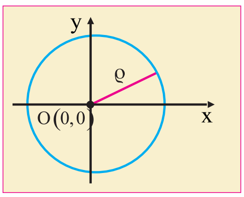
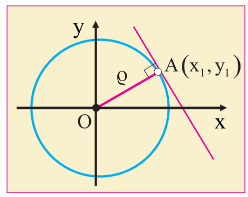
Μάθημα 7

Ο κύκλος

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

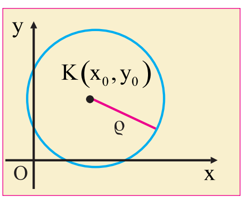


Εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ: $\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$



Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ στο σημείο $A(x_1, y_1)$:

$$\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$$



Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$$

Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (1), $A, B, \Gamma \in R$

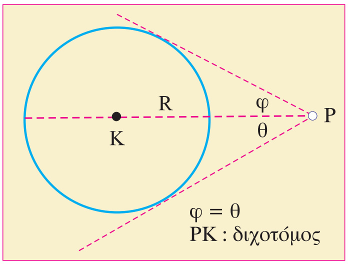
Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο: $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$ η (1) παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

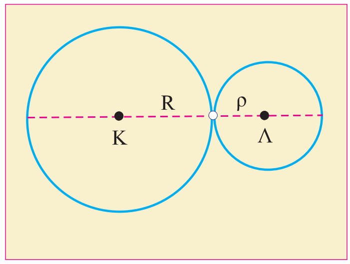
Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

Βασικά στοιχεία από την Ευκλείδεια Γεωμετρία

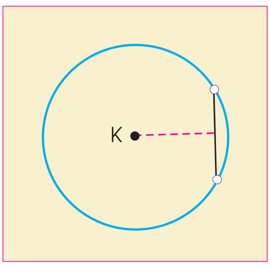
Για την επίλυση των ασκήσεων στον κύκλο είναι χρήσιμες οι παρακάτω προτάσεις:



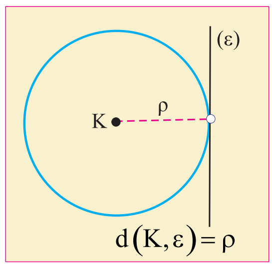
1. Τα εφαπτόμενα τμήματα από ένα σημείο P προς έναν κύκλο, είναι ίσα και η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία τους.



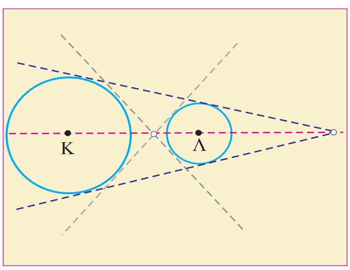
2. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται, τότε τα κέντρα τους και το σημείο επαφής τους είναι συνευθειακά σημεία.



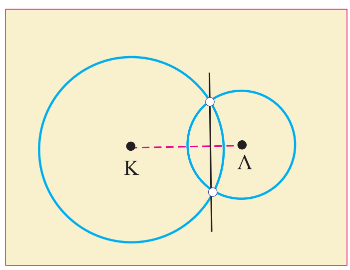
3. Το απόστημα είναι μεσοκάθετος της χορδής στην οποία αντιστοιχεί.



4. Μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο, αν και μόνο αν, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία αυτή είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

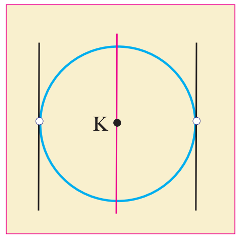


5. Οι κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων τέμνονται πάνω στην ευθεία της διακέντρου τους.



6. Η διάκεντρος δύο κύκλων, που τέμνονται είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

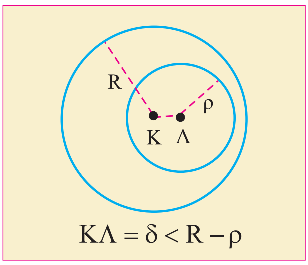
7. Όταν ένας κύκλος εφάπτεται σε δύο παράλληλες ευθείες, τότε το κέντρο του βρίσκεται στη μεσοπαράλληλο των δύο ευθειών.

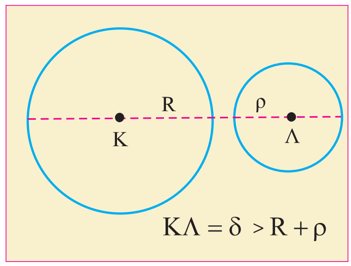


Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων (Λ, ρ) και (Κ, R) εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου δ (του ευθυγράμμου τμήματος, που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων) με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

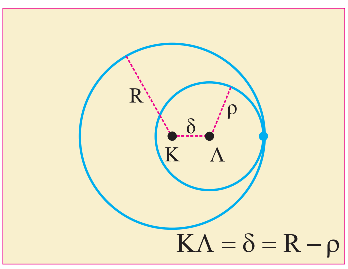


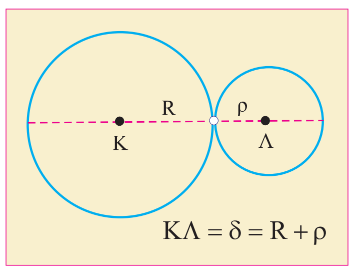


α. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του $(K, R) \Leftrightarrow \delta < R - \rho$

β. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εξωτερικό του $(K, R) \Leftrightarrow \delta > R + \rho$

2. Εφαπτόμενοι κύκλοι





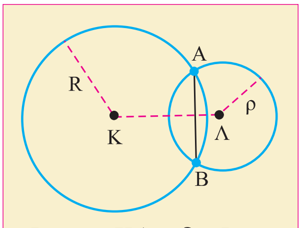
α. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής). Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Κ, R), αν και μόνον αν $\delta = R - \rho$

β. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής) και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνον αν $\delta = R + \rho$.

3. Τεμνόμενοι κύκλοι

Οι κύκλοι τέμνονται δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνον αν $R-\rho<\delta<R+\rho$

Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία των δύο κύκλων, λέγεται **κοινή χορδή** των κύκλων.



$R-\rho<K\Lambda=\delta<R+\rho$

Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο $A(x_1,y_1)$. Εργαζόμαστε ως εξής:

α. Γράφουμε την εξίσωση του κύκλου: $x^2+y^2=\rho^2$ (1)

β. Επειδή $x^2=x\cdot x$ και $y^2=y\cdot y$ η (1) γράφεται: $x\cdot x+y\cdot y=\rho^2$

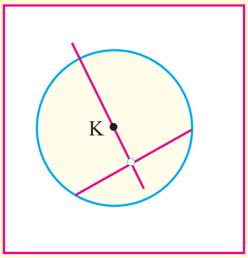
γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα οπότε παίρνουμε:

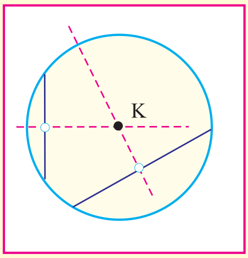
$x\cdot x_1+y\cdot y_1=\rho^2$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

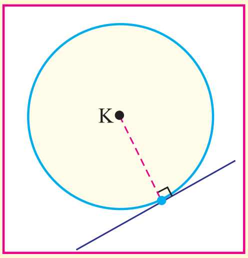
B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση κύκλου πρέπει να βρούμε το κέντρο του, έστω $K(x_o, y_o)$ και την ακτίνα του έστω R. Τότε η εξίσωση του είναι $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
Το κέντρο αν δεν δίνεται μπορούμε να το προσδιορίσουμε, αν αναγνωρίσουμε δύο ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκεται. Τοτε το προσδιορίζουμε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων αυτών των ευθειών. Η ακτίνα του κύκλου στη συνέχεια προσδιορίζεται ως η απόσταση του κέντρου K από ένα σημείο του κύκλου ή ως η απόσταση του K από μια ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο.







1. Η μεσοκάθετος κάθε χορδής ενός κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

2. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων δύο, μη παράλληλων, χορδών του είναι το κέντρο του κύκλου.

3. Η εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου όταν:

α. Έχει κέντρο Ο(0, 0) και διέρχεται από το σημείο Α(1, 2)

β. Έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(1,3) και Β(-3,5).

γ. Έχει κέντρο το σημείο (-2,1) και διέρχεται από το σημείο (-2,3).

δ. Έχει κέντρο Λ(4, 2) και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $3x+4y-1=0$.

ε. Διέρχεται από τα σημεία Α(1, 1), Β(0,0) Γ(3,0).

στ. Όταν έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία με εξίσωση (ε): y = 3x -7 και διέρχεται από τα σημεία Α (1,1) και Β(2,-1).

Λύση

α. Αφού έχει κέντρο O(0, 0) είναι της μορφής $x^2+y^2=\rho^2$. Το σημείο Α επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου. Έτσι έχουμε $1^2+2^2=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=5$. Οπότε η εξίσωση του κύκλου είναι: $C: x^2+y^2=5$.

β. Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου το μέσο του θα ταυτίζεται με το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.

Εστω $K(x_0, y_0)$ το μέσο του ΑΒ, τότε: $\begin{cases} x_0=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1-3}{2}=-1 \\ y_0=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4 \end{cases}$

Οπότε το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(-1, 4).

Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου θα είναι το μισό της διαμέτρου, δηλαδή το μισό της απόστασης ΑΒ. Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho=\frac{1}{2}(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{(1+3)^2+(5-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}.$$

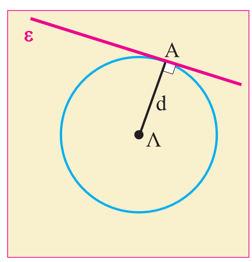
Άρα, ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $C:\ (x+1)^2+(y-4)^2=5$.

γ. Όταν γνωρίζουμε το κέντρο του ζητούμενου κύκλου και ένα σημείο του τότε η μεταξύ τους απόσταση ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή:

$$\rho=(\Lambda A)=\sqrt{(-2+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{0^2+2^2}=2$$

Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι 2 και η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C:\ (x+2)^2+(y-1)^2=2^2.$$

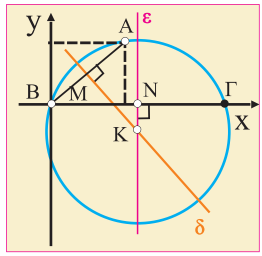


δ. Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-4)^2+(y-2)^2=\rho^2$.

Επειδή εφάπτεται στην (ε) πρέπει: $d(A,\varepsilon)=\rho$.

Έτσι: $\dfrac{|3\cdot 4+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\rho \Leftrightarrow \rho=\dfrac{19}{5}$. Άρα $C: (x-4)^2+(y-2)^2=\left(\dfrac{19}{5}\right)^2$

ε. α΄ τρόπος



Οι μεσοκάθετοι των χορδών ΑΒ και ΒΓ τέμνονται στο κέντρο του κύκλου. Βρίσκουμε αυτές τις μεσοκαθέτους (δ), (ε).

Έστω Μ μέσο του ΑΒ. Τότε $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Επειδή $\lambda_{AB}=1$ ειναι $\lambda_\delta=-1$

Άρα $\delta: y-\frac{1}{2}=-1\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=-x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+y=1$

Έστω Ν μέσο ΒΓ. Τότε $N\left(\frac{3}{2},0\right)$ και επειδή $(\varepsilon)\perp x'x$ είναι: $x=\frac{3}{2}$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των (δ), (ε) για να βρούμε το κέντρο του κύκλου.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=1-\frac{3}{2} \\ x=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2}\end{cases} \text{ Αρα } K\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Επιπλέον έχουμε $R=KB=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

Επομένως η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι: $C:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

β΄ τρόπος

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$ (1).

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες των τριών σημείων στην (1) διαδοχικά. Προκύπτει έτσι ένα σύστημα 3x3 (τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους x_o, y_o, R).

$$(1-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2 \quad (2)$$

$$(0-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2 \quad (3)$$

$$(3-x_0)^2+(0-y_0)^2=R^2 \quad (4)$$

Από την (4) έχουμε $9-6x_0+x_0^2+y_0^2=R^2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 6x_0-9=0\Leftrightarrow x_0=\frac{9}{6}\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{2}$

Αντικαθιστούμε το x_o στις (2) και (4) και έχουμε: $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+(1-y_0)^2=R^2$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+y_0{}^2=R^2$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{1}{4}+1-2y_0+y_0{}^2-\frac{9}{4}-y_0{}^2=0 \Leftrightarrow y_0=\frac{\frac{1}{4}+1-\frac{9}{4}}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_0=-\frac{1}{2}$$

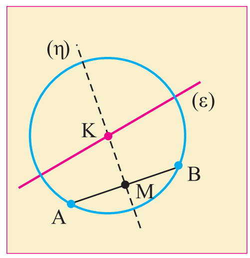
Αντικαθιστούμε τα x_0, y_0 στην (4) και βρίσκουμε το R.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{10}{4} \Leftrightarrow R^2=\frac{5}{2}$$

Επομένως ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

στ. Το κέντρο K(α,β) του ζητούμενου κύκλου είναι το σημείο τομής της (ε) και της μεσοκάθετης (η) στο AB. Η ακτίνα του είναι: $R=\sqrt{(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2}$ (1)



Μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο: $M\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι : $\lambda_{AB}=\frac{1+1}{1-2}=-2$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας

(η): $\lambda_\eta=\frac{1}{2}$ (αφού (η) $\perp$ AB).

Από την ευθεία (η) γνωρίζουμε το σημείο M και το συντελεστή διεύθυνσης λ_η. Οπότε η εξίσωση της (η) είναι η: $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)$ (2)

Η εξίσωση της (ε) είναι ε: $y=3x-7$ (3)

Από τη λύση του συστήματος των (2) και (3) βρίσκουμε: $x=\frac{5}{2}$ και $y=\frac{1}{2}$.

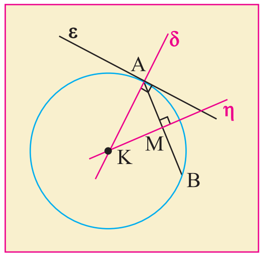
Άρα είναι $K\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$ (λόγω της (1)) .

και η εξίσωση του κύκλου είναι: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: x+y-5=0$ στο σημείο της Α(6, -1) και διέρχεται από το σημείο Β(6, 1).

Λύση



Θα βρούμε το κέντρο του κύκλου ως σημείο τομής δύο ευθειών. Της κάθετης στην εφαπτομένη ,έστω δ ,στο σημείο Α και της μεσοκάθετης (η) της χορδής ΑΒ.

Είναι $\lambda_\varepsilon = -1 \overset{\delta\perp\varepsilon}{\Leftrightarrow} \lambda_\delta = 1$. Επομένως δ: $y+1 = x-6 \Leftrightarrow x-y=7$.

Θα βρούμε τώρα τη μεσοκάθετο (η) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.Έστω Μ μέσο ΑΒ τότε $M(6,0)$.

