Φυσικη Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Μηχανική Στερεού Σώματος I

1. Να δώσετε τους πιο κάτω ορισμούς,

i. Ροπή δύναμης ως προς άξονα.

ii. Ροπή δύναμης ως προς σημείο.

Λύση:

i. Το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την κάθετη απόσταση d της δύναμης από τον άξονα περιστροφής (μοχλοβραχίονας):

$$|\vec{M}| = d \cdot |\vec{F}|$$

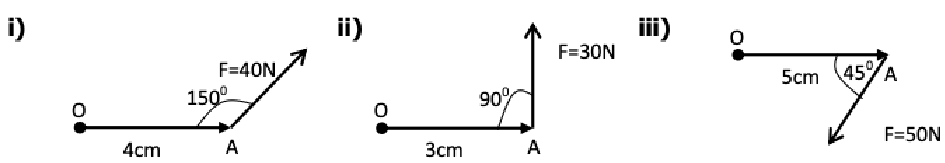
Η ροπή έχει τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Μονάδα ροπής είναι το 1 N·m.

ii. Το διανυσματικό μέγεθος που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του σημείου εφαρμογής της δύναμης και το διάνυσμα της δύναμης $\vec{F}$, με μέτρο

$$|\vec{M}_O| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{ημ}\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των $\vec{r}$ και $\vec{F}$. Η διεύθυνση και η φορά της ροπής καθορίζονται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, ενώ η μονάδα της είναι επίσης το 1 N·m.

2. Να υπολογίσετε τη αλγεβρική τιμή της ροπής ως προς το σημείο O, στα πιο κάτω σχήματα.



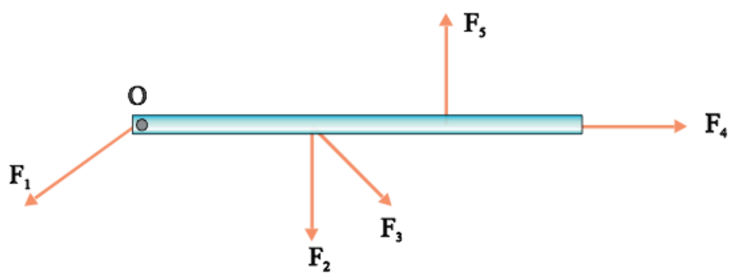
Λύση:

i. $M_F = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{ημ}30^0 = 40\,N \cdot 4 \cdot 10^{-2}\,m \cdot 0{,}5 = 0{,}8\,N \cdot m$

ii. $M_F = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{ημ}90^0 = 30\,N \cdot 3 \cdot 10^{-2}\,m \cdot 1 = 0{,}9\,N \cdot m$

iii. $M_F = -|\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \text{ημ}135^0 = -50\,N \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,m \cdot 0{,}707 = -1{,}77\,N \cdot m$

3. Στη ράβδο του σχήματος ασκούνται πέντε ομοεπίπεδες δυνάμεις του ίδιου μέτρου. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο των δυνάμεων. Να κατατάξετε τις δυνάμεις κατά τη σειρά με την οποία το μέτρο της ροπής τους ως προς τον άξονα αυτόν αυξάνεται.

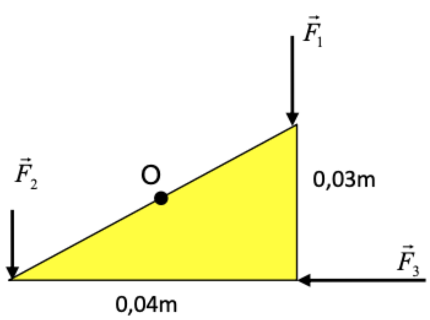


Λύση:

$$|\vec{M}_5| > |\vec{M}_2| > |\vec{M}_3| > |\vec{M}_4| = |\vec{M}_1| = 0$$

4. Μια ορθογώνια τριγωνική πλάκα με πλευρές 0,03 m και 0,04 m περιστρέφεται γύρω από άξονα O που διέρχεται από το μέσο της υποτείνουσας της και είναι κάθετος στην πλάκα. Να υπολογιστεί η συνολική ροπή ως προς το σημείο O, που οφείλεται στις τρεις δυνάμεις οι οποίες έχουν μέτρα:

$$|\vec{F}_1| = 24\,N, \quad |\vec{F}_2| = 16\,N, \quad \text{και} \quad |\vec{F}_3| = 18\,N.$$



Λύση:

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} + \vec{M}_{F_3} \Rightarrow \sum M = -|\vec{F}_1| d_{F_1} + |\vec{F}_2| d_{F_2} - |\vec{F}_3| d_{F_3}$$

$$\Rightarrow \sum M = -24\,N \cdot 0{,}02\,m + 16\,N \cdot 0{,}02\,m - 18\,N \cdot 0{,}015\,m$$

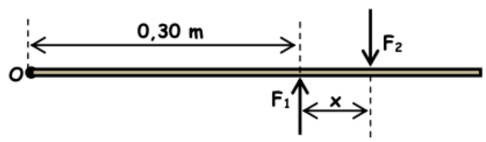
$$\Rightarrow \sum M = -0{,}43\,N \cdot m$$

5. Η ράβδος στο σχήμα έχει αμελητέο βάρος, μπορεί να περιστρέφεται ως προς το άκρο O, και δέχεται την επίδραση δύο δυνάμεων με ίσα μέτρα, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 8\,N$, κάθετες στη διεύθυνση της ράβδου. Δίνεται ότι το μέτρο της συνισταμένης ροπής των δυνάμεων αυτών, ως προς το άκρο O της ράβδου, είναι 0,96 N·m. Η δύναμη μέτρου $|\vec{F}_1|$ ασκείται σε απόσταση 0,30 m από το σημείο O.

i. Να εξηγήσετε κατά πόσο οι δύο δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων και να προσδιορίσετε τη φορά περιστροφής της ράβδου.

ii. Από ποιους παράγοντες εξαρτάται η ροπή του ζεύγους;

iii. Να υπολογίσετε την απόσταση x μεταξύ των δύο δυνάμεων.



Λύση:

i. Αποτελούν ζεύγος δυνάμεων αφού είναι αντίθετες και ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία πάνω στο σώμα. Η ράβδος περιστρέφεται δεξιόστροφα, αφού ο μοχλοβραχίονας της $\vec{F}_2$ είναι μεγαλύτερος.

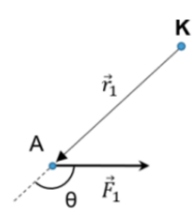
ii. Εξαρτάται από το μέτρο των δυνάμεων και από την μεταξύ τους απόσταση.

iii.

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} \;\Rightarrow\; \sum M = |\vec{F}_1| d_{F_1} - |\vec{F}_2| d_{F_2} \;\Rightarrow\; -0{,}96\,\mathrm{N\cdot m} = -8\,N\cdot 0{,}30\,m + 8\,N\cdot(0{,}30 - x)$$

$$\Rightarrow\; -0{,}96 = -2{,}4 + 2{,}4 - 8x \;\Rightarrow\; -0{,}96 = -8x \;\Rightarrow\; x = \frac{0{,}96}{8} = 0{,}12\,\mathrm{m}$$

6. Στο σημείο A, ασκείται δύναμη μέτρου $|\vec{F}_1| = 5{,}0\,N$ υπό γωνία $\theta = 150^0$. Αν το μέτρο του διανύσματος θέσης είναι $|\vec{r}_1| = 4{,}0\,\mathrm{cm}$, να υπολογίσετε την ροπής της $\vec{F}_1$ ως προς το K.

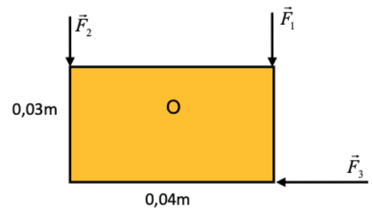


Λύση:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{ημ}\theta = 5{,}0\,N \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2}\,m \cdot \text{ημ}150^0 = 0{,}1\,N \cdot m$$

7. Μια ορθογώνια πλάκα με πλευρές 0,03 m και 0,04 m περιστρέφεται γύρω από άξονα O που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στην πλάκα, υπό την επίδραση τριών δυνάμεων που έχουν μέτρο:

$$|\vec{F}_1| = 24\,N, \quad |\vec{F}_2| = 24\,N, \quad \text{και} \quad |\vec{F}_3| = 18\,N.$$

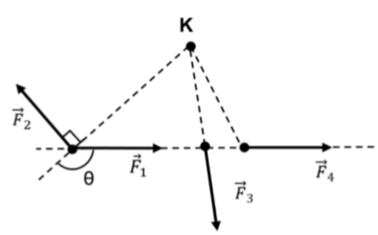


Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή ως προς το σημείο O που οφείλεται στις τρεις δυνάμεις.

Λύση:

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} + \vec{M}_{F_3} \Rightarrow \sum M = -|\vec{F}_1| \cdot d_{F_1} + |\vec{F}_2| \cdot d_{F_2} - |\vec{F}_3| \cdot d_{F_3}$$
$$\Rightarrow \sum M = -24\,N \cdot 0{,}02\,m + 24\,N \cdot 0{,}02\,m - 18\,N \cdot 0{,}015\,m$$
$$\Rightarrow \sum M = -0{,}27\,N \cdot m \quad (\otimes)$$

8. Δίνονται τέσσερις δυνάμεις ίσου μέτρου $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$. Οι ροπές των δυνάμεων ως προς το σημείο K είναι $\vec{M}_{\vec{F}_1}, \vec{M}_{\vec{F}_2}, \vec{M}_{\vec{F}_3}, \vec{M}_{\vec{F}_4}$.



Να συγκρίνετε τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων:

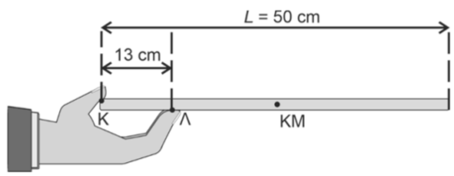
i. $|\vec{M}_{\vec{F}_1}|$ και $|\vec{M}_{\vec{F}_2}|$ ii. $|\vec{M}_{\vec{F}_1}|$ και $|\vec{M}_{\vec{F}_3}|$ iii. $|\vec{M}_{\vec{F}_1}|$ και $|\vec{M}_{\vec{F}_4}|$

Λύση:

i. $|\vec{M}_{\vec{F}_1}| < |\vec{M}_{\vec{F}_2}|$ ii. $|\vec{M}_{\vec{F}_1}| > |\vec{M}_{\vec{F}_3}|$ iii. $|\vec{M}_{\vec{F}_1}| = |\vec{M}_{\vec{F}_4}|$

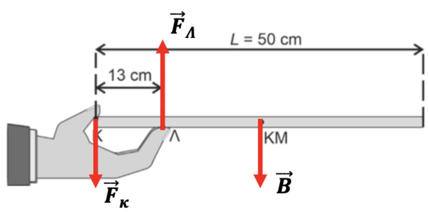
9. Ένας σερβιτόρος κρατά ένα ομογενή δίσκο ορθογώνιου σχήματος και μάζας $m = 0{,}2\,\text{kg}$, ο οποίος ισορροπεί οριζόντια όπως φαίνεται στο σχήμα. Με τον αντίχειρά του ασκεί δύναμη $\vec{F}$ κάθετη στο επίπεδο του δίσκου στο άκρο K του δίσκου, ενώ τα άλλα 4 δάχτυλα ασκούν στο σημείο A του δίσκου μια επίσης κάθετη στο επίπεδο του δίσκου δύναμη $\vec{N}$. Το κέντρο μάζας (Κ.Μ.) του δίσκου είναι σημειωμένο στο σχήμα.

i. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο και να τις υπολογίσετε.



ii. Ο σερβιτόρος τοποθετεί ένα ποτήρι πάνω στο δίσκο. Να εξηγήσετε σε ποιο σημείο του δίσκου πρέπει να τοποθετηθεί το ποτήρι έτσι ώστε η δύναμη $\vec{F}$ να μην μεταβληθεί.

