση στην άλλη το σώμα είναι 0,25 s. Να βρεθούν το πλάτος, η συχνότητα και τ μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης.

3. Σώμα κάνει α.α.τ. και διέρχεται 20 φορές από τη θέση ισορροπίας του κάθε δευτερόλεπτο, έχοντας μέτρο ταχύτητας 8π m/s.
   (α΄) Να βρεθούν το πλάτος και η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
   (β΄) Να βρεθεί ο χρόνος για μετάβαση από τη θέση ισορροπίας μέχρι την ακραία θέση της ταλάντωσής του.

4. Σώμα κάνει α.α.τ. με συχνότητα $f = 2\,Hz$ και μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_0 = 8\,m/s$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση -0,1 m και η ταχύτητά του είναι αρνητική. Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης, σε συνάρτηση με τον χρόνο.

5. Σώμα κάνει α.α.τ. με πλάτος 0,4 m και κυκλική συχνότητα 2π rad/s. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0,2\sqrt{2}$ m με αρνητική ταχύτητα.
   (α΄) Να γραφούν οι εξισώσεις $\upsilon = f(t)$ και $\alpha = f(t)$.
   (β΄) Πόσο διάστημα έχει διατρέξει το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2.25$ s;

1.5.2 Χρονική στιγμή - χρονική διάρκεια

6. Σώμα εκτελεί α.α.τ. με περίοδο 2 s. Να βρεθεί ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για τη μετάβαση:
   (α΄) από τη θέση $x = +A$ στη θέση $x = -\frac{A}{2}$
   (β΄) από τη θέση ισορροπίας με $\upsilon > 0$ στη θέση $x = \frac{A}{2}$
   (γ΄) από τη θέση $x = +\frac{A}{2}$ με $\upsilon > 0$ στην ακραία $x = +A$
   (δ΄) από τη θέση $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ με $\upsilon > 0$ στη θέση $x = +\frac{A}{2}$

7. Σώμα εκτελεί α.α.τ. χωρίς αρχική φάση και στη διάρκεια της πρώτης ημιπεριόδου του διέρχεται δύο φορές από τη θέση $x = +A/2$. Αν μεταξύ των στιγμών αυτών μεσολαβεί χρονικό διάστημα 0,2/3 s, να βρεθεί η συχνότητα της ταλάντωσης.

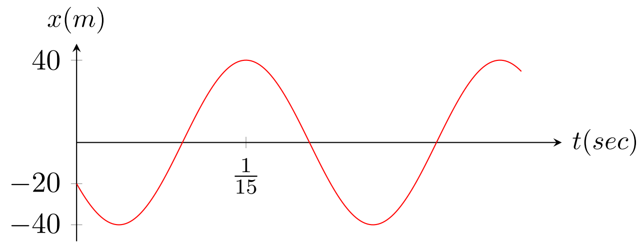
8. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $x = 0,4ημ20\pi t$ (S.I.).
   (α΄) Να βρεθεί η συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης.
   (β΄) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης.
   (γ΄) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που το σώμα θα έχει απομάκρυνση $x = 0,2$ για τρίτη φορά καθώς και η ταχύτητά του τότε.

9. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30}$ s η ταχύτητά του γίνεται για πρώτη φορά μέγιστη, ίση με 2 m/s, και τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{12}$ s η ταχύτητα μηδενίζεται για πρώτη φορά.
   (α΄) Να βρεθεί το πλάτος και η περίοδος της ταλάντωσης.
   (β΄) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης.

10. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s περνάει από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα -4 m/s, και τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{15}$ s η ταχύτητα μηδενίζεται για πρώτη φορά.
    (α΄) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης.
    (β΄) Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διένυσε το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 0,3\pi$ s.

11. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $\omega = 2\pi/3$ r/s. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0.3$ m με θετική ταχύτητα και 0,5 s μετά φτάνει για πρώτη φορά στην ακραία του θέση. Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης.

12. Υλικό σημείο κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυσή του συναρτήσει του χρόνου $x = f(t)$ φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

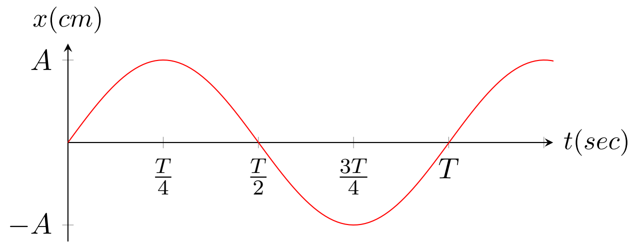


    (α΄) Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου.
    (β΄) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. του για πέμπτη φορά.

13. Υλικό σημείο κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $x = 10ημ(10\pi t + \frac{2\pi}{3})$ (S.I.).
    (α΄) Να γραφεί η εξίσωση ταχύτητας και επιτάχυνσης του σώματος.
    (β΄) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου.
    (γ΄) Να βρεθεί η χρονική στιγμή που φτάνει για πρώτη φορά σε μία ακραία θέση της κίνησής του.

1.5.3 Διαγράμματα

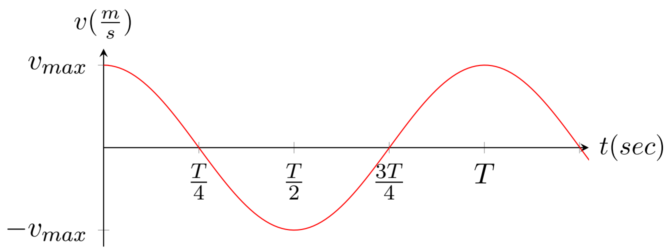
14. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης $x = f(t)$ ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.



(α΄) Ποιες χρονικές στιγμές έχουμε θετική επιτάχυνση και ποιες αρνητική επιτάχυνση;

(β΄) Ποια χρονικά διαστήματα έχουμε θετική και ποια αρνητική ταχύτητα;

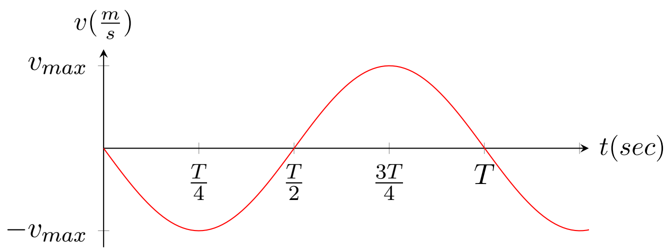
15. Η ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου $v = f(t)$ ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



(α΄) Ποια χρονικά διαστήματα έχουμε θετική απομάκρυνση;

(β΄) Ποια χρονικά διαστήματα έχουμε αρνητική επιτάχυνση;

16. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της ταχύτητας $v = f(t)$ ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.



(α΄) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται:

i. στη Θ.Ι. ii. στη θέση $x = +A$ iii. στη θέση $x = -A$

Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

(β΄) Τη χρονική στιγμή $t = \frac{3T}{4}$:

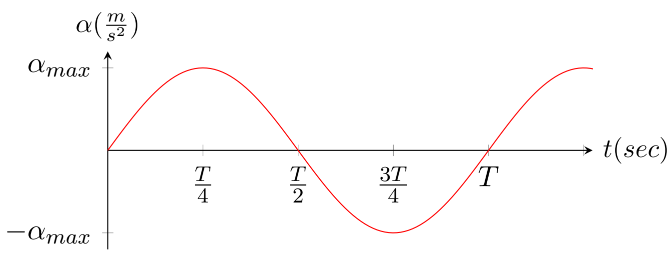
i. Η επιτάχυνση του σώματος είναι μέγιστη.

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι μηδέν.

iii. Το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = +A$.

Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

17. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της επιτάχυνσης $\alpha = f(t)$ ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

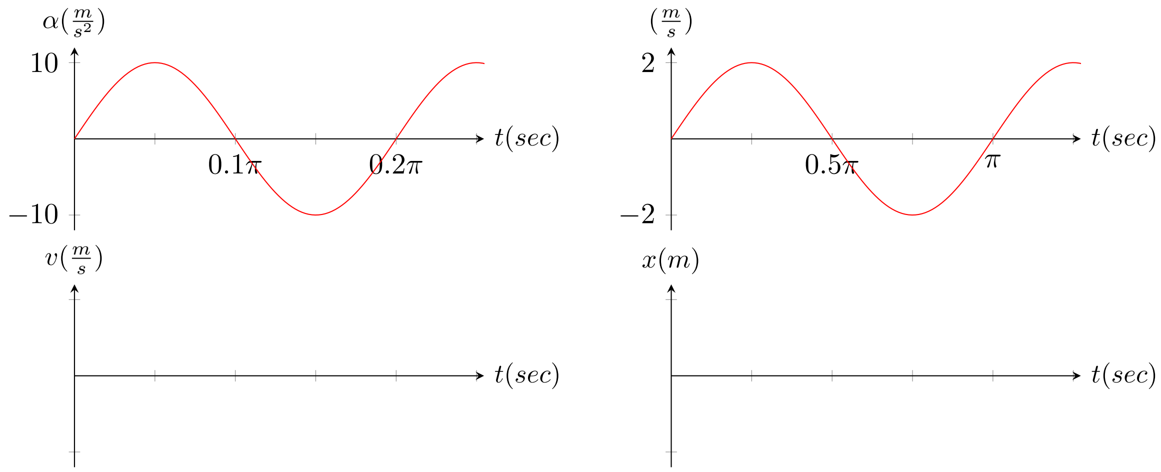


(α΄) Ποιές χρονικές στιγμές έχουμε μέγιστη θετική και μέγιστη αρνητική ταχύτητα;

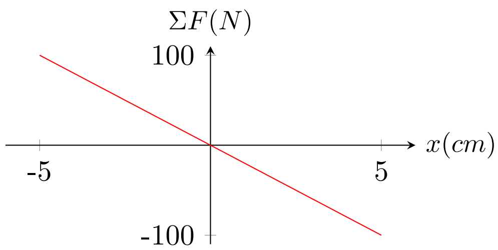
(β΄) Ποιές χρονικές στιγμές το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση;

(γ΄) Ποιές χρονικές στιγμές το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας;

18. Να συμπληρωθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα.



19. Στο σχήμα παριστάνεται η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = f(x)$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, ενός σώματος μάζας $m = 20\,Kg$ που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.



(α΄) Η σταθερά επαναφοράς του είναι:

i. 20 ii. 500 iii. 2000 iv. $\dfrac{1}{20}$

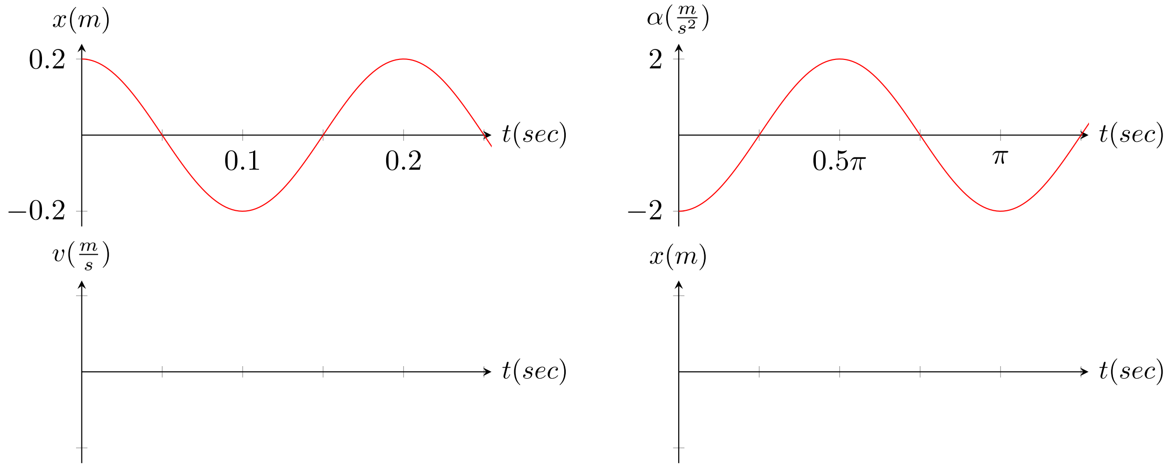
(β΄) Η μέγιστη ταχύτητά του είναι

i. 0,5 $\dfrac{m}{s}$ ii. 5 $\dfrac{m}{s}$ iii. 50 $\dfrac{m}{s}$ iv. 10 $\dfrac{m}{s}$

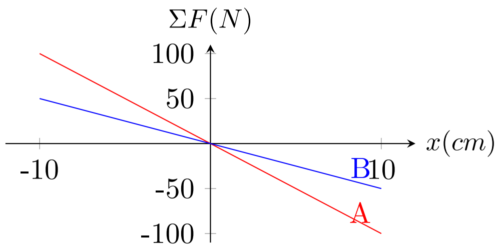
(γ΄) Η μέγιστη επιτάχυνσή του είναι

i. 0,5 $\dfrac{m}{s^2}$ ii. 5 $\dfrac{m}{s^2}$ iii. 50 $\dfrac{m}{s^2}$ iv. 10 $\dfrac{m}{s^2}$

20. Να συμπληρωθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα.



21. Η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = f(x)$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, δύο σωμάτων ίσων μαζών, που κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(α΄) Ο λόγος των σταθερών ταλάντωσης $\dfrac{D_A}{D_B}$ είναι:

i. $\dfrac{1}{2}$ ii. $\dfrac{2}{1}$ iii. $\dfrac{5}{1}$

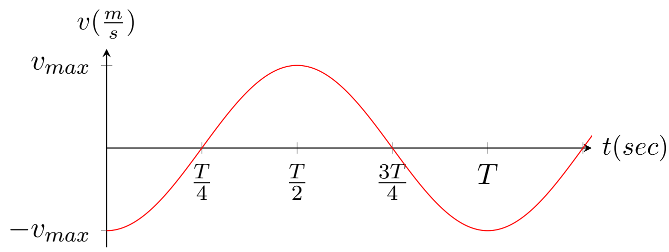
(β΄) Ο λόγος των συχνοτήτων των δύο ταλαντώσεων $\frac{f_A}{f_B}$ είναι:

i. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ii. $\sqrt{2}$ iii. 2

(γ΄) Ο λόγος των μεγίστων κινητικών ενεργειών των δύο ταλαντώσεων $\dfrac{K_{A,max}}{K_{B,max}}$ είναι:

i. $\dfrac{1}{2}$ ii. $\dfrac{2}{1}$ iii. $\dfrac{5}{1}$

22. Στο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας $v = f(t)$ ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.



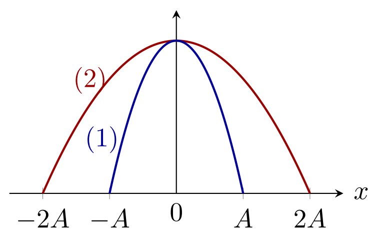
(α΄) Ποιές χρονικές στιγμές το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας;

(β΄) Σε ποιές χρονικές στιγμές έχουμε μέγιστη δυναμική ενέργεια και σε ποιές μηδέν;

(γ΄) Ποιές χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστη θετική και ποιές μέγιστη αρνητική η επιτάχυνση;

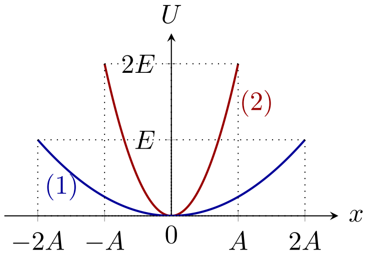
(δ΄) Ποιά είναι η αρχική φάση της ταλάντωσης;

23. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η κινητική ενέργεια δύο σωμάτων (1) και (2) που εκτελούν α.α.τ. Αν D_1 και D_2 είναι οι σταθερές επαναφοράς των δύο ταλαντωτών τότε ο λόγος $\dfrac{D_1}{D_2}$ είναι:



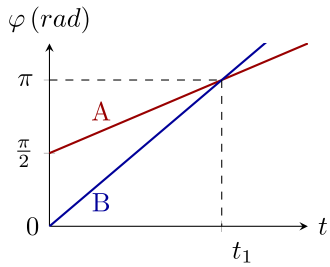
(α΄) $\frac{1}{2}$ (β΄) 2 (γ΄) 4

24. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η κινητική ενέργεια δύο σωμάτων (1) και (2) ίσων μαζών που εκτελούν α.α.τ. Αν ω_1 και ω_2 είναι οι κυκλικές συνχότητες των δύο ταλαντωτών τότε ο λόγος $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ είναι:



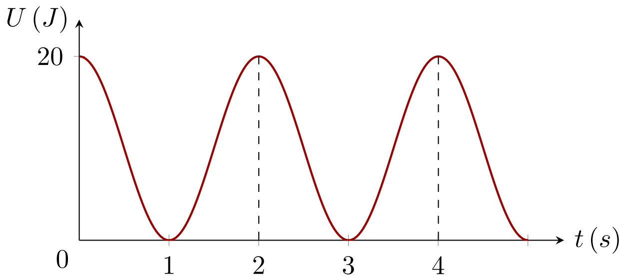
(α΄) $\frac{1}{8}$ (β΄) $2\sqrt{2}$ (γ΄) 8

25. Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2, όπου $m_1 = 2m_2$, κάνουν α.α.τ. και η γραφικές παραστάσεις της φάσης τους σε σχέση με τον χρόνο φαίνεται στο κοινό διάγραμμα του σχήματος. Η σχέση των σταθερών επαναφοράς των δύο ταλαντώσεων είναι:



(α΄) $D_1 = 2D2$ (β΄) $D_2 = 2D_1$ (γ΄) $D_2 = 4D_1$

26. Σώμα μάζας $m = 1$kg εκτελεί α.α.τ. και η χρονική εξέλιξη της δυναμικής του ενέργειας δίνεται στο διάγραμμα του σχήματος. Θεωρήστε $\pi \approx 10$.



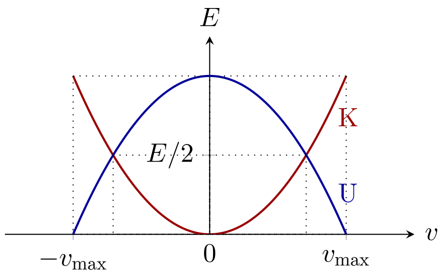
(α΄) Να βρεθεί η περίοδος και η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης.

(β΄) Υπολογίστε την αρχική φάση της ταλάντωσης αν δίνεται ότι αμέσως μετά την χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι αρνητική.

(γ΄) Γράψτε τις χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και συνισταμένης δύναμης.

(δ΄) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3$sec το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας. Τότε η ταχύτητά του είναι θετική ή αρνητική;

27. Σώμα κάνει α.α.τ. και η κινητική και δυναμική του ενέργεια ως συνάρτηση της ταχύτητας v παριστάνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

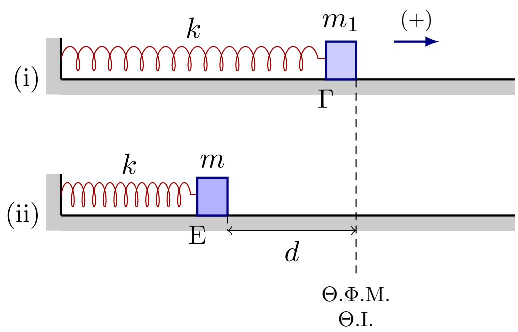


(α΄) Να δικαιολογηθεί γιατί το σημείο τομής της κινητικής και δυναμικής ενέργειας έχει y συντεταγμένη $E/2$.