Παρατηρούμε ότι ΑΒ // y΄y, επομένως η μεσοκάθετος (η) της ΑΒ, είναι παράλληλη στον x΄x. Αφού διέρχεται από το σημείο Μ(6, 0) έχει εξίσωση y = 0 (είναι ο άξονας x΄x).

Λύνουμε το σύστημα των (δ) και (η): $\left.\begin{array}{l} x-y=7 \\ y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=7 \\ y=0 \end{array}$. Επομένως $K(7,0)$

Η ακτίνα R είναι ίση με $R=(KA)=\sqrt{(7-6)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$.

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x-7)^2+y^2=2$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με εξίσωση: $x^2+y^2=\rho^2$

1ος τρόπος

Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο του κύκλου έστω (x_1, y_1) που είναι: $xx_1+yy_1=\rho^2$ (1)

Για να προσδιορίσουμε τα (x_1, y_1) (αν δεν δίνονται) πρέπει να φτιάξουμε σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους x_1, y_1. Η μια εξίσωση είναι πάντοτε $\eta: {x_1}^2+{y_1}^2=\rho^2$ αφού το σημείο (x_1, y_1) είναι το σημείο επαφής και η δεύτερη προκύπτει εύκολα από τα δεδομένα της άσκησης.

2ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι η εφαπτομένη έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ και χρησιμοποιούμε τη σχέση $d(O,\varepsilon)=\rho$, όπου $O(0,0)$ και ρ η ακτίνα του κύκλου. Παίρνουμε έτσι μια εξίσωση με αγνώστους τα λ, β. (Συχνά ο συντελεστής λ προσδιορίζεται εύκολα από τα δεδομένα της άσκησης και έτσι από της παραπάνω εξίσωση προσδιορίζουμε το β.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=4$ αν :

α. Το σημείο επαφής είναι το $A\left(1,\sqrt{3}\right)$.

β. Είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $y=-x+2$.

γ. Είναι κάθετη στην ευθεία ζ: $y=\frac{1}{2}x+1$.

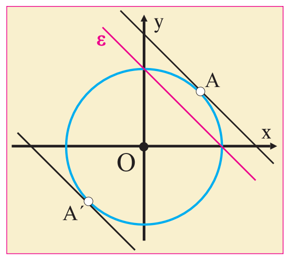
δ. Διέρχεται από το σημείο Β(0, 4).

Λύση

α. Αφού μας δίνεται το σημείο επαφής, έχουμε $1\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=4 \Leftrightarrow x+\sqrt{3}\,y=4$.

1ος τρόπος

β. Έστω $A(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Α έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=4$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{x_1}{y_1}$. Επειδή είναι παράλληλη στην (ε) θα είναι $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\lambda_{\varepsilon}=-1$. Άρα $-\frac{x_1}{y_1}=-1 \Leftrightarrow x_1=y_1$ (1)



Το σημείο $A(x_1,y_1)$ ανήκει στο κύκλο, δηλαδή ισχύει $x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=4$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $2x_1^{\,2}=4 \Leftrightarrow x_1^{\,2}=2 \Leftrightarrow x_1=\pm\sqrt{2}$ και $y_1=\pm\sqrt{2}$

Άρα $A\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ και $A'\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ οπότε :

$$\varepsilon\varphi_A:\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y=4 \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi_{A'}:-\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=4.$$

2ος τρόπος

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι της μορφής: $y=-x+\beta \Leftrightarrow x+y-\beta=0\ (1)$. Εφάπτεται η (1) στον κύκλο, αν και μόνο αν:

$$d\left(O,(1)\right)=2 \Leftrightarrow \frac{|0+0-\beta|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |\beta|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \beta=\pm2\sqrt{2}.$$

οπότε υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του κύκλου παράλληλες προς την (ε) , οι ευθείες:

$x+y-2\sqrt{2}=0$ και $x+y+2\sqrt{2}=0$

γ. Έστω $A(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{x_1}{y_1}$. Επειδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στη (ζ) έχουμε: $\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{\zeta}=-1$

Είναι $\lambda_{\zeta}=\frac{1}{2}$, επομένως $\lambda_{\varepsilon\varphi}=-2$. Άρα $\frac{-x_1}{y_1}=-2 \Leftrightarrow x_1=2y_1$ (1)

Αφού το Α ανήκει στον κύκλο ισχύει: $x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=4$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $4y_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow 5y_1^2 = 4 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

ή $y_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ τότε είναι αντίστοιχα και $x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ή $x_1 = \frac{-4}{\sqrt{5}} = \frac{-4\sqrt{5}}{5}$.

Οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής και επειδή x_1, y_1 ομόσημοι λόγω της (1) είναι τα:

$$A\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{και} \quad A'\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Οι εξισωσεις των εφαπτομένων σ'αυτά τα σημεία είναι:

$$\frac{4\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4 \quad \text{και} \quad \frac{-4\sqrt{5}}{5}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y = 4.$$

δ. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $xx_1 + yy_1 = 4$, όπου $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

Αφού διέρχεται από το $B(0,4)$ ισχύει: $0 \cdot x_1 + 4y_1 = 4 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (1)

Επειδή το A ανήκει στον κύκλο, ισχύει: $x_1^2 + y_1^2 = 4$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{3}$ ή $x_1 = -\sqrt{3}$. Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής

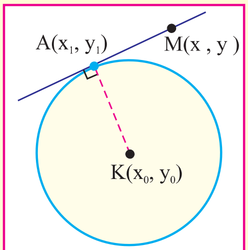
τα $A(\sqrt{3}, 1)$ και $A(-\sqrt{3}, 1)$ οι εξισώσεις των εφαπτομένων σ'αυτά είναι :

$$\sqrt{3}x + y = 4 \quad \text{και} \quad -\sqrt{3}x + y = 4 \text{ αντίστοιχα.}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Πως βρίσκουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, όταν το κέντρο του είναι το $K(x_0, y_0) \neq (0,0)$ σε γνωστό σημείο του έστω (x_1, y_1)

1ος τρόπος



Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης.

Τότε επειδή $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{KA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ και

$\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$ έχουμε:

$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x_1 - x_0) + (y - y_1)(y_1 - y_0) = 0$ που είναι η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

2ος τρόπος

Επειδή γνωρίζουμε τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $K(x_0, y_0)$ γνωρίζουμε το συντελεστή διεύθυνσης της AK άρα και της εφαπτομένης, (αφού είναι κάθετη στην AK). Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - y_1 = \lambda_{AM}(x - x_1)$.Αν δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της AK η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $y = y_1$.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης

α. του κύκλου $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ **στο σημείο του Α(4, 2)**

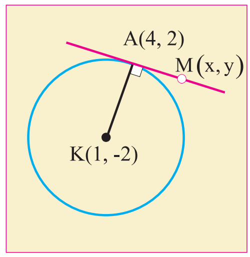
β. του κύκλου $x^2+y^2+4x-6y+1=0$ **στο σημείο του** $A\left(1,\ 3+\sqrt{3}\right)$

Λύση

α. α΄ τρόπος

Έστω Μ(x,y) τυχαίο σημείο της εφαπτομένης. Είναι $MA\perp AK$ οπότε

$$\lambda_{AK}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\lambda_{MA}=-\frac{3}{4}$$



Γνωρίζουμε ένα σημείο της εφαπτομένης και το συντελεστή διεύθυνσης αυτής, επομένως η εξίσωση της είναι:

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-4)\Leftrightarrow 3x+4y=20\,.$$

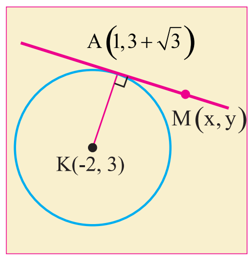
β΄ τρόπος

Για το σημείο Μ(x, y) της εφαπτομένης έχουμε:

$$\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow(4-1)\cdot(x-4)+\left(2-(-2)\right)(y-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-4)+4(y-2)=0\Leftrightarrow 3x+4y=20$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση.



β. Ο κύκλος έχει κέντρο Κ(-2, 3) οπότε

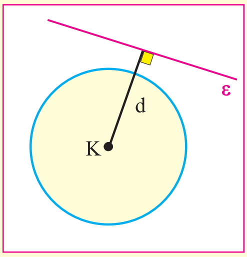
$$\lambda_{AK}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overset{AM\perp AK}{\Leftrightarrow}\lambda_{AM}=-\sqrt{3}$$

Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

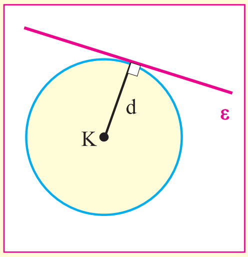
$$y-\left(3+\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}\,(x-1)$$

Κατηγορία - Μέθοδος 4

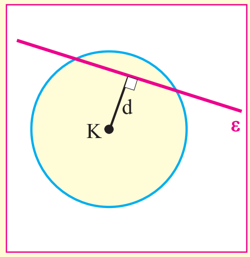
Για να δείξουμε ότι δοσμένη ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, δείχνουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτήν την ευθεία, ισούται με την ακτίνα. Με τη βοήθεια της απόστασης του κέντρου από την ευθεία προσδιορίζουμε και τη σχετική θέση ευθείας και κύκλου.
Συγκεκριμένα ισχύουν:



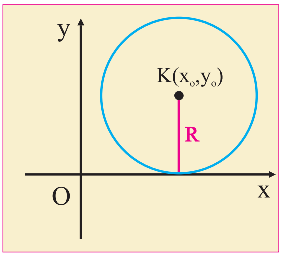
• αν $d(K,\varepsilon) > R$ η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



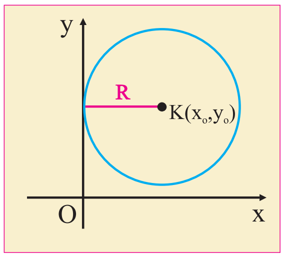
• αν $d(K,\varepsilon) = R$ η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο.



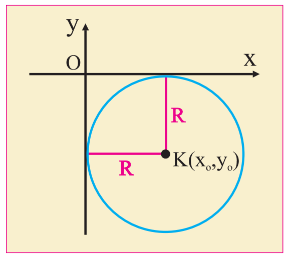
• αν $d(K,\varepsilon) < R$ η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται στον άξονα x΄x ισχύει $|y_0| = R$



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται στον άξονα y΄y ισχύει $|x_0| = R$



• Όταν ένας κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας R εφάπτεται και στους δύο άξονες τότε $|x_0| = |y_0| = R$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $(x+1)^2 + y^2 = 9$ και της ευθείας $(\varepsilon): 2x - y - 3 = 0$.

Λύση

Το κέντρο του κύκλου είναι το K(-1, 0) και η ακτίνα του R = 3. Οπότε

$$d(K,(\varepsilon)) = \frac{|2\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < 3 = R$$

Άρα η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται σε δύο σημεία.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$

Λύση

Το κέντρο του κύκλου είναι το K(4, 0) και η ακτίνα του $R = \dfrac{\sqrt{64-32}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Είναι $d(K,\varepsilon) = \dfrac{|4-0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = R$

Δηλαδή $d(K,\varepsilon) = R$, επομένως η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο.

Κατηγορία - Μέθοδος 5

Για να βρούμε τη σχετική θέση δύο κύκλων συγκρίνουμε το μήκος της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτινών τους. Στη σελίδα 99 αναφέρονται οι διάφορες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 σε καθεμία απο τις :

α. $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ και $C_2 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

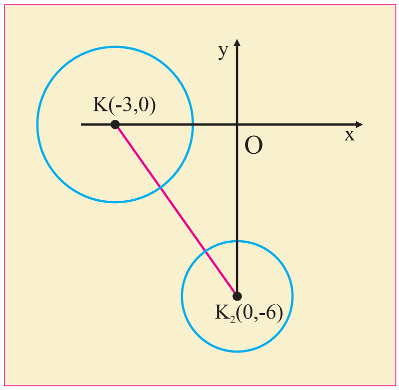
β. $C_1 : (x+3)^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : x^2 + (y+6)^2 = 1$

Λύση

α. Ο C_1 έχει κέντρο $K_1(0,0)$ και ακτίνα $R_1 = 3$ και ο C_2 έχει κέντρο $K_2(-2,1)$ και ακτίνα $R_2 = 2$.
Η απόσταση των δύο κέντρων είναι $d(K_1K_2) = \sqrt{5}$. Οπότε

$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$$

δηλαδή οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.



β. Είναι $K_1(-3,0)$ $R_1 = 2$, $K_2(0,-6)$ $R_2 = 1$
(βλέπε σχήμα)
Επομένως $d(K_1K_2) = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$ και
$R_1 + R_2 = 3$. Οπότε $d > R_1 + R_2$ και οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία (είναι ξένοι μεταξύ τους).

Κατηγορία - Μέθοδος 6

Παραμετρική εξίσωση κύκλου.
Για να δείξουμε ότι μια "οικογένεια" κύκλων διέρχεται από το ίδιο σημείο μετατρέπουμε την εξίσωση σε πολυώνυμο ως προς την παράμετρο και εξισώνουμε τους συντελεστές με το μηδέν.

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε έναν πληθυσμό απο 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό n = 1, 2, 3, ..., 1999 και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$ **(1)**

Να δείξετε ότι:

α. Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

β. Κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

γ. Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon: x+y-1=0$ **στο σημείο Α.**

(Θέμα Πανελληνίων).

Λύση

α. Μετασχηματίζουμε τη σχέση (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=2nx+2ny-2n \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2nx-2ny+2n+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+x(-2-2n)+(-2n)y+2n+1=0$$

Η τελευταία σχέση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ η οποία παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0$. Έχουμε $A^2+B^2-4\Gamma=(-2-2n)^2+(-2n)^2-4(2n+1)=$

$$4+8n+4n^2+4n^2-8n-4=8n^2>0$$

Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K(1+n,n)$ και ακτίνα

$$R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} \text{ δηλαδή } R=\frac{\sqrt{8n^2}}{2}=\sqrt{2}\,n \qquad (2)$$

β. Η (1) παριστάνει 1999 κύκλους αφού n = 1, 2, ..., 1999 και θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

i. Μετασχηματίζουμε την (1) σε πολυώνυμο ως προς την παράμετρο.

Έχουμε $(1) \Leftrightarrow 2n(x+y-1)-(x-1)^2-y^2=0$

ii. Εξισώνουμε τους συντελεστές με το 0 και υπολογίζουμε τα x, y:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ \text{και} \\ (x-1)^2+y^2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=1,\ y=0$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλους που διέρχονται όλοι από το Α(1, 0) για κάθε τιμή του n.

γ. Για να δείξουμε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται σε όλους τους κύκλους, αρκεί να δείξουμε ότι το κέντρο οποιουδήποτε κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $d(K,\varepsilon)=R$. Αλλά $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|1+n+n-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2n}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,n$

και $R=\sqrt{2}\,n$ (λόγω της (2))

Επομένως όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται στην ευθεία $x+y-1=0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 7

Πώς βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ενός κύκλου (c) με κέντρο K (x_0, y_0) και ακτίνα ρ που διέρχονται από σημείο P (x_1, y_1)

Γράφουμε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(x_1, y_1)$ που είναι: $y-y_1=\lambda(x-x_1), \lambda\in R$ (ε) και $x=x_1$ (κ)

Πρώτον εξετάζουμε αν η $x = x_1$ εφάπτεται στον κύκλο (c), δηλαδή αν το σύστημα των (c) και (κ) έχει διπλή λύση.

