

---

## Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος

### Αόριστο Ολοκλήρωμα

---

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα πιο κάτω κλάσματα:

i.  $\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$

ii.  $\frac{5x+7}{2x^2+5x+2}$

iii.  $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

iv.  $\frac{3x-1}{x(x-1)^2}$

v.  $\frac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2}$

vi.  $\frac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$

vii.  $\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$

viii.  $\frac{3x^2+x+2}{x^3-1}$

ix.  $\frac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

x.  $\frac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$

Λύση:

(Ασχ. 1/12)

i.

$$\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$$

$$8x^2 - 19x + 2 = A(x-1)(x-4) + B(x+2)(x-4) + C(x+2)(x-1)$$

Λύνοντας:  $A = 4, B = 1, C = 3$

$$\frac{8x^2 - 19x + 2}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$$

ii.

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{5x+7}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x+7 = A(x+2) + B(2x+1)$$

Λύνοντας:  $A = 3, B = 1$

$$\frac{5x+7}{2x^2+5x+2} = \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{x+2}$$

iii.

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$3x+2 = A(x+1) + B$$

Λύνοντας:  $A = 3, B = -1$

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

iv.

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$3x-1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Λύνοντας:  $A = -1, B = 1, C = 2$

$$\frac{3x-1}{x(x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

v.

$$\frac{5x^2 + 4x - 7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$5x^2 + 4x - 7 = A(x+2)^2 + B(x-3)(x+2) + C(x-3)$$

Λύνοντας:  $A = 2$ ,  $B = 3$ ,  $C = -1$

$$\frac{5x^2 + 4x - 7}{(x-3)(x+2)^2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

vi.

$$\frac{5x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$5x^2 - x + 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Λύνοντας:  $A = 3$ ,  $B = 2$ ,  $C = 1$

$$\frac{5x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

vii.

$$\frac{3x^2 + 7x + 2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$3x^2 + 7x + 2 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+1)$$

Λύνοντας:  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{7}{2}$ ,  $C = \frac{9}{2}$

$$\frac{3x^2 + 7x + 2}{(x+1)(x^2+2x+5)} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{7x+9}{2(x^2+2x+5)}$$

viii.

$$\frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - 1} = \frac{3x^2 + x + 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$3x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Λύνοντας:  $A = 2$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$

$$\frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

ix.

$$\frac{x^3 - 7x^2 - 13x - 15}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{Διαίρεση: } x^3 - 7x^2 - 13x - 15 \div (x^2 - 2x - 3) = x - 5 + \frac{-20x - 30}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{-20x - 30}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1} \implies A = -\frac{45}{2}, B = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x^3 - 7x^2 - 13x - 15}{x^2 - 2x - 3} = x - 5 - \frac{45}{2(x - 3)} + \frac{5}{2(x + 1)}$$

x.

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 7x + 7}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{Διαίρεση: } 2x^3 - 9x^2 + 7x + 7 \div (x^2 - 5x + 6) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \implies A = -1, B = 1$$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 7x + 7}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

Υπενθύμιση:

1. Διαφορετικοί Γραμμικοί Παράγοντες

Παρονομαστής:  $(x-a)(x-b)\dots$

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Παράδειγμα:  $\frac{5x+7}{(2x+1)(x+2)}$

2. Επαναλαμβανόμενοι Γραμμικοί Παράγοντες

Παρονομαστής:  $(x-a)^n$

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Παράδειγμα:  $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

3. Αδιαίρετοι Δευτεροβάθμιοι Παράγοντες

Παρονομαστής:  $x^2 + bx + c$  με  $\Delta = b^2 - 4c < 0$

$$\frac{P(x)}{x^2 + bx + c} = \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

Παράδειγμα:  $\frac{5x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+1)}$

4. Μη Κατάλληλα Κλάσματα (Improper Fractions)

Όταν ο βαθμός του αριθμητή  $\geq$  του παρονομαστή, διαιρούμε πρώτα:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad \deg(R) < \deg(Q)$$

Παράδειγμα:  $\frac{x^3 - 7x^2 - 13x - 15}{x^2 - 2x - 3}$

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int x^4 dx$$

$$(\beta) \int x^{-2} dx$$

$$(\gamma) \int x^{\frac{3}{4}} dx$$

$$(\delta) \int \frac{1}{u^4} du$$

$$(\epsilon) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(\sigma\tau) \int \frac{2}{\sqrt[3]{u}} du$$

$$(\zeta) \int (u^2 - 3u + 1) du$$

$$(\eta) \int (x + 2\sqrt{x} - \pi) dx$$

$$(\vartheta) \int \left( e^x + e x + \frac{e}{x} \right) dx$$

$$(\iota) \int (u - 5)^2 du$$

$$(\iota\alpha) \int 2u(u^2 - 3) du$$

$$(\iota\beta) \int \sqrt{x}(x - 2) dx$$

$$(\iota\gamma) \int \frac{u^4 - 5u^3 + 3u}{u^2} du$$

$$(\iota\delta) \int \frac{3x - x^2 + 2x^3}{x^3} dx$$

$$(\iota\epsilon) \int (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) d\theta$$

$$(\iota\sigma\tau) \int (3\theta - \epsilon\varphi^2\theta) d\theta$$

$$(\iota\zeta) \int \left( \frac{1}{1+x^2} - 2x \right) dx$$

$$(\iota\eta) \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Λύση:

(Ασχ. 1/25)

(α) Κανόνας δυνάμεων:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c.$$

(β)  $x^{-2}$  με δύναμη:

$$\int x^{-2} dx = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

(γ) Κανόνας δυνάμεων:

$$\int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + c.$$

(δ)  $u^{-4}$ :

$$\int \frac{1}{u^4} du = \int u^{-4} du = -\frac{1}{3} u^{-3} + c = -\frac{1}{3u^3} + c.$$

(ε)  $x^{-1/2}$ :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} + c.$$

(στ)  $u^{-1/3}$ :

$$\int \frac{2}{\sqrt[3]{u}} du = 2 \int u^{-1/3} du = 2 \cdot \frac{u^{2/3}}{2/3} = 3u^{2/3} + c.$$

(ζ) Πολυώνυμο:

$$\int (u^2 - 3u + 1) du = \frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + u + c.$$

(η) Όρος-όρος:

$$\int (x + 2\sqrt{x} - \pi) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{3/2} - \pi x + c.$$

(θ) Γραμμικότητα:

$$\int \left( e^x + e x + \frac{e}{x} \right) dx = e^x + \frac{e}{2}x^2 + e \ln |x| + c.$$

(ι) Ανάπτυξη:

$$\int (u - 5)^2 du = \int (u^2 - 10u + 25) du = \frac{u^3}{3} - 5u^2 + 25u + c.$$

(ια) Απλοποίηση:

$$\int 2u(u^2 - 3) du = \int (2u^3 - 6u) du = \frac{1}{2}u^4 - 3u^2 + c.$$

(ιβ)  $\sqrt{x}(x - 2) = x^{3/2} - 2x^{1/2}$ :

$$\int \sqrt{x}(x - 2) dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + c.$$

(ιγ) Διάσπαση κλάσματος:

$$\int \frac{u^4 - 5u^3 + 3u}{u^2} du = \int \left( u^2 - 5u + \frac{3}{u} \right) du = \frac{u^3}{3} - \frac{5}{2}u^2 + 3 \ln |u| + c.$$

(ιδ) Διάσπαση:

$$\int \frac{3x - x^2 + 2x^3}{x^3} dx = \int \left( \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + 2 \right) dx = -\frac{3}{x} - \ln |x| + 2x + c.$$

(ιε) Τριγωνομετρικά:

$$\int (\eta \mu \theta - \sigma \upsilon \nu \theta) d\theta = -\sigma \upsilon \nu \theta - \eta \mu \theta + c.$$

(ιστ) Απλοποίηση:

$$\int (3\vartheta - \varepsilon \varphi^2 \vartheta) d\vartheta = 3 \int \vartheta d\vartheta - \int \varepsilon \varphi^2 \vartheta d\vartheta = \frac{3\vartheta^2}{2} - (\varepsilon \varphi \vartheta - \vartheta) + c.$$

(ιζ) Γραμμικότητα:

$$\int \left( \frac{1}{1+x^2} - 2x \right) dx = \text{τοξεφ}(x) - x^2 + c.$$

(ιη) Παράγωγος τοξημ  $x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ :

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \text{τοξημ}(x) + c.$$

3. Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει

$$\int \lambda x^{\kappa-2} dx = 3x^5 + c.$$

Λύση:

(Ασκ. 2/25)

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη:

$$\lambda x^{\kappa-2} = \frac{d}{dx} (3x^5 + c) = 15x^4.$$

Εφόσον η σχέση ισχύει για κάθε  $x$ , ταυτίζουμε εκθέτες και συντελεστές:

$$\kappa - 2 = 4 \Rightarrow \kappa = 6, \quad \lambda = 15.$$

Έλεγχος:

$$\int 15x^{6-2} dx = \int 15x^4 dx = 3x^5 + c.$$

Άρα  $\kappa = 6$ ,  $\lambda = 15$ .



4. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) \int \sqrt{6+x} \, dx & (\sigma\tau) \int x e^{1-3x^2} \, dx & (\iota\alpha) \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \\
 (\beta) \int \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx & (\zeta) \int x^2 \sqrt{x-1} \, dx & (\iota\beta) \int \frac{\eta\mu(\ln x)}{x} \, dx \\
 (\gamma) \int (2x-7)^{80} \, dx & (\eta) \int \frac{x}{\sqrt{x-2}} \, dx & (\iota\gamma) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx \\
 (\delta) \int x \sigma\upsilon\nu(x^2+1) \, dx & (\vartheta) \int \frac{1}{\sqrt{x}+1} \, dx & (\iota\delta) \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} \, dx \\
 (\epsilon) \int \eta\mu\theta (1+\sigma\upsilon\nu\theta)^3 \, d\theta & (\iota) \int \frac{x^3}{(x^2+2)^3} \, dx & (\iota\epsilon) \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} \, dx
 \end{array}$$

Λύση:

(Ασχ. 1/30)

(α) Θέτουμε  $u = 6+x \Rightarrow du = dx$ .

$$\int \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (6+x)^{3/2} + c.$$

(β)

$$\int \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx = \frac{1}{3} \eta\mu(3x) + c.$$

(γ) Θέτουμε  $u = 2x-7, du = 2dx$ .

$$\int (2x-7)^{80} \, dx = \frac{1}{2} \int u^{80} \, du = \frac{u^{81}}{162} + c = \frac{(2x-7)^{81}}{162} + c.$$

(δ) Θέτουμε  $u = x^2+1, du = 2x \, dx$ .

$$\int x \sigma\upsilon\nu(x^2+1) \, dx = \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu u \, du = \frac{1}{2} \eta\mu u + c = \frac{\eta\mu(x^2+1)}{2} + c.$$

(ε) Θέτουμε  $u = 1+\sigma\upsilon\nu\theta, du = -\eta\mu\theta \, d\theta$ .

$$\int \eta\mu\theta (1+\sigma\upsilon\nu\theta)^3 \, d\theta = - \int u^3 \, du = -\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^4}{4} + c.$$

(στ) Θέτουμε  $u = 1 - 3x^2$ ,  $du = -6x dx$ .

$$\int x e^{1-3x^2} dx = -\frac{1}{6} \int e^u du = -\frac{e^{1-3x^2}}{6} + c.$$

(ζ) Θέτουμε  $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2 + 1$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\int x^2 \sqrt{x-1} dx = 2 \int (t^2 + 1)^2 t^2 dt = 2 \int (t^6 + 2t^4 + t^2) dt = \frac{2t^7}{7} + \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + c,$$

δηλαδή

$$\frac{2(\sqrt{x-1})^7}{7} + \frac{4(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + c.$$

(η) Θέτουμε  $u = x - 2 \Rightarrow x = u + 2$ .

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx = \int \frac{u+2}{\sqrt{u}} du = \int (u^{1/2} + 2u^{-1/2}) du = \frac{2}{3} u^{3/2} + 4u^{1/2} + c,$$

δηλαδή

$$\frac{2(\sqrt{x-2})^3}{3} + 4\sqrt{x-2} + c.$$

(θ) Θέτουμε  $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2t}{t+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t - 2 \ln(t+1) + c = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c.$$

(ι) Θέτουμε  $u = x^2 + 2$ ,  $du = 2x dx$ ,  $x^2 = u - 2$ .

$$\int \frac{x^3}{(x^2+2)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{u-2}{u^3} du = \frac{1}{2} \int (u^{-2} - 2u^{-3}) du = -\frac{1}{2} u^{-1} + \frac{1}{2} u^{-2} + c,$$

δηλαδή

$$-\frac{1}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2(x^2+2)^2} + c.$$

(ια) Θέτουμε  $u = 1 + x^2$ ,  $du = 2x dx$ .

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{1+x^2} + c.$$

(ιβ) Θέτουμε  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ .

$$\int \frac{\eta\mu(\ln x)}{x} dx = \int \eta\mu u du = -\sigma\upsilon\nu u + c = -\sigma\upsilon\nu(\ln x) + c.$$

(ιγ)

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, \quad u = e^x \Rightarrow du = e^x dx.$$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(u) + c = \tau\omicron\xi\epsilon\varphi(e^x) + c.$$

(ιδ) Θέτουμε  $u = 1 - e^x \Rightarrow du = -e^x dx$ ,  $e^{3x} = (1 - u)^3$ .

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1 - e^x}} dx = - \int \frac{(1 - u)^3}{\sqrt{u}} du = - \int (u^{-1/2} - 3u^{1/2} + 3u^{3/2} - u^{5/2}) du$$

$$= - \left( 2u^{1/2} - 2u^{3/2} + \frac{6}{5}u^{5/2} - \frac{2}{7}u^{7/2} \right) + c = -2\sqrt{u} + \frac{4}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2} + c,$$

δηλαδή

$$-\frac{2(\sqrt{1 - e^x})^5}{5} + \frac{4(\sqrt{1 - e^x})^3}{3} - 2\sqrt{1 - e^x} + c.$$

(ιε) Θέτουμε  $t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow x = t^4$ ,  $\sqrt{x} = t^2$ ,  $dx = 4t^3 dt$ .

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{1 - t^2}{1 + t} 4t^3 dt = 4 \int t^3(1 - t) dt = 4 \left( \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} \right) + c = t^4 - \frac{4}{5}t^5 + c = x - \frac{4}{5}x^{5/4} + c.$$

**5.** Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας την υποκατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση:

- i.  $\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$ ,  $x = 3 \eta\mu\theta$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
- ii.  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} dx$ ,  $x = 3 \eta\mu\theta$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Λύση:

(Ασκ. 2/30)

i.  $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

$$x = 3 \eta\mu\theta \Rightarrow dx = 3 \sigma\upsilon\nu\theta d\theta, \quad \sqrt{9-x^2} = 3 \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{1}{3 \sigma\upsilon\nu\theta} 3 \sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \int d\theta = \theta + c.$$

Επιστρέφοντας στη μεταβλητή  $x$ :

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \tau\omicron\zeta\eta\mu\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

ii.  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx$

$$x = 3 \eta\mu\theta \Rightarrow dx = 3 \sigma\upsilon\nu\theta d\theta, \quad x^2 = 9 \eta\mu^2\theta, \quad \sqrt{9-x^2} = 3 |\sigma\upsilon\nu\theta| = -3 \sigma\upsilon\nu\theta,$$

επειδή  $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$  για  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ .

