
Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος

Κύκλος

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που:

- i. έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3,
- ii. έχει κέντρο $(-2, -2)$ και διάμετρο 2
- iii. έχει κέντρο $(1, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $(9, -7)$,
- iv. έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB , $A(12, 4)$, $B(6, -4)$.

Λύση:

(Ασκ. 1/19)

- i. Κέντρο $K(0, 0)$, ακτίνα $R = 3$. Η ειδική μορφή δίνει

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

- ii. Κέντρο $K(-2, -2)$, διάμετρος 2 $\Rightarrow R = 1$. Άρα

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

- iii. Κέντρο $K(1, -1)$. Η ακτίνα από το σημείο $(9, -7)$:

$$R^2 = (9 - 1)^2 + (-7 - (-1))^2 = 8^2 + (-6)^2 = 64 + 36 = 100.$$

Επομένως

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 100$$

- iv. Διάμετρος AB με $A(12, 4)$, $B(6, -4)$.

$$K\left(\frac{12+6}{2}, \frac{4+(-4)}{2}\right) = (9, 0), \quad AB^2 = (12-6)^2 + (4-(-4))^2 = 6^2 + 8^2 = 100.$$

Άρα $R = \frac{AB}{2} = 5$ και η εξίσωση είναι

$$(x - 9)^2 + y^2 = 25$$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο. Στην περίπτωση που παριστάνουν, να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

i. $x^2 + y^2 = 4$

ii. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 36$

iii. $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$

iv. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$

Λύση:

(Ασκ. 2/19)

i. Είναι η ειδική μορφή $x^2 + y^2 = R^2$. Άρα παριστάνει κύκλο με

$$K(0, 0), \quad R = 2.$$

ii. Είναι ήδη στην τυπική μορφή $(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$. Επομένως

$$K(2, -1), \quad R = 6.$$

iii. Ολοκληρώνουμε τετράγωνο:

$$x^2 - 2x + y^2 + 8y - 8 = 0 \iff (x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 - 8 = 0$$

$$\iff (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

Άρα παριστάνει κύκλο με

$$K(1, -4), \quad R = 5.$$

iv. Διαιρούμε με 2:

$$x^2 + y^2 - 3x + y - \frac{3}{2} = 0 \iff (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\iff (x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 4.$$

Άρα παριστάνει κύκλο με

$$K(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), \quad R = 2.$$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 2y + \lambda = 0$ παριστάνει κύκλο.

Λύση:

(Ασκ. 3/19)

Συμπληρώνουμε τετράγωνα:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 2y + \lambda = 0 &\iff (x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 + \lambda = 0 \\ &\iff (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10 - \lambda. \end{aligned}$$

Για να παριστάνει κύκλο πρέπει το δεξί μέλος να είναι θετικό:

$$10 - \lambda > 0 \iff \lambda < 10.$$

Άρα ο κύκλος υπάρχει για $\lambda < 10$ και έχει

$$K(3, 1), \quad R = \sqrt{10 - \lambda}.$$

Παρατήρηση: Για $\lambda = 10$ παίρνουμε εκφυλισμένο “κύκλο” (σημείο) στο $(3, 1)$, ενώ για $\lambda > 10$ δεν υπάρχει γεωμετρικός τόπος.

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$, $B(1, -1)$ και $\Gamma(-3, -1)$.

Λύση:

(Ασκ. 4/19)

Θέτουμε τη γενική μορφή $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. Επειδή τα σημεία ανήκουν στον κύκλο:

$$\begin{cases} 1 + 9 + 2g + 6f + c = 0 \\ 1 + 1 + 2g - 2f + c = 0 \\ 9 + 1 - 6g - 2f + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2g + 6f + c = -10 \\ 2g - 2f + c = -2 \\ -6g - 2f + c = -10 \end{cases}$$

Λύνοντας: $g = 1$, $f = -1$, $c = -6$. Επομένως

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0.$$

Σε κανονική μορφή:

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8,$$

άρα

$$K(-1, 1), \quad R = 2\sqrt{2}.$$

5. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 3$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το σημείο $M(-1, 1)$.

Λύση:

(Ασκ. 5/19)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{3}$. Για χορδή με μέσο $M(x_0, y_0)$ σε κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ ισχύει

$$x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2$$

(διότι $\overrightarrow{OM} \perp$ χορδή, άρα $(x - x_0, y - y_0) \cdot (x_0, y_0) = 0$).

Για $M(-1, 1)$ έχουμε $x_0^2 + y_0^2 = 1 + 1 = 2 < 3$ (άρα πράγματι χορδή) και

$$(-1)x + 1 \cdot y = 2 \iff y - x = 2$$

6. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 9 = 0$. Να βρείτε το μήκος της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το σημείο $M(-2, -1)$.

Λύση:

(Ασκ. 6/19)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y - 9 = 0 \iff (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 17.$$

Άρα $K(-2, -2)$, $R = \sqrt{17}$. Το μέσο $M(-2, -1)$ απέχει από το κέντρο

$$KM = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (-1 + 2)^2} = 1.$$

Το μήκος ℓ της χορδής με μέσο το M δίνεται από

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - KM^2} = 2\sqrt{17 - 1} = 8$$

Έλεγχος: Η χορδή είναι οριζόντια ($KM \perp$ χορδή) με $y = -1$.

Τότε $(x + 2)^2 + 1 = 17 \Rightarrow x = 2$ ή $x = -6$, άρα άκρα $(2, -1)$, $(-6, -1)$ και μήκος 8.

7. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(3, 4)$, $(5, 0)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $x + y = 3$.

Λύση:

(Ασκ. 7/19)

Έστω $K(a, b)$ το κέντρο. Αφού ο κύκλος διέρχεται από $A(3, 4)$ και $B(5, 0)$, το K ανήκει στην κάθετη μεσοκάθετο του AB .

Μέσο M του AB :

$$M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (4, 2).$$

Κλίση AB : $m_{AB} = \frac{0-4}{5-3} = -2 \Rightarrow$ κλίση μεσοκαθέτου $m_{\perp} = \frac{1}{2}$. Εξίσωση μεσοκαθέτου από το M :

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 4) \implies y = \frac{x}{2}.$$

Επειδή το K είναι και στην $x + y = 3$, λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 3 \end{cases} \implies x = 2, y = 1.$$

Άρα $K(2, 1)$. Η ακτίνα:

$$R^2 = KA^2 = (3-2)^2 + (4-1)^2 = 1 + 9 = 10.$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \implies x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$$

8. Δίνονται τα σημεία $A(0, 3)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(1, 0)$.

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή.

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ .

Λύση:

(Ασκ. 8/19)

i. $\overrightarrow{AB} = (3-0, 4-3) = (3, 1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (1-0, 0-3) = (1, -3)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$$

Άρα οι \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετες και η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή.

ii. Θεωρούμε τη γενική μορφή $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. Επειδή τα τρία σημεία ανήκουν στον κύκλο:

$$\begin{cases} 0^2 + 3^2 + 0 + 6f + c = 0 \\ 3^2 + 4^2 + 6g + 8f + c = 0 \\ 1^2 + 0^2 + 2g + 0 + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6f + c = -9 \\ 6g + 8f + c = -25 \\ 2g + c = -1 \end{cases}$$

Λύνοντας, $f = -2$, $g = -2$, $c = 3$. Άρα

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

ή, σε κανονική μορφή,

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

Επομένως $K(2, 2)$ και $R = \sqrt{5}$.

9. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 3)$, $(-3, -4)$ και $(1, 4)$.

Λύση:

(Ασκ. 9/19)

Θέτουμε τη γενική μορφή $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. Επειδή τα τρία σημεία ανήκουν στον κύκλο:

$$\begin{cases} (-2)^2 + 3^2 - 4g + 6f + c = 0 \\ (-3)^2 + (-4)^2 - 6g - 8f + c = 0 \\ 1^2 + 4^2 + 2g + 8f + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4g + 6f + c = -13 \\ -6g - 8f + c = -25 \\ 2g + 8f + c = -17 \end{cases}$$

Από το σύστημα παίρνουμε $g = -1$, $f = 1$, $c = -23$. Άρα

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0.$$

Σε κανονική μορφή:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25,$$

οπότε

$$K(1, -1), \quad R = 5.$$

10. Να βρείτε τη θέση των ευθειών

$$(\varepsilon_1) : 4x - y + 13 = 0, \quad (\varepsilon_2) : y = 2x, \quad (\varepsilon_3) : y = 5$$

ως προς τον κύκλο με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x - 16 = 0.$$

Λύση:

(Ασκ. 1/27)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνο στην εξίσωση του κύκλου:

$$x^2 - 2x + y^2 - 16 = 0 \iff (x - 1)^2 + y^2 = 17.$$

Άρα το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου είναι

$$K(1, 0), \quad R = \sqrt{17}.$$

Η απόσταση του $K(1, 0)$ από ευθεία $Ax + By + C = 0$ είναι

$$d = \frac{|Ax_K + By_K + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1. Για την (ε_1) : $4x - y + 13 = 0$

$$d_1 = \frac{|4(1) - 0 + 13|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

Άρα $d_1 = R \Rightarrow \eta (\varepsilon_1)$ εφάπτεται του κύκλου.

2. Για την (ε_2) : $y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$

$$d_2 = \frac{|2(1) - 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Επειδή $d_2 < R$, η (ε_2) τέμνει τον κύκλο.

3. Για την (ε_3) : $y = 5 \Rightarrow y - 5 = 0$

$$d_3 = \frac{|0 - 5|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 5.$$

Επειδή $d_3 > R$, η (ε_3) είναι ξένη με τον κύκλο.

11. Αν ο κύκλος

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

εφάπτεται στον άξονα των τετμημένων, να δείξετε ότι $g^2 - c = 0$.

Λύση:

(Ασκ. 2/27)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$(x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c.$$

Άρα ο κύκλος έχει

$$K(-g, -f), \quad R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}.$$

Η απόσταση του K από τον άξονα x ($y = 0$) είναι

$$d = \text{dist}(K, y = 0) = |-f| = |f|.$$

Εφόσον υπάρχει εφαπτομένη, ισχύει $d = R$. Υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$f^2 = g^2 + f^2 - c \implies g^2 - c = 0.$$

Εναλλακτικά (κριτήριο διακρίνουσας): Επαφή με τον άξονα x σημαίνει ότι η εξίσωση τομής με $y = 0$

$$x^2 + 2gx + c = 0$$

έχει διπλή ρίζα. Άρα η διακρίνουσα είναι μηδέν:

$$\Delta = (2g)^2 - 4c = 0 \implies g^2 - c = 0.$$

12. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος:

- i. έχει κέντρο το σημείο $(1, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = 3x + 8$
- ii. έχει κέντρο το σημείο $(3, 2)$ και εφάπτεται στον άξονα των τεταγμένων
- iii. διέρχεται από το σημείο $(5, -3)$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ στο σημείο $(1, 1)$.

