Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

i. $\text{τοξημ}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii. $\text{τοξσυν}(1)$

iii. $\text{τοξεφ}(1)$

iv. $\text{τοξημ}\big(\text{ημ}(2\pi/3)\big)$

v. $\text{συν}\left(\text{τοξημ}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

vi. $\text{ημ}\big(2\,\text{τοξεφ}\sqrt{2}\big)$

Λύση: (Ασκ. 1/120)

i.

$$\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3},\quad \text{διότι ημ}\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

ii.

$$\text{τοξσυν}(1)=0,\quad \text{διότι συν}(0)=1.$$

iii.

$$\text{τοξεφ}(1)=\frac{\pi}{4},\quad \text{διότι } \tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=1.$$

iv.

$$\text{τοξημ}\big(\text{ημ}(2\pi/3)\big)=\text{τοξημ}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\tfrac{\pi}{3}.$$

v. Θέτουμε $\alpha=\text{τοξημ}\left(\tfrac{1}{2}\right) \implies \text{ημ}\alpha=\tfrac{1}{2}$

$$\text{ημ}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha=1 \;\Rightarrow\; \text{συν}^2\alpha=1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{3}{4} \implies \text{συν}\alpha=\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα

$$\text{συν}\big(\text{τοξημ}\left(\tfrac{1}{2}\right)\big)=\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

vi. Έστω $\alpha=\text{τοξεφ}\sqrt{2}$. Τότε $\tan\alpha=\sqrt{2}$. Άρα:

$$\text{ημ}(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{1+2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $ημ\left(τοξσφ\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

ii. $συν\left(τοξσφ\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

Λύση: (Ασκ. 2/120)

Θέτουμε

$$\theta = τοξσφ\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow σφ\,\theta = -\frac{1}{2}, \quad \theta \in (0,\pi).$$

Εφόσον $σφ\,\theta < 0$, προκύπτει $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα $ημ\,\theta > 0$ και $συν\,\theta < 0$.

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$1 + σφ^2\theta = \frac{1}{ημ^2\theta},$$

η οποία προκύπτει από $σφ\,\theta = \dfrac{συν\,\theta}{ημ\,\theta}$ και $ημ^2\theta + συν^2\theta = 1$:

$$1 + \left(\frac{συν\,\theta}{ημ\,\theta}\right)^2 = \frac{ημ^2\theta + συν^2\theta}{ημ^2\theta} = \frac{1}{ημ^2\theta}.$$

Με $σφ\,\theta = -\frac{1}{2}$ έχουμε

$$ημ\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1+σφ^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} > 0.$$

Επίσης $συν\,\theta = σφ\,\theta \cdot ημ\,\theta$, οπότε

$$συν\,\theta = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0.$$

3. Να αποδείξετε ότι, για $x \neq 0$,

$$τοξεφ\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - τοξεφ\,x, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - τοξεφ\,x, & x < 0\ . \end{cases}$$

Λύση: (Ασκ. 3/120)

Θέτουμε $\theta = \text{τοξεφ}\, x$. Τότε $\text{εφ}\,\theta = x$ και $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Θέτουμε επίσης $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$. Έχουμε

$$\text{εφ}\,\varphi = \text{εφ}\big(\tfrac{\pi}{2} - \theta\big) = \text{σφ}\,\theta = \frac{1}{\text{εφ}\,\theta} = \frac{1}{x}.$$

Άρα φ είναι κάποια γωνία με εφαπτομένη $1/x$. Επειδή η τοξεφ παίρνει τιμές στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

i. $x > 0$. Τότε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ και άρα $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Επομένως η κύρια τιμή είναι ακριβώς αυτή:

$$\text{τοξεφ}\big(\tfrac{1}{x}\big) = \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x.$$

ii. $x < 0$. Τότε $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ και $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, άρα δεν ανήκει στο διάστημα τιμών της τοξεφ. Χρησιμοποιούμε την περιοδικότητα της εφαπτομένης ($\text{εφ}(\alpha - \pi) = \text{εφ}\,\alpha$) και παίρνουμε

$$\text{τοξεφ}\big(\tfrac{1}{x}\big) = \varphi - \pi = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \theta = -\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x.$$

Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει ο ζητούμενος τύπος.

