

前言

译自“An Introduction to Conditional Random Fields” --Charles Sutton, Andrew McCallum。我也在学习之中，必有错漏之处，希望能依靠大家的力量，共同进步。

目前数学公式显示总出问题，很多更新在gitbook上编译不通过。可以到github上下载pdf和all.md：

https://github.com/cottageLamp/CRFIntroduction_Chinese

总体感觉原文并不是很好理解，翻译之后也不好理解。好比一本介绍“降龙十八掌”的入门书，却时不时要求读者参考一下“九阴白骨爪”、“凌波微步”、“易筋经”……，岂不要命？

争取在翻译完成后，写一篇条理清晰的总结在后面，包括一些原文中没有的内容。

摘要

许多任务要对大量的变量进行预测。这些变量相互关联，且依赖于另外的已被观测量。结构化预测方法实质上是分类器与图模型的结合。图模型能够紧凑地对多变量数据建模，而分类器能够利用大规模的输入特征完成预测。本文描述了条件随机场，一种流行的、用于结构化预测的概率方法。CRFs已在广泛的领域中获得大量应用，包括自然语言处理，机器视觉以及生物信息学。我们将描述CRFs的推断方法和训练方法，包括在实现大规模CRFs时的问题。不要求读者具有图模型的知识，希望能对广大的实践者有用。

1介绍

对很多应用来说，至关重要的是预测互相关多变量的能力。这些应用广泛分布于图片分割及分类、围棋胜负概率的预测、在DNA序列中分离基因组，以及对自然文本进行语法分割。在这些应用中，我们想基于一组观测值 \mathbf{x} ，来预测一个随机输出向量 $\mathbf{y} = y_0, y_1, \dots, y_T$ 。一个相对简单的例子是对自然语言进行词性标注。其中，每个 y_s 对应着s位置的单词的词性，而输入 \mathbf{x} 被分解成多个输入特征向量 $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T\}$ 。每个 \mathbf{x}_s 包含着s位置单词的多种信息，如它自身、它的前后缀、它在词典中的身份，以及来自语义数据库的信息（如WordNet）。（专业词汇有问题）

一种办法是为每个位置s训练位置无关的分类器 $\mathbf{x} \rightarrow y_s$ ，尤其是当我们要最大化 y_s 的正确率时。然而，困难在于输入变量 y_s 之间存在复杂的依赖性。如在英语中，形容词不常接名词。又如在计算机视觉中，临近区域趋向属于相近的类。另一个难点在于，输出变量常常表现出一种复杂的结构，如语法树。那么，在树的顶端附近选择怎样的语法规则会对整个树有极大的影响。

图模型是一种表达互相关变量的自然的方法。图模型包括：贝叶斯网络，神经网络，因子图，马尔科夫随机场，伊辛模型（Ising model）等等。它们把一个复杂的概率分布分解成许多局部因子(factor)相乘，而这些因子各自对应着变量的一部分。我们有可能描述，按照一组条件独立关系对概率密度进行的分解，能在多大程度上满足着该分布。这种对应关系，使得建模更加容易，因为我们的经验知识常常提供了合理的条件独立假设，而这决定了我们如何进行分解。

关于图模型的工作，特别是自然语言处理相关的，大量地关注了生成模型(generative models)。生成模型显式地建立对所有输入和输出的联合分布 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 。尽管这有一些好处，但存在着重要的局限。不仅是因为输入 \mathbf{x} 的维度可能非常大，还因为输入 \mathbf{x} 内在的复杂的相关性。对它们进行建模是困难的。对输入的相关性进行建模，会导致难以驾驭的模型，而忽略它们却会降低系统的性能。

一种解决办法是判别方法，正如在逻辑回归分类器中的做法。这里，我们直接对 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 建模，因为这是完成分类所需的全部。这正是条件随机场（CRFs）所采用的方法。CRFs结合了判别分类器与图模型的优点。一方面能够紧凑地对多变量输出 \mathbf{y} 进行建模，一方面能够应付数量庞大的输入特征 \mathbf{x} ，以用于预测。条件模型的优势在于，它忽略了那些仅仅存在于 \mathbf{x} 内在变量之间的相关性。因此，条件模型要比联合模型具有简单得多的结构。生成模型和CRFs之间的差别，正如朴素贝叶斯分类器与逻辑回归分类器之间的差别。实质上，多元逻辑回归模型可以被看成一种最简单的CRF，因为它只有一个输出。

本文描述了CRFs的建模、推断（前向计算）和参数估计方法。读者不用具有图模型的知识，因而本文希望能对广大的实践者有用。我们从介绍CRFs建模的一些问题开始（第二章），包括线性CRFs通用结构的CRFs，以及包含隐藏变量的隐CRFs（hidden crfs）。我们将说明，为何CRFs既是著名的逻辑回归的扩展，有是判别式的隐马尔科夫模型。