Λύση:

(Ασκ. 3/27)

i. Κέντρο $K(1, 1)$, εφαπτομένη $y = 3x + 8 \iff 3x - y + 8 = 0$. Η απόσταση του K από την ευθεία είναι

$$R = d = \frac{|3 \cdot 1 - 1 + 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10.$$

ii. Κέντρο $K(3, 2)$, εφαπτομένη ο άξονας y ($x = 0$). Άρα $R = \text{dist}(K, x = 0) = |3| = 3$.

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

iii. Εφαπτομένη $y = x$ στο $(1, 1)$. Η ακτίνα στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην $y = x$, άρα το κέντρο $K(a, b)$ ανήκει στην

$$y - 1 = -1(x - 1) \iff y = -x + 2.$$

Επιπλέον ο κύκλος περνά από $(1, 1)$ και $(5, -3)$, άρα

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = (a - 5)^2 + (b + 3)^2.$$

Με $b = -a + 2$ γίνεται $(a - 1)^2 = (a - 5)^2 \Rightarrow a = 3$, οπότε $b = -1$.

$$K(3, -1), \quad R^2 = (3 - 1)^2 + (-1 - 1)^2 = 8.$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8.$$

13. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\lambda y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $y = x + 4$ να εφάπτεται στον κύκλο.

Λύση:

(Ασκ. 4/27)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$x^2 + 2\lambda x + y^2 + 2\lambda y = 0 \iff (x + \lambda)^2 + (y + \lambda)^2 = 2\lambda^2.$$

Άρα

$$K(-\lambda, -\lambda), \quad R = \sqrt{2} |\lambda|.$$

Η ευθεία $y = x + 4 \iff x - y + 4 = 0$. Η απόσταση του K από αυτήν είναι

$$d = \frac{|(-\lambda) - (-\lambda) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Για εφαπτομένη θέλουμε $d = R$:

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2} |\lambda| \iff |\lambda| = 2 \iff \lambda = \pm 2.$$

14. Να δείξετε ότι η ευθεία

$$(x - \alpha) \eta\mu(\theta) + (y - \beta) \sigma\upsilon\nu(\theta) + R = 0$$

εφάπτεται στον κύκλο

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Λύση:

(Ασκ. 5/27)

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα $R > 0$. Η δοθείσα ευθεία γράφεται στη μορφή $Ax + By + C = 0$ ως

$$\eta\mu(\theta)x + \sigma\upsilon\nu(\theta)y + (R - \alpha \eta\mu(\theta) - \beta \sigma\upsilon\nu(\theta)) = 0,$$

όπου

$$A = \eta\mu(\theta), \quad B = \sigma\upsilon\nu(\theta), \quad C = R - \alpha \eta\mu(\theta) - \beta \sigma\upsilon\nu(\theta).$$

Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία είναι

$$d = \frac{|A\alpha + B\beta + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\alpha \eta\mu(\theta) + \beta \sigma\upsilon\nu(\theta) + R - \alpha \eta\mu(\theta) - \beta \sigma\upsilon\nu(\theta)|}{\sqrt{\eta\mu^2(\theta) + \sigma\upsilon\nu^2(\theta)}} = \frac{|R|}{1} = R.$$

Εφόσον $d = R$, η ευθεία απέχει από το κέντρο απόσταση ίση με την ακτίνα. άρα

η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Παρατήρηση: Το διάνυσμα $(\eta\mu(\theta), \sigma\upsilon\nu(\theta))$ είναι μοναδιαίο ($\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$) και κάθετο στην εφαπτομένη. η εξίσωση $(x - \alpha) \eta\mu\theta + (y - \beta) \sigma\upsilon\nu\theta = -R$ εκφράζει ότι το κανονικό γινόμενο με το κέντρο είναι ίσο με $-R$.

15. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι:

- i. διέρχονται από το σημείο $(-4, 2)$ και εφάπτονται στους άξονες των συντεταγμένων
- ii. διέρχονται από το σημείο $(2, 0)$ και εφάπτονται στις ευθείες $(\varepsilon_1) : 2x + y + 12 = 0$ και $(\varepsilon_2) : 2x + y - 8 = 0$
- iii. διέρχονται από τα $A(-3, 4)$, $B(-3, -4)$ και εφάπτονται στην $(\varepsilon) : 3x + 4y - 25 = 0$
- iv. εφάπτονται της ευθείας $y = 2x + 3$ στο σημείο $A(-1, 1)$ και έχουν ακτίνα $R = 2\sqrt{5}$.

Λύση:

(Ασκ. 6/27)

- i. Επαφή και με τους δύο άξονες \Rightarrow κέντρο $K(\pm r, \pm r)$, $r > 0$. Ελέγχοντας τις περιπτώσεις, μόνο το $K(-r, r)$ δίνει λύσεις. Με $P(-4, 2)$ επάνω στον κύκλο:

$$(r - 4)^2 + (2 - r)^2 = r^2 \iff r^2 - 12r + 20 = 0 \implies r = 2 \text{ ή } r = 10.$$

Άρα

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4, \quad (x + 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$$

- ii. Οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες· το μεσοπαράλληλο (γεωμετρικός τόπος ίσων αποστάσεων)

$$2x + y + \frac{12 + (-8)}{2} = 0 \implies 2x + y + 2 = 0$$

περιέχει το κέντρο $K(a, b)$. Η απόσταση από καθεμιά ευθεία είναι σταθερή και ίση με το μισό της μεταξύ τους απόστασης:

$$R = d(K, \varepsilon_1) = \frac{|(2a + b) + 12|}{\sqrt{5}} = \frac{|(-2) + 12|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Επειδή ο κύκλος περνά από $P(2, 0)$: $(a - 2)^2 + b^2 = 20$ και $2a + b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2a - 2$.

$$(a - 2)^2 + (-2a - 2)^2 = 20 \iff 5a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = \frac{6}{5} \text{ ή } a = -2.$$

Άρα $K(\frac{6}{5}, -\frac{22}{5})$ ή $K(-2, 2)$, με $R = 2\sqrt{5}$.

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{22}{5}\right)^2 = 20, \quad (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

iii. Τα $A(-3, 4)$, $B(-3, -4)$ έχουν μέσο $(-3, 0)$ και AB κατακόρυφη \Rightarrow η μεσοκάθετος είναι ο άξονας x ($y = 0$).

Θέτουμε $K(a, 0)$. Ακτίνα: $R = \sqrt{(a+3)^2 + 16}$.

Εξίσωση επαφής με (ε) : $R = \frac{|3a - 25|}{5}$.

$$\frac{(3a - 25)^2}{25} = (a + 3)^2 + 16 \iff a(16a + 300) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ή } a = -\frac{75}{4}.$$

Τότε

$$x^2 + y^2 = 25, \quad \left(x + \frac{75}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{65}{4}\right)^2$$

iv. Επαφή στο $A(-1, 1)$ με $y = 2x + 3$. Η κανονική στο σημείο έχει κλίση $-\frac{1}{2}$:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1) \iff x + 2y - 1 = 0.$$

Το κέντρο K ανήκει σε αυτήν και ικανοποιεί $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$. Με $y = \frac{1-x}{2}$:

$$(x + 1)^2 + \left(\frac{1-x}{2} - 1\right)^2 = 20 \iff \frac{5}{4}(x + 1)^2 = 20 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -5.$$

Άρα $K(3, -1)$ ή $K(-5, 3)$ και $R = 2\sqrt{5}$.

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20, \quad (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 20$$

16. Αν η ευθεία $(\varepsilon) : Ax + By + \Gamma = 0$ τέμνει τον κύκλο $(C) : x^2 + y^2 = R^2$ σε δύο σημεία, να δείξετε ότι

$$\frac{\Gamma^2}{A^2 + B^2} < R^2.$$

Λύση:

(Ασκ. 7/27)

Το (C) έχει κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα R . Η απόσταση του O από την (ε) είναι

$$d = \frac{|A \cdot 0 + B \cdot 0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Αφού η (ε) τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, ισχύει $d < R$. Υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$\frac{\Gamma^2}{A^2 + B^2} < R^2.$$

Εναλλακτικά (μέσω διακρίνουσας): Αν $B \neq 0$, από $y = -(Ax + \Gamma)/B$ στο $x^2 + y^2 = R^2$ προκύπτει

$$\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)x^2 + \frac{2A\Gamma}{B^2}x + \left(\frac{\Gamma^2}{B^2} - R^2\right) = 0.$$

Για δύο σημεία τομής θέλουμε $\Delta > 0$, όπου

$$\Delta = \frac{4}{B^2} \left[(A^2 + B^2)R^2 - \Gamma^2 \right] > 0 \iff \frac{\Gamma^2}{A^2 + B^2} < R^2.$$

(Η περίπτωση $B = 0$ είναι ανάλογη, λύνοντας ως προς x .)

17. Να χαρακτηρίσετε $\Sigma\Omega\sigma\tau\omicron$ ή $\Lambda\Lambda\theta\omicron\sigma$ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- i. Κάθε εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ σε σημείο του διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii. Η κλίση της κάθετης του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ στο σημείο $(0, R)$ δεν ορίζεται.

Λύση:

(Ασκ. 1/33)

- i. Λάθος. Η εφαπτομένη του $x^2 + y^2 = R^2$ στο (x_1, y_1) γράφεται

$$x x_1 + y y_1 = R^2.$$

Αν περνούσε από την αρχή $O(0, 0)$, τότε θα ίσχυε $0 = R^2$, άτοπο για $R > 0$. (Π.χ. στο $(R, 0)$ η εφαπτομένη είναι $x = R$, που δεν περνά από το O .)

- ii. Σωστό. Η κάθετη (νορμάλ) στο $(0, R)$ είναι η ακτίνα $O(0, 0)-(0, R)$, δηλαδή η κατακόρυφη ευθεία $x = 0$. Η κλίση κατακόρυφης ευθείας δεν ορίζεται.

18. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του $A(-1, 2)$.