(β΄) Να βρεθεί η x συντεταγμένη του σημείου τομής, δηλαδή η ταχύτητα v_1 στην οποία $K = U$.

1.5.4 Ελατήρια

28. Σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 100\,\mathrm{N/m}$ βρίσκεται δεμένο σώμα μάζας $m = 4\,\mathrm{kg}$ που ισορροπεί. Συμπιέζουμε το σώμα κατά $d = 10\,\mathrm{cm}$ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Να υπολογίσετε:

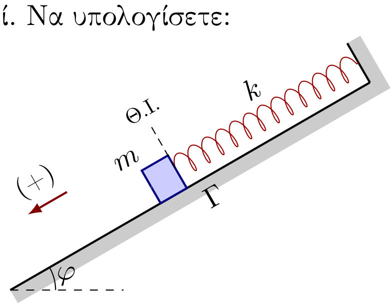


(α΄) Το πλάτος της ταλάντωσης, τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

(β΄) Την αρχική φάση της ταλάντωσης.

(γ΄) Την ταχύτητα όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -0.05\sqrt{3}\,\mathrm{m}$.

29. Σε ελατήριο σταθεράς $k = 50\,\mathrm{N/m}$ βρίσκεται δεμένο σώμα μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$ που ισορροπεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30°$. Απομακρύνουμε το σώμα κατά $d = 20\,\mathrm{cm}$ προς τα κάτω και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Να υπολογίσετε:



(α΄) Την απόσταση της θέσης φυσικού μήκους Θ.Φ.Μ. από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι.

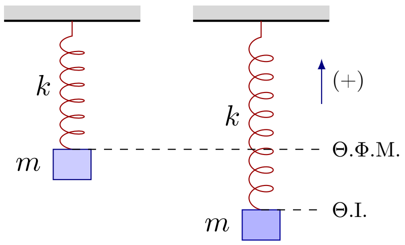
(β΄) Το πλάτος της ταλάντωσης και τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

(γ΄) Την αρχική φάση της ταλάντωσης.

(δ΄) Την κινητική ενέργεια του σώματος όταν αυτό βρίσκεται στη θέση $x = 0.1\sqrt{2}\,\mathrm{m}$.

(ε΄) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής τις χρονικές στιγμές που η ταχύτητα του σώματος είναι 0,5 m/s.

30. Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 400\,\mathrm{N/m}$ βρίσκεται δεμένο σώμα μάζας $m = 4\,\mathrm{kg}$. Απομακρύνουμε το σώμα μέχρι τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Να υπολογίσετε:



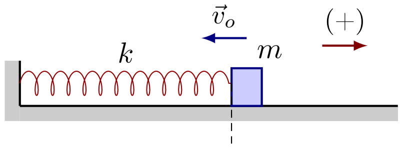
(α′) Τον χρόνο στον οποίο τα σώμα θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας.

(β′) Την εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης.

(γ′) Την μέγιστη δύναμη του ελατηρίου.

(δ′) Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{2\pi}{15}\,\mathrm{s}$.

31. Σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 100\,\mathrm{N/m}$ βρίσκεται δεμένο σώμα μάζας $m = 4\,\mathrm{kg}$ που ισορροπεί. Δίνουμε στο σώμα ταχύτητα $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ προς τα αριστερά και το σώμα κάνει α.α.τ. Να υπολογίσετε:



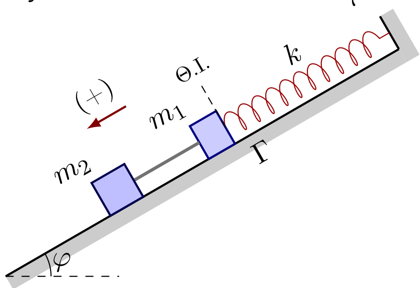
(α′) Τη χρονική στιγμή που το σώμα θα φτάσει για πρώτη φορά στη θέση $x = +A$.

(β′) Την εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης.

(γ′) Την δύναμη του ελατηρίου στις θέσεις όπου η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική.

(δ′) Τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{20\pi}{3}\,\mathrm{s}$.

32. Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30^\circ$ βρίσκεται ελατήριο σταθεράς $k = 100\mathrm{N}$. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ και δεύτερο σώμα $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$ είναι συνδεδεμένο με το πρώτο μέσω νήματος. Κάποια στιγμή που τη θεωρούμε $t = 0$ κόβουμε το νήμα και το σώμα m_2 απομακρύνεται γλυστρώντας προς τα κάτω ενώ το άλλο σώμα κάνει α.α.τ.



Να υπολογίσετε:

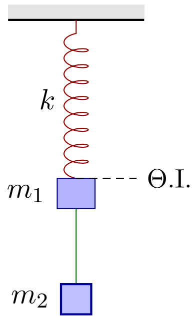
(α′) Την αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου και την τάση του νήματος.

(β′) Την εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του σώματος m_1.

(γ′) Την απόσταση των δύο σωμάτων όταν η ταχύτητα του m_1 μηδενιστεί για πρώτη φορά, αν δίνεται ότι το αρχικό μήκος του νήματος ήταν 10 cm.

(δ′) Την απομάκρυνση x_1 του m_1 όταν η ταχύτητά του είναι $v_1 = \frac{v_{\max}}{2}$.

33. Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N}$ που το πάνω άκρο του είναι στερεωμένο στην οροφή είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\text{kg}$ ενώ δεύτερο σώμα $m_2 = 4\,\text{kg}$ είναι συνδεδεμένο με το πρώτο μέσω νήματος. Το όλο σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί. Κάποια στιγμή που τη θεωρούμε $t = 0$ κόβουμε το νήμα και το σώμα m_2 απομακρύνεται πέφτοντας προς τα κάτω ενώ το άλλο σώμα κάνει α.α.τ.



Να υπολογίσετε, θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω:

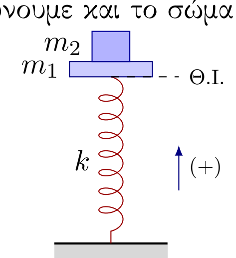
(α΄) Την αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου και την τάση του νήματος.

(β΄) Την εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του σώματος m_1.

(γ΄) Την απόσταση των δύο σωμάτων όταν η ταχύτητα του m_1 μηδενιστεί για πρώτη φορά, αν δίνεται ότι το αρχικό μήκος του νήματος ήταν 10 cm.

(δ΄) Την κινητική ενέργεια και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του m_1 όταν η απομάκρυνσή του είναι $x_1 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$ για πρώτη φορά.

34. Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N}$ που το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο στο έδαφος είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\text{kg}$ ενώ δεύτερο σώμα $m_2 = 4\,\text{kg}$ είναι τοποθετημένο πάνω στο πρώτο. Το όλο σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί. Κάποια στιγμή που τη θεωρούμε $t = 0$ αφαιρούμε απότομα το σώμα m_2 και το απομακρύνουμε και το σώμα m_1 κάνει α.α.τ.



Να υπολογίσετε, θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω:

(α΄) Την δύναμη του ελατηρίου στην αρχική ισορροπία των δύο σωμάτων.

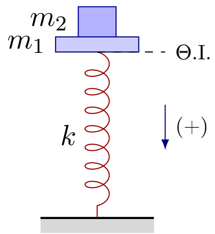
(β΄) Την εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του σώματος m_1.

(γ΄) Την κινητική ενέργεια και τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του m_1 όταν η απομάκρυνσή του είναι $x_1 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$ για πρώτη φορά.

(δ΄) Την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

35. Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 400\text{N}$ που το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο στο έδαφος είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\text{kg}$ και ισορροπεί. Ένα δεύτερο σώμα $m_2 = 4\,\text{kg}$ τοποθετείται πάνω στο πρώτο χωρίς αρχική ταχύτητα, κάποια στιγμή που τη θεωρούμε $t = 0$. Το σύστημα των δύο

σωμάτων κάνει α.α.τ.



Να υπολογίσετε, θεωρώντας θετική φορά προς τα κάτω:

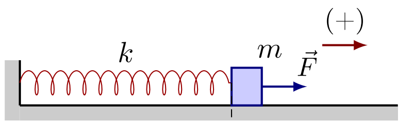
(α΄) Την περίοδο και την μέγιστη ταχύτητα των δύο σωμάτων.

(β΄) Την εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης.

(γ΄) Τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν η απομάκρυνσή του είναι $x_1 = -\dfrac{A\sqrt{2}}{2}$ για πρώτη φορά.

(δ΄) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης που ασκεί το m_1 στο m_2 συναρτήσει της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας, και να δείξετε ότι δεν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

36. Σε λείο οριζόντιο δάπεδο τοποθετούμε ελατήριο σταθεράς $k = 100\,\mathrm{N/m}$ και το άκρο του δένουμε σώμα μάζας $m = 4\,\mathrm{kg}$ που ισορροπεί. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ξαφνικά ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη προς τα δεξιά με μέτρο $F = 40\mathrm{N}$.



(α΄) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα κάνει α.α.τ.

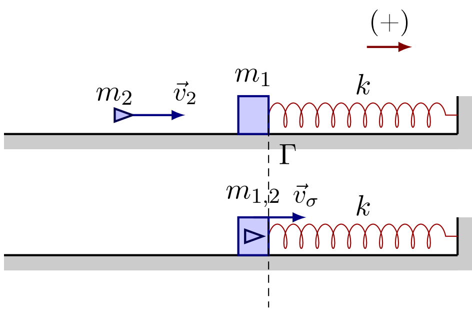
(β΄) Να βρείτε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης.

(γ΄) Βρείτε την εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης.

(δ΄) Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην δεξιά ακραία θέση, η δύναμη F καταργείται. Να υπολογίσετε το νέο πλάτος της ταλάντωσης.

1.5.5 Κρούση και ταλάντωση

37. Σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 200\mathrm{N}$ που το αριστερό άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1,5\,\mathrm{kg}$ και ισορροπεί. Ένα δεύτερο σώμα $m_2 = 500\,\mathrm{g}$ κινείται προς το πρώτο με ταχύτητα $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$, συγκρούεται πλαστικά με το πρώτο κάποια στιγμή που τη θεωρούμε $t = 0$. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει α.α.τ.



Να υπολογίσετε, θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά:

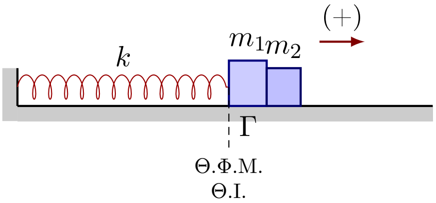
(α΄) Την περίοδο και την ενέργεια της ταλάντωσης των δύο σωμάτων.

(β΄) Την απομάκρυνση και την ταχύτητα την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{13T}{8}$.

(γ΄) Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης όταν η απομάκρυνσή του είναι $x_1 = -\dfrac{A\sqrt{2}}{2}$ για πρώτη φορά.

(δ΄) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος m_2 που παρέμεινε στο σύστημα ως ενέργεια ταλάντωσης.

38. Σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 400$N που το αριστερό άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\text{kg}$ και ισορροπεί. Ένα δεύτερο σώμα $m_2 = 3\,\text{kg}$ εφάπτεται στο πρώτο αλλά δεν είναι στερεωμένο σε αυτό. Συμπιέχουμε μόνο το σώμα m_1 κατά $d = 0.6\,\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά στη Θ.Ι. και το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει α.α.τ.



(α΄) Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που αφήσαμε το m_1 αυτό θα σθγκρουστεί με το m_2;

(β΄) Υπολογίστε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

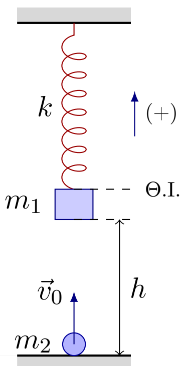
(γ΄) Βρείτε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ΄) Βρείτε την απομάκρυνση και την ταχύτητα την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{13T}{8}$.

(ε΄) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής όταν η απομάκρυνση είναι $x_1 = -\dfrac{A}{2}$ για πρώτη φορά.

(Ϛ΄) Υπολογίστε το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος m_1 που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση.

39. Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 400$N που το πάνω άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\text{kg}$ και ισορροπεί. Ένα δεύτερο σώμα $m_2 = 3\,\text{g}$ βρίσκεται στο έδαφος, που απέχει $h = 4\,\text{m}$ από το m_1, και βάλλεται κατακόρυφα προς το πρώτο με ταχύτητα $v_0 = 2\sqrt{10}\,\text{m/s}$. Τα σύο σώματα συγκρούονται πλαστικά κάποια στιγμή που τη θεωρούμε $t = 0$.



(α΄) Να αποδείξετε ότι το σύστημα των δύο σωμάτων θα κάνει α.α.τ.

(β΄) Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία συγκρούεται το m_2 στο m_1.

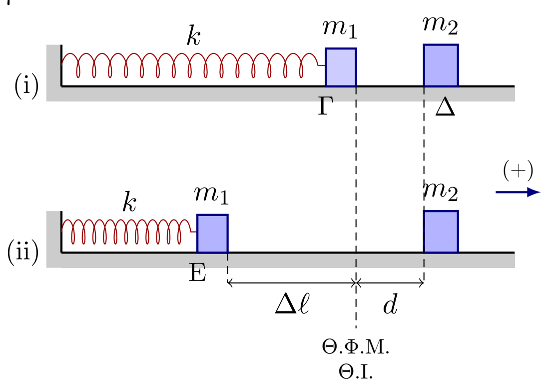
(γ΄) Βρείτε το πλάτος και τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ΄) Υπολογίστε το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

(ε΄) Υπολογίστε την επιτάχυνση του συσσωματώματος όταν η δυναμική του ενέργεια είναι τριπλάσια της κινητικής.

40. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ένα ελατήριο σταθεράς $k = 100$N που το αριστερό άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Στο άλλο άκρο του είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\text{kg}$ και

ισορροπεί. Ένα δεύτερο ακίνητο σώμα $m_2 = 3\,\text{kg}$ βρίσκεται σε απόσταση $d = 10\sqrt{3}\,\text{cm}$ από το πρώτο. αλλά δεν είναι στερεωμένο σε αυτό. Συμπιέζουμε το σώμα m_1 κατά $d = 0,2\,\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.



(α΄) Αν τα δύο σώματα συγκρούονται ελαστικά, να υπολογίσετε:

i. Τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

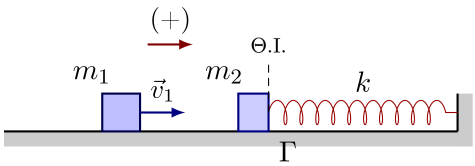
ii. Το νέο πλάτος της ταλάντωσης του σώματος m_1.

(β΄) Αν τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά, να υπολογίσετε:

i. Το ποσοστό απώλειας μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.

ii. Το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

41. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ένα ελατήριο σταθεράς $k = 300\text{N}$ που το δεξιό άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Στο άλλο άκρο του είναι δεμένο σώμα $m_2 = 3\,\text{kg}$ και ισορροπεί. Ένα δεύτερο ακίνητο σώμα $m_1 = 1\,\text{kg}$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = 10\,\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το m_2.



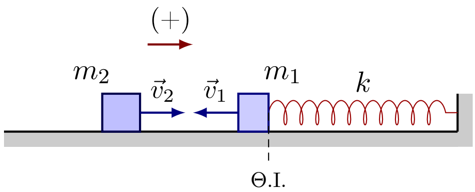
(α΄) Να βρείτε τις ττανχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

(β΄) Να βρείτε την εξίσωση ταλάντωσης του m_2.

(γ΄) Υπολογίστε τη μεταβολή της ορμής του m_1 κατά μέτρο και κατεύθυνση.

(δ΄) Να βρείτε την απόσταση των δύο σωμάτων την χρονική στιγμή που η ταχύτητες των δύο σωμάτων γίνουν ξανά ίσες, ως διανύσματα, για πρώτη φορά μετά την κρούση.

42. Σώμα μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης $x = 0,4\text{ημ}20t$ (S.I). Τη χρονική στιγμή που το m_1 διέρχεται από τη Θ.Ι. του κινούμενο κατά τη αρνητική κατεύθυνση, συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 3\text{kg}$, που κινείται με ταχύτητα μέτρου $\dfrac{4}{3}$ m/s προς τα δεξιά. Ως χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρούμε τη χρονική στιγμή της κρούσης.



(α΄) Να βρείτε τη σταθερά k του ελατηρίου και την ταχύτητα του m_1 πριν την κρούση.

(β΄) Να βρείτε την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος.

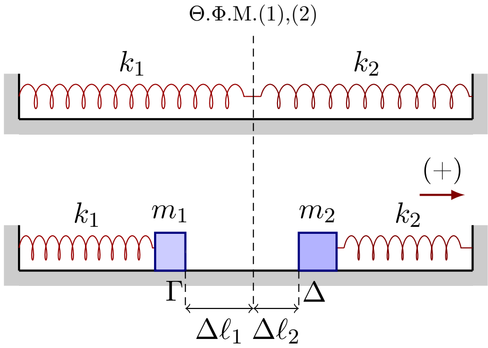
(γ΄) Πόση είναι η μεταβολή της ορμής του m_2 κατά την κρούση και πόση θερμότητα αναπτύχθηκε κατά την κρούση;

(δ΄) Να βρείτε την εξίσωση της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση:

i. σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική παράσταση,

ii. σε συνάρτηση με την ταχύτητα και να κάνετε τη γραφική παράσταση.

43. Τα δύο οριζόντια ελατήρια του Σχήματος I έχουν σταθερές $k_1 = 300\text{N/m}$ και $k_2 = 100\text{N/m}$, ενώ τα ελεύθερα άκρα τους σχεδόν εφάπτονται. Σώμα μάζας $m_1 = 3\text{kg}$ στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου (1) και εκτρέπεται προς τα αριστερά κατά $\Delta\ell_1 = 0,3\text{m}$ (θέση Δ). Σώμα μάζας $m_2 = 1\text{kg}$ στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου (2) και εκτρέπεται προς τα δεξιά κατά $\Delta\ell_2 = 0,1\text{m}$ (θέση Γ). Τα δύο σώματα αφήνονται ταυτόχρονα ελεύθερα και μετά από λίγο συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά.



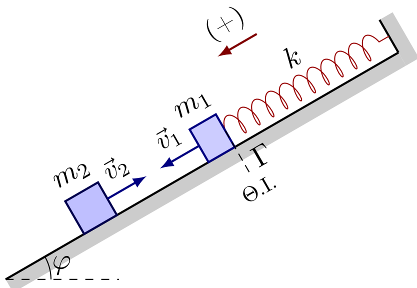
(α΄) Να βρείτε σε πόσο χρόνο και σε ποια θέση θα γίνει η σύγκρουση.

(β΄) Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος V αμέσως μετά την κρούση;

(γ΄) Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και να βρείτε: i) τη σταθερά επαναφοράς D και ii) το πλάτος της ταλάντωσής του.