4. Να εκφράσετε τις παραστάσεις $\text{ημ}(\text{τοξεφ}\, x)$ και $\text{συν}(\text{τοξσφ}\, x)$ ως αλγεβρικές παραστάσεις του x.

Λύση: (Ασκ. 4/120)

i. Θέτουμε $\theta = \text{τοξεφ}\, x \Rightarrow \text{εφ}\,\theta = x$ και $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{συν}\,\theta > 0$. Από την ταυτότητα $1 + \text{εφ}^2\theta = \dfrac{1}{\text{συν}^2\theta}$ παίρνουμε

$$\text{συν}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{ημ}\,\theta = \text{εφ}\,\theta \cdot \text{συν}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Άρα

$$\text{ημ}(\text{τοξεφ}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ii. Θέτουμε $\varphi = \text{τοξσφ}\, x \Rightarrow \text{σφ}\,\varphi = x$ και $\varphi \in (0, \pi) \Rightarrow \text{ημ}\,\varphi > 0$. Από την ταυτότητα

$1 + \text{σφ}^2\varphi = \dfrac{1}{\text{ημ}^2\varphi}$ έχουμε

$$\text{ημ}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{συν}\,\varphi = \text{σφ}\,\varphi \cdot \text{ημ}\,\varphi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Άρα

$$\text{συν}(\text{τοξσφ}\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ , \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια.

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}\,x}{e^{2x}-1}$

ii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}\,x}{\text{τοξεφ}(2x)}$

iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}(2x)}{\text{τοξεφ}(2x)}$

iv. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξεφ}\,x - x + \dfrac{x^3}{3}}{x^3}$

Λύση: (Ασκ. 1/124)

i. Μορφή 0/0. Εφαρμόζουμε de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}\,x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

ii. Μορφή 0/0. De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξημ}\,x}{\text{τοξεφ}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{2}{1+(2x)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+(2x)^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}.$$

iii. Μορφή 0/0. De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}(2x)}{\text{τοξεφ}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\text{συν}(2x)}{\dfrac{2}{1+(2x)^2}} = \lim_{x\to 0} \text{συν}(2x)\,(1+4x^2) = 1.$$

iv. Μορφή 0/0. Θέτουμε $f(x) = \text{τοξεφ}\, x - x + \dfrac{x^3}{3}$. Εφαρμόζουμε de L'Hôpital δύο φορές:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3x^2}, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2.$$

Και πάλι 0/0. Ξανά de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} + 2x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(1+x^2)^2} + 1}{6} = \frac{0}{6} = 0.$$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \text{τοξημ}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

ii. $f(x) = \text{τοξσυν}\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

iii. $f(x) = \text{τοξεφ}\big(\text{εφ}^2 x\big)$

iv. $f(x) = \text{τοξεφ}\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$

v. $f(x) = \text{τοξσυν}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Λύση: (Ασκ. 2/124)

i. $f(x) = \text{τοξημ}\big(\frac{x}{2}\big)$
Πεδίο ορισμού: $|x/2| \le 1 \;\Rightarrow\; x \in [-2, 2]$.
Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(x/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in (-2, 2).$$

ii. $f(x) = \text{τοξσυν}\Big(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\Big)$
Πεδίο ορισμού: $-1 \le \frac{1-x}{\sqrt{2}} \le 1 \;\Rightarrow\; x \in [1-\sqrt{2},\, 1+\sqrt{2}]$.
Παράγωγος:

$$f'(x) = -\frac{-1/\sqrt{2}}{\sqrt{1-\big(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\big)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}, \quad x \in (1-\sqrt{2},\, 1+\sqrt{2}).$$

iii. $f(x) = \text{τοξεφ}\big(\text{εφ}^2 x\big)$

Πεδίο ορισμού: ορίζεται η εφ$x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{(\text{εφ}^2 x)'}{1+\text{εφ}^4 x} = \frac{2\,\text{εφ}x \cdot \frac{1}{\text{συν}^2 x}}{1+\text{εφ}^4 x} = \frac{2\,\text{εφ}x\,(1+\text{εφ}^2 x)}{1+\text{εφ}^4 x}.$$

iv. $f(x) = \text{τοξεφ}\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$

Πεδίο ορισμού: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + (x+\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

v. $f(x) = \text{τοξσυν}\big(\frac{1}{x}\big)$

Πεδίο ορισμού: $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1 \ \Rightarrow\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = -\frac{-1/x^2}{\sqrt{1-(1/x)^2}} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| \geq 1,\ x \neq 0.$$

7. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = 3x - \text{τοξημ}\,x$, με $A_f = [-1, 1]$.

