中山大學 软件工程学院

SUN YAT-SEN UNIVERSITY SCHOOL OF SOFTWARE ENGINEERING

计算机组成原理

授课老师：吴炜滨

大纲

- 定点运算
  - 移位运算
  - 加减法运算
  - 乘法运算
  - 除法运算

大纲

- 定点运算
  - 移位运算
    - 移位运算的数学意义
    - 算术移位规则
    - 算术移位的硬件实现
    - 算术移位与逻辑移位的区别

移位运算

移位的数学意义

- 实现数据的放缩

$$15.\mathrm{m} = 1500.\mathrm{cm}$$

小数点右移 2 位

$$N = (\mathrm{d}_{n-1}\mathrm{d}_{n-2}\cdots\mathrm{d}_1\mathrm{d}_0.\mathrm{d}_{-1}\mathrm{d}_{-2}\cdots\mathrm{d}_{-m})_r$$

$$= \mathrm{d}_{n-1}r^{n-1} + \mathrm{d}_{n-2}r^{n-2} + \cdots + \mathrm{d}_1r^1 + \mathrm{d}_0r^0 + \mathrm{d}_{-1}r^{-1} + \cdots + \mathrm{d}_{-m}r^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} d_i r^i$$

移位运算

移位的数学意义

- 实现数据的放缩

$$15.\mathrm{m} = 1500.\mathrm{cm}$$

小数点右移 2 位

- 机器用语
  - 15 相对于小数点 左移 2 位（小数点不动）
  - 计算机中左移
    - 绝对值扩大（二进制，左移一位扩大两倍）
  - 计算机中右移
    - 绝对值缩小（二进制，右移一位缩小为原来的1/2）
  - 在计算机中，移位与加减配合，能够实现乘除运算

算术移位规则

- 算术移位
  - 有符号数的移位
  - 使机器数的移位与其对应真值进行移位的效果相同
    - 左移一位，对应真值的绝对值扩大两倍
    - 右移一位，对应真值的绝对值缩小为原来的1/2
- 算术移位规则
  - 仅改变真值的绝对值
    - 符号位不变，仅移动数值位
  - 数值位空位添补规则
    - 真值进行移位时，数值位空位添补规则
      - 正数/负数：左移/右移，空位都添0

$$x = +0.x_1x_2 \ldots x_k \qquad x = -0.x_1x_2 \ldots x_k$$

算术移位规则

- 符号位不变，仅移动数值位
- 数值位空位添补规则：使其与真值进行移位的效果相同

真值	码　　制	添补代码
正数	原码、补码、反码	0
负数	原　　码	0
	补　　码	左移 添 0
		右移 添 1
	反　　码	1

$$x = +0.x_1x_2 \ldots x_k$$
$$[x]_{原、补、反} = 0.x_1x_2 \ldots x_k$$

$$x = -0.x_1x_2 \ldots x_k$$
$$[x]_{原} = 1.x_1x_2 \ldots x_k$$

$$x = -0.x_1x_2 \ldots x_k100 \ldots 000$$
$$[x]_{补} = 1.\overline{x_1}\overline{x_2} \ldots \overline{x_k}100 \ldots 000$$

$$x = -0.x_1x_2 \ldots x_k$$
$$[x]_{反} = 1.\overline{x_1}\overline{x_2} \ldots \overline{x_k}$$

举例

- 设机器数字长为 8 位（含 1 位符号位），写出A = +26时，三种机器数左、右移一位和两位后的表示形式及对应的真值，并分析结果的正确性。

解：　　$A = +26 = +11010$

则 $[A]_{原} = [A]_{补} = [A]_{反} = 0{,}0011010$

移位操作	机　器　数	对应的真值
	$[A]_{原} = [A]_{补} = [A]_{反}$	
移位前	$0{,}0011010$	$+26$
左移一位	$0{,}0110100$	$+52$
左移两位	$0{,}1101000$	$+104$
右移一位	$0{,}0001101$	$+13$
右移两位	$0{,}0000110$	$+6$

举例

- 设机器数字长为 8 位（含 1 位符号位），写出A = –26时，三种机器数左、右移一位和两位后的表示形式及对应的真值，并分析结果的正确性。

解：　　$A = -26 = -11010$

原码

移位操作	机　器　数	对应的真值
移位前	1,0011010	– 26
左移一位	1,0110100	– 52
左移两位	1,1101000	– 104
右移一位	1,0001101	– 13
右移两位	1,0000110	– 6

