Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος
Homework Solutions 6-10-25

69. Να βρείτε τα *τοπικά ακρότατα*, αν υπάρχουν, των συναρτήσεων:

i. $f(x) = -x^2 + 2x + 5$

ii. $f(x) = (x+1)^3$

iii. $f(x) = (x+1)e^x$

iv. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

Λύση: 2/58

i. $f(x) = -x^2 + 2x + 5$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -2x + 2 = -2(x-1), \qquad f''(x) = -2 < 0.$$

Το $f'(x) = 0$ δίνει $x = 1$. Αφού $f''(1) < 0$, υπάρχει *τοπικό μέγιστο* στο

$$(1, f(1)) = (1, 6).$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$

ii. $f(x) = (x+1)^3$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3(x+1)^2 \geq 0, \qquad f''(x) = 6(x+1).$$

Στο $x = -1$: $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 0$ και $f^{(3)}(-1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ οριζόντια εφαπτομένη και *όχι* τοπικό ακρότατο. Η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ κανένα τοπικό ακρότατο.

iii. $f(x)=(x+1)e^x$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=e^x(x+2), \qquad f''(x)=e^x(x+3).$$

$f'(x)=0 \iff x=-2$. Επειδή $f''(-2)=e^{-2}>0$, στο $x=-2$ υπάρχει *τοπικό ελάχιστο*.

$$(-2,f(-2))=\big(-2,-e^{-2}\big).$$

x	$-\infty$	-2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	

iv. $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$, Π.Ο.: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$$f'(x)=\frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}<0 \quad (\forall x\neq 2).$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$. Δεν μηδενίζεται η f' και στο $x=2$ δεν ορίζεται $\Rightarrow$ κανένα τοπικό ακρότατο.

2. Να μελετήσετε ως προς την *κυρτότητα* τις συναρτήσεις:

i. $f(x)=x^3-x^2-x+1$

ii. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

iii. $f(x)=\eta\mu\, x,\ x\in[0,2\pi]$

iv. $f(x)=\ln\big(x^2+4\big)$

Λύση: 2/72

i. $f(x)=x^3-x^2-x+1$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=3x^2-2x-1, \qquad f''(x)=6x-2.$$

$$f''(x)=0 \iff x=\tfrac{1}{3}.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Η f είναι *κοίλη* στο $(-\infty,\frac{1}{3}]$ και *κυρτή* στο $[\frac{1}{3},+\infty)$. Σημείο καμπής: $\big(\frac{1}{3},f(\frac{1}{3})\big)=\big(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\big)$.

ii. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, Π.Ο.: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x\big((x-1)^2+1\big)}{x^3}.$$

Εφόσον $e^x > 0$ και $(x-1)^2 + 1 > 0$, το πρόσημο του f'' είναι το πρόσημο του x^3:

$$f''(x) \begin{cases} < 0, & x < 0, \\ > 0, & x > 0. \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Κοίλη στο $(-\infty, 0)$, κυρτή στο $(0, +\infty)$. Στο $x = 0$ δεν ορίζεται $\Rightarrow$ δεν υπάρχει σημείο καμπής.

iii. $f(x) = \eta\mu\, x$, Π.Ο.: $[0, 2\pi]$.

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu\, x, \qquad f''(x) = -\eta\mu\, x.$$

$$f''(x) = 0 \iff \eta\mu\, x = 0 \iff x = 0,\ \pi,\ 2\pi.$$

x	0		π		2π
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	

Η f είναι *κοίλη* στο $[0, \pi]$ και *κυρτή* στο $[\pi, 2\pi]$. Σημείο καμπής στο εσωτερικό: $(\pi, 0)$. (Στα άκρα $0, 2\pi$ δεν θεωρούμε Σ.Κ.)

iv. $f(x) = \ln\big(x^2 + 4\big)$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad f''(x) = \frac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}.$$

$$f''(x) = 0 \iff 4 - x^2 = 0 \iff x = \pm 2.$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Κοίλη στα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, κυρτή στο $[-2, 2]$. Σημεία καμπής: $(-2, \ln 8)$ και $(2, \ln 8)$.

3. Να μελετήσετε ως προς την *κυρτότητα* και τα *σημεία καμπής* τις συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

ii. $f(x) = xe^x$

iii. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

iv. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Λύση: 3/72

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \qquad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

$$f''(x) = 0 \iff x = \tfrac{1}{3}.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Η f είναι *κοίλη* στο $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και *κυρτή* στο $[\frac{1}{3}, +\infty)$.

Σημείο καμπής: $\big(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})\big) = \big(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\big)$.

ii. $f(x) = xe^x$, Π.Ο.: $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x(x+1), \qquad f''(x) = e^x(x+2).$$

$$f''(x) = 0 \iff x = -2.$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Κοίλη στο $(-\infty, -2]$, κυρτή στο $[-2, +\infty)$.

Σημείο καμπής: $\big(-2, f(-2)\big) = \big(-2, -2e^{-2}\big)$.

iii. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, Π.Ο.: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\|$	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Κοίλη στο $(-\infty, -1)$, κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

Στο $x = -1$ δεν ορίζεται $\Rightarrow$ δεν υπάρχει σημείο καμπής.

iv. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, Π.Ο.: $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

$$f''(x) = 0 \iff 2\ln x - 3 = 0 \iff x = e^{3/2}.$$

x	0^+	$e^{3/2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Κοίλη στο $(0, e^{3/2}]$, κυρτή στο $[e^{3/2}, +\infty)$.

Σημείο καμπής: $\left(e^{3/2},\, f(e^{3/2})\right) = \left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right)$.