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{1}{9 \eta\mu^2\theta (-3 \sigma\upsilon\nu\theta)} \cdot (3 \sigma\upsilon\nu\theta) d\theta = -\frac{1}{9} \int \frac{1}{\eta\mu^2\theta} d\theta.$$

Επειδή  $\frac{d}{d\theta}(\sigma\varphi\theta) = -\frac{1}{\eta\mu^2\theta}$ ,

$$-\frac{1}{9} \int \frac{1}{\eta\mu^2\theta} d\theta = \frac{1}{9} \sigma\varphi\theta + c.$$

Επιστρέφουμε στη μεταβλητή  $x$ :

$$\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{-\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}}{\eta\mu\theta} = \frac{-\sqrt{9-x^2}/3}{x/3} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$$

6. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\int \sigma\upsilon\nu(7x) dx$	viii. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$	xv. $\int \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2+\epsilon\varphi x} dx$
ii. $\int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x-3) dx$	ix. $\int \frac{1}{(2x+1)^5} dx$	xvi. $\int \frac{3x}{x^2+3} dx$
iii. $\int (6x-1)^{21} dx$	x. $\int x(x^2-3)^{17} dx$	xvii. $\int \sigma\varphi x dx$
iv. $\int e^{4-9x} dx$	xi. $\int \frac{(\tau\omicron\xi\epsilon\varphi x)^3}{1+x^2} dx$	xviii. $\int \frac{2+2\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x} dx$
v. $\int (e^{4x}-2\cdot 4^{-3x}) dx$	xii. $\int \frac{\ln^6 x}{x} dx$	xix. $\int \frac{6x+15}{x^2+5x-1} dx$
vi. $\int (\eta\mu 4x-\eta\mu 5x) dx$	xiii. $\int \frac{2\eta\mu x}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} dx$	xx. $\int \sigma\tau\epsilon\mu x dx$
vii. $\int \frac{1}{25x^2+1} dx$	xiv. $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4} dx$	

Λύση:

(Ασκ. 1/34)

i.  $\int \sigma\upsilon\nu(7x) dx$

Θέτουμε  $u = 7x \Rightarrow du = 7 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{7}$

$$\int \sigma\upsilon\nu(7x) dx = \frac{1}{7} \int \sigma\upsilon\nu(u) du = \frac{1}{7} \eta\mu(u) + c = \frac{\eta\mu(7x)}{7} + c.$$

ii.  $\int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x-3) dx$

$u = 5x - 3 \Rightarrow du = 5 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$

$$\int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x-3) dx = \frac{1}{5} \int \sigma\tau\epsilon\mu^2(u) du = -\frac{1}{5} \sigma\varphi(u) + c = -\frac{\sigma\varphi(5x-3)}{5} + c.$$

iii.  $\int (6x-1)^{21} dx$

$u = 6x - 1 \Rightarrow du = 6 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{6}$

$$\int (6x-1)^{21} dx = \frac{1}{6} \int u^{21} du = \frac{u^{22}}{132} + c = \frac{(6x-1)^{22}}{132} + c.$$

iv.  $\int e^{4-9x} dx$

$$u = 4 - 9x \Rightarrow du = -9 dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{9}$$

$$\int e^{4-9x} dx = -\frac{1}{9} \int e^u du = -\frac{e^u}{9} + c = -\frac{e^{4-9x}}{9} + c.$$

$$\text{v. } \int (e^{4x} - 2 \cdot 4^{-3x}) dx$$

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x}, \quad \int 4^{-3x} dx = \frac{4^{-3x}}{-3 \ln 4}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{4x}}{4} + \frac{2}{3 \ln 4} 4^{-3x} + c.$$

$$\text{vi. } \int (\eta\mu 4x - \eta\mu 5x) dx$$

$$\int \eta\mu 4x dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{4}, \quad \int \eta\mu 5x dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{5}.$$

$$f(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{4} + \frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{5} + c.$$

$$\text{vii. } \int \frac{1}{25x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{dx}{(5x)^2 + 1} = \frac{1}{5} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(5x) + c.$$

$$\text{viii. } \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \tau\omicron\xi\eta\mu \frac{x}{a} + c \quad \Rightarrow \quad \tau\omicron\xi\eta\mu \frac{x}{2} + c.$$

$$\text{ix. } \int \frac{1}{(2x+1)^5} dx$$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int u^{-5} du = -\frac{1}{8u^4} + c = -\frac{1}{8(2x+1)^4} + c.$$

$$\text{x. } \int x(x^2 - 3)^{17} dx$$

$$u = x^2 - 3 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int u^{17} du = \frac{u^{18}}{36} + c = \frac{(x^2 - 3)^{18}}{36} + c.$$

$$\text{x i.} \quad \int \frac{(\tau \omicron \xi \varepsilon \varphi x)^3}{1 + x^2} dx$$

$$u = \tau \omicron \xi \varepsilon \varphi x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(\tau \omicron \xi \varepsilon \varphi x)^4}{4} + c.$$

$$\text{x i i.} \quad \int \frac{\ln^6 x}{x} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$\int u^6 du = \frac{u^7}{7} + c = \frac{(\ln x)^7}{7} + c.$$

$$\text{x i i i.} \quad \int \frac{2 \eta \mu x}{\sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x}} dx$$

$$u = 1 - \sigma \upsilon \nu x \Rightarrow du = \eta \mu x dx$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 4\sqrt{u} + c = 4\sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x} + c.$$

$$\text{x i v.} \quad \int \frac{e^x}{(e^x - 1)^4} dx$$

$$u = e^x - 1 \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\int u^{-4} du = -\frac{1}{3u^3} + c = -\frac{1}{3(e^x - 1)^3} + c.$$

$$\text{x v.} \quad \int \frac{\tau \varepsilon \mu^2 x}{2 + \varepsilon \varphi x} dx$$

$$u = 2 + \varepsilon \varphi x \Rightarrow du = \tau \varepsilon \mu^2 x dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |2 + \varepsilon \varphi x| + c.$$

$$\text{xvi. } \int \frac{3x}{x^2+3} dx$$

$$u = x^2 + 3 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

$$\frac{3}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{3}{2} \ln |u| + c = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 3| + c.$$

$$\text{xvii. } \int \sigma\varphi x dx$$

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} dx = \ln |\eta\mu x| + c.$$

$$\text{xviii. } \int \frac{2 + 2\eta\mu x}{x - \sigma\upsilon\nu x} dx$$

$$u = x - \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = (1 + \eta\mu x) dx$$

$$2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln |u| + c = 2 \ln |x - \sigma\upsilon\nu x| + c.$$

$$\text{xix. } \int \frac{6x + 15}{x^2 + 5x - 1} dx$$

$$\text{Παρατηρούμε } (x^2 + 5x - 1)' = 2x + 5, \quad 6x + 15 = 3(2x + 5)$$

$$3 \int \frac{2x + 5}{x^2 + 5x - 1} dx = 3 \ln |x^2 + 5x - 1| + c.$$

$$\text{xx. } \int \sigma\tau\epsilon\mu x dx$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με  $\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x$ :

$$\int \sigma\tau\epsilon\mu x dx = \int \sigma\tau\epsilon\mu x \cdot \frac{\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x}{\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x} dx = \int \frac{\sigma\tau\epsilon\mu^2 x + \sigma\tau\epsilon\mu x \sigma\varphi x}{\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x} dx.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x)' = \sigma\tau\epsilon\mu x \tau\epsilon\mu x + \tau\epsilon\mu^2 x + 1 = \sigma\tau\epsilon\mu^2 x + \sigma\tau\epsilon\mu x \sigma\varphi x.$$

Άρα:

$$\int \sigma\tau\epsilon\mu x dx = - \int \frac{-(\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x)'}{\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x} dx = - \ln |\sigma\tau\epsilon\mu x + \sigma\varphi x| + c.$$



7. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις πιο κάτω τυποποιημένες μορφές ολοκληρωμάτων.

$$\int f(ax + \beta) dx = \frac{1}{a} F(ax + \beta) + c \quad (1)$$

$$\int f^\nu(x) f'(x) dx = \int f^\nu(x) d(f(x)) = \frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu + 1} + c, \quad \nu \neq -1 \quad (2)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{f(x)} d(f(x)) = \ln |f(x)| + c \quad (3)$$

i. $\int \sigma\upsilon\nu 7x dx$	vii. $\int \frac{(\arctan x)^3}{1 + x^2} dx$	xiii. $\int \sigma\varphi x dx$
ii. $\int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x - 3) dx$	viii. $\int \frac{(\ln x)^6}{x} dx$	xiv. $\int \frac{1}{25x^2 + 1} dx$
iii. $\int (6x - 1)^{21} dx$	ix. $\int \frac{2\eta\mu x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}} dx$	xv. $\int \frac{1}{(2x + 1)^5} dx$
iv. $\int e^{4-9x} dx$	x. $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^4} dx$	xvi. $\int \epsilon\varphi x dx$
v. $\int (e^{4x} - 2 \cdot 4^{-3x}) dx$	xi. $\int \frac{\tau\epsilon\mu^2 x}{2 + \epsilon\varphi x} dx$	xvii. $\int \frac{2 + 2\eta\mu x}{x - \sigma\upsilon\nu x} dx$
vi. $\int (\eta\mu 4x - \eta\mu 5x) dx$	xii. $\int \frac{3x}{x^2 + 3} dx$	xviii. $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

Λύση:

i.  $\int \sigma\upsilon\nu 7x dx$  (Τύπος 1)

$$\int \sigma\upsilon\nu 7x dx = \frac{1}{7} \eta\mu 7x + c$$

$$\text{ii. } \int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x-3) dx \quad (\text{Τύπος 1})$$

$$\int \sigma\tau\epsilon\mu^2(5x-3) dx = -\frac{1}{5} \sigma\varphi(5x-3) + c$$

$$\text{iii. } \int (6x-1)^{21} dx \quad (\text{Τύπος 2})$$

$$\int (6x-1)^{21} dx = \frac{(6x-1)^{22}}{132} + c$$

$$\text{iv. } \int e^{4-9x} dx \quad (\text{Τύπος 1})$$

$$\int e^{4-9x} dx = -\frac{1}{9} e^{4-9x} + c$$

$$\text{v. } \int (e^{4x} - 2 \cdot 4^{-3x}) dx \quad (\text{Τύπος 1})$$

$$\int e^{4x} dx - 2 \int 4^{-3x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + \frac{2}{3 \ln 4} 4^{-3x} + c$$

$$\text{vi. } \int (\eta\mu 4x - \eta\mu 5x) dx \quad (\text{Τύπος 1})$$

$$\int \eta\mu 4x dx - \int \eta\mu 5x dx = -\frac{1}{4} \sigma\upsilon\nu 4x + \frac{1}{5} \sigma\upsilon\nu 5x + c$$

$$\text{vii. } \int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2} dx \quad (\text{Τύπος 2})$$

$$\int (\arctan x)^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{(\arctan x)^4}{4} + c$$

$$\text{viii. } \int \frac{(\ln x)^6}{x} dx \quad (\text{Τύπος 2})$$

$$\int (\ln x)^6 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^7}{7} + c$$

$$\text{ix. } \int \frac{2 \eta \mu x}{\sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x}} dx \quad (\text{Τύπος 2})$$

$$\int \frac{2 \eta \mu x}{\sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x}} 2 \eta \mu x dx = 4\sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x} + c$$

$$\text{x. } \int \frac{e^x}{(e^x - 1)^4} dx \quad (\text{Τύπος 2})$$

$$\int \frac{1}{(e^x - 1)^4} \cdot e^x dx = -\frac{1}{3(e^x - 1)^3} + c$$

$$\text{xi. } \int \frac{\tau \epsilon \mu^2 x}{2 + \epsilon \varphi x} dx \quad (\text{Τύπος 3})$$

$$\int \frac{1}{2 + \epsilon \varphi x} \cdot \tau \epsilon \mu^2 x dx = \ln |2 + \epsilon \varphi x| + c$$

$$\text{xii. } \int \frac{3x}{x^2 + 3} dx \quad (\text{Τύπος 3})$$

$$\int \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 3| + c$$

$$\text{xiii. } \int \sigma \varphi x dx \quad (\text{Τύπος 3})$$

$$\int \frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu x} dx = \ln |\eta \mu x| + c$$

$$\text{xiv. } \int \frac{1}{25x^2 + 1} dx \quad (\text{Τύπος 1})$$

$$\int \frac{1}{(5x)^2 + 1} dx = \frac{1}{5} \tan^{-1}(5x) + c$$

$$\text{xv.} \quad \int \frac{1}{(2x+1)^5} dx \quad (\text{Τύπος 1})$$

$$\int (2x+1)^{-5} dx = -\frac{1}{8(2x+1)^4} + c$$

$$\text{xvi.} \quad \int \varepsilon\varphi x \, dx \quad (\text{Τύπος 3})$$

$$\int \varepsilon\varphi x \, dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c = \ln|\tau\epsilon\mu x| + c$$

$$\text{xvii.} \quad \int \frac{2+2\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x} dx \quad (\text{Τύπος 2})$$

$$\int \frac{2+2\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x} dx = 2 \int \frac{1+\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x} dx = 2 \ln|x-\sigma\upsilon\nu x| + c$$

$$\text{xviii.} \quad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (\text{Τύπος 1})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} + c$$

**8.** Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα (μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες όπου χρειάζεται):

i. $\int x \eta\mu(2x) \, dx$	v. $\int e^{x+\ln x} \, dx, \, x > 0$	ix. $\int x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx$
ii. $\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx$	vi. $\int x^2 e^{-x} \, dx$	x. $\int e^x \sigma\upsilon\nu x \, dx$
iii. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx, \, x > 0$	vii. $\int e^{\sqrt{3x+9}} \, dx$	xi. $\int e^{-x} \eta\mu(2x) \, dx$
iv. $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx, \, x > 0$	viii. $\int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \, dx$	xii. $\int e^{2x} \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx$

Λύση:

(Ασκ. 1/38)

i.  $\int x \eta\mu(2x) dx$

Θέτουμε  $u = x$ ,  $dv = \eta\mu(2x) dx \Rightarrow du = dx$ ,  $v = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(2x)$

$$\begin{aligned} \int x \eta\mu(2x) dx &= uv - \int v du \\ &= -\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu(2x) + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu(2x) dx = -\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu(2x) + \frac{1}{4}\eta\mu(2x) + c \end{aligned}$$

ii.  $\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int x \tau\epsilon\mu^2 x dx$

Θέτουμε  $u = x$ ,  $dv = \tau\epsilon\mu^2 x dx \Rightarrow du = dx$ ,  $v = \epsilon\varphi x$

$$\begin{aligned} \int x \tau\epsilon\mu^2 x dx &= uv - \int v du \\ &= x \epsilon\varphi x - \int \epsilon\varphi x dx = x \epsilon\varphi x + \ln |\sigma\upsilon\nu x| + c \end{aligned}$$

iii.  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ ,  $x > 0$

Θέτουμε  $u = \ln x$ ,  $dv = x^{-2} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ ,  $v = -x^{-1}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= uv - \int v du \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + c \end{aligned}$$

iv.  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ ,  $x > 0$

Θέτουμε  $u = \ln x$ ,  $dv = x^{-3} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ ,  $v = -\frac{1}{2}x^{-2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^3} dx &= uv - \int v du \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx = -\frac{2 \ln x + 1}{4x^2} + c \end{aligned}$$

v.  $\int e^{x+\ln x} dx$ ,  $x > 0$

Παρατηρούμε ότι  $e^{x+\ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = xe^x$ .