举例

- 设机器数字长为 8 位（含 1 位符号位），写出A = –26时，三种机器数左、右移一位和两位后的表示形式及对应的真值，并分析结果的正确性。

解：　　$A = -26 = -11010$

$[A]_{原} = 1,0011010$

补码

移位操作	机　器　数	对应的真值
移位前	1,1100110	– 26
左移一位	1,1001100	– 52
左移两位	1,0011000	– 104
右移一位	1,1110011	– 13
右移两位	1,1111001	– 7

举例

- 设机器数字长为 8 位（含 1 位符号位），写出A = –26时，三种机器数左、右移一位和两位后的表示形式及对应的真值，并分析结果的正确性。

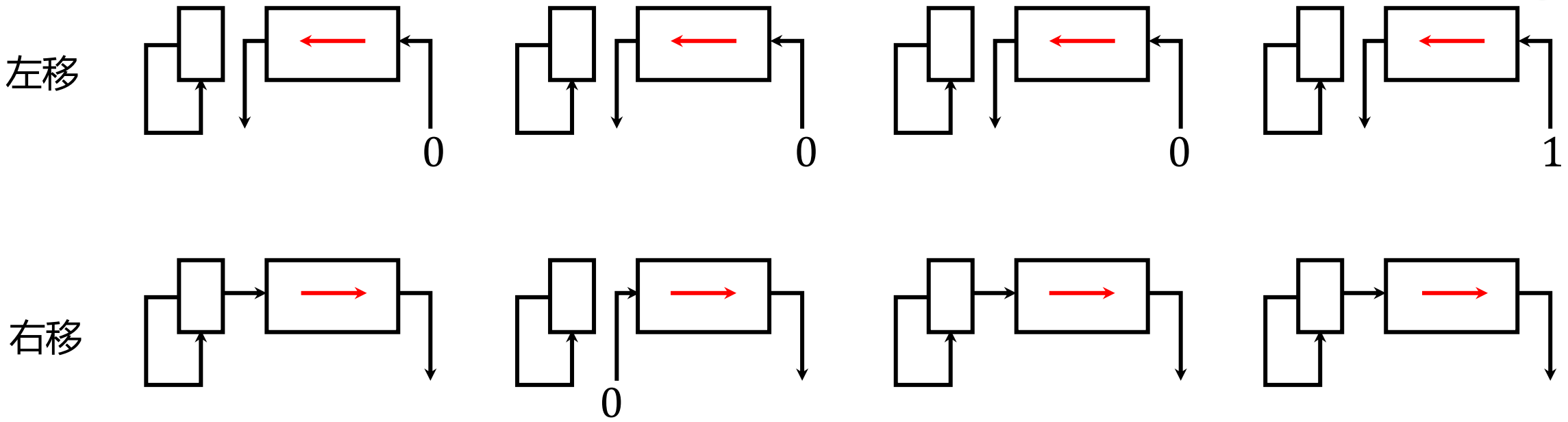
解：　　$A = -26 = -11010$

$[A]_{原} = 1,0011010$

反码

移位操作	机　器　数	对应的真值
移位前	1,1100101	– 26
左移一位	1,1001011	– 52
左移两位	1,0010111	– 104
右移一位	1,1110010	– 13
右移两位	1,1111001	– 6