Δεύτερον απαιτούμε οι ευθείες (ε) να εφάπτονται στον (c), δηλαδή να ισχύει: d (K, ε)=ρ (απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε)), οπότε προσδιορίζουμε το λ,και επομένως τις εφαπτόμενες (ε)).

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο $x^2+y^2=1$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$.

Λύση

Έστω (ε) : $y=\lambda x+k$ η ζητούμενη ευθεία, τότε επειδή το $A\in(\varepsilon)$, θα ισχύει: $\sqrt{3}=\lambda+k$ (1)

Πρέπει: $$d(O,\varepsilon)=1\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot 0-0+k|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow k^2=1+\lambda^2 \quad (2)$$

Η (2) γράφεται, (λόγω της (1)):

$$(\sqrt{3}-\lambda)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow-2\sqrt{3}\cdot\lambda=-2\Leftrightarrow\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Τότε είναι: $k=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου είναι η:

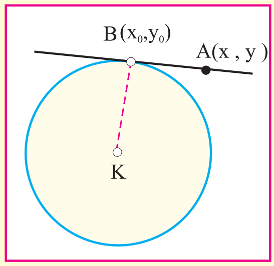
$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Η κάθετη ευθεία (η): x = 1 που διέρχεται από το A και δεν περιγράφεται από την εξίσωση

$y = \lambda x + k$ πρέπει να εξετάζεται, μήπως είναι εφαπτομένη του κύκλου. Εδώ προφανώς η ευθεία $x = 1$ είναι εφαπτομένη, αφού η απόσταση του κέντρου του κύκλου από αυτήν ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

Κατηγορία - Μέθοδος 8

Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου, που διέρχεται από γνωστό σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι ο εξής:



Προσδιορίζουμε το σημείο επαφής $B(x_0, y_0)$ και στη συνέχεια γράφουμε την εξίσωση της AB. Για να προσδιορίσουμε τα x_0, y_0 χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις. Η πρώτη προκύπτει αμέσως, αφού το B ανήκει στον κύκλο (c), άρα τα x_0, y_0 επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου (c). Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από τη σχέση:

$$\vec{KB} \cdot \vec{AB} = 0 \text{, αφού είναι } \vec{KB} \perp \vec{AB}.$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$, που διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$.

Λύση

Για το σημείο επαφής $B(x_0, y_0)$ ισχύει: $x_0^2 + y_0^2 = 1 \quad (1)$

Είναι $\vec{KB} = (x_0, y_0)$ και $\vec{AB} = \left(x_0 - 1, y_0 - \sqrt{3}\right)$

Επειδή $\vec{KB} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{KB} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow x_0 \cdot (x_0 - 1) + y_0 \cdot \left(y_0 - \sqrt{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - x_0 - \sqrt{3}\, y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 + y_0\sqrt{3} = 1 \; (2) \quad (\; x_0^2 + y_0^2 = 1 \;).$

Με αντικατάσταση του x_0 από την (1) στην (2) παίρνουμε:

$(1 - y_0\sqrt{3})^2 + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow 4y_0^2 - 2\sqrt{3}\, y_0 = 0 \Leftrightarrow 2y_0(2y_0 - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0$ ή $y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Για $y_0 = 0$ είναι $x_0 = 1$ και για $y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ είναι $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

Έχουμε επομένως δύο σημεία επαφής, τα: $B(1, 0)$ και $B'\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που έχουν εξισώσεις:

$$AB: x = 1 \text{ και } AB': y - \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - 1}(x - 1) \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} = 0.$$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε η ευθεία ε να τέμνει τον κύκλο.

Λύση

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $\varepsilon:\ y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$

Έχουμε:

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right) + y^2 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 .$$

Άρα το κέντρο του κύκλου C είναι το $K(2,0)$ και η ακτίνα του $\rho = \sqrt{3}$.

Για να τέμνει η ευθεία τον κύκλο θα πρέπει η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία να είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ.

Δηλαδή: $$d(K,\varepsilon) < \rho \Leftrightarrow \frac{|2\lambda - 0|}{\sqrt{\lambda^2+1}} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{4\lambda^2}{\lambda^2+1} < 3 \Leftrightarrow 4\lambda^2 < 3\lambda^2 + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές για το λ είναι $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$.

Άσκηση 2

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων που εφάπτεται στην ευθεία ε: x + y = 1.

Λύση

Ο κύκλος έχει κέντρο του την αρχή των αξόνων,οπότε θα είναι της μορφής : $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Για να εφάπτεται η ευθεία ε στον κύκλο πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή:

$$d(O,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων $C_A:\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ και $C_B:\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Λύση

Έστω $M(x,y)$ ένα κοινό σημείο των κύκλων με εξίσωση C_A και C_B. Αφού το Μ είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων ,είναι προφανές ότι οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν τις εξισώσεις και των δύο κύκλων. Δηλαδή :

$$(x-1)^2+(y-3)^2=4 \quad \text{και} \quad (x-2)^2+(y-1)^2=2$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων προκύπτει:

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9-\left(x^2-4x+4+y^2-2y+1\right)=4-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-6y+9-x^2+4x-4-y^2+2y-1=4-2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-4y+5=2 \Leftrightarrow 2x-4y+3=0$$

Η σχέση όμως στην οποία καταλήξαμε παριστάνει ευθεία και επιπλέον επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των δύο κύκλων. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της κοινής χορδής των δύο κύκλων είναι η ευθεία $2x-4y+3=0$.

Άσκηση 4

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του παρακάτω κύκλου: $C:\ x^2+y^2-4x+6y+12=0$.

Λύση

Θα λύσουμε την άσκηση με δύο τρόπους:

α΄ τρόπος: *(με εφαρμογή των σχετικών τύπων)*

Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, $A, B, \Gamma \in R$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K(2,-3)$ και ακτίνα

$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ δηλαδή $\rho=1$.

β΄ τρόπος: *(με συμπλήρωση τετραγώνων)*

$$x^2+y^2-4x+6y+12=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x\right)+\left(y^2+6y\right)=-12 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-2\cdot 2x+2^2\right)+\left(y^2+2\cdot 3y+3^2\right)=-12+2^2+3^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=1^2$$

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Άσκηση 5

Δείξτε ότι ο κύκλος $(c_1):\ x^2+y^2-2x-4y-4=0$ εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου $(c_2):\ x^2+y^2-8x-12y+48=0$ και βρείτε το σημείο επαφής.

Λύση

Ο κύκλος (c_1) έχει κέντρο Κ $(1, 2)$ και ακτίνα $\rho_1=3$. Ο κύκλος (c_2) έχει κέντρο Λ $(4, 6)$ και ακτίνα $\rho_2=2$.

Είναι $\left|\overrightarrow{ΚΛ}\right| = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$ και $ρ_1+ρ_2 = 2+3 = 5$, δηλαδή $\left|\overrightarrow{ΚΛ}\right| = ρ_1+ρ_2$ που σημαίνει ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής, έστω Α, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-4=0 & (1) \\ x^2+y^2-8x-12y+48=0 & (2) \end{cases}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1), (2) παίρνουμε: $6x+8y-52=0 \Leftrightarrow 3x+4y-26=0 \quad (3)$

Η ευθεία με εξίσωση 3x + 4y - 26 = 0 είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Είναι $y = \dfrac{-3x+26}{4}$, οπότε από την (1) έχουμε:

$$x^2+\left(\frac{-3x+26}{4}\right)^2-2x-4\left(\frac{-3x+26}{4}\right)-4=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{14}{5}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}.$$

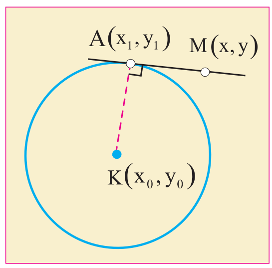
Για $x=\dfrac{14}{5}$ προκύπτει $y=\dfrac{22}{5}$. Άρα το σημείο επαφής είναι το $Α\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{22}{5}\right)$.

Άσκηση 6

Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $Κ(x_0,y_0)$ και ακτίνα R. Έστω $Α(x_1,y_1)$ σημείο του κύκλου. Να δείξετε, ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου σε σημείο του Α είναι:

$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=R^2$$

Λύση



Έστω (ε) η εφαπτομένη στο Α και $Μ(x,y)$ τυχαίο σημείο της.

Είναι $\overrightarrow{ΚΑ}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ και $\overrightarrow{ΑΜ}=(x-x_1,y-y_1)$

Επειδή $\overrightarrow{ΚΑ}\perp\overrightarrow{ΑΜ}$ ισχύει: $\overrightarrow{ΚΑ}\cdot\overrightarrow{ΑΜ}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-x_1)(x_1-x_0)+(y-y_1)(y_1-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-x_0)-(x_1-x_0)\right](x_1-x_0)+\left[(y-y_0)-(y_1-y_0)\right](y_1-y_0)=0$$

(προσθέσαμε και αφαιρέσαμε στην πρώτη παρένθεση το x_0 και στην τρίτη παρένθεση το y_0).

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(x_1-x_0)-(x_1-x_0)^2+(y-y_0)(y_1-y_0)-(y_1-y_0)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 \qquad (1).$$

Ο κύκλος C έχει εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Επειδή το Α είναι σημείο του κύκλου, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση του.

Έτσι $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=R^2 \qquad (3)$

Η (2) με βάση την (3) γράφεται:

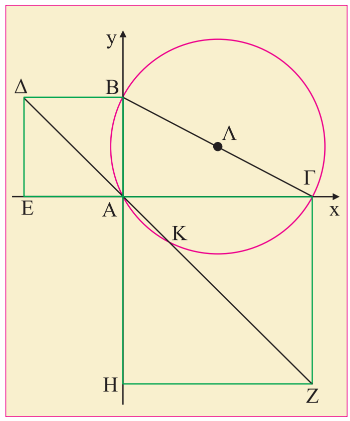
$\left(x-x_0\right)\left(x_1-x_0\right)+\left(y-y_0\right)\left(y_1-y_0\right)=R^2$, που είναι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A\left(x_1,y_1\right)$.

Άσκηση 7

Με πλευρές τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, κατασκευάζουμε έξω από αυτό τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να δείξετε ότι:
α. Τα σημεία Α, Δ, Ζ είναι συνευθειακά
β. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το μέσον της ΔΖ.

Λύση

Όταν έχουμε ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο δε μας δίνονται συντεταγμένες σημείων, ούτε εξισώσεις ευθειών ή άλλων γραμμών, συνηθίζουμε να εργαζόμαστε ως εξής:
I. Εκλέγουμε σύστημα αξόνων θεωρώντας ως αρχή ένα σημείο του σχήματος μας.
II. Θέτουμε συντεταγμένες στα σημεία του σχήματος
III. Τα δεδομένα της άσκησης καθώς και τα ζητούμενα τα εκράζουμε συναρτήσει αυτών των συντεταγμένων.



Έτσι στο συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέγουμε οι άξονες να περιέχουν τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου και η αρχή των αξόνων να είναι η κορυφή Α. (όπως στο σχήμα).
Στο σημείο Γδίνουμε συντεταγμένες (γ, 0), αφού ανήκει στον άξονα x΄x. Δεδομένου ότι το ΑΓΖΗ είναι τετράγωνο, τα σημεία Ζ και Η έχουν συντεταγμένες (γ, -γ) και (0, -γ) αντίστοιχα.
Με την ίδια λογική εργαζόμενοι, δίνουμε συντεταγμένες και στα σημεία Β, Δ, Ε και έχουμε $B(0,\beta)$, $E(-\beta,0)$ και $\Delta(-\beta,\beta)$.

α. Τα σημεία Ζ και Δ ανήκουν στην ευθεία $y=-x$ (αφού επαληθεύουν την εξίσωσή της). Αυτή ως γνωστόν διέρχεται από την αρχή Α των αξόνων. Επομένως τα σημεία Ζ, Α και Δ είναι συνευθειακά.

β. Το Κ είναι μέσον του ΔΖ, επομένως έχει συντεταγμένες $\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2},\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$.

Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει κέντρο Λ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ (αφού η γωνία Α είναι ορθή και είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, γνωρίζουμε ότι βαίνει σε ημικύκλιο).

Έχουμε $\Lambda\left(\dfrac{\gamma}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Η ακτίνα του κύκλου αυτού είναι $R=\dfrac{(B\Gamma)}{2}=\dfrac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{2}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι: $C:\left(x-\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}$

Θα εξετάσουμε αν το μέσον της ΔΖ, το Κ, επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου.

Έχουμε: $\left(\frac{\gamma-\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta-\gamma}{2}-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}\Leftrightarrow\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{4}$ που ισχύει.

Επομένως ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το μέσον της ΔΖ.

Άσκηση 8

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σταθερά σημεία $A(2,0)$ και $B(-2,0)$ είναι C (σταθερός) και διάφορος της μονάδας.

Λύση

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

Είναι $\frac{d(M,A)}{d(M,B)}=C\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}=C\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=C^2\left[(x+2)^2+y^2\right]\Leftrightarrow$

$x^2-4x+4+y^2=C^2x^2+4C^2x+4C^2+C^2y^2\Leftrightarrow$

$C^2x^2-x^2+C^2y^2-y^2+4C^2x+4x+4C^2-4=0\Leftrightarrow$

$(C^2-1)x^2+(C^2-1)y^2+(4C^2+4)x+4C^2-4=0$.

Επειδή $C^2-1\neq 0\ (C\neq 1)$, διαιρούμε και τα δύο μέλη με C^2-1 και έχουμε:

$$x^2+y^2+\frac{4C^2+4}{C^2-1}x+\frac{4(C^2-1)}{C^2-1}=0\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{4(C^2+1)}{C^2-1}x+4=0 \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ και παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=\frac{16(C^2+1)^2}{(C^2-1)^2}-16=\frac{16(C^2+1)^2-16(C^2-1)^2}{(C^2-1)^2}$

$$=\frac{16(C^4+2C^2+1-C^4+2C^2-1)}{(C^2-1)^2}=\frac{16\cdot 4C^2}{(C^2-1)^2}>0$$

Επομένως η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(-\frac{2\left(C^2+1\right)}{C^2-1},0\right)$ και ακτίνα $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{4C}{C^2-1}$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C:\ x^2+y^2=4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $\delta:\ x+y=0$.

(**Απ.:** $x+y-2\sqrt{2}=0$ και $x+y+2\sqrt{2}=0$)

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon: x+y-6=0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(**Απ.:** $\left(x-6+3\sqrt{2}\right)^2+\left(y-6+3\sqrt{2}\right)^2=\left(6-3\sqrt{2}\right)^2$)

3. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1:\ (x-2)^2+y^2=4$ και $C_2:\ x^2-2x+y^2=0$ εφάπτονται εσωτερικά.

4. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι:
$C_1:\ x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $C_2:\ x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$.

(**Απ.:** $\left(\begin{cases}A_1=A_2\\B_1=B_2\end{cases}\right)$)

5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $C:\ x^2+y^2+\lambda x=0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in R^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

(**Απ.:** $y=0$)

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(-3,1)$ και εφάπτεται στηνευθεία $\varepsilon:\ 4x-3y+5=0$.

(**Απ.:** $(x+3)^2+(y-1)^2=2^2$)

7. Δίνεται ο κύκλος $C:\ (x-1)^2+y^2=4$. Να βρείτε τιςεξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $M(3,3)$.

(**Απ.:** $x=3$ και $5x-12y+21=0$)

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=25$ στο σημείο $M(3,4)$ και έχουν ακτίνα 10.

(**Απ.:** $(x-9)^2+(y-12)^2=100$ και $(x+3)^2+(y+4)^2=100$)

9. Από το σημείο $M(3,2)$ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ προς τον κύκλο $C:\ x^2+y^2=2$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

(**Απ.:** $3x+2y=2$)

10. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής δύο κύκλων με κέντρα $K(1,2)$, $\Lambda(3,1)$ και ακτίνες 3 και 2 αντίστοιχα.

(**Απ.:** $2x-y-5=0$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

α. Να εξετάσετε αν η οικογένεια των ευθειών:

$$(\varepsilon):\ (\lambda^2-1)x+2\lambda y-3\lambda^2-4\lambda-1=0$$

διέρχεται από το ίδιο σημείο του επιπέδου για κάθε $\lambda\in R$.

β. Να καθορίσετε το μέρος του επιπέδου από κάθε σημείο του οποίου διέρχονται δύο ευθείες της οικογένειας (ε).

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε οι ευθείες (ε) που διέρχονται από το Μ να τέμνονται κάθετα.

(**Υπ.: β.** Να μετασχηματίσετε την (1) σε εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ. Ζητάμε τα ζεύγη (x,y) για τα οποία η δευτεροβάθμια έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Θεωρείστε δύο ευθείες από τις (1) για $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$ και χρησιμοποιείστε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των θεωρούμενων ευθειών είναι ίσο με -1)

Μάθημα 8

Παραβολή

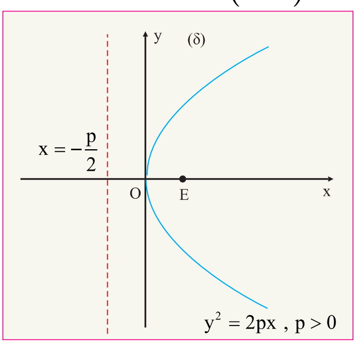
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

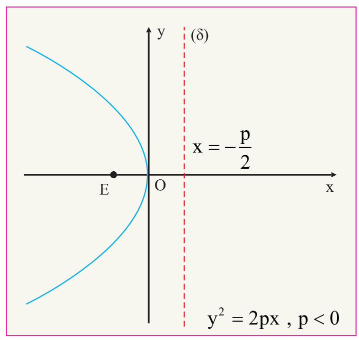
Ορισμός

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία (δ) που λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και από ένα σταθερό σημείο Ε που λέγεται **εστία** της παραβολής. Τα σημεία που ικανοποιούν την προηγούμενη ιδιότητα ανήκουν σε μια καμπύλη που φαίνεται στα επόμενα σχήματα.

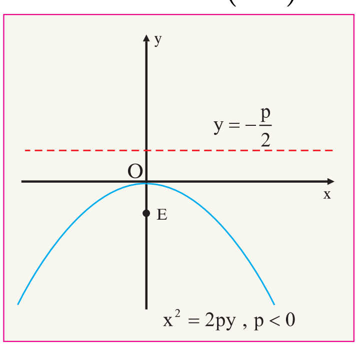
Εξίσωση παραβολής και γραφική παράσταση

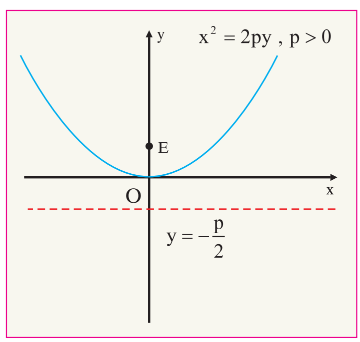
1. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ x=-\frac{p}{2}$ $\boxed{y^2=2px}$





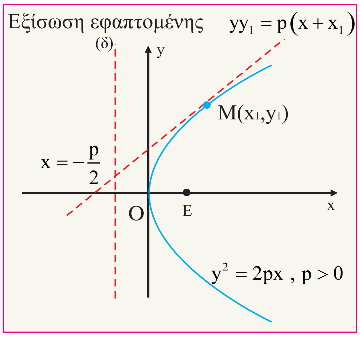
2. Με κορυφή $O(0,0)$, εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$, και διευθετούσα $\delta:\ y=-\frac{p}{2}$ $\boxed{x^2=2py}$

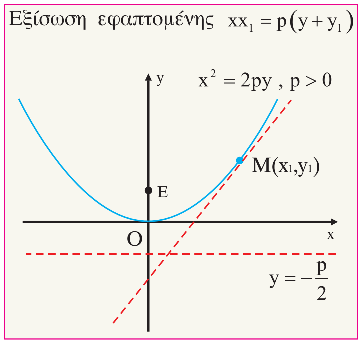




Εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $\boxed{yy_1 = p(x + x_1)}$

Εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$: $\boxed{xx_1 = p(y + y_1)}$





Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής:

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο $M(x_1, y_1)$.

Εκτελούμε τα εξής:

α. Γράφουμε την εξίσωση της παραβολής : $y^2 = 2px \quad (1)$

β. Επειδή $y^2 = y \cdot y$ και $2x = x + x$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε : $y \cdot y = p(x + x)$

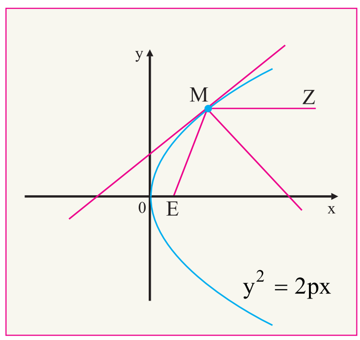
γ. Στο δεύτερο y και x θέτουμε y_1 και x_1 αντίστοιχα και παίρνουμε : $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$ που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση της παραβολής $x^2 = 2py$

Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ΜΕ και η ημιευθεία ΜΖ, που είναι ομόρροπη της ΟΕ, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής.

Η ιδιότητα αυτή της παραβολής έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή, π.χ στα παραβολικά τηλεκόπια, στα ραντάρ,στα φανάρια των αυτοκινήτων κ.λ.π.



Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση παραβολής, απο τα δεδομένα βρίσκουμε την παράμετρο p.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y και διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

β. Έχει εστία $E(-2,0)$ και διευθετούσα $\delta:\ x-2=0$.

γ. Έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x και εφάπτεται της ευθείας $y=4x+1$.

Λύση

α. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y και κορυφή το $(0,0)$ θα είναι της μορφής: $x^2=2py$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $(2,2)$ ισχύει :

$$2^2=2p\cdot 2 \Leftrightarrow p=1.\ \text{Άρα}\ \ C:\ x^2=2y\ .$$

β. Είναι $\frac{p}{2}=-2 \Leftrightarrow p=-4$. Άρα $C:\ y^2=-8x$.

γ. Η εφαπτομένη στο τυχαίο σημείο της παραβολής (x_1, y_1) είναι

$$yy_1=p(x+x_1) \Leftrightarrow y=\frac{p}{y_1}x+\frac{px_1}{y_1} \Leftrightarrow y=\frac{p}{y_1}x+\frac{y_1}{2}\ \left(\text{διότι}\ y_1^2=2px_1\ ,(x_1,y_1)\neq 0\right).$$

Άρα πρέπει να ισχύουν : $\frac{p}{y_1}=4$ και $\frac{y_1}{2}=1$, δηλαδή

$y_1=2$ και $p=8$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής είναι $C:\ y^2=16x$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Όταν θέλουμε να βρούμε τη σχετική θέση μιας ευθείας με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$* και μιας παραβολής $y^2=2px$ ή $\left(x^2=2py\right)$ επιλύουμε το σύστημα που σχηματίζουν.

Θα οδηγηθούμε σε εξίσωση δευτέρου βαθμού. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

• Αν η διακρίνουσα $\Delta>0$, τότε το σύστημα μας έχει δύο λύσεις και στην περίπτωση που και οι δύο είναι αποδεκτές η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

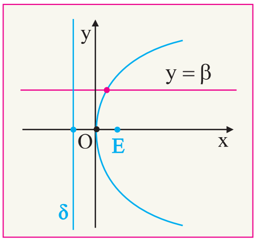
• Αν η διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε το σύστημα έχει μία λύση και η ευθεία εφάπτεται της παραβολής.

• Αν η διακρίνουσα $\Delta<0$, τότε το σύστημα δεν έχει καμία λύση και η ευθεία δεν έχει κοινό σημείο με την παραβολή.

* **Παρατήρηση:**

Αν $\alpha = 0$ η ευθεία είναι της μορφής $y = \beta$ και τέμνει την παραβολή $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο χωρίς όμως να εφάπτεται σε αυτήν.

Αναφέρουμε για παράδειγμα την παραβολή $y^2 = 4x$ και την ευθεία $y = 1$



Παράδειγμα 1

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x + y + 1 = 0$ και η παραβολή $y^2 = 2x$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, που έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται στην ευθεία $y = 4x + 1$.

Λύση

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύστημα που σχηματίζουν οι δύο εξισώσεις είναι αδύνατο:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 \\ y^2 = 2(-y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 \\ y^2 + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Όμως η εξίσωση $y^2 + 2y + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$ άρα είναι αδύνατη και κατά συνέπεια και το σύστημα είναι αδύνατο. Επομένως η ευθεία $x + y + 1 = 0$ και η παραβολή $y^2 = 2x$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

β. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και κορυφή το $(0,0)$ θα έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας.

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2p\dfrac{y-1}{4} \\ x = \dfrac{y-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = py - p \\ x = \dfrac{y-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - py + p = 0 \ (1) \\ x = \dfrac{y-1}{4} \end{cases}$$

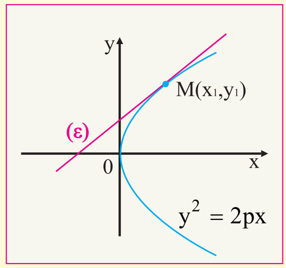
Επειδή η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή πρέπει η εξίσωση (1) να έχει διπλή λύση και αυτό συμβαίνει όταν και μόνον όταν, έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = 0 \Leftrightarrow p^2 - 8p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 & \text{απορρίπτεται} \\ p = 8 \end{cases}$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση της παραβολής θα είναι $C: \ y^2 = 16x$.

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ ή $\left(x^2 = 2py\right)$, γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο της έστω $M_1\left(x_1, y_1\right)$ πουείναι: $yy_1 = p\left(x + x_1\right)$ ή $\left(xx_1 = p\left(y + y_1\right)\right)$.



Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα x_1, y_1. Αφού έχουμε δύο αγνώστους χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις.
Η μια είναι πάντοτε η: $y_1^2 = 2px_1$ ή $\left(x_1^2 = 2py_1\right)$ αφού το σημείο $M\left(x_1, y_1\right)$ ανήκει στην παραβολή. Η δεύτερη εξίσωση με τα x_1, y_1 προκύπτει εύκολα από τα δεδομένα του προβλήματος.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C:\ y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta:\ 2x - y + 2003 = 0$.

Λύση

Έστω $M\left(x_1, y_1\right)$ το σημείο επαφής. Τότε η εφαπτομένη της $C:\ y^2 = 3x$ στο Μ θα είναι:

$$\varepsilon:\ yy_1 = \frac{3}{2}\left(x + x_1\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2y_1}\left(x + x_1\right) \quad (1),\ \text{με}\ \lambda_\varepsilon = \frac{3}{2y_1} \quad (\ y_1 \neq 0\ ).$$

Όμως $\varepsilon \parallel \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\delta \Leftrightarrow \dfrac{3}{2y_1} = 2 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{3}{4}$.

Επειδή το σημείο Μ είναι σημείο της παραβολής ισχύει:

$$y_1^2 = 3x_1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3x_1 \Leftrightarrow \frac{9}{16} = 3x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{16}$$

Οπότε η (1) γράφεται :

$$y = \frac{3}{2\left(\frac{3}{4}\right)}\left(x + \frac{3}{16}\right) \Leftrightarrow y = 2x + \frac{3}{8} \Leftrightarrow 8y = 16x + 3 \Leftrightarrow 16x - 8y + 3 = 0$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $16x - 8y + 3 = 0$.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Πως βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από γνωστό σημείο $P(x_0, y_0)$ προς την παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$.

α΄ τρόπος

Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο (x_1, y_1) της παραβολής που είναι $yy_1 = p(x + x_1)$ (1) και απαιτούμε να διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$.

Τότε ισχύουν : $\begin{cases} y_0 y_1 = p(x_0 + x_1) \\ y_1^2 = 2px_1 \end{cases}$ αφού η (1) διέρχεται από το $P(x_0, y_0)$ και το (x_1, y_1) ανήκει στην παραβολή.

Από το σύστημα αυτό προσδιορίζουμε τα x_1, y_1, και συνεπώς την εξίσωση (1).

β΄ τρόπος

Για να προσδιορίσουμε τις εφαπτόμενες παραβολής που διέρχονται από γνωστό σημείο έστω το $A(x_0, y_0)$, θεωρούμε όλες τις ευθείες που διέρχονται απο αυτό το σημείο. Αυτές έχουν εξισώσεις

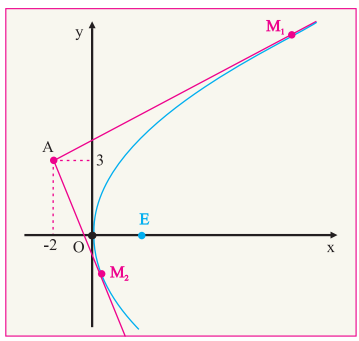
$$\varepsilon_1: \ y - y_0 = \lambda(x - x_0),\ \lambda \in R \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: \ x = x_0$$

Εξετάζουμε αν το σύστημα $\{y^2 = 2px, \varepsilon_2\}$ έχει διπλή λύση. Αν αυτό συμβαίνει τότε η ε_2 είναι εφαπτομένη.Στη συνέχεια προσδιορίζουμε το λ ώστε το σύστημα $\{y^2 = 2px, \varepsilon_1\}$ να έχει διπλή λύση. Για αυτές τις τιμές του λ η ε_1 είναι εφαπτομένη.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $C: \ y^2 = 8x$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(-2,3)$ και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση



Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής μιας εφαπτομένης ε της C. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο M είναι:

$$(\varepsilon): \ yy_1 = 4(x + x_1)$$

Όμως

$$A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 3y_1 = 4(-2 + x_1) \Leftrightarrow 3y_1 = -8 + 4x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 - 3y_1 = 8 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $M \in C \Leftrightarrow y_1^2 = 8x_1 \quad (2)$

Για να εντοπίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής θα επιλύσουμε το σύστημα που σχηματίζεται από τις (1) και (2) :

$$\begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ 4x_1 - 3y_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 16 + 6y_1 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 - 6y_1 - 16 = 0 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases}$$

Όμως $y_1^2 - 6y_1 - 16 = 0$, $\Delta = 100$ και $y_1 = 8$ ή $y_1 = -2$.