Λύση: (Ασκ. 3/124)

Για $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Θέτουμε $f'(x) = 0$:

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3} \iff x^2 = \frac{8}{9} \iff x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Σχόλιο: Στα άκρα $x = \pm 1$ η παράγωγος δεν ορίζεται κάποια σχολικά τα περιλαμβάνουν ως «κρίσιμα» μόνο όταν ζητούνται άκρα σε κλειστό διάστημα. Εδώ, ως εσωτερικά κρίσιμα σημεία, είναι μόνο τα $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

8. Να βρείτε τα *τοπικά μέγιστα/ελάχιστα* των παρακάτω συναρτήσεων *και* να συμπληρώσετε τον πίνακα μονοτονίας:

i. $f(x) = x - 2\,\text{τοξεφ}\, x$

ii. $f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$

iii. $f(x) = \text{τοξημ}(e^x)$.

Λύση: (Ασκ. 4/124)

i. $f(x) = x - 2\,\text{τοξεφ}\, x.$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}.$$

Κρίσιμα σημεία (εσωτερικά): $x = \pm 1$.
Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		1	
$+\infty$						
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$

Άρα: τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ με $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$, τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ με $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

ii.

$f(x) = \text{τοξσυν}(x^2).$

$$A_f = [-1,1], \qquad f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad |x| < 1.$$

Εσωτερικό κρίσιμο σημείο: $x = 0$.
Πίνακας μονοτονίας στο $[-1,1]$:

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	

Επιπλέον, στα άκρα: $f(\pm 1) = \text{τοξσυν}(1) = 0$ (τοπικά ελάχιστα στο κλειστό διάστημα).
Στο $x = 0$: τοπικό μέγιστο $f(0) = \text{τοξσυν}(0) = \frac{\pi}{2}$.

iii.

$f(x) = \text{τοξημ}(e^x).$

$$A_f = (-\infty, 0], \qquad f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \quad x < 0.$$

Για $x < 0$, $f'(x) > 0$ (αύξουσα).
Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Μέγιστο στο άκρο

Τιμές: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{τοξημ}(0) = 0$, ενώ $f(0) = \text{τοξημ}(1) = \frac{\pi}{2}$. Άρα στο $x = 0$ η f έχει *(καθολικό/τοπικό) μέγιστο στο άκρο* του πεδίου.

9. Να δείξετε ότι:

$$x \le \text{τοξημ}\, x, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Λύση: (Ασκ. 5/124)

Θέτουμε $g(x) = \text{τοξημ}\, x - x$ για $x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

Για $x \in [0,1)$ ισχύει $\sqrt{1-x^2} \le 1$, άρα $g'(x) \ge 0$ (και μάλιστα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$). Επομένως η g είναι αύξουσα στο $[0,1]$ και

$$g(x) \ \ge \ g(0) = \text{τοξημ}\, 0 - 0 = 0.$$

Άρα

$$x \le \text{τοξημ}\, x, \qquad \forall x \in [0,1],$$

με ισότητα μόνο στο $x = 0$ (διότι για $x \in (0,1)$ έχουμε $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$).

Εναλλακτικά: Θέτουμε $y = \text{τοξημ}\, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x = \text{ημ}\, y$. Η ημ είναι κοίλη στο $[0,\pi]$, άρα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο 0: $\text{ημ}\, y \le y$ για $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Άρα $x = \text{ημ}\, y \le y = \text{τοξημ}\, x$.

10. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \text{ημ}\left(\text{τοξημ}\left(\frac{4}{5}\right)\right).$$

Λύση: (Ασκ. 1/125)

Θέτουμε $\theta = \text{τοξημ}\left(\frac{4}{5}\right)$. Τότε $\text{ημ}\,\theta = \frac{4}{5}$ και $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (κύριο διάστημα τιμών της τοξημ). Άρα

$$A = \text{ημ}(\theta) = \frac{4}{5}$$

11. Να δείξετε ότι

$$\text{τοξσυν}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξσυν}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση: (Ασκ. 2/125)