(δ΄) Αν ως χρονική στιγμή t = 0 θεωρηθεί η στιγμή της κρούσης, να βρείτε την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική παράσταση.

44. Σώμα μάζας $m_1 = 1\text{kg}$ είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ και εκτελεί Α.Α.Τ. ενέργειας 4,5J. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που το m_1 διέρχεται από τη Θ.Ι. του Γ με φορά προς τα κάτω συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 3\text{kg}$, που κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_2 με φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία αμέσως μετά την κρούση.



(α΄) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας υ_2.

(β΄) Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και να βρείτε τη γωνιακή συχνότητα, την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης.

(γ΄) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ορμής στη θέση όπου το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου γίνεται ελάχιστο.

(δ΄) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ορμής του συσσωματώματος.

(ε΄) Να κάνετε το διάγραμμα της φάσης της ταχύτητας του συσσωματώματος στη διάρκεια της πρώτης περιόδου.

(Ϛ΄) Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που θα μηδενιστεί η η ταχύτητα του συσσωματώματος για πρώτη φορά να βρείτε το έργο:

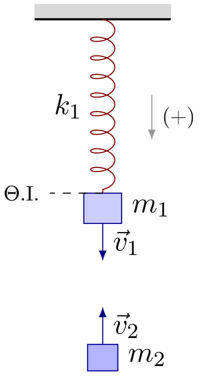
i. της συνισταμένης δύναμης,

ii. της δύναμης του ελατηρίου,

iii. του βάρους.

Δίνεται $\varphi = 30°$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

45. Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\mathrm{N}$ που το πάνω άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο είναι δεμένο σώμα $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ και εκτελεί α.α.τ. με πλάτος $A = 0.5\mathrm{m}$. Τη στιγμή που περνάει από τη Θ.Ι. του το σώμα m_1 συγκρούεται με δεύτερο σώμα $m_2 = 3\,\mathrm{g}$ που κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα v_2. Τα σύο σώματα συγκρούονται πλαστικά κάποια στιγμή που τη θεωρούμε $t = 0$ και το συσσωμάτωμα κάνει α.α.τ. με νέος πλάτος $A' = 0,3\sqrt{2}$.



(α΄) Να βρείτε τις ταχύτητες των σωμάτων και του συσσωματώματος.

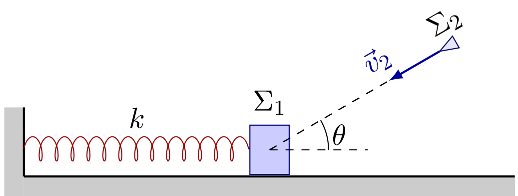
(β΄) Να βρείτε τη γωνιακή συχνότητα, την περίοδο και το πλάτος της νέας ταλάντωσης.

(γ΄) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ορμής του συσσωματώματος.

(δ΄) Να βρείτε την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα σε αυτή τη θέση.

Δίνεται $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

46. Σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 100\mathrm{N/m}$ ισορροπεί σώμα $M = 1.8\mathrm{kg}$. Βλήμα μάζας $m = 0,2\mathrm{kg}$ κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}$, η οποία σχηματίζει γωνία θ ως προς την οριζόντια διεύθυνση, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M. Το συσσωμάτωμα εκτελεί α.α.τ. με πλάτος $A = 0.5\mathrm{m}$.



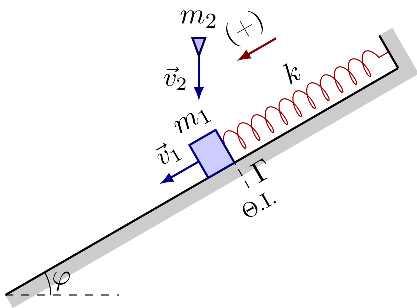
(α΄) Να βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος και του βλήματος.

(β΄) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της συνισταμένης δύναμης του συσσωματώματος.

(γ΄) Να βρείτε το ποσοστό απώλειας μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.

∗ (δ΄) Να βρείτε την μεταβολή της ορμής του βλήματος κατά την κρούση.

47. Σε ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N/m}$, που βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi =$ ισορροπεί σώμα $m_1 = 2\text{kg}$. Βλήμα ίσης μάζας m_2 αφήνεται να πέσει από ύψος $h = 0.6\text{m}$ και κινούμενο κατακόρυφα, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1. Το συσσωμάτωμα εκτελεί α.α.τ.



(α΄) Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

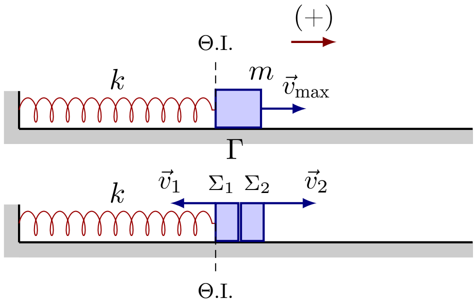
(β΄) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης και της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος.

(γ΄) Να βρείτε σε πόσο χρόνο μετά την κρούση η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά.

(δ΄) Να βρείτε απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.

1.5.6 Έκρηξη - διάσπαση

48. Σώμα μάζας $m = 4\text{kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k = 400\text{N/m}$ και εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος $A = 0,2\text{m}$, κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. του Γ κινούμενο προς τα δεξιά. Εκείνη τη στιγμή λόγω στιγμιαίας έκρηξης (διάσπασης) το σώμα χωρίζεται σε δύο κομμάτια Σ_1, Σ_2 με μάζες $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 3\text{kg}$ αντίστοιχα. Το Σ_2 κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 4/3\text{m/s}$ και φορά προς τα δεξιά, ενώ το Σ_1 παραμένει συνδεδεμένο στο ελατήριο.



(α΄) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας v_1 του κομματιού Σ_1 αμέσως μετά την έκρηξη, καθώς και την ενέργεια που ελευθερώθηκε λόγω της έκρηξης.

(β΄) Να υπολογίσετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του Σ_1 σε συνάρτηση με το χρόνο.

∗ (γ΄) Ποια χρονική στιγμή για πρώτη φορά στη διάρκεια της ταλάντωσης του Σ_1 ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας γίνεται μέγιστος;

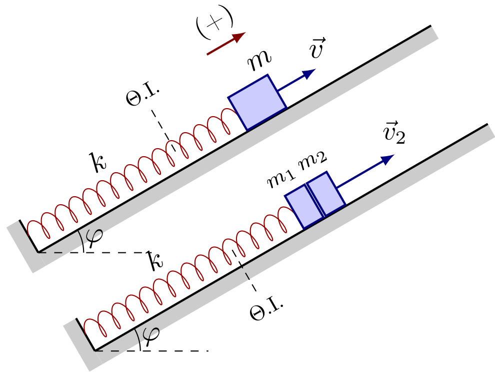
(δ΄) Ποια σχέση έχει η κινητική ενέργεια με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης εκείνη τη χρονική στιγμή;

(ε΄) Θα συγκρουστεί ποτέ ξανά το m_1 με το m_2;

Δίνεται $\pi \approx 3$.

49. Σώμα μάζας $m = 4\text{kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ και εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος $A = 0,2\text{m}$, κινούμενο σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας $\varphi = 30°$. Κάποια χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα έχει απομάκρυνση $x_1 = +0,1\sqrt{3}\text{m}$ κινούμενο προς τα πάνω. Εκείνη τη στιγμή λόγω στιγμιαίας έκρηξης (διάσπασης) το σώμα χωρίζεται σε δύο κομμάτια με

μάζες $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 3\text{kg}$ αντίστοιχα. Το m_2 κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα $\vec{v}_2'$ και φορά προς τα δεξιά, ενώ το m_1 παραμένει συνδεδεμένο στο ελατήριο και στιγμιαία ακινητεί μετά την κρούση.



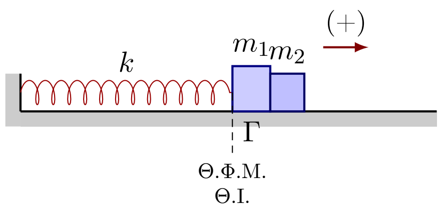
(α΄) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας v_2' του κομματιού m_2 αμέσως μετά την έκρηξη, καθώς και την ενέργεια που ελευθερώθηκε λόγω της έκρηξης.

(β΄) Να υπολογίσετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του m_1 σε συνάρτηση με το χρόνο.

(γ΄) Ποια χρονική στιγμή για πρώτη φορά στη διάρκεια της ταλάντωσης του m_1 ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του γίνεται μέγιστος;

1.5.7 Χάσιμο επαφής - ολίσθηση

50. Τα σώματα Σ_1, Σ_2 του σχήματος με μάζες $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 3\text{kg}$, είναι τοποθετημένα σε λείο οριζόντιο επίπεδο και εφάπτονται μεταξύ τους. Το m_1 είναι δεμένο στη μια άκρη οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και τα σώματα ισορροπούν. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $d = 0,4\text{m}$ προσφέροντάς του ενέργεια 32J και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο.



(α΄) Πόση είναι η σταθερά k του ελατηρίου;

(β΄) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1, σε ποια θέση της τροχιάς και με ποια ταχύτητα θα αποχωριστεί το Σ_1 από το Σ_2.

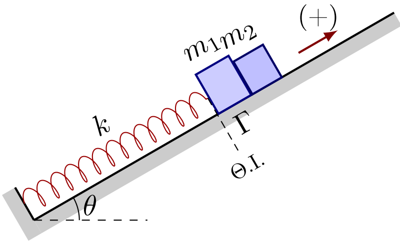
(γ΄) Πόσο είναι το πλάτος και πόση η περίοδος της νέας ταλάντωσης του Σ_1, αφού αποχωριστεί το Σ_2;

(δ΄) Να βρείτε την απόσταση των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_2 = \dfrac{3\pi}{40}$ s.

Θεωρήστε $\pi \approx 3$

51. Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ με ημ$\varphi = 0,6$ και συν$\varphi = 0,8$ τοποθετείται ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N/m}$ και σε αυτό δένεται σώμα $m_1 = 1\text{kg}$. Δίπλα από το σώμα m_1 τοποθετούμε δεύτερο σώμα $m_2 = 3\text{kg}$ και το σύστημα ισορροπεί. Συμπιέζουμε το ελατήριο, πιέζοντας τα δύο σώματα,

κατά $d = 40\text{cm}$ και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο.



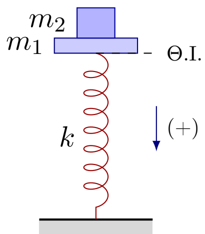
(α΄) Να αποδείξετε ότι η επαφή των δύο σωμάτων θα χαθεί στη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου.

(β΄) Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων στο σημείο όπου χάνεται η επαφή.

(γ΄) Να υπολογίσετε το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_1.

∗ (δ΄) Να εξετάσετε ποιο από τα δύο σώματα θα σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά μετά το χάσιμο της επαφής τους.

52. Δύο σώματα μαζών $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$ ισορροπούν πάνω σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Από αυτά μόνο το m_1 είναι στερεωμένο στο ελατήριο, ενώ το m_2 απλά είναι τοποθετημένο στο m_1. Συμπιέζουμε το ελατήριο και αφήνουμε τα σώματα να κάνουν α.α.τ. με ενέργεια $E = 8\text{J}$.



(α΄) Να εξετάσετ εάν θα χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων, και να δείξετε ότι αν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων, αυτό γίνεται στη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου.

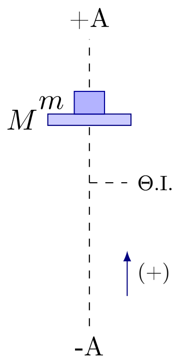
(β΄) Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων στο σημείο όπου χάνεται η επαφή.

(γ΄) Να υπολογίσετε το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος m_1.

(δ΄) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το m_2 πάνω από το σημείο που χάθηκε η επαφή.

∗ (ε΄) Να εξετάσετε ποιο από τα δύο σώματα θα σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά μετά το χάσιμο της επαφής τους.

53. Σώμα μάζας $m = 2\text{kg}$ είναι τοποθετημένο σε δίσκο και εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος $= 0,4\text{m}$ στην κατακόρυφη διεύθυνση με συχνότητα f.



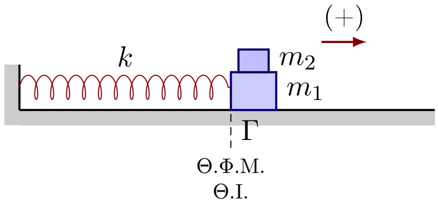
(α΄) Ποια είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της δύναμης που δέχεται το σώμα από το δίσκο, αν η διαφορά τους είναι $N_{\max} - N\text{min} = 4\text{N}$;

(β΄) Πόση είναι η συχνότητα f της ταλάντωσης;

(γ΄) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συχνότητας της ταλάντωσης του δίσκου, ώστε να μη χάνεται η επαφή του σώματος με το δίσκο;

Δίνεται $\pi^2 = 10$ και $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

54. Δύο σώματα μαζών $m_1 = 3\mathrm{kg}$ και $m_2 = 1\mathrm{kg}$ τοποθετούνται δίπλα σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k = 100\mathrm{N/m}$. Από αυτά το m_1 είναι στερεωμένο στο ελατήριο, ενώ το m_2 απλά είναι τοποθετημένο πάνω στο m_1. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο αλλά μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής, στατικής και ολίσθησης, $\mu = 0,5$. Συμπιέζουμε το ελατήριο κατά απόσταση $d = 0,1\mathrm{m}$ και αφήνουμε τα σώματα να κάνουν α.α.τ.

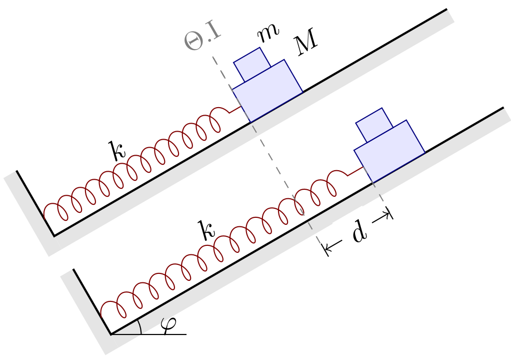


(α΄) Να δείξετε ότι το σώμα m_2 δεν θα γλιστρήσει κατά την ταλάντωση.

(β΄) Να βρείτε το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης στο οποίο δεν ολισθαίνει το σώμα m_2.

(γ΄) Αν η αρχική συμπίεση είναι $d = 0,4\mathrm{m}$ να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα των σωμάτων όταν ξεκινάει η ολίσθηση του m_2.

55. Δύο σώματα μαζών $m_1 = 3\mathrm{kg}$ και $m_2 = 1\mathrm{kg}$ τοποθετούνται σε ελατήριο σταθεράς $k = 100\mathrm{N/m}$. Το σύστημα βρίσκεται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ με ημ$\gamma = 0,6$ και συν$\varphi = 0,8$. Από αυτά το m_1 είναι στερεωμένο στο ελατήριο, ενώ το m_2 είναι τοποθετημένο πάνω στο m_1. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής, στατικής και ολίσθησης, $\mu = 0,5$. Παραμορφώνουμε το ελατήριο κατά απόσταση $d = 0,1\mathrm{m}$ και αφήνουμε τα σώματα να κάνουν α.α.τ.



(α΄) Να δείξετε ότι το σώμα m_2 δεν θα γλιστρήσει κατά την ταλάντωση.

(β΄) Να βρείτε το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης στο οποίο δεν ολισθαίνει το σώμα m_2.

(γ΄) Αν η αρχική συμπίεση είναι $d = 0,2\mathrm{m}$ να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα των σωμάτων όταν ξεκινάει η ολίσθηση του m_2.

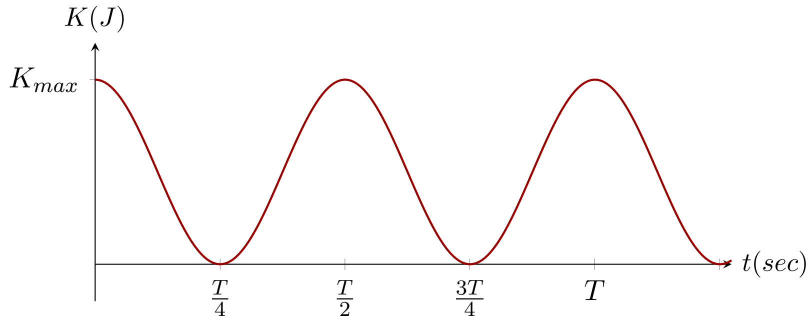
1.6 Ερωτήσεις Ταλαντώσεων

1.6.1 Μηχανικές Ταλαντώσεις

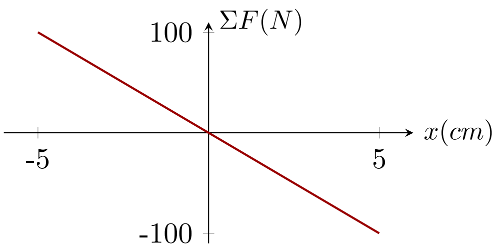
1. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της δυναμική ενέργειας $K = f(t)$ ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

(α΄) Ποιές χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστη και ποιές μηδέν η ταχύτητα v;

(β΄) Ποιές χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστη και ποιές μηδέν η επιτάχυνση α;



2. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = f(x)$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, ενός σώματος μάζας $m = 20\,\mathrm{kg}$ που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στις παρακάτω ερωτήσεις:

(α΄) Η σταθερά επαναφοράς του είναι:

i. 20 ii. 500 iii. 2000 iv. $\frac{1}{20}$

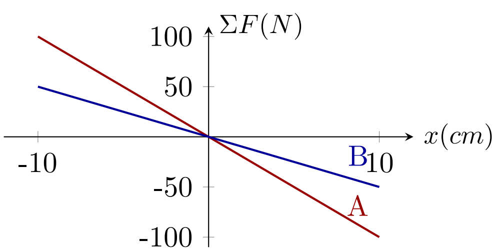
(β΄) Η μέγιστη ταχύτητά του είναι

i. 0,5 $\frac{m}{s}$ ii. 5 $\frac{m}{s}$ iii. 50 $\frac{m}{s}$ iv. 10 $\frac{m}{s}$

(γ΄) Η μέγιστη επιτάχυνσή του είναι

i. 0,5 $\frac{m}{s^2}$ ii. 5 $\frac{m}{s^2}$ iii. 50 $\frac{m}{s^2}$ iv. 10 $\frac{m}{s^2}$

3. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης $\Sigma F = f(x)$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, δύο σωμάτων ίσων μαζών, που κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στις παρακάτω ερωτήσεις:

(α΄) Ο λόγος των σταθερών ταλάντωσης $\frac{D_A}{D_B}$ είναι:

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{2}{1}$ iii. $\frac{5}{1}$

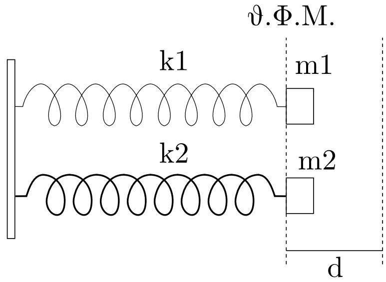
(β΄) Ο λόγος των συχνοτήτων των δύο ταλαντώσεων $\frac{f_A}{f_B}$ είναι:

i. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ii. $\sqrt{2}$ iii. 2

(γ΄) Ο λόγος των μεγίστων κινητικών ενεργειών των δύο ταλαντώσεων $\frac{K_{A,max}}{K_{B,max}}$ είναι:

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{2}{1}$ iii. $\frac{5}{1}$

4. Τα δύο ελατήρια σταθερών k_1 και k_2 με $K_1 = 2K_2$ του σχήματος έχουν ίδια φυσικά μήκη και ισορροπούν μαζί με τα δεμένα σώματά τους, μαζών m_1 και $m_2 = 2m_1$, σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Απομακρύνουμε και τα δύο σώματα κατά απόσταση d και την χρονική στιγμή μηδέν τα αφήνουμε ελεύθερα να κινηθούν.