Λύση:

(Ασκ. 2/33)

Για κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ η εφαπτομένη στο (x_1, y_1) δίνεται από

$$x x_1 + y y_1 = R^2.$$

Με $R^2 = 5$, $x_1 = -1$, $y_1 = 2$:

$$(-1)x + 2y = 5 \iff -x + 2y = 5$$

(ισοδύναμα $x - 2y + 5 = 0$).

19. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης του κύκλου

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$$

στο σημείο του $A(0, 5)$.

Λύση:

(Ασκ. 3/33)

Γράφουμε τον κύκλο στη μορφή $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ με

$$g = 2, \quad f = -3, \quad c = 5, \quad K(-g, -f) = (-2, 3).$$

Επαλήθευση: $A(0, 5)$ ανήκει στον κύκλο, αφού $0 + 25 + 0 - 30 + 5 = 0$.

i. Εφαπτομένη στο A . Χρησιμοποιούμε τον τύπο εφαπτομένης για γενικό κύκλο:

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

Με $x_1 = 0, y_1 = 5$ παίρνουμε

$$0 \cdot x + 5y + 2(x + 0) - 3(y + 5) + 5 = 0 \iff 2x + 2y - 10 = 0 \iff x + y - 5 = 0$$

ii. Κάθετη, (normal) στο A . Είναι η ακτίνα KA . Η κλίση

$$m_{KA} = \frac{5 - 3}{0 - (-2)} = 1,$$

άρα από το $A(0, 5)$:

$$y - 5 = 1(x - 0) \iff y = x + 5$$

($x + y - 5 = 0$ έχει κλίση -1 , οπότε είναι κάθετη στη $y = x + 5$.)

20. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$$

στο σημείο του $A(0, 1)$.

Λύση:

(Ασκ. 4/33)

Ο κύκλος είναι της μορφής $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ με

$$g = -4, \quad f = -3, \quad c = 5.$$

Ελέγχουμε ότι $A(0, 1)$ ανήκει στον κύκλο: $0 + 1 - 0 - 6 + 5 = 0$

Ο τύπος της εφαπτομένης σε σημείο (x_1, y_1) του κύκλου $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ είναι

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

Με $x_1 = 0, y_1 = 1$ παίρνουμε

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - 4(x + 0) - 3(y + 1) + 5 = 0 \iff -4x - 2y + 2 = 0 \iff 2x + y - 1 = 0$$

21. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

που είναι παράλληλες με την ευθεία $x + 2y - 3 = 0$.

Λύση:

(Ασκ. 5/33)

Ο κύκλος έχει $g = -3$, $f = -1$, $c = 5 \Rightarrow K(3, 1)$ και

$$R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9 + 1 - 5} = \sqrt{5}.$$

Οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι της μορφής $x + 2y + t = 0$ (παράλληλες στο $x + 2y - 3 = 0$).
Η απόσταση του $K(3, 1)$ από αυτήν είναι

$$d = \frac{|3 + 2 + t|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + t|}{\sqrt{5}}.$$

Για να είναι εφαπτομένη: $d = R = \sqrt{5} \Rightarrow |5 + t| = 5 \Rightarrow t = 0$ ή $t = -10$. Άρα οι εφαπτόμενες είναι

$$x + 2y = 0 \quad \text{και} \quad x + 2y - 10 = 0$$

Σημεία επαφής (έλεγχος): Με $x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$ δίνει $(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow A(2, -1)$.

Με $x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow y = 5 - \frac{x}{2}$ δίνει $(x - 8)^2 = 0 \Rightarrow B(8, 1)$.

22. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y = 0$$

που είναι κάθετες στην ευθεία $(\varepsilon) : x - 5y + 10 = 0$.

Λύση:

(Ασκ. 6/33)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 26 \Rightarrow K(5, -1), R = \sqrt{26}.$$

Οι κάθετες στην $x - 5y + 10 = 0$ έχουν κλίση -5 : $y = -5x + \lambda \Leftrightarrow 5x + y - \lambda = 0$. Απόσταση του K από τη γραμμή ίση με R :

$$\frac{|5 \cdot 5 + (-1) - \lambda|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|24 - \lambda|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26} \Rightarrow |24 - \lambda| = 26.$$

Άρα $\lambda = -2$ ή $\lambda = 50$ και οι εφαπτόμενες είναι

$$5x + y + 2 = 0 \quad \text{και} \quad 5x + y - 50 = 0$$

23. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

$$(C) : x^2 + y^2 = 10$$

που άγονται προς αυτόν από το σημείο $A(-4, -2)$.

Λύση:

(Ασκ. 1/39)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{10}$. Η γενική εξίσωση εφαπτομένης του $x^2 + y^2 = R^2$ στο σημείο (x_1, y_1) του κύκλου είναι

$$x x_1 + y y_1 = R^2.$$

Επειδή η εφαπτομένη περνά από το $A(-4, -2)$, έχουμε:

$$(-4)x_1 + (-2)y_1 = 10 \iff 2x_1 + y_1 = -5.$$

Επιπλέον, το σημείο (x_1, y_1) ανήκει στον κύκλο $x_1^2 + y_1^2 = 10$.

Από το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = -5 \\ x_1^2 + y_1^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -5 - 2x_1 \Rightarrow x_1^2 + (-5 - 2x_1)^2 = 10$$

$$\iff 5x_1^2 + 20x_1 + 15 = 0 \iff x_1^2 + 4x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ή } x_1 = -3.$$

Για $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -3$, για $x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = 1$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι $T_1(-1, -3)$ και $T_2(-3, 1)$.

Οι αντίστοιχες εφαπτόμενες:

$$x x_1 + y y_1 = 10$$

δίνουν:

$$\begin{cases} -x - 3y = 10 \Rightarrow x + 3y + 10 = 0, \\ -3x + y = 10 \Rightarrow 3x - y + 10 = 0. \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι:

$$x + 3y + 10 = 0 \quad \text{και} \quad 3x - y + 10 = 0.$$

24. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

$$(C) : x^2 + (y + 1)^2 = 20$$

που άγονται προς αυτόν από το σημείο $A(6, 1)$.

Λύση:

(Ασκ. 2/39)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0, -1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Έστω ότι η εφαπτομένη από το $A(6, 1)$ έχει κλίση m :

$$y - 1 = m(x - 6) \iff mx - y - 6m + 1 = 0.$$

Η απόσταση του $O(0, -1)$ από την ευθεία είναι

$$d = \frac{|m \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) - 6m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|2 - 6m|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Για εφαπτομένη $d = R = 2\sqrt{5}$, άρα

$$\frac{(2 - 6m)^2}{m^2 + 1} = 20 \iff 36m^2 - 24m + 4 = 20m^2 + 20 \iff 2m^2 - 3m - 2 = 0.$$

Λύνουμε:

$$(2m + 1)(m - 2) = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ ή } m = -\frac{1}{2}.$$

Οι αντίστοιχες εφαπτόμενες (που περνούν από το $A(6, 1)$) είναι

$$y - 1 = 2(x - 6) \iff 2x - y - 11 = 0,$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 6) \iff x + 2y - 8 = 0.$$

Σημεία επαφής (έλεγχος):

Για $m = 2$ η ακτίνα έχει κλίση $-\frac{1}{2}$: $y = -1 - \frac{x}{2}$. Τομή με $y = 2x - 11$ δίνει $T_1(4, -3)$.

Για $m = -\frac{1}{2}$ η ακτίνα έχει κλίση 2: $y = 2x - 1$. Τομή με $y = -\frac{x}{2} + 4$ δίνει $T_2(2, 3)$.

Και τα δύο σημεία ικανοποιούν $x^2 + (y + 1)^2 = 20$.

Άρα οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι:

$$2x - y - 11 = 0 \quad \text{και} \quad x + 2y - 8 = 0.$$

25. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες που άγονται από το σημείο $P(-1, -12)$ προς τον κύκλο

$$(C) : x^2 + y^2 + 12x - 6y - 5 = 0.$$

Λύση:

(Ασκ. 3/39)

Ολοκληρώνουμε τετράγωνο:

$$(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50 \Rightarrow K(-6, 3), R = 5\sqrt{2}.$$

Η απόσταση του P από το κέντρο είναι

$$KP = \sqrt{(-1 + 6)^2 + (-12 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + (-15)^2} = 5\sqrt{10}.$$

Αν α είναι η γωνία μεταξύ της KP και μίας εφαπτομένης, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο KPT (με $KT \perp PT$) ισχύει

$$\tan \alpha = \frac{KT}{PT} = \frac{R}{\sqrt{KP^2 - R^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{250 - 50}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ και η γωνία μεταξύ των δύο εφαπτομένων είναι

$$2\alpha = 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Αριθμητικά:

$$2\alpha \approx 53,1^\circ$$

Παρατήρηση: Ισοδύναμα $2\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{R}{KP}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

26. Δίνεται ο κύκλος $(C) : x^2 + y^2 = 5$. Από το σημείο $\Sigma(0, 5)$ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB του κύκλου (C) (A, B σημεία επαφής). Να βρείτε:

- i. τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία A και B
- ii. τις συντεταγμένες των σημείων A και B
- iii. την εξίσωση της ευθείας AB
- iv. τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι παράλληλες με την AB
- v. τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι κάθετες στην AB .

Λύση:

(Ασκ. 4/39)

Ο κύκλος έχει $O(0, 0)$, $R = \sqrt{5}$. Έστω εφαπτομένη από τη $\Sigma(0, 5)$ με κλίση m :

$$y - 5 = m(x - 0) \iff mx - y + 5 = 0.$$

Απόσταση d του O από την ευθεία: $d = \frac{|5|}{\sqrt{m^2 + 1}}$. Για εφαπτομένη $d = R = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{25}{m^2 + 1} = 5 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$.

i. Οι εφαπτόμενες είναι

$$y = 2x + 5 \quad \text{και} \quad y = -2x + 5$$

ii. Σημεία επαφής: λύνουμε με τον κύκλο.

$$\begin{aligned} y = 2x + 5 : x^2 + (2x + 5)^2 = 5 &\Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2, y = 1, \\ y = -2x + 5 : x^2 + (-2x + 5)^2 = 5 &\Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 1. \end{aligned}$$

Άρα $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$.

iii. Η AB διέρχεται από $(-2, 1)$ και $(2, 1) \Rightarrow y = 1$.

iv. Εφαπτόμενες παράλληλες στην AB (οριζόντιες) του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$:

$$y = \sqrt{5} \quad \text{και} \quad y = -\sqrt{5}$$

v. Εφαπτόμενες κάθετες στην AB (κατακόρυφες) του κύκλου:

$$x = \sqrt{5} \quad \text{και} \quad x = -\sqrt{5}$$

27. Να βρείτε τη θέση των δύο κύκλων (C_1) και (C_2) σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

i. $(C_1) : x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad (C_2) : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

ii. $(C_1) : x^2 + y^2 + 6x - 6y - 2 = 0, \quad (C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$

iii. $(C_1) : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0, \quad (C_2) : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$

Λύση:

(Ασκ. 1/49)

Θέτουμε $\delta = |K_1 K_2|$ το μήκος της διακέντρου.

i. $(C_1) : x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow K_1(0, 0), R_1 = 2.$

$$(C_2) : x^2 - 6x + y^2 + 8y + 16 = 0 \iff (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9 \Rightarrow K_2(3, -4), R_2 = 3.$$

$$\delta = |K_1 K_2| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 = R_1 + R_2 \Rightarrow \text{εφάπτονται εξωτερικά}$$

ii.