Λύση:



i. Αφού ο δίσκος δεν περιστρέφεται, η συνισταμένη των ροπών είναι μηδέν για οποιοδήποτε σημείο του.

$$\Rightarrow \sum \vec{M}_A = \vec{0} \;\Rightarrow\; |\vec{F}_A| \cdot (KA) = |\vec{B}| \cdot \frac{L}{2} \;\Rightarrow\; |\vec{F}_A| = \frac{|\vec{B}| \cdot \frac{L}{2}}{KA}$$

$$|\vec{F}_A| = \frac{0{,}2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}25\,\text{m}}{0{,}13\,\text{m}} = 3{,}77\,N \;\Rightarrow\; |\vec{F}_A| \approx 3{,}8\,N$$

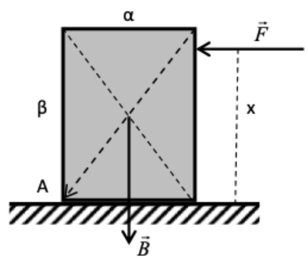
Ο δίσκος, αφού δεν μεταφέρεται το κέντρο μάζας του, η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι επίσης μηδέν:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; |\vec{F}_K| + |\vec{B}| = |\vec{F}_A| \;\Rightarrow\; |\vec{F}_K| = |\vec{F}_A| - |\vec{B}|$$

$$|\vec{F}_K| = 3{,}77\,N - 0{,}2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1{,}81\,N \;\Rightarrow\; |\vec{F}_K| = 1{,}8\,N$$

ii. Θα πρέπει να τοποθετηθεί το ποτήρι στο σημείο A, ώστε να μην προκαλεί επιπλέον ροπή ως προς το σημείο K. Έτσι, δεν θα χρειάζεται να μεταβληθεί η δύναμη $\vec{F}$ για να διατηρηθεί η ισορροπία.

10. Ένα σώμα μάζας m, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ισορροπεί στο μη λείο οριζόντιο επίπεδο του σχήματος. Να βρεθεί η σχέση που δίνει τη μέγιστη δύναμη που πρέπει να ασκήσω στο σώμα, όταν αυτή ασκείται σε απόσταση x από το επίπεδο, ώστε το σώμα να μην ανατρέπεται.



Λύση:

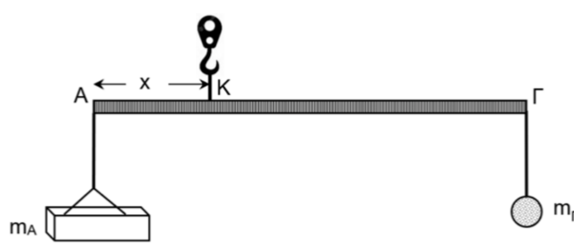
Για οριακή ισορροπία ως προς το άκρο στήριξης A (να μη γίνει ανατροπή) πρέπει το μέτρο της ροπής της εφαρμοζόμενης δύναμης να μην υπερβαίνει τη ροπή του βάρους:

$$|\vec{M}_F| \le |\vec{M}_B| \;\Rightarrow\; |\vec{F}| \cdot x \le |\vec{B}| \cdot \frac{a}{2} \;\Rightarrow\; |\vec{F}| \le \frac{mg\,a}{2x}.$$

Άρα η μέγιστη επιτρεπτή δύναμη είναι

$$|\vec{F}_{\max}| = \frac{mg\,a}{2x}.$$

11. Το καντάρι ζυγίσματος αποτελείται από μία ομογενή ράβδο ΑΓ αναρτημένη σε αβαρές σχοινί στο σημείο Κ. Στα άκρα της ράβδου είναι αναρτημένα δύο σώματα με μάζες $m_A = 5,0$ kg και $m_\Gamma = 2,0$ kg μέσω αβαρών σχοινιών. Η ράβδος και τα σώματα βρίσκονται σε στατική ισορροπία. Η ράβδος ΑΓ έχει μάζα $m_\rho = 3,0$ kg και μήκος $L_{A\Gamma} = 1,0$ m.



i. Να γράψετε τις δύο εξισώσεις Στατικής Ισορροπίας Στερεού Σώματος.

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση x του σημείου Κ από το άκρο Α.

iii. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το σχοινί στο σημείο Κ της ράβδου.

Λύση:

i.

$$\sum \vec{F}_{\text{εξωτερικών}} = \vec{0}, \quad \sum \vec{M}_{\text{εξωτερικών}} = \vec{0} \quad \text{ως προς κάθε σημείο του χώρου}$$

ii. Το σύστημα ράβδου–σωμάτων βρίσκεται σε στατική ισορροπία.

$$\sum \vec{M}_{\text{εξωτερικών}} = 0, \quad \text{Παίρνουμε ροπές ως προς το σημείο Κ.}$$

$$\Rightarrow \; m_A g x = m_\rho g \left(\frac{L_{A\Gamma}}{2} - x \right) + m_\Gamma g (L_{A\Gamma} - x)$$

$$\Rightarrow (m_A + m_\Gamma + m_\rho) x = m_\rho \frac{L_{A\Gamma}}{2} + m_\Gamma L_{A\Gamma}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(m_\rho + 2m_\Gamma) L_{A\Gamma}}{2(m_A + m_\Gamma + m_\rho)} = \frac{[(3{,}0 \text{ kg}) + 2(2{,}0 \text{ kg})](1{,}0 \text{ m})}{2[(5{,}0 \text{ kg}) + (2{,}0 \text{ kg}) + (3{,}0 \text{ kg})]} = 0{,}35 \text{ m}$$

iii.

$$\sum \vec{F}_{\text{εξωτερικών}} = 0 \Rightarrow |\vec{F}| = m_A g + m_\rho g + m_\Gamma g \Rightarrow |\vec{F}| = 98 \text{ N}$$

12. Να χαρακτηριστείτε τις ακόλουθες προτάσεις ως Ορθές ή Λανθασμένες.

i. Ένα σώμα που εκτελεί πλάγια βολή και όλα τα σημεία του κινούνται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, εκτελεί μεταφορική κίνηση.

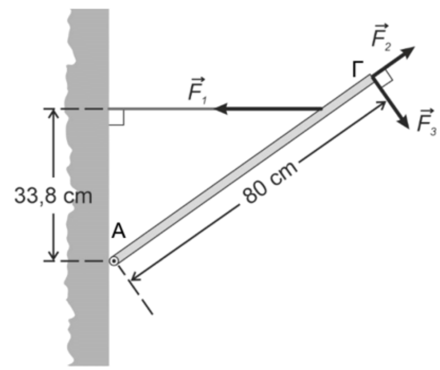
ii. Η ροπή μιας δύναμης είναι ίδια ως προς κάθε σημείο του χώρου.

iii. Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, όλα τα σημεία του κινούνται με την ίδια γραμμική ταχύτητα.

iv. Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι σταθερή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

Λύση: i. Ορθή, ii. Λανθασμένη, iii. Λανθασμένη, iv. Ορθή

13. Η ράβδος ΑΓ του σχήματος που ακολουθεί μπορεί να περιστρέφεται στο επίπεδο της σελίδας, γύρω από άρθρωση στο σημείο Α. Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ με μέτρο $|\vec{F}_1| = 25$ N, $|\vec{F}_2| = 10$ N και $|\vec{F}_3| = 20$ N. Η ράβδος έχει μήκος 80 cm.



i. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της ροπής της καθεμιάς από τις τρεις δυνάμεις, οι οποίες είναι σημειωμένες στη ράβδο, ως προς το σημείο Α.

ii. Να αναφέρετε δύο τρόπους με τους οποίους μπορούμε να αυξήσουμε το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}_1$ ως προς το σημείο Α, χωρίς να μεταβάλλουμε το μέτρο της δύναμης.

Λύση:

i.

$$M_{F_1} = +|\vec{F}_1|d = +(25 \text{ N}) \times (0{,}338 \text{ m}) = 8{,}45 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{F_2} = +|\vec{F}_2|\eta\mu\theta_2 = +(10 \text{ N}) \times (0{,}80 \text{ m}) \times (\eta\mu 0^\circ) = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{F_3} = -|\vec{F}_3|\eta\mu\theta_3 = -(20 \text{ N}) \times (0{,}80 \text{ m}) \times (\eta\mu 90^\circ) = -16 \text{ N}\cdot\text{m}$$

ii.

- Να αυξήσουμε την απόσταση του σημείου εφαρμογής της από τον άξονα περιστροφής ή να μετακινήσουμε το σημείο εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}_1$ προς το άκρο Γ της ράβδου.
- Να μειώσουμε τη γωνία που σχηματίζει η δύναμη $\vec{F}_1$ με το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της όταν τα δύο διανύσματα σχεδιαστούν με κοινή αρχή, μέχρι που η γωνία να μειωθεί στις 90°.

14. Μια μη ομογενής ράβδος μήκους $L = 120$ cm είναι αναρτημένη σε δύο δυναμόμετρα στα άκρα της, στις θέσεις O και A, και ισορροπεί σε οριζόντια διεύθυνση όπως στο σχήμα. Η ένδειξη του δυναμόμετρου Δ1 στη θέση O είναι 5 N και του δυναμόμετρου Δ2 στη θέση A είναι 19 N.

i. Να υπολογίσετε τη μάζα της ράβδου.

ii. Να υπολογίσετε τη θέση του κέντρου μάζας της ράβδου ως προς το σημείο O.

iii. Να υπολογίσετε τις *νέες* ενδείξεις των δύο δυναμομέτρων όταν μετακινηθεί το δυναμόμετρο Δ1 κατά 5 cm προς το A.

iv. Να εξηγήσετε σε ποια απόσταση από το άκρο O πρέπει να αναρτήσουμε το δυναμόμετρο Δ1 έτσι ώστε η ένδειξη του δυναμόμετρου Δ2 να είναι μηδέν.