$$\int e^{x+\ln x} dx = \int xe^x dx$$

Θέτουμε  $u = x$ ,  $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$ ,  $v = e^x$

$$\int xe^x dx = uv - \int v du = xe^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + c$$

vi.  $\int x^2 e^{-x} dx$

Θέτουμε  $u = x^2$ ,  $dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = 2x dx$ ,  $v = -e^{-x}$

$$\int x^2 e^{-x} dx = uv - \int v du = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

Υπολογίζουμε  $\int x e^{-x} dx$ :

$$u = x, dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = dx, v = -e^{-x}$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

vii.  $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx$

Θέτουμε  $t = \sqrt{3x+9} \Rightarrow dt = \frac{3}{2\sqrt{3x+9}} dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{3} dt$

$$\int e^{\sqrt{3x+9}} dx = \frac{2}{3} \int t e^t dt$$

Θέτουμε  $u = t$ ,  $dv = e^t dt \Rightarrow du = dt$ ,  $v = e^t$

$$\frac{2}{3} \int t e^t dt = \frac{2}{3} (t e^t - \int e^t dt) = \frac{2}{3} e^t (t - 1) + c$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} e^{\sqrt{3x+9}} (\sqrt{3x+9} - 1) + c$$

viii.  $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

Θέτουμε  $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $v = x$

$$\begin{aligned} \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx &= uv - \int v du \\ &= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \end{aligned}$$

Θέτουμε  $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = \sqrt{x^2 + 1} \\ \Rightarrow \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx &= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + c \end{aligned}$$

ix.  $\int x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) dx$

Θέτουμε  $u = x^2$ ,  $dv = \sigma\upsilon\nu(3x) dx \Rightarrow du = 2x dx$ ,  $v = \frac{1}{3}\eta\mu(3x)$

$$\int x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) dx = \frac{x^2}{3} \eta\mu(3x) - \frac{2}{3} \int x \eta\mu(3x) dx$$

Για  $\int x \eta\mu(3x) dx$ :

$u = x$ ,  $dv = \eta\mu(3x) dx \Rightarrow du = dx$ ,  $v = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu(3x)$

$$\begin{aligned} \int x \eta\mu(3x) dx &= -\frac{x}{3} \sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{1}{9} \eta\mu(3x) \\ \Rightarrow \int x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) dx &= \frac{x^2}{3} \eta\mu(3x) + \frac{2x}{9} \sigma\upsilon\nu(3x) - \frac{2}{27} \eta\mu(3x) + c \end{aligned}$$

x.  $\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$

Θέτουμε  $u = e^x$ ,  $dv = \sigma\upsilon\nu x dx \Rightarrow du = e^x dx$ ,  $v = \eta\mu x$

$$\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx = e^x \eta\mu x - \int e^x \eta\mu x dx$$

Θέτουμε  $u = e^x$ ,  $dv = \eta\mu x dx \Rightarrow du = e^x dx$ ,  $v = -\sigma\upsilon\nu x$

$$\int e^x \eta\mu x dx = -e^x \sigma\upsilon\nu x + \int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$2 \int e^x \sigma\upsilon\nu x \, dx = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow \int e^x \sigma\upsilon\nu x \, dx = \frac{e^x}{2} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + c$$

xi.  $\int e^{-x} \eta\mu(2x) \, dx$

Θέτουμε  $u = e^{-x}$ ,  $dv = \eta\mu(2x) \, dx \Rightarrow du = -e^{-x} \, dx$ ,  $v = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu(2x)$

$$\int e^{-x} \eta\mu(2x) \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \sigma\upsilon\nu(2x) - \frac{1}{2} \int e^{-x} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx$$

Θέτουμε  $u = e^{-x}$ ,  $dv = \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx \Rightarrow du = -e^{-x} \, dx$ ,  $v = \frac{1}{2} \eta\mu(2x)$

$$\int e^{-x} \sigma\upsilon\nu(2x) \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} \eta\mu(2x) + \frac{1}{2} \int e^{-x} \eta\mu(2x) \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} \eta\mu(2x) \, dx = e^{-x} \left( -\frac{2}{5} \sigma\upsilon\nu(2x) - \frac{1}{5} \eta\mu(2x) \right) + c$$

xii.  $\int e^{2x} \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx$

Θέτουμε  $I = \int e^{2x} \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx$ .

$$u = e^{2x}, \quad dv = \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx \Rightarrow du = 2e^{2x} \, dx, \quad v = \frac{1}{3} \eta\mu(3x)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{3} \eta\mu(3x) - \frac{2}{3} \int e^{2x} \eta\mu(3x) \, dx$$

Θέτουμε  $J = \int e^{2x} \eta\mu(3x) \, dx$ :

$$u = e^{2x}, \quad dv = \eta\mu(3x) \, dx \Rightarrow du = 2e^{2x} \, dx, \quad v = -\frac{1}{3} \sigma\upsilon\nu(3x)$$

$$J = -\frac{e^{2x}}{3} \sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{2}{3} \int e^{2x} \sigma\upsilon\nu(3x) \, dx = -\frac{e^{2x}}{3} \sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{2}{3} I$$

Επιστρέφοντας στο  $I$ :

$$I = \frac{e^{2x}}{3} \eta\mu(3x) - \frac{2}{3} J = \frac{e^{2x}}{3} \eta\mu(3x) - \frac{2}{3} \left( -\frac{e^{2x}}{3} \sigma\upsilon\nu(3x) + \frac{2}{3} I \right)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{3} \eta\mu(3x) + \frac{2e^{2x}}{9} \sigma\upsilon\nu(3x) - \frac{4}{9} I \Rightarrow \frac{13}{9} I = \frac{e^{2x}}{9} (3 \eta\mu(3x) + 2 \sigma\upsilon\nu(3x))$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{13} (3 \eta\mu(3x) + 2 \sigma\upsilon\nu(3x)) + c$$



9. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i.  $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}} dx$

ii.  $\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}} dx$

iii.  $\int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2} dw$

iv.  $\int \frac{t-2}{t-3\sqrt{2t-4}+2} dt$

Λύση:

i. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt[3]{x-3}$$

$$x = u^3 + 3 \quad dx = 3u^2 du$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{(u^3+3)+2}{u} 3u^2 du &= \int 3u^4 + 15u du \\ &= \frac{3}{5}u^5 + \frac{15}{2}u^2 + c \\ &= \frac{3}{5}(x-3)^{5/3} + \frac{15}{2}(x-3)^{2/3} + c \end{aligned}$$

ii. Θέτω αντικατάσταση,

$$u = \sqrt{x+10} \quad x = u^2 - 10 \quad dx = 2u du$$

$$\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}} dx = \int \frac{2}{u^2-10-3u} (2u) du = \int \frac{4u}{u^2-3u-10} du$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{4u}{(u-5)(u+2)} = \frac{A}{u-5} + \frac{B}{u+2}$$

$$4u = A(u+2) + B(u-5)$$

$$u = -2 \quad -8 = B(-7) \quad B = \frac{8}{7}$$

$$u = 5 \quad 20 = A(7) \quad A = \frac{20}{7}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x-3\sqrt{x+10}} dx &= \int \frac{20}{7} \frac{1}{u-5} + \frac{8}{7} \frac{1}{u+2} du \\ &= \frac{20}{7} \ln|u-5| + \frac{8}{7} \ln|u+2| + c \\ &= \frac{20}{7} \ln|\sqrt{x+10}-5| + \frac{8}{7} \ln|\sqrt{x+10}+2| + c\end{aligned}$$

iii. Θέτω αντικατάσταση,

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{1-w} \\ w &= 1-u^2 \quad \Rightarrow \quad dw = -2u du \\ \int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2} dw &= \int \frac{1}{1-u^2+2u+2} (-2u) du = \int \frac{2u}{u^2-2u-3} du\end{aligned}$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\begin{aligned}\frac{2u}{(u+1)(u-3)} &= \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-3} \\ 2u &= A(u-3) + B(u+1) \\ u=3: \quad 6 &= 4B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \\ u=-1: \quad -2 &= -4A \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int \frac{2u}{(u+1)(u-3)} du &= \int \frac{1}{2} \frac{1}{u+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{u-3} du = \frac{1}{2} \ln|u+1| + \frac{3}{2} \ln|u-3| + c \\ \Rightarrow \int \frac{1}{w+2\sqrt{1-w}+2} dw &= \frac{1}{2} \ln|\sqrt{1-w}+1| + \frac{3}{2} \ln|\sqrt{1-w}-3| + c\end{aligned}$$

iv. Θέτω αντικατάσταση

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{2t-4} \\ t &= \frac{1}{2}u^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad dt = u du \\ \int \frac{t-2}{t-3\sqrt{2t-4}+2} dt &= \int \frac{\frac{1}{2}u^2+2-2}{\frac{1}{2}u^2+2-3u+2} (u) du = \int \frac{u^3}{u^2-6u+8} du \\ \frac{u^3}{u^2-6u+8} &= u+6 + \frac{28u-48}{(u-2)(u-4)}\end{aligned}$$

Ανάλυση απλών κλασμάτων,

$$\frac{28u - 48}{(u - 2)(u - 4)} = \frac{A}{u - 2} + \frac{B}{u - 4}$$

$$28u - 48 = A(u - 4) + B(u - 2)$$

$$u = 4 : \quad 64 = 2B \quad \Rightarrow \quad A = -4$$

$$u = 2 : \quad 8 = -2A \quad \Rightarrow \quad B = 32$$

Επομένως,

$$\int \frac{u^3}{u^2 - 6u + 8} du = \int u + 6 - \frac{4}{u - 2} + \frac{32}{u - 4} du = \frac{1}{2}u^2 + 6u - 4 \ln |u - 2| + 32 \ln |u - 4| + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{u^3}{u^2 - 6u + 8} du = t - 2 + 6\sqrt{2t - 4} - 4 \ln |\sqrt{2t - 4} - 2| + 32 \ln |\sqrt{2t - 4} - 4| + c$$

**10.** Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i.  $\int \eta\mu^2 x \, dx$

viii.  $\int \tau\epsilon\mu^4 x \, dx$

ii.  $\int \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

ix.  $\int \tau\epsilon\mu^3 x \, dx$

iii.  $\int \sigma\upsilon\nu^4 x \, dx$

x.  $\int \epsilon\phi^3 x \, \tau\epsilon\mu x \, dx$

iv.  $\int \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx$

xi.  $\int \eta\mu 2x \, \sigma\upsilon\nu x \, dx$

v.  $\int \eta\mu^4 x \, \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

xii.  $\int \eta\mu 5x \, \eta\mu 7x \, dx$

vi.  $\int (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \, \eta\mu x \, dx$

xiii.  $\int \sqrt{1 + \eta\mu 2x} \, dx, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

vii.  $\int (\eta\mu^3 x \, \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \, \sigma\upsilon\nu^3 x) \, dx$

xiv.  $\int \frac{\ln(\tau\epsilon\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Λύση

(Ασκ. 1/41)

i.  $\int \eta\mu^2 x \, dx$

$$\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \Rightarrow \int \eta\mu^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu 2x}{4} + c.$$

ii.  $\int \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int (1 - \eta\mu^2 x) d(\eta\mu x) = \eta\mu x - \frac{\eta\mu^3 x}{3} + c.$$

iii.  $\int \sigma\upsilon\nu^4 x \, dx$

$$\sigma\upsilon\nu^4 x = \left( \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right)^2 = \frac{3 + 4\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 4x}{8} \Rightarrow \int \sigma\upsilon\nu^4 x \, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\eta\mu 2x}{4} + \frac{\eta\mu 4x}{32} + c.$$

iv.  $\int \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx$

$$\begin{aligned} \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \, dx, \quad u = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = -\eta\mu x \, dx \\ = - \int \left( \frac{1}{u} - u \right) du = - \ln |\sigma\upsilon\nu x| + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2} + c. \end{aligned}$$

v.  $\int \eta\mu^4 x \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

$$\sigma\upsilon\nu^3 x = (1 - \eta\mu^2 x) \sigma\upsilon\nu x, \quad u = \eta\mu x, \quad du = \sigma\upsilon\nu x \, dx \Rightarrow \int (u^4 - u^6) \, du = \frac{\eta\mu^5 x}{5} - \frac{\eta\mu^7 x}{7} + c.$$

vi.  $\int (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \eta\mu x \, dx$

$$u = \sigma\upsilon\nu x, \quad du = -\eta\mu x \, dx, \quad \eta\mu^2 x = 1 - u^2 \Rightarrow - \int (1 - u^2 + u^4) \, du = -\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} - \frac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{5} + c.$$

vii.  $\int (\eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu^3 x) dx$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\eta\mu^4 x}{4} \right) = \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{4} \right) = -\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^3 x$$

$$\Rightarrow \int \dots dx = \frac{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{4} + c.$$

viii.  $\int \tau\epsilon\mu^4 x dx$

$$\tau\epsilon\mu^4 x = (1 + \epsilon\varphi^2 x) \tau\epsilon\mu^2 x, \quad u = \epsilon\varphi x, \quad du = \tau\epsilon\mu^2 x dx \Rightarrow \int (1 + u^2) du = \epsilon\varphi x + \frac{\epsilon\varphi^3 x}{3} + c.$$

ix.  $\int \tau\epsilon\mu^3 x dx$

$$I = \int \tau\epsilon\mu^3 x dx = \int \tau\epsilon\mu x \tau\epsilon\mu^2 x dx. \text{ Μέρη: } u = \tau\epsilon\mu x, \quad dv = \tau\epsilon\mu^2 x dx \Rightarrow v = \epsilon\varphi x$$

$$I = \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x - \int \epsilon\varphi x \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x dx = \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x - \int \tau\epsilon\mu x (\tau\epsilon\mu^2 x - 1) dx$$

$$= \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x - I + \int \tau\epsilon\mu x dx \Rightarrow 2I = \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x + \ln |\tau\epsilon\mu x + \epsilon\varphi x|$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x + \frac{1}{2} \ln |\tau\epsilon\mu x + \epsilon\varphi x| + c.$$

x.  $\int \epsilon\varphi^3 x \tau\epsilon\mu x dx$

$$\epsilon\varphi^3 x \tau\epsilon\mu x = (\epsilon\varphi^2 x) (\epsilon\varphi x \tau\epsilon\mu x) = (\tau\epsilon\mu^2 x - 1) d(\tau\epsilon\mu x) \Rightarrow \int (\tau\epsilon\mu^2 x - 1) d(\tau\epsilon\mu x) = \frac{\tau\epsilon\mu^3 x}{3} - \tau\epsilon\mu x + c.$$

xi.  $\int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x dx$

$$\eta\mu^2 x = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \int 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x dx, \quad u = \sigma\upsilon\nu x, \quad du = -\eta\mu x dx \Rightarrow -2 \int u^2 du = -\frac{2}{3} \sigma\upsilon\nu^3 x + c.$$

xii.  $\int \eta\mu 5x \eta\mu 7x \, dx$

$$\eta\mu A \eta\mu B = \frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu(A + B)) \Rightarrow \frac{\eta\mu 2x}{4} - \frac{\eta\mu 12x}{24} + c.$$

xiii.  $\int \sqrt{1 + \eta\mu 2x} \, dx, \, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$1 + \eta\mu 2x = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \Rightarrow \int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \, dx = -\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c.$$

xiv.  $\int \frac{\ln(\tau\epsilon\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx, \, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$t = \epsilon\phi x \Rightarrow dt = \tau\epsilon\mu^2 x \, dx = \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad \tau\epsilon\mu x = \sqrt{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\tau\epsilon\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx &= \int \ln(\sqrt{1 + t^2}) \, dt = \frac{1}{2} \int \ln(1 + t^2) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ t \ln(1 + t^2) - 2 \int \frac{t^2}{1 + t^2} \, dt \right] = \frac{1}{2} [t \ln(1 + t^2) - 2t + 2 \arctan t] + c \\ &= \epsilon\phi x \ln(\tau\epsilon\mu x) - \epsilon\phi x + x + c. \end{aligned}$$

