
Μαθηματικά Γ' Λυκείου - Πετρίδης Κωνσταντίνος

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

i. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii. $\arcsin(1)$

iii. $\arctan(1)$

iv. $\arcsin(\sin(2\pi/3))$

v. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

vi. $\sin(2\arctan\sqrt{2})$

Λύση:

(Ασχ. 1/120)

i.

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \text{διότι } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ii.

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{διότι } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

iii.

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{διότι } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

iv.

$$\arcsin(\sin(2\pi/3)) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

v. Θέτουμε $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \implies \sin\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \implies \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \implies \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα

$$\sin(\arcsin(\frac{1}{2})) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

vi. Έστω $\alpha = \arctan\sqrt{2}$. Τότε $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Άρα:

$$\sin(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{1+2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\eta\mu\left(\text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

ii. $\sigma\upsilon\nu\left(\text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

Λύση:

(Ασκ. 2/120)

Θέτουμε

$$\theta = \text{τοξ}\sigma\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sigma\varphi\theta = -\frac{1}{2}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Εφόσον $\sigma\varphi\theta < 0$, προκύπτει $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, άρα $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$.

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$1 + \sigma\varphi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta},$$

η οποία προκύπτει από $\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$ και $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$:

$$1 + \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right)^2 = \frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{1}{\eta\mu^2\theta}.$$

Με $\sigma\varphi\theta = -\frac{1}{2}$ έχουμε

$$\eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\varphi^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} > 0.$$

Επίσης $\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0.$$

3. Να αποδείξετε ότι, για $x \neq 0$,

$$\text{τοξ}\epsilon\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{τοξ}\epsilon\varphi x, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \text{τοξ}\epsilon\varphi x, & x < 0. \end{cases}$$

Λύση:

(Ασκ. 3/120)

Θέτουμε $\theta = \text{τοξεφ } x$. Τότε $\text{εφ } \theta = x$ και $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Θέτουμε επίσης $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Έχουμε

$$\text{εφ } \varphi = \text{εφ}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\text{εφ } \theta} = \frac{1}{x}.$$

Άρα φ είναι κάποια γωνία με εφαπτομένη $1/x$. Επειδή η τοξεφ παίρνει τιμές στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

i. $x > 0$. Τότε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ και άρα $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Επομένως η κύρια τιμή είναι ακριβώς αυτή:

$$\text{τοξεφ}(\frac{1}{x}) = \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ } x.$$

ii. $x < 0$. Τότε $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ και $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, άρα δεν ανήκει στο διάστημα τιμών της τοξεφ. Χρησιμοποιούμε την περιοδικότητα της εφαπτομένης ($\text{εφ}(\alpha - \pi) = \text{εφ } \alpha$) και παίρνουμε

$$\text{τοξεφ}(\frac{1}{x}) = \varphi - \pi = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \theta = -\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ } x.$$

Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει ο ζητούμενος τύπος.

4. Να εκφράσετε τις παραστάσεις $\eta\mu(\text{τοξεφ } x)$ και $\sigma\upsilon\nu(\text{τοξεφ } x)$ ως αλγεβρικές παραστάσεις του x .

Λύση:

(Ασκ. 4/120)

i. Θέτουμε $\theta = \text{τοξεφ } x \Rightarrow \text{εφ } \theta = x$ και $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > 0$. Από την ταυτότητα $1 + \text{εφ}^2\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$ παίρνουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \eta\mu\theta = \text{εφ } \theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Άρα

$$\eta\mu(\text{τοξεφ } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii. Θέτουμε $\varphi = \text{τοξεφ } x \Rightarrow \sigma\varphi\varphi = x$ και $\varphi \in (0, \pi) \Rightarrow \eta\mu\varphi > 0$. Από την ταυτότητα

$$1 + \sigma\varphi^2\varphi = \frac{1}{\eta\mu^2\varphi} \text{ έχουμε}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\varphi\varphi \cdot \eta\mu\varphi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Άρα

$$\sigma\upsilon\nu(\tau\omicron\xi\sigma\varphi x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\xi\eta\mu x}{e^{2x} - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\xi\eta\mu x}{\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(2x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(2x)}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\xi\epsilon\varphi x - x + \frac{x^3}{3}}{x^3}$

Λύση:

(Ασχ. 1/124)

i. Μορφή 0/0. Εφαρμόζουμε de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\xi\eta\mu x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2e^{2x}}} = \frac{1}{2}.$$

ii. Μορφή 0/0. De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau\omicron\xi\eta\mu x}{\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2}{1+(2x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+(2x)^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}.$$

iii. Μορφή 0/0. De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2x)}{\tau\omicron\xi\epsilon\varphi(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}}{\frac{1}{1+(2x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu(2x) (1+4x^2) = 1.$$

iv. Μορφή $0/0$. Θέτουμε $f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$. Εφαρμόζουμε de L'Hôpital δύο φορές:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2.$$

Και πάλι $0/0$. Ξανά de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x^2)^2} + 1}{6} = \frac{0}{6} = 0.$$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

ii. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

iii. $f(x) = \arctan(e^{x^2})$

iv. $f(x) = \arctan(x + \sqrt{1+x^2})$

v. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

Λύση:

(Ασκ. 2/124)

i. $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

Πεδίο ορισμού: $|x/2| \leq 1 \Rightarrow x \in [-2, 2]$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - (x/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad x \in (-2, 2).$$

ii. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

Πεδίο ορισμού: $-1 \leq \frac{1-x}{\sqrt{2}} \leq 1 \Rightarrow x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = -\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}, \quad x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

iii. $f(x) = \text{τοξεφ}(\varepsilon\varphi^2x)$

Πεδίο ορισμού: ορίζεται η $\varepsilon\varphi x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{(\varepsilon\varphi^2x)'}{1 + \varepsilon\varphi^4x} = \frac{2\varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}{1 + \varepsilon\varphi^4x} = \frac{2\varepsilon\varphi x (1 + \varepsilon\varphi^2x)}{1 + \varepsilon\varphi^4x}.$$

iv. $f(x) = \text{τοξεφ}(x + \sqrt{1+x^2})$

Πεδίο ορισμού: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + (x + \sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

v. $f(x) = \text{τοξσυν}(\frac{1}{x})$

Πεδίο ορισμού: $|\frac{1}{x}| \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Παράγωγος:

$$f'(x) = -\frac{-1/x^2}{\sqrt{1 - (1/x)^2}} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| \geq 1, x \neq 0.$$

7. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = 3x - \text{τοξημ}x$, με $A_f = [-1, 1]$.

Λύση:

(Ασχ. 3/124)

Για $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Θέτουμε $f'(x) = 0$:

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3} \iff x^2 = \frac{8}{9} \iff x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Σχόλιο: Στα άκρα $x = \pm 1$ η παράγωγος δεν ορίζεται κάποια σχολικά τα περιλαμβάνουν ως «κρίσιμα» μόνο όταν ζητούνται άκρα σε κλειστό διάστημα. Εδώ, ως εσωτερικά κρίσιμα σημεία, είναι μόνο τα $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

8. Να βρείτε τα τοπικά μέγιστα/ελάχιστα των παρακάτω συναρτήσεων και να συμπληρώσετε τον πίνακα μονοτονίας:

i. $f(x) = x - 2 \text{τοξεφ } x$

ii. $f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$

iii. $f(x) = \text{τοξημ}(e^x)$.

Λύση:

(Ασκ. 4/124)

i. $f(x) = x - 2 \text{τοξεφ } x$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}.$$

Κρίσιμα σημεία (εσωτερικά): $x = \pm 1$.

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		1	
$+\infty$						
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		\nearrow	TM	\searrow	TE	\nearrow

Άρα: τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ με $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$, τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ με $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

ii.

$f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$

$$A_f = [-1, 1], \quad f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad |x| < 1.$$

Εσωτερικό κρίσιμο σημείο: $x = 0$.

Πίνακας μονοτονίας στο $[-1, 1]$:

x	-1		0		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		\nearrow	TM	\searrow	

Επιπλέον, στα άκρα: $f(\pm 1) = \text{τοξσυν}(1) = 0$ (τοπικά ελάχιστα στο κλειστό διάστημα).

Στο $x = 0$: τοπικό μέγιστο $f(0) = \text{τοξσυν}(0) = \frac{\pi}{2}$.

iii.

$$\underline{f(x) = \text{τοξημ}(e^x).$$

$$A_f = (-\infty, 0], \quad f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \quad x < 0.$$

Για $x < 0$, $f'(x) > 0$ (αύξουσα).