Λύση:

i. Από $\sum \vec{F} = 0$ (κατακόρυφα):

$$mg = |\vec{T}_1| + |\vec{T}_2| \;\Rightarrow\; m = \frac{|\vec{T}_1| + |\vec{T}_2|}{g} = \frac{5\text{ N} + 19\text{ N}}{9{,}81\text{ m/s}^2} = 2{,}45\text{ kg}.$$

ii. Έστω x η απόσταση του KM από το O. Από $\sum M_{KM} = 0$ (ή ροπές ως προς O):

$$|\vec{T}_1|\,x = |\vec{T}_2|(L - x) \;\Rightarrow\; x = \frac{|\vec{T}_2|}{|\vec{T}_1| + |\vec{T}_2|}\,L = \frac{19}{5+19}\cdot 120\text{ cm} = 95\text{ cm}.$$

iii. Λαμβάνοντας ροπές ως προς το KM:

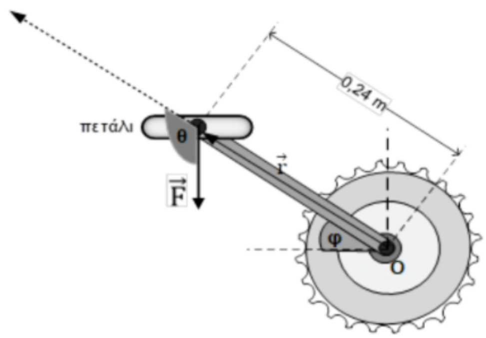
$$\sum M_{KM} = 0 \Rightarrow |\vec{T}_1|(90\text{ cm}) = |\vec{T}_2|(25\text{ cm}) \Rightarrow |\vec{T}_1| = \frac{5}{18}\,|\vec{T}_2|.$$

Από $\sum \vec{F} = 0$:

$$|\vec{T}_1| + |\vec{T}_2| = mg = 24\text{ N} \implies |\vec{T}_2| = 18{,}8\text{ N}, \qquad |\vec{T}_1| = 5{,}2\text{ N}.$$

iv. Αν αναρτήσουμε το Δ1 στο ΚΜ της ράβδου θα πρέπει η συνισταμένη ροπή ως προς το ΚΜ να είναι μηδέν. Εφόσον η ροπή της δύναμης από το Δ1 είναι μηδέν (διέρχεται από το σημείο) τότε και η ροπή της δύναμης από το Δ2 πρέπει να είναι μηδέν. Αφού ο μοχλοβραχίονας είναι μη μηδενικός τότε η δύναμη πρέπει να είναι μηδέν.

15. Στην πιο κάτω εικόνα παρουσιάζεται ένα πετάλι ενός ποδηλάτου. Τη στιγμή που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30°$ με τον οριζόντιο άξονα, ασκείται πάνω του η κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 240,0 N.



i. Να υπολογίσετε το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς τον άξονα περιστροφής O.

ii. Να αναφέρετε αν η φορά της ροπής της $\vec{F}$.

iii. Να εξηγήσετε για ποια τιμή της γωνίας φ η ροπή της $\vec{F}$, ως προς τον άξονα O, γίνεται κατά μέτρο μέγιστη.

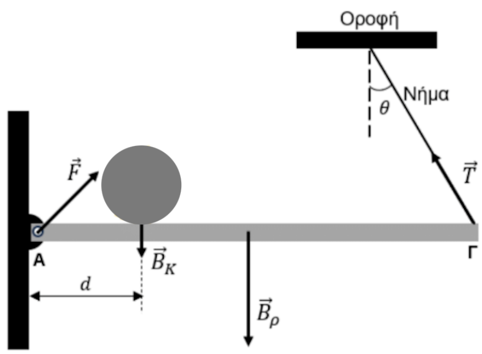
Λύση:

i.
$$|\vec{M}| = |\vec{F}|\,|\vec{r}|\,\text{ημ}\theta = (240{,}0\ \text{N})(0{,}24\ \text{m})\,\text{ημ}120° = 49{,}9\ \text{N·m}.$$

ii. Η φορά είναι προς τον αναγνώστη $\odot$.

iii. Για $\varphi = 0°$ ή $\varphi = 180°$, επειδή τότε η $\vec{F}$ είναι κάθετη στο $\vec{r}$ (ο μοχλοβραχίονας είναι μέγιστος) και η ροπή μεγιστοποιείται.

16. Στην εικόνα, απεικονίζεται μια ομογενής ράβδος $ΑΓ$ μήκους $L = 1{,}00$ m και μάζας $m_\rho = 4{,}00$ kg, η οποία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A και είναι κάθετος σε αυτή. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος που δένεται σε οροφή και σχηματίζει γωνία $\theta = 30°$ με την κατακόρυφη διεύθυνση. Μία μπάλα μάζας $m_K = 1{,}00$ kg μπορεί να μετακινείται πάνω στη ράβδο.



i. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος, αν η μπάλα τοποθετηθεί σε απόσταση $d = 0{,}40$ m από το άκρο A της ράβδου.

ii. Αν η μέγιστη τάση του νήματος έχει μέτρο $|\vec{T}_{μεγ}| = 35{,}0$ N, να διερευνηθεί αν υπάρχει κάποια θέση πάνω στη ράβδο που αν τοποθετηθεί η μπάλα το σχοινί θα κοπεί.

Λύση:

i. Ροπές ως προς A (θετική η φορά της τάσης):

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_{\vec{T}} + M_{\vec{B}_K} + M_{\vec{B}_\rho} = 0$$

$$|\vec{T}|\,\text{συν}(\theta)\,L - m_K g\,d - m_\rho g\,\frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{T}| = \frac{m_K g\,d + m_\rho g\,\dfrac{L}{2}}{\text{συν}(\theta)\,L}.$$

$$|\vec{T}| = \frac{(1{,}00\text{ kg})(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0{,}40\text{ m}) + (4{,}00\text{ kg})(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0{,}50\text{ m})}{\sigma\upsilon\nu(30°)(1{,}00\text{ m})} = 27{,}2\text{ N}.$$

ii. Θέτουμε $|\vec{T}| = |\vec{T}_{μεγ}| = 35{,}0$ N και λύνουμε ως προς την απόσταση $d_{μεγ}$:

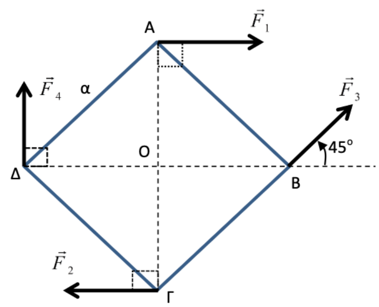
$$|\vec{T}_{μεγ}|\,\text{συν}(\theta)\,L - m_K g\,d_{μεγ} - m_\rho g\,\frac{L}{2} = 0 \;\Rightarrow\; d_{μεγ} = \frac{|\vec{T}_{μεγ}|\,\text{συν}(\theta)\,L - m_\rho g\,\dfrac{L}{2}}{m_K g}.$$

$$d_{μεγ} = \frac{(35{,}0\text{ N})\sigma\upsilon\nu(30°)(1{,}00\text{ m}) - (4{,}00\text{ kg})(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0{,}50\text{ m})}{(1{,}00\text{ kg})(9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})} = 1{,}09\text{ m}.$$

Εφόσον $d_{μεγ} > L$, δεν υπάρχει θέση πάνω στη ράβδο στην οποία, αν τοποθετηθεί η μπάλα, το σχοινί θα κοπεί.

17. Οι τέσσερις ομοεπίπεδες δυνάμεις ασκούνται στις κορυφές A, B, Γ, Δ της διπλανής τετράγωνης πλάκας πλευράς $a = 10$ cm, το οποίο μπορεί να περιστραφεί γύρω από ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O. Τα μέτρα των τριών δυνάμεων είναι:

$$|\vec{F}_1| = 20 \text{ N}, \quad |\vec{F}_2| = 20 \text{ N}, \quad |\vec{F}_3| = 30 \text{ N}.$$



i. Ποιες δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων; Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας και να υπολογίσετε τη ροπή του ζεύγους.

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_4$ ώστε η τετράγωνη πλάκα να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Λύση:

i. Οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων, αφού είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς και ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία του σώματος.

$$M = -|\vec{F}|\, d = -20 \text{ N} \times 0{,}14 \text{ m} \Rightarrow M = -2{,}8 \text{ N·m}.$$

Η απόσταση d είναι η διαγώνιος του τετραγώνου:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2} = 0{,}10\sqrt{2} = 0{,}14 \text{ m}.$$

ii. Για να περιστρέφεται το σώμα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, πρέπει η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα που διέρχεται από το O να είναι μηδενική.

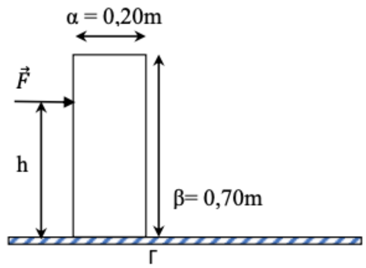
$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} + \vec{M}_{F_3} + \vec{M}_{F_4} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -|\vec{F}_1|\frac{d}{2} - |\vec{F}_2|\frac{d}{2} - |\vec{F}_4|\frac{d}{2} + |\vec{F}_3|\frac{d}{2} = 0$$

$$|\vec{F}_4| = -|\vec{F}_1| - |\vec{F}_2| + |\vec{F}_{3y}|\text{ημ}45^\circ \Rightarrow |\vec{F}_4| = -20 - 20 + 30(0{,}707) = -40 + 21{,}21 = -18{,}79 \text{ N}.$$

Άτοπο, διότι το μέτρο είναι πάντα θετικό. Επομένως, η $\vec{F}_4$ έχει μέτρο 18,79 N και φορά αντίθετη από ό,τι υποθέσαμε.

18. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται σώμα μάζας $m = 50{,}0$ kg, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, το οποίο ισορροπεί σε τραχύ οριζόντιο έδαφος. Το μήκος της βάσης είναι $\alpha = 0{,}20$ m και το ύψος του $\beta = 0{,}70$ m.



i. Να εξηγήσετε γιατί το σώμα δεν περιστρέφεται.

ii. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της h που πρέπει να ασκηθεί δύναμη μέτρου $|\vec{F}| = 100$ N, όπως φαίνεται στο σχήμα, ώστε το σώμα να μην ανατρέπεται.

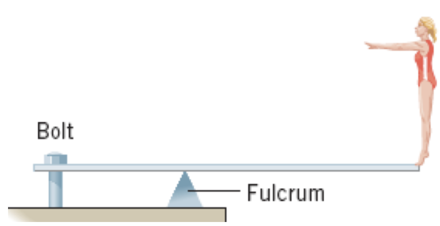
Λύση:

i. Το σώμα δεν περιστρέφεται γιατί το κέντρο μάζας του βρίσκεται πάνω από τη βάση στήριξης και επομένως ο φορέας του βάρους περνά από αυτήν.

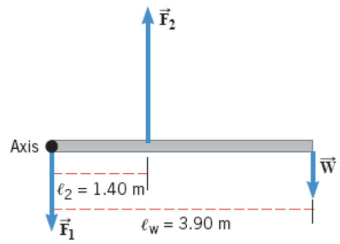
ii. Για να μην ανατραπεί το σώμα, η ροπή της δύναμης πρέπει να είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με τη ροπή του βάρους ως προς τον άξονα που περνά από το δεξί άκρο Γ της βάσης:

$$|\vec{M}_F| \leq |\vec{M}_B| \ \Rightarrow\ |\vec{F}|\, h \leq mg\frac{\alpha}{2} \ \Rightarrow\ h \leq \frac{mg\,\alpha}{2|\vec{F}|} \ \Rightarrow\ h_{\max} = \frac{50{,}0\ \text{kg} \times 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}20\ \text{m}}{2 \times 100\ \text{N}} = 0{,}49\ \text{m}.$$

19. Γυναίκα βάρους 530N στέκεται στο δεξί άκρο βατήρα μήκους 3,9m. Αν ο βατήρας έχει αμελητέο βάρος, είναι στερεωμένος στο αριστερό άκρο και υπάρχει και υπομόχλιο σε απόσταση 1,4m από το άκρο στερέωσης, βρείτε τις τις δυνάμεις που ασκούνται από το υπομόχλιο και τον άξονα στερέωσης.