(C_1) :

$$x^2 + 6x + y^2 - 6y - 2 = 0 \iff (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 20 \Rightarrow K_1(-3, 3), R_1 = \sqrt{20}.$$

(C_2) :

$$x^2 - 4x + y^2 + 4y - 2 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10 \Rightarrow K_2(2, -2), R_2 = \sqrt{10}$$

$$\delta = \sqrt{(2 + 3)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Έχουμε

$$|R_1 - R_2| = \sqrt{20} - \sqrt{10}, \quad R_1 + R_2 = \sqrt{20} + \sqrt{10},$$

και $(|R_1 - R_2|)^2 = 30 - 20\sqrt{2} < 50 < 30 + 20\sqrt{2} = (R_1 + R_2)^2.$

$$|R_1 - R_2| < \delta < R_1 + R_2 \Rightarrow \text{τέμνονται σε δύο σημεία.}$$

iii.

(C_1) :

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0 \iff (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow K_1(-1, -2), R_1 = 3.$$

(C_2) :

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 1 = 0 \iff (x+1)^2 + (y+2)^2 = 6 \Rightarrow K_2(-1, -2), R_2 = \sqrt{6}.$$

$$\delta = |K_1 K_2| = 0 < |R_1 - R_2| = 3 - \sqrt{6}.$$

\Rightarrow ξένοι εσωτερικά (ομόκεντροι με διαφορετικές ακτίνες).

28. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται στον κύκλο

$$x^2 + y^2 = 2$$

στο σημείο $A(-1, 1)$ και έχουν ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$.

Λύση:

(Ασκ. 2/49)

Ο δοθείς κύκλος έχει $O(0, 0)$ και $r = \sqrt{2}$. Επειδή η εφαπτομένη στο A είναι κάθετη στις ακτίνες, τα κέντρα όλων των κύκλων που εφάπτονται στο A ανήκουν στη γραμμή OA :

$$OA: y = -x.$$

Άρα το κέντρο K έχει μορφή $K(\lambda, -\lambda)$. Επιπλέον $KA = R = 2\sqrt{2}$, οπότε

$$(\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 8 \iff 2(\lambda + 1)^2 = 8 \iff (\lambda + 1)^2 = 4 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Έτσι

$$K_1(1, -1), \quad K_2(-3, 3),$$

και οι ζητούμενοι κύκλοι (ακτίνας $2\sqrt{2}$) είναι

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8 \quad (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$$

Παρατήρηση: Ο $K_1(1, -1)$ δίνει εσωτερική επαφή ($|OK_1| = R - r$), ενώ ο $K_2(-3, 3)$ εξωτερική επαφή ($|OK_2| = R + r$).

29. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1, -2)$, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$.

Λύση:

(Ασκ. 3/49)

Γράφουμε τον δοθέντα κύκλο σε κανονική μορφή:

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + 17 = 0 \iff (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Άρα $O(5, 1)$, $r = 3$.

Η διακέντριος με το $K(1, -2)$ έχει μήκος

$$\delta = |OK| = \sqrt{(1 - 5)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5.$$

Για εξωτερική επαφή ισχύει $\delta = r + R \Rightarrow R = \delta - r = 5 - 3 = 2$.

Επομένως ο ζητούμενος κύκλος είναι

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

30. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $(-2, 5)$ και εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ στο σημείο $(0, 5)$.

Λύση:

(Ασκ. 4/49)

Ο δοθείς κύκλος γράφεται

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10 \Rightarrow O(1, 2), r = \sqrt{10}.$$

Στο σημείο επαφής $T(0, 5)$ η νορμάλ (γραμμή κέντρων) έχει κλίση

$$m_{OT} = \frac{5 - 2}{0 - 1} = -3 \Rightarrow \text{ευθεία } OT : y = -3x + 5.$$

Ο ζητούμενος κύκλος, εφαπτόμενος στον δοθέντα στο T , έχει κέντρο $K(a, b)$ πάνω στην OT , άρα $b = -3a + 5$. Επειδή διέρχεται από τα $T(0, 5)$ και $P(-2, 5)$, ισχύει

$$KT = KP \iff (a - 0)^2 + (b - 5)^2 = (a + 2)^2 + (b - 5)^2 \iff a = -1.$$

Τότε $b = -3(-1) + 5 = 8$, οπότε

$$K(-1, 8), \quad R^2 = KT^2 = (-1 - 0)^2 + (8 - 5)^2 = 10.$$

Επομένως ο κύκλος είναι

$$(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 10 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad x^2 + y^2 + 2x - 16y + 55 = 0$$

31. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την κοινή χορδή των κύκλων

$$(C_1) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 \quad \text{και} \quad (C_2) : (x + 1)^2 + y^2 = 9.$$

Λύση:

(Ασκ. 5/49)

Η κοινή χορδή είναι ο ριζικός άξονας, που προκύπτει αφαιρώντας τις εξισώσεις:

$$(x^2 + y^2 - 2x + 4y) - (x^2 + y^2 + 2x - 8) = 0 \implies x - y - 2 = 0 \iff y = x - 2.$$

Σημεία επαφής A, B : λύνουμε με τον (C_2) :

$$(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 9 \implies 2x^2 - 2x - 4 = 0 \implies x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα

$$A(2, 0), \quad B(-1, -3).$$

Ο κύκλος με διάμετρο AB έχει εξίσωση

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

δηλαδή

$$(x - 2)(x + 1) + y(y + 3) = 0 \iff x^2 + y^2 - x + 3y - 2 = 0$$

Σε κανονική μορφή:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \quad \left(K\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), R = \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Παρατήρηση: Πράγματι $|AB| = \sqrt{(3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, άρα $R = \frac{|AB|}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

32. Δίνονται οι κύκλοι

$$(C_1) : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \quad \text{και} \quad (C_2) : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0.$$

Να δείξετε ότι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους στο κοινό τους σημείο.

Λύση:

(Ασκ. 6/49)

Για (C_1) :

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0 \iff (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow K_1(-1, -2), R_1 = 3.$$

Για (C_2) :

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0 \iff (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \Rightarrow K_2(3, 1), R_2 = 2.$$

Μήκος διακέντρου:

$$\delta = |K_1K_2| = \sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = R_1 + R_2.$$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Το σημείο επαφής T ανήκει στη διακέντριο K_1K_2 και απέχει $R_1 = 3$ από το K_1 . Με $K_1\vec{K}_2 = (4, 3)$ και $|K_1\vec{K}_2| = 5$,

$$T = K_1 + \frac{R_1}{|K_1\vec{K}_2|} K_1\vec{K}_2 = (-1, -2) + \frac{3}{5}(4, 3) = \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right).$$

Η κλίση της διακεντρίου είναι $m_{K_1K_2} = \frac{3}{4}$, άρα η κοινή εφαπτομένη στο T είναι κάθετη σε αυτήν και έχει κλίση $-\frac{4}{3}$.

Από το $T\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$:

$$y + \frac{1}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{5}\right) \iff 4x + 3y - 5 = 0.$$

Κοινή εφαπτομένη: $4x + 3y - 5 = 0$.

33. Ο κύκλος με εξίσωση $(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ εφάπτεται εξωτερικά με τον κύκλο $(x - \gamma)^2 + (y - \delta)^2 = R^2$. Αν η εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους περνά από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $a^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$.

Λύση:

(Ασκ. 7/49)

Τα κέντρα είναι $K(a, \beta)$ και $\Lambda(\gamma, \delta)$ και οι ακτίνες ίσες R . Εφόσον οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και $R_1 = R_2 = R$, το σημείο επαφής T βρίσκεται στο μέσο της διακεντρίου $K\Lambda$:

$$T\left(\frac{a+\gamma}{2}, \frac{\beta+\delta}{2}\right).$$

Η κοινή εφαπτομένη στο T είναι κάθετη στη $K\Lambda$. Αφού (κατά υπόθεση) διέρχεται από την αρχή $O(0, 0)$, η ευθεία OT είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $K\Lambda$.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα K, Λ , άρα

$$OK = OL \iff \sqrt{a^2 + \beta^2} = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \iff a^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2$$

Παρατήρηση: Το συμπέρασμα είναι γεωμετρικό: το O ανήκει στη μεσοκάθετο της $K\Lambda$, επομένως ισαπέχει από τα κέντρα των δύο ίσων και εξωτερικά εφαπτόμενων κύκλων.

34. Να βρείτε τη θέση των σημείων $A(2, 4)$, $B(3, -4)$ και $\Gamma(8, 7)$ ως προς τον κύκλο

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Λύση:

(Ασκ. 1/59)

Ο κύκλος έχει $O(0, 0)$, $R = 5$. Χρησιμοποιούμε τη δύναμη σημείου

$$\Delta_O(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - R^2 = x_1^2 + y_1^2 - 25.$$

i. Για $A(2, 4)$: $2^2 + 4^2 - 25 = 4 + 16 - 25 = -5 < 0 \Rightarrow A$ εντός.

ii. Για $B(3, -4)$: $3^2 + (-4)^2 - 25 = 9 + 16 - 25 = 0 \Rightarrow B$ επάνω στον κύκλο.

iii. Για $\Gamma(8, 7)$: $8^2 + 7^2 - 25 = 64 + 49 - 25 = 88 > 0 \Rightarrow \Gamma$ εκτός.

Κριτήριο: $\Delta_O > 0 \Rightarrow$ εκτός, $\Delta_O = 0 \Rightarrow$ επάνω, $\Delta_O < 0 \Rightarrow$ εντός.