Θέτουμε

$$\alpha = \text{τοξσυν}\left(\frac{3}{4}\right), \qquad \beta = \text{τοξσυν}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Τότε

$$\text{συν}\,\alpha = \frac{3}{4}, \quad \text{συν}\,\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (αφού οι συνημίτονες είναι θετικοί).}$$

Άρα

$$\text{ημ}\,\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad \text{ημ}\,\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

Υπολογίζουμε το $\text{συν}(\alpha + \beta)$:

$$\text{συν}(\alpha + \beta) = \text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta - \text{ημ}\,\alpha\,\text{ημ}\,\beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

Επειδή $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, έχουμε $\alpha + \beta \in [0, \pi]$. Η μοναδική γωνία στο $[0, \pi]$ με $\text{συν}(\alpha + \beta) = 0$ είναι $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Επομένως

$$\text{τοξσυν}\left(\tfrac{3}{4}\right) + \text{τοξσυν}\left(\tfrac{\sqrt{7}}{4}\right) = \tfrac{\pi}{2}$$

12. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{τοξσυν}(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}.$$

Λύση: (Ασκ. 3/125)

Για $x \to 0^+$ έχουμε $\text{τοξσυν}(1-x) \to \text{τοξσυν}(1) = 0$ και $\sqrt{x} \to 0$, άρα η μορφή είναι $0/0$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{τοξσυν}(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{d}{dx}\left[\text{τοξσυν}(1-x)\right]}{\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]}.$$

Ισχύει $\dfrac{d}{dx}\text{τοξσυν}\, u = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. Με $u = 1-x \Rightarrow u' = -1$ παίρνουμε

$$\big(\text{τοξσυν}(1-x)\big)' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{τοξσυν}(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}.$$

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \dfrac{x}{2}\,\text{τοξημ}\, x + \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$

ii. $f(x) = 2x\,\text{τοξεφ}\, x - \ln(1+x^2)$

iii. $f(x) = \text{τοξημ}\big(\sqrt{1-x}\,\big)$

Λύση: (Ασκ. 4/125)

i.

$$A_f = [-1,1], \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\,\text{τοξημ}\, x + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$$

(εναλλακτικά: $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\text{τοξημ}\, x + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x-x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$.)

ii.

$$A_f = \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2\,\text{τοξεφ}\,x \quad (\text{διότι } (2x)\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 0).$$

iii.

$$A_f = [0,1], \qquad f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1.$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τεμ}\,x,\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να σχεδιάσετε πρόχειρα τη γραφική παράστασή της.

Λύση: (Ασκ. 5/125)

(i) Μονοτονία και εικόνα της f.

$$f'(x) = (\text{τεμ}\,x)' = \text{τεμ}\,x \cdot \text{εφ}\,x.$$

Στα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ισχύει $\text{τεμ}\,x \cdot \text{εφ}\,x > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα σε καθένα. Επίσης

$$\text{τεμ}\,0 = 1, \qquad \text{τεμ}\,\pi = -1, \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^-} \text{τεμ}\,x = +\infty, \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^+} \text{τεμ}\,x = -\infty.$$

Άρα

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \ \cup\ [1, +\infty).$$

(ii) Πεδίο ορισμού και τύπος της f^{-1}. Η f είναι 1–1 στο δοθέν πεδίο της, επομένως αντιστρέψιμη, με

$$A_{f^{-1}} = (-\infty, -1] \ \cup\ [1, +\infty)$$

Από $y = \text{τεμ}\,x \ \Leftrightarrow\ \text{συν}\,x = \dfrac{1}{y}$ (και $\text{τοξσυν} : [-1,1] \to [0,\pi]$) προκύπτει

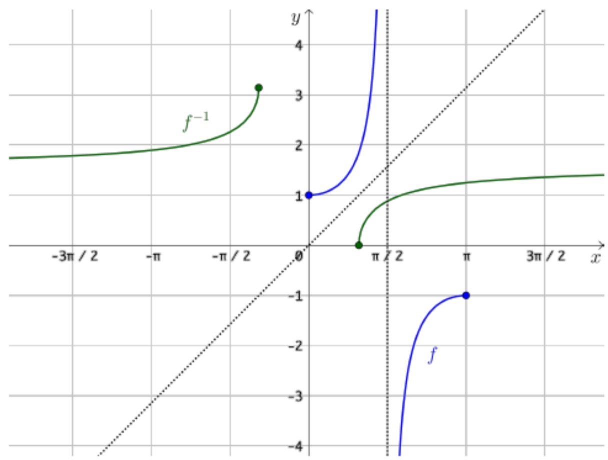
$$f^{-1}(y) = \text{τοξσυν}\left(\frac{1}{y}\right), \qquad |y| \geq 1$$