Αν $y_1 = 8$ έχουμε: $\begin{cases} y_1 = 8 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ 4x_1 = 8 + 3 \cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ x_1 = 8 \end{cases}$

Αν $y_1 = -2$ έχουμε : $\begin{cases} y_1 = -2 \\ 4x_1 = 8 + 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ 4x_1 = 8 + 3(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ x_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής τα $M_1(8, 8)$ και $M_2\left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$

Στο $M_1(8,8)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $8y = 4(x+8) \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2} + 4$, δηλαδή

$\varepsilon_1 :\ y = \dfrac{x}{2} + 4$.

Στο $M_2\left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $-2y = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -2x - 1$, δηλαδή $\varepsilon_2 :\ y = -2x - 1$

Γνωρίζουμε ότι : $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Για την ε_1 έχουμε : $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ και για την ε_2 έχουμε $\lambda_2 = -2$.

Άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \dfrac{1}{2}(-2) = -1$ που σημαίνει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

Παράδειγμα 2

Για την παραβολή με εξίσωση : $y^2 = 4x$ να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο (- 1, 0) .

Λύση

Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο (-1, 0) έχουν εξισώσεις:

$$y = \lambda(x+1),\ \lambda \in R \ \text{ και } \ x = -1$$

Η x = -1 φανερά δεν εφάπτεται της παραβολής.

Εφάπτεται η ευθεία $y = \lambda(x + 1)$ στην $y^2 = 4x$, αν και μόνο αν, το σύστημα: $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \lambda(x+1) \end{cases}$

έχει διπλή λύση, δηλαδή η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\lambda^2x^2 + 2(\lambda^2 - 2)x + \lambda^2 = 0 \quad , \quad \lambda \neq 0$$

έχει διπλή ρίζα, δηλαδή διακρίνουσα $\Delta = 0$, που ισοδυναμεί με:

$$4\left(\lambda^2 - 2\right)^2 - 4\lambda^2 \cdot \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

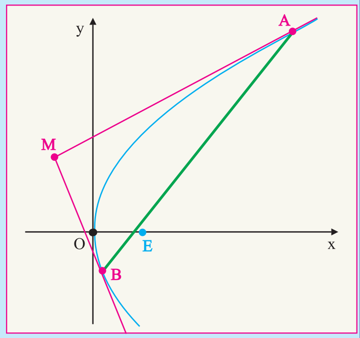
Για τις τιμές αυτές του λ προκύπτουν οι ευθείες με εξισώσεις: $y = x + 1$ και $y = -x - 1$

Πολική ευθεία

Η εξίσωση της χορδής που ορίζεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρονται από σημείο Μ (x_0, y_0) προς την παραβολή $y^2 = 2px$ είναι $yy_0 = p(x + x_0)$.

Απόδειξη

Έστω Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) τα σημεία επαφής των εφαπτομένων ΜΑ και ΜΒ.



Οι εξισώσεις των ΜΑ και ΜΒ είναι:

ΜΑ: $yy_1 = p(x + x_1)$ και ΜΒ: $yy_2 = p(x + x_2)$

Επειδή διέρχονται από το σημείο Μ, οι συντεταγμένες του τις επαληθεύουν , δηλαδή ισχύουν :

$$y_0y_1 = p(x_0 + x_1) \quad (1)$$
$$y_0y_2 = p(x_0 + x_2) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι:

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

διότι είναι πρώτου βαθμού ως προς x, y και σύμφωνα με τις (1), επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των Α και Β.

Η ΑΒ λέγεται **πολική του σημείου Μ** ως πρός την παραβολή και το σημείο Μ λέγεται **πόλος της ΑΒ** ως προς την παραβολή.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

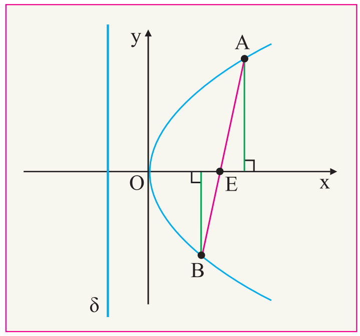
Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Έστω ΑΒ χορδή της παραβολής, η οποία διέρχεται από την εστία Ε. Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των Α,Β από τον άξονα x΄x παραμένει σταθερό καθώς η ΑΒ στρέφεται γύρω από την εστία.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Μας ζητείται να δείξουμε ότι $|y_1| \cdot |y_2| = \text{σταθ.}$ Αφού η ευθεία ΑΒ διέρχεται από την εστία Ε έχει εξίσωση: $y = \lambda\left(x - \frac{p}{2}\right)$ (1) ή $x = \frac{p}{2}$

Για $\lambda = 0$ δεν ορίζεται χορδή.

Από την επίλυση του συστήματος της (1) και της εξίσωσης της παραβολής προκύπτουν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β.



Έτσι έχουμε: $\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \lambda x - \dfrac{p\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ y = \lambda \dfrac{y^2}{2p} - \dfrac{p\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ \lambda y^2 - 2py - p^2\lambda = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Η (2) είναι τριώνυμο ως προς y με διακρίνουσα $\Delta = 4p^2 - 4\lambda\left(-p^2\lambda\right) = 4p^2 + 4\lambda^2 p^2 > 0$.

Άρα έχει δύο ρίζες, έστω y_1, y_2 για τις οποίες ισχύει: $y_1 y_2 = \dfrac{-p^2\lambda}{\lambda} = -p^2$. Δηλαδή

$|y_1 y_2| = |y_1||y_2| = |-p^2| = |p|^2 = p^2 =$ σταθερό

Αν $x = \dfrac{p}{2}$, τότε $(AE) = |y_1| = d(A,\delta) = p$ και $(BE) = |y_2| = d(B,\delta) = p$, οπότε :

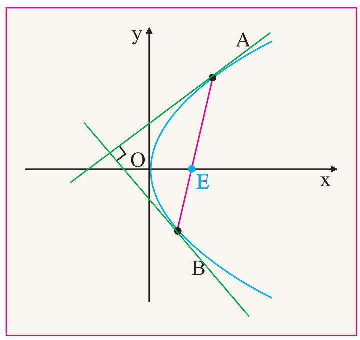
$(AE)(BE) = |y_1||y_2| = p^2$.

Άσκηση 2

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και χορδή ΑΒ η οποία διέρχεται από την εστία της Ε. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β. Να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.

Λύση

Αφού η ΑΒ διέρχεται από το Ε έχει εξίσωση $y = \lambda\left(x - \dfrac{p}{2}\right) \Leftrightarrow y = \lambda x - \dfrac{\lambda p}{2}$ ή $x = \dfrac{p}{2}$.



Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \dfrac{p}{y_1}$. Ομοίως η εφαπτομένη στο Β έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \dfrac{p}{y_2}$. Πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{y_1} \cdot \frac{p}{y_2} = -1 \Leftrightarrow p^2 = -y_1 \cdot y_2$$

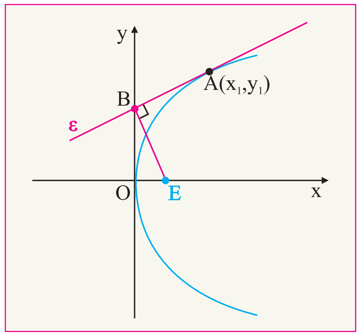
(που το αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση).

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι η προβολή της εστίας Ε, παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, επάνω σε τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο του άξονα y΄y.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο παραβολής και (ε) η εφαπτομένη στο Α. Έστω ακόμη ότι Β είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα y΄y.



Αρκεί να δείξουμε ότι $EB \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{EB} \cdot \lambda_{AB} = -1$

Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$ (1)

Το Β είναι το σημείο τομής της με τον άξονα y΄y.

Επομένως από την (1) με $x = 0$ παίρνουμε:

$y = \dfrac{px_1}{y_1} = \dfrac{y_1^2}{2y_1} = \dfrac{y_1}{2}$ (αφού $y_1^2 = 2px_1$) δηλ. $B\left(0, \dfrac{y_1}{2}\right)$.

Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{y_1 - \dfrac{y_1}{2}}{x_1 - 0} = \dfrac{y_1}{2x_1} = \dfrac{y_1}{\dfrac{y_1^2}{p}} = \dfrac{p}{y_1}$ και $\lambda_{BE} = \dfrac{0 - \dfrac{y_1}{2}}{\dfrac{p}{2} - 0} = \dfrac{-y_1}{p}$

Αν $x_1 = y_1 = 0$ τότε το Α ταυτίζεται με το Ο. Άρα και πάλι η προβολή του Ε είναι σημείο του y΄y (η αρχή των αξόνων).

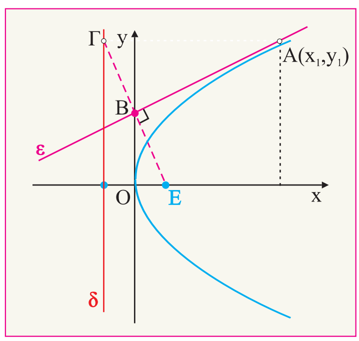
Έτσι: $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{BE} = \dfrac{p}{y_1} \cdot \left(-\dfrac{y_1}{p}\right) = -1$

Άσκηση 4

Δείξτε ότι το συμμετρικό της εστίας Ε, παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, ως προς τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο της διευθετούσας.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$, $x_1 \neq 0$ τυχαίο σημείο παραβολής. Όπως δείξαμε στην προηγούμενη άσκηση, το Β έχει συντεταγμένες $B\left(0, \dfrac{y_1}{2}\right)$. Επειδή το Γ είναι συμμετρικό του Ε ως προς την εφαπτομένη (ε), το Β είναι μέσον της ΓΕ.



Επομένως $\dfrac{x_\Gamma + x_E}{2} = x_B \Leftrightarrow x_\Gamma = 2x_B - x_E \Leftrightarrow$

$x_\Gamma = 0 - \dfrac{p}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = -\dfrac{p}{2}$.

Επομένως το Γ ανήκει στη διευθετούσα. Αν $x_1 = y_1 = 0$ τότε το Α ταυτίζεται με το Ο.

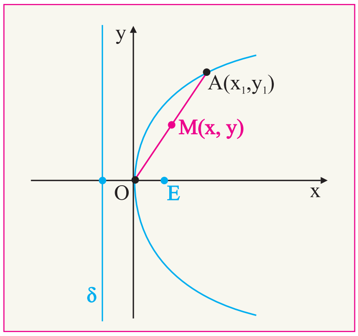
Άσκηση 5

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$ και μεταβλητό σημείο Α αυτής. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της χορδής του ευθ. τμήματος ΟΑ.

Λύση

Έστω $A(x_1, y_1)$. Επειδή το Μ είναι μέσον της ΟΑ είναι:

$$\begin{cases} x = \dfrac{0+x_1}{2} \\ y = \dfrac{0+y_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x \\ y_1 = 2y \end{cases} \quad (1)$$



Αφού το Α ανήκει στην παραβολή:

$y_1^{\,2} = 2px_1 \Leftrightarrow (2y)^2 = 2p(2x) \Leftrightarrow y^2 = px$

Επομένως το Μ κινείται επάνω στην παραβολή με εξίσωση $y^2 = px$

Άσκηση 6

Δίνονται τα σημεία $A(\eta\mu t, -1+\sigma\upsilon\nu 2t)$ $t \in R$. Να βρεθεί η γραμμή επάνω στην οποία κινούνται.

Λύση

Είναι $\left.\begin{array}{l} x = \eta\mu t \\ y = -1+\sigma\upsilon\nu 2t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \eta\mu t \\ y = -1+1-2\eta\mu^2 t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \eta\mu t \\ y = -2\eta\mu^2 t \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = -2x^2 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{1}{2}y$

Επομένως το Α κινείται επάνω στην παραβολή $x^2 = -\dfrac{1}{2}y$.

Άσκηση 7

Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.

α. Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.

β. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της $A(2,1)$ από την εστία Ε και να συγκριθεί με την απόσταση ΟΕ .

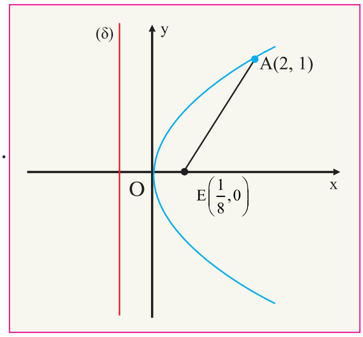
γ. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της Ο.

δ. Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$, που να απέχει από την εστία Ε απόσταση διπλάσια της ΟΕ.

Λύση

α. Είναι $2y^2 = x \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1}{2}x$. Επομένως $2p = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{4}$

Η εστία Ε έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2},0\right)$, δηλαδή $E\left(\frac{1}{8},0\right)$ και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $\delta: x=-\frac{p}{2}$, δηλαδή $\delta: x=-\frac{1}{8}$.



β. Είναι

$$(AE)=\sqrt{\left(2-\frac{1}{8}\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\frac{15^2}{8^2}+1}=\sqrt{\frac{289}{64}}=\frac{17}{8}.$$

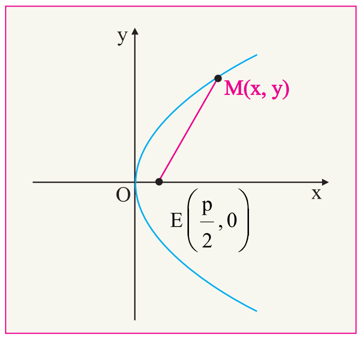
$OE=\frac{1}{8}$.

Παρατηρούμε ότι $AE>OE$.

γ. Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2=2px$.

Είναι

$$(ME)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2}$$



Επειδή το Μ ανήκει στην παραβολή $y^2=2px$ είναι

$$(ME)=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

Επομένως

$$d(M,E)=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

Επειδή το x και το p είναι ομόσημοι αριθμοί η απόσταση d γίνεται ελάχιστη όταν $x=0$, δηλαδή όταν το Μ ταυτίζεται με την κορυφή Ο.

2ος τρόπος

Αρκεί $(ME)\geq(OE)$, όπου $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

Είναι $(ME)\geq(OE)\Leftrightarrow\left|x+\frac{p}{2}\right|\geq\frac{|p|}{2}\Leftrightarrow x^2+\frac{p^2}{4}+px\geq\frac{p^2}{4}\Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{2}\geq 0$, που ισχύει.