35. Να δείξετε ότι το σημείο $A(2, 4)$ βρίσκεται εκτός του κύκλου

$$(C) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0,$$

και να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το A προς τον κύκλο (C) . Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη απόσταση του A από τον κύκλο (C) ;

Λύση:

(Ασκ. 2/59)

Γράφουμε τον κύκλο στη μορφή $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ με

$$2g = 4 \Rightarrow g = 2, \quad 2f = -2 \Rightarrow f = -1, \quad c = -11.$$

Άρα

$$K(-g, -f) = (-2, 1), \quad R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 1 + 11} = 4.$$

Η απόσταση AK είναι

$$AK = \sqrt{(2+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 > R.$$

Επομένως το A είναι εκτός του κύκλου.

Το μήκος της εφαπτομένης από το A είναι

$$(AT) = \sqrt{AK^2 - R^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

(Ισοδύναμα, με “δύναμη σημείου”: $(AT)^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 4 + 16 + 8 - 8 - 11 = 9 \Rightarrow AT = 3$.)

Οι αποστάσεις του A από σημεία του κύκλου παίρνουν τις τιμές

$$d_{\min} = AK - R = 5 - 4 = 1 \quad d_{\max} = AK + R = 5 + 4 = 9$$

Παρατήρηση: Για σημείο εκτός κύκλου ισχύει $\Delta_K(A) = (AT)^2 > 0$ και $\Delta_K(A) = AK^2 - R^2$.

36. Να λύσετε γραφικά τις πιο κάτω ανισώσεις: i. $x^2 + y^2 - 8x < 0$

ii. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 \geq 0$

iii. $x^2 + y^2 > 25$

iv. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 40 \leq 0$

Λύση:

(Ασκ. 3/59)

i. $x^2 + y^2 - 8x < 0 \iff (x - 4)^2 + y^2 < 16.$

Κύκλος με $K(4, 0)$, $R = 4$.

Το εσωτερικό του κύκλου, χωρίς τη περιφέρεια.

ii. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 \geq 0 \iff (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 9.$

Κύκλος με $K(-2, 3)$, $R = 3$.

Το εξωτερικό του κύκλου μαζί με την περιφέρεια.

iii. $x^2 + y^2 > 25 \iff (x - 0)^2 + (y - 0)^2 > 5^2.$

Κύκλος με $K(0, 0)$, $R = 5$.

Το εξωτερικό του κύκλου, χωρίς την περιφέρεια.

iv. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 40 \leq 0 \iff x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 \leq 0$

$$\iff (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 25.$$

Κύκλος με $K(2, -1)$, $R = 5$.

Το εσωτερικό του κύκλου μαζί με την περιφέρεια.

37. Να λύσετε γραφικά το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x > 0 \\ x^2 + y^2 + 6y \leq 0 \end{cases}$$

Λύση:

(Ασκ. 4/59)

i. $x^2 + y^2 - 6x > 0 \iff (x - 3)^2 + y^2 > 3^2.$ Εξω από τον κύκλο C_1 με $K_1(3, 0)$, $R_1 = 3$ (χωρίς την περιφέρεια).

ii. $x^2 + y^2 + 6y \leq 0 \iff x^2 + (y + 3)^2 \leq 3^2.$ Μέσα στον κύκλο C_2 με $K_2(0, -3)$, $R_2 = 3$ (μαζί με την περιφέρεια).

Οι δύο κύκλοι τέμνονται, επειδή $\delta = |K_1 K_2| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ικανοποιεί $0 < \delta < R_1 + R_2 = 6$. Η κοινή χορδή (ριζικός άξονας) προκύπτει αφαιρώντας τις ισότητες:

$$(x-3)^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + (y+3)^2 = 9 \implies -6x - 6y = 0 \iff x + y = 0$$

Τα σημεία τομής είναι $(0, 0)$ και $(3, -3)$ (και ανήκουν στην περιφέρεια του C_2 , αλλά αποκλείονται από την πρώτη ανίσωση).

Συμπέρασμα:

Το ζητούμενο σύνολο είναι το μέρος του κύκλου C_2 που βρίσκεται έξω από τον κύκλο C_1 . Δηλαδή:

$$S = \left\{ (x, y) : x^2 + (y+3)^2 \leq 9 \text{ και } (x-3)^2 + y^2 > 9 \right\}$$

Η περιφέρεια του C_2 περιλαμβάνεται, ενώ η κοινή χορδή $x + y = 0$ και η περιφέρεια του C_1 δεν περιλαμβάνονται.

38. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ευθείας $(\varepsilon) : 2x - 3y - 5 = 0$, το οποίο ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων

$$(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \quad \text{και} \quad (C_2) : x^2 + y^2 + 4x + 4y - 23 = 0.$$

Λύση:

(Ασκ. 5/59)

Ο ριζικός άξονας προκύπτει αφαιρώντας τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} (C_2) - (C_1) = 0 &\implies (4x - 2x) + (4y - (-4y)) + (-23 - (-10)) = 0 \\ &\implies 2x + 8y - 13 = 0. \end{aligned}$$

Άρα ο ριζικός άξονας είναι $\rho : 2x + 8y - 13 = 0$. Το ζητούμενο σημείο είναι η τομή του (ε) με την ρ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 2x + 8y - 13 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x + 8y = 13 \end{cases} \implies 11y = 8 \implies y = \frac{8}{11}, \\ 2x - 3 \cdot \frac{8}{11} = 5 &\implies 2x = \frac{79}{11} \implies x = \frac{79}{22}. \end{aligned}$$

Σημείο ζητούμενο:

$$\left(\frac{79}{22}, \frac{8}{11} \right)$$

39. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις

$$(C_1) : x^2 + y^2 + 5x - 3y + 2 = 0 \quad \text{και} \quad (C_2) : x^2 + y^2 - 2x + 8y - 1 = 0.$$

Να βρείτε το σημείο $M(\kappa, 5)$, $\kappa \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην κοινή χορδή των δύο κύκλων.

Λύση:

(Ασκ. 6/59)

Η κοινή χορδή των δύο κύκλων βρίσκεται πάνω στον ριζικό άξονα. Τον βρίσκουμε αφαιρώντας τις εξισώσεις:

$$(C_1) - (C_2) = 0 \implies (5x - (-2x)) + (-3y - 8y) + (2 - (-1)) = 0 \implies 7x - 11y + 3 = 0.$$

Άρα ο ριζικός άξονας είναι $\rho : 7x - 11y + 3 = 0$. Για $M(\kappa, 5)$ (δηλ. $y = 5$) επάνω στη ρ :

$$7\kappa - 11 \cdot 5 + 3 = 0 \implies 7\kappa - 52 = 0 \implies \kappa = \frac{52}{7}.$$

Ζητούμενο σημείο:

$$M\left(\frac{52}{7}, 5\right)$$

40. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Οι παραμετρικές εξισώσεις, κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ είναι $x = R \eta\mu\theta$, $y = R \sigma\upsilon\nu\theta$ όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

ii. Οι παραμετρικές εξισώσεις $x = R \sigma\upsilon\nu\theta$, $y = R \eta\mu\theta$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνουν ημικύκλιο.

iii. Οι εξισώσεις $x = a + \gamma \sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \beta + \gamma \eta\mu\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ είναι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$.

iv. Το σημείο $T\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση:

(Ασκ. 1/65)

i. ΣΩΣΤΟ.

$$x^2 + y^2 = R^2(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = R^2.$$

ii. ΣΩΣΤΟ

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad y = R \eta\mu\theta \geq 0 \quad (\theta \in [0, \pi]) \implies \text{άνω ημικύκλιο.}$$

iii. ΣΩΣΤΟ

$$(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2 (\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = \gamma^2.$$

iv. ΣΩΣΤΟ

$$x^2 + y^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1.$$

Παρατήρηση: Η μορφή στο (iv) κάνει παραμετροποίηση όλων των μοναδιαίων κύκλων εκτός από το $(0, -1)$ (που αντιστοιχεί στο όριο $t \rightarrow \pm\infty$).

41. Να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις των κύκλων με εξίσωση:

i. $x^2 + y^2 = 16$

ii. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

iii. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$

Λύση:

(Ασκ. 2/65)

i. $R = 4$. Παραμετρικές:

$$x = 4 \sigma\upsilon\nu(\theta), \quad y = 4 \eta\mu(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

ii. $K(3, -1)$, $R = 2$. Παραμετρικές:

$$x = 3 + 2 \sigma\upsilon\nu(\theta), \quad y = -1 + 2 \eta\mu(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

iii. Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + 5 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8.$$

Άρα $K(2, -3)$, $R = 2\sqrt{2}$. Παραμετρικές:

$$x = 2 + 2\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu(\theta), \quad y = -3 + 2\sqrt{2} \eta\mu(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

42. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με παραμετρικές εξισώσεις:

- i. $x = 3 \sigma\upsilon\nu(\theta), y = 3 \eta\mu(\theta), \theta \in [0, 2\pi)$
- ii. $x = -1 + 4 \sigma\upsilon\nu(\theta), y = 2 + 4 \eta\mu(\theta), \theta \in [0, 2\pi)$
- iii. $x = 2 \sigma\upsilon\nu(\theta), y = 2 \eta\mu(\theta) - 7, \theta \in [0, 2\pi)$

Λύση:

(Ασκ. 3/65)

i. Έχουμε

$$x^2 + y^2 = 9(\sigma\upsilon\nu^2(\theta) + \eta\mu^2(\theta)) = 9.$$

Άρα $x^2 + y^2 = 9$ (κέντρο $O(0, 0)$, ακτίνα $R = 3$).

ii. Θέτοντας $x + 1 = 4 \sigma\upsilon\nu(\theta)$ και $y - 2 = 4 \eta\mu(\theta)$,

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16(\sigma\upsilon\nu^2(\theta) + \eta\mu^2(\theta)) = 16.$$

Άρα $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ (κέντρο $K(-1, 2)$, ακτίνα $R = 4$).

iii. Θέτοντας $y + 7 = 2 \eta\mu(\theta)$,

$$x^2 + (y + 7)^2 = 4(\sigma\upsilon\nu^2(\theta) + \eta\mu^2(\theta)) = 4.$$

Άρα $x^2 + (y + 7)^2 = 4$ (κέντρο $K(0, -7)$, ακτίνα $R = 2$).

43. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$, το σημείο του $T(3 \sigma\upsilon\nu\theta, 3 \eta\mu\theta)$ και το σημείο $A(-3, 6)$. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του AT .