算术移位的硬件实现

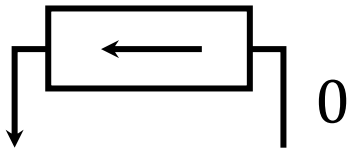


	（a）真值为正	（b）负数的原码	（c）负数的补码	（d）负数的反码
←丢 1	出错	出错	正确	正确
→丢 1	影响精度	影响精度	影响精度	正确

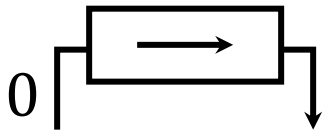
算术移位和逻辑移位的区别

- 算术移位
  - 有符号数的移位，符号位要保持不动
- 逻辑移位
  - 无符号数的移位，所有位都会参与移位运算

- 逻辑左移
  - 低位添 0，高位移丢



- 逻辑右移
  - 高位添 0，低位移丢



算术移位和逻辑移位的区别

- 例如

	01010011		10110010
逻辑左移	10100110	逻辑右移	01011001
算术左移	00100110	算术右移 (补码)	11011001

高位 1 移丢

大纲

- 定点运算
  - 加减法运算

用补码作加减法运算

- 用原码作加减法运算的问题
  - 需要根据操作数的符号，确定作加法还是减法，并使用加法器/减法器
  - ±0原码不统一

要求	数1	数2	实际操作	结果符号
加法	正	正	加	正
加法	正	负	减	可正可负
加法	负	正	减	可正可负
加法	负	负	加	负

用补码作加减法运算

- 用反码作加减法运算的问题
  - ±0反码不统一
  - 电路实现较麻烦
  - 反码：多用于原码与补码间转换的过渡

- 用补码作加减法运算
  - ±0补码统一
  - 补码：找到一个与负数等价的正数来代替负数，实现了加减法形式的统一
    - 原理：计算机当中机器字长有限，使其存在模，运算溢出的最高位将被丢掉
  - 现代计算机中都采用补码作加减法运算

大纲

- 定点运算
  - 加减法运算
    - 补码加减法运算的公式
    - 补码加减法溢出的判断
    - 补码加减法的硬件配置

加减法运算

- 补码加减运算公式
  - 加法

整数 $[A+B]_{补} = [A]_{补} + [B]_{补} \pmod{2^{n+1}}$

小数 $[A+B]_{补} = [A]_{补} + [B]_{补} \pmod{2}$

加减法运算

补码加减运算公式

- 减法

$$A - B = A + (-B)$$

整数 $$[A - B]_{补} = [A + (-B)]_{补} = [A]_{补} + [-B]_{补} \pmod{2^{n+1}}$$

小数 $$[A - B]_{补} = [A + (-B)]_{补} = [A]_{补} + [-B]_{补} \pmod{2}$$

- $[-B]_{补}$由$[B]_{补}$连同符号位在内，每位取反，末位加1而得
- 连同符号位一起相加，和的符号，通过计算过程自动产生，符号位产生的进位自然丢掉

举例

- 设机器字长为5位（含1位符号位），$A = 0.1011$，$B = -0.0101$，求 $[A + B]_{补}$

解：

$$
\begin{array}{rl}
[A]_{补} & = \quad 0.1011 \\
+[B]_{补} & = \quad 1.1011 \\
\hline
[A]_{补} + [B]_{补} & = \boxed{1}0.0110 = [A + B]_{补}
\end{array}
$$

丢掉

$$\therefore A + B = 0.0110$$

验证

$$
\begin{array}{r}
0.1011 \\
-\ 0.0101 \\
\hline
0.0110
\end{array}
$$

举例

- 设机器字长为5位（含1位符号位），$A=-9$，$B=-5$，求 $[A+B]_{补}$

解：

$$
\begin{array}{rl}
[A]_{补} & = \quad 1,0111 \\
+[B]_{补} & = \quad 1,1011 \\
\hline
[A]_{补}+[B]_{补} & = 11,0010 = [A+B]_{补}
\end{array}
$$

丢掉

$\therefore A+B=-1110$

验证

$$
\begin{array}{r}
-1001 \\
+\ -0101 \\
\hline
-1110
\end{array}
$$

举例

- 设机器数字长为 8 位（含 1 位符号位）且 $A = 15$，$B = 24$，用补码求 $A - B$

解：

$$A = 15 = 0001111$$

$$B = 24 = 0011000$$

$$[A]_{补} = 0,0001111 \qquad [B]_{补} = 0,0011000$$

$$+[-B]_{补} = 1,1101000$$

$$[A]_{补} + [-B]_{补} = 1,1110111 = [A-B]_{补}$$

$$\therefore A - B = -1001 = -9$$

练习

- 设 $x = \frac{11}{16}$，$y = \frac{7}{16}$，用补码求 $x + y$（假设机器字长为5位，包括一位的符号位，而且这台机器是一个纯小数的定点机）

解：

$$x = \frac{1011}{10000} = 0.1011 \qquad y = \frac{111}{10000} = 0.0111$$

$$[x]_{补} = 0.1011 \qquad [y]_{补} = 0.0111$$

$$[x + y]_{补} = 0.1011 + 0.0111 = 1.0010$$

$$\therefore\ x + y = -0.1110 = -\frac{14}{16}$$

错

因为正确运算结果大于1，超出小数定点机能表示的范围[-1,1)