Λύση:



Αφού ο βατήρας δεν μετακινείται

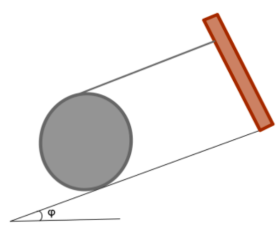
$$\sum F_y = -F_1 + F_2 - W = 0$$

Αφού ο βατήρας δεν περιστρέφεται

$$\sum M = +F_2\ell_2 - W\ell_w = 0$$

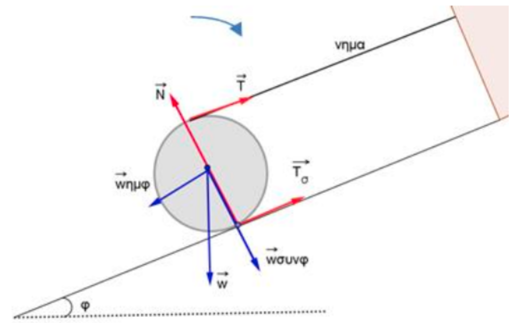
$$F_2 = \frac{W\ell_w}{\ell_2} = \frac{(530\text{ N})(3.90\text{ m})}{1.40\text{ m}} = 1480\text{ N} \implies F_1 = 950\text{ N}$$

20. Ο πιο κάτω δίσκος ισορροπεί με τη βοήθεια ενός νήματος παράλληλου στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν το βάρος του δίσκου είναι $w = 10$ N και η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi = 30°$, να βρεθούν:



i. Η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων που δέχεται ο δίσκος ως προς το κέντρο του Κ,
ii. Η δύναμη που δέχεται ο τροχός από το νήμα,
iii. Η στατική τριβή στον δίσκο καθώς και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο δίσκο.

Λύση:



Όλες οι δυνάμεις φαίνονται στο σχήμα (εκτός της δύναμης του επιπέδου, η οποία δεν σχεδιάστηκε για να μη φορτωθεί με δυνάμεις το σχήμα). Ο σχεδιασμός της δεν είναι απαραίτητος στο ερώτημα αυτό.

i. Αφού το στερεό ισορροπεί, ισχύει:

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

$$\sum \mathrm{M} = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) ισχύει ως προς οποιοδήποτε σημείο, άρα θα ισχύει και ως προς το K.

ii. Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\sum \mathrm{M} = 0 \Rightarrow T \cdot R - T_\sigma \cdot R = 0 \Rightarrow T = T_\sigma \quad (4)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T + T_\sigma = w \cdot \text{ημ}\varphi \Rightarrow 2T = w \cdot \text{ημ}\varphi \Rightarrow T = 2{,}5 \text{ N}$$

iii. Από τη σχέση (4) προκύπτει πως $T_\sigma = 2{,}5$ N.

Η δύναμη του επιπέδου είναι η συνισταμένη δύο κάθετων μεταξύ τους δυνάμεων: της N και της T_σ. Από την εξίσωση $\sum F_y = 0$ υπολογίζουμε την κάθετη δύναμη N του επιπέδου στο σώμα:

$$N = w \cdot \text{συν}\varphi \Rightarrow N = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ N}$$

Η δύναμη του επιπέδου είναι:

$$A = \sqrt{N^2 + T_\sigma^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{81{,}25} \text{ N}.$$

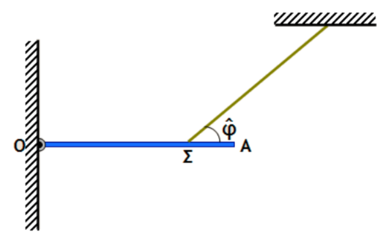
21. Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος $L = 4$ m, μάζα $M = 30$ kg και είναι αρθρωμένη στο άκρο της O. Η ράβδος ισορροπεί με τη βοήθεια νήματος, το οποίο είναι δεμένο σε σημείο Σ της ράβδου και σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\varphi = 30°$. Η απόσταση $(O\Sigma)$ είναι ίση με 3 m. Να βρεθούν:

i. το μέτρο της τάσης $\vec{N}$ του νήματος.

ii. το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

iii. το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}'$ που θα ασκήσει η άρθρωση στη ράβδο, αν το νήμα δεθεί σε σημείο K της ράβδου, τέτοιο ώστε η απόσταση (OK) να είναι ίση με $\frac{4}{3}$ m και το νήμα να σχηματίζει την ίδια γωνία φ με τη ράβδο.

Δίνεται: $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



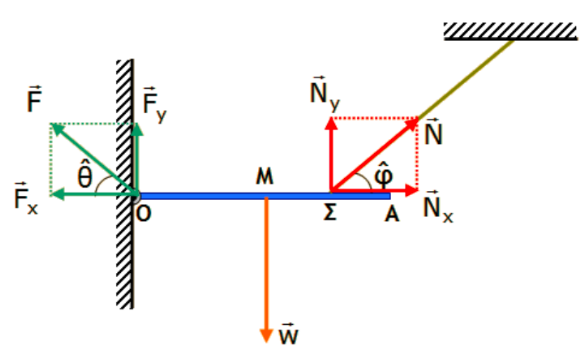
Λύση:

Λέγοντας ότι η ράβδος ισορροπεί, εννοούμε ότι παραμένει ακίνητη, δηλαδή δεν εκτελεί ούτε μεταφορική ούτε στροφική κίνηση. Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες:

$$\sum \vec{F} = 0, \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 & (1) \\ \sum F_y = 0 & (2) \end{cases}$$

και

$$\sum M = 0 \quad (3)$$



i. Υπολογισμός της τάσης του νήματος $\vec{N}$:

Ως προς το σημείο O:

$$M_w = -w \cdot \frac{L}{2}, \quad M_{N_y} = +N_y \cdot (O\Sigma)$$

Η ράβδος ισορροπεί, άρα:

$$\sum M = 0 \Rightarrow -w \cdot \frac{L}{2} + N_y \cdot (O\Sigma) = 0 \Rightarrow N_y = \frac{wL}{2(O\Sigma)}$$

Επειδή $w = Mg = 300$ N:

$$N_y = \frac{300 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 200 \text{ N}$$

Από την ανάλυση της τάσης του νήματος:

$$N_y = N \cdot \sin\varphi \Rightarrow N = \frac{N_y}{\sin 30^\circ} = 400 \text{ N}$$

και

$$N_x = N \cdot \cos 30^\circ = 200\sqrt{3} \text{ N}.$$

ii. Υπολογισμός της δύναμης $\vec{F}$:

Από τις σχέσεις (1) και (2):

$$F_x = N_x = 200\sqrt{3} \text{ N}, \quad F_y = w - N_y = 100 \text{ N}.$$

Με το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(200\sqrt{3})^2 + 100^2} = 100\sqrt{13} \text{ N}.$$

Η γωνία θ που σχηματίζει η $\vec{F}$ με τον οριζόντιο άξονα:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{100}{200\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

iii. Όταν το νήμα δένεται σε σημείο K:

Η απόσταση $(OK) = \frac{4}{3}$ m.

$$M_w = -w \cdot 2, \quad M_{N'_y} = +N'_y \cdot \frac{4}{3}.$$

Άρα:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow -2w + N'_y \cdot \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow N'_y = 450 \text{ N}.$$

Από την ανάλυση της τάσης του νήματος:

$$N'_y = N' \cdot \sin 30° \Rightarrow N' = 900 \text{ N}, \quad N'_x = N' \cdot \cos 30° = 450\sqrt{3} \text{ N}.$$

Από τις σχέσεις (1) και (2):

$$F'_x = N'_x = 450\sqrt{3} \text{ N}, \quad F'_y = N'_y - w = -150 \text{ N}.$$

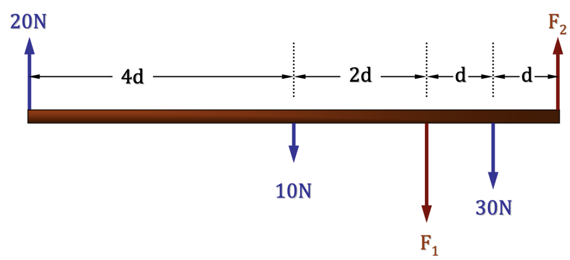
Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η $\vec{F}'_y$ έχει κατεύθυνση αντίθετη από την αρχική.

$$F' = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2} = \sqrt{(450\sqrt{3})^2 + 150^2} = 150\sqrt{28} \text{ N}.$$

Η γωνία θ' που σχηματίζει η $\vec{F}'$ με τον οριζόντιο άξονα:

$$\tan\theta' = \frac{F'_y}{F'_x} = \frac{150}{450\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

22. Το παρακάτω σχήμα δίνει την κάτοψη ομογενούς ράβδου σε στατική ισορροπία. Να βρεθούν οι δυνάμεις F_1 και F_2.



Λύση:

Συνολική ροπή ως προς το δεξιό άκρο της ράβδου:

$$20 \cdot 8d - 10 \cdot 4d - F_1 \cdot 2d - 30 \cdot d = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 45 \text{ N}$$

Μηδενισμός συνισταμένης δύναμης:

$$20 - 10 - F_1 - 30 + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 20 + F_1 = 65 \text{ N}$$

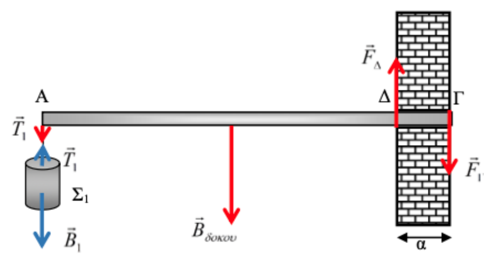
23. Ομογενής δοκός μήκους $A\Gamma = 6$ m και βάρους μέτρου $|\vec{B}_{\delta o\kappa}| = 200$ N ισορροπεί οριζόντια με το ένα άκρο της μέσα σε τοίχο πάχους $\alpha = 0{,}5$ m, στηριζόμενη στα σημεία Γ και Δ. Στο άλλο άκρο της είναι κρεμασμένο ένα σώμα (Σ_1) βάρους $|\vec{B}_1| = 400$ N.

i. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.

ii. Να υπολογίσετε τις κατακόρυφες δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό από τον τοίχο που παίζει τον ρόλο υποστηριγμάτων.

Λύση:

i.



ii. Η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το σημείο Δ είναι 0. Οπότε:

$$\sum \vec{M} = \vec{M}_{\Sigma 1} + \vec{M}_{B_{\delta o\kappa}} + \vec{M}_{F_A} + \vec{M}_{F_\Gamma} = 0 \Rightarrow |\vec{T}_1|(A\Delta) + |\vec{B}_{\delta o\kappa}|\left(\frac{A\Gamma}{2} - \alpha\right) - |\vec{F}_\Gamma|\alpha = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_\Gamma| = \frac{|\vec{T}_1|(A\Delta) + |\vec{B}_{\delta o\kappa}|\left(\frac{A\Gamma}{2} - \alpha\right)}{\alpha} \quad \text{σχέση (1)}$$

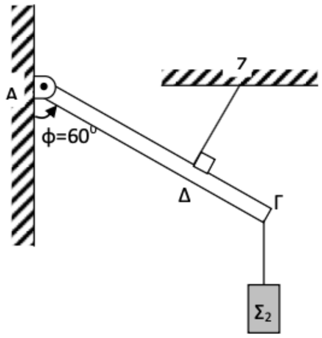
όμως $|\vec{T}_1| = |\vec{B}_1| = 400$ N, οπότε από την σχέση (1):

$$|\vec{F}_\Gamma| = \frac{400 \text{ N} \cdot 5{,}5 \text{ m} + 200 \text{ N} \cdot 2{,}5 \text{ m}}{0{,}5 \text{ m}} = 5400 \text{ N}$$

Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων θα πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως:

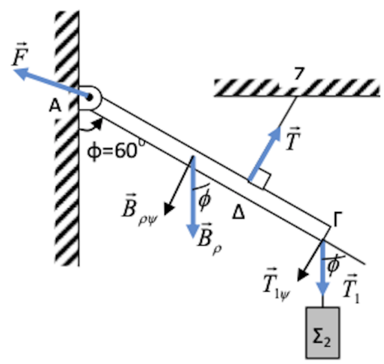
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{B}_{\delta o\kappa} + \vec{F}_\Gamma + \vec{F}_A = 0 \Rightarrow -|\vec{T}_1| - |\vec{B}_{\delta o\kappa}| - |\vec{F}_\Gamma| + |\vec{F}_A| = 0 \Rightarrow |\vec{F}_A| = 6000 \text{ N}.$$

24. Η ράβδος $A\Gamma$ είναι ομογενής με μάζα 10,0 kg. Το νήμα ΔZ είναι στερεωμένο στα $\frac{3}{4}$ του μήκους της ράβδου ($A\Delta = \frac{3L}{4}$). Το σώμα Σ_2 έχει μάζα 5,0 kg.



Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ράβδο. Να υπολογίσετε την τάση του νήματος ΔZ.

Λύση:



$$|\vec{B}_{\rho y}| = |\vec{B}_{\rho}|\etaμ\varphi = 10{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \etaμ60^\circ = 84{,}95 \text{ N}$$

$$|\vec{T}_{1y}| = |\vec{B}_{\Sigma_2}|\etaμ60^\circ = 5{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}866 = 42{,}48 \text{ N}$$

όπου $|\vec{T}| = |\vec{B}_2|$.

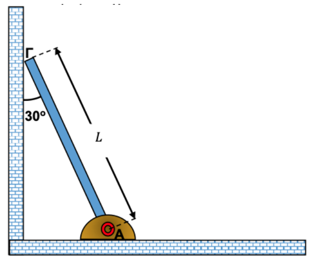
Αφού η ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής στη άρθρωση είναι μηδέν. Άρα:

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow M_{B_{\rho y}} + M_{T_y} + M_T = 0 \Rightarrow -|\vec{B}_y|\frac{L}{2} - |\vec{T}_{1y}|L + |\vec{T}|\frac{3L}{4} = 0$$

$$|\vec{T}|\frac{3}{4} = |\vec{B}_{\rho y}|\frac{1}{2} + |\vec{T}_{1v}| \Rightarrow |\vec{T}| = \frac{|\vec{B}_{\rho y}|\frac{1}{2} + |\vec{T}_{1y}|}{\frac{3}{4}}$$

$$|\vec{T}| = \frac{84{,}95 \text{ N} \cdot 0{,}5 + 42{,}48 \text{ N}}{0{,}75} = 113{,}27 \text{ N}.$$

25. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται μια ομογενής ράβδος $A\Gamma$, μάζας $m = 2\,\mathrm{kg}$ και μήκους L. Το άκρο A της ράβδου είναι στερεωμένο στο πάτωμα με άρθρωση και το άκρο Γ ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο. Η ράβδος ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $30°$ με τον κατακόρυφο τοίχο.



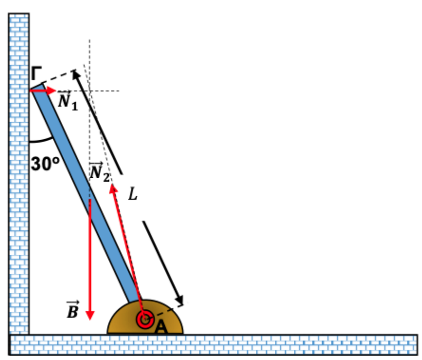
i. Να μεταφέρετε το πιο πάνω σχήμα στο τετράδιο απαντήσεών σας και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από τον κατακόρυφο τοίχο.

iii. Να υπολογίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης στη ράβδο από την άρθρωση στο σημείο A.

Λύση:

i. Στη ράβδο ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις. Για να ισορροπεί η ράβδος, οι φορείς των δυνάμεων πρέπει να διέρχονται από το ίδιο σημείο.



ii. Η ράβδος δεν περιστρέφεται. Άρα η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτή είναι ίση με μηδέν.

Υπολογίζουμε τις ροπές των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το σημείο A, θεωρώντας ως θετικές τις ροπές που τείνουν να περιστρέψουν τη ράβδο αριστερόστροφα.

$$\sum M_{\text{εξωτερ.},A} = 0 \Rightarrow -|\vec{N}_1|(\text{συν}30°) + mg\frac{L}{2}\text{ημ}30° = 0$$

$$|\vec{N}_1|(\text{συν}30^\circ) = mg\frac{L}{2}\text{ημ}30^\circ \Rightarrow |\vec{N}_1| = \frac{mg}{2}\text{εφ}30^\circ = 5{,}66\ \text{N}$$

iii. Για την ισορροπία της ράβδου ισχύει:

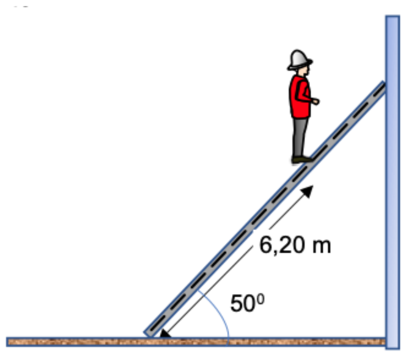
$$\sum F_{\text{εξωτερ.},x} = 0 \Rightarrow |\vec{N}_1| - |\vec{N}_{2x}| = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{2x}| = |\vec{N}_1| = 5{,}66\ \text{N}$$

$$\sum F_{\text{εξωτερ.},y} = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{2y}| - mg = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{2y}| = mg = 19{,}62\ \text{N}$$

$$|\vec{N}_2| = \sqrt{|\vec{N}_{2x}|^2 + |\vec{N}_{2y}|^2} = \sqrt{(5{,}66\ \text{N})^2 + (19{,}62\ \text{N})^2} \Rightarrow |\vec{N}_2| = 20{,}4\ \text{N}$$

$$\text{εφ}\varphi = \frac{|\vec{N}_{2y}|}{|\vec{N}_{2x}|} = \frac{19{,}62}{5{,}66} = 3{,}47 \Rightarrow \varphi = 73{,}9^\circ$$

26. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται μία σκάλα μήκους 8,00 m και βάρους 345 N, η οποία εφάπτεται με ένα *τραχύ* πάτωμα και έναν *λείο* κατακόρυφο τοίχο. Η σκάλα σχηματίζει με το οριζόντιο πάτωμα γωνία 50°. Ένας πυροσβέστης, το βάρος του οποίου είναι 865 N, στέκεται πάνω στη σκάλα σε απόσταση 6,20 m από τη βάση της. Θεωρούμε ότι το βάρος της σκάλας ασκείται στο κέντρο της.



i. Να διατυπώσετε τις συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος.

ii. Να αντιγράψετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα.

iii. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούν ο τοίχος και το πάτωμα στη σκάλα.

iv. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με το οριζόντιο πάτωμα η ολική δύναμη που ασκεί το πάτωμα στη σκάλα.

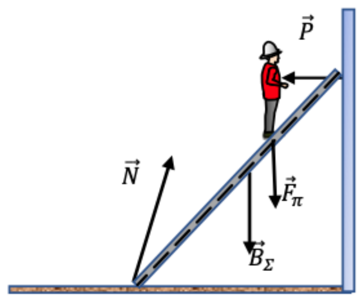
v. Να εξηγήσετε, χωρίς υπολογισμούς, αν η σκάλα θα μπορούσε να ισορροπήσει αν ήταν λείο και το πάτωμα.

Λύση:

i.

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \qquad \text{και} \qquad \sum \vec{M}_{\varepsilon\xi}^{(\text{ως προς οποιοδήποτε σημείο})} = \vec{0}.$$

ii. Σωστός σχεδιασμός όλων των δυνάμεων: βάρος πυροσβέστη $\vec{B}_\pi$ στο σημείο του, βάρος σκάλας $\vec{B}_\ell$ στο μέσο, αντίδραση τοίχου $\vec{P}$ *οριζόντια* (ο τοίχος είναι λείος), αντίδραση πατώματος $\vec{N}$ στη βάση· εναλλακτικά οι συνιστώσες $\vec{N}_x, \vec{N}_y$.



iii. Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; |N_x| - |P| = 0 \;\Rightarrow\; |N_x| = |P|.$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; |N_y| = |B_\pi| + |B_\ell| = 865\,\mathrm{N} + 345\,\mathrm{N} = 1210\,\mathrm{N}$$

Ροπές ως προς τη βάση A (θετικές οι αριστερόστροφες):

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow |B_\pi|\,(6{,}20\,\mathrm{m})\,\text{συν}50^\circ + |B_\ell|\,(4{,}00\,\mathrm{m})\,\text{συν}50^\circ = |P|\,(8{,}00\,\mathrm{m})\,\text{ημ}50^\circ.$$

$$|P| = \frac{(865\,\mathrm{N})(6{,}20\,\mathrm{m})\,\text{συν}50^\circ + (345\,\mathrm{N})(4{,}00\,\mathrm{m})\,\text{συν}50^\circ}{(8{,}00\,\mathrm{m})\,\text{ημ}50^\circ} = 707{,}3\,\mathrm{N}$$

Άρα

$$|N_x| = 707{,}3\,\mathrm{N}, \qquad |N_y| = 1210\,\mathrm{N}$$

και το μέτρο της δύναμης του πατώματος

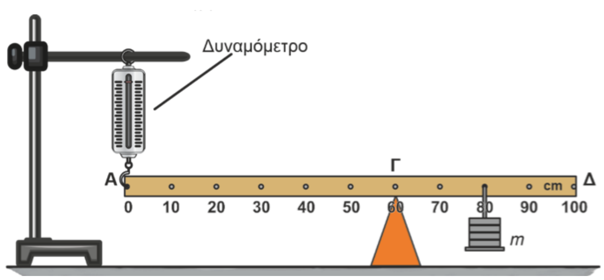
$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{(707{,}3)^2 + (1210)^2} = 1401{,}6\,\mathrm{N}$$

iv. Η γωνία φ της $\vec{N}$ με το οριζόντιο:

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{|N_y|}{|N_x|} = \frac{1210}{707{,}3} = 1{,}71 \;\Rightarrow\; \varphi = 59{,}7^\circ$$

v. Η N θα ήταν μόνο κατακόρυφη. Επομένως δεν θα ίσχυε η 1^η Συνθήκη Ισορροπίας.

27. Στο εργαστήριο, ισορροπήσαμε τον πιο κάτω ομογενή χάρακα χρησιμοποιώντας δυναμόμετρο, στερεωμένο στο άκρο A του χάρακα ($x_A = 0{,}0$ cm) και τριγωνικό στήριγμα τοποθετημένο στη θέση Γ ($x_\Gamma = 60{,}0$ cm), όπως φαίνεται στο σχήμα. Αναρτήσαμε σταθμά συνολικής μάζας 50,0 g στη θέση $x = 80{,}0$ cm του χάρακα, φροντίζοντας ο χάρακας να ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Ζυγίσαμε τον χάρακα και βρήκαμε ότι η μάζα του είναι $m_{\chi\alpha\rho} = 0{,}540$ kg.



i. Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεών σας και να σχεδιάσετε όλες τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα χάρακα–σταθμών.

ii. Να γράψετε τι συμπεραίνετε για το άθροισμα των εξωτερικών ροπών που δρουν στο σύστημα χάρακα–σταθμών όταν αυτό ισορροπεί.