**11.** Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

i.  $\int \eta\mu^5 x \, dx$

v.  $\int \tau\epsilon\mu^9 x \epsilon\phi^5 x \, dx$

ix.  $\int \sigma\upsilon\nu^4(2t) \, dt$

ii.  $\int \eta\mu^6 x \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx$

vi.  $\int \epsilon\phi^3 x \, dx$

x.  $\int \frac{2 + 7 \eta\mu^3(z)}{\sigma\upsilon\nu^2(z)} \, dz$

iii.  $\int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx$

vii.  $\int \frac{\eta\mu^7 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \, dx$

xi.  $\int \epsilon\phi^3(6x) \tau\epsilon\mu^{10}(6x) \, dx$

iv.  $\int \sigma\upsilon\nu(15x) \sigma\upsilon\nu(4x) \, dx$

viii.  $\int \eta\mu^3\left(\frac{2}{3}x\right) \sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{2}{3}x\right) \, dx$

xii.  $\int \sigma\upsilon\nu(3t) \eta\mu(8t) \, dt$

Λύση:

i.

$$\int \eta\mu^5 x \, dx = \int (\eta\mu^2 x)^2 \eta\mu x \, dx$$

Χρήση της ταυτότητας  $\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ :

$$\int \eta\mu^5 x \, dx = \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 \eta\mu x \, dx.$$

Θέτουμε  $u = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow du = -\eta\mu x \, dx$ :

$$\begin{aligned} -\int (1 - u^2)^2 \, du &= -\int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = -\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + c \\ &= -\sigma\upsilon\nu x + \frac{2}{3}\sigma\upsilon\nu^3 x - \frac{1}{5}\sigma\upsilon\nu^5 x + c. \end{aligned}$$

ii.

$$\int \eta\mu^6 x \sigma\upsilon\nu^3 x \, dx = \int \eta\mu^6 x \sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu x \, dx = \int \eta\mu^6 x (1 - \eta\mu^2 x) \sigma\upsilon\nu x \, dx.$$

Θέτουμε  $u = \eta\mu x$ ,  $du = \sigma\upsilon\nu x \, dx$ :

$$\int u^6 (1 - u^2) \, du = \int (u^6 - u^8) \, du = \frac{1}{7}\eta\mu^7 x - \frac{1}{9}\eta\mu^9 x + c.$$

iii.

$$\int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2(2x)) \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\eta\mu(4x) + c.$$

(Ίδιο αποτέλεσμα με χρήση της  $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$ .)

iv.

$$\int \sigma\upsilon\nu(15x) \sigma\upsilon\nu(4x) \, dx = \frac{1}{2} \int [\sigma\upsilon\nu(11x) + \sigma\upsilon\nu(19x)] \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta\mu(11x)}{11} + \frac{\eta\mu(19x)}{19} \right) + c.$$

v.

$$\int \tau\epsilon\mu^9 x \epsilon\varphi^5 x \, dx = \int \tau\epsilon\mu^8 x (\tau\epsilon\mu^2 x - 1)^2 \epsilon\varphi x \tau\epsilon\mu x \, dx.$$

Θέτουμε  $u = \tau\epsilon\mu x$ ,  $du = \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x \, dx$ :

$$\int u^8 (u^2 - 1)^2 \, du = \int (u^{12} - 2u^{10} + u^8) \, du = \frac{1}{13}\tau\epsilon\mu^{13} x - \frac{2}{11}\tau\epsilon\mu^{11} x + \frac{1}{9}\tau\epsilon\mu^9 x + c.$$

vi.

$$\int \varepsilon \varphi^3 x \, dx = \int \varepsilon \varphi x (\tau \varepsilon \mu^2 x - 1) \, dx = \int \varepsilon \varphi x \tau \varepsilon \mu^2 x \, dx - \int \varepsilon \varphi x \, dx.$$

Πρώτος όρος: Θέτουμε  $u = \varepsilon \varphi x \Rightarrow du = \tau \varepsilon \mu^2 x \, dx$ :

$$\int \varepsilon \varphi x \tau \varepsilon \mu^2 x \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \varphi^2 x.$$

Δεύτερος όρος:

$$\int \varepsilon \varphi x \, dx = -\ln |\sigma \nu x| = \ln |\tau \varepsilon \mu x| + C.$$

Άρα,

$$\int \varepsilon \varphi^3 x \, dx = \frac{1}{2} \varepsilon \varphi^2 x - (-\ln |\sigma \nu x|) + C = \frac{1}{2} \varepsilon \varphi^2 x + \ln |\sigma \nu x| + C.$$

Ισοδύναμη μορφή (με  $\ln |\sigma \nu x| = -\ln |\tau \varepsilon \mu x|$ ):

vii.

$$\int \frac{\eta \mu^7 x}{\sigma \nu^4 x} \, dx = \int \frac{(1 - \sigma \nu^2 x)^3}{\sigma \nu^4 x} \eta \mu x \, dx.$$

Θέτουμε  $u = \sigma \nu x$ ,  $du = -\eta \mu x \, dx$ :

$$-\int (u^{-4} - 3u^{-2} + 3 - u^2) \, du = \frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} - 3u + \frac{1}{3} u^3 + c$$

Επόμενος,

$$\int \frac{\eta \mu^7 x}{\sigma \nu^4 x} \, dx = \frac{1}{3\sigma \nu^3 x} - \frac{3}{\sigma \nu x} - 3\sigma \nu x + \frac{1}{3} \sigma \nu^3 x + c.$$

viii.

$$\int \eta \mu^3 \left(\frac{2}{3}x\right) \sigma \nu^4 \left(\frac{2}{3}x\right) \, dx = -\frac{3}{2} \int (1 - u^2) u^4 \, du = \frac{3}{14} \sigma \nu^7 \left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{3}{10} \sigma \nu^5 \left(\frac{2}{3}x\right) + c.$$



ix.

$$\int \sigma\upsilon\nu^4(2t) dt$$

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu^4\theta = \frac{3 + 4\sigma\upsilon\nu(2\theta) + \sigma\upsilon\nu(4\theta)}{8}.$$

Για  $\theta = 2t$ :

$$\sigma\upsilon\nu^4(2t) = \frac{3 + 4\sigma\upsilon\nu(4t) + \sigma\upsilon\nu(8t)}{8}.$$

Ολοκληρώνουμε κατά όρους:

$$\int \sigma\upsilon\nu^4(2t) dt = \frac{3}{8} \int dt + \frac{1}{8} \int \sigma\upsilon\nu(4t) dt + \frac{1}{8} \int \frac{\sigma\upsilon\nu(8t)}{8} dt.$$

Επομένως:

$$\int \sigma\upsilon\nu^4(2t) dt = \frac{3}{8}t + \frac{1}{8}\eta\mu(4t) + \frac{1}{64}\eta\mu(8t) + c.$$

x.

$$\int \frac{2 + 7\eta\mu^3 z}{\sigma\upsilon\nu^2 z} dz$$

Αναλύουμε:

$$= 2 \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 z} dz + 7 \int \frac{\eta\mu^3 z}{\sigma\upsilon\nu^2 z} dz = 2 \int \tau\epsilon\mu^2 z dz + 7 \int \frac{\eta\mu^3 z}{\sigma\upsilon\nu^2 z} dz.$$

Ο πρώτος όρος:

$$2 \int \tau\epsilon\mu^2 z dz = 2 \epsilon\varphi z.$$

Για τον δεύτερο όρο, γράφουμε  $\eta\mu^3 z = (1 - \sigma\upsilon\nu^2 z)\eta\mu z$ .

Θέτουμε  $u = \sigma\upsilon\nu z \Rightarrow du = -\eta\mu z dz$ :

$$7 \int \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 z)\eta\mu z}{\sigma\upsilon\nu^2 z} dz = -7 \int \frac{1 - u^2}{u^2} du = -7 \int (u^{-2} - 1) du.$$

Υπολογίζουμε:

$$-7 \int (u^{-2} - 1) du = -7(-u^{-1} - u) + c = 7\left(\frac{1}{u} + u\right) + c = 7\tau\epsilon\mu z + 7\sigma\upsilon\nu z + c.$$

Άρα:

$$\int \frac{2 + 7\eta\mu^3 z}{\sigma\upsilon\nu^2 z} dz = 2 \varepsilon\varphi z + 7 \tau\epsilon\mu z + 7 \sigma\upsilon\nu z + c.$$

xi.

$$\int \varepsilon\varphi^3(6x) \tau\epsilon\mu^{10}(6x) dx$$

Χρησιμοποιούμε  $\varepsilon\varphi^2\theta = \tau\epsilon\mu^2\theta - 1$ :

$$\varepsilon\varphi^3(6x) \tau\epsilon\mu^{10}(6x) = (\tau\epsilon\mu^2(6x) - 1) \tau\epsilon\mu^9(6x) [\varepsilon\varphi(6x) \tau\epsilon\mu(6x)].$$

Θέτουμε  $u = \tau\epsilon\mu(6x) \Rightarrow du = 6 \tau\epsilon\mu(6x) \varepsilon\varphi(6x) dx$

$$\Rightarrow \tau\epsilon\mu(6x) \varepsilon\varphi(6x) dx = \frac{1}{6} du.$$

Επομένως:

$$\int \varepsilon\varphi^3(6x) \tau\epsilon\mu^{10}(6x) dx = \frac{1}{6} \int (u^{11} - u^9) du = \frac{1}{6} \left( \frac{u^{12}}{12} - \frac{u^{10}}{10} \right) + c.$$

Άρα:

$$\int \varepsilon\varphi^3(6x) \tau\epsilon\mu^{10}(6x) dx = \frac{1}{72} \tau\epsilon\mu^{12}(6x) - \frac{1}{60} \tau\epsilon\mu^{10}(6x) + c.$$

xii.

$$\int \sigma\upsilon\nu(3t) \eta\mu(8t) dt$$

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ταυτότητα γινομένου σε άθροισμα:

$$\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2} [\eta\mu(A + B) + \eta\mu(A - B)].$$

Με  $A = 8t$ ,  $B = 3t$ :

$$\sigma\upsilon\nu(3t) \eta\mu(8t) = \frac{1}{2} [\eta\mu(11t) + \eta\mu(5t)].$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\int \sigma\upsilon\nu(3t) \eta\mu(8t) dt = \frac{1}{2} \left( -\frac{\sigma\upsilon\nu(11t)}{11} - \frac{\sigma\upsilon\nu(5t)}{5} \right) + c.$$

**12.** Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i.  $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx, \quad x = 4 \eta\mu\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

ii.  $\int \sqrt{4+x^2} dx, \quad x = 2 \varepsilon\varphi\theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

iii.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta\mu\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

iv.  $\int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx, \quad x = 2 \varepsilon\varphi\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

v.  $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx, \quad x = \varepsilon\varphi\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Λύση

(Ασκ. 1/45)

i.  $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx, \quad x = 4 \eta\mu\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$dx = 4 \sigma\upsilon\nu\theta d\theta, \quad \sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-16\eta\mu^2\theta} = 4 |\sigma\upsilon\nu\theta| = 4 \sigma\upsilon\nu\theta$$

(διότι  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > 0$ ). Άρα

$$\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx = \int \frac{4 \sigma\upsilon\nu\theta}{4 \sigma\upsilon\nu\theta} d\theta = \int 1 d\theta = \theta + c = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + c.$$

ii.  $\int \sqrt{4+x^2} dx, \quad x = 2 \varepsilon\varphi\theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$dx = 2 \tau\epsilon\mu^2\theta d\theta, \quad \sqrt{4+x^2} = 2\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta} = 2 |\tau\epsilon\mu\theta|.$$

Στο  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  ισχύει  $\tau\epsilon\mu\theta < 0$ , άρα  $|\tau\epsilon\mu\theta| = -\tau\epsilon\mu\theta$  και

$$\int \sqrt{4+x^2} dx = \int 4 |\tau\epsilon\mu\theta| \tau\epsilon\mu^2\theta d\theta = -4 \int \tau\epsilon\mu^3\theta d\theta.$$

Γνωστό ολοκλήρωμα:  $\int \tau\epsilon\mu^3\theta d\theta = \frac{1}{2}(\tau\epsilon\mu\theta \varepsilon\varphi\theta + \ln |\tau\epsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi\theta|)$ . Άρα

$$\int \sqrt{4+x^2} dx = -2(\tau\epsilon\mu\theta \varepsilon\varphi\theta + \ln |\tau\epsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi\theta|) + c.$$

Επιστρέφουμε σε  $x$ :  $\varepsilon\varphi\theta = \frac{x}{2}$ ,  $|\tau\epsilon\mu\theta| = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$  και στο δοθέν διάστημα  $\tau\epsilon\mu\theta = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ .

Τότε

$$-2 \tau\epsilon\mu\theta \varepsilon\varphi\theta = -2 \left( -\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \cdot \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} \sqrt{4+x^2},$$

ενώ

$$-2 \ln |\tau \epsilon \mu \theta + \epsilon \varphi \theta| = -2 \ln \left| \frac{-\sqrt{4+x^2} + x}{2} \right| = 2 \ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C$$

(χρησιμοποιώντας  $(\sqrt{4+x^2} - x)(\sqrt{4+x^2} + x) = 4$ ). Άρα

$$\int \sqrt{4+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{4+x^2} + 2 \ln(x + \sqrt{4+x^2}) + c$$

iii.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \eta \mu \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma \upsilon \nu \theta d\theta, \quad \sqrt{1-3x^2} = \sqrt{1-\eta \mu^2 \theta} = \sigma \upsilon \nu \theta (> 0).$$

Άρα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma \upsilon \nu \theta d\theta}{\sigma \upsilon \nu \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int d\theta = \frac{\theta}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + c.$$

iv.  $\int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx, \quad x = 2 \epsilon \varphi \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$dx = 2 \tau \epsilon \mu^2 \theta d\theta, \quad (x^2+4)^3 = (4 \tau \epsilon \mu^2 \theta)^3 = 64 \tau \epsilon \mu^6 \theta.$$

Άρα

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \int \frac{2 \tau \epsilon \mu^2 \theta}{64 \tau \epsilon \mu^6 \theta} d\theta = \frac{1}{32} \int \tau \epsilon \mu^{-4} \theta d\theta = \frac{1}{32} \int \sigma \upsilon \nu^4 \theta d\theta.$$

Χρησιμοποιούμε  $\sigma \upsilon \nu^4 \theta = \frac{3+4 \sigma \upsilon \nu 2\theta + \sigma \upsilon \nu 4\theta}{8}$ :

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \frac{1}{32} \left( \frac{3\theta}{8} + \frac{\eta \mu 2\theta}{4} + \frac{\eta \mu 4\theta}{32} \right) + c = \frac{3\theta}{256} + \frac{\eta \mu 2\theta}{128} + \frac{\eta \mu 4\theta}{1024} + c.$$

Επιστρέφουμε σε  $x$ :  $\theta = \arctan \frac{x}{2}$ ,  $\eta \mu 2\theta = \frac{4x}{x^2+4}$ ,  $\eta \mu 4\theta = \frac{8x(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$ .