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		+
$f(x)$		↗ Μέγιστο στο άκρο

Τιμές: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{τοξημ}(0) = 0$, ενώ $f(0) = \text{τοξημ}(1) = \frac{\pi}{2}$. Άρα στο $x = 0$ η f έχει (καθολικό/τοπικό) μέγιστο στο άκρο του πεδίου.

9. Να δείξετε ότι:

$$x \leq \text{τοξημ} x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Λύση:

(Ασκ. 5/124)

Θέτουμε $g(x) = \text{τοξημ} x - x$ για $x \in [0, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

Για $x \in [0, 1)$ ισχύει $\sqrt{1-x^2} \leq 1$, άρα $g'(x) \geq 0$ (και μάλιστα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$). Επομένως η g είναι αύξουσα στο $[0, 1]$ και

$$g(x) \geq g(0) = \text{τοξημ} 0 - 0 = 0.$$

Άρα

$$x \leq \text{τοξημ} x, \quad \forall x \in [0, 1],$$

με ισότητα μόνο στο $x = 0$ (διότι για $x \in (0, 1)$ έχουμε $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$).

Εναλλακτικά: Θέτουμε $y = \text{τοξημ} x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x = \eta\mu y$. Η $\eta\mu$ είναι κοίλη στο $[0, \pi]$, άρα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο 0: $\eta\mu y \leq y$ για $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Άρα $x = \eta\mu y \leq y = \text{τοξημ} x$.

10. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu\left(\text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{4}{5}\right)\right).$$

Λύση:

(Ασκ. 1/125)

Θέτουμε $\theta = \text{τοξ}\eta\mu\left(\frac{4}{5}\right)$. Τότε $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ και $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (κύριο διάστημα τιμών της τοξημ).
Άρα

$$A = \eta\mu(\theta) = \frac{4}{5}$$

11. Να δείξετε ότι

$$\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση:

(Ασκ. 2/125)

Θέτουμε

$$\alpha = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3}{4}\right), \quad \beta = \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Τότε

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{4}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{αφού οι συνημίτονες είναι θετικοί}).$$

Άρα

$$\eta\mu\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \eta\mu\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

Υπολογίζουμε το $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

Επειδή $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, έχουμε $\alpha + \beta \in [0, \pi]$. Η μοναδική γωνία στο $[0, \pi]$ με $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = 0$ είναι $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Επομένως

$$\text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξ}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

12. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}.$$

Λύση:

(Ασκ. 3/125)

Για $x \rightarrow 0^+$ έχουμε $\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu(1-x) \rightarrow \tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu(1) = 0$ και $\sqrt{x} \rightarrow 0$, άρα η μορφή είναι $0/0$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx}[\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu(1-x)]}{\frac{d}{dx}[\sqrt{x}]}.$$

Ισχύει $\frac{d}{dx}\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. Με $u = 1-x \Rightarrow u' = -1$ παίρνουμε

$$(\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu(1-x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}.$$

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{x}{2}\tau\omicron\zeta\eta\mu x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$

ii. $f(x) = 2x\tau\omicron\zeta\epsilon\varphi x - \ln(1+x^2)$

iii. $f(x) = \tau\omicron\zeta\eta\mu(\sqrt{1-x})$

Λύση:

(Ασκ. 4/125)

i.

$$A_f = [-1, 1], \quad f'(x) = \frac{1}{2}\tau\omicron\zeta\eta\mu x + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

(εναλλακτικά: $f'(x) = \frac{1}{2}\tau\omicron\zeta\eta\mu x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{x-x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$)

ii.

$$A_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 \operatorname{τοξεφ} x \quad (\text{διότι } (2x) \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 0).$$

iii.

$$A_f = [0, 1], \quad f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1.$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{τεμ} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να σχεδιάσετε πρόχειρα τη γραφική παράστασή της.

Λύση:

(Ασκ. 5/125)

(i) Μονοτονία και εικόνα της f .

$$f'(x) = (\operatorname{τεμ} x)' = \operatorname{τεμ} x \cdot \operatorname{εφ} x.$$

Στα $(0, \frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ισχύει $\operatorname{τεμ} x \cdot \operatorname{εφ} x > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα σε καθένα. Επίσης

$$\operatorname{τεμ} 0 = 1, \quad \operatorname{τεμ} \pi = -1, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{τεμ} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{τεμ} x = -\infty.$$