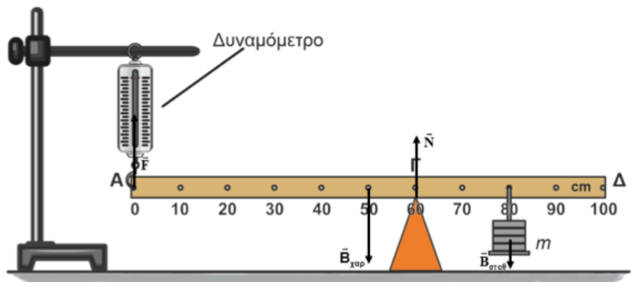
iii. Να υπολογίσετε την ένδειξη του δυναμόμετρου.

iv. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το στήριγμα στον χάρακα.

v. Να αναφέρετε αν θα άλλαζε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το δυναμόμετρο στον χάρακα, στην περίπτωση που ο χάρακας ισορροπούσε σε πλάγια θέση σχηματίζοντας γωνία $\theta = 60^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση. Να θεωρήσετε ότι το δυναμόμετρο παραμένει σε κατακόρυφη θέση.

Λύση:

i. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι: το βάρος του χάρακα $\vec{B}_{\chi\alpha\rho}$, το βάρος των σταθμών $\vec{B}_{\sigma\tau\alpha\vartheta}$, η δύναμη του δυναμόμετρου $\vec{F}$ και η δύναμη του στηρίγματος $\vec{N}$.



ii. Αφού ο χάρακας ισορροπεί, το άθροισμα των εξωτερικών ροπών είναι μηδέν:

$$\sum \vec{M}_{\varepsilon\xi} = \vec{0}.$$

iii. Από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς το στήριγμα Γ:

$$\sum M_{\varepsilon\xi,\Gamma} = 0 \Rightarrow |\vec{B}_{\chi\alpha\rho}|d_1 - |\vec{B}_{\sigma\tau\alpha\vartheta}|d_2 - |\vec{F}|d_3 = 0.$$

$$|\vec{F}| = \frac{|\vec{B}_{\chi\alpha\rho}|d_1 - |\vec{B}_{\sigma\tau\alpha\vartheta}|d_2}{d_3} = \frac{(0{,}540\ \mathrm{kg})(9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(0{,}100\ \mathrm{m}) - (0{,}050\ \mathrm{kg})(9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(0{,}200\ \mathrm{m})}{0{,}600\ \mathrm{m}} = 0{,}720\ \mathrm{N}.$$

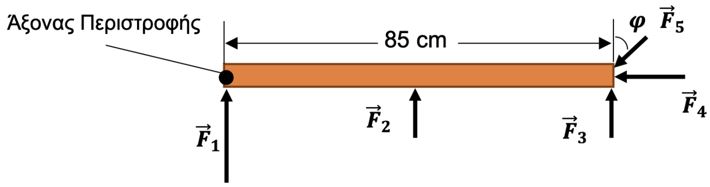
iv. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{N}| - |\vec{F}| - |\vec{B}_{\chi\alpha\rho}| - |\vec{B}_{\sigma\tau\alpha\vartheta}| = 0.$$

$$|\vec{N}| = |\vec{F}| + |\vec{B}_{\chi\alpha\rho}| + |\vec{B}_{\sigma\tau\alpha\vartheta}| = 0{,}720 + (0{,}540)(9{,}81) + (0{,}050)(9{,}81) = 5{,}07\ \mathrm{N}.$$

v. Αν ο χάρακας ισορροπούσε σχηματίζοντας γωνία $\theta = 60^\circ$ με το οριζόντιο πάτωμα, η κατανομή των ροπών και των δυνάμεων ως προς το στήριγμα δεν θα άλλαζε, εφόσον το δυναμόμετρο παραμένει κατακόρυφο. Επομένως, το μέτρο της δύναμης που ασκεί το δυναμόμετρο δεν θα άλλαζε.

28. Το πιο κάτω σχήμα δείχνει την κάτοψη μιας πόρτας και τον άξονα περιστροφής της, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Στην πόρτα ασκούνται πέντε δυνάμεις, όπως φαίνεται στο σχήμα, με μέτρα: $|\vec{F_1}| = 10$ N, $|\vec{F_2}| = 5$ N, $|\vec{F_3}| = 5$ N, $|\vec{F_4}| = 8$ N και $|\vec{F_5}| = 5$ N.



i. Να εξηγήσετε ποια από τις πέντε δυνάμεις προκαλεί τη μεγαλύτερη σε μέτρο ροπή κατά μήκος του άξονα περιστροφής της πόρτας.

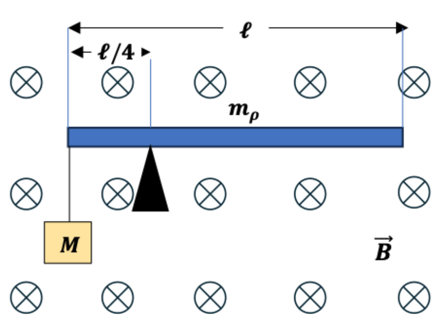
ii. Το πλάτος της πόρτας είναι 85 cm και η γωνία φ που σχηματίζει η δύναμη με την κάθετο στην πόρτα είναι 45°. Να υπολογιστεί η ροπή κατά μήκος του άξονα περιστροφής της πόρτας που προκαλεί η δύναμη $\vec{F_5}$ (μέτρο και κατεύθυνση).

Λύση:

i. Η $\vec{F_3}$. Είναι ίση κατά μέτρο με τις δυνάμεις που έχουν μη μηδενική ροπή, αλλά έχει μεγαλύτερο μοχλοβραχίονα από αυτές.

ii.
$$|\vec{M}_{F_5}| = |\vec{F_5}|\,|\vec{r_5}|\,\sin\theta \Rightarrow |\vec{M}_{F_5}| = (5\text{ N})\,(0{,}85\text{ m})\,\sin(135°) = 3\text{ N·m} \quad \otimes$$

29. Ομογενής, αγώγιμη ράβδος μήκους ℓ και μάζας m_ρ, είναι τοποθετημένη σε στήριγμα, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $\ell/4$ από το αριστερό άκρο της ράβδου. Η ράβδος βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$, με κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένα σώμα του οποίου η μάζα M είναι πέντε φορές μεγαλύτερη από τη μάζα της ράβδου ($M = 5m_\rho$), κρέμεται από το αριστερό άκρο της ράβδου. Τη ράβδο διαρρέει ηλεκτρικό ρεύμα με αποτέλεσμα να ισορροπεί οριζόντια στο στήριγμα. (Τα καλώδια που τροφοδοτούν τη ράβδο με ηλεκτρικό ρεύμα και τα οποία ασκούν αμελητέες δυνάμεις σε αυτή *δεν φαίνονται στο σχήμα*.)

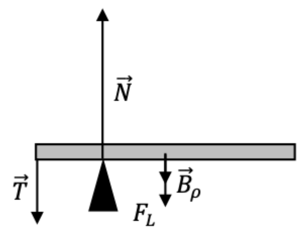


Να καθορίσετε τη φορά και να υπολογίσετε την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που θα πρέπει να διαρρέει τη ράβδο, έτσι ώστε να ισορροπεί οριζόντια στο στήριγμα. Η απάντησή σας να δοθεί ως συνάρτηση των μεγεθών ℓ, m_ρ, $|\vec{B}|$ και g.

Λύση:

Εφόσον $M > m_\rho$ και $d_T = d_{B_\rho}$, ισχύει $|\vec{M}_T| > |\vec{M}_{B_\rho}|$.

Η $\vec{F}_L$ έχει φορά προς τα κάτω και προκαλεί δεξιόστροφη ροπή.



Καθορισμός της φοράς της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος, σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού:

$$I: \text{ Από δεξιά προς αριστερά.}$$

Συνθήκης ισορροπίας:

$$\sum M_\xi = 0 \;\Rightarrow\; \vec{M}_T + \vec{M}_{B_\rho} + \vec{M}_{F_L} = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{M}_T| - |\vec{M}_{B_\rho}| - |\vec{M}_{F_L}| = 0.$$

Αντικαθιστούμε με τον ορθό μοχλοβραχίονα κάθε δύναμης:

$$\frac{5m_\rho g\ell}{4} - \frac{m_\rho g\ell}{4} - |\vec{F}_L|\,\frac{\ell}{4} = 0.$$

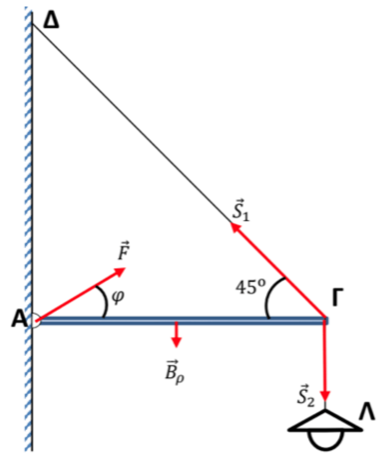
Εξαγωγή της σχέσης για το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_L$:

$$|\vec{F}_L| = 4m_\rho g.$$

Από τη σχέση $|\vec{F}_L| = |\vec{B}|I\ell$ προκύπτει:

$$|\vec{B}|I\ell = 4m_\rho g \quad \Rightarrow \quad I = \frac{4m_\rho g}{|\vec{B}|\,\ell}.$$

30. Μια ράβδος μήκους $\ell = 0{,}500$ m και μάζας $m = 1{,}60$ kg συγκρατείται οριζόντια με τη βοήθεια άρθρωσης στο σημείο A και του νήματος ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σημείο Δ απέχει 0,5 m από το σημείο A. Στο άκρο Γ της ράβδου είναι κρεμασμένη με νήμα μια λάμπα Λ μάζας $M = 2{,}00$ kg.



i. Να κατονομάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.

ii. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.

iii. Αν η μέγιστη τάση για την οποία το νήμα ΓΔ δεν κόβεται είναι 32 N, να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση από το σημείο A του σημείου της ράβδου, στο οποίο μπορεί να κρεμαστεί η λάμπα.