(α΄) Ο λόγος των ενεργειών $\frac{E_1}{E_2}$ των δύο σωμάτων είναι:

i. 1 ii. 2 iii. $\frac{1}{2}$ iv. 4

(β΄) Ο λόγος των περιόδων $\frac{T_1}{T_2}$ των ταλαντώσεων των δύο σωμάτων είναι:

i. 2 ii. $\sqrt{2}$ iii. $\frac{1}{2}$ iv. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(γ΄) Τα δύο σώματα θα ξαναβρεθούν μαζί στη θέση $x = +A$ που ήταν την χρονική στιγμή $t = 0$ σε χρόνο:

i. T_1 ii. $2T_1$ iii. T_2 iv. $2T_2$

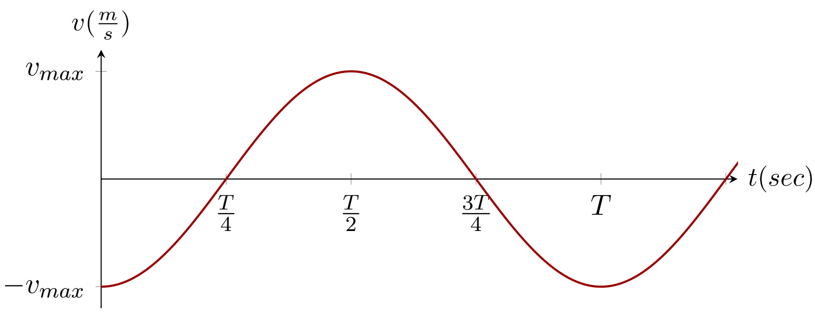
5. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της ταχύτητας $v = f(t)$ ενός σώματος που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

(α΄) Ποιές χρονικές στιγμές το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας;

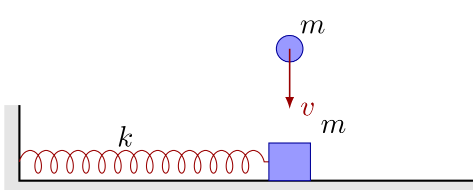
(β΄) Σε ποιές χρονικές στιγμές έχουμε μέγιστη δυναμική ενέργεια και σε ποιές μηδέν;

(γ΄) Ποιές χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστη θετική και ποιές μέγιστη αρνητική η επιτάχυνση;

(δ΄) Ποιά είναι η αρχική φάση της ταλάντωσης;



6. Σώμα μάζας m είναι δεμένο σε ελατήριο και κάνει α.α.τ. με πλάτος A. Την στιγμή που το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσής του κολλάει στιγμιαία σε αυτό δεύτερο σώμα μάζας m και το συσσωμάτωμα κάνει α.α.τ.



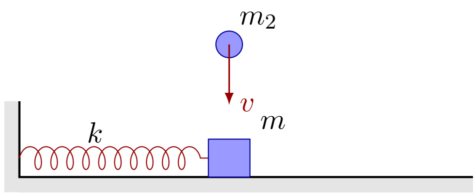
(α΄) Ο λόγος των Ενεργειών Ταλάντωσης $\frac{E_1}{E_2}$ είναι:

i. 1   ii. 2   iii. $1/2$ iv. $1/4$

(β΄) Ο λόγος των μεγίστων ταχυτήτων ταλάντωσης $\dfrac{v_{1,max}}{v_{2,max}}$ είναι:

i. 1   ii. $\sqrt{2}$ iii. 5   iv. 10

7. Σώμα μάζας $m_1 = m$ είναι δεμένο σε ελατήριο και κάνει α.α.τ. με πλάτος A. Την στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του προσκρούει κάθετα σε αυτό δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 3m$ και το συσσωμάτωμα κάνει α.α.τ. με μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης v'_{max} και ενέργεια ταλάντωσης E'.



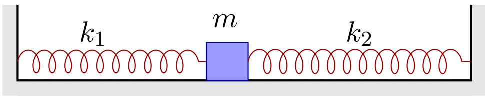
(α΄) Ο λόγος των μεγίστων ταχυτήτων ταλάντωσης $\dfrac{v_{max}}{v'_{max}}$ είναι:

i. $\dfrac{1}{2}$ ii. 1   iii. 2   iv. 4

(β΄) Ο λόγος των Ενεργειών Ταλάντωσης $\dfrac{E}{E'}$ είναι:

i. 2   ii. 4   iii. $1/2$ iv. $1/4$

8. Σώμα μάζας $m = 1\,Kg$ βρίσκεται μεταξύ δύο οριζόντιων ελατηρίων σταθερών $k_1 = 100\,N/m$ και $k_2 = 400\,N/m$, που έχουν το φυσικό τους μήκος. Κανένα ελατήριο δεν είναι στερεωμένο στο σώμα. Εκτρέπουμε προς τα δεξιά κατά d και αφήνουμε το σώμα ελεύθερο.



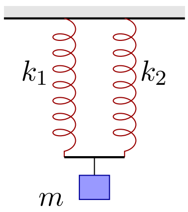
(α΄) Ο λόγος των μέγιστων παραμορφώσεων των ελατηρίων είναι:

i. 1   ii. 2   iii. $1/2$ iv. $1/4$

(β΄) Η περίοδος της ταλάντωσης που θα κάνει το σώμα είναι:

i. $\dfrac{\pi}{10}$ ii. $\dfrac{2\pi}{20}$ iii. $\dfrac{3\pi}{20}$ iv. $\dfrac{4\pi}{10}$

9. Ελατήριο σταθεράς K κόβεται σε δύο ίσα κομμάτια που στερεώνονται ακλόνητα και στο κάτω μέρος τους προσαρμόζεται ράβδος αμελητέας μάζας. Σώμα μάζας m προσδένεται στη ράβδο και αφήνεται ελεύθερο.



Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

(α΄) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}}$ (β΄) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2K}{m}}$ (γ΄) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4K}{m}}$ (δ΄) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{4m}}$

Εξετάσεις Κύπρου

1.6.2 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

10. Σε μία φθίνουσα ταλάντωση παρατηρούμε ότι στο τέλος της 2ης περιόδου έχουμε $A_2 = \dfrac{A_0}{16}$.

(α΄) Τότε το πλάτος στο τέλος της 1ης περιόδου θα είναι:

i. $A_1 = \frac{A_0}{2}$ ii. $A_1 = \frac{A_0}{4}$ iii. $A_1 = \frac{A_0}{8}$

(β΄) Αν το πλάτος $A_5 = 4\,cm$ τότε το πλάτος A_6 θα είναι

i. $A_1 = \frac{1}{2}\,cm$ ii. $A_1 = 2\,cm$ iii. $A_1 = 1\,cm$

11. Σε φθίνουσα ταλάντωση παρατηρούμε ότι σε χρόνο $t = 4T$ η ενέργεια $E_4 = \frac{E_0}{8}$.

(α΄) Το πλάτος A_4 θα είναι τότε:

i. $\frac{A_0}{4}$ ii. $\frac{A_0}{\sqrt{2}}$ iii. $\frac{A_0\sqrt{2}}{4}$ iv. $A_0\sqrt{2}$

(β΄) Σε χρόνο $t = 8T$ το πλάτος A_8 θα είναι:

i. $\frac{A_0}{16}$ ii. $\frac{A_0}{32}$ iii. $\frac{A_0}{64}$ iv. $\frac{A_0}{128}$

12. Σε φθίνουσα ταλάντωση παρατηρούμε ότι το πλάτος A_2 στο τέλος της 2ης περιόδου είναι $A_2 = \frac{A_0}{25}$. Το ποσοστό απώλειας ενέργειας σε κάθε περίοδο είναι:

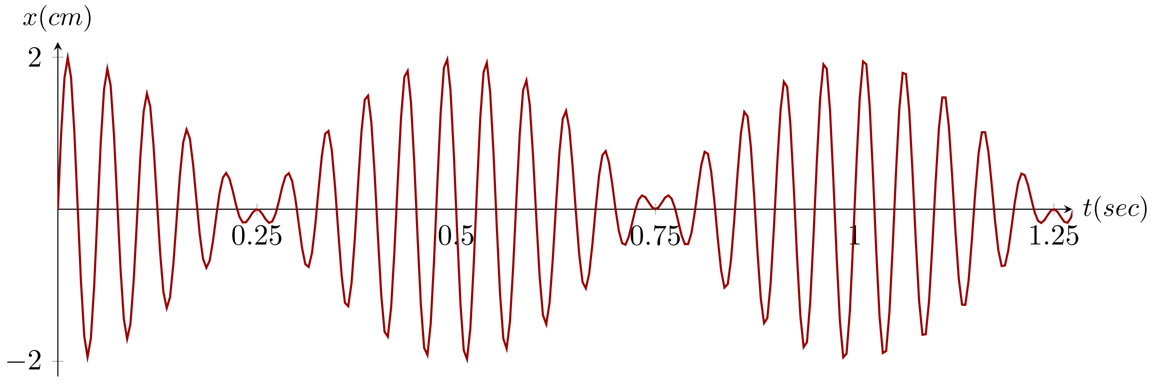
(α΄) 96% (β΄) 50% (γ΄) 25% (δ΄) 5%

1.6.3 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις-Συντονισμός

1.6.4 Σύνθεση Ταλαντώσεων

13. Στη παρακάτω εικόνα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταλάντωσης ενός σώματος το οποίο εκτελεί δύο αρμονικές ταλαντώσεις της μορφής

$$\begin{cases} x_1 = A\eta\mu\omega_1 t \\ x_2 = A\eta\mu\omega_2 t \end{cases} \tag{1.22}$$



Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

(α΄) Το πλάτος A των δύο ταλαντώσεων είναι $A = 1\,cm$.

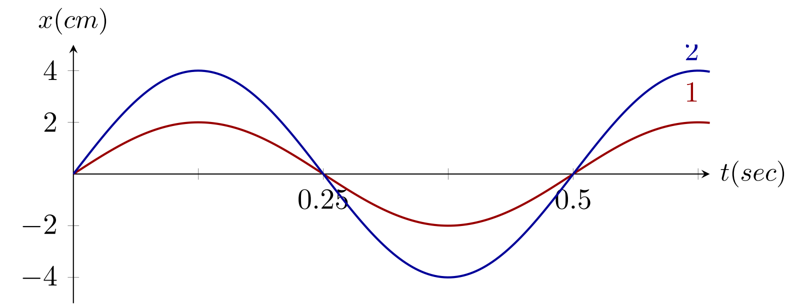
(β΄) Οι κυκλικές συχνότητες είναι παραπλήσιες μεταξύ τους.

(γ΄) Η περίοδος του διακροτήματος είναι $0,75\,sec$.

(δ΄) Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $\frac{1}{20}\,sec$.

(ε΄) Οι συχνότητες των ταλαντώσεων είναι $f_1 = 9\,Hz$ και $f_2 = 11\,Hz$

14. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση των απομακρύνσεων $x_1 = f(t)$ και $x_2 = g(t)$ που γίνονται ταυτόχρονα. Η συνισταμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα:



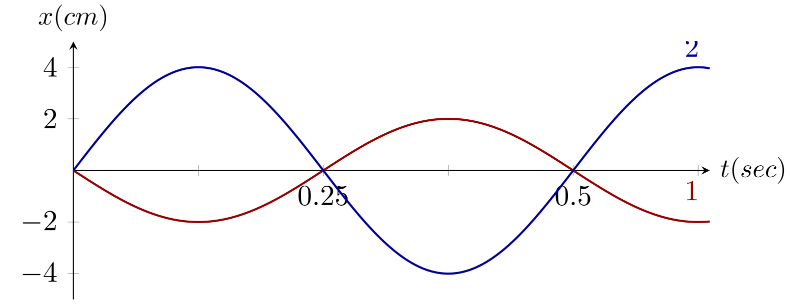
(α′) Έχει πλάτος $A = 2\,cm$

(β′) Έχει πλάτος $A = 4\,cm$

(γ′) Έχει συχνότητα $f = 2\,Hz$

(δ′) Έχει γωνία $\theta = \pi\,rad$

15. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση των απομακρύνσεων $x_1 = f(t)$ και $x_2 = g(t)$ που γίνονται ταυτόχρονα. Η συνισταμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα:

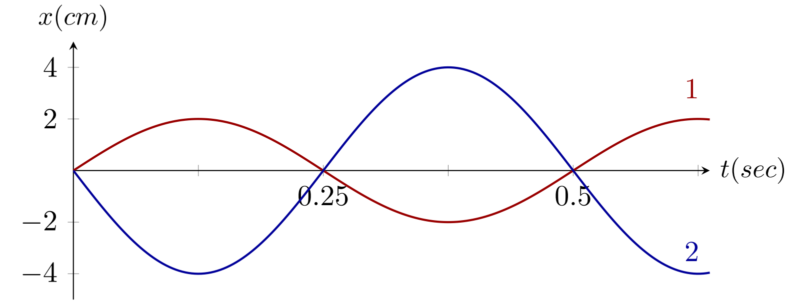


(α′) Έχει πλάτος $A = 2\,cm$

(β′) Έχει συχνότητα $f = 2\,Hz$

(γ′) Έχει γωνία $\theta = \pi\,rad$

16. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση των απομακρύνσεων $x_1 = f(t)$ και $x_2 = g(t)$ που γίνονται ταυτόχρονα. Η συνισταμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα:



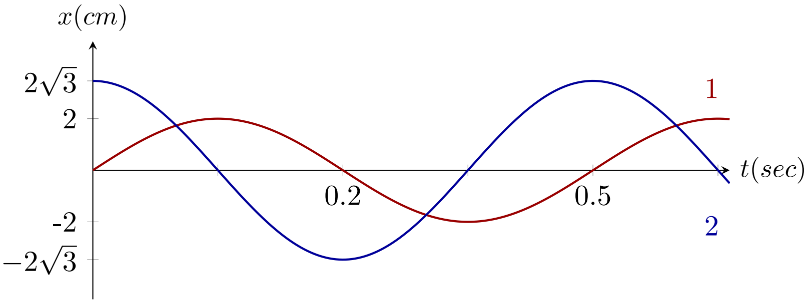
(α′) Έχει εξίσωση $x = 2\eta\mu\, 4\pi t$

(β′) Έχει εξίσωση $x = 4\eta\mu\, (4\pi t + \pi)$

(γ′) Έχει εξίσωση $x = 2\eta\mu\, (4\pi t + \pi)$

(δ′) Έχει εξίσωση $x = 4\eta\mu\, 4\pi t$

17. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση των απομακρύνσεων $x_1 = f(t)$ και $x_2 = g(t)$ που γίνονται ταυτόχρονα. Η συνισταμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα:



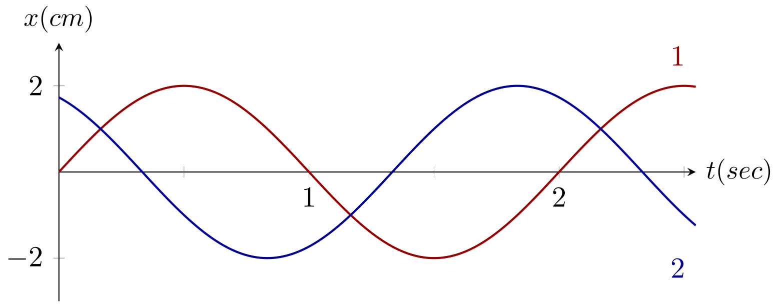
(α′) Έχει εξίσωση $x = 2ημ\,4\pi t$

(β′) Έχει εξίσωση $x = 4ημ\,(4\pi t + \frac{\pi}{3})$

(γ′) Έχει εξίσωση $x = 4ημ\,(4\pi t + \frac{\pi}{6})$

(δ′) Έχει εξίσωση $x = 4ημ\,4(\pi t + \pi)$

18. Στο σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση των απομακρύνσεων $x_1 = 2ημ\,\omega t$ και $x_2 = 2ημ\,(\omega t + \frac{2\pi}{3})$ που γίνονται ταυτόχρονα. Η συνισταμένη ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα:



(α′) Έχει εξίσωση $x = 2ημ\,\pi t$

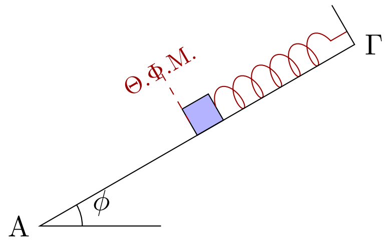
(β′) Έχει εξίσωση $x = 2ημ\,(\pi t + \frac{\pi}{3})$

(γ′) Έχει εξίσωση $x = 2ημ\,(\pi t + \frac{\pi}{6})$

(δ′) Έχει εξίσωση $x = 4ημ\,(2\pi t + \frac{\pi}{3})$

1.7 Προβλήματα - Ταλαντώσεις

1. Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο ΑΓ γωνίας $\phi = 30^o$ βρίσκεται σώμα μάζας $m = 4\mathrm{kg}$, δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Το σώμα κρατείται έτσι ώστε το ελατήριο να βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του (Θ.Φ.Μ.) Την χρονική στιγμή μηδέν $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.



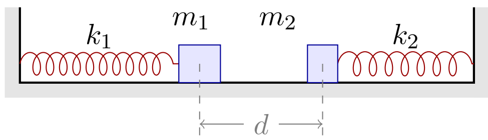
(α′) Βρείτε το πλάτος Α της ταλάντωσης του σώματος.

(β′) Γράψτε την εξίσωση της ταλάντωσης $x = f(t)$.

(γ′) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = -\frac{A}{2}$

(δ′) Κάποια στιγμή, καθώς το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα κάτω, χωρίζεται σε δύο κομμάτια, ένα μάζας 3 Kg που κινείται ελεύθερα προς τα κάτω και ένα μάζας 1 Kg που μένει δεμένο στο ελατήριο. Βρείτε τη νέα ενέργεια της ταλάντωσης.

2. Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 1\ kg$ και $m_2 = 3\ Kg$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 100\ N/m$ και $k_2 = 50\ N/m$ αντίστοιχα, απέχοντας απόσταση $d = 0,3\ m$. Εκτρέπουμε το σώμα m_1 προς τα αριστερά κατά $A = 0,5\ m$ και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ΑΑΤ.