练习

- 设机器数字长为 8 位（含 1 位符号位）且 $A = -97$，$B = +41$，用补码求 $A - B$

解：$A = -1100001$　　$B = 0101001$

$[A]_{补} = 1,0011111$　　$[B]_{补} = 0,0101001$

$[-B]_{补} = 1,1010111$

$[A - B]_{补} = 1,0011111 + 1,1010111 = 10,1110110$

丢掉

$\therefore A - B = +1110110 = +118$

错　因为正确运算结果超出该整数定点机能表示的范围[-128, +127]

溢出判断

一位符号位判溢出

- 参加加法的两个数（减法时即为被减数和“求补”以后的减数）符号不同，不会发生溢出
- 参加加法的两个数（减法时即为被减数和“求补”以后的减数）符号相同，其结果的符号与原操作数的符号不同，即为溢出
- 硬件实现
  - 数值最高位的进位 $\oplus$ 符号位的进位 = 1　　溢出
  - 如

两个正数相加：$1 \oplus 0 = 1$

两个负数相加：$0 \oplus 1 = 1$

} 有 溢出

两个负数或一正一负相加：$1 \oplus 1 = 0$

两个正数或一正一负相加：$0 \oplus 0 = 0$

} 无 溢出

溢出判断

- 一位符号位判溢出
  - 参加加法的两个数（减法时即为被减数和“求补”以后的减数）符号不同，不会发生溢出
  - 参加加法的两个数（减法时即为被减数和“求补”以后的减数）符号相同，其结果的符号与原操作数的符号不同，即为溢出
  - 硬件实现
    - 数值最高位的进位 ⊕ 符号位的进位 = 1　　溢出
    - 记录数值最高位的进位、符号位的进位
    - **把这两个进位送入到一个异或电路**
    - 异或电路输出等于1，给溢出标志置1表示发生了溢出，如果输出等于0，就没有发生溢出

溢出判断

- 两位符号位判溢出：变形补码
- 变形补码
  - 有两位符号位
  - 小数

$$[x]_{补'} = \begin{cases} x & 1 > x \geq 0 \\ 4 + x & 0 > x \geq -1 \ (\mathrm{mod}\ 4) \end{cases}$$

  - x 为真值
  - 正数：00.XXXXXX（符号位：00，数值部分：与x相同）
  - 负数：11.XXXXXX（符号位：11，数值部分： x 数值部分每位取反，末位加一）

溢出判断

- 变形补码
  - 有两位符号位
  - 整数

$$[x]_{补'} = \begin{cases} 00,\ x & 2^n > x \geq 0 \\ 2^{n+2} + x & 0 > x \geq -2^n \ (\mathrm{mod}\ 2^{n+2}) \end{cases}$$

  - x 为真值，n 为整数数值位的位数
  - 正数：00，XXXXXX（符号位：00，数值部分：与x相同）
  - 负数：11，XXXXXX（符号位：11，数值部分： x 数值部分每位取反，末位加一）

溢出判断

- 变形补码
  - 运算规则：2位符号位连同数值部分一起运算，高位符号位产生的进位自动丢掉
    - 小数

$$[x + y]_{补'} = [x]_{补'} + [y]_{补'} \pmod 4$$

$$[x - y]_{补'} = [x]_{补'} + [-y]_{补'} \pmod 4$$

    - 整数

$$[x + y]_{补'} = [x]_{补'} + [y]_{补'} \pmod{2^{n+2}}$$

$$[x - y]_{补'} = [x]_{补'} + [-y]_{补'} \pmod{2^{n+2}}$$

溢出判断

- 两位符号位判溢出：变形补码
  - 结果的双符号位 相同　　未溢出

$$00.\times\times\times\times\times \qquad 00,\times\times\times\times\times$$
$$11.\times\times\times\times\times \qquad 11,\times\times\times\times\times$$

  - 结果的双符号位 不同　　溢出

$$10.\times\times\times\times\times \qquad 10,\times\times\times\times\times$$
$$01.\times\times\times\times\times \qquad 01,\times\times\times\times\times$$

  - 最高符号位 代表其 真正的符号
  - 第二个符号位是运算的数值溢出的部分

补码加减法的硬件配置

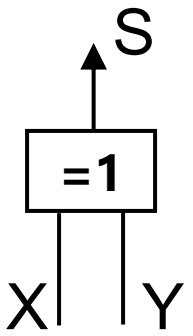
- 二进制加法运算
  - 各位逐位相加，进位从右至左传递
  - 首先要考虑**一位加**法，然后考虑**进位链（传送进位的电路）**