Τότε

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \frac{3}{256} \arctan \frac{x}{2} + \frac{x}{32(x^2+4)} + \frac{x(4-x^2)}{128(x^2+4)^2} + c$$

v.  $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx, \quad x = \epsilon \varphi \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Με  $x = \varepsilon\varphi\theta$ :  $dx = \tau\epsilon\mu^2\theta d\theta$  και

$$\frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\tau\epsilon\mu^2\theta d\theta}{\varepsilon\varphi\theta \tau\epsilon\mu^2\theta} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} d\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} d\theta.$$

Άρα

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} d\theta = \ln |\eta\mu\theta| + c.$$

Επειδή  $\theta = \arctan x$  και  $\eta\mu\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  (στο  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ),

$$\ln |\eta\mu\theta| = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

**13.** Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i.  $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx, \quad x+1 = 2\eta\mu\theta, \quad 0 < \theta < \pi$

ii.  $\int \sqrt{2x^2+12x+8} dx, \quad x+3 = \sqrt{5}\tau\epsilon\mu\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

iii.  $\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx, \quad x-1 = \sqrt{2}\eta\mu\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

iv.  $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx, \quad x = \eta\mu^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

v.  $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx, \quad x = \tau\epsilon\mu\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Λύση:

(Ασχ. 2/45)

i. Παρατηρούμε ότι  $3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2$ . Θέτουμε  $u = x+1$ . Τότε:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int \sqrt{4-u^2} du.$$

Με γνωστό τύπο:

$$\int \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c.$$

Άρα

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + c.$$

ii. Έχουμε:

$$2x^2 + 12x + 8 = 2[(x + 3)^2 - 5].$$

Θέτουμε  $u = x + 3$ . Τότε:

$$\int \sqrt{2x^2 + 12x + 8} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{u^2 - 5} du.$$

Χρησιμοποιούμε:

$$\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c.$$

Άρα

$$\int \sqrt{2x^2 + 12x + 8} dx = \frac{(x + 3)}{2} \sqrt{2x^2 + 12x + 8} - \frac{5\sqrt{2}}{2} \ln(x + 3 + \sqrt{(x + 3)^2 - 5}) + c.$$

iii. Παρατηρούμε ότι:

$$1 + 2x - x^2 = 2 - (x - 1)^2.$$

Με  $x - 1 = \sqrt{2} \eta\mu\theta$  έχουμε  $dx = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ ,  $\sqrt{1 + 2x - x^2} = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\theta$ . Άρα:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}} = \int \frac{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\theta}{\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\theta} d\theta = \int d\theta = \theta + c = \arcsin\left(\frac{x - 1}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

iv. Με  $x = \eta\mu^2\theta$  έχουμε  $dx = 2\eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ , και

$$\sqrt{\frac{x}{1 - x}} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\theta.$$

Άρα:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1 - x}} dx = \int 2\varepsilon\varphi\theta \eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta d\theta = 2 \int \eta\mu^2\theta d\theta = \int (1 - \sigma\upsilon\nu 2\theta) d\theta = \theta - \frac{1}{2} \eta\mu 2\theta + c.$$

Επειδή  $\theta = \arcsin\sqrt{x}$  και  $\eta\mu 2\theta = 2\sqrt{x(1 - x)}$ , έχουμε:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1 - x}} dx = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1 - x)} + c.$$

v. Θέτουμε  $x = \tau\epsilon\mu\theta$ . Τότε:

$$dx = \tau\epsilon\mu\theta \varepsilon\varphi\theta d\theta, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \varepsilon\varphi\theta, \quad \frac{1}{x^2} = \sigma\upsilon\nu^2\theta.$$

Άρα:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx = \int \varepsilon\varphi\theta \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \tau\epsilon\mu\theta \varepsilon\varphi\theta d\theta = \int \sigma\upsilon\nu\theta \varepsilon\varphi^2\theta d\theta.$$

Επειδή  $\varepsilon\varphi^2\theta = \tau\epsilon\mu^2\theta - 1$ :

$$\int \sigma\upsilon\nu\theta \varepsilon\varphi^2\theta d\theta = \int (\tau\epsilon\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) d\theta = \ln |\tau\epsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi\theta| - \eta\mu\theta + c.$$

Μετάβαση σε  $x$ :  $\tau\epsilon\mu\theta = x$ ,  $\varepsilon\varphi\theta = \sqrt{x^2-1}$ ,  $\eta\mu\theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ . Άρα:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c.$$

14. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

$$\text{i. } \int \frac{3x+11}{x^2-x-6} dx \quad \text{iv. } \int \frac{x^3+10x^2+3x+36}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad \text{vii. } \int \frac{4}{x^2+5x-14} dx$$

$$\text{ii. } \int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x} dx \quad \text{v. } \int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2} dx \quad \text{viii. } \int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3} dt$$

$$\text{iii. } \int \frac{x^2-29x+5}{(x-4)^2(x^2+3)} dx \quad \text{vi. } \int \frac{x^2}{x^2-1} dx \quad \text{ix. } \int \frac{8}{3x^3+7x^2+4x} dx$$

Λύση:

i. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+11}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$3x+11 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$x = -2: \quad 5 = A(0) + B(-5) \implies B = -1$$

$$x = 3 : \quad 20 = A(5) + B(0) \implies A = 4$$

$$\int \frac{3x + 11}{x^2 - x - 6} dx = \int \frac{4}{x - 3} - \frac{1}{x + 2} dx = \int \frac{4}{x - 3} dx - \int \frac{1}{x + 2} dx = 4 \ln |x - 3| - \ln |x + 2| + c$$

ii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2 + 4}{x(x + 2)(3x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{3x - 2}$$

$$x^2 + 4 = A(x + 2)(3x - 2) + Bx(3x - 2) + Cx(x + 2)$$

$$x = 0 : \quad 4 = A(2)(-2) \implies A = -1$$

$$x = -2 : \quad 8 = B(-2)(-8) \implies B = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{3} : \quad \frac{40}{9} = C \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{8}{3} \right) \implies C = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4}{3x^3 + 4x^2 - 4x} dx &= \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x + 2} + \frac{5}{2} \frac{1}{3x - 2} \right) dx \\ &= -\ln |x| + \frac{1}{2} \ln |x + 2| + \frac{5}{6} \ln |3x - 2| + c \end{aligned}$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^2 - 29x + 5}{(x - 4)^2(x^2 + 3)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{(x - 4)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3}$$

$$x^2 - 29x + 5 = A(x - 4)(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Cx + D)(x - 4)^2$$

$$x^2 - 29x + 5 = (A + C)x^3 + (-4A + B - 8C + D)x^2 + (3A + 16C - 8D)x - 12A + 3B + 16D$$



Εύρεση συντελεστών,

$$\begin{aligned} x^3 : & A + C = 0 \\ x^2 : & -4A + B - 8C + D = 1 \\ x^1 : & 3A + 16C - 8D = -29 \\ x^0 : & -12A + 3B + 16D = 5 \end{aligned} \Rightarrow A = 1, \quad B = -5, \quad C = -1, \quad D = 2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)} dx &= \int \left( \frac{1}{x-4} - \frac{5}{(x-4)^2} - \frac{x}{x^2+3} + \frac{2}{x^2+3} \right) dx \\ &= \ln|x-4| + \frac{5}{x-4} - \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + c \end{aligned}$$

iv. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 10x^2 + 3x + 36 &= A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1) \\ &= (A+B)x^4 + (C-B)x^3 + (8A+4B-C+D)x^2 + (-4B+4C-D+E)x + 16A-4C-E \end{aligned}$$

Εύρεση συντελεστών,

$$\begin{aligned} x^4 : & A + B = 0 \\ x^3 : & C - B = 1 \\ x^2 : & 8A + 4B - C + D = 10 \\ x^1 : & -4B + 4C - D + E = 3 \\ x^0 : & 16A - 4C - E = 36 \end{aligned} \Rightarrow A = 2, \quad B = -2, \quad C = -1, \quad D = 1, \quad E = 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} dx &= \int \frac{2}{x-1} + \frac{-2x-1}{x^2+4} + \frac{x}{(x^2+4)^2} dx \\ &= \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{2x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx + \int \frac{x}{(x^2+4)^2} dx \\ &= 2 \ln|x-1| - \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4} + c \end{aligned}$$

v. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} = x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2}$$

$$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} dx = \int x - 2 - \frac{18}{x^3 - 3x^2} dx = \int x - 2 dx - \int \frac{18}{x^3 - 3x^2} dx$$

$$\frac{18}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3}$$

$$18 = Ax(x-3) + B(x-3) + Cx^2$$

$$x = 0 : \quad 18 = B(-3) \implies B = -6$$

$$x = 3 : \quad 18 = C(9) \implies C = 2$$

$$x = 1 : \quad 18 = A(-2) + B(-2) + C = -2A + 14 \implies A = -2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 18}{x^3 - 3x^2} dx &= \int x - 2 dx - \int \left( \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x-3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \ln|x| - \frac{6}{x} - 2 \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

vi.

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = \int 1 + \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = -1 : \quad 1 = B(-2) \implies B = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 : \quad 1 = A(2) \implies A = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx &= \int dx + \int \left( \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + c \end{aligned}$$

vii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{4}{(x+7)(x-2)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-2}$$

$$4 = A(x-2) + B(x+7)$$

$$x = 2 : \quad 4 = 9B \implies B = \frac{4}{9}$$

$$x = -7 : \quad 4 = -9A \implies A = -\frac{4}{9}$$

$$\int \frac{4}{(x+7)(x-2)} dx = \int \frac{-4/9}{x+7} + \frac{4/9}{x-2} dx = \frac{4}{9} \ln |x-2| - \frac{4}{9} \ln |x+7| + c$$

viii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3} = \frac{A}{2t+3} + \frac{B}{5t-1}$$

$$8-3t = A(5t-1) + B(2t+3)$$

$$t = \frac{1}{5} : \quad \frac{37}{5} = \frac{17}{5}B \implies B = \frac{37}{17}$$

$$t = -\frac{3}{2} : \quad \frac{25}{2} = -\frac{17}{2}A \implies A = -\frac{25}{17}$$

$$\frac{8-3t}{10t^2+13t-3} = \frac{-\frac{25}{17}}{2t+3} + \frac{\frac{37}{17}}{5t-1}$$

$$\int \frac{8-3t}{10t^2+13t-3} dt = \int \left( -\frac{25}{17} \frac{1}{2t+3} + \frac{37}{17} \frac{1}{5t-1} \right) dt$$

$$= \frac{37}{85} \ln |5t-1| - \frac{25}{34} \ln |2t+3| + c$$

ix. Ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{8}{x(3x+4)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x+4} + \frac{C}{x+1}$$

$$8 = A(3x+4)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(3x+4)$$

$$x = -\frac{4}{3} : \quad 8 = \frac{4}{9}B \implies B = 18$$

$$x = -1 : \quad 8 = -C \implies C = -8$$

$$x = 0 : \quad 8 = 4A \implies A = 2$$

$$\int \frac{8}{x(3x+4)(x+1)} dx = \int \frac{2}{x} + \frac{18}{3x+4} - \frac{8}{x+1} dx = 2 \ln |x| + 6 \ln |3x+4| - 8 \ln |x+1| + c$$

15. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα.

- i.  $\int \frac{6x}{x^2 - 4} dx$       iv.  $\int \frac{2}{x^2 - 9} dx$       vii.  $\int \frac{6x - 4}{x^2 - 6x + 13} dx$
- ii.  $\int \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 3} dx$       v.  $\int \frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx$       viii.  $\int \frac{1}{x^2 + 10x + 29} dx$
- iii.  $\int \frac{1}{x^2 + 2x} dx$       vi.  $\int \frac{x^3 + 2x + 6}{x^2 + x - 2} dx$       ix.  $\int \frac{1}{x^4 - 1} dx$
- x.  $\int \frac{2x}{x^2 - 2x + 10} dx$       xi.  $\int \frac{1}{x^3(x + 1)} dx$       xii.  $\int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx$
- xiii.  $\int \frac{8}{3 + 5 \eta \mu 2x} dx, x \in (0, \frac{\pi}{2})$       xiv.  $\int \frac{10}{3 \eta \mu x + 4 \sigma \upsilon \nu x} dx, x \in (0, \frac{\pi}{2})$       xv.  $\int \frac{1}{5 + 3 \sigma \upsilon \nu x} dx,$

Λύση:

(Ασκ. 1/51)

i. Παρατηρούμε  $(x^2 - 4)' = 2x$ .

$$\int \frac{6x}{x^2 - 4} dx = 3 \ln |x^2 - 4| + c.$$

ii. Θέτουμε  $u = x^2 - 7x + 3 \Rightarrow u' = 2x - 7$ .

$$\int \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 3} dx = \ln |x^2 - 7x + 3| + c.$$

iii. Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} \Rightarrow 1 = A(x + 2) + Bx.$$

Θέτοντας  $x = 0 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$  και  $x = -2 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$ .