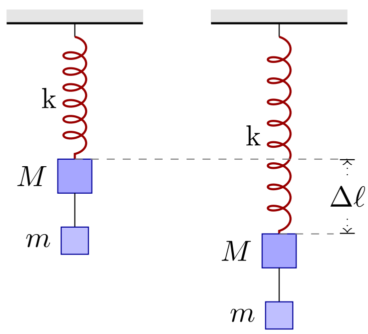
Μετά από λίγο συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_2. Να βρεθούν:

(α′) Η ταχύτητα του m_1 πριν την κρούση και η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

(β′) Η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση.

3. Το σύστημα του σχήματος έχει ελατήριο σταθεράς $K = 400\,N/m$, δεμένο από σταθερό σημείο και σώματα μαζών $M = 1\,Kg$ και $m = 3\,Kg$, συνδεδεμένα μέσω μή-εκτατού νήματος. Το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα έχει αμελητέα μάζα.

Εκτρέπουμε τα σώματα προς τα κάτω κατά $\Delta\ell = 10\,cm$ και αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.



(α′) Να δείξετε ότι το νήμα θα παραμείνει τεντωμένο.

(β′) Να παρασταθεί γραφικά η τάση του νήματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x.

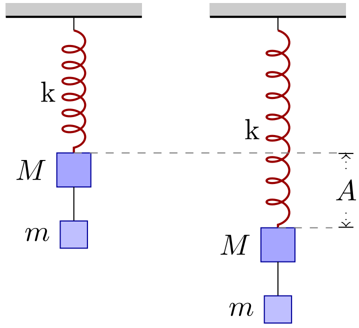
(γ′) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα με νέο νήμα που έχει όριο θραύσης $T_{max} = 45\,N$, αλλά η αρχική μας εκτροπή είναι προς τα επάνω κατά $\Delta\ell = 10\,cm$. Να βρεθούν:

i. Η ταχύτητα των σωμάτων όταν σπάει το νήμα.

ii. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος M.

iii. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας του σώματος M σε αυτή τη θέση.

4. Το σύστημα του σχήματος ισορροπεί όπως φαίνεται στην αριστερή θέση. Το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα έχει αμελητέα μάζα. Εκτρέπουμε τα σώματα προς τα κάτω κατά A.

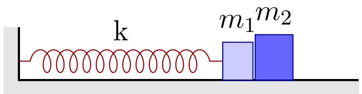


(α΄) Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του A ώστε το νήμα να παραμείνει τεντωμένο;

(β΄) Να παρασταθεί γραφικά η τάση του νήματος για την περίπτωση όπου $A = \frac{A_{max}}{2}$.

(γ΄) Αν $A = 2A_{max}$ βρείτε την ταχύτητα των σωμάτων όταν η τάση του νήματος μηδενίζεται.

5. Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K = 300\,N/m$ είναι δεμένο στη μία άκρη του σε σταθερό σημείο και στην άλλη άκρη του σε σώμα μάζας $m_1 = 3\,Kg$. Το σώμα m_1 εφάπτεται χωρίς να είναι κολλημένο με σώμα m_2 και τα δύο σώματα ηρεμούν. Θεωρούμε το επίπεδο της κίνησης λείο. Το σώμα m_1 δέχεται οριζόντια δύναμη προς το μέρος του ελατηρίου μέτρου $F = 25\,N$ η οποία καταργείται όταν το ελατήριο συμπιεστεί κατά $\alpha = 6\,cm$. Μετά την κατάργηση της δύναμης το σώμα m_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και γυρίζοντας στην αρχική του θέση, συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα m_2.



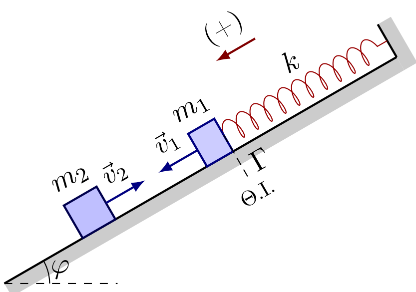
(α΄) Να βρεθεί η αρχική μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β΄) Να βρεθεί η ταχύτητα το συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και η μάζα m_2, αν το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι 25%.

(γ΄) Να βρεθεί το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ΄) Να υπολογιστεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος όταν αυτό διέρχεται από την θέση $x = \dfrac{A'\sqrt{3}}{2}$, όπου A' το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

6. Σώμα μάζας $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ημ$\varphi = 30^\circ$ δεμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,\mathrm{N}$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ που το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα κάτω συγκρούεται πλαστικά με δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ που κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα $v = 1\,\mathrm{m/s}$. Το συσσωμάτωμα στιγμιαία είναι ακίνητο μετά την κρούση.



(α΄) Να βρεθεί το πλάτος A της αρχικής ταλάντωσης του σωματος m_1.

(β΄) Να βρεθεί το πλάτος A' της νέας ταλάντωσης του συσσωματώματος.

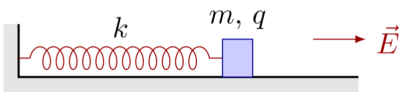
(γ΄) Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης της νέας ταλάντωσης.

(δ΄) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος όταν αυτό διέρχεται από την θέση x_1, στην οποία η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

7. Στο σχήμα βλέπουμε ένα ελατήριο σταθεράς $k = 10\frac{N}{m}$ στο οποίο είναι δεμένο ένα φορτισμένο σώμα μάζας $m = 1Kg$ και φορτίου $q = 5\mu C$ και ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Ξαφνικά την $t = 0$ στον χώρο δημιουργείται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο έντασης $E = 10^4\frac{V}{m}$ και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα, την οποία θεωρούμε θετική για τον άξονα x.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα θα κάνει αρμονική ταλάντωση.

(β΄) Να βρεθεί το πλάτος και η περίοδος της ταλάντωσης.



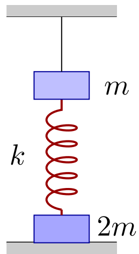
Την στιγμή που το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = +A$ η φορά του ηλεκτρικού πεδίου αντιστρέφεται ακαριαία, ενώ το μέτρο της παραμένει το ίδιο. Θεωρήστε εκ νέου την στιγμή αυτή $t = 0$.

(γ΄) Βρείτε το νέο πλάτος της ταλάντωσης.

(δ΄) Γράψτε την εξίσωση κίνησης $x = f(t)$

(ε΄) Υπολογίστε τον λόγο των κινητικών ενεργειών των δύο ταλαντώσεων.

8. Ένα σώμα μάζας $2m$ ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στο πάνω μέρος του είναι στερεωμένο ελατήριο σταθεράς k που στο άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σώμα μάζας m. Το σώμα m είναι δεμένο με νήμα σε σταθερό σημείο της οροφής και το νήμα είναι ρυθμισμένο έτσι ώστε το σώμα $2m$ μόλις που να μήν ακουμπάει στο οριζόντιο επίπεδο.



(α΄) Βρείτε την τάση του νήματος.
Κάποια στιγμή $t = 0$ το νήμα κόβεται και το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

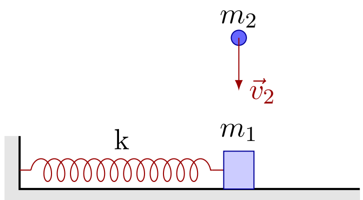
(β΄) Να βρεθεί η εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης.

(γ΄) Να βρεθεί η δύναμη N που δέχεται το κάτω σώμα $2m$ από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο $N = f(t)$ και να παρασταθεί γραφικά.

(δ΄) Να υπολογιστεί η μέγιστη δυναμική ενέργεια που έχει το ελατήριο.

(ε΄) Καθώς το σώμα m ανεβαίνοντας περνάει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου το ελατήριο χάνει τη στήριξή του με το σώμα m. Να βρεθεί το ύψος που θα φτάσει το πάνω σώμα.

9. Οριζόντιο ελατήριο, σταθεράς $k = 100\,N/m$, είναι δεμένο από σταθερό σημείο ενώ στην άλλη άκρη του είναι δεμένο σώμα μάζας $m = 1\,kg$. Το ελατήριο εκτρέπεται συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $d = 20\,cm$ και αφήνεται ελεύθερο. Την ίδια στιγμή αφήνεται από κατάλληλο ύψος ένα σώμα $m_2 = 3\,kg$ που συναντά και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1 όταν αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.



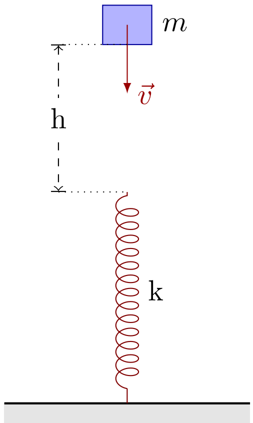
(α΄) Να βρεθεί το ύψος h.

(β΄) Να βρεθεί το νέο πλάτος και η εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(γ΄) Να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση, και το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης.

(δ΄) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$.

10. Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\,N/m$ είναι σταθερά δεμένο στο έδαφος. Πάνω από την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου αφήνουμε από ύψος $h = 0,15\,m$ ένα σώμα μάζας $m = 1\,kg$. Το σώμα πέφτει ελεύθερα και καρφώνεται στην ελεύθερη άκρη του ελατηρίου (χωρίς απώλειες ενέργειας).



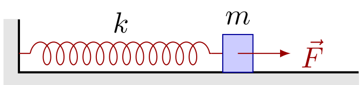
(α΄) Να βρείτε την μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β΄) Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του συστήματος $x = f(t)$, θεωρώντας θετική την φορά προς τα επάνω.

(γ΄) Να βρείτε την δύναμη επαναφοράς και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση που συμβαίνει $K = 3U$ για πρώτη φορά.

(δ΄) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην παραπάνω θέση.

11. Ένα σώμα μάζας $2\,kg$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 648\,/m$. Σε μια στιγμή δέχεται περιοδική οριζόντια δύναμη F, με αποτέλεσμα να αρχίσει να ταλαντώνεται. Μόλις αποκατασταθεί σταθερή κατάσταση,λαμβάνοντας κάποια στιγμή σαν $t = 0$, βρίσκουμε ότι το σώμα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = 0,4\text{ημ}\,20t$ (S.I.) γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας του. Στη διάρκεια της ταλάντωσης το σώμα δέχεται δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi} = -4v$ (S.I.), όπου v η ταχύτητα του σώματος.



(α΄) Να βρεθούν η ιδιοσυχνότητα και η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος.

Για την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{4}\,s$ ζητούνται:

(β΄) Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

(γ΄) Οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας.

(δ΄) Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα, μέσω του έργου της δύναμης απόσβεσης.

(ε΄) Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σώμα μέσω της εξωτερικής δύναμης F.

12. Το πίσω (μονό) αμορτισέρ μίας μηχανής συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Αν αγνοήσουμε το εμπρός αμορτισέρ, τότε όταν κάθεται ο οδηγός μάζας $m = 80$kg αυτό συμπιέζεται κατά 5cm.

(α΄) Υπολογίστε τη σταθερά k του αμορτισέρ.

(β΄) Υποθέτουμε ότι το ελατήριο του αμορτισέρ συγκρατεί συνολικά μάζα $m_{o\lambda} = 160$kg. Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης της μηχανής.

(γ΄) Φυσικά το αμορτισέρ μίας μηχανής δέν πρέπει να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Γι' αυτό και εισάγουμε απόσβεση στο αμορτισέρ (μέσω κάποιου υγρού) με σταθερά b, έτσι ώστε να υπάρχει δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi} = -bv$. Εκτιμήστε τη σταθερά b έτσι ώστε να χάνεται το 99,99% της ενέργειας ταλάντωσης σε μία περίοδο Τ. Δίνεται ότι η σταθερά Λ της εκθετικής μείωσης συνδέεται με τη σταθερά b με τη σχέση $\Lambda = \frac{b}{2m}$.

(δ΄) Η μηχανή κινούμενη με ταχύτητα v περνάει από δρόμο με διαδοχικά εμπόδια (πχ τα ανακλαστικά "μάτια γάτας" στη διπλή γραμμή) που απέχουν το ένα από το άλλο 80cm, με αποτέλεσμα να κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Βρείτε την ταχύτητα v ώστε να έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους ταλάντωσης. Φυσικά αυτή πρέπει να είναι η ταχύτητα *που πρέπει να αποφεύγει ο οδηγός!*

Δίνονται: $\ln 5 = 1,61$, $\ln 2 = 0,69$.

13. Σε κατακόρυφο ελατήριο, σταθεράς $k = 100\,N/m$, δένουμε στο κάτω άκρο του ένα σώμα μάζας $2\,kg$ και το αφήνουμε να κινηθεί, οπότε αυτό εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, εξαιτίας της αντίστασης του αέρα, η οποία είναι της μορφής $F = -bv$. Σε μια στιγμή t_1 το σώμα κινείται προς τα κάτω και το ελατήριο έχει παραμόρφωση $\Delta\ell = 0,8\,m$. Στη θέση αυτή το σώμα έχει ταχύτητα $v_1 = 0,8\,m/s$ ενώ επιβραδύνεται με ρυθμό $5,2\,m/s^2$. Να βρείτε:

(α΄) Τη μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμική από $0 \to t_1$.

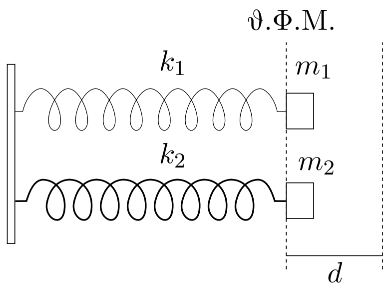
(β΄) Τη μείωση της ενέργειας ταλάντωσης

(γ΄) Τη σταθερά απόσβεσης b.

(δ΄) Τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται η ενέργεια ταλάντωσης τη στιγμή t_1.

Δίνεται $g = 10\,m/s^2$.

14. Τα δύο ελατήρια σταθερών $k_1 = 100\,N/m$ και $k_2 = 144\,N/m$ του σχήματος έχουν ίδια φυσικά μήκη και ισορροπούν μαζί με τα δεμένα σώματά τους (μαζών m_1 και m_2) σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Απομακρύνουμε και τα δύο σώματα κατά απόσταση d και την χρονική στιγμή μηδέν τα αφήνουμε ελεύθερα να κινηθούν. Θεωρήστε ότι $m_1 = m_2 = m = 1\,Kg$, τα ελατήρια παραμένουν παράλληλα και τα σώματα κινούνται σε τροχιές πολύ κοντά μεταξύ τους.



(α΄) Να γράψετε τις εξισώσεις ταλάντωσης $x_1 = f(t)$ και $x_2 = g(t)$ των δύο σωμάτων.

(β΄) Βρείτε τον λόγο των ενεργειών ταλάντωσης $\frac{E_1}{E_2}$

Το κέντρο μάζας του συστήματος των δύο μαζών βρίσκεται στο γεωμετρικό μέσο της οριζόντιας απόστασή τους κάθε φορά, αφού $m_1 = m_2$.

(γ΄) Βρείτε την εξίσωση της κίνησης του κέντρου μάζας Κ.Μ. και χαρακτηρίστε το είδος της κίνησής του.

(δ΄) Υπολογίστε σε πόσο χρόνο τα δύο σώματα θα βρίσκονται μαζί ξανά στην θέση όπου ξεκίνησαν την στιγμή $t = 0$

(ε΄) Υπολογίστε σε πόσο χρόνο τα δύο σώματα θα περνάνε μαζί από τη θέση ισορροπίας με αντίθετες ταχύτητες.

Θεωρήστε ότι $m_1 \neq m_2$.

(Ϛ΄) Υπολογίστε τον λόγο των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ ώστε οι μέγιστες ταχύτητές τους να είναι ίσες.

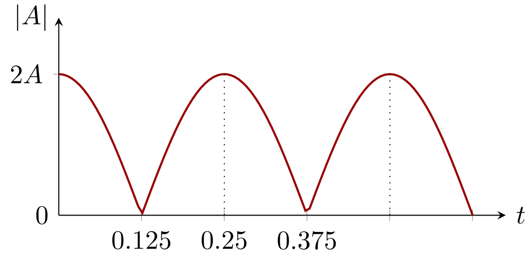
15. Ένας κύβος μάζας $m = 10\,Kg$ ισορροπεί τοποθετημένος πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στη μια κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι δεμένη η μια άκρη ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 250\,n/m$, του οποίου η άλλη άκρη είναι δεμένη σε ακλόνητο σημείο κατακόρυφου τοίχου. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Στην απέναντι κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι δεμένο μη ελαστικό και αβαρές νήμα το οποίο έχει όριο θραύσεως $T_{\vartheta\rho} = 120\,N$.

1.1 Θέματα στις Ταλαντώσεις (με απαντήσεις)

1.1.1 Ερωτήσεις

1. Σώμα μετέχει σε δύο ταλαντώσεις της μορφής

$$x_1 = A\,\eta\mu\,\omega_1 t \tag{1.1}$$
$$x_2 = A\,\eta\mu\,\omega_2 t \tag{1.2}$$

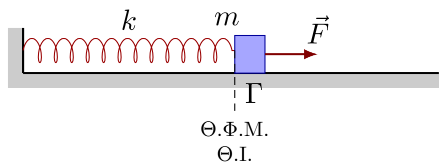


με συχνότητες $f_1 = 38\text{Hz}$ και $f_2 > f_1$.
Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται το πλάτος της περιοδικής κίνησης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.
Στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας του:

(α΄) 10 φορές. (β΄) 20 φορές. (γ΄) 40 φορές.

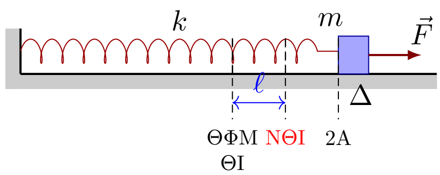
Λύση:
Η περίοδος του διακροτήματος που παράγεται είναι $0.375 - 0.125 = 0.25\,\text{s}$. Όμως $T = \frac{1}{f_2 - f_1} = 0.25$ άρα $f_2 - f_1 = 4 \Leftrightarrow f_2 = 42$ Hz.
Η συχνότητα ταλάντωσης είναι $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Leftrightarrow \bar{f} = f_{\tau\alpha\lambda} = \frac{f_1 + f_2}{2} = 40\text{Hz}$ και η περίοδος $T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{f} = \frac{1}{40}\text{s}$.
Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί σε μία περίοδο διακροτήματος είναι $N = \frac{T_\delta}{T_{\tau\alpha\lambda}} = \frac{0.25}{1/40} = 0.25 \cdot 40 = 10$ ταλαντώσεις και σε κάθε ταλάντωση περνάει 2 φορές από τη θέση ισορροπίας άρα 20 φορές. Σωστό το (β).

2. Στο σώμα m του σχήματος που είναι δεμένο σε ελατήριο k και ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται ξαφνικά δύναμη F μέχρι την χρονική στιγμή που το σώμα σταματάει στιγμιαία. Η ταχύτητα με την οποία θα περάσει το σώμα από τη θέση ισορροπίας του μετά τον μηδενισμό της δύναμης F έχει μέτρο:



(α΄) $\dfrac{2F}{\sqrt{mk}}$ (β΄) $\dfrac{F}{\sqrt{mk}}$ (γ΄) $\dfrac{F}{\sqrt{2mk}}$

Λύση:
Με την επίδραση της σταθερής δύναμης F το σύστημα θα εκτελέσει ταλαντωση (μόνο την μισή μέχρι να μηδενιστεί η δύναμη), ξεκινώντας από την αριστερή ακραία θέση (την ΘΦΜ και ΘΙ χωρίς τη δύναμη F).