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & X_n & \cdots\cdots & X_2 & X_1 & X_0 \\
+ & Y_n & \cdots\cdots & Y_2 & Y_1 & Y_0 \\
\hline
 & ?_n & \cdots\cdots & ?_2 & ?_1 & ?_0
\end{array}
$$

补码加减法的硬件配置

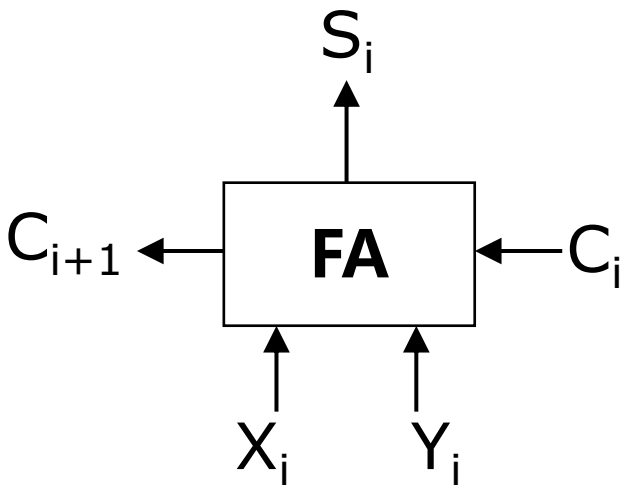
- 一位加法逻辑电路实现
  - 真值表
    - 0 + 1 = 1　1 + 0 = 1
    - 1 + 1 = 0　0 + 0 = 0
  - 一个异或门即可实现一位加法
    - 算术运算变成逻辑电路

$$S = X \oplus Y$$



补码加减法的硬件配置

- 带进位链的一位全加器



一位全加器

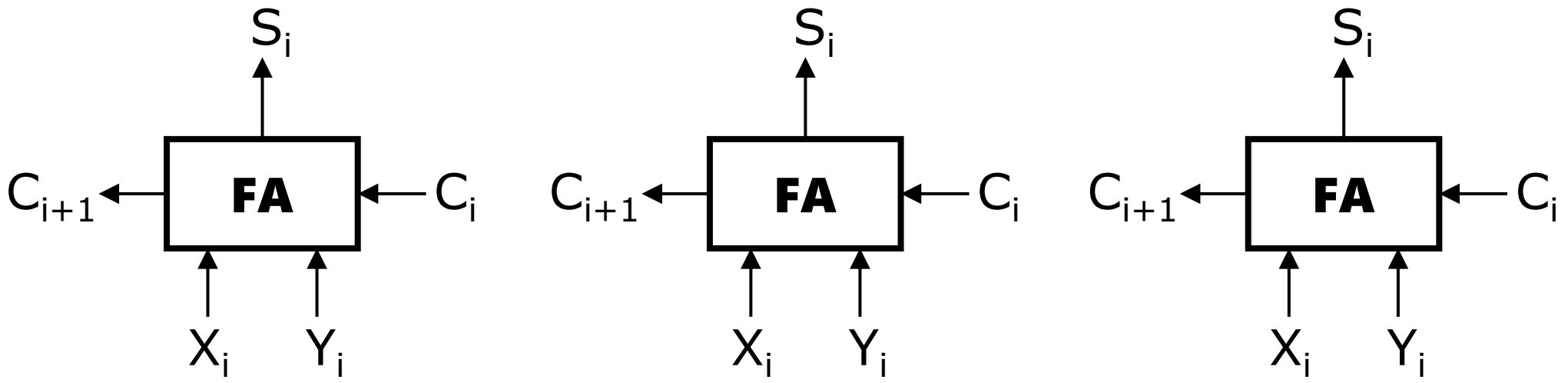
被加数X_i	加数Y_i	低位进位输入C_i	和数S_i	高位进位输出C_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$S_i = X_i \oplus Y_i \oplus C_i$$