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x} dx = \int \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x + 2)} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x + 2| + c.$$

iv.  $(x^2 - 9) = (x - 3)(x + 3)$ . Ζητούμε  $\frac{2}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3}$ .

$$2 = A(x + 3) + B(x - 3).$$

$$x = 3 \Rightarrow 2 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad x = -3 \Rightarrow 2 = -6B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}.$$

$$\int \frac{2}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{3} \ln |x - 3| - \frac{1}{3} \ln |x + 3| + c.$$

v. Ζητούμε

$$\frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

Οπότε

$$5x = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x + 1) = (A + B)x^2 + (B + C)x + (4A + C).$$

$$\text{Σύστημα: } A + B = 0, \quad B + C = 5, \quad 4A + C = 0 \Rightarrow A = -1, \quad B = 1, \quad C = 4.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx &= \int \left( -\frac{1}{x + 1} + \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{4}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= -\ln |x + 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + 2 \tan^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

vi. Πολυωνυμική διαίρεση:

$$\frac{x^3 + 2x + 6}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2},$$

επειδή  $x^3 + 2x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 2) + (5x + 4)$ . Ανάλυση στο υπόλοιπο:

$$\frac{5x + 4}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \Rightarrow 5x + 4 = A(x + 2) + B(x - 1).$$

$$x = 1 \Rightarrow 9 = 3A \Rightarrow A = 3, \quad x = -2 \Rightarrow -6 = -3B \Rightarrow B = 2. \text{ Άρα}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x + 6}{x^2 + x - 2} dx &= \int (x - 1) dx + \int \left( \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x - 1| + 2 \ln |x + 2| + c. \end{aligned}$$

vii. Γράφουμε  $x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4$  και

$$\frac{6x - 4}{x^2 - 6x + 13} = \frac{3(2x - 6)}{(x - 3)^2 + 4} + \frac{14}{(x - 3)^2 + 4}.$$

Έτσι

$$\int \frac{6x-4}{x^2-6x+13} dx = 3 \ln((x-3)^2+4) + 7 \tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c.$$

viii. Πλήρες τετράγωνο:  $x^2 + 10x + 29 = (x+5)^2 + 4$ .

$$\int \frac{1}{x^2 + 10x + 29} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+5}{2}\right) + c.$$

ix. Παραγοντοποίηση  $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ . Ζητούμε

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Ισοδυναμεί με

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1).$$

Εξισώνοντας συντελεστές παίρνουμε  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$ ,  $C = 0$ ,  $D = -\frac{1}{2}$ . Άρα

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c.$$

x.  $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$  και  $2x = 2(x-1) + 2$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2-2x+10} dx &= \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+9} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2+9} dx \\ &= \ln((x-1)^2+9) + \frac{2}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

xi. Μερικά κλάσματα με αύξουσες δυνάμεις:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

Ισοδυναμεί με

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3.$$

Εξισώνοντας συντελεστές:  $D = -1$ ,  $A = 1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$ . Δηλαδή

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1},$$

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)} dx = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c.$$

xii. Ζητούμε

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας:

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x.$$

Εξίσωση συντελεστών δίνει  $A = 1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 0$ ,  $D = -1$ ,  $E = 0$ . Άρα

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c.$$

xiii. Θέτουμε  $u = \tan x \Rightarrow \eta\mu 2x = \frac{2u}{1+u^2}$ ,  $dx = \frac{du}{1+u^2}$ .

$$\int \frac{8}{3+5\eta\mu 2x} dx = \int \frac{8}{3+\frac{10u}{1+u^2}} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{8}{3u^2+10u+3} du.$$

Ανάλυση:

$$\frac{8}{3u^2+10u+3} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+\frac{1}{3}} \Rightarrow 8 = A(u+\frac{1}{3}) + B(u+3).$$

$u = -3 \Rightarrow 8 = B \cdot 0 + A(-3+\frac{1}{3}) = -\frac{8}{3}A \Rightarrow A = -3$ .  $u = -\frac{1}{3} \Rightarrow 8 = B(-\frac{1}{3}+3) = \frac{8}{3}B \Rightarrow B = 3$ . Άρα

$$\int \frac{8}{3+5\eta\mu 2x} dx = \int \left( \frac{-3}{u+3} + \frac{3}{u+\frac{1}{3}} \right) du = \ln \left| \frac{u+\frac{1}{3}}{u+3} \right| + c = \ln \left| \frac{\tan x + \frac{1}{3}}{\tan x + 3} \right| + c.$$

xiv. Γράφουμε  $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x = 5\eta\mu(x+\alpha)$  με  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ .

$$\int \frac{10}{3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x} dx = 2 \int \csc(x+\alpha) dx = 2 \ln \left| \tan \frac{x+\alpha}{2} \right| + c.$$

xv. Τυπικός τύπος με  $t = \tan \frac{x}{2}$  (ή γνωστός τύπος για  $a+b\sigma\upsilon\nu x$ ). Για  $a = 5$ ,  $b = 3$ :

$$\int \frac{1}{5+3\sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \right) + c.$$



16. Να αποδείξετε τους πιο κάτω αναγωγικούς τύπους.

- i.  $\int x^\nu e^x dx = x^\nu e^x - \nu \int x^{\nu-1} e^x dx, \quad \nu \in \mathbb{N}$
- ii.  $I_\nu = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^\nu - \frac{\nu}{2} I_{\nu-1}, \quad \nu > 1, \quad \text{όπου } I_\nu = \int x (\ln x)^\nu dx, \quad \nu \in \mathbb{N}$
- iii.  $I_\nu = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1} - I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2, \quad \text{όπου } I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x dx, \quad \nu \in \mathbb{N}_0$

Λύση:

(Ασκ. 1/54)

i. Θέτουμε  $u = x^\nu, dv = e^x dx$ . Τότε  $du = \nu x^{\nu-1} dx$  και  $v = e^x$ .

$$\int x^\nu e^x dx = x^\nu e^x - \int \nu x^{\nu-1} e^x dx = x^\nu e^x - \nu \int x^{\nu-1} e^x dx.$$

ii. Θέτουμε  $u = (\ln x)^\nu, dv = x dx$ . Τότε  $du = \nu (\ln x)^{\nu-1} \frac{1}{x} dx$  και  $v = \frac{x^2}{2}$ .

$$I_\nu = \int x (\ln x)^\nu dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^\nu - \int \frac{x^2}{2} \nu (\ln x)^{\nu-1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^\nu - \frac{\nu}{2} \int x (\ln x)^{\nu-1} dx,$$

δηλαδή

$$I_\nu = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^\nu - \frac{\nu}{2} I_{\nu-1} \quad (\nu > 1).$$

iii. Γράφουμε  $\varepsilon\varphi^\nu x = \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \varepsilon\varphi^2 x = \varepsilon\varphi^{\nu-2} x (\sec^2 x - 1)$ . Άρα

$$I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \sec^2 x dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x dx.$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε  $u = \varepsilon\varphi x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$ :

$$\int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \sec^2 x dx = \int u^{\nu-2} du = \frac{u^{\nu-1}}{\nu-1} = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1}.$$

Έτσι

$$I_\nu = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1} - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x dx = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1} - I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2.$$

17. Έστω

$$I_\nu = \int x^\nu \eta\mu 2x \, dx, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Να βρεθούν τα  $I_0, I_1$  και ναδειχθεί ότι

$$I_\nu = -\frac{1}{2}x^\nu \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{\nu}{4}x^{\nu-1} \eta\mu 2x - \frac{\nu(\nu-1)}{4} I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2.$$

Στη συνέχεια, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int x^4 \eta\mu 2x \, dx$ .

Λύση:

(Ασκ. 2/54)

i.  $I_0 = \int \eta\mu 2x \, dx = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x + c.$

Για  $I_1 = \int x \eta\mu 2x \, dx$  με μέρη:

$$u = x, \quad dv = \eta\mu 2x \, dx \Rightarrow du = dx, \quad v = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x.$$

Άρα

$$I_1 = x\left(-\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x\right) dx = -\frac{1}{2} x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c.$$

ii. (Αναγωγικός τύπος) Με μέρη στο  $I_\nu$ :

$$u = x^\nu, \quad dv = \eta\mu 2x \, dx \Rightarrow du = \nu x^{\nu-1} dx, \quad v = -\frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 2x.$$

Τότε

$$I_\nu = \int x^\nu \eta\mu 2x \, dx = -\frac{1}{2} x^\nu \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{\nu}{2} \int x^{\nu-1} \sigma\upsilon\nu 2x \, dx.$$

Θέτουμε

$$J_{\nu-1} := \int x^{\nu-1} \sigma\upsilon\nu 2x \, dx$$

και ξανά μέρη:

$$u = x^{\nu-1}, \quad dv = \sigma\upsilon\nu 2x \, dx \Rightarrow du = (\nu-1)x^{\nu-2} dx, \quad v = \frac{1}{2} \eta\mu 2x,$$

οπότε

$$J_{\nu-1} = \frac{1}{2} x^{\nu-1} \eta\mu 2x - \frac{\nu-1}{2} \int x^{\nu-2} \eta\mu 2x \, dx = \frac{1}{2} x^{\nu-1} \eta\mu 2x - \frac{\nu-1}{2} I_{\nu-2}.$$

Επιστρέφοντας στο  $I_\nu$ :

$$I_\nu = -\frac{1}{2} x^\nu \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{\nu}{2} \left( \frac{1}{2} x^{\nu-1} \eta\mu 2x - \frac{\nu-1}{2} I_{\nu-2} \right) = -\frac{1}{2} x^\nu \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{\nu}{4} x^{\nu-1} \eta\mu 2x - \frac{\nu(\nu-1)}{4} I_{\nu-2}.$$

iii. (Εφαρμογή για  $\nu = 4$ ) Χρησιμοποιούμε τον τύπο δύο φορές.

$$I_2 = -\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{2}{4}x \eta\mu 2x - \frac{2 \cdot 1}{4}I_0 = -\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \eta\mu 2x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

Έπειτα

$$I_4 = -\frac{1}{2}x^4 \sin 2x + \frac{4}{4}x^3 \eta\mu 2x - \frac{4 \cdot 3}{4}I_2 = -\frac{1}{2}x^4 \sin 2x + x^3 \eta\mu 2x - 3I_2.$$

Άρα

$$\int x^4 \eta\mu 2x \, dx = -\frac{1}{2}x^4 \sin 2x + x^3 \eta\mu 2x + \frac{3}{2}x^2 \sin 2x - \frac{3}{2}x \eta\mu 2x - \frac{3}{4}\sin 2x + c$$

**18.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

i.  $f'(x) = 3x - 2, \quad f(1) = 1$

ii.  $f'(x) = \sqrt{x-2}, \quad f(3) = 2$

iii.  $f''(x) = 2 - 6x, \quad f'(0) = 4, \quad f(0) = 1$

iv.  $f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'(1) = 1, \quad f(1) = 1$

v.  $f''(x) = 2, \quad f(1) = f(3) = 0$

vi.  $f'(x)e^{f(x)} = 2 + \ln x$  και η γραφική παράσταση της  $f$  να περνά από το σημείο  $(e, 0)$ .

Λύση:

Ασκ.(1/56)

i. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x) \, dx = \int (3x - 2) \, dx$$

$$f(x) = \int 3x \, dx - \int 2 \, dx = \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης  $f(1) = 1$

$$f(1) = \frac{3(1)^2}{2} - 2(1) + C = \frac{3}{2} - 2 + C = -\frac{1}{2} + C$$

$$-\frac{1}{2} + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$$

ii. Ολοκλήρωση της παραγώγου

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sqrt{x-2} dx$$

Θέτουμε αντικατάσταση  $u = x - 2$

$$f(x) = \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$\implies f(x) = \frac{2}{3} (x-2)^{3/2} + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης  $f(3) = 2$

$$f(3) = \frac{2}{3} (3-2)^{3/2} + C = \frac{2}{3} (1)^{3/2} + C = \frac{2}{3} + C$$

$$\frac{2}{3} + C = 2 \implies C = \frac{4}{3}$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{2}{3} (x-2)^{3/2} + \frac{4}{3}$$

iii. Ολοκλήρωση για να βρούμε την  $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (2 - 6x) dx$$

$$f'(x) = \int 2 dx - \int 6x dx = 2x - 3x^2 + C_1$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης  $f'(0) = 4$

$$f'(0) = 2(0) - 3(0)^2 + C_1 = C_1 = 4$$

$$\implies f'(x) = 2x - 3x^2 + 4$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την  $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 3x^2 + 4) dx$$

$$f(x) = \int 2x dx - \int 3x^2 dx + \int 4 dx = x^2 - x^3 + 4x + C_2$$

Γνωρίζοντας το  $f(0)=1$  μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή  $C_2$

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + C_2 = 1$$

Άρα η γενική μορφή της συνάρτησης είναι:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 1$$

iv. Ολοκλήρωση για να βρούμε το  $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int \frac{2}{x^3} dx = \int 2x^{-3} dx$$

$$f'(x) = 2 \int x^{-3} dx = 2 \left( \frac{x^{-2}}{-2} \right) + C_1 = -x^{-2} + C_1$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης  $f'(1) = 1$

$$f'(1) = -1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την  $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left( -\frac{1}{x^2} + 2 \right) dx = \int -x^{-2} dx + \int 2 dx$$

$$f(x) = x^{-1} + 2x + C_2 = \frac{1}{x} + 2x + C_2$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης  $f(1) = 1$

$$f(1) = 1 + 2 + C_2 = 3 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = -2$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x - 2$$

v. Ολοκλήρωση για να βρούμε το  $f'(x)$

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2 dx = 2x + C_1$$

Ολοκλήρωση για να βρούμε την  $f(x)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x + C_1) dx = x^2 + C_1x + C_2$$

Χρήση των αρχικών συνθηκών  $f(1) = 0$  και  $f(3) = 0$

$$f(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -1$$

$$f(3) = 9 + 3C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow 3C_1 + C_2 = -9$$

Λύση του συστήματος για  $C_1, C_2$ :

$$(3C_1 + C_2) - (C_1 + C_2) = -9 - (-1) \Rightarrow 2C_1 = -8 \Rightarrow C_1 = -4$$

$$C_2 = -1 - C_1 = -1 - (-4) = 3$$

Τελική συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

vi. Γραμμική αντικατάσταση για ολοκλήρωση

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{d}{dx}(e^{f(x)}) \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = 2 + \ln x$$

Ολοκλήρωση και εύρεση  $e^{f(x)}$

$$\int d(e^{f(x)}) = \int (2 + \ln x) dx$$

$$e^{f(x)} = \int 2 dx + \int \ln x dx + C$$

Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων

$$\int 2 dx = 2x, \quad \int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} = 2x + (x \ln x - x) + C = x \ln x + x + C$$

Χρήση της αρχικής συνθήκης  $f(e) = 0$

$$e^{f(e)} = e^0 = 1 \Rightarrow 1 = e \ln e + e + C = e \cdot 1 + e + C = 2e + C$$

$$C = 1 - 2e$$

Τελική μορφή της συνάρτησης

$$e^{f(x)} = x \ln x + x + 1 - 2e$$

Ισοδύναμα, λογαριθμίζοντας:

$$f(x) = \ln(x \ln x + x + 1 - 2e)$$

**19.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ , της οποίας η γραφική παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων και ισχύει

$$f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση:

(Ασκ. 2/56)

Η φράση «οριζόντια εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων» σημαίνει ότι

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f''(x) = 2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 2 \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right).$$

Άρα, ολοκληρώνοντας μία φορά,

$$f'(x) = 2 \frac{x}{x^2 + 1} + C_1.$$

Με την αρχική συνθήκη  $f'(0) = 0$  παίρνουμε  $C_1 = 0$ , οπότε

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά:

$$f(x) = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) + C_2.$$

Με  $f(0) = 0$  προκύπτει  $C_2 = 0$ . Επομένως,

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

**20.** Αν  $f''(x) = 4x^3 + 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $f'(1) = 4$ , να δείξετε ότι η  $f$  δεν έχει ακρότατα.