Λύση:

i. Στη ράβδο ασκούνται τέσσερις δυνάμεις:

- Το βάρος της ράβδου $\vec{B}_\rho$.
- Η τάση του νήματος ΓΔ, $\vec{S}_1$.
- Η τάση του νήματος ΓΛ, $\vec{S}_2$.
- Η δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο στο A, $\vec{F}$.

ii. Υπολογισμός των δυνάμεων:

Το βάρος της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$|\vec{B}_\rho| = mg = 1{,}60 \text{ kg} \times 9{,}81 \ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 15{,}7 \text{ N}.$$

Η τάση του νήματος ΓΛ είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος της λάμπας:

$$|\vec{S}_2| = Mg = 2{,}00\ \mathrm{kg} \times 9{,}81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 19{,}6\ \mathrm{N}.$$

Για την τάση του νήματος ΓΔ, εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς το A:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow |\vec{S}_1| \sin 45^\circ \ell - |\vec{B}_\rho| \tfrac{\ell}{2} - |\vec{S}_2| \ell = 0.$$

$$|\vec{S}_1| = \frac{|\vec{B}_\rho| + 2|\vec{S}_2|}{2 \sin 45^\circ} = \frac{15{,}7 + 2(19{,}6)}{2 \times 0{,}707} = 38{,}8\ \mathrm{N}.$$

Για τη δύναμη $\vec{F}$ της άρθρωσης:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow |\vec{F}| \cos\varphi - |\vec{S}_1| \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow |\vec{F}| \sin\varphi + |\vec{S}_1| \sin 45^\circ - |\vec{B}_\rho| - |\vec{S}_2| = 0.$$

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει:

$$|\vec{F}| = 28{,}5\ \mathrm{N}, \qquad \varphi = 16{,}0^\circ.$$

iii. Αν το σημείο, στο οποίο μπορεί να κρεμαστεί η λάμπα, απέχει από το A απόσταση d, τότε από την ισορροπία ροπών ως προς το A:

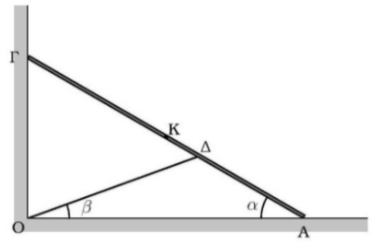
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow |\vec{S}_1| \sin 45^\circ \ell - |\vec{B}_\rho| \tfrac{\ell}{2} - |\vec{S}_2| d = 0.$$

$$d = \frac{2\big(|\vec{S}_1| \sin 45^\circ - \frac{1}{2}|\vec{B}_\rho|\big)}{2|\vec{S}_2|}\,\ell.$$

Η απόσταση d γίνεται μέγιστη όταν $|\vec{S}_1| = 32$ N:

$$d = \frac{2(32 \sin 45^\circ - 7{,}85)}{39{,}2} \times 0{,}5 = 0{,}38\ \mathrm{m}.$$

31. Μια ομογενής ράβδος $A\Gamma$ βάρους $\vec{B}$ ισορροπεί με τη βοήθεια νήματος $O\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο επιφάνειες, οριζόντια και κατακόρυφη, στις οποίες ακουμπούν τα άκρα της ράβδου, είναι λείες. Το σημείο K είναι το κέντρο βάρους της ράβδου.



i. Να δείξετε ότι η τάση του νήματος $O\Delta$ δίνεται από τη σχέση:

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{B}| \cdot \text{συν}\alpha}{2\,\text{ημ}(\alpha - \beta)}.$$

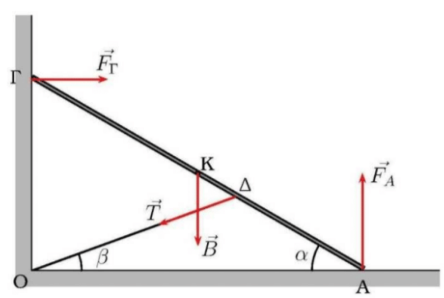
ii. Να εξηγήσετε για ποιες θέσεις του σημείου Δ στη ράβδο δεν θα είναι δυνατό να ισορροπεί η ράβδος, στηριζόμενη και στις δύο επιφάνειες.

Λύση:

i. Εφόσον η ράβδος ισορροπεί, ισχύουν οι συνθήκες:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{και} \quad \sum \vec{M} = 0.$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο φαίνονται στο σχήμα:



Από τις συνθήκες ισορροπίας των δυνάμεων:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow |\vec{F}_\Gamma| - |\vec{T}|\cos\beta = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{F}_\Gamma| = |\vec{T}|\cos\beta, \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow |\vec{F}_A| - |\vec{T}|\sin\beta - |\vec{B}| = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{F}_A| = |\vec{T}|\sin\beta + |\vec{B}|. \tag{2}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς το σημείο O:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow |\vec{F}_A|\ell\cos\alpha - |\vec{B}|\frac{\ell}{2}\cos\alpha - |\vec{F}_\Gamma|\ell\sin\alpha = 0.$$

Αντικαθιστώντας από (1) και (2):

$$2|\vec{F}_A|\cos\alpha - |\vec{B}|\cos\alpha - 2|\vec{F}_\Gamma|\sin\alpha = 0. \tag{3}$$

Αντικαθιστούμε στην (3) τις σχέσεις (1) και (2):

$$2(|\vec{T}|\sin\beta + |\vec{B}|)\cos\alpha - |\vec{B}|\cos\alpha - 2|\vec{T}|\cos\beta\sin\alpha = 0.$$

$$2|\vec{T}|\sin\beta\cos\alpha - 2|\vec{T}|\cos\beta\sin\alpha + |\vec{B}|\cos\alpha = 0.$$

$$2|\vec{T}|\sin(\beta-\alpha) + |\vec{B}|\cos\alpha = 0.$$

Άρα:

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{B}|\cos\alpha}{2\,\sin(\alpha-\beta)}.$$

ii. Η ράβδος θα ισορροπεί εάν το νήμα είναι τεντωμένο, δηλαδή αν $|\vec{T}| > 0$. Από τη σχέση που προέκυψε:

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{B}|\cos\alpha}{2\,\sin(\alpha-\beta)} > 0 \;\Rightarrow\; \sin(\alpha-\beta) > 0 \;\Rightarrow\; \alpha-\beta > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Δ πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και K. Αν το Δ βρεθεί σε οποιαδήποτε θέση από το K μέχρι το Γ, η ράβδος δεν θα ισορροπήσει ταυτόχρονα στις δύο επιφάνειες, καθώς το νήμα θα χαλαρώσει (η τάση θα γίνει μηδενική ή αρνητική).

Άρα η ράβδος ισορροπεί μόνο όταν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των A και K.

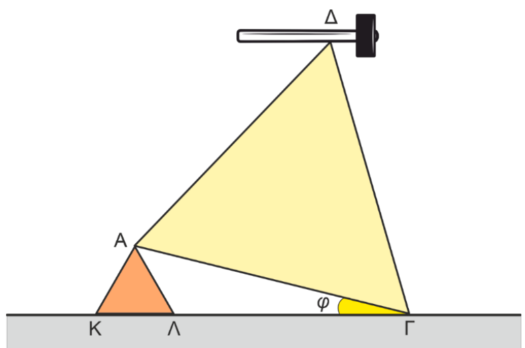
32. Ένα ομογενές ισόπλευρο τρίγωνο $A\Delta\Gamma'$ με πλευρές $\mathrm{A\Gamma} = \Gamma\Delta = \Delta\mathrm{A} = 0{,}300$ m και μάζα $m_1 = 1{,}00$ kg ισορροπεί με την κορυφή Γ να ακουμπά στο οριζόντιο επίπεδο και την κορυφή A να ακουμπά στην κορυφή ενός μικρότερου, ομογενούς ισόπλευρου τριγώνου $K A \Lambda$, έτσι ώστε η βάση του να σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο.

Το τρίγωνο $KA\Lambda$ έχει πλευρές $AK = K\Lambda = \Lambda A = 0{,}100$ m, μάζα $m_2 = 0{,}258$ kg και η πλευρά $K\Lambda$ εφάπτεται στο οριζόντιο επίπεδο. Στην κορυφή Δ του τριγώνου $A\Delta\Gamma'$ ισορροπεί ένα σφυρί του οποίου το ξύλινο στέλεχος έχει μάζα $m_\sigma = 0{,}350$ kg και το σιδερένιο κεφάλι έχει μάζα $m_\kappa = 2{,}65$ kg.

i. Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.

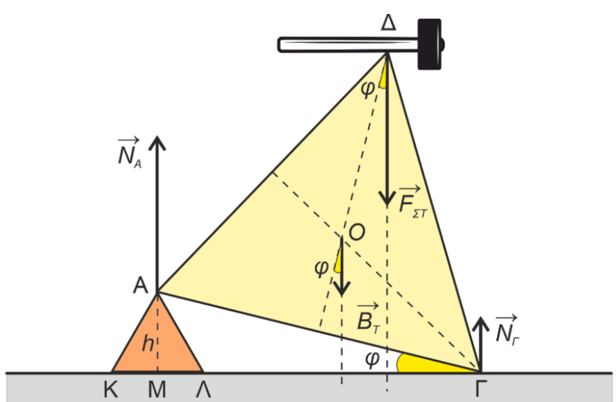
ii. Να υπολογίσετε τη γωνία φ.

iii. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, στα σημεία A, Γ και Δ.



Λύση:

i.



ii. Υπολογισμός της γωνίας φ:

$$\text{ημ}\varphi = \frac{h}{A\Gamma'} = \frac{(A\Lambda)\text{ημ}60^\circ}{A\Gamma'} = \frac{(0{,}100 \text{ m}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}300 \text{ m}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \varphi = 16{,}78^\circ.$$

iii. Υπολογισμός των δυνάμεων που ασκούνται στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, στα σημεία A, Γ και Δ:

Στο σημείο Δ:

Επειδή το σφυρί ισορροπεί:

$$F_{T,\Sigma} = -B_x \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}_{T,\Sigma}| = |\vec{F}_{T,\pi}| = 29{,}4 \text{ N} \Rightarrow F_{T,\pi} = -29{,}4 \text{ N}.$$

Υπολογισμός των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο Γ:

$$M_{N_A} = -|\vec{N}_A|(\text{A}\Gamma)\text{συν}\varphi = -|\vec{N}_A|(0{,}300 \text{ m}) \times (0{,}957) = -0{,}287|\vec{N}_A| \text{ N·m}.$$

$$M_{B_T} = |\vec{B}_T|(\text{O}\Gamma)\text{ημ}(120^\circ - \varphi) = (9{,}81 \text{ N}) \times \left(\frac{(0{,}300 \text{ m}) \cdot \text{ημ}60^\circ}{2}\right) \times \text{ημ}(103{,}22^\circ) \Rightarrow M_{B_T} = 1{,}24 \text{ N·m}.$$

$$M_{F_{T,\pi}} = |\vec{F}_{T,\pi}|(\Gamma\Delta)\text{ημ}(150^\circ - \varphi) = (29{,}43 \text{ N}) \times (0{,}300 \text{ m}) \times 0{,}729 = 6{,}44 \text{ N·m}.$$

$$M_{N_\Gamma} = 0 \text{ N·m}.$$

Το τρίγωνο ισορροπεί:

- 1η Συνθήκη Ισορροπίας:

$$\sum M_\xi = 0 \Rightarrow M_{N_A} + M_{B_T} + M_{F_{T,\pi}} = 0.$$

$$-0{,}287|\vec{N}_A| + 1{,}24 + 6{,}44 = 0 \Rightarrow |\vec{N}_A| = \frac{7{,}68}{0{,}287} = 26{,}8 \text{ N} \Rightarrow N_A = +26{,}8 \text{ N}.$$

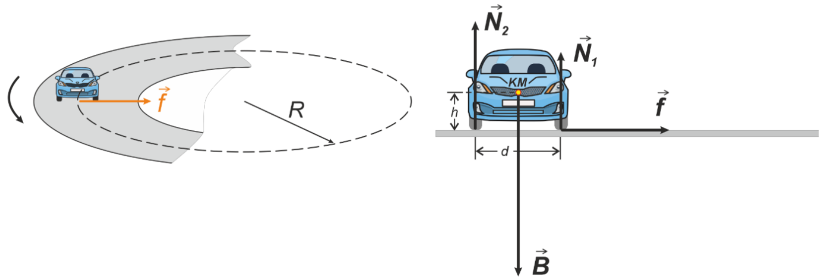
- 2η Συνθήκη Ισορροπίας:

$$\sum F_\xi = 0 \Rightarrow N_A + N_\Gamma + B_T + F_{T,\pi} = 0.$$

$$26{,}8 + |\vec{N}_\Gamma| - 9{,}8 - 29{,}4 = 0 \Rightarrow |\vec{N}_\Gamma| = 39{,}2 - 26{,}8 = 12{,}4 \text{ N}.$$

$$\Rightarrow N_\Gamma = +12{,}4 \text{ N}.$$

33. Όταν ένα αυτοκίνητο κινείται σε στροφή με πολύ μεγάλη ταχύτητα, υπό κάποιες συνθήκες μπορεί να ανατραπεί, δηλαδή να περιστραφεί γύρω από το κέντρο μάζας του. Οι τροχοί στην εσωτερική πλευρά της στροφής χάνουν πρώτοι την επαφή με το έδαφος. Το αυτοκίνητο έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα v σε στροφή ακτίνας R. Η απόσταση μεταξύ των τροχών του αυτοκινήτου είναι d και το ύψος του κέντρου μάζας του από το έδαφος είναι h. Οι κάθετες δυνάμεις επαφής στους εσωτερικούς και τους εξωτερικούς τροχούς είναι $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$, αντίστοιχα.