$$C_{i+1} = X_i Y_i + (X_i \oplus Y_i) C_i$$

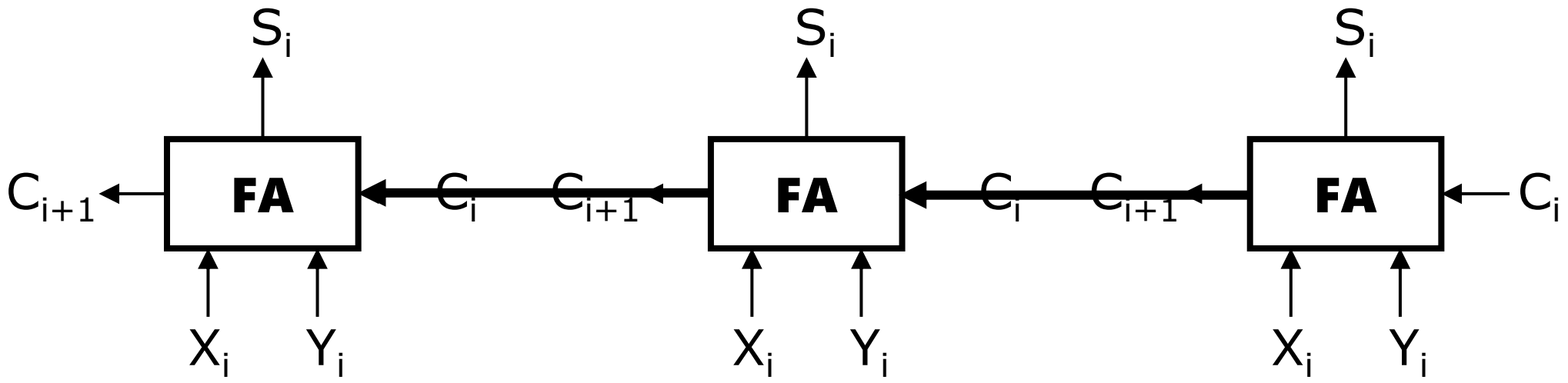
补码加减法的硬件配置

- n+1位加法器
  - 包含n+1个全加器



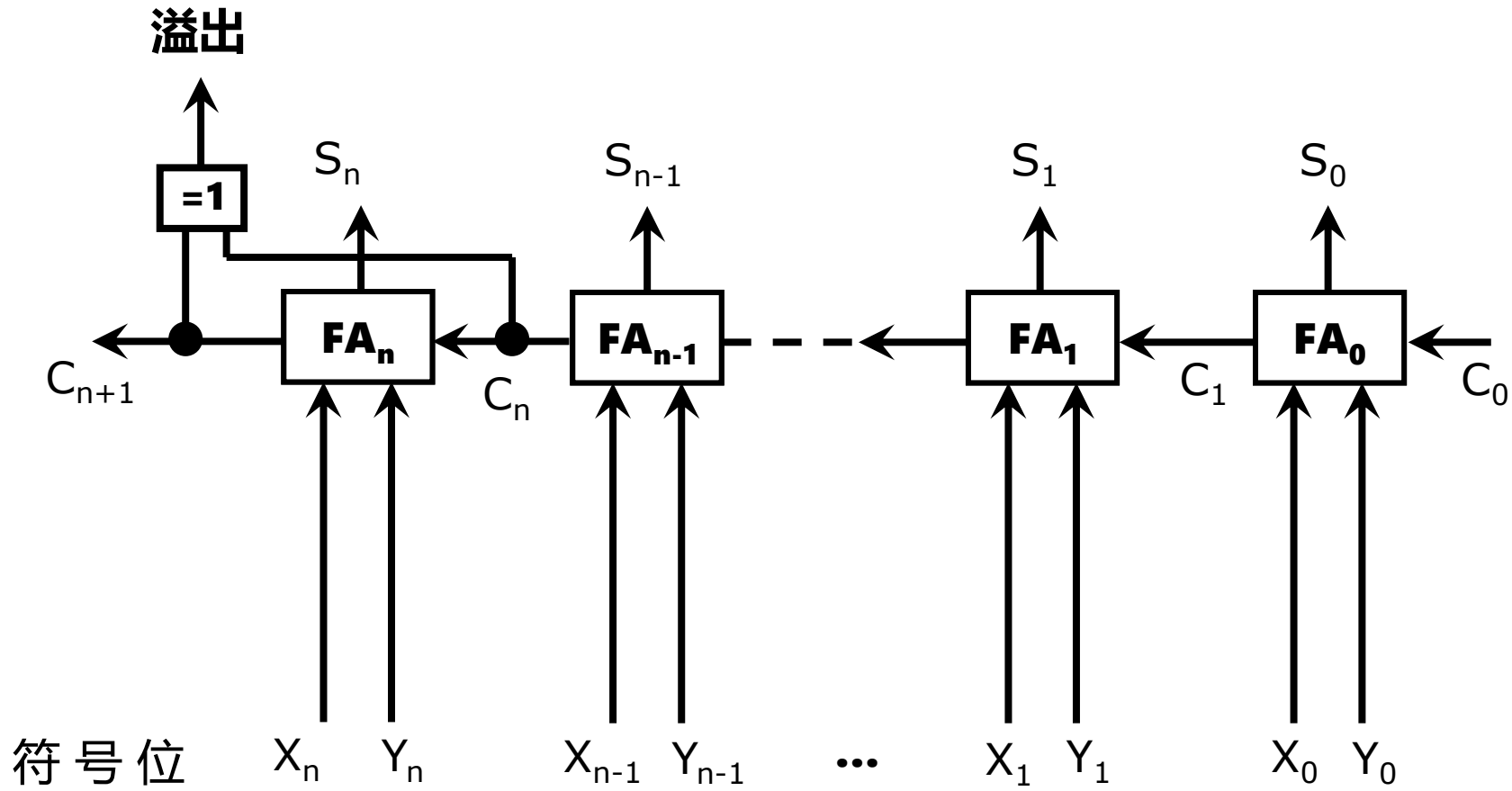
补码加减法的硬件配置

- n+1位加法器
