

Double Ring Ising model

Shane Harding

August 31, 2015

Define the 4 possible spins as s_i where

$$s_i \in \left\{ \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

The Hamiltonian is given by:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j$$

we set $J = 1$ for simplicity and take the dot product of the two spin vectors. The partition function, Z , is given by the trace of the matrix P which has entries $e^{H(s_i, s_j)}$ for all possible combinations of s_i, s_j .

$$P = \begin{pmatrix} e^{-2\beta} & e^0 & e^0 & e^{2\beta} \\ e^0 & e^{-2\beta} & e^{2\beta} & e^0 \\ e^0 & e^{2\beta} & e^{-2\beta} & e^0 \\ e^{2\beta} & e^0 & e^0 & e^{-2\beta} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2\beta} & 1 & 1 & e^{2\beta} \\ 1 & e^{-2\beta} & e^{2\beta} & 1 \\ 1 & e^{2\beta} & e^{-2\beta} & 1 \\ e^{2\beta} & 1 & 1 & e^{-2\beta} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(3)$$

Now find the eigenvalues.. $\det(P - \lambda I)$.

$$\begin{vmatrix} e^{-2\beta} - \lambda & 1 & 1 & e^{2\beta} \\ 1 & e^{-2\beta} - \lambda & e^{2\beta} & 1 \\ 1 & e^{2\beta} & e^{-2\beta} - \lambda & 1 \\ e^{2\beta} & 1 & 1 & e^{-2\beta} - \lambda \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$(5)$$

$$= (e^{-2\beta} - \lambda) \left| \begin{array}{ccc} e^{-2\beta} - \lambda & e^{2\beta} & 1 \\ e^{2\beta} & e^{-2\beta} - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & e^{-2\beta} - \lambda \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} 1 & e^{2\beta} & 1 \\ 1 & e^{-2\beta} - \lambda & 1 \\ e^{2\beta} & 1 & e^{-2\beta} - \lambda \end{array} \right| \quad (6)$$

$$+ \left| \begin{array}{ccc} 1 & e^{-2\beta} - \lambda & 1 \\ 1 & e^{2\beta} & 1 \\ e^{2\beta} & 1 & e^{-2\beta} - \lambda \end{array} \right| - e^{2\beta} \left| \begin{array}{ccc} 1 & e^{-2\beta} - \lambda & e^{2\beta} \\ 1 & e^{2\beta} & e^{-2\beta} - \lambda \\ e^{2\beta} & 1 & 1 \end{array} \right| \quad (7)$$

$$= (e^{-2\beta} - \lambda) [(e^{-2\beta} - \lambda)((e^{-2\beta} - \lambda)^2 - 1) - e^{2\beta}(e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - 1) + (e^{2\beta} - (e^{-2\beta} - \lambda))] \quad (8)$$

$$- [((e^{-2\beta} - \lambda)^2 - 1) - (e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - 1) + e^{2\beta}(e^{2\beta} - (e^{-2\beta} - \lambda))] \quad (9)$$

$$+ [e^{2\beta}((e^{-2\beta} - \lambda) - 1) - ((e^{-2\beta} - \lambda)^2 - 1) + e^{2\beta}((e^{-2\beta} - \lambda) - e^{2\beta})] \quad (10)$$

$$- e^{2\beta}[(e^{2\beta} - (e^{-2\beta} - \lambda)) - ((e^{-2\beta} - \lambda) - e^{2\beta}) + e^{2\beta}((e^{-2\beta} - \lambda)^2 - e^{4\beta})] \quad (11)$$

$$= (e^{-2\beta} - \lambda) [(e^{-2\beta} - \lambda)^3 - (e^{-2\beta} - \lambda) - e^{4\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) + e^{2\beta} + e^{2\beta} - (e^{-2\beta} - \lambda)] \quad (12)$$

$$- [(e^{-2\beta} - \lambda) - 1 - e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) + 1 - e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) + e^{4\beta}] \quad (13)$$

$$+ [e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - e^{2\beta} - (e^{-2\beta} - \lambda)^2 + 1 + e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - e^{4\beta}] \quad (14)$$

$$- e^{2\beta}[e^{2\beta} - (e^{-2\beta} - \lambda) - (e^{-2\beta} - \lambda) + e^{2\beta} + e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - e^{6\beta}] \quad (15)$$

$$= (e^{-2\beta} - \lambda)^4 - 2(e^{-2\beta} - \lambda)^2 - e^{4\beta}(e^{-2\beta} - \lambda)^2 + 2e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - (e^{-2\beta} - \lambda)^2 \quad (16)$$

$$+ 2e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - e^{4\beta} + 2e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - (e^{-2\beta} - \lambda)^2 \quad (17)$$

$$- e^{2\beta} + 1 - 2e^{4\beta} - e^{4\beta} + 2e^{2\beta}(e^{-2\beta} - \lambda) - e^{4\beta}(e^{-2\beta} - \lambda)^2 + e^{8\beta} \quad (18)$$