Άρα

$$\operatorname{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

(ii) Πεδίο ορισμού και τύπος της f^{-1} . Η f είναι 1-1 στο δοθέν πεδίο της, επομένως αντιστρέψιμη, με

$$A_{f^{-1}} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Από $y = \operatorname{τεμ} x \Leftrightarrow \operatorname{συν} x = \frac{1}{y}$ (και $\operatorname{τοξσυν} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$) προκύπτει

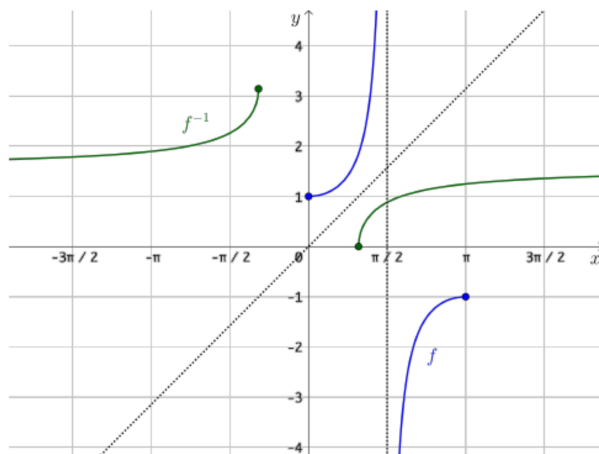
$$f^{-1}(y) = \operatorname{τοξσυν}\left(\frac{1}{y}\right), \quad |y| \geq 1$$

(iii) Οδηγός για το σκίτσο της f^{-1} . Δύο κλάδοι, συμμετρικοί της γραφικής της f ως προς $y = x$:

$$y \geq 1: \quad f^{-1}(y) = \operatorname{τοξσυν}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y(=x) \uparrow, \quad f^{-1}(1) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}^-,$$

$$y \leq -1: \quad f^{-1}(y) = \operatorname{τοξσυν}\left(\frac{1}{y}\right), \quad y(=x) \uparrow, \quad f^{-1}(-1) = \pi, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}^+.$$

(Οριζόντια ασύμπτωτη και στους δύο κλάδους: $y = \frac{\pi}{2}$.)



16. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 4 \text{τοξεφ } x - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

(Ασκ. 6/125)

Παράγωγος:

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 2 = \frac{2-2x^2}{1+x^2}.$$

Κρίσιμα σημεία από $f'(x) = 0$:

$$\frac{4}{1+x^2} - 2 = 0 \iff 4 = 2(1+x^2) \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$		\searrow	\nearrow	\searrow

Τιμές στα κρίσιμα:

$$f(-1) = 4 \text{τοξεφ}(-1) - 2(-1) = -\pi + 2, \quad f(1) = 4 \text{τοξεφ}(1) - 2 = \pi - 2.$$

Τοπικό ελάχιστο στο $x = -1$ με $f(-1) = 2 - \pi$, Τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ με $f(1) = \pi - 2$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ } x - x + \frac{x^3}{3}$. Να αποδείξετε ότι $x - \frac{x^3}{3} < \text{τοξεφ } x$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Λύση:

(Ασκ. 7/125)

Θέτουμε

$$g(x) = \text{τοξεφ } x - x + \frac{x^3}{3}.$$

Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{-x^2}{1+x^2} + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \text{τοξεφ } 0 - 0 + 0 = 0.$$

Με την αύξηση της g παίρνουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή

$$x - \frac{x^3}{3} < \text{τοξεφ } x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

(ισότητα μόνο στο $x = 0$).

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0	\nearrow

18. Να δείξετε ότι

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad 2 \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Λύση:

(Ασκ. 1/126)

Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\text{τοξεφ } a + \text{τοξεφ } b = \text{τοξεφ}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \quad (\text{όταν } ab < 1), \quad 2 \text{τοξεφ } t = \text{τοξεφ}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right) \quad (|t| < 1).$$

(i) Με $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ έχουμε $ab = \frac{1}{6} < 1$ και

$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}\right) = \operatorname{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) Πρώτα

$$2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{2/3}{8/9}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{3}{4}\right).$$

Έπειτα, με $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{7}$ (έτσι $ab = \frac{3}{28} < 1$):

$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{3}{4}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}}\right) = \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{25/28}{25/28}\right) = \operatorname{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα ισχύει

$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right)$$

19. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{τοξημ} x$, $x \in [-1, 1]$ είναι περιττή.

Λύση:

(Ασκ. 2/126)

Θυμόμαστε τον ορισμό: μια συνάρτηση f είναι *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x του πεδίου της.