Η Θέση ισορροπίας *με την δύναμη* F είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά από την αρχική θέση κατά $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k\ell = F \Leftrightarrow \ell = F/k$. Το σώμα όμως θα φτάσει στο σημείο Δ όπου μηδενίζεται η ταχύτητά του (και η εξωτερική δύναμη F), το οποίο είναι η δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης (με την F).
Όταν καταργηθεί η F τότε η θέση ισορροπίας γίνεται ξανά η ΘΦΜ, όμως το σώμα βρίσκεται χωρίς ταχύτητα στο Δ που απέχει από το Γ απόσταση $2\ell = \frac{2F}{k}$, οπότε αυτό είναι το πλάτος της

τελικής ταλάντωσης του σώματος. Μετά από όλα αυτά (ουφ) μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα με την οποία θα περάσει από το Γ, ως $v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{2F}{k}}$ οπότε τελικά $v_{\max} = \dfrac{2F}{\sqrt{mk}}$. Σωστό το (α).

3. Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση για την οποία η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$x = A\,\text{ημ}(\omega t) + \sqrt{3}A\,\text{ημ}(\omega t + 3\pi/2)$$

Η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης αυτής θα είναι ίση με :

(α′) $v_{\max} = \omega A$ (β′) $v_{\max} = 2\omega A$ (γ′) $v_{\max} = \sqrt{3}\omega A$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

Οι ταλαντώσεις έχουν ίσες συχνότητες οπότε $A' = \sqrt{A^2 + (\sqrt{3}A)^2 + 2A\sqrt{3}A\,\text{συν}(3\pi/2)}$ και μετά από πράξεις $A' = 2A$, (αφού $\text{συν}(3\pi/2) = 0$). Άρα $v_{\max} = \omega 2A$, σωστό το (β).

4. Σώμα m δεμένο σε ελατήριο k κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση σε αέρα με μικρό συντελεστή απόσβεσης b και εξωτερική δύναμη της μορφής $F_\delta = F_0\,\text{συν}\,2\pi f_\delta t$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι το μέγιστο δυνατό. Αν αντικαταστήσουμε το σώμα με άλλο διπλάσιας μάζας, τότε για να έχουμε πάλι μέγιστο πλάτος ταλάντωσης πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη:

(α′) να μείνει σταθερή. (β′) να αυξηθεί κατά 30% (γ′) να μειωθεί κατά 30%

Δίνεται ότι $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$

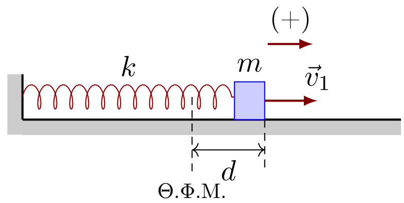
Λύση:

Το σύστημα αρχικά είναι σε συντονισμό, επομένως $f_\delta = f_0$. Με την αντικατάσταση του σώματος με άλλο μάζας $2m$, η νέα ιδιοσυχνότητα γίνεται $f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}f_0 \approx 0,7f_0$. Για να έχουμε πάλι μέγιστο πλάτος (συντονισμό) πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη να μειωθεί από $f_0 \to f_0'$ ή $\Delta f_\delta = f_0' - f_0$ και το ποσοστό μεταβολής της είναι:

$\dfrac{\text{Μεταβολή}}{\text{Αρχική τιμή}}100\% = \dfrac{\Delta f}{f_0}100\% = \dfrac{0,7f_0 - f_0}{f_0}100\% = \dfrac{-0,3f_0}{f_0}100\% = -30\%$

Άρα σωστό το (γ).

5. Σώμα m δεμένο σε ελατήριο k κρατείται σε απομάκρυνση d και βάλλεται με ταχύτητα $v_1 = \omega d$ προς τα δεξιά όπως στο σχήμα. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης είναι:



(α′) $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$ (β′) $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{3\pi}{4})$ (γ′) $x = 2d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$

Λύση:

Ενέργειες ταλάντωσης στην θέση εκτόξευσης:

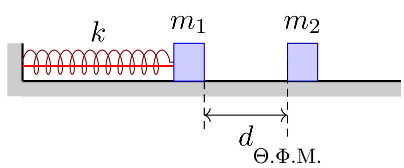
$\frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow m\frac{k}{m}d^2 + kd^2 = kA^2 \Leftrightarrow 2d^2 = A^2 \Leftrightarrow A = d\sqrt{2}$

Αρχική φάση: $+d = d\sqrt{2}\,\text{ημ}(\varphi_0) \Leftrightarrow \text{ημ}(\varphi_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ή $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$

Δεκτή η $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ επειδή $v_1 > 0$, άρα $x = \sqrt{2}d\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{4})$

Σωστή η (α)

6. Σώμα m_1 δεμένο σε ελατήριο k κρατείται με νήμα σε απομάκρυνση d. Στη θέση ισορροπίας του βρίσκεται ακίνητο δεύτερο σώμα $m_2 = 3m_1$. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα. Η κρούση των σωμάτων είναι κεντρική και πλαστική. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:



(α') $A' = \frac{d}{4}$ (β') $A' = \frac{d}{3}$ (γ') $A' = \frac{d}{2}$

Η θέση που κόβεται το νήμα είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης του m_1 (όση ταλάντωση προλάβει να κάνει τέλος πάντων!) γιατί εκεί έχει ταχύτητα μηδέν, άρα $A = d$. Η θέση της σύγκρουσης είναι η θέση ισορροπίας του m_1 άρα φτάνει εκεί με μέγιστη ταχύτητα $v_1 = \omega A \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}d$.

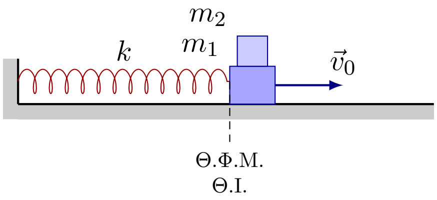
Α.Δ.Ο.: $m_1 v_1 = (m_1 + 3m_1)v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = \frac{1}{4}v_1 \Leftrightarrow v_\sigma = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}d$

Όμως το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην ΘΙ της νέας ταλάντωσης, άρα: $v'_{\max} = v_\sigma$

$v'_{\max} = \omega' A' \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}d = \sqrt{\frac{k}{4m_1}}A' \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}d = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m_1}}A' \Leftrightarrow A' = \frac{d}{2}$

Σωστή η (γ)

7. Σώμα m_1 είναι δεμένο σε ελατήριο k και πάνω σε αυτό βρίσκεται δεύτερο σώμα m_2, το οποίο παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής μ. Όταν το σύστημα των m_1, m_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχει ταχύτητα v_0. Η τιμή της ταχύτητας v_0 ώστε το m_2 να μην ολισθαίνει πάνω στο m_1 πρέπει να είναι:



(α') $v_0 \le \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$ (β') $v_0 \ge \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$ (γ') $v_0 \le \mu g\sqrt{\frac{m_2}{k}}$

Λύση:

Για να μήν ολισθήσει το m_2 πάνω στο m_1 πρέπει η στατική τριβή να είναι μικρότερη της οριακής τριβής $T_s \le T_{\text{op}} \Leftrightarrow T_s \le \mu m_2 g$.

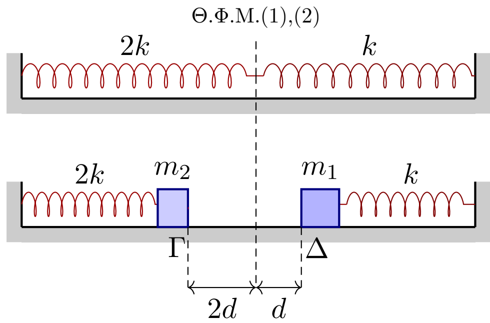
Το σώμα m_2 κάνει α.α.τ. με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ και σταθερά επαναφοράς $D_2 = m_2\omega^2$. Η μέγιστη δύναμη που δέχεται είναι $\Sigma F_{2,max} = T_s = D_2 A$. Άρα πρέπει να ισχύει $D_2 A \le \mu m_2 g \Leftrightarrow m_2\omega^2 A \le \mu m_2 g \Leftrightarrow \frac{k}{m_1+m_2}A \le \mu g$

Όμως η ταχύτητα v_0 είναι μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, άρα: $A = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}v_0$. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, έχουμε:

$\frac{k}{m_1+m_2}A \le \mu g <=> \frac{k}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}v_0 \le \mu g \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}v_0 \le \mu g <=> v_0 \le \mu g\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

Σωστή η (α)

8. Στις ελεύθερες άκρες ελατηρίων k και $2k$ συνδέονται σώματα $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ αντίστοιχα. Τα σώματα απομακρύνονται από την κοινή θέση φυσικών μηκών των ελατηρίων κατά $2d$ και d αντίστοιχα και την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνονται ελεύθερα. Τα σώματα συγκρούονται στη Θ.Φ.Μ. κεντρικά και ελαστικά, και το συσσωμάτωμα κάνει α.α.τ. με $D = 3k$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:



(α') $A' = d$ (β') $A' = d/2$ (γ') $A' = 2d$

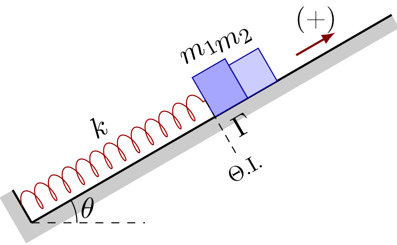
Λύση:

Θα βρούμε τις ταχύτητες του m_2 και του m_1 στη θέση της σύγκρουσης (ΘΙ τους). Επειδή τα σώμαατα αφήνονται (έχουν ταχύτητα μηδέν) ξεκινούν από ακραίες θέσεις και φτάνουν στη ΘΙ με μέγιστες ταχύτητες, δηλαδή $A_2 = 2d$, και $A_1 = d$ και οι ταχύτητές τους είναι $v_2 = \sqrt{\frac{2k}{2m}}2d = \sqrt{\frac{k}{m}}2d$ και $v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}d$ αντίστοιχα.

Α.Δ.Ο. στην κρούση $2mv_2 - mv_1 = 3mv_\sigma \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{k}{m}}2d - \sqrt{\frac{k}{m}}d = 3v_\sigma \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{k}{m}}d = 3v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = \sqrt{\frac{k}{m}}d$

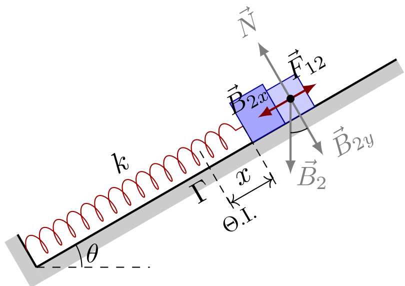
Όμως η ταχύτητα υ_σ είναι μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης, άρα: $A' = \sqrt{\frac{3m}{3k}}\upsilon_\sigma$. Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση, έχουμε:
$A' = \sqrt{\frac{3m}{3k}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} d \Leftrightarrow A' = d$
Σωστή η (α)

9. Στην ελεύθερη άκρη ελατηρίου σταθεράς k σε πλάγιο επίπεδο γωνίας θ ισορροπούν σώματα m_1 και m_2. Συμπιέζουμε το ελατήριο με τα σώματα κατά d από την θέση ισορροπίας και τα αφήνουμε ελεύθερα να κάνουν α.α.τ. Η μέγιστη συμπίεση d που μπορούμε να πετύχουμε χωρίς το m_2 να χάσει την επαφή του με το m_1, είναι:



(α΄) $d = \frac{(m_1+m_2)g\,\text{ημ}\,\theta}{k}$ (β΄) $d = \frac{m_1 g\,\text{ημ}\,\theta}{k}$ (γ΄) $d = \frac{m_2 g\,\text{ημ}\,\theta}{k}$

Λύση:
Η συμπίεση d από την θέση ισορροπίας των σωμάτων είναι και το πλάτος A της ταλάντωσης που θα εκτελέσουν, αφού εκεί έχουν ταχύτητα μηδέν. Για να μήν χάσει την επαφή του το m_2 με το m_1 πρέπει να υπάρχει πάντα δύναμη επαφής από το m_1 στο m_2. Στην τυχαία απομάκρυνση x προς τα πάνω (από τη ΘΙ) θα πρέπει να ισχύει $F_{12} \geq 0$.



Το σώμα m_2 κάνει α.α.τ. με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ και σταθερά επαναφοράς $D_2 = m_2\omega^2$. Άρα πρέπει να δέχεται δύναμη επαναφοράς της μορφής $\Sigma F = -D_2 x \Leftrightarrow F_{12} - B_{2x} = -D_2 x \Leftrightarrow F_{12} = m_2 g\,\text{ημ}\,\varphi - D_2 x$.
Επομένως πρέπει να ισχύει $m_2 g\,\text{ημ}\,\varphi - D_2 x \geq 0$, για κάθε x, άρα και για το $x = +A$. Αυτό μας δίνει $m_2\omega^2 A \leq m_2 g\,\text{ημ}\,\varphi <=> \frac{k}{m_1+m_2}A \leq g\,\text{ημ}\,\varphi$. και τελικά $A \leq \frac{m_1+m_2}{k} g\,\text{ημ}\,\varphi$
Σωστή η (α)

10. Σώμα κάνει φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' = -bv$. Όταν το πλάτος ταλάντωσης του σώματος μειωθεί κατά 50%, η ενέργεια της ταλάντωσης θα μειωθεί κατά:

(α΄) 50% (β΄) 75% (γ΄) 90%

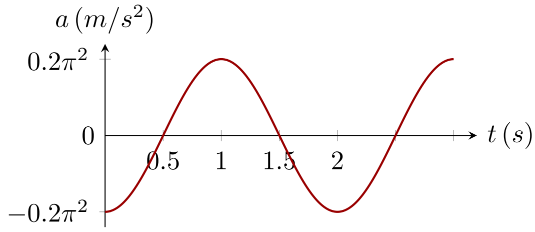
Λύση:
Μείωση 50% σημαίνει $A' = A - \frac{50}{100}A = \frac{A}{2}$. Τότε το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι:
$$\frac{|\Delta E|}{E}100\% = \frac{E - E'}{E}100\% = (1 - \frac{E'}{E})100\% = (1 - \frac{\frac{1}{2}DA'^2}{\frac{1}{2}DA^2})100\% \Leftrightarrow$$
$$(1 - \frac{A'^2}{A^2})100\% = (1 - \frac{A^2/4}{A^2})100\% \Leftrightarrow (1 - \frac{1}{4})100\% = 75\%$$
Σωστό το (β)

11. Σώμα μετέχει σε δύο αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση με ίδια πλάτη και συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, για τις οποίες ισχύει $\omega_2 - \omega_1 = 2\pi$. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται 100 φορές μέσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους της ιδιόμορφης ταλάντωσης. Οι συχνότητες των ταλαντώσεων είναι (σε Hz):

(α΄) $f_1 = 49,\ f_2 = 51$ (β΄) $f_1 = 49.5,\ f_2 = 50.5$ (γ΄) $f_1 = 99.5,\ f_2 = 100.5$

Λύση:
$\omega_2 - \omega_1 = 2\pi \Leftrightarrow 2\pi f_2 = 2\pi f_1 = 2\pi \Leftrightarrow f_2 - f_1 = 1$ και $T_\delta = \frac{1}{f_2 - f_1} = 1$ s. Σε κάθε ταλάντωση η ταχύτητα μηδενίζεται δύο φορές (στις ακραίες θέσεις), άρα αφού σε μία περίοδο διακροτήματος η ταχύτητα μηδενίζεται 100 φορές το σώμα εκτελεί 50 ταλαντώσεις (σε 1s). Άρα η συχνότητα της ταλάντωσης είναι 50Hz. Όμως $f_{\text{ταλ}} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ άρα $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = 50 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 100$. Λύνουμε εύκολα το σύστημα βρίσκοντας $f_2 = 50,5$ Hz και $f_1 = 49.5$ Hz
Σωστό το (β)

12. Σύστημα ελατηρίου-σώματος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από το διπλανό διάγραμμα.
Η εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος είναι:



(α΄) $x = 0.2\,\text{ημ}(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (β΄) $x = 0.2\pi\,\text{ημ}(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (γ΄) $x = 0.2\,\text{ημ}(\pi t + \frac{3\pi}{2})$

Λύση:
Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε μέγιστη αρνητική επιτάχυνση, άρα το σύστημα βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση ($x = +A$). Η περίοδος φαίνεται εύκολα ότι είναι $T = 2$s και η συχνότητα $\omega = 2\pi/T = \pi$ rad/s. Μένει μόνο η αρχική φάση της ταλάντωσης και το πλάτος:
$x = A\,\text{ημ}(\omega t + \varphi_0)$ άρα $-A = \text{ημ}(\varphi_0) \Leftrightarrow \text{ημ}\,\varphi_0 = -1 \Leftrightarrow \varphi_0 = 3\pi/2$.
$a_{max} = \omega^2 A \Leftrightarrow 0.2\pi^2 = \pi^2 A \Leftrightarrow A = 0,2$m Άρα $x = 0,2\,\text{ημ}(\pi t + \frac{3\pi}{2})$
Σωστό το (γ)

13. Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και με συχνότητες $f_1 = 200$Hz και f_2. Μειώνουμε τη συχνότητα f_2 κατά 8Hz και παρατηρούμε ότι ο αριθμός των διακροτημάτων που παράγονται ανά δευτερόλεπτο παραμένει ο ίδιος. Η συχνότητα f_2 έχει τιμή:

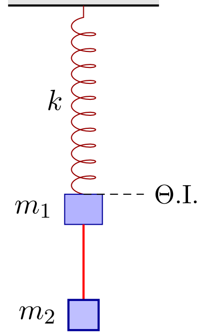
(α΄) 192 Hz (β΄) 196 Hz (γ΄) 204 Hz (δ΄) 208 Hz

Λύση:
Αφού η περίοδος εξαρτάται μόνο από την διαφορά των συχνοτήτων $|f_1 - f_2|$ και μειώνουμε την f_2 κατά 8Hz και η διαφορά μένει ίδια άρα πριν ήταν μεγαλύτερη κατά 4Hz από τη f_1 και τώρα είναι μικρότερη κατά 4Hz
Άρα ήταν 204Hz και έγινε 196Hz
Σωστό το (β)

1.1.2 Ασκήσεις

1. Σώμα μάζας $m_1 = 1$kg είναι δεμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100$N/m. Στο σώμα m_1 είναι δεμένο μέσω νήματος δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 3$kg. Το σύστημα των δύο σωμάτων απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας τους προς τα κάτω και αφήνεται ελεύθερο, οπότε κάνει αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνεται $g = 10\,\text{m/s}^2$.

(α΄) Να υπολογίσετε την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου για την οποία το νήμα δεν χαλαρώνει κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.



(β') Να βρείτε εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο, αν $A = 0,4\text{m}$.