Μία συνολική δύναμη τριβής από τους τροχούς του αυτοκινήτου ενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη:

$$f = \frac{mv^2}{R}.$$

i. Όταν το αυτοκίνητο κινείται κανονικά στη στροφή (δεν περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας), να εξαχθούν οι σχέσεις υπολογισμού του μέτρου των κάθετων δυνάμεων επαφής N_1 και N_2 συναρτήσει των παραμέτρων m, v, R, g, h και d.

ii. Να υπολογίσετε για ποια τιμή της ταχύτητας οι εσωτερικοί τροχοί του αυτοκινήτου χάνουν την επαφή με τον δρόμο.

iii. Όταν η κεντρομόλος δύναμη στο αυτοκίνητο είναι η στατική τριβή, υπάρχει μία μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το αυτοκίνητο στη στροφή χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε την τιμή που πρέπει να έχει ο συντελεστής τριβής μεταξύ των τροχών και του δρόμου ώστε το αυτοκίνητο να ανατρέπεται μόλις η ταχύτητά του γίνει ίση με τη μέγιστη ταχύτητα πριν αρχίσει η ολίσθηση.

Λύση:

i. Από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας:

$$\sum M_\xi = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{f}|h - |\vec{N}_2|\frac{d}{2} + |\vec{N}_1|\frac{d}{2} = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{R}h + |\vec{N}_1|\frac{d}{2} = |\vec{N}_2|\frac{d}{2}. \tag{1}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\sum F_\xi = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{N}_1| + |\vec{N}_2| = mg \;\Rightarrow\; |\vec{N}_2| = mg - |\vec{N}_1|. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1):

$$\frac{mv^2}{R}h + |\vec{N}_1|\frac{d}{2} = (mg - |\vec{N}_1|)\frac{d}{2} \Rightarrow |\vec{N}_1| = \frac{1}{2}m\left(g - \frac{2hv^2}{dR}\right). \tag{3}$$

Από (2) και (3):

$$|\vec{N}_2| = mg - |\vec{N}_1| = \frac{1}{2}m\left(g + \frac{2hv^2}{dR}\right). \tag{3'}$$

ii. Το αυτοκίνητο αρχίζει να ανατρέπεται όταν η $\vec{N}_1$ μηδενιστεί:

$$|\vec{N}_1| = \frac{1}{2}m\left(g - \frac{2hv^2}{dR}\right) = 0 \;\Rightarrow\; g - \frac{2hv^2}{dR} = 0 \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{dgR}{2h}. \tag{4}$$

iii. Όταν η κεντρομόλος δύναμη είναι η στατική τριβή:

$$|\vec{f}_s| \leq \mu_s|\vec{N}_{0,\lambda}| \;\Rightarrow\; \frac{mv^2}{R} \leq \mu_s mg \;\Rightarrow\; v^2_{\mu\varepsilon\gamma} = \mu_s gR. \tag{5}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (4) και (5):

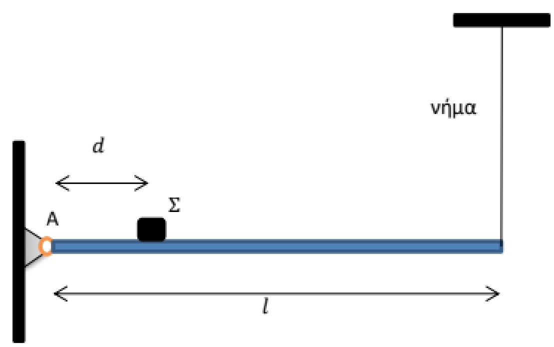
$$\mu_s gR = \frac{dgR}{2h} \;\Rightarrow\; \mu_s = \frac{d}{2h}.$$

34. Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται γύρω από το άκρο της A και είναι κάθετος σε αυτή. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια με τη βοήθεια κατακόρυφου, αβαρούς και μη εκτατού νήματος. Ένα σώμα Σ μάζας $\frac{m}{4}$ μπορεί να μετακινείται πάνω στη ράβδο.

i. Να δείξετε ότι το μέτρο της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με την απόσταση d του σώματος Σ από το άκρο A της ράβδου δίνεται από τη σχέση:

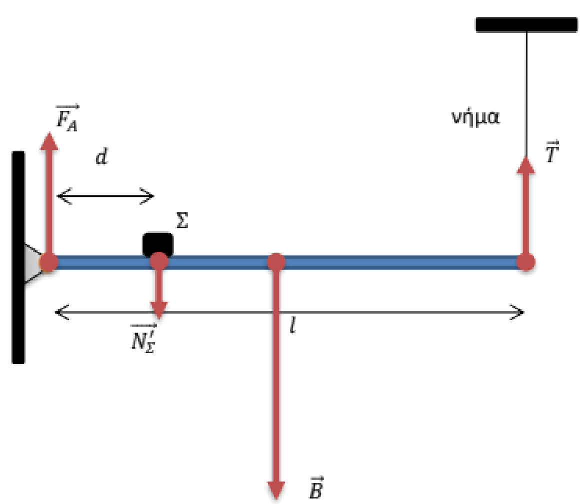
$$|\vec{T}| = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{d}{2\ell}\right), \qquad \text{για } 0 \leq d \leq \ell.$$

ii. Αν το σώμα ακινητοποιηθεί σε απόσταση $d = \frac{1}{4}\ell$ από το άκρο A της ράβδου και πάνω στη ράβδο τοποθετηθεί σε απόσταση $\frac{3}{4}\ell$ από το άκρο A ένα δεύτερο σώμα Σ' μάζας $\frac{m}{2}$, να υπολογίσετε τον λόγο της νέας τάσης του νήματος $|\vec{T'}|$ ως προς την τάση που είχε το νήμα πριν την τοποθέτηση του σώματος Σ'.



Λύση:

i. Στη ράβδο ασκούνται τέσσερις δυνάμεις, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα:



Η δύναμη στην άρθρωση είναι κατακόρυφη, αφού όλες οι άλλες δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι κατακόρυφες.

Από την ισορροπία των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το αριστερό άκρο της A:

$$\sum M = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{T}|\ell - |\vec{B}|\frac{\ell}{2} - |\vec{N}_\Sigma|d = 0.$$

Εφόσον $m_\Sigma = \frac{m}{4}$, προκύπτει:

$$|\vec{T}| = \frac{mg}{2} + \frac{mgd}{4\ell} \;\Rightarrow\; |\vec{T}| = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{d}{2\ell}\right).$$

ii.

Η τάση του νήματος πριν την τοποθέτηση του δεύτερου σώματος προκύπτει από τη σχέση:

$$|\vec{T}| = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{d}{2\ell}\right).$$

Για $d = \frac{\ell}{4}$:

$$|\vec{T}| = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{9mg}{16}.$$

Μετά την τοποθέτηση του δεύτερου σώματος, από την ισορροπία των ροπών:

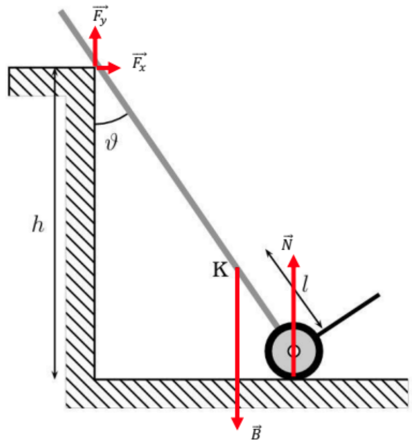
$$|\vec{T}'|\ell - |\vec{B}|\frac{\ell}{2} - |\vec{N}_\Sigma|\frac{\ell}{4} - |\vec{N}_{\Sigma'}|\frac{3\ell}{4} = 0.$$

$$|\vec{T}'|\ell - \frac{mg\ell}{2} - \frac{mg\ell}{16} - \frac{3mg\ell}{8} = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{T}'| = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{3}{8}\right) = \frac{15mg}{16}.$$

Άρα:

$$\frac{|\vec{T}'|}{|\vec{T}|} = \frac{15/16}{9/16} = \frac{5}{3}.$$

35. Ένα αμαξάκι μεταφοράς φορτίου έχει βάρος $\vec{B}$ και ηρεμεί ακουμπισμένο σε τραπέζι ύψους h, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κέντρο βάρους του, K, απέχει απόσταση l από το κέντρο του τροχού.



i. Θεωρώντας αμελητέα την τριβή στους τροχούς, να προσδιορίσετε τα πιο κάτω σε συνάρτηση με τα μεγέθη l, h και B:

α) Τη συνολική κάθετη δύναμη που ασκεί το πάτωμα στους τροχούς.

β) Την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το άκρο του τραπεζιού στο αμαξάκι.

ii. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής του άκρου του τραπεζιού με το αμαξάκι είναι μ_σ, να προσδιορίσετε τη μικρότερη γωνία $\vartheta_{\text{ολ}}$ για την οποία το αμαξάκι δεν θα γλιστρήσει.

Λύση:

i.

α) Στο αμαξάκι ασκούνται, εκτός από το βάρος του, οι δυνάμεις από τα σώματα με τα οποία είναι σε επαφή: η δύναμη $\vec{N}$ από το πάτωμα (κατακόρυφη) και η δύναμη $\vec{F}$ από το άκρο του τραπεζιού, η οποία αναλύεται σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$. Από την ισορροπία ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο αμαξάκι:

$$\sum M = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{N}|\, h\cos\vartheta - |\vec{B}|(h - l\sin\vartheta) = 0.$$

Άρα:

$$|\vec{N}| = \left(1 - \frac{l}{h}\sin\vartheta\right)|\vec{B}|.$$

β) Από ισορροπία δυνάμεων στο αμαξάκι:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow N + F_y - B = 0.$$

Άρα:

$$|\vec{F}_y| = |\vec{B}| - |\vec{N}| = |\vec{B}|\frac{l}{h}\sin\vartheta.$$

ii. Η δύναμη που ασκεί το τραπέζι στο αμαξάκι είναι κατακόρυφη $\vec{F}$, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες: μία παράλληλη με τον βραχίονα (τριβή) και μία κάθετη σε αυτόν:

$$F_{y\parallel} = F_y\cos\vartheta = |\vec{B}|\frac{l}{h}\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad F_{y\perp} = F_y\sin\vartheta = |\vec{B}|\frac{l}{h}\sin^2\vartheta.$$

Για να μην γλιστρήσει το αμαξάκι πρέπει:

$$F_{y\parallel} \leq \mu_\sigma F_{y\perp} \;\Rightarrow\; \frac{F_{y\parallel}}{F_{y\perp}} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \leq \mu_\sigma \;\Rightarrow\; \tan\vartheta \geq \frac{1}{\mu_\sigma}.$$

Άρα η μικρότερη γωνία ισορροπίας είναι:

$$\vartheta_{\text{ολ}} = \arctan\left(\frac{1}{\mu_\sigma}\right)$$