(iii) Οδηγός για το σκίτσο της f^{-1}. Δύο κλάδοι, συμμετρικοί της γραφικής της f ως προς $y = x$:

$$y \geq 1: \quad f^{-1}(y) = \text{τοξσυν}\left(\tfrac{1}{y}\right), \ \ y(=x)\uparrow,\ f^{-1}(1) = 0, \ \ \lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = \tfrac{\pi}{2}^-,$$

$$y \leq -1: \quad f^{-1}(y) = \text{τοξσυν}\left(\tfrac{1}{y}\right), \ \ y(=x)\uparrow,\ f^{-1}(-1) = \pi, \ \ \lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = \tfrac{\pi}{2}^+.$$

(Οριζόντια ασύμπτωτη και στους δύο κλάδους: $y = \frac{\pi}{2}$.)



16. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 4\,\text{τοξεφ}\,x - 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

Λύση: (Ασκ. 6/125)

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 2 = \frac{2-2x^2}{1+x^2}.$$

Κρίσιμα σημεία από $f'(x) = 0$:

$$\frac{4}{1+x^2} - 2 = 0 \iff 4 = 2(1+x^2) \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	

Τιμές στα κρίσιμα:

$$f(-1) = 4\,\text{τοξεφ}(-1) - 2(-1) = -\pi + 2, \qquad f(1) = 4\,\text{τοξεφ}(1) - 2 = \pi - 2.$$

Τοπικό ελάχιστο στο $x = -1$ με $f(-1) = 2 - \pi$, Τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ με $f(1) = \pi - 2$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ}\, x - x + \dfrac{x^3}{3}$. Να αποδείξετε ότι $x - \dfrac{x^3}{3} < \text{τοξεφ}\, x$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Λύση: (Ασκ. 7/125)

Θέτουμε

$$g(x) = \text{τοξεφ}\, x - x + \frac{x^3}{3}.$$

Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{-x^2}{1+x^2} + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Άρα η g είναι *γνησίως αύξουσα* στο $(0, +\infty)$.

Επιπλέον

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \text{τοξεφ}\, 0 - 0 + 0 = 0.$$

Με την αύξηση της g παίρνουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή

$$x - \frac{x^3}{3} < \text{τοξεφ}\, x, \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

(ισότητα μόνο στο $x = 0$).

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

18. Να δείξετε ότι

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{και} \qquad 2\,\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Λύση: (Ασκ. 1/126)

Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\text{τοξεφ}\, a + \text{τοξεφ}\, b = \text{τοξεφ}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \quad (\text{όταν } ab < 1), \qquad 2\,\text{τοξεφ}\, t = \text{τοξεφ}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right) \quad (|t| < 1).$$

(i) Με $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{3}$ έχουμε $ab = \frac{1}{6} < 1$ και

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \text{τοξεφ}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right) = \text{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) Πρώτα

$$2\,\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \text{τοξεφ}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) = \text{τοξεφ}\left(\frac{2/3}{8/9}\right) = \text{τοξεφ}\left(\frac{3}{4}\right).$$

Έπειτα, με $a = \frac{3}{4},\ b = \frac{1}{7}$ (έτσι $ab = \frac{3}{28} < 1$):

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right) = \text{τοξεφ}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}\right) = \text{τοξεφ}\left(\frac{25/28}{25/28}\right) = \text{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα ισχύει

$$\text{τοξεφ}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \text{τοξεφ}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} = 2\,\text{τοξεφ}\left(\tfrac{1}{3}\right) + \text{τοξεφ}\left(\tfrac{1}{7}\right)$$

19. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξημ}\,x,\ x \in [-1,1]$ είναι περιττή.

Λύση: (Ασκ. 2/126)

Θυμόμαστε τον ορισμό: μια συνάρτηση f είναι *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x του πεδίου της.