Έστω $x \in [-1, 1]$ και θέτουμε

$$\theta = \operatorname{τοξημ} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \implies \eta\mu \theta = x.$$

Τότε και $-\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και

$$\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu \theta = -x.$$

Με βάση τον ορισμό της $\operatorname{τοξημ}$ (η μοναδική γωνία του $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με δεδομένο ημίτονο), προκύπτει

$$\operatorname{τοξημ}(-x) = -\theta = -\operatorname{τοξημ} x.$$

Άρα $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, δηλαδή η f είναι *περιττή*. □

20. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξσυν } x$, $x \in [-1, 1]$, δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

Λύση:

(Ασκ. 3/126)

Για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει

$$\text{τοξσυν}(-x) = \pi - \text{τοξσυν}(x).$$

Πράγματι, αν θέσουμε $\theta = \text{τοξσυν}(x) \in [0, \pi]$, τότε $\cos \theta = x$ και $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -x$.

Επειδή $\pi - \theta \in [0, \pi]$ (το διάστημα τιμών της τοξσυν), η μοναδικότητα δίνει $\text{τοξσυν}(-x) = \pi - \theta = \pi - \text{τοξσυν}(x)$.

Όχι άρτια:

Αν ήταν άρτια, θα είχαμε $f(-x) = f(x)$ για όλα τα x , δηλαδή $\pi - \text{τοξσυν}(x) = \text{τοξσυν}(x) \Rightarrow \text{τοξσυν}(x) = \frac{\pi}{2}$ για όλα τα x . Αυτό είναι ψευδές (π.χ. $f(1) = \text{τοξσυν}(1) = 0 \neq \frac{\pi}{2}$). Άρα η f δεν είναι άρτια.

Όχι περιττή:

Αν ήταν περιττή, θα είχαμε $f(-x) = -f(x)$ για όλα τα x , δηλαδή $\pi - \text{τοξσυν}(x) = -\text{τοξσυν}(x) \Rightarrow \text{τοξσυν}(x) = \frac{\pi}{2}$ για όλα τα x , που επίσης είναι ψευδές (π.χ. $f(1) = 0$). Άρα η f δεν είναι περιττή.

Η $f(x) = \text{τοξσυν } x$ στο $[-1, 1]$ δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ } x$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{τοξεφ } x < x, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Λύση:

(Ασκ. 4/126)

(α) Άνω φράγμα. Θέτουμε $h(x) = x - \text{τοξεφ } x$, για $x > 0$. Τότε

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0, \quad x > 0,$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$, παίρνουμε $h(x) > 0 \Rightarrow \text{τοξεφ } x < x$ για κάθε $x > 0$.

(β) *Κάτω φράγμα.* Θέτουμε $g(x) = \text{τοξεφ } x - \frac{x}{1+x^2}$, για $x > 0$. Τότε

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2) - (1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Άρα $\text{τοξεφ } x > \frac{x}{1+x^2}$ για κάθε $x > 0$.

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{τοξεφ } x < x, \quad \forall x > 0$$

22. Να αποδείξετε ότι

$$\text{τοξεφ} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \text{τοξεφ } x + \frac{\pi}{4}, \quad \forall x \in (-\infty, 1),$$

και να βρείτε ανάλογη σχέση για $x > 1$.

Λύση:

(Ασκ. 5/126)

Θέτουμε $\theta = \text{τοξεφ } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \tan \theta = x$.

Για $\varphi = \theta + \frac{\pi}{4}$ έχουμε

$$\tan \varphi = \tan \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} = \frac{1+x}{1-x}.$$

• Αν $x < 1$, τότε $\theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Άρα η κύρια τιμή της τοξεφ είναι ακριβώς η φ :

$$\text{τοξεφ} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \varphi = \text{τοξεφ } x + \frac{\pi}{4}.$$

• Αν $x > 1$, τότε $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ και $\varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Η τοξεφ επιστρέφει τιμές στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, γι' αυτό παίρνουμε την συνεκτική γωνία $\varphi - \pi$:

$$\text{τοξεφ} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \varphi - \pi = \text{τοξεφ } x + \frac{\pi}{4} - \pi = \text{τοξεφ } x - \frac{3\pi}{4}, \quad x > 1.$$

$$\operatorname{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \operatorname{τοξεφ} x + \frac{\pi}{4}, & x < 1, \\ \operatorname{τοξεφ} x - \frac{3\pi}{4}, & x > 1. \end{cases}$$