Λύση:

(Ασκ. 3/56)

Ολοκληρώνουμε τη δεύτερη παράγωγο για να βρούμε την  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \int (4x^3 + 2x) dx = x^4 + x^2 + C.$$

Από την αρχική συνθήκη  $f'(1) = 4$  προκύπτει

$$1 + 1 + C = 4 \Rightarrow C = 2,$$

οπότε

$$f'(x) = x^4 + x^2 + 2.$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $x^4 \geq 0$  και  $x^2 \geq 0$ , άρα

$$f'(x) = x^4 + x^2 + 2 \geq 2 > 0.$$

Επομένως η  $f'$  δεν μηδενίζεται πουθενά και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Άρα η  $f$  δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

**21.** Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \int 9x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx & (\beta) \int \left( \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx & (\gamma) \int \frac{\eta\mu^3(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(x)} dx \\ (\delta) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx & (\sigma\tau) \int \sigma\upsilon\nu(\sqrt{x}) dx & (\eta) \int 4x^3 \sqrt{1 + x^2} dx \\ (\vartheta) \int \eta\mu^7(x) \sigma\upsilon\nu^3(x) dx & (\iota) \int \eta\mu(7x) \sigma\upsilon\nu(3x) dx & (\iota\beta) \int \eta\mu(2x) \sigma\upsilon\nu^6(x) dx \\ (\iota\alpha) \int \frac{\eta\mu^4(x)}{\sigma\upsilon\nu^6(x)} dx & (\iota\gamma) \int \sqrt{1 - \eta\mu(2x)} dx, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4}) & (\iota\delta) \int (x^2 + 1)e^x dx \\ (\iota\epsilon) \int e^{ax} \eta\mu(\beta x) dx & (\iota\zeta) \int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx & (\iota\sigma\tau) \int \tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu(x) dx \\ (\iota\nu) \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 10} dx & (\chi) \int \frac{1}{1 + \eta\mu(x)} dx & (\chi\alpha) \int \frac{1}{3 + 2\sigma\upsilon\nu(2x) - \eta\mu(2x)} dx \\ (\chi\beta) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} dx & (\chi\upsilon) \int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2 + 3x}} dx & \end{array}$$

Λύση:

(Ασκ. 1/57)

(α) Θέτουμε  $u = x^3 + 5 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ .

$$\int 9x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx = 3 \int \sqrt{u} du = 3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + c = 2(x^3 + 5)^{3/2} + c.$$



(β)  $\frac{d}{dx} \ln(e^x + 1) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ . Για το δεύτερο μέρος θέτουμε  $t = \sqrt{\ln x} \Rightarrow \ln x = t^2, dx = 2t dt/x$ :

$$\int \left( \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \right) dx = \ln(e^x + 1) - \int 2t^2 dt = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c.$$

(γ)

$$\int \frac{\eta\mu^3(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(x)} dx = \int \eta\mu(x) \left( \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x)} - 1 \right) dx.$$

Με  $u = \sigma\upsilon\nu(x), du = -\eta\mu(x) dx$ :

$$-\int \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right) du = \frac{1}{u} + u + c = \tau\epsilon\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x) + c.$$

(δ)

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx, \quad u = e^x \Rightarrow du = e^x dx = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi(e^x) + c.$$

(στ)  $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t dt$ .

$$\int \sigma\upsilon\nu(\sqrt{x}) dx = 2 \int t \sigma\upsilon\nu(t) dt = 2(t \eta\mu(t) + \sigma\upsilon\nu(t)) + c = 2(\sqrt{x} \eta\mu\sqrt{x} + \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}) + c.$$

(η)  $u = x^2, du = 2x dx$ .

$$\int 4x^3 \sqrt{1+x^2} dx = 2 \int u \sqrt{1+u} du = 2 \int ((1+u)^{3/2} - (1+u)^{1/2}) du = \frac{4}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{4}{3}(1+x^2)^{3/2} + c.$$

(θ)  $\sigma\upsilon\nu^3(x) = (1 - \eta\mu^2(x)) \sigma\upsilon\nu(x)$ . Με  $u = \eta\mu(x), du = \sigma\upsilon\nu(x) dx$ :

$$\int \eta\mu^7(x) \sigma\upsilon\nu^3(x) dx = \int u^7 (1 - u^2) du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} + c = \frac{\eta\mu^8(x)}{8} - \frac{\eta\mu^{10}(x)}{10} + c.$$

(ι) Τύπος γινομένου σε άθροισμα:  $\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2}[\eta\mu(A+B) + \eta\mu(A-B)]$ .

$$\int \eta\mu(7x) \sigma\upsilon\nu(3x) dx = \frac{1}{2} \int (\eta\mu(10x) + \eta\mu(4x)) dx = -\frac{\sigma\upsilon\nu(10x)}{20} - \frac{\sigma\upsilon\nu(4x)}{8} + c.$$

(ιβ)  $\eta\mu(2x) = 2\eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu(x)$ . Με  $u = \sigma\upsilon\nu(x)$ ,  $du = -\eta\mu(x) dx$ :

$$\int \eta\mu(2x) \sigma\upsilon\nu^6(x) dx = 2 \int \eta\mu(x) \sigma\upsilon\nu^7(x) dx = -2 \int u^7 du = -\frac{\sigma\upsilon\nu^8(x)}{8} + c.$$

(ιγ)

$$\int \frac{\eta\mu^4(x)}{\sigma\upsilon\nu^6(x)} dx = \int \varepsilon\varphi^4(x) \tau\epsilon\mu^2(x) dx = \int \varepsilon\varphi^4(x) d(\varepsilon\varphi(x)) = \frac{\varepsilon\varphi^5(x)}{5} + c.$$

(ιδ)  $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \varepsilon\varphi(x) > 0$ . Θέτουμε  $t = \varepsilon\varphi(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$  και  $\eta\mu(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$ :

$$\int \sqrt{1 - \eta\mu(2x)} dx = \int \frac{1-t}{(1+t^2)^{3/2}} dt = \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + c = \eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x) + c.$$

(ιε) Κανόνας  $\int P(x)e^x dx = e^x(P - P' + P'' - \dots)$  για πολυώνυμο  $P$ :

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = (x^2 - 2x + 3)e^x + c.$$

(ις) Τυπικός τύπος:

$$\int e^{ax} \eta\mu(\beta x) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \beta^2} (a \eta\mu(\beta x) - \beta \sigma\upsilon\nu(\beta x)) + c.$$

(ιζ) Μερικά κλάσματα:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + c.$$

(ιστ) Μερική ολοκλήρωση:  $u = \tau\omicron\xi\sigma\nu\nu(x)$ ,  $dv = dx$ .

$$\int \tau\omicron\xi\sigma\nu\nu(x) dx = x \tau\omicron\xi\sigma\nu\nu(x) - \sqrt{1-x^2} + c.$$

(ιν)  $u = x + 1 \Rightarrow x - 1 = u - 2$ ,  $x^2 + 2x + 10 = u^2 + 9$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+2x+10} dx &= \int \frac{u-2}{u^2+9} du = \frac{1}{2} \ln(u^2+9) - \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{u}{3}\right) + c \\ &= \frac{1}{2} \ln((x+1)^2+9) - \frac{2}{3} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

(κ) Πολλαπλασιάζουμε με  $\frac{1-\eta\mu(x)}{1-\eta\mu(x)}$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\eta\mu(x)} dx &= \int \frac{1-\eta\mu(x)}{\sigma\nu\nu^2(x)} dx = \int \tau\varepsilon\mu^2(x) dx - \int \varepsilon\varphi(x) \tau\varepsilon\mu(x) dx \\ &= \varepsilon\varphi(x) - \tau\varepsilon\mu(x) + c. \end{aligned}$$

Με τύπο ημιγωνίας  $t = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$  παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\int \frac{1}{1+\eta\mu(x)} dx = -\frac{2}{1+\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)} + c.$$

(κα)  $t = \varepsilon\varphi(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ,  $\sigma\nu\nu(2x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\eta\mu(2x) = \frac{2t}{1+t^2}$ :

$$3 + 2\sigma\nu\nu(2x) - \eta\mu(2x) = \frac{(t-1)^2+4}{1+t^2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3+2\sigma\nu\nu(2x)-\eta\mu(2x)} dx &= \int \frac{dt}{(t-1)^2+4} = \frac{1}{2} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t-1}{2}\right) + c \\ &= \frac{1}{2} \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi(x)-1}{2}\right) + c. \end{aligned}$$

(κβ)  $x = \varepsilon\varphi(\theta) \Rightarrow dx = \tau\varepsilon\mu^2(\theta) d\theta$ ,  $\sqrt{1+x^2} = \tau\varepsilon\mu(\theta)$ :

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\tau\varepsilon\mu^2\theta}{\varepsilon\varphi^2\theta \tau\varepsilon\mu\theta} d\theta = \int \frac{\tau\varepsilon\mu\theta}{\varepsilon\varphi^2\theta} d\theta = \int \sigma\nu\nu\varepsilon\varphi(\theta) \sigma\nu\nu\chi(\theta) d\theta = -\sigma\nu\nu\chi(\theta) + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$

$$(κν) \quad x+3 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \text{ και } \sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x(x+3)} = \frac{\sqrt{1-3t}}{t}.$$

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}} dx = \int -\frac{1}{\sqrt{1-3t}} dt = \frac{2}{3}\sqrt{1-3t} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}} + c.$$

**22.** Να δείξετε ότι

$$\int f''(x)g(x) dx = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + \int f(x)g''(x) dx.$$

Ακολούθως, να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 e^x dx$$

Λύση:

(Ασκ. 2/57)

Χρησιμοποιούμε μερική ολοκλήρωση,

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx. \text{ Θέτουμε } u' = f''(x), v = g(x) \Rightarrow u = f'(x). \text{ Τότε}$$

$$\int f''(x)g(x) dx = f'(x)g(x) - \int f'(x)g'(x) dx.$$

Εφαρμόζουμε ξανά με  $u' = f'(x), v = g'(x) \Rightarrow u = f(x)$ :

$$\int f'(x)g'(x) dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g''(x) dx.$$

Άρα

$$\int f''(x)g(x) dx = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + \int f(x)g''(x) dx$$

Υπολογίζουμε  $\int x^2 e^x dx$  με δύο φορές μερική ολοκλήρωση.

Πρώτα  $u = x^2$ ,  $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x dx$ ,  $v = e^x$ :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx.$$

Ξανά στο δεύτερο:  $u = 2x$ ,  $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2 dx$ ,  $v = e^x$ :

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x.$$

Συνεπώς

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) = e^x (x^2 - 2x + 2) + c.$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

**23.** Να δείξετε ότι

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

i. Να βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

**Λύση:**

(Ασκ. 3/58)

Γράφουμε

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x (x^2 + 1)^{-1/2}.$$

Παράγωγος με κανόνα γινομένου-αλυσίδας:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (x^2 + 1)^{-1/2} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + 1)^{-3/2} \cdot (2x) \\ &= (x^2 + 1)^{-1/2} - x^2 (x^2 + 1)^{-3/2} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

i. Θέτουμε με μερική ολοκλήρωση στη μορφή  $\int v du = uv - \int u dv$ :

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad du = \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \quad (\text{από το (α)}),$$

$$v = \text{τοξεφ}(x), \quad dv = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Τότε

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x \text{τοξεφ}(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε  $w = x^2 + 1 \Rightarrow dw = 2x dx$ :

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int w^{-3/2} dw = -w^{-1/2} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Άρα

$$\int \frac{\text{τοξεφ}(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x \text{τοξεφ}(x) + 1}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

**24.** Να βρείτε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx$ .

i. Να βρείτε τις σταθερές  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε

$$\sigma\upsilon\nu(x) \equiv a(\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)) + \beta(2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)).$$

ii. Να βρείτε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx$ .

**Λύση:**

(Ασχ. 4/58)

Θέτουμε

$$u = \sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x) \Rightarrow du = (-\eta\mu(x) + 2\sigma\upsilon\nu(x)) dx = (2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)) dx.$$

Τότε

$$\int \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)| + c$$

i. Εξισώνουμε συντελεστές σε  $\sigma\upsilon\nu(x)$  και  $\eta\mu(x)$ :

$$a(\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)) + \beta(2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)) = (a + 2\beta)\sigma\upsilon\nu(x) + (2a - \beta)\eta\mu(x).$$

Θέλουμε  $(a + 2\beta) = 1$  και  $2a - \beta = 0$ . Άρα

$$\beta = 2a, \quad a + 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{2}{5}.$$

Έτσι

$$\sigma\upsilon\nu(x) \equiv \frac{1}{5}(\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)) + \frac{2}{5}(2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x))$$

ii. Χρησιμοποιούμε την (i):

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)}.$$

Ολοκληρώνουμε και εφαρμόζουμε την αρχική απόδειξη:

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx = \frac{1}{5} x + \frac{2}{5} \int \frac{2\sigma\upsilon\nu(x) - \eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)} dx = \frac{1}{5} x + \frac{2}{5} \ln|\sigma\upsilon\nu(x) + 2\eta\mu(x)| + c$$

**25.** Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό.

i.  $\int_{x \in (1, +\infty)} \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}} dx,$

ii.  $\int_{x \in \mathbb{R}} \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln(e^x + 1)} dx,$

iii.  $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx, \quad \mu\epsilon \ x = \sqrt{2} \tau\epsilon\mu \theta$

iv.  $\int_{\theta \in (0, \pi/2)} \sqrt{\epsilon\varphi \theta} d\theta, \quad \mu\epsilon \ t = \sqrt{\epsilon\varphi \theta}.$

Λύση:

(Ασκ. 5/58)

i. Θέτουμε  $u = \sqrt{\ln x}$ . Τότε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}},$$

άρα

$$\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln x}} dx = 7 \int du = 7\sqrt{\ln x} + c$$

ii. Θέτουμε  $u = \ln(e^x + 1) \Rightarrow du = \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$

$$\int \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln(e^x + 1)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln(\ln(e^x + 1)) + c$$

iii. Θέτουμε  $x = \sqrt{2} \tau\epsilon\mu \theta (\Rightarrow x > \sqrt{2})$ . Τότε

$$dx = \sqrt{2} \tau\epsilon\mu \theta \epsilon\varphi \theta d\theta, \quad \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2} \epsilon\varphi \theta, \quad x^4 = 4 \tau\epsilon\mu^4 \theta.$$

Επομένως

$$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx = \int \frac{\sqrt{2} \tau \epsilon \mu \theta \epsilon \varphi \theta}{4 \tau \epsilon \mu^4 \theta \cdot \sqrt{2} \epsilon \varphi \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \tau \epsilon \mu^{-3} \theta d\theta = \frac{1}{4} \int \sigma \upsilon \nu^3 \theta d\theta.$$

Υπολογίζουμε

$$\int \sigma \upsilon \nu^3 \theta d\theta = \int \sigma \upsilon \nu \theta (1 - \eta \mu^2 \theta) d\theta = \eta \mu \theta - \frac{1}{3} \eta \mu^3 \theta + c.$$

Άρα

$$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{1}{4} \eta \mu \theta - \frac{1}{12} \eta \mu^3 \theta + c.$$

Επαναφέρουμε:  $\sigma \upsilon \nu \theta = \frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \eta \mu \theta = \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x}.$

$$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 2}} dx = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 2}}{6x^3} + c$$

iv. Θέτουμε  $t = \sqrt{\epsilon \varphi \theta} \Rightarrow \epsilon \varphi \theta = t^2$ . Τότε  $d(\epsilon \varphi \theta) = \tau \epsilon \mu^2 \theta d\theta = 2t dt$  και  $\tau \epsilon \mu^2 \theta = 1 + \epsilon \varphi^2 \theta = 1 + t^4$ . Άρα

$$d\theta = \frac{2t}{1 + t^4} dt, \quad \int \sqrt{\epsilon \varphi \theta} d\theta = \int t \cdot \frac{2t}{1 + t^4} dt = \int \frac{2t^2}{1 + t^4} dt.$$

Γράφουμε  $1 + t^4 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$  και με μερικά κλάσματα προκύπτει

$$\int \frac{2t^2}{1 + t^4} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left( \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \omicron \xi \epsilon \varphi \left( \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}t} \right) + c.$$

Επαναφέρουμε  $t = \sqrt{\epsilon \varphi \theta}$ :

$$\int \sqrt{\epsilon \varphi \theta} d\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left( \frac{\epsilon \varphi \theta - \sqrt{2\epsilon \varphi \theta} + 1}{\epsilon \varphi \theta + \sqrt{2\epsilon \varphi \theta} + 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \omicron \xi \epsilon \varphi \left( \frac{\epsilon \varphi \theta - 1}{\sqrt{2\epsilon \varphi \theta}} \right) + c$$



**26.** Να αποδείξετε ότι:

i.

$$\int x(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - x \operatorname{τοξεφ}(x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1}) + c.$$

ii.