(γ') Να υπολογίσετε την ταχύτητα v_1 των σωμάτων όταν η τάση του νήματος έχει μέτρο $15\,\text{N}$ για δεύτερη φορά.

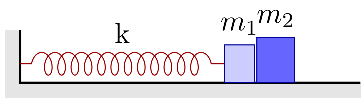
Κάποια χρονική στιγμή που το σύστημα διέρχεται από τη Θ.Ι. με αρνητική ταχύτητα, το νήμα κόβεται και το σώμα m_2 απομακρύνεται.

(δ') Να υπολογίσετε την μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος κατά την απομάκρυνση του σώματος m_2.

Λύση:

α) Το σώμα m_2 κάνει α.α.τ. με την συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5\text{rad/s}$ (όσο το νήμα είναι τεντωμένο) και έχει σταθερά επαναφοράς $D_2 = m_2\omega^2$. Άρα πρέπει να δέχεται συνισταμένη δύναμη της μορφής $\Sigma F_2 = -D_2 x \Leftrightarrow T - m_2 g = -m_2\omega^2 x \Leftrightarrow T = m_2 g - m_2\omega^2 x$ (1). Επειδή $T \geq 0 \Leftrightarrow m_2 g - m_2\omega^2 x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{g}{\omega^2}$
Άρα και το πλάτος A πρέπει να είναι $A \leq \frac{g}{\omega^2}$ και οριακά $A_{\max} = \frac{10}{5^2} = 0,4\text{m}$.
β) Με θετική φορά πάνω, η αρχική απομάκρυνση είναι $x_0 = -0,4\text{m}$ άρα για την αρχική φάση έχουμε $-0,4 = 0,4\,\text{ημ}\,\varphi_0 \Leftrightarrow \text{ημ}\,\varphi_0 = -1 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ rad. Η εξίσωση ταλάντωσης είναι $x = 0,4\,\text{ημ}(5t + \frac{3\pi}{2})\,(SI)$ και την αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1): $T = 30 - 30\,\text{ημ}(5t + \frac{3\pi}{2})\,(SI)$.
γ) Από την εξίσωση (1) έχουμε $T = 30 - 75x$ (SI) και θέτοντας $15 = 30 - 75x \Leftrightarrow 75x = 15 \Leftrightarrow x = 0,2\text{m}$. Ενέργειες ταλάντωσης $K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow 4v^2 + 100 \cdot 0.2^2 = 100 \cdot 0.4^2 \Leftrightarrow 4v^2 = 100(0.16 - 0.04) \Leftrightarrow v = -\sqrt{3}\text{m/s}$ (τη 2^{η} φορά).
δ) Η θέση ισορροπίας αλλάζει όταν φύγει το m_2, όπως και η συχνότητα ω. Για την νέα θέση ισορροπίας πρέπει να βρούμε πρώτα την απόσταση ℓ_1 της ΘΦΜ από την παλιά ΘΙ στην οποία ισορροπεί μάζα $m_1 + m_2$: $k\ell_1 = (m_1 + m_2)g \Leftrightarrow \ell_1 = 0.4\text{m}$. Η νέα ΘΙ θα βρίσκεται σε απόσταση $m_1 g = k\ell_2 \Leftrightarrow \ell_2 = 0.1\text{m}$ από την ΘΦΜ. Επομένως το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = \ell_1 - \ell_2 = 0.3\text{m}$ από τη νέα ΘΙ και κινείται με την μέγιστη ταχύτητα της πρώτης ταλάντωσης, άρα $v_1 = v_{\max} = 5 \cdot 0.4 = 2\text{m/s}$. Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης είναι $E' = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = 2 + 4,5 = 6,5\text{J}$. Η ενέργεια πριν ήταν $E = \frac{1}{2}kA^2 = 8\text{J}$, άρα $\Delta E = -1,5\text{J}$.

2. Οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K = 300\,N/m$ είναι δεμένο στη μία άκρη του σε σταθερό σημείο και στην άλλη άκρη του σε σώμα μάζας $m_1 = 3\,Kg$. Το σώμα m_1 εφάπτεται χωρίς να είναι κολλημένο με σώμα m_2 και τα δύο σώματα ηρεμούν. Θεωρούμε το επίπεδο της κίνησης λείο. Το σώμα m_1 δέχεται οριζόντια δύναμη προς το μέρος του ελατηρίου μέτρου $F = 25\,N$ η οποία καταργείται όταν το ελατήριο συμπιεστεί κατά $\alpha = 6\,cm$. Μετά την κατάργηση της δύναμης το σώμα m_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και γυρίζοντας στην αρχική του θέση, συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο σώμα m_2.



(α') Να βρεθεί η αρχική μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β') Να βρεθεί η ταχύτητα το συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και η μάζα m_2, αν το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι 25%.

(γ') Να βρεθεί το νέο πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ') Να υπολογιστεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος όταν αυτό διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση $x_1 = \dfrac{A'\sqrt{3}}{2}$, όπου A' το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Λύση:

α) Το έργο της δύναμης F μετατρέπεται σε ενέργεια διέγερσης-ταλάντωσης, επομένως $E = Fa \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = Fa \Leftrightarrow \frac{1}{2}300A^2 = 25 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow 150A^2 = 150 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow A = 0.1\text{m}$.

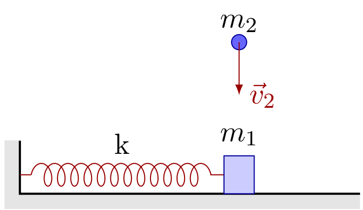
β) Το σώμα m_1 γυρίζοντας στην θέση ισορροπίας του έχει ταχύτητα $v_1 = \omega A = \sqrt{\frac{300}{3}}0.1 \Leftrightarrow v_1 = 1\text{m/s}$. Α.Δ.Ο. στην κρούση: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 3 = (3+m_2)v_\sigma$ (1). Το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας στην κρούση υπολογίζεται από τον τύπο $\frac{K-K'}{K}100\% = 25\% \Leftrightarrow (1-\frac{K'}{K}) = 0.25 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\sigma^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} = 0.75 \Leftrightarrow \frac{(3+m_2)v_\sigma^2}{3} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (3+m_2)v_\sigma^2 = 9/4$ (2). Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) [διαιρώντας κατα μέλη] και βρίσκουμε $v_\sigma = \frac{3}{4}\text{m/s}$, και μετά εύκολα από την (1) $m_2 = 1\text{kg}$.

γ) Η v_σ είναι η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης, επομένως $v_\sigma = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}A' \Leftrightarrow A' = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{300}} = \frac{3}{4}\frac{2}{10\sqrt{3}} \Leftrightarrow A' = 0.1\frac{\sqrt{3}}{2}\text{m}$.

δ) $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v$, άρα πρέπει να βρούμε την ταχύτητα v_1 στη θέση x_1. Με ενέργειες ταλάντωσης (τί άλλο!) $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Leftrightarrow 4v_1^2 + \frac{1}{2}300\cdot10^{-2}\frac{9}{16} = \frac{1}{2}300\cdot10^{-2}\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4v_1^2 = 150\cdot10^{-2}(\frac{3}{4} - \frac{9}{16}) \Leftrightarrow 4v_1^2 = 1.5\frac{3}{16} \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{9}{2\cdot4\cdot16} \Leftrightarrow v_1 = \pm\frac{3\sqrt{2}}{16}\text{m/s}$.

Και με αντικατάσταση: $\frac{dK}{dt} = -kx_1v_1 = -300\cdot0.1\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3\sqrt{2}}{16} = -45\frac{\sqrt{6}}{16}$ J/s.

3. Οριζόντιο ελατήριο, σταθεράς $k = 100\,N/m$, είναι δεμένο από σταθερό σημείο ενώ στην άλλη άκρη του είναι δεμένο σώμα μάζας $m = 1\,kg$. Το ελατήριο εκτρέπεται συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $d = 20\,cm$ και αφήνεται ελεύθερο. Την ίδια στιγμή αφήνεται από κατάλληλο ύψος ένα σώμα $m_2 = 3\,kg$ που συναντά και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_1 όταν αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.



(α') Να βρεθεί το ύψος h.

(β') Να βρεθεί το νέο πλάτος και η εξίσωση $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(γ') Να υπολογιστεί η απώλεια ενέργειας κατά την κρούση, και το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης.

(δ') Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A$ για δεύτερη φορά.

Λύση:

α) Το σώμα m_1 αφήνεται να κάνει ταλάντωση από παραμόρφωση d άρα αυτή είναι το πλάτος της ταλάντωσης, $A = 0.2\text{m}$. Από την αριστερή ακραία θέση (που αφήνεται) μέχρι τη ΘΙ (ΘΦΜ) όπου συγκρούεται με το m_2, το σώμα χρειάζεται χρόνο $t = T/4$ και φτάνει με την μέγιστη ταχύτητα $v_{max} = \omega A$.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10$ rad/s και $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.2\pi\text{s}$. Το σώμα m_2 πρέπει να πέσει για χρόνο $t_1 = T/4 = \pi/20\text{s}$, άρα το ύψος θα είναι $h = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}10\cdot\pi^2/400 = 1/8\text{m}$. ($\pi^2 = 10$)

β) Α.Δ.Ο. στον $x'x$ άξονα: $m_1v_1 = (m_1+m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 1\cdot2 = 4v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = 0.5\text{m/s}$. Αυτή είναι η $v'_{max} = \omega'A'$ της νέας ταλάντωσης. $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5\text{rad/s}$ επομένως $A' = 0.1\text{m}$. Με θετική φορά δεξιά δέν έχουμε αρχική φάση και η εξίσωση είναι $x = 0.1\,\text{ημ}(5t)$ (SI).

γ) Απώλεια ενέργειας $|\Delta K| = K - K' = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\sigma^2 = 2 - 0,5 = 1,5\text{J}$ (και η ίδια είναι η απώλεια ενέργειας της ταλάντωσης, αφού οι κινητικές είναι στη ΘΙ).

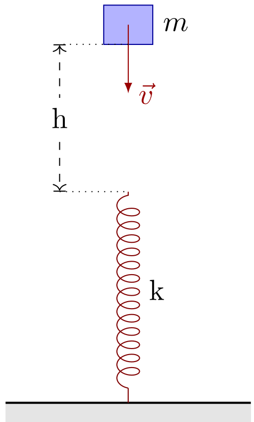
Το ποσοστό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης είναι $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta K}{K} = \frac{-1,5}{2} = -0.75$ ή -75%.

δ) $K + U = E \Leftrightarrow dK + dU = \cancelto{0}{dE} \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -(-kx_1v_1) \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = kx_1v_1$ (1)

$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Leftrightarrow 4v_1^2 = \frac{1}{2}100(0.1\frac{1}{4}) \Leftrightarrow v_1^2 = 5 \Leftrightarrow v_1 = \pm\sqrt{5}\text{m/s}$. Τη δεύτερη φορά $v_1 = -\sqrt{5}\text{m/s}$.

(1) $\Rightarrow \frac{dU}{dt} = 100\cdot0.1\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{5}) = -5\sqrt{15}\text{J/s}$ (Σωστό πρόσημο αφού τη δεύτερη φορά γυρίζει προς τη ΘΙ, ποτέ δεν βλάπτει ένας λογικός έλεγχος των μαθηματικών...)

4. Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\,N/m$ είναι σταθερά δεμένο στο έδαφος. Πάνω από την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου αφήνουμε από ύψος $h = 0,15\,m$ ένα σώμα μάζας $m = 1\,kg$. Το σώμα πέφτει ελεύθερα και καρφώνεται στην ελεύθερη άκρη του ελατηρίου (χωρίς απώλειες ενέργειας).



(α΄) Να βρείτε την μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β΄) Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του συστήματος $x = f(t)$, θεωρώντας θετική την φορά προς τα επάνω.

(γ΄) Να βρείτε την δύναμη επαναφοράς και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση που συμβαίνει $K = 3U$ για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

(δ΄) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην παραπάνω θέση.

Λύση:
α) Το σώμα m φτάνει στο ελατήριο με ταχύτητα v_1 που βρίσκεται με ΑΔΜΕ
$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{3}$ m/s.
Όταν σφηνώνεται στο ελατήριο βρίσκεται στην ΘΦΜ αλλά η ΘΙ της ταλάντωσης είναι πιό κάτω ας πούμε σε απόσταση ℓ από την ΘΦΜ, εκεί όπου ισχύει $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k\ell = mg \Leftrightarrow \ell = 0.1$ m. Άρα την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +\ell$ και έχει ταχύτητα $v_1 = -\sqrt{3}$ m/s (με θετική φορά προς τα πάνω) και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ rad/s.
$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow 3 + 1 = 100A^2 \Leftrightarrow A = 0.2$m
Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι στην κατώτερη ακραία θέση όπου $x_{max} = \ell + A = 0.3$m
β) Ζητάμε ουσιαστικά την αρχική φάση, γιατί πλάτος και κυκλική συχνότητα είναι ήδη γνωστά.
$x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \overset{t=0}{\Longrightarrow} +0.1 = 0.2\,\eta\mu(\varphi_0) \Leftrightarrow \eta\mu(\varphi_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$
Η ταχύτητα τότε είναι αρνητική $v_1 < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\varphi_0) < 0$, άρα δεκτή η $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$.
Η εξίσωση ταλάντωσης: $x = 0.2\,\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3})$ (SI)
γ) $K = 3U$. $K + U = E \Leftrightarrow 3U + U = E \Leftrightarrow 4U = E \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}kx_2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}A^2 \Leftrightarrow x = \pm A/2$. Άρα θα περάσει για πρώτη φορά από την θέση $x = -A/2$ κινούμενο προς τα κάτω. Η δύναμη επαναφοράς υπολογίζεται από τον τύπο $F = -kx$ (x από ΘΙ), άρα $F = -100(-0.1) = 10$N. Η δύναμη του ελατηρίου υπολογίζεται από τον ίδιο τύπο $F_{\varepsilon\lambda} = -kx$, μόνο που τώρα το x πρέπει να μετρηθεί από τη ΘΦΜ. Σε απομάκρυνση $x = -0.1$m από τη ΘΙ, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $x = \ell + A/2 = 0.2$m και η δύναμη $F_{\varepsilon\lambda} = 100 \cdot 0.2 = 20$N (Θετική γιατί είναι προς τη ΘΦΜ, άρα έχει τη κατεύθυνση προς τα πάνω). Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όμοια υπολογίζεται ως $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$ (x από ΘΦΜ) άρα $U_{\varepsilon\lambda} = 2$J.
δ) Υπολογίζουμε την ταχύτητα στην απομάκρυνση $x = -0.1$m. Από την δεδομένη σχέση $K = 3U \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2}100 \cdot 0.1^2 \Leftrightarrow v^2 = 1 \Leftrightarrow v = \pm 1$ m/s. Όμως την πρώτη φορά θα κατεβαίνει άρα $v = -1$ m/s.
$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v = -kxv = -100(-0.1)(-1) = -10$ J/s.

5. Το πίσω (μονό) αμορτισέρ μίας μηχανής συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς k. Αν αγνοήσουμε το εμπρός αμορτισέρ, τότε όταν κάθεται ο οδηγός μάζας $m = 80$kg αυτό συμπιέζεται κατά 5cm.

(α΄) Υπολογίστε τη σταθερά k του αμορτισέρ.

(β΄) Υποθέτουμε ότι το ελατήριο του αμορτισέρ συγκρατεί συνολικά μάζα $m_{o\lambda} = 160$kg. Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης της μηχανής.

(γ΄) Φυσικά το αμορτισέρ μίας μηχανής δέν πρέπει να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Γι' αυτό και εισάγουμε απόσβεση στο αμορτισέρ (μέσω κάποιου υγρού) με σταθερά b, έτσι ώστε να υπάρχει δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi} = -bv$. Εκτιμήστε τη σταθερά b έτσι ώστε να χάνεται το 99,99% της ενέργειας ταλάντωσης σε μία περίοδο T. Δίνεται ότι η σταθερά Λ της εκθετικής μείωσης συνδέεται με τη σταθερά b με τη σχέση $\Lambda = \frac{b}{2m}$.

(δ΄) Η μηχανή κινούμενη με ταχύτητα υ περνάει από δρόμο με διαδοχικά εμπόδια (πχ τα ανακλαστικά "μάτια γάτας" στη διπλή γραμμή) που απέχουν το ένα από το άλλο 80cm, με αποτέλεσμα να κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Βρείτε την ταχύτητα υ ώστε να έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους ταλάντωσης. (Φυσικά αυτή πρέπει να είναι η ταχύτητα *που πρέπει να αποφεύγει ο οδηγός!*)

Δίνονται: $\ln 5 = 1,61$, $\ln 2 = 0,69$.

Λύση:

α) Εύκολα $\Delta F = k\Delta x \Leftrightarrow 800 = k5 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow k = 16000$ N/m

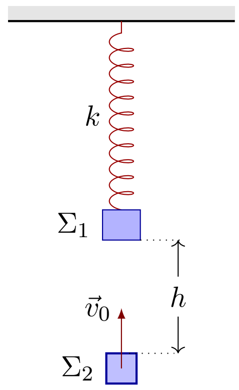
β) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{o\lambda}}{k}} \Leftrightarrow T = 1.57 \cdot 10^{-2}$ s ή $T = 0.5\pi \cdot 10^{-2}$ s

γ) Ζητάμε το Λ ώστε $\frac{|\Delta E|}{E_0}100\% = 99,99\% \Leftrightarrow \frac{E_0 - E_1}{E_0} = 0,9999 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_0} = 0.0001$

$E_1 = 10^{-4}E_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA_1^2 = 10^{-4}\frac{1}{2}kA_0^2 \Leftrightarrow A_1 = 10^{-2}A_0 \Leftrightarrow A_0\,\mathrm{e}^{-\Lambda T} = 10^{-2}A_0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\Lambda T} = 10^{-2} \Leftrightarrow -\frac{\Lambda}{T} = \ln(10^{-2}) \Leftrightarrow -\Lambda = -2T\ln 10 \Leftrightarrow \Lambda = 2T\ln(2\cdot 5) \Leftrightarrow \Lambda = 2T(\ln 2 + \ln 5)$ και κάνοντας τις πράξεις: $\Lambda = 7.23 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$. Οπότε $b = 2m\Lambda \Leftrightarrow b = 23.14\ \mathrm{kgs}^{-1}$

δ) Καθώς κινείται το αυτοκίνητο χτυπάει περιοδικά στα διαδοχικά εξογκώματα. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών χτυπημάτων είναι ίσος με τον χρόνο t_1 που χρειάζεται για να καλύψει την απόσταση $d = 80$ cm, άρα $t_1 = \frac{d}{v}$. Αυτή είναι η περίοδος της εξωτερικής διέγερσης (από τα εξογκώματα), άρα η συχνότητα της διέγερσης είναι $f_\delta = \frac{1}{t_1} = \frac{v}{d}$. Για να έχουμε συντονισμό πρέπει $f_\delta = f_0$ ή $T_\delta = T_0 \Leftrightarrow t_1 = T \Leftrightarrow \frac{d}{v} = T \Leftrightarrow v = \frac{d}{T}$ και με αντικατάσταση $v = \frac{0.8}{0.0157} \simeq 51$ m/s

6. Σώμα Σ_1, μάζας $m_1 = m = 1$kg, ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 900$N/m , του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη σε οροφή. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m = 1$kg, βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα $\upsilon_0 = 6$m/s, από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $h = 1,35$m κάτω από το σώμα Σ_1.
Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά ελαστικά την $t = 0$ και στη συνέχεια το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
Να βρείτε:



(α΄) Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ_1.