  - 包含n+1个全加器
  - 将n+1个一位全加器串联
  - 低位进位输出连接到高位进位输入



补码加减法的硬件配置

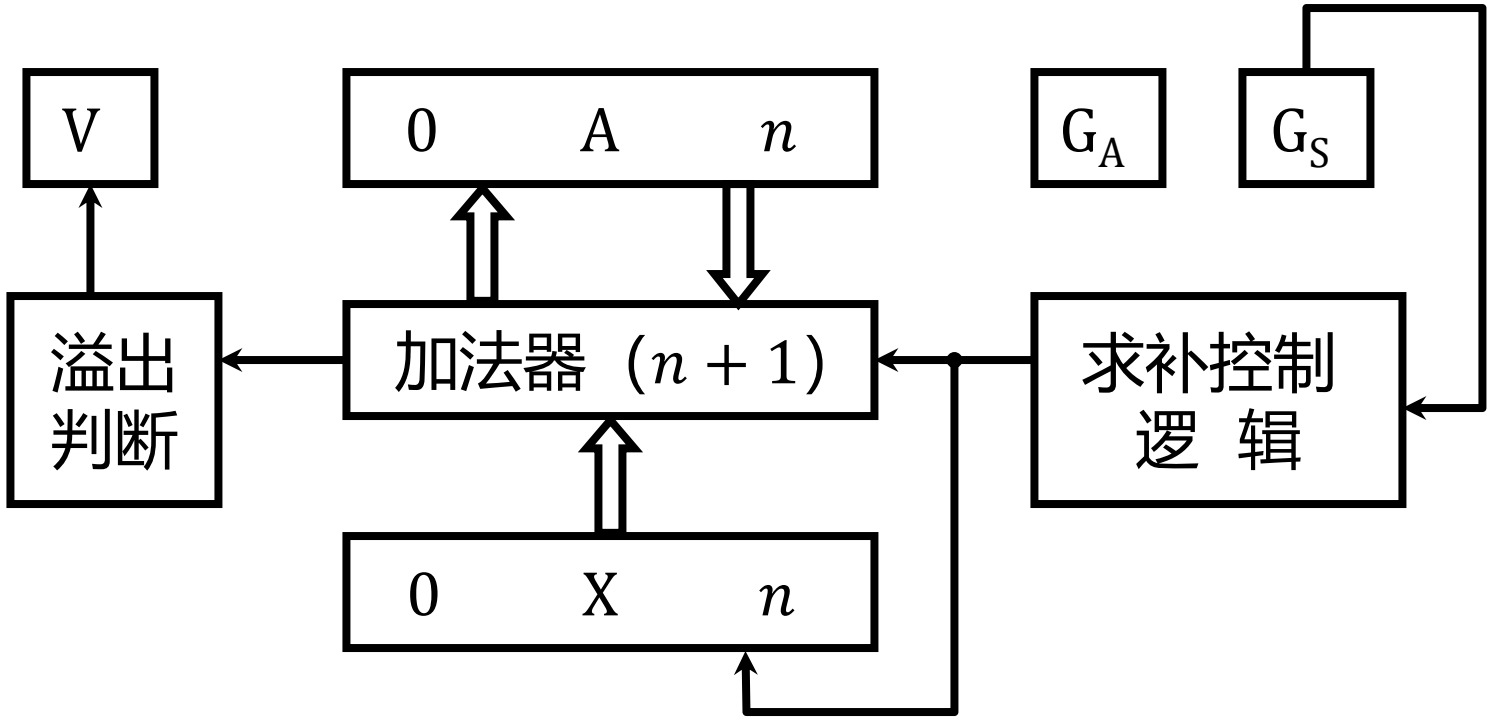
- n+1位加法器
  - 增加溢出判断（单符号位）



补码加减法的硬件配置

补码定点加减法的硬件配置

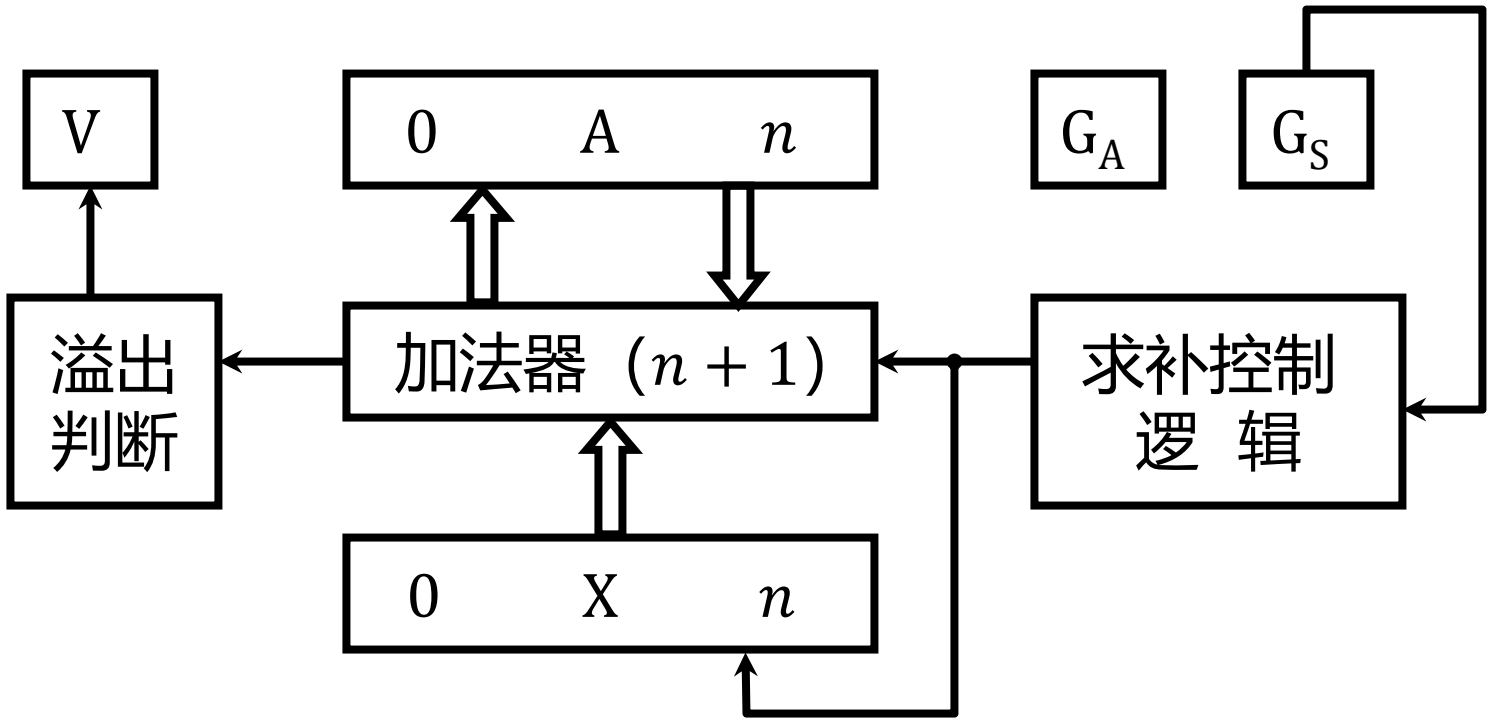
- 寄存器A、X、加法器均 $n+1$ 位（1位符号位，n位数值位）
- A：被加数（或被减数）的补码， X：加数（或减数）的补码
- G_A：加法标记，G_S：减法标记，V：溢出标记



补码加减法的硬件配置

补码定点加减法的硬件配置

- 当作减法时，用减法标记 G_S 控制求补逻辑
  - 将X送至加法器，同时使加法器的最末位外来进位为1，来求减数的补码



谢谢！