Λύση:

(Ασκ. 4/65)

Θέτουμε $M(x, y)$. Ως μέσο του AT ισχύει

$$x = \frac{-3 + 3 \sigma\upsilon\nu\theta}{2}, \quad y = \frac{6 + 3 \eta\mu\theta}{2}.$$

Άρα

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2x + 3}{3}, \quad \eta\mu\theta = \frac{2y - 6}{3}.$$

Με την ταυτότητα $\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ παίρνουμε

$$\left(\frac{2x+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y-6}{3}\right)^2 = 1 \iff (2x+3)^2 + (2y-6)^2 = 9.$$

Αναπτύσσοντας:

$$4x^2 + 4y^2 + 12x - 24y + 36 = 9 \iff x^2 + y^2 + 3x - 6y + 9 = 0.$$

Σε κανονική μορφή:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Παρατήρηση: Ο τόπος του M είναι κύκλος με κέντρο το μέσο του AO , δηλαδή $K(-\frac{3}{2}, 3)$, και ακτίνα $R = \frac{3}{2}$ (ομοιότητα λόγου $\frac{1}{2}$ με πόλο το A).

44. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο του $T(2\sin\theta, 2\eta\mu\theta)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο T τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο A και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του AB είναι

$$x^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Λύση:

(Ασκ. 5/65)

Τύπος εφαπτομένης στον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ από σημείο $T(x_1, y_1)$: $xx_1 + yy_1 = R^2$. Για $R = 2$ και $T(2\sin\theta, 2\eta\mu\theta)$ παίρνουμε

$$x \cdot 2\sin\theta + y \cdot 2\eta\mu\theta = 4 \iff \sin\theta x + \eta\mu\theta y = 2. \quad (1)$$

Τομή με x -άξονα ($y = 0$): $\sin\theta x = 2 \Rightarrow A\left(\frac{2}{\sin\theta}, 0\right)$.

Τομή με y -άξονα ($x = 0$): $\eta\mu\theta y = 2 \Rightarrow B\left(0, \frac{2}{\eta\mu\theta}\right)$.

Άρα το μέσο $M(x, y)$ του AB είναι

$$x = \frac{1}{\sin\theta}, \quad y = \frac{1}{\eta\mu\theta}. \quad (2)$$

Από την ταυτότητα $\sin^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ και το (2) προκύπτει

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \iff \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = 1 \iff x^2y^2 = x^2 + y^2$$

Παρατήρηση: Εξαιρούνται οι τιμές $\theta = k\pi$ ή $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\sin\theta = 0$ ή $\eta\mu\theta = 0$), οπότε ο τόπος δεν περιέχει σημεία πάνω στους άξονες.

45. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ και το σημείο του $T(4\sigma\upsilon\nu\theta, 4\eta\mu\theta)$. Η εφαπτομένη στο T τέμνει τον x -άξονα στο A . Από το A φέρουμε την ευθεία (ε_1) παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και από το T την ακτίνα (κάθετη στον κύκλο) (ε_2) . Αν $B = (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)$, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του B έχει εξίσωση

$$16(x^2 + y^2) = x^4.$$

Λύση:

(Ασκ. 6/65)

Η εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ από σημείο $T(x_1, y_1)$ είναι $xx_1 + yy_1 = R^2$. Για $R = 4$ και $T(4\sigma\upsilon\nu\theta, 4\eta\mu\theta)$ παίρνουμε

$$4\sigma\upsilon\nu\theta x + 4\eta\mu\theta y = 16 \iff \sigma\upsilon\nu\theta x + \eta\mu\theta y = 4. \quad (1)$$

Τομή με x -άξονα ($y = 0$): από (1) $\sigma\upsilon\nu\theta x = 4 \Rightarrow A\left(\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 0\right)$. Άρα (ε_1) : $x = \frac{4}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

Η ακτίνα OT (κάθετη στην εφαπτομένη) έχει λόγο $\frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, δηλ.

$$(\varepsilon_2): \quad \eta\mu\theta x - \sigma\upsilon\nu\theta y = 0 \iff y = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} x. \quad (2)$$

Σημείο $B(x, y)$ ως τομή (ε_1) και (ε_2) :

$$x = \frac{4}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad y = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \cdot \frac{4}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{4\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}. \quad (3)$$

Από (3) προκύπτουν

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{x}, \quad \eta\mu\theta = \frac{4y}{x^2}.$$

Με την ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ έχουμε

$$\left(\frac{4}{x}\right)^2 + \left(\frac{4y}{x^2}\right)^2 = 1 \iff \frac{16}{x^2} + \frac{16y^2}{x^4} = 1 \iff 16x^2 + 16y^2 = x^4.$$

Άρα ο τόπος του B δίνεται από

$$16(x^2 + y^2) = x^4$$

Παρατήρηση: Εξαιρούμε $\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ (η εφαπτομένη είναι οριζόντια και δεν τέμνει τον x -άξονα), άρα $|x| = \left|\frac{4}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right| \geq 4$. Η εξίσωση επιτρέπει επίσης το $(0, 0)$, το οποίο δεν ανήκει στον τόπο (δεν αντιστοιχεί σε καμία τιμή της θ).

46. Δίνεται ο κύκλος $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ και σημείο αυτού $T(3 + 2 \sigma\upsilon\nu\theta, 2 \eta\mu\theta)$.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του (C) στο T είναι,

$$x \sigma\upsilon\nu\theta + y \eta\mu\theta = 2 + 3 \sigma\upsilon\nu\theta$$

ii. Αν η εφαπτομένη στο T τέμνει τον άξονα $x'x$ στο A και την ευθεία $x = 1$ στο B , να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB έχει εξίσωση

$$y^2 = \frac{x-1}{x-3}.$$

Λύση:

(Ασκ. 7/66)

Ο κύκλος γράφεται $(x-3)^2 + y^2 = 4$, άρα έχει κέντρο $O(3, 0)$ και ακτίνα $R = 2$. Το σημείο T είναι $(3 + 2 \sigma\upsilon\nu\theta, 2 \eta\mu\theta)$.

i. Η εφαπτομένη στον κύκλο $(x-3)^2 + y^2 = 4$ στο σημείο $T(x_1, y_1)$ δίνεται από

$$(x-3)(x_1-3) + y y_1 = 4.$$

Για $x_1 - 3 = 2 \sigma\upsilon\nu\theta$, $y_1 = 2 \eta\mu\theta$ παίρνουμε

$$(x-3) 2 \sigma\upsilon\nu\theta + y 2 \eta\mu\theta = 4 \iff x \sigma\upsilon\nu\theta + y \eta\mu\theta = 2 + 3 \sigma\upsilon\nu\theta.$$

ii. Η εφαπτομένη είναι $x \sigma\upsilon\nu\theta + y \eta\mu\theta = 2 + 3 \sigma\upsilon\nu\theta$.

$$\text{Τομή με } x\text{-άξονα } (y=0) : \sigma\upsilon\nu\theta x = 2 + 3 \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow A\left(3 + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}, 0\right).$$

$$\text{Τομή με } x=1 : \sigma\upsilon\nu\theta + y \eta\mu\theta = 2 + 3 \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow y = \frac{2 + 2 \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}.$$

Άρα, για το μέσο $M(x, y)$ του AB έχουμε

$$x = \frac{1 + \left(3 + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)}{2} = 2 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + 2 \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}.$$

Θέτοντας $c = \sigma\upsilon\nu\theta$, $s = \eta\mu\theta$ (με $s \neq 0$, $c \neq 0$ ώστε να ορίζονται τα A, B):

$$x = 2 + \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{x-2}, \quad y = \frac{1+c}{s}.$$

Με $c^2 + s^2 = 1$ προκύπτει

$$y^2 = \frac{(1+c)^2}{1-c^2} = \frac{1+c}{1-c}.$$

Αντικαθιστώντας $c = \frac{1}{x-2}$:

$$y^2 = \frac{1 + \frac{1}{x-2}}{1 - \frac{1}{x-2}} = \frac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-2}} = \frac{x-1}{x-3}.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M δίνεται από

$$y^2 = \frac{x-1}{x-3}$$

Παρατήρηση: Για να υπάρχουν και τα δύο σημεία A, B απαιτούνται $\sin\theta \neq 0$ και $\eta\mu\theta \neq 0$. Στον τόπο αποκλείεται το $x = 3$ (κατακόρυφη ασύμπτωτη) και επίσης το $x = 1$ δεν αντιστοιχεί σε αποδεκτό θ (δίνει $\eta\mu\theta = 0$). Επομένως, το πεδίο ορισμού του τόπου είναι $x > 3$ ή $x < 1$.

47. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του ως συναρτήσεις του λ .

ii. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το κέντρο του κύκλου να ανήκει στην ευθεία,

$$(\varepsilon) : x + 3y - 12 = 0$$

Λύση:

(Ασκ. 8/65)

i. Ομαδοποιούμε κατά y και συμπληρώνουμε τετράγωνο:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0 \iff x^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1.$$

Σε κανονική μορφή:

$$(x - 0)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$$

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (δεδομένου ότι $\lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε λ). Το κέντρο είναι

$$K(0, \lambda),$$

ενώ η ακτίνα είναι

$$R = \sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

ii. Θέλουμε το $K(0, \lambda)$ να ανήκει στην $(\varepsilon) : x + 3y - 12 = 0$. Αντικαθιστούμε $x = 0, y = \lambda$:

$$0 + 3\lambda - 12 = 0 \implies \lambda = 4$$

Για $\lambda = 4$ ο κύκλος είναι $(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 17$ με $K(0, 4), R = \sqrt{17}$.

Παρατήρηση: Το κέντρο K κινείται πάνω στον άξονα $y'y$ καθώς μεταβάλλεται το λ .

48. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4\lambda x - 2y + 4\lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να παριστάνει κύκλο και να βρείτε κέντρο και ακτίνα.
- Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει κύκλος με την πιο πάνω εξίσωση που να έχει κέντρο το σημείο $(-1, 1)$.