(β΄) Την θέση του σώματος Σ_2 τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 γίνεται για 1η φορά ελάχιστη.

(γ΄) Την μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου κατά την ταλάντωση του σώματος.

(δ΄) Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1, τη στιγμή που η ταχύτητά του είναι $\upsilon = -\dfrac{\upsilon_{max}}{2}$ για πρώτη φορά.

Λύση:

α) Βρίσκουμε την ταχύτητα υ_2 με την οποία φτάνει το σώμα-2 στο σώμα-1. Με διατήρηση μηχανικής ενέργειας για το σώμα-2:

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + m_2gh \Leftrightarrow \upsilon_2^2 = \upsilon_0^2 - 2gh \Leftrightarrow \upsilon_2^2 = 36 - 27 = 9 \Leftrightarrow \upsilon_2 = 3$ m/s.

Έχουμε ελαστική κρούση με το $\upsilon_1 = 0$ άρα από τους μεγάλους τύπους θα έχουμε:

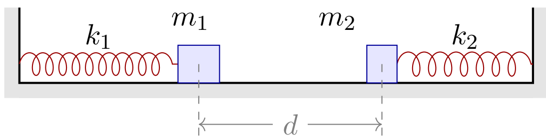
$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 \Leftrightarrow \upsilon_1' = \frac{2}{2}3 \Leftrightarrow \upsilon_1' = 3$ m/s και

$\upsilon_2' = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2 \Leftrightarrow \upsilon_2' = 0$ m/s (ανταλλάσσουν ταχύτητες).

Το σώμα-1 μετά την κρούση είναι στη ΘΙ άρα θα κάνει ταλάντωση με $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 30$ rad/s και θα ισχύει: $\upsilon_1' = \upsilon_{max} = \omega A \Leftrightarrow A = 0.1$ m.

β) Η Κινητική ενέργεια γίνεται μηδέν για πρώτη φορά στην ακραία ($x = +A$) στην οποία το σώμα φτάσει σε χρόνο $\Delta t = T/4$, όπου $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{15}$ s. Τελικά $\Delta t = \frac{\pi}{60}$ s.
Το σώμα-2 κάνει ελεύθερη πτώση μετά την κρούση και σε χρόνο Δt θα έχει πέσει κατά $y = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Leftrightarrow y = 0.014$ m
γ) Πρέπει να βρούμε την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αυτή είναι κατά ℓ πάνω από τη ΘΙ, όπου $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k\ell = m_1 g \Leftrightarrow \ell = 1/90$ m.
Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι στην κάτω ακραία θέση όπου έχουμε την μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου, οπότε $U_{\varepsilon\lambda,\max} = \frac{1}{2}k(A+\ell)^2 \Leftrightarrow U_{\varepsilon\lambda,\max} = 6.125$ J
δ) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι η συνισταμένη δύναμη $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx_1$. Αρκεί να βρούμε την θέση x_1 όπου $v_1 = -v_{max}/2 = -3/2$ m/s για πρώτη φορά. Αυτό γίνεται στο πρώτο μισό της περιόδου της ταλάντωσης, όταν το σώμα επιστρέφει από την θετική ακραία θέση, άρα $x_1 > 0$. Με ενέργειες ταλάντωσης:
$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow 900x_1^2 + (1.5)^2 = 900(0.1)^2 \Leftrightarrow x_1^2 = (9-2.25)/900 \Leftrightarrow x_1 = +\frac{\sqrt{3}}{20}$ m.
Τελικά: $\frac{dp}{dt} = -kx_1 = -45\sqrt{3}$ N.

7. Δύο σώματα[1] με μάζες $m_1 = 1\ kg$ και $m_2 = 3\ Kg$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1 = 100\ N/m$ και $k_2 = 50\ N/m$ αντίστοιχα, απέχοντας απόσταση $d = 0,3\ m$. Εκτρέπουμε το σώμα m_1 προς τα αριστερά κατά $A = 0,5\ m$ και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει ΑΑΤ.



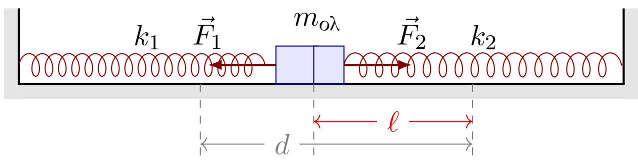
Το σώμα m_1 συγκρούεται πλαστικά με το σώμα m_2. Να βρεθούν:

(α΄) Η ταχύτητα του m_1 πριν την κρούση και η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

(β΄) Η ενέργεια ταλάντωσης μετά την κρούση.

(γ΄) Το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

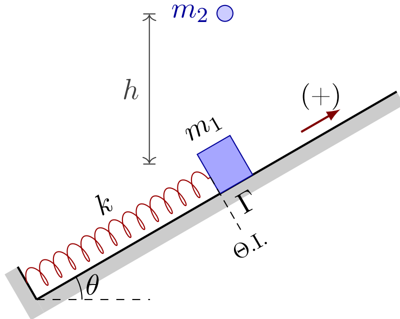
Λύση:
α) Το σώμα εκτρέπεται κατά A που είναι και το πλάτος ταλάντωσης που θα κάνει αφού ξεκινάει με $v = 0$. Για να βρούμε την ταχύτητα v_1 στην απομάκρυνση $x_1 = +d$ θα χρησιμοποιήσουμε ενέργειες ταλάντωσης:
$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow v_1^2 + 100(0.3)^2 = 100(0.5)^2 \Leftrightarrow v_1 = 4$ m/s. Α.Δ.Ο. για την κρούση: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = 1$ m/s
β) Ξέρουμε ότι το συσσωμάτωμα είναι στην ΘΦΜ του ελατηρίου-2. Αλλά η ΘΙ της ταλάντωσης θα είναι αριστερά, εκεί που οι δύο δυνάμεις των ελατηρίων γίνονται αντίθετες.



ΘΦΜ-1 ΘΙ ΘΦΜ-2

Αν πούμε ℓ την απόσταση της ΘΙ από την ΘΦΜ-2 τότε $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k_1(d-\ell) = k_2\ell \Leftrightarrow 30 - 100\ell = 50\ell \Leftrightarrow \ell = 0,2$ m. Επομένως το συσσωμάτωμα θα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +0,2$ και θα έχει ταχύτητα v_σ και η ενέργεια της ταλάντωσής του θα είναι: $E = \frac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2 \Leftrightarrow E = 3 + 2 = 5$ J.
γ) $\frac{|\Delta K|}{K}100\% = \frac{K-K'}{K}100\% = (1 - \frac{K'}{K})100\% = (1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\sigma^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}100\% = (1 - \frac{4}{16})100\% = 75\%$

8. Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\varphi = 30°$ ισορροπεί σώμα μάζας $m_1 = 3\ kg$ σε ελατήριο σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Από ύψος $h = 2.4\text{m}$ πάνω από το σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα δεύτερο σώμα μάζας $m_1 = 1$ kg. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική, γίνεται την χρονική στιγμή $t = 0$ και το συσσωμάτωμα ξεκινά απλή αρμονική ταλάντωση. Να θεωρηθεί θετική φορά προς τα επάνω στο κεκλιμένο.



(α΄) Να υπολογιστεί η κοινή ταχύτητα των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

(β΄) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής του σώματος m_2 κατά την κρούση.

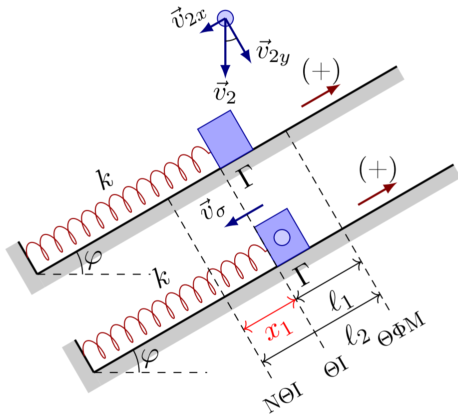
(γ΄) Γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης $x = f(t)$ της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

(δ΄) Να βρείτε σε πόσο χρονικό διάστημα το συσσωμάτωμα θα επιστρέψει στην θέση της κρούσης.

Λύση:

α) Βρίσκουμε την ταχύτητα v_2 με την οποία το m_2 φτάνει στο σώμα m_1. $h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4.8}{10}} = 0.4\sqrt{3}$ s. Και $v_2 = gt = 4\sqrt{3}$ m/s.

Η ορμή διατηρείται μόνο στον x άξονα. Α.Δ.Ο.: $m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)v_\sigma \Leftrightarrow 4\sqrt{3}\frac{1}{2} = 4v_\sigma \Leftrightarrow v_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s



β) Η ορμή είναι διάνυσμα, άρα
$\Delta p_2^2 = \Delta p_{2x}^2 + \Delta p_{2y}^2$.

Θα βρούμε τη μεταβολή σε κάθε άξονα: $\Delta p_{2y} = p'_{2y} - p_{2y} = 0 - (-m_2 v_{2y}) = 4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ kgm/s. (Θετική φορά πάνω).

$\Delta p_{2x} = p'_{2x} - p_{2x} = (-m_2 v_\sigma) - (-m_2 v_{2x}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = 1.5\sqrt{3}$ kgm/s.

Τελικά $\Delta p_2 = \sqrt{6^2 + (1.5\sqrt{3})^2} = 42.75$ kgm/s με εφ $\theta = \frac{6}{1.5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

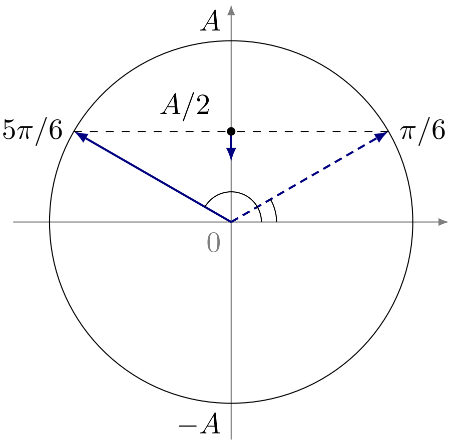
γ) Βρίσκουμε τις αποστάσεις ℓ_1, ℓ_2 της ΘΦΜ από την αρχική και τη νέα ΘΙ.

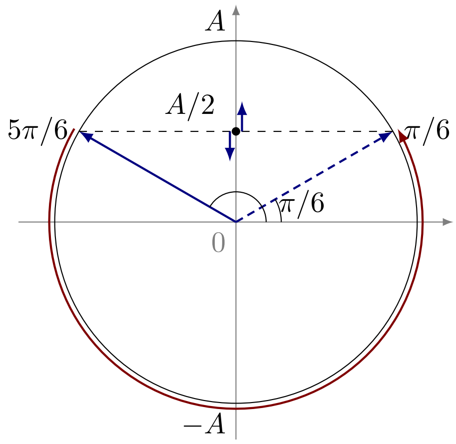
Π.ΘΙ: $k\ell_1 = m_1 g\,\text{ημ}(\varphi) \Leftrightarrow \ell_1 = 0.15\text{m}$

Ν.ΘΙ: $k\ell_2 = (m_1 + m_2)g\,\text{ημ}(\varphi) \Leftrightarrow \ell_2 = 0.2\text{m}$, άρα $x_1 = \ell_2 - \ell_1 = 0.05$ m.

Ενέργειες ταλάντωσης: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow m_{\text{ολ}}v_\sigma^2 + kx_1^2 = kA^2 \Leftrightarrow A = 0.1$ m.

Αρχική φάση: $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad γιατί βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_1 = +\frac{A}{2}$ και κινείται με ταχύτητα αρνητική ($v_\sigma < 0$ ως προς τη θετική φορά της ταλάντωσης). Από το περιστρεφόμενο διάνυσμα, παρακάτω.





δ) Ο ζητούμενος χρόνος Δt είναι ο χρόνος που απαιτείται για να γράψει το περιστρεφόμενο τόξο $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ rad, όπως φαίνεται στο περιστρεφόμενο διάνυσμα.
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 5$ rad/s και $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{4\pi}{15}$ s.

9. Σώμα εκτελεί φθίνουσα μηχανική ταλάντωση, το πλάτος της οποίας δίνεται από τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, με $A_0 = 16$cm. Μετά από 10 πλήρεις ταλαντώσεις το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι 75%.

(α') Να βρείτε το πλάτος εκείνη τη χρονική στιγμή, καθώς και την τιμή της σταθεράς Λ, αν η περίοδος είναι $T = 0,1$s.

(β') Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $30T$;

(γ') Αν η δύναμη αντίστασης δίνεται από τη σχέση $F' = -0,2v$, να βρείτε το ρυθμό μείωσης της ενέργειας του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $10T$, αν θεωρήσουμε ότι εκείνη τη στιγμή το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. της ταλάντωσής του.

Δίνεται $\pi^2 = 10$ και $\ln 2 = 0,7$.

Λύση:
α) $\frac{|\Delta E|}{E}100\% = \frac{E_0 - E'}{E_0}100\% = (1 - \frac{E'}{E_0})100\% = (1 - \frac{\frac{1}{2}DA_0^2\,\mathrm{e}^{-2\Lambda t}}{\frac{1}{2}DA_0^2})100\%$ άρα $(1 - \mathrm{e}^{-2\Lambda t})100 = 75 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2\Lambda t} = 0,25 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2\Lambda t} = 4 \Leftrightarrow 2\Lambda t = \ln 4 \Leftrightarrow \Lambda = \ln 2/(10 \cdot 0,1) \Leftrightarrow \Lambda = \ln 2 = 0,7\ \mathrm{s}^{-1}$.
Από την προηγούμενη έκφραση αν δεν αντικαταστήσουμε μπορούμε να βρούμε εύκολα το πλάτος A_1: $(1 - \frac{\frac{1}{2}DA_1^2}{\frac{1}{2}DA_0^2})100\% = 75\% \Leftrightarrow (1 - \frac{A_1^2}{A_0^2}) = 0,75 \Leftrightarrow A_1^2 = 0,25A_0^2 \Leftrightarrow A_1 = A_0/2 = 8$ cm.
Ή άμεσα: $A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\Lambda(10T)} \Leftrightarrow A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\ln 2} = A_0\,\mathrm{e}^{\ln(2^{-1})} = A_0 \cdot 2^{-1} \Leftrightarrow A_1 = A_0/2 = 8$ cm.
β) $A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\Lambda(30T)} \Leftrightarrow A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-3\ln 2} = A_0\,\mathrm{e}^{\ln(2^{-3})} = A_0 \cdot 2^{-3} \Leftrightarrow A_1 = A_0/8 = 2$ cm.
γ) Η ταχύτητα την χρονική στιγμή $10T$ βρίσκεται από το πλάτος A_1:
$v = \omega A = \frac{2\pi}{T}A = \frac{2\pi}{0.1}8 \cdot 10^{-2} = 1,6\pi \cdot 10^{-2}$ m/s.
Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας E είναι η ισχύς της αντίστασης, άρα:
$\frac{dE}{dt} = F'v = -0.2v^2 = -0.2(1,6\pi \cdot 10^{-2})^2 = -5.1 \cdot 10^{-4}$ J/s.
Άρα ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας είναι $-5,1 \cdot 10^{-4}$ J/s.

10. Ένα σώμα μάζας $m = 2$kg εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες εξελίσσονται πάνω στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και περιγράφονται από τις εξισώσεις στο S.I.

$$x_1 = 0,1\sqrt{3}\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2 = 0,1\,\eta\mu\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

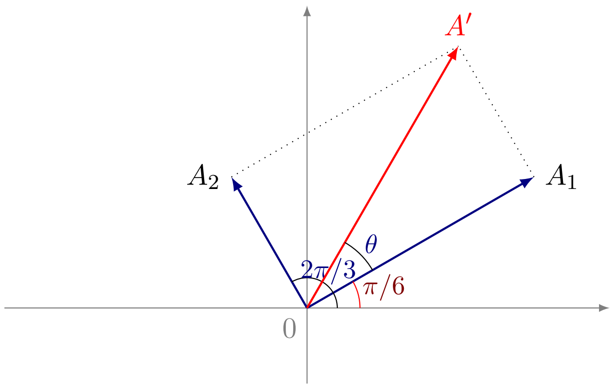
(α') Να υπολογίσετε το πλάτος A' της σύνθετης ταλάντωσης.

(β') Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τη θέση του σώματος σε σχέση με το χρόνο, $x = f(t)$.

(γ') Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi}{10}$ s.

(δ') Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του σώματος στη θέση όπου η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής για πρώτη φορά μετά την $t = 0$.

Λύση:
α) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.
$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi)} \Leftrightarrow A' = \sqrt{(0.1\sqrt{3})^2 + 0.1^2} = 0.2$ m
$\varepsilon\varphi\,\theta = \frac{A_2\,\eta\mu(\Delta\varphi)}{A_1 + A_2\,\sigma\upsilon\nu(\Delta\varphi)} = \frac{0.1\cancelto{1}{\eta\mu(\frac{\pi}{2})}}{0.1\sqrt{3} + 0.1\cancelto{0}{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα $\theta = \frac{\pi}{6}$.
β) $x = A'\,\eta\mu(\omega t + \varphi_1 + \theta) \Leftrightarrow x = 0.2\,\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow x = 0.2\,\eta\mu(10t + \frac{\pi}{3})$ (SI)



Οι θέσεις των περιστρεφόμενων την χρονική στιγμή $t = 0$

γ) Η αντίστοιχη εξίσωση ταχύτητας είναι $v = 2\,\text{συν}(10t + \frac{\pi}{3})$ (SI), επομένως
$v_1 = 2\,\text{συν}(10\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{3}) = 2\,\text{συν}(\frac{2\pi}{3}) = -1$ m/s
$v_2 = 2\,\text{συν}(10\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{3}) = 2\,\text{συν}(\frac{4\pi}{3}) = +1$ m/s
$\Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = 2 \cdot 1 - 2(-1) = 4$kgm/s
δ) $K = 3U$ και $K + U = E \Leftrightarrow 3U + U = E \Leftrightarrow 4U = E \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}kx_2 = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}A^2 \Leftrightarrow x = \pm A/2 \Leftrightarrow x = \pm 0.1$ m. Την πρώτη φορά θα φτάσει στη θέση $x = +0.1$ m με αρνητική ταχύτητα (δες το περιστρεφόμενο A' την χρονική στιγμή $t = 0$). (Επίσης $D = m\omega^2 = 200$ N/m).
Η ταχύτητα μπορεί να βρεθεί με ενέργειες ταλάντωσης ή από την δεδομένη σχέση $K = 3U \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 3\frac{1}{2}200 \cdot 0.1^2 \Leftrightarrow v^2 = 3 \Leftrightarrow v = -\sqrt{3}$ m/s.
Και τελικά: $\frac{dK}{dt} = -Dxv = -200 \cdot 0.1 \cdot (-\sqrt{3}) = 20\sqrt{3}$J/s.