δ. Έστω $B(x_B,y_B)$ σημείο της παραβολής $y^2=2px$, για το οποίο ισχύει $(BE)=2(OE)$.

Αφού ανήκει στην παραβολή θα ισχύει $y^2_B=2px_B$ (1)

Είναι $(OE)=\left|\frac{p}{2}\right|$. Επομένως $(BE)=|p|\Leftrightarrow\left|x_B+\frac{p}{2}\right|=|p|\Leftrightarrow\begin{cases}x_B+\frac{p}{2}=p\\ \text{η}\\ x_B+\frac{p}{2}=-p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=\frac{p}{2}\\ x_B=-\frac{3p}{2}\end{cases}$

Η $x_B = -\dfrac{3p}{2}$ απορρίπτεται γιατί οι p, x είναι ομόσημοι.

Για $x_B = \dfrac{p}{2}$ από την (1) έχουμε $y_B{}^2 = 2p\dfrac{p}{2} \Leftrightarrow y_B{}^2 = p^2 \Leftrightarrow y_B = p$ ή $y_B = -p$.

Άρα υπάρχουν δύο σημεία τα: $B\left(\dfrac{p}{2}, p\right)$ και $B'\left(\dfrac{p}{2}, -p\right)$.

Άσκηση 8

Μια μεταβλητή ευθεία $y = \lambda x + \beta,\ \lambda \neq 0$ τέμνει την παραβολή $y^2 = 6x$ στα σημεία Α και Β. Να δείξετε, ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι $\left(\dfrac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}, \dfrac{3}{\lambda}\right)$.

Λύση

Οι συντεταγμένες των σημείων τομής Α,Β της ευθείας και της παραβολής είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων τους.

Έχουμε: $\left.\begin{aligned} y &= \lambda x + \beta \\ y^2 &= 6x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (\lambda x + \beta)^2 = 6x \Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2(\lambda\beta - 3)x + \beta^2 = 0 \qquad (1)$

Η (1) είναι τριώνυμο ως προς x. Οι λύσεις της είναι οι τετμημένες των Α και Β.
Ζητάμε την τετμημένη του σημείου Μ που είναι το ημιάθροισμα των τετμημένων των Α και Β.

Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta έχουμε: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -\dfrac{\lambda\beta - 3}{\lambda^2} = \dfrac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}$.

Επειδή το Μ ανήκει στην ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι $y_M = \lambda\dfrac{3-\lambda\beta}{\lambda^2} + \beta \Leftrightarrow y_M = \dfrac{3}{\lambda}$

Επομένως $M\left(\dfrac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}, \dfrac{3}{\lambda}\right)$.

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο γ. τ. των μέσων των παραλλήλων χορδών της παραβολής $y^2 = 2px$, με συντελεστή διεύθυνσης λ

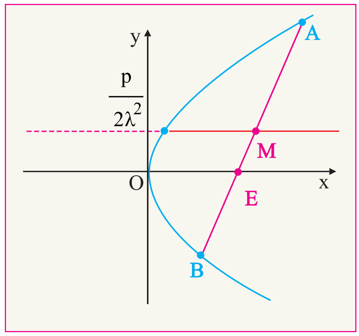
Λύση

Έστω $A(x_A, y_A), B(x_B.y_B)$ σημεία της παραβολής με $x_A \neq x_B$ τα οποία είναι άκρα της χορδής ΑΒ και $M(x_M, y_M)$ το μέσο του ΑΒ. Ισχύει: $y_A{}^2 = 2px_A$

$$y_B{}^2 = 2px_B$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$$y_A^2 - y_B^2 = 2px_A - 2px_B \Leftrightarrow$$
$$(y_A + y_B)(y_A - y_B) = 2p(x_A - x_B) \Leftrightarrow$$
$$\frac{y_A + y_B}{2} \cdot \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = p \Leftrightarrow y_M \cdot \lambda = p$$



Επομένως το μέσο M της χορδής κινείται επάνω στην ευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ (η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x΄x).

Επειδή η ευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ τέμνει την παραβολή στο σημείο με τετμημένη $x = \frac{p}{2\lambda^2}$ (είναι η λύση του συστήματος των $y^2 = 2px$ και $y = \frac{p}{\lambda}$). Το M ανήκει στην ημιευθεία $y = \frac{p}{\lambda}$ με $x \geq \frac{p}{2\lambda^2}$. Αυτή είναι και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Άσκηση 10

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$. Θέτουμε $x_1 = \kappa x$ και $y_1 = \kappa y$, όπου $\kappa \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x_1, y_1) κινείται πάλι σε παραβολή.

Λύση

Έχουμε $\begin{cases} x_1 = \kappa x \\ y_1 = \kappa y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1}{\kappa} & (1) \\ y = \dfrac{y_1}{\kappa} & (2) \end{cases}$

Όμως $(x, y) \in C \Leftrightarrow y^2 = 2px \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{y_1}{\kappa}\right)^2 = 2p\left(\frac{x_1}{\kappa}\right) \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\kappa^2} = 2\frac{p}{k}x_1 \Leftrightarrow y_1^2 = 2p\kappa x_1$

Άρα το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στην παραβολή με εξίσωση : $C_1: \ y^2 = 2p\kappa x$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται σταθερό σημείο A και μία ευθεία (ε) , που δεν διέρχεται από το A. Να αποδείξετε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην (ε) , είναι παραβολή.

2. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=2$ και η παραβολή $y^2=8x$.

α. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής

β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

(**Απ.: α.** $y=x+2$ και $y=-x-2$)

3. Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2=4px$, με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

(**Απ.:** $AB:\ x=12p$)

4. Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραβολής $C:\ y^2=6x$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon:\ x-2y+2002=0$.

(**Απ.:** $x-2y+6=0$)

5. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$.

(**Απ.:** $y^2=\frac{1}{2}x$ ή $x^2=4y$)

6. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής με εξίσωση $x=\frac{1}{6}y^2$ οι οποίες άγονται από το σημείο $A(0,1)$

(**Απ.:** $x=0$ ή $y=\frac{3}{2}x+1$)

7. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+(y-2)^2=3$ και η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{2}x^2$.

Να βρείτε τα κοινά τους σημεία.

(**Απ.:** $A(\sqrt{2},1)$ και $B(-\sqrt{2},1)$)

8. Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ των παρακάτω παραβολών

α. $y=x^2$

β. $y=-2x^2$

(**Απ.: α.** $E\left(0,\frac{1}{4}\right)$ και $\delta:\ y=-\frac{1}{4}$, **β.** $E\left(0,-\frac{1}{8}\right)$ και $\delta:\ y=\frac{1}{8}$)

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C:\ y^2=4x$ η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon:\ y=-2x+1$.

(**Απ.:** $y=\frac{1}{2}x+2$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω ΑΒ χορδή της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$ **που διέρχεται από την εστία της** $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ **και Γ το σημείο επαφής της εφαπτομένης στην παραβολή, που είναι παράλληλη με την ΑΒ. Δείξτε ότι:** $(AB)=4(E\Gamma)$

(**Υπ.:** Αν $\Gamma(x_0,y_0)$, $A(x_1,y_1)$, και $B(x_2,y_2)$, τότε:

$(E\Gamma)=x_0+\frac{p}{2}$ και $(AB)=(EB)+(EA)=x_1+x_2+p$. Υπολογίστε τα x_0 και x_1 και x_2)

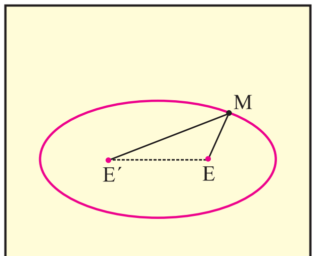
Μάθημα 9

Έλλειψη

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έλλειψη ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε΄ είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης των δύο σημείων. Τα δύο αυτά σημεία, το Ε και το Ε΄, τα ονομάζουμε **εστίες** και τη μεταξύ τους απόσταση, **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ.

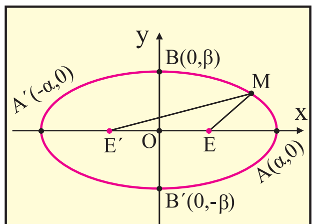


σχήμα 1

Το άθροισμα των αποστάσεων του τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις δύο εστίες το συμβολίζουμε με 2α και αποτελεί το μήκος του **μεγάλου άξονα** της έλλειψης.
Είναι (ΜΕ) + (ΜΕ΄) = 2α

Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Οxy με άξονα x΄x την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα y΄y την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1}$$ (σχήμα 2)

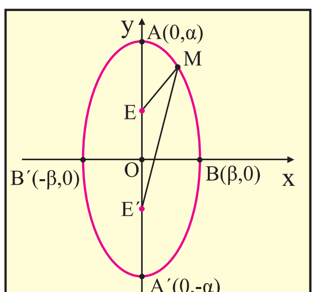


σχήμα 2

όπου $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$.

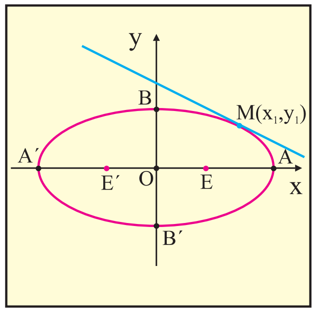
Ο **μικρός άξονας** ΒΒ΄ της έλλειψης έχει μήκος 2β.
Η εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Οxy με άξονα y΄y την ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ε΄ και άξονα x΄x την μεσοκάθετο του ΕΕ΄ είναι:

$$\boxed{\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1}$$ (σχήμα 3)



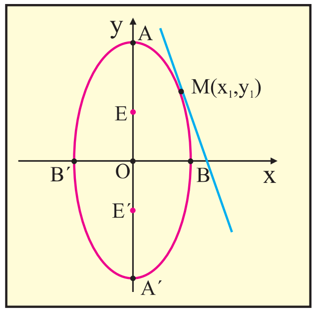
σχήμα 3

Εξίσωση εφαπτομένης



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\alpha>\beta$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\boxed{\frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1}$$

• Μνημονικός κανόνας για την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης:

Έστω ότι αναζητούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $M(x_1,y_1)$.

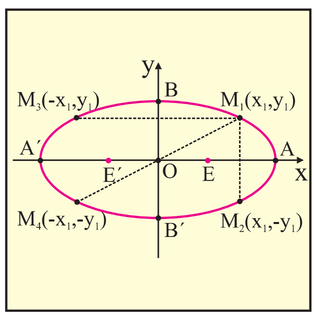
α. Γράφουμε την εξίσωση της έλλειψης: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1)

β. Επειδή $x^2=x\cdot x$ και $y^2=y\cdot y$ έχουμε από την (1): $\frac{x\cdot x}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y}{\beta^2}=1$

γ. Στο δεύτερο x και y θέτουμε x_1 και y_1 αντίστοιχα και έχουμε $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.Ομοίως εργαζόμαστε και για την έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1,\ \alpha>\beta.$$

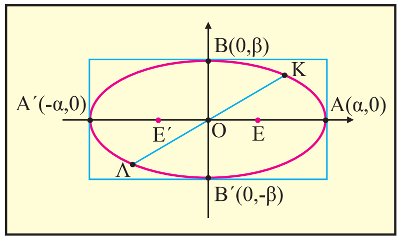
Ιδιότητες έλλειψης



Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α. Έχει άξονες συμμετρίας τους x΄x και y΄y. Κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O(0,0).

Δηλαδή αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη τότε ανήκουν στην έλλειψη και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$, $M_4(-x_1, -y_1)$.



β. Τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) και τον άξονα y΄y στα σημεία Β(0,β) και Β΄(0,-β).
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ λέγεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΒ΄ λέγεται **μικρός άξονας** της έλλειψης. Το Ο λέγεται **κέντρο** της έλλειψης. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ του οποίου τα άκρα Κ, Λ, ανήκουν στην έλλειψη και διέρχεται από το κέντρο Ο λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.

γ. Η έλλειψη C περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο ορίζουν οι ευθείες:

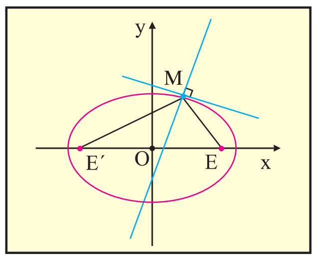
$$x = \alpha, \ x = -\alpha, \ y = \beta \ \text{ και } \ y = -\beta.$$

Γενικά για τις συντεταγμένες (x, y) οποιουδήποτε σημείου της έλλειψης ισχύει :

$$\begin{cases} -\alpha \le x \le \alpha \\ -\beta \le y \le \beta \end{cases}$$

δ. Ανακλαστική ιδιότητα

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E\hat{M}E$΄, όπου Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης.



• Χρήσιμη παρατήρηση:

Ας δούμε τι παριστάνει η εξίσωση $C: \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$, όπου μ, λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν $\mu > \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα x΄x και σταθερό άθροισμα 2μ.

β. Αν $\mu < \lambda$, τότε η C είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα y΄y και σταθερό άθροισμα 2λ.

γ. Αν $\mu = \lambda$, τότε $C: x^2 + y^2 = \mu^2$ και παριστάνει κύκλο.

Εκκεντρότητα έλλειψης

Έστω η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης C *το λόγο της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονα* και τη συμβολίζουμε με $\boxed{\varepsilon = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}}$. Είναι $0 < \varepsilon < 1$

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Οπότε όταν το ε τείνει στο 1, το β τείνει στο 0 και η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα. Αν το ε τείνει στο 0 τότε το β τείνει να γίνει ίσον με το α και η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Για να βρούμε την εξίσωση μιας έλλειψης πρέπει να προσδιορίζουμε τις τιμές των α, β. Δεδομένου, ότι έχουμε τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$, αρκεί να βρούμε άλλες δύο σχέσεις. Όταν μας δίνονται οι εστίες, γνωρίζουμε το γ. Όταν μας δίνονται ο μεγάλος και ο μικρός άξονας, γνωρίζουμε τα α και β αντίστοιχα. Όταν μας δίνεται η εκκεντρότητα $\left(\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ έχουμε μια σχέση ανάμεσα στα α, γ.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν:

α. Έχει μεγάλο άξονα 2α = 8 και εστίες $E(2,0)$ και $E'(-2,0)$.

β. Έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{5}$ και εστίες $E(1,0), E'(-1,0)$.

γ. Διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,2)$ και $Z(\sqrt{6},1)$, έχει κέντρο O(0,0) και οι εστίες της είναι στον άξονα x΄x.

Λύση

α. Αφού έχει εστίες $E(2,0)$ και $E'(-2,0)$ θα είναι $\gamma=2$.

Για το μεγάλο άξονα γνωρίζουμε ότι $2\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=4$

Ακόμα έχουμε $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2=16-4 \Leftrightarrow \beta^2=12 \Leftrightarrow \beta=2\sqrt{3}$.