Λύση:

(Ασκ. 1/67)

Ομαδοποιούμε κατά x και y και συμπληρώνουμε τετράγωνο:

$$\begin{aligned} x^2 + 4\lambda x + y^2 - 2y + 4\lambda = 0 &\iff (x + 2\lambda)^2 - 4\lambda^2 + (y - 1)^2 - 1 + 4\lambda = 0 \\ &\iff (x + 2\lambda)^2 + (y - 1)^2 = (2\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση είναι σε κανονική μορφή κύκλου με

$$K(-2\lambda, 1), \quad R = |2\lambda - 1|$$

i. Η εξίσωση παριστάνει μη εκφυλισμένο κύκλο όταν $R > 0$, δηλ.

$$\lambda \neq \frac{1}{2}$$

Για $\lambda = \frac{1}{2}$ προκύπτει $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$, δηλ. σημειακός κύκλος στο $K(-1, 1)$.

ii. Αν το κέντρο είναι $(-1, 1)$, τότε από $K(-2\lambda, 1) = (-1, 1)$ παίρνουμε $\lambda = \frac{1}{2}$, οπότε $R = |2 \cdot \frac{1}{2} - 1| = 0$. Άρα η εξίσωση δεν δίνει κύκλο αλλά σημειακό κύκλο.

Συνεπώς, δεν υπάρχει μη εκφυλισμένος κύκλος με κέντρο $(-1, 1)$ στην οικογένεια αυτή.

49. Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία $y = \lambda x + c$ εφάπτεται στον κύκλο

$$(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

τότε

$$(a\lambda - \beta + c)^2 = (1 + \lambda^2) R^2$$

Λύση:

(Ασκ. 2/67)

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(a, \beta)$ και ακτίνα R . Η ευθεία $y = \lambda x + c$ γράφεται σε κανονική μορφή

$$\lambda x - y + c = 0.$$

Αν είναι εφαπτομένη, η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ισούται με R :

$$d(K, \lambda x - y + c = 0) = \frac{|\lambda a - \beta + c|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = R.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε αμέσως

$$(\lambda a - \beta + c)^2 = (\lambda^2 + 1) R^2,$$

δηλαδή

$$(a\lambda - \beta + c)^2 = R^2 + \lambda^2 R^2$$

Εναλλακτικά: Με αντικατάσταση $y = \lambda x + c$ στην εξίσωση του κύκλου προκύπτει τετραγωνική εξίσωση ως προς x . Η συνθήκη εφαπτομένης είναι $\Delta = 0$, η οποία οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

50. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που:

- i. είναι παράλληλες με την ευθεία $x + 3y = 2$
- ii. είναι κάθετες με την ευθεία $x = 1$
- iii. διέρχονται από το σημείο $A(0, 10)$
- iv. σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα x' .

Λύση:

(Ασκ. 3/67)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{10}$.

i. Παράλληλες με $x + 3y = 2$ έχουν μορφή $x + 3y = c$. Θέλουμε $d(O, x + 3y = c) = R$:

$$\frac{|c|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10} \implies |c| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10.$$

Άρα $x + 3y = 10$ και $x + 3y = -10$.

ii. Κάθετες στην $x = 1$ είναι οριζόντιες $y = b$. Θέλουμε $|b| = R = \sqrt{10}$, άρα

$$y = \sqrt{10}, \quad y = -\sqrt{10}$$

iii. Εφαπτομένη που διέρχεται από $A(0,10)$. Γενική εφαπτομένη του $x^2 + y^2 = 10$ με σημείο επαφής (x_1, y_1) είναι $xx_1 + yy_1 = 10$ με $x_1^2 + y_1^2 = 10$.

Θέτοντας $A(0,10)$ επάνω της: $0 \cdot x_1 + 10y_1 = 10 \implies y_1 = 1$.

Τότε $x_1^2 + 1 = 10 \implies x_1 = \pm 3$. Οι εφαπτόμενες:

$$3x + y = 10, \quad -3x + y = 10$$

iv. Γραμμή που σχηματίζει οξεία γωνία 45° με τον x -άξονα έχει $|\kappa| = 1$ (κλίση $m = \pm 1$). Γράφουμε $y = mx + c$ και απαιτούμε $d(O, y = mx + c) = R$:

$$\frac{|c|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{10} \implies |c| = \sqrt{10}\sqrt{1 + m^2}.$$

Για $m = 1$: $|c| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \implies y = x + 2\sqrt{5}, \quad y = x - 2\sqrt{5}$.

Για $m = -1$: $|c| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \implies y = -x + 2\sqrt{5}, \quad y = -x - 2\sqrt{5}$.

51. Δίνεται ο κύκλος $(C) : x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 1 = 0$ με κέντρο $K(1, 4)$.

- i. Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) εφάπτεται του άξονα $x'x$.
- ii. Αν (h, k) είναι το σημείο επαφής μιας εφαπτομένης του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(3, 0)$, να δείξετε ότι $h - 2k = 1$.

Λύση:

(Ασκ. 4/67)

Από τον τύπο του κέντρου $(-g, -f) = (1, 4)$ προκύπτουν

$$g = -1, \quad f = -4.$$

Άρα ο κύκλος είναι

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 16,$$

με κέντρο $K(1, 4)$ και ακτίνα $R = 4$.

i. Η απόσταση του K από τον άξονα $y = 0$ είναι $|4| = 4 = R$. Επομένως ο κύκλος εφάπτεται του x -άξονα.

ii. Έστω $T(h, k)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης από το $P(3, 0)$. Ισχύει $PT \perp KT$, άρα

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{KT} &= 0 \iff (3 - h, -k) \cdot (h - 1, k - 4) = 0 \\ &\iff h^2 + k^2 - 4h - 4k + 3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Επειδή T ανήκει στον κύκλο,

$$h^2 + k^2 - 2h - 8k + 1 = 0. \tag{2}$$

Αφαιρώντας (2) από την (1) παίρνουμε

$$(-4h - 4k + 3) - (-2h - 8k + 1) = 0 \iff -h + 2k = -1 \iff h - 2k = 1$$

52. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 80 = 0$. Να βρείτε:

- i. το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου,
- ii. τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $3x - 4y = a$ να αποκόπτει στον κύκλο χορδή μήκους 16.

Λύση:

(Ασκ. 5/67)

- i. Συμπληρώνουμε τετράγωνο:

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y - 80 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 100.$$

Άρα

$$K(2, 4), \quad R = 10$$

- ii. Η απόσταση του $K(2, 4)$ από την ευθεία $3x - 4y - a = 0$ είναι

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - a|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 - 16 - a|}{5} = \frac{|a + 10|}{5}.$$

Μήκος χορδής από ευθεία σε απόσταση d από το κέντρο:

$$L = 2\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Θέλουμε $L = 16$:

$$16 = 2\sqrt{100 - d^2} \iff 8 = \sqrt{100 - d^2} \iff d^2 = 36 \iff d = 6.$$

Άρα

$$\frac{|a + 10|}{5} = 6 \iff |a + 10| = 30 \iff a + 10 = \pm 30 \iff a = 20 \text{ ή } a = -40$$

53. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$.

- i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(0, 1)$.
- ii. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των πιο πάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AMBK$, όπου K το κέντρο του κύκλου.

Λύση:

(Ασκ. 6/67)

Ο κύκλος γράφεται σε κανονική μορφή:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 8$$

Άρα έχει κέντρο $K(3, 0)$ και ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$.

- i. Έστω εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το $M(0, 1)$:

$$y = mx + 1.$$

Η απόσταση του κέντρου $K(3, 0)$ από την ευθεία $y = mx + 1$ πρέπει να ισούται με την ακτίνα:

$$\frac{|3m + 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$(3m + 1)^2 = 8(1 + m^2) \iff m^2 + 6m - 7 = 0.$$

$$\Rightarrow m = 1 \quad \text{ή} \quad m = -7.$$

Άρα οι εφαπτόμενες είναι:

$$y = x + 1 \quad y = -7x + 1$$

ii.

- ii. Για $y = x + 1$:

$$(x - 3)^2 + (x + 1)^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 10 = 8 \Rightarrow x = 1, y = 2.$$

Άρα $A(1, 2)$.

Για $y = -7x + 1$:

$$(x - 3)^2 + (-7x + 1)^2 = 8 \Rightarrow 50x^2 - 44x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}, y = -\frac{2}{5}.$$

Άρα $B(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$.

Το τετράπλευρο $AMBK$ έχει κορυφές $A(1, 2)$, $M(0, 1)$, $B(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$ και $K(3, 0)$.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του $AMBK$, το χωρίζουμε σε δύο τρίγωνα:

$$E_{AMBK} = [\triangle ABK] + [\triangle AMB].$$

1. Υπολογισμός $[\triangle ABK]$:

Η βάση AK έχει μήκος

$$AK = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Η εξίσωση της AK είναι $x + y - 3 = 0$. Η απόσταση του σημείου $B(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$ από αυτήν είναι:

$$d(B, AK) = \frac{|\frac{1}{5} - \frac{2}{5} - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-\frac{16}{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}.$$

Άρα:

$$[\triangle ABK] = \frac{1}{2} AK \cdot d(B, AK) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{8\sqrt{2}}{5} = \frac{16}{5}.$$

2. Υπολογισμός $[\triangle AMB]$:

Η βάση AB έχει μήκος

$$AB = \sqrt{(1 - \frac{1}{5})^2 + (2 - (-\frac{2}{5}))^2} = \sqrt{(\frac{4}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

Η εξίσωση της AB είναι $3x - y - 1 = 0$. Η απόσταση του σημείου $M(0, 1)$ από αυτήν είναι:

$$d(M, AB) = \frac{|3 \cdot 0 - 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Άρα:

$$[\triangle AMB] = \frac{1}{2} AB \cdot d(M, AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5}.$$

Το συνολικό εμβαδόν είναι:

$$E_{AMBK} = [\triangle ABK] + [\triangle AMB] = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} = 4.$$

$$E_{AMBK} = 4 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

54. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Σ που βρίσκεται πάνω στην $(\varepsilon) : x + 2y = 0$ και έχει δύναμη $\Delta_k(\Sigma) = 100$ ως προς τον κύκλο $(k) : x^2 + y^2 = 25$.

Λύση:

(Ασκ. 7/67)

Για κύκλο με κέντρο την αρχή και ακτίνα $R = 5$, η δύναμη σημείου (x, y) είναι

$$\Delta_k(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = x^2 + y^2 - 25.$$

Δίνεται $\Delta_k(\Sigma) = 100$, άρα

$$x^2 + y^2 - 25 = 100 \iff x^2 + y^2 = 125. \quad (1)$$

Επειδή $\Sigma \in (\varepsilon)$, έχουμε $x = -2y$. Αντικαθιστούμε στο (1):

$$(-2y)^2 + y^2 = 125 \iff 5y^2 = 125 \iff y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5.$$

Τότε $x = -2y \Rightarrow x = -10$ για $y = 5$ και $x = 10$ για $y = -5$. Άρα

$$\Sigma_1(-10, 5), \quad \Sigma_2(10, -5)$$

55. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από την αρχή των αξόνων, το κέντρο του βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο των αξόνων, αποκόπτει χορδή μήκους 4 από τον άξονα $x'x$ και υπάρχει σημείο $\Sigma(-1, 2)$ με δύναμη μιας μονάδας ως προς αυτόν.