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$$

**Λύση:**

(Ασκ. 6/58)

i. Θέτουμε

$$I = \int x(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 dx.$$

Μερική ολοκλήρωση με  $u = (\operatorname{τοξεφ}(x))^2 \Rightarrow du = 2 \operatorname{τοξεφ}(x) \frac{1}{1+x^2} dx$ ,  $dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$ :

$$I = \frac{x^2}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - \int \frac{x^2 \operatorname{τοξεφ}(x)}{1+x^2} dx.$$

Γράφουμε  $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ :

$$I = \frac{x^2}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - \int \operatorname{τοξεφ}(x) dx + \int \frac{\operatorname{τοξεφ}(x)}{1+x^2} dx.$$

Στο τελευταίο, θέτουμε  $t = \operatorname{τοξεφ}(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$ :

$$\int \frac{\operatorname{τοξεφ}(x)}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2.$$

Άρα

$$I = \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - \int \operatorname{τοξεφ}(x) dx.$$

Υπολογίζουμε  $\int \operatorname{τοξεφ}(x) dx$  με Μ.Ο.:  $u = \operatorname{τοξεφ}(x)$ ,  $dv = dx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $v = x$ .

$$\int \operatorname{τοξεφ}(x) dx = x \operatorname{τοξεφ}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{τοξεφ}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - x \operatorname{τοξεφ}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = \frac{1}{2}(x^2+1)(\operatorname{τοξεφ}(x))^2 - x \operatorname{τοξεφ}(x) + \ln(\sqrt{x^2+1}) + c,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Θέτουμε  $t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1, dx = dt$ :

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx = \int \frac{(t-1)^2}{t^3} dt = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά δύναμη:

$$= \ln |t| + \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2} + c = \ln |x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

**27.** Αν

$$I_\nu = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} dx, \quad \nu \in \mathbb{N}, a > 0,$$

τότε:

i. Να αποδείξετε τον αναγωγικό τύπο

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{2\nu - 1}{2\nu a^2} I_\nu.$$

ii. Να βρείτε τα  $I_2$  και  $I_3$ .

**Λύση:**

(Ασκ. 7/59)

i. Ξεκινάμε από

$$I_{\nu+1} = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx = \frac{1}{a^2} \int \left[ \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} - \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} \right] dx = \frac{1}{a^2} (I_\nu - J),$$

όπου  $J = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx$ . Υπολογίζουμε το  $J$  με μερική ολοκλήρωση θέτοντας

$$u = x, \quad dv = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\nu+1}} dx \Rightarrow du = dx, \quad v = -\frac{1}{2\nu} \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu}.$$

Τότε

$$J = uv - \int v du = -\frac{x}{2\nu} \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^\nu} dx = -\frac{x}{2\nu(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu} I_\nu.$$

Άρα

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{a^2} \left( I_\nu - \left[ -\frac{x}{2\nu(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu} I_\nu \right] \right) = \frac{1}{2\nu a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^\nu} + \frac{2\nu - 1}{2\nu a^2} I_\nu,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Βάση:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Για  $\nu = 1$ :

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 a^2} I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Για  $\nu = 2$ :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 \\ &= \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \left[ \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) \right] \\ &= \frac{x(3x^2 + 5a^2)}{8a^4(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c. \\ I_3 &= \frac{x(3x^2 + 5a^2)}{8a^4(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c \end{aligned}$$

**28.** Να βρεθεί συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ , η γραφική της να διέρχεται από το σημείο  $A(1, 3)$  και να έχει κλίση στο σημείο  $A$  ίση με 3.

Λύση:

(Ασκ. 8/59)

Από  $f''(x) = -x^{-2}$  παίρνουμε

$$f'(x) = \int -x^{-2} dx = \frac{1}{x} + C_1.$$

Η κλίση στο  $A(1, 3)$  είναι  $f'(1) = 3 \Rightarrow 1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 2$ . Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

Ολοκληρώνοντας ξανά,

$$f(x) = \int \left( \frac{1}{x} + 2 \right) dx = \ln x + 2x + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε  $f(1) = 3$ :  $0 + 2 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 1$ . Επομένως

$$f(x) = 2x + \ln x + 1, \quad x > 0$$

**29.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα  $\Delta$ , να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x (\eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x)) dx.$$

Λύση:

(Ασκ. 9/59)

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα παραγωγίσισης γινομένου:

$$\frac{d}{dx}(e^x f(x)) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x (f(x) + f'(x)).$$

Άρα,

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + c$$

για κάθε παραγωγίσιμη  $f$ .

Για  $\int e^x (\eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x)) dx$  θέτουμε  $f(x) = \eta\mu(x)$  (οπότε  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu(x)$ ). Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο,

$$\int e^x (\eta\mu(x) + \sigma\upsilon\nu(x)) dx = e^x \eta\mu(x) + c$$

(έλεγχος:  $\frac{d}{dx}[e^x \eta\mu(x)] = e^x \eta\mu(x) + e^x \sigma\upsilon\nu(x)$ ).

**30.** Να βρείτε συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει:

i.  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της  $f$  περνά από την αρχή των αξόνων και για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $f^2(x) f'(x) = x^2 + 1$ .

ii.  $x f'(x) = e^x - f(x)$ ,  $x \neq 0$ , και  $f(2) = 0$ .

iii.  $2x f'(x) + x^2 f''(x) = 2x + 1$ ,  $x \neq 0$ , και  $f'(1) = f(1) = 2$ .

Λύση:

(Ασκ. 10/59)

i. Για  $x > 0$ :

$$f^2(x) f'(x) = x^2 + 1 \implies f^2 df = (x^2 + 1) dx.$$

Ολοκληρώνουμε:

$$\frac{1}{3} f^3(x) = \frac{x^3}{3} + x + C.$$

Από  $f(0) = 0$  (διέρχεται από την αρχή) παίρνουμε  $C = 0$ .

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}, \quad x \geq 0$$

ii. Γραμμική Δ.Ε.:

$$xf'(x) + f(x) = e^x \iff f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας  $\mu(x) = e^{\int (1/x)dx} = x$ . Άρα  $(xf(x))' = e^x$  και

$$xf(x) = e^x + C \implies f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Με  $f(2) = 0$  βρίσκουμε  $C = -e^2$ .

$$f(x) = \frac{e^x - e^2}{x}, \quad x \neq 0$$

iii. Παρατηρούμε ότι  $\frac{d}{dx}(x^2 f'(x)) = 2xf'(x) + x^2 f''(x)$ . Άρα

$$(x^2 f'(x))' = 2x + 1 \implies x^2 f'(x) = x^2 + x + C_1.$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Με  $f'(1) = 2$  προκύπτει  $C_1 = 0$ , οπότε  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ . Ολοκληρώνουμε:

$$f(x) = x + \ln|x| + C_2.$$

Με  $f(1) = 2$  παίρνουμε  $C_2 = 1$ . Επομένως (στο  $(0, +\infty)$ ):

$$f(x) = x + \ln x + 1$$

**31.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $A(4, 4)$  και ισχύει

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}, \quad x \neq 3.$$

Λύση:

(Ασκ. 11/59)

Από την υπόθεση

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$$

ολοκληρώνουμε μία φορά:

$$f'(x) = \int \frac{2}{(x-3)^3} dx = 2 \cdot \frac{(x-3)^{-2}}{-2} + C_1 = -\frac{1}{(x-3)^2} + C_1.$$

Εφόσον στο  $A(4, 4)$  υπάρχει τοπικό ακρότατο, πρέπει  $f'(4) = 0$ . Άρα

$$0 = f'(4) = -\frac{1}{(4-3)^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 1,$$

οπότε

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2}.$$

Ολοκληρώνουμε ξανά:

$$f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{(x-3)^2}\right) dx = x - \int (x-3)^{-2} dx = x + \frac{1}{x-3} + C_2.$$

Χρησιμοποιούμε ότι το σημείο  $A(4, 4)$  ανήκει στη γραφική παράσταση:  $f(4) = 4$ .

$$4 = 4 + \frac{1}{1} + C_2 \Rightarrow C_2 = -1.$$

Άρα

$$f(x) = x + \frac{1}{x-3} - 1, \quad x \neq 3.$$

(Επιπλέον  $f''(4) = 2 > 0$ , άρα το ακρότατο στο  $x = 4$  είναι ελάχιστο.)

**32.** Δίνεται ότι για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f'(0) = 3, \quad f(0) = 2.$$

Να αποδειχθούν/βρεθούν τα παρακάτω:

- i. Αν  $u(x) = f'(x) - f(x)$ , να δείξετε ότι  $u'(x) - 2u(x) = 0$ .
- ii. Να βρεθεί ο τύπος της  $u$ .
- iii. Να δείξετε ότι  $(e^{-x}f(x))' = e^x$  και να βρείτε τη  $f$ .

**Λύση:**

(Ασκ. 12/59)

i. Με  $u = f' - f$  έχουμε  $u' = f'' - f'$ . Άρα

$$u' - 2u = (f'' - f') - 2(f' - f) = f'' - 3f' + 2f = 0,$$

όπως ζητήθηκε.

ii. Η Δ.Ε. είναι  $u' - 2u = 0 \Rightarrow u(x) = Ce^{2x}$ . Από  $u(0) = f'(0) - f(0) = 3 - 2 = 1$  προκύπτει  $C = 1$ . Επομένως

$$u(x) = e^{2x}$$

iii. Υπολογίζουμε

$$(e^{-x}f(x))' = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}u(x) = e^{-x} \cdot e^{2x} = e^x.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$e^{-x}f(x) = \int e^x dx = e^x + C \Rightarrow f(x) = e^{2x} + Ce^x.$$

Με  $f(0) = 2$  παίρνουμε  $1 + C = 2 \Rightarrow C = 1$ . Άρα

$$f(x) = e^{2x} + e^x$$

(Έλεγχος:  $f'(0) = 2 + 1 = 3$  και  $f'' - 3f' + 2f = 0$ .)

**33.** Να βρείτε μία παράγουσα της συνάρτησης  $f(x) = |3x - 6|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Λύση:

(Ασχ. 1/60)

Θέτουμε  $u = 3x - 6 \Rightarrow du = 3 dx$  και  $dx = \frac{du}{3}$ . Τότε

$$\int |3x - 6| dx = \frac{1}{3} \int |u| du = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} u|u| + c = \frac{1}{6} (3x - 6) |3x - 6| + c$$

(Έλεγχος:  $\frac{d}{dx} [\frac{1}{6}(3x - 6)|3x - 6|] = |3x - 6|$ .)

Ισοδύναμα, κατά τμήματα:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6 + c, & x \leq 2, \\ \frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 + c, & x \geq 2, \end{cases}$$

που ικανοποιεί  $F'(x) = |3x - 6|$  σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

**34.** Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  έχει πάντα παράγουσα στο  $\Delta$ . Να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, χρησιμοποιώντας ως αντιπαράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Λύση:

(Ασκ. 2/60)

Θέτουμε

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Για  $x \neq 0$ , με κανόνα γινομένου-αλυσίδας,

$$F'(x) = 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

Στο  $x = 0$ ,

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Άρα  $F$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και  $F'(x) = f(x)$  για όλα τα  $x$ . Επομένως η  $f$  έχει παράγουσα (είναι παράγωγος της  $F$ ).

Δείχνουμε τώρα ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο 0. Πράγματι, παίρνουμε τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow f(x_n) = 2x_n \eta\mu(2\pi n) - \sigma\upsilon\nu(2\pi n) = 0 - 1 = -1,$$

$$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \Rightarrow f(y_n) = 2y_n \eta\mu((2n+1)\pi) - \sigma\upsilon\nu((2n+1)\pi) = 0 - (-1) = 1.$$

Άρα  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -1$  ενώ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$ .

Η  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  δεν υπάρχει, συνεπώς η  $f$  δεν είναι συνεχής στο 0.

Συμπέρασμα: Υπάρχει συνάρτηση  $f$  που είναι παράγωγος κάποιας  $F$  (άρα έχει παράγουσα) αλλά δεν είναι συνεχής.

Άρα το αντίστροφο του θεωρήματος “η συνέχεια συνεπάγεται ύπαρξη παραγώγου” δεν ισχύει.



**35.** Να δείξετε ότι οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι παράγουσες της

$$f(x) = -\frac{2}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2}, & x < 0, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2} - 5, & x < 0. \end{cases}$$

Γιατί είναι λάθος να γράψουμε

$$\int \left( -\frac{2}{x^3} \right) dx = \frac{1}{x^2} + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) ?$$

**Λύση:**

(Ασχ. 3/60)

Απόδειξη ότι  $F$  και  $G$  είναι παράγουσες. Για  $x \neq 0$  ισχύει

$$\left( \frac{1}{x^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} = f(x).$$

Άρα, για  $x > 0$  και για  $x < 0$ ,

$$F'(x) = \left( \frac{1}{x^2} \right)' = f(x), \quad G'(x) = \left( \frac{1}{x^2} \pm 5 \right)' = \left( \frac{1}{x^2} \right)' = f(x),$$

εφόσον η παράγωγος σταθεράς είναι 0.

Επομένως και οι δύο συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Γιατί η γραφή με ένα μόνο  $c$  είναι λανθασμένη;

Ο αόριστος ολοκληρωμένος ορίζεται «μέχρι σταθερά» σε συνεκτικό διάστημα. Το σύνολο  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  είναι ένωση δύο διαστημάτων, άρα η γενική παράγουσα επιτρέπεται να έχει διαφορετικές σταθερές σε καθένα από αυτά:

$$\int \left( -\frac{2}{x^3} \right) dx = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + C_1, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2} + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Αν γράψουμε μία μόνο σταθερά  $c$ , αποκλείουμε έγκυρες παραγώγους όπως η

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 5, & x > 0, \\ \frac{1}{x^2} - 5, & x < 0, \end{cases}$$

η οποία έχει διαφορετικές σταθερές στις δύο συνιστώσες του πεδίου ορισμού.

Επομένως η σχέση  $\int (-2/x^3) dx = \frac{1}{x^2} + c$  για  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  είναι λανθασμένη: χρειάζονται δύο ανεξάρτητες σταθερές.