Έτσι, η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

β. Είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ (1). Επιπλέον είναι $\gamma=1$ (2)

Από $(1),(2) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \alpha=\sqrt{5}$. Για το β έχουμε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2=5-1 \Leftrightarrow \beta=2$.

Επομένως η έλλειψη έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

γ. Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta$.

Οι συντεταγμένες των σημείων Δ και Ζ επαληθεύουν την εξίσωση της.

Επομένως: $$\left.\begin{array}{l}\frac{0}{\alpha^2}+\frac{4}{\beta^2}=1\\ \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\beta^2=4\\ \frac{6}{\alpha^2}+\frac{1}{4}=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\beta=2\\ \alpha=\sqrt{8}\end{array}$$

Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης σε σημείο της Α, προσδιορίζουμε απο τα δεδομένα τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Α.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης $C:9x^2+16y^2=144$ (1), που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: x+y+2002=0$.

Λύση

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση (1) της έλλειψης $9x^2+16y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Αν θεωρήσουμε $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της έλλειψης τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : $\frac{x\cdot x_1}{16}+\frac{y\cdot y_1}{9}=1 \qquad (\delta)$

Όμως $\delta // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{-9x_1}{16y_1}=-1 \Leftrightarrow x_1=\frac{16y_1}{9} \qquad (2)$

Το σημείο Μ ανήκει στην έλλειψη οπότε θα έχουμε: $9{x_1}^2+16{y_1}^2=144 \qquad (3)$

Από τις σχέσεις (2) και (3) υπολογίζουμε τις τιμές των x_1 και y_1:

$$\left\{\begin{array}{l}x_1=\frac{16y_1}{9}\\ 9{x_1}^2+16{y_1}^2=144\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1=\frac{16}{5}\\ y_1=\frac{9}{5}\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l}x_1=-\frac{16}{5}\\ y_1=-\frac{9}{5}\end{array}\right\}$$

Τα ζεύγη τιμών που βρήκαμε για τα x_1 και y_1 τα αντικαθιστούμε στην (1) και προκύπτουν οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων: $x+y-5=0$ και $x+y+5=0$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε την εκκεντρότητα και τις εστίες στις παρακάτω ελλείψεις:

α. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ **β.** $9x^2+25y^2=225$

Λύση

α. Από την εξίσωση της έλλειψης προκύπτει ότι $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{3}$.

Οπότε οι εστίες είναι $E(\gamma,0)=(\sqrt{3},0)$ και $E'(-\gamma,0)=(-\sqrt{3},0)$ και η εκκεντρότητά της

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

β. Μετασχηματίζουμε την εξίσωση της έλλειψης: $9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Είναι $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=4$. Οπότε οι εστίες είναι $E(4, 0)$ και $E'(-4, 0)$ και η εκκεντρότητα

$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4}{5}$

Άσκηση 2

Να βρείτε συναρτήσει του β, την εξίσωση της έλλειψης $C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ (1) που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση

Έχουμε: $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\alpha^2-\beta^2)=\alpha^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2-2\beta^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=2\beta^2$ (2)

Η εξίσωση (1) με τη βοήθεια της (2) γίνεται: $\frac{x^2}{2\beta^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, που είναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$. Αν θέσουμε $x=x_1$ και $y=\kappa y_1$ να αποδείξετε ότι το σημείο (x_1, y_1) ανήκει σε έλλειψη.

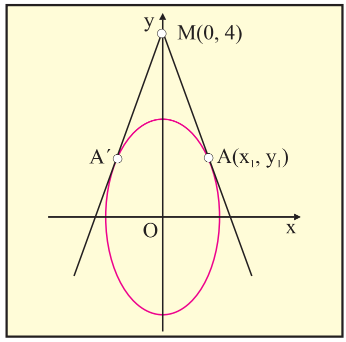
Λύση

Έχουμε $x^2+y^2=\rho^2 \Leftrightarrow {x_1}^2+\kappa^2{y_1}^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \dfrac{{x_1}^2}{\alpha^2}+\dfrac{{y_1}^2}{\left(\dfrac{\alpha}{\kappa}\right)^2}=1$.

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση έλλειψης.

Άσκηση 4

Να βρεθεί η οξεία γωνία των εφαπτομένων οι οποίες άγονται από το σημείο $M(0,4)$ προς την έλλειψη $3x^2+y^2=4$.



Λύση

Θα υπολογίσουμε τις εφαπτόμενες οι οποίες άγονται από το σημείο Μ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο $A(x_1,y_1)$ είναι $3x_1x+y_1y=4$. Αφού διέρχεται από το Μ(0, 4) είναι: $3\cdot 0x_1+4y_1=4 \Leftrightarrow y_1=1$ (1)

Επειδή το Α ανήκει στην έλλειψη ισχύει :

$$3{x_1}^2+{y_1}^2=4\overset{(1)}{\Leftrightarrow}3{x_1}^2+1=4 \Leftrightarrow 3{x_1}^2=3 \Leftrightarrow x_1=\pm 1.$$

Επομένως, τα σημεία επαφής είναι $A(1,1)$ και Α΄(-1, 1) και οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα Α και Α΄ είναι :

$$\varepsilon_1: 3x+y=4 \text{ και } \varepsilon_2: -3x+y=4, \text{ αντίστοιχα.}$$

Θα υπολογίσουμε τη γωνία των δύο αυτών ευθειών, των ε_1, ε_2.

Είναι $\lambda_1=-3$ και $\lambda_2=3$.

Θεωρούμε δύο διανύσματα παράλληλα στις ε_1 και ε_2 τα : $\vec{\delta_1}=(1,-3)$ και $\vec{\delta_2}=(1,3)$ με $\vec{\delta_1}//\varepsilon_1$ και $\vec{\delta_2}//\varepsilon_2$. Είναι $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\text{συν}\varphi=\dfrac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}=\dfrac{1\cdot 1-3\cdot 3}{\sqrt{1+(-3)^2}\cdot\sqrt{1+3^2}}=\dfrac{-8}{10}$.

Επειδή η γωνία φ έχει $\text{συν}\varphi=-\dfrac{8}{10}<0$, είναι αμβλεία ($\phi\simeq 144^0$). Άρα η ζητούμενη γωνία είναι η παραπληρωματική της φ δηλαδή $\simeq 36^0$.

Άσκηση 5

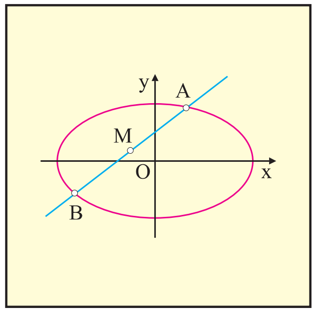
Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ και η ευθεία $y=x+1$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ της χορδής ΑΒ που ορίζεται από την ευθεία και την έλλειψη.

Λύση

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της έλλειψης και της ευθείας θα μας δώσει τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

Είναι:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{(x+1)^2}{4}=1 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+9x^2+18x+9=36 \\ y=x+1 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2+18x-27=0 \quad (1) \\ y=x+1 \end{cases}$$

Επειδή το ζητούμενο της άσκησης δεν είναι οι συντεταγμένες των Α και Β αλλά το ημιάθροισμα τους (οι συντεταγμένες του Μ), από τη δευτεροβάθμια εξίσωση (1), υπολογίζουμε από τον τύπο του Vieta, το άθροισμα των ριζών της (1).

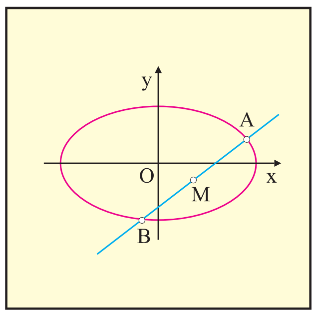
Έτσι $x_1+x_2=-\frac{18}{13}$, συνεπώς $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{9}{13}$. Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $y=x+1$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Δηλαδή $y_M=-\frac{9}{13}+1 \Leftrightarrow y_M=\frac{4}{13}$. Επομένως $M\left(-\frac{9}{13},\frac{4}{13}\right)$.

Άσκηση 6

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Να βρεθεί η γραμμή στην οποία κινούνται τα μέσα των χορδών της έλλειψης, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x-1$.

Λύση



Έστω $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ τα άκρα τυχαίας χορδής η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε). Επειδή ανήκουν στην έλλειψη οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλαδή ισχύουν :

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1 \\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1 \end{cases}$$

Αφαιρούμε τις παραπάνω κατα μέλη και έχουμε :

$$\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}+y_1^2-y_2^2=0 \Leftrightarrow \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\cdot 2\frac{y_1+y_2}{2}=0 \Leftrightarrow \text{ (διαιρούμε με } (x_1-x_2) \;\; x_1 \neq x_2)$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+2\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}=0$ (1). Όμως $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ και $\lambda=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ (αφού η χορδή ΑΒ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)). Οπότε η (1) γίνεται $\frac{1}{2}x_M+2\lambda y_M=0$.

Επομένως το μέσον Μ της ΑΒ, κινείται επάνω στην ευθεία $\frac{1}{2}x+2\lambda y=0 \Leftrightarrow x+4\lambda y=0$.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $C_2:\frac{x^2}{\alpha^2+k^2}+\frac{y^2}{\beta^2+k^2}=1$, α > β, έχουν τις ίδιες εστίες για κάθε τιμή του $k\in R$.

Λύση

Για την έλλειψη C_1 έχουμε $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$ και εστίες $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$.

Θέτουμε $A^2=\alpha^2+k^2$ και $B^2=\beta^2+k^2$ και 2Γ την εστιακή απόσταση της έλλειψης C_2.

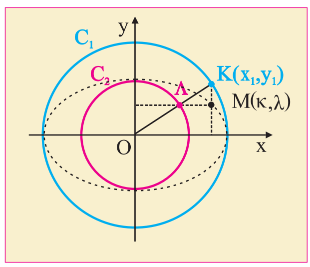
Είναι: $\Gamma^2=A^2-B^2=\alpha^2+k^2-\beta^2-k^2=\alpha^2-\beta^2=\gamma^2$ δηλαδή $\Gamma=\gamma$.

Οπότε η C_2 έχει τις ίδιες εστίες με τη C_1.

Άσκηση 8

Δίνονται οι κύκλοι $C_1:x^2+y^2=\alpha^2$ και $C_2:x^2+y^2=\beta^2$ με $\beta<\alpha$ και η μεταβλητή ευθεία ΟΛΚ (Ο η αρχή των αξόνων, Λ το σημείο τομής της ευθείας με τον κύκλο C_2 και Κ το σημείο τομής με τον C_1).Από το Λ φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα y΄y και από το Κ ευθεία κάθετη στον x΄x, οι οποίες τέμνονται στο Μ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.

Λύση



Έστω $\Lambda(x_1,\lambda)$ και $K(\kappa,y_1)$. Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (κ,λ). Επειδή τα σημεία Κ και Λ ανήκουν στους κύκλους, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τις εξισώσεις των κύκλων, δηλαδή $\begin{cases} x_1^{\,2}+\lambda^2=\beta^2 \\ \kappa^2+y_1^{\,2}=\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1^{\,2}=\beta^2-\lambda^2 \\ y_1^{\,2}=\alpha^2-\kappa^2 \end{matrix}$ (1).

Τα σημεία Ο, Λ, Κ είναι συνευθειακά, επομένως $\lambda_{O\Lambda}=\lambda_{OK}$ (όπου $\lambda_{O\Lambda}$ και λ_{OK} οι συντελεστές διεύθυνσης των ΟΛ και ΟΚ).

$$\lambda_{O\Lambda}=\lambda_{OK}\Leftrightarrow\frac{\lambda}{x_1}=\frac{y_1}{\kappa}.\ \text{Οπότε}\ \frac{\lambda^2}{x_1^{\,2}}=\frac{y_1^{\,2}}{\kappa^2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{\lambda^2}{\beta^2-\lambda^2}=\frac{\alpha^2-\kappa^2}{\kappa^2}\Leftrightarrow$$

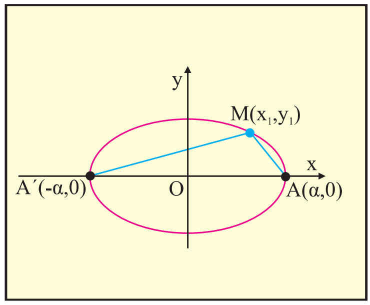
$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2-\beta^2\kappa^2-\alpha^2\lambda^2+\kappa^2\lambda^2=\kappa^2\lambda^2\Leftrightarrow\beta^2\kappa^2+\alpha^2\lambda^2=\alpha^2\beta^2\Leftrightarrow\frac{\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda^2}{\beta^2}=1$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(\kappa,\lambda)$ είναι η έλλειψη : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Άσκηση 9

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta$, μεγάλο άξονα Α΄Α και ένα σημείο της Μ (διαφορετικό από τις κορυφές). Να δείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των ευθειών ΜΑ και ΜΑ΄ είναι σταθερό, ανεξάρτητο της θέσης του σημείου Μ.

Λύση



Έστω $M(x_1,y_1)$ σημείο της έλλειψης. Οι συντελεστές διεύθυνσης των ΜΑ και ΜΑ΄ είναι:

$\lambda_{MA}=\frac{y_1}{x_1-\alpha}$ και $\lambda_{MA'}=\frac{y_1}{x_1+\alpha}$.

Επομένως $\lambda_{MA}\cdot\lambda_{MA'}=\frac{y_1}{x_1-\alpha}\cdot\frac{y_1}{x_1+\alpha}=\frac{y_1^2}{x_1^2-\alpha^2}$ (1).

Επειδή το Μ ανήκει στην έλλειψη, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της δηλαδή

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow \beta^2x_1^2+\alpha^2y_1^2=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow y_1^2=\frac{\alpha^2\beta^2-\beta^2x_1^2}{\alpha^2}\Leftrightarrow y_1^2=\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$\lambda_{MA}\cdot\lambda_{MA'}=\frac{\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2}}{x_1^2-\alpha^2}=\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2\left(x_1^2-\alpha^2\right)}=-\frac{\beta^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}{\alpha^2\left(\alpha^2-x_1^2\right)}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\text{σταθερό}.$$

Άσκηση 10

Από σημείο $A(x_0,y_0)$ εκτός της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ φέρνουμε δύο εφαπτόμενες προς την έλλειψη και έστω Β, Γ τα σημεία επαφής. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΒΓ είναι: $\frac{xx_0}{\alpha^2}+\frac{yy_0}{\beta^2}=1$ (1)

Λύση

Έστω $B(x_1,y_1)$ και $\Gamma(x_2,y_2)$. Η εφαπτομένη στο Β έχει εξίσωση $\varepsilon_1:\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

Επειδή διέρχεται από το $A(x_0, y_0)$, ισχύει $\frac{x_0x_1}{\alpha^2}+\frac{y_0y_1}{\beta^2}=1$ (2).

Η ισότητα (2) μας δίνει την πληροφορία ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από το Β (αφού οι συντεταγμένες του Β την ικανοποιούν).