Έστω $x \in [-1,1]$ και θέτουμε

$$\theta = \text{τοξημ}\,x \ \in \ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \text{ημ}\,\theta = x.$$

Τότε και $-\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και

$$\text{ημ}(-\theta) = -\,\text{ημ}\,\theta = -x.$$

Με βάση τον ορισμό της τοξημ (η μοναδική γωνία του $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με δεδομένο ημίτονο), προκύπτει

$$\text{τοξημ}(-x) = -\theta = -\,\text{τοξημ}\,x.$$

Άρα $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$, δηλαδή η f είναι *περιττή*. $\square$

20. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξσυν}\, x$, $x \in [-1, 1]$, δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

Λύση: (Ασκ. 3/126)

Για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει

$$\text{τοξσυν}(-x) = \pi - \text{τοξσυν}(x).$$

Πράγματι, αν θέσουμε $\theta = \text{τοξσυν}(x) \in [0, \pi]$, τότε $\cos\theta = x$ και $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -x$.

Επειδή $\pi - \theta \in [0, \pi]$ (το διάστημα τιμών της τοξσυν), η μοναδικότητα δίνει $\text{τοξσυν}(-x) = \pi - \theta = \pi - \text{τοξσυν}(x)$.

Όχι άρτια:

Αν ήταν άρτια, θα είχαμε $f(-x) = f(x)$ για όλα τα x, δηλαδή $\pi - \text{τοξσυν}(x) = \text{τοξσυν}(x) \Rightarrow \text{τοξσυν}(x) = \frac{\pi}{2}$ για όλα τα x. Αυτό είναι ψευδές (π.χ. $f(1) = \text{τοξσυν}(1) = 0 \neq \frac{\pi}{2}$). Άρα η f δεν είναι άρτια.

Όχι περιττή:

Αν ήταν περιττή, θα είχαμε $f(-x) = -f(x)$ για όλα τα x, δηλαδή $\pi - \text{τοξσυν}(x) = -\text{τοξσυν}(x) \Rightarrow \text{τοξσυν}(x) = \frac{\pi}{2}$ για όλα τα x, που επίσης είναι ψευδές (π.χ. $f(1) = 0$). Άρα η f δεν είναι περιττή.

Η $f(x) = \text{τοξσυν}\, x$ στο $[-1, 1]$ δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ}\, x$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x}{1 + x^2} < \text{τοξεφ}\, x < x, \qquad \forall x \in (0, +\infty).$$

Λύση: (Ασκ. 4/126)

(α) Άνω φράγμα. Θέτουμε $h(x) = x - \text{τοξεφ}\, x$, για $x > 0$. Τότε

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2} > 0, \qquad x > 0,$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0$, παίρνουμε $h(x) > 0 \Rightarrow \text{τοξεφ}\, x < x$ για κάθε $x > 0$.

(β) Κάτω φράγμα. Θέτουμε $g(x) = \text{τοξεφ}\, x - \dfrac{x}{1+x^2}$, για $x > 0$. Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Άρα $\text{τοξεφ}\, x > \dfrac{x}{1+x^2}$ για κάθε $x > 0$.

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{τοξεφ}\, x < x, \quad \forall x > 0$$

22. Να αποδείξετε ότι

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{τοξεφ}\, x + \frac{\pi}{4}, \qquad \forall x \in (-\infty, 1),$$

και να βρείτε ανάλογη σχέση για $x > 1$.

Λύση: (Ασκ. 5/126)

Θέτουμε $\theta = \text{τοξεφ}\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan\theta = x$.

Για $\varphi = \theta + \frac{\pi}{4}$ έχουμε

$$\tan\varphi = \tan\left(\theta + \tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta} = \frac{1+x}{1-x}.$$

• Αν $x < 1$, τότε $\theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα η κύρια τιμή της τοξεφ είναι ακριβώς η φ:

$$\text{τοξεφ}\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) = \varphi = \text{τοξεφ}\, x + \tfrac{\pi}{4}.$$

• Αν $x > 1$, τότε $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Η τοξεφ επιστρέφει τιμές στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, γι' αυτό παίρνουμε την συνεκτική γωνία $\varphi - \pi$:

$$\text{τοξεφ}\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) = \varphi - \pi = \text{τοξεφ}\, x + \tfrac{\pi}{4} - \pi = \text{τοξεφ}\, x - \tfrac{3\pi}{4}, \qquad x > 1.$$

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \text{τοξεφ}\, x + \dfrac{\pi}{4}, & x < 1, \\ \text{τοξεφ}\, x - \dfrac{3\pi}{4}, & x > 1\ . \end{cases}$$