Λύση:

(Ασκ. 8/67)

Έστω ο κύκλος (K, R) με κέντρο $K(a, b)$ και ακτίνα R . Επειδή το κέντρο βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο, έχουμε $a > 0$, $b > 0$.

Ο κύκλος περνά από την αρχή $O(0, 0)$, οπότε:

$$R^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Η χορδή που αποκόπτεται από τον άξονα $x'x$ έχει μήκος 4. Η απόσταση του κέντρου από τον άξονα είναι b , άρα:

$$2\sqrt{R^2 - b^2} = 4 \iff R^2 - b^2 = 4. \quad (2)$$

Για το σημείο $\Sigma(-1, 2)$, η δύναμη ως προς τον κύκλο είναι:

$$\Delta_k(\Sigma) = (-1 - a)^2 + (2 - b)^2 - R^2 = 1. \quad (3)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \quad (\text{επειδή } a > 0).$$

Αντικαθιστούμε στο (3):

$$(-1-2)^2 + (2-b)^2 - (4+b^2) = 1 \iff 9 + (b^2 - 4b + 4) - 4 - b^2 = 1 \iff 9 - 4b = 1 \Rightarrow b = 2.$$

Άρα $K(2, 2)$ και από (1):

$$R^2 = a^2 + b^2 = 8.$$

Επομένως:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

ή ισοδύναμα

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0.$$

Έλεγχος: Το σημείο $O(0, 0)$ ικανοποιεί την εξίσωση, η χορδή στον άξονα έχει μήκος 4, και η δύναμη του σημείου $\Sigma(-1, 2)$ είναι $\Delta_k(\Sigma) = 1$.

56. Δίνεται ο κύκλος (C) : $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 18$ και το σημείο $A(2, 1)$. Να δείξετε ότι το σημείο A βρίσκεται εντός του κύκλου (C) και να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το σημείο A .

Λύση:

(Ασκ. 9/68)

Ο κύκλος έχει κέντρο $K(-2, 2)$ και ακτίνα $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Η απόσταση

$$KA = \sqrt{(2+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} < 3\sqrt{2} = R,$$

άρα το A είναι εντός του κύκλου.

Η χορδή με μέσο το A είναι κάθετη στο KA και διέρχεται από το A . Η κλίση του KA είναι

$$m_{KA} = \frac{1-2}{2-(-2)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow m_{\text{χορδής}} = -\frac{1}{m_{KA}} = 4.$$

Επομένως η εξίσωση της χορδής είναι

$$y-1 = 4(x-2) \iff y = 4x-7$$

57. Δίνεται T τυχαίο σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ και το σημείο $A(a, \beta)$. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M των ευθύγραμμων τμημάτων AT είναι ο κύκλος,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$$

Λύση:

(Ασκ. 10/68)

Θέτουμε $T(R \cos \theta, R \sin \theta)$. Το μέσο $M(x, y)$ του AT είναι

$$M\left(\frac{a + R \cos \theta}{2}, \frac{\beta + R \sin \theta}{2}\right).$$

Άρα

$$\cos \theta = \frac{2x - a}{R}, \quad \sin \theta = \frac{2y - \beta}{R}.$$

Με την ταυτότητα $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ παίρνουμε

$$\left(\frac{2x - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{2y - \beta}{R}\right)^2 = 1 \iff \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$$

58. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = R^2$ και τυχαίο σημείο P πάνω σε αυτόν. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ . Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει το μέσο M του τμήματος $A\Gamma$, όπου $A(0, R)$.

Λύση:

(Ασκ. 11/68)

Θέτουμε $P(R \cos \theta, R \sin \theta)$. Η εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$ έχει εξίσωση

$$\cos \theta x + \sin \theta y = R.$$

Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ ($y = 0$) στο σημείο

$$\cos \theta x = R \Rightarrow x_{\Gamma} = \frac{R}{\cos \theta} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{R}{\cos \theta}, 0\right).$$

Το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(0, R)$. Το μέσο $M(x, y)$ του $A\Gamma$ είναι:

$$x = \frac{0 + \frac{R}{\cos \theta}}{2} = \frac{R}{2 \cos \theta}, \quad y = \frac{R + 0}{2} = \frac{R}{2}.$$

Άρα το M έχει σταθερή τεταγμένη $y = \frac{R}{2}$ και μεταβλητή τετμημένη

$$x = \frac{R}{2 \sin \theta}.$$

Επειδή $|\sin \theta| \leq 1$, η ποσότητα $\frac{1}{\sin \theta}$ παίρνει τιμές

$$\frac{1}{\sin \theta} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$

οπότε

$$x \in (-\infty, -\frac{R}{2}] \cup [\frac{R}{2}, +\infty).$$

59. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι κορυφές B, Γ είναι σταθερές και η κορυφή A κινείται έτσι ώστε η διάμεσος BM να έχει σταθερό μήκος $\lambda > 0$ (M : μέσο του $A\Gamma$). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A είναι κύκλος και να βρείτε την εξίσωσή του.

Λύση:

(Ασχ. 1/69)

Θέτουμε $B(b_1, b_2)$, $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ σταθερά και $A(x, y)$ μεταβλητό. Το μέσο M του $A\Gamma$ είναι

$$M\left(\frac{x + \gamma_1}{2}, \frac{y + \gamma_2}{2}\right).$$

Η συνθήκη $BM = \lambda$ γράφεται

$$\left(\frac{x + \gamma_1}{2} - b_1\right)^2 + \left(\frac{y + \gamma_2}{2} - b_2\right)^2 = \lambda^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 4:

$$(x + \gamma_1 - 2b_1)^2 + (y + \gamma_2 - 2b_2)^2 = (2\lambda)^2$$

$$\iff (x - (2b_1 - \gamma_1))^2 + (y - (2b_2 - \gamma_2))^2 = (2\lambda)^2$$

Άρα ο τόπος της A είναι κύκλος με κέντρο

$$K_A(2b_1 - \gamma_1, 2b_2 - \gamma_2)$$

(αντανakλάται το Γ ως προς το B) και ακτίνα

$$R_A = 2\lambda$$

60. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$. Φέρουμε τρεις εφαπτόμενες στον κύκλο, έτσι ώστε η μία να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ και τα σημεία τομής των τριών εφαπτομένων να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.

Λύση:

(Ασκ. 2/69)

Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $R = 3$. Παίρνουμε ως οριζόντια εφαπτομένη την $y = 3$. Για να είναι το τρίγωνο ισόπλευρο, οι άλλες δύο εφαπτόμενες σχηματίζουν γωνία 60° με την $y = 3$, άρα έχουν κλίσεις $\pm\sqrt{3}$. Επειδή είναι εφαπτόμενες του $x^2 + y^2 = 9$, για ευθεία $y = mx + c$ ισχύει $\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = R$. Με $m = \pm\sqrt{3}$ παίρνουμε $|c|/2 = 3 \Rightarrow c = \pm 6$. Επιλέγουμε το $c = 6$ ώστε να σχηματίζεται τρίγωνο με βάση την $y = 3$. Έτσι οι τρεις εφαπτόμενες είναι

$$y = 3, \quad y = \sqrt{3}x + 6, \quad y = -\sqrt{3}x + 6.$$

Σημεία τομής (κορυφές του τριγώνου):

$$A = (-\sqrt{3}, 3), \quad B = (\sqrt{3}, 3), \quad C = (0, 6).$$

Μήκη πλευρών:

$$AB = 2\sqrt{3}, \quad AC = BC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Άρα το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο με πλευρά $a = 2\sqrt{3}$. Το εμβαδόν του είναι

$$E = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

Παρατήρηση: Για κύκλο ακτίνας R γενικά, με μία εφαπτομένη οριζόντια και οι άλλες δύο σε γωνίες $\pm 60^\circ$, οι ευθείες είναι $y = R$, $y = \pm\sqrt{3}x + 2R$ και προκύπτει

$$E = \frac{\sqrt{3}}{3} R^2.$$

Για $R = 3$ δίνει $E = 3\sqrt{3}$.

61. Δίνονται οι κύκλοι

$$(C_1) : x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \quad (C_2) : x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0.$$

- i. Να βρείτε τη συνθήκη που συνδέει τα g, f, c ώστε οι δύο κύκλοι να τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία.
- ii. Να δείξετε ότι, για $g \neq f$, το μήκος της κοινής χορδής τους είναι $d = \sqrt{2(g+f)^2 - 4c}$.

Λύση:

(Ασκ. 3/69)

Τα κέντρα είναι

$$O_1(-g, -f), \quad O_2(-f, -g), \quad R_1 = R_2 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = R.$$

Αφαιρούμε τις εξισώσεις των κύκλων:

$$(2g - 2f)x + (2f - 2g)y = 0 \iff (g - f)(x - y) = 0.$$

Για $g \neq f$ η κοινή χορδή (ριζική άξονας) είναι η ευθεία

$$x = y$$

- i. Απόσταση του O_1 από τον (*):

$$d(O_1, x - y = 0) = \frac{|-g - (-f)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|g - f|}{\sqrt{2}}.$$

Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία iff η απόσταση του κέντρου από τον ριζικό άξονα είναι μικρότερη της ακτίνας:

$$\frac{|g - f|}{\sqrt{2}} < R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \iff (g + f)^2 - 2c > 0.$$

Με $g \neq f$ (αλλιώς οι κύκλοι συμπίπτουν), η ζητούμενη συνθήκη είναι

$$(g + f)^2 - 2c > 0 \quad \text{και} \quad g \neq f$$

- ii. Για ίσες ακτίνες, η κοινή χορδή είναι κάθετη στο O_1O_2 και η απόσταση της από κάθε κέντρο είναι $p = \frac{|g - f|}{\sqrt{2}}$. Άρα, με τον τύπο χορδής $d = 2\sqrt{R^2 - p^2}$,

$$d = 2\sqrt{(g^2 + f^2 - c) - \frac{(g - f)^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{(g + f)^2 - 2c}{2}} = \sqrt{2(g + f)^2 - 4c}$$