Η εφαπτομένη στο Γ έχει εξίσωση $\varepsilon_2 : \frac{xx_2}{\alpha^2}+\frac{yy_2}{\beta^2}=1$. Επειδή διέρχεται απο το $A(x_0, y_0): \frac{x_0x_2}{\alpha^2}+\frac{y_0y_2}{\beta^2}=1$ (3). Η ισότητα (3) μας λεει ότι η (1) είναι εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από το Γ. Επειδή απο δυο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία η εξίσωση (1) παριστάνει την ευθεία ΒΓ.

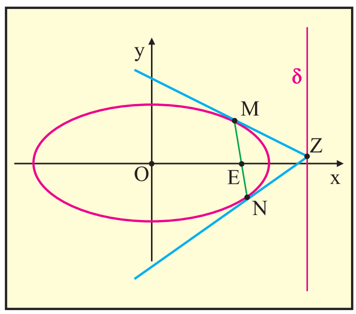
(Η ΒΓ λέγεται πολική ευθεία του σημείου Α ως προς την έλλειψη και το Α λέγεται πόλος).

Άσκηση 11

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \alpha>\beta$ και μια χορδή της ΜΝ η οποία διέρχεται από την εστία $E(\gamma,0)$.Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα της χορδής, τέμνονται σε σημείο της ευθείας $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$. *(Η ευθεία $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ λέγεται δευθετούσα της έλλειψης).*

Λύση

Έστω $Z(x_0, y_0)$ το σημείο τομής των δύο εφαπτόμενων. Από το σημείο Ζ λοιπόν, άγονται δύο εφαπτόμενες προς την έλλειψη. Η χορδή (πολική ευθεία) η οποία ενώνει τα σημεία επαφής έχει εξίσωση:



$$MN : \frac{x_0x}{\alpha^2}+\frac{y_0y}{\beta^2}=1 \qquad (1).$$

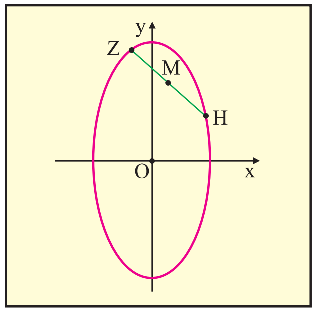
Επειδή η χορδή ΜΝ διέρχεται από την εστία $E(\gamma,0)$ η εξίσωση (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες της .

Επομένως $\frac{x_0\gamma}{\alpha^2}+\frac{y_0 0}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ και συνεπώς το σημείο Ζ βρίσκεται επάνω στην ευθεία με εξίσωση : $x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ και το εσωτερικό της σημείο $M(1,2)$. Να προσδιοριστεί η χορδή της έλλειψης η οποία έχει το Μ ως μέσο.

Λύση



Έστω $Z(x_1,y_1)$ και $H(x_2,y_2)$ τα άκρα της ζητούμενης χορδής. Είναι $x_1 \neq x_2$. (Αν ήταν $x_1 = x_2$ λόγω συμμετρίας το μέσο τους M θα ήταν σημείο του άξονα x΄x).
Αφού τα σημεία Z, H ανήκουν στην έλλειψη, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της.

Επομένως: $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{16}=1 \Leftrightarrow 16x_1^2+9y_1^2=144$ (1)

και $\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{16}=1 \Leftrightarrow 16x_2^2+9y_2^2=144$ (2)

Αφαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2): $16\left(x_1^2-x_2^2\right)+9\left(y_1^2-y_2^2\right)=0 \Leftrightarrow$

$$16(x_1-x_2)(x_1+x_2)+9(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0 \overset{\substack{\text{διαιρούμε}\\ \text{και τα δυο}\\ \text{μέλη με 2}}}{\Leftrightarrow}$$

$$16(x_1-x_2)\frac{x_1+x_2}{2}+9(y_1-y_2)\frac{y_1+y_2}{2}=0 \qquad (3)$$

Οι συντεταγμένες του μέσου M της ZH είναι: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Επομένως η (3) γίνεται: $16(x_1-x_2)x_M+9(y_1-y_2)y_M=0$.

Όμως M(1, 2), έτσι έχουμε $16(x_1-x_2)+18(y_1-y_2)=0 \Leftrightarrow 18(y_1-y_2)=-16(x_1-x_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{16}{18} \qquad (4).$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ZH είναι $\lambda_{ZH}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

Έτσι από τη σχέση (4) έχουμε $\lambda_{ZH}=-\frac{8}{9}$. Συνεπώς $ZH: y-2=-\frac{8}{9}(x-1)$

Άσκηση 13

Για το σημείο Λ του επιπέδου το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{O\Lambda}=\frac{\alpha(3-\kappa^2)}{3+\kappa^2}\vec{i}+\frac{\beta\cdot 2\sqrt{3}\kappa}{3+\kappa^2}\vec{j}$,

όπου α, β θετικοί και $\kappa \in R$ **. Να δείξετε, ότι καθώς το κ μεταβάλλεται το σημείο Λ κινείται σε έλλειψη.**

Λύση

Όπως γνωρίζουμε οι συντελεστές των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overline{O\Lambda}$.

Επειδή O είναι το σημείο αναφοράς (η αρχή των αξόνων), αυτοί οι συντελεστές είναι οι συντεταγμένες του σημείου Λ. Επομένως $Λ\left(\frac{α\left(3-κ^2\right)}{3+κ^2},\frac{β\cdot 2\sqrt{3}κ}{3+κ^2}\right)$

Έχουμε: $\left.\begin{aligned} x &= \frac{α\left(3-κ^2\right)}{3+κ^2} \\ y &= \frac{β\cdot 2\sqrt{3}κ}{3+κ^2}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{x}{α} &= \frac{3-κ^2}{3+κ^2} \\ \frac{y}{β} &= \frac{2\sqrt{3}κ}{3+κ^2}\end{aligned}$

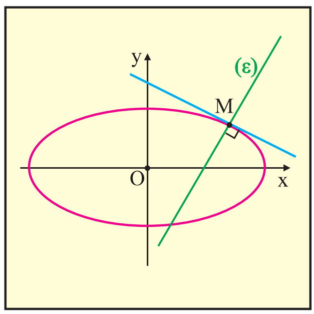
Υψώνουμε τις δύο σχέσεις στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατα μέλη:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{α^2} &= \frac{\left(3-κ^2\right)^2}{\left(3+κ^2\right)^2} \\ \frac{y^2}{β^2} &= \frac{\left(2\sqrt{3}κ\right)^2}{\left(3+κ^2\right)^2}\end{aligned}\right\} \quad \frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=\frac{\left(3-κ^2\right)^2}{\left(3+κ^2\right)^2}+\frac{12κ^2}{\left(3+κ^2\right)^2}=\frac{\left(3+κ^2\right)^2}{\left(3+κ^2\right)^2}=1$$

Οι συντεταγμένες του Λ ικανοποιούν την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$.
Επομένως το σημείο Λ κινείται επάνω σε αυτήν την έλλειψη.

Άσκηση 14

Το σημείο $M(αημθ,βσυνθ)$, $θ\in(0,2π)$, με $θ\neq\frac{π}{2},\frac{3π}{2},π$ ανήκει στην έλλειψη $C:\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$ με $α>β$.



α. Να δείξετε, ότι η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Μ έχει εξίσωση :

$$ε:(ασυνθ)x-(βημθ)y=\left(α^2-β^2\right)ημθ\cdotσυνθ$$

β. Αν η (ε) διέρχεται από το σημείο (β, 0) να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $ημθ=\frac{β}{α\cdot ε^2}$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης.

Λύση

α. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι

$$\frac{xx_1}{α^2}+\frac{yy_1}{β^2}=1\Leftrightarrow β^2x_1x+α^2y_1y=α^2β^2.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής της ευθείας είναι $\lambda = -\dfrac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$.

Αφού $M(\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta)$, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο Μ είναι

$$\lambda = \frac{-\alpha\beta^2\eta\mu\theta}{\alpha^2\beta\sigma\upsilon\nu\theta} = -\frac{\beta\eta\mu\theta}{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}, \ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \ \theta \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Επομένως η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημειο Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\eta\mu\theta}, \ \theta \neq 0, \ \theta \neq \pi \ \text{ και εξίσωση } \ y - \beta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\eta\mu\theta}(x - \alpha\cdot\eta\mu\theta)$$

$$\Leftrightarrow \beta\eta\mu\theta\cdot y - \beta^2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta\cdot x - \alpha^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)x - (\beta\eta\mu\theta)y = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

β. Οι συντεταγμένες του σημείου (β,0) επαληθεύουν την εξίσωση της (ε). Επομένως έχουμε:

$$(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)\beta - (\beta\eta\mu\beta)\cdot 0 = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \alpha\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \overset{\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha\beta = (\alpha^2 - \beta^2)\eta\mu\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \qquad (1)$$

Όμως ισχύουν οι σχέσεις: $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ και $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Οπότε η (1) γίνεται: $\eta\mu\theta = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2} = \dfrac{\alpha\beta}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\alpha^2} = \dfrac{\alpha\beta}{\varepsilon^2\alpha^2} = \dfrac{\beta}{\alpha\cdot\varepsilon^2}$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $16x^2 + 25y^2 = 400$ είναι εξίσωση έλλειψης και να βρεθούν τα μήκη των αξόνων της, οι εστίες της και η εκκεντρότητα.

(**Απ.:** 2α = 10 και 2β = 8 και γ = 3 και $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$)

2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C: 4x^2 + y^2 = 20$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(0,10)$.

(**Απ.:** $y = 4x + 10$ ή $y = -4x + 10$)

3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων, κορυφή το σημείο $M(17,0)$ και μία εστία το σημείο $E(8,0)$.

(**Απ.:** $\left(\dfrac{x^2}{17^2}+\dfrac{y^2}{15^2}=1\right)$)

4. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $y=4x+9$ ως προς την έλλειψη $2x^2+y^2=9$.

(**Απ.:** Εφάπτεται στο σημείο $M(-2,1)$))

5. Δύο ελλείψεις έχουν εξισώσεις $5x^2+3y^2=64$ και $3x^2+5y^2=64$. Να δειχθεί ότι τα κοινά σημεία τους ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=16$.

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C: 4x^2+y^2=20$ οι οποίες:

α. Είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 4x+y+4=0$

β. Είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon: x+4y+12=0$.

(**Απ.: α.** $y=-4x+10$ ή $y=-4x-10$, **β.** $y=4x+10$ ή $y=4x-10$))

7. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο Ε΄ΒΕΒ΄ είναι ρόμβος (Ε΄ και Ε οι εστίες, Β και Β΄ τα άκρα του μικρού άξονα).

β. Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

(**Απ.: β.** $2\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$))

8. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων :

$$C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ και } C_2: \frac{x^2}{\alpha^4}+\frac{y^2}{\beta^4}=1 \text{, με } \alpha>\beta.$$

(**Απ.:** ($\varepsilon_2>\varepsilon_1$))

9. Αν είναι η εφαπτομένη της έλλειψης $C: \dfrac{x^2}{\beta^2}+\dfrac{y^2}{\alpha^2}=1$ στο $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\dfrac{y_1}{x_1}$.

10. Δίνεται η έλλειψη $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $C': \dfrac{\kappa^2x^2}{\alpha^2}+\dfrac{\kappa^2y^2}{\beta^2}=1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C.

11. Δίνεται η έλλειψη $x^2+2y^2=2$ και το σημείο $A(2,3)$. Φέρουμε από το A τις εφαπτόμενες της έλλειψης και έστω B, Γ τα σημεία επαφής. Να υπολογίσετε την απόσταση του A από τη χορδή ΒΓ.

$\left(\textbf{Απ.:}\sqrt{10}\right)$

12. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ και τα σημεία της A, B τέτοια ώστε η γωνία $A\hat{O}B=90^o$.

(Ο είναι η αρχή των αξόνων). Αν οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα A, B τέμνονται στο σημείο Μ, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ όταν η γωνία ΑΟΒ στρέφεται γύρω από το Ο.

$\left(\textbf{Απ.:}\dfrac{x^2}{2\alpha^2}+\dfrac{y^2}{2\beta^2}=1\right)$

13. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{19}+\dfrac{y^2}{18}=1$. Να βρεθεί ο κύκλος με διάμετρο το τμήμα Ε΄Ε, όπου Ε , Ε΄ οι εστίες της έλλειψης.

(**Απ.:** $x^2+y^2=1$)

14. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή, εστιακή απόσταση 4 και εκκεντρότητα $1/2$.

$\left(\textbf{Απ.:}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1 \text{ ή } \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1\right)$

15. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $y=x+2$ ως προς την έλλειψη $x^2+4y^2=16$.

(**Απ.:** Τέμνει την έλλειψη)

16. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινείται σημείο Μ του επιπέδου, για το οποίο ισχύει $(MA)+(MB)=4$, με $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

$\left(\textbf{Απ.:}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\right)$

17. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ με $x=4\text{συν}\theta$, $y=3\text{ημ}\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$ ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

$\left(\textbf{Απ.:}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\right)$

18. Δίνεται έλλειψη $(c): 4x^2 + 7y^2 = 36$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $x - 2y + 7 = 0$ εφάπτεται της (c).

(**Απ.:** $\left(-\dfrac{9}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ είναι το σημείο επαφής)

19. Η εξίσωση μιας χορδής της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ είναι $x + 6y = 40$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M της χορδής.

(**Απ.:** Είναι $M(4,6)$)

20. Η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 16$ τέμνει τον άξονα y΄y στα σημεία B, B΄ και τον αρνητικό ημιάξονα Ox΄ στο A΄. Δείξτε ότι ο κύκλος που διέρχεται απο τα σημεία B, B΄ και A΄ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$.

21. Να βρεθεί η χορδή της έλλειψης $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ που έχει μέσο το σημείο $M(2,1)$.

(**Απ.:** $8x + 9y - 25 = 0$)

22. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 16$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο $(-4,4)$.

$\left(\textbf{Απ.:}\ y = \dfrac{1}{2}x + 18,\ x = -4\right)$

23. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 4$.

(**Απ.:** $y = x + \sqrt{20}$, $y = x - \sqrt{20}$)

24. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 16$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x + y + 5 = 0$.

(**Απ.:** $y = x + \sqrt{20}$, $y = x - \sqrt{20}$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η έλλειψη $\beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2$, $\alpha>\beta$ με εστίες Ε,Ε΄. Η κάθετη στο σημείο Ρ της έλλειψης τέμνει το μικρό άξονα στο Α. Δείξτε ότι το τετράγωνο της απόστασης του Α από μια από τις εστίες ισούται με: $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}(\text{ΕΡ})(\text{Ε΄Ρ})$.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι $(\text{Ε΄Ρ})=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}(\text{ΕΡ})(\text{Ε΄Ρ})$. Υποθέστε ότι $\text{Ρ}(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi,\beta\eta\mu\varphi)$ και υπολογίστε τις αποστάσεις Ε΄Ρ και ΕΡ. Είναι $(\text{Ε΄Ρ})=|\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi+\alpha|$ και $(\text{ΕΡ})=|\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi-\alpha|$)