在接下来的两章，我们描述了推断（第4章）和学习（第5章）。推断既指计算 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 的边缘分布，也指计算极大似然 $\mathbf{y}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 。学习是指参数估计过程，就是找到 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 的参数，使其最大限度地符合一组训练样本 $\{\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)}\}_{i=1}^N$ 。推断和学习过程往往密切地组合在一起，因为学习过程需要推断做为子过程。

最后，我们讨论了CRFs与其他类模型的关系，包括结构化预测模型，神经网络和最大熵马尔科夫模型（第6章）。

1.1动手方面的细节

本文努力指出动手实现方面的细节，而这常常被学术文献所忽略。例如，我们讨论了特征工程（feature engineering 输入设计？）（第2.5节），在推断中避免数值溢出（第4.3节），CRF在一些基准问题上训练时的伸缩性。

因为这是我们关于实现细节的第一个章节，应该提一提可供使用的一些CRFs平台。在写作本文时，一些流行的平台包括：

CRF++	http://crfpp.sourceforge.net/
MALLET	http://mallet.cs.umass.edu/
GRMM	http://mallet.cs.umass.edu/grmm/
CRFSuite	http://www.chokkan.org/software/crfs
FACTORIE	http://www.factorie.cc

除此之外，用于马尔科夫逻辑网络的软件（如Alchemy: <http://alchemy.cs.washington.edu/>）也可用于构建CRF模型。据我们所知，Alchemy, GRMM 和 FACTORIE 是仅有的、能够处理任意的图模型的工具。

2 建模

本章，我们从建模的角度来描述CRFs，阐述了CRF是如何把机构化的输出表示成高维输入向量的分布。可以把CRFs理解成，将逻辑回归分类器扩展到任意的图模型，也可以被理解成生成模型（如隐马尔科夫模型）的判别对应物。**译注：判别和生成模型是两种在理论上等价（可互相推导得到对方），但建模思路相反的模型。**

我们从对图模型的简单介绍（第2.1节），以及对NLP中的生成和判别模型的介绍（第2.2节）开始。然后，我们可以给出了CRF的正式定义，包括常用的线性链（linear chains）（第2.3节），以及通用图结构（第2.4节）。因为CRF的准确性严重依赖于所使用的特征，我们也描述了特征工程常用的一些技巧（第2.5节）。最后，我们提供两个CRF应用的例子（第2.6节），以及一个宽泛的、关于CRFs应用领域的报告。

2.1 图模型

图模型是表达和推断多元概率分布的强大框架。它已经在统计模型的许多领域被证明有用，包括编码理论（coding theory），计算机视觉，知识表达（knowledge representation），贝叶斯统计（Bayesian statistics），以及自然语言处理（广告语也太多了吧）。

直接描述包含许多变量的分布，其代价是昂贵的。假如我们用表（table）来描述 n 个二值变量的联合分布，需要 $O(2^n)$ 个浮点数（建议读者理解一下：每个变量有2种可能的取值，而总共有 n 个变量，那么总共有 2^n 种可能的取值。它这里的意思是：给每种取值赋予一个浮点数，表示其概率）。从图模型的角度看，认为一个分布尽管建立在许多变量之上，但常常可以表示成一些局部方程（local functions）的乘积，而这些方程只依赖于少量的变量。这种分解实际上与变量间的某些条件独立性密切相关——两种信息被轻易地用途来概括。实质上，分解、条件独立与图的结构，这三者构成了图模型框架力量的来源：条件独立性视角主要用于设计模型，而分解视角主要用于设计推断算法。

在本节的余下部分，我们从以上两个视角来介绍图模型，关注那些建立在无向图（undirected graphs）之上的模型。关于更详细、更现代的图模型及其推断算法，可参考Koller和Friedman【57】的教材。

2.1.1 无向图

我们考虑随机变量集合 \mathbf{Y} 上的概率分布。我们通过整数 $s \in 1, 2, \dots, |\mathbf{Y}|$ 来对变量进行索引。每个变量 $Y_s \in \mathbf{Y}$ 的取值范围都是集合 \mathcal{Y} 。本文我们只考虑离散的 \mathcal{Y} ，尽管它也可以是连续的。 \mathbf{Y} 的一次特定的取值记做 \mathbf{y}_s 。对于 \mathbf{Y} 中的特定变量 Y_s ， \mathbf{y}_s 包含了对它的赋值，记做 y_s 。记号 $\mathbf{1}_{\{\mathbf{y}=\mathbf{y}'\}}$ 表示一个函数，在 $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ 时取1，而在其他时候取0。我们还需要边缘分布的记号。对于某个固定的取值 \mathbf{y}_s ，我们用求和符号 $\sum_{\mathbf{y} \setminus \mathbf{y}_s}$ 来表示：在 \mathbf{y} 的全部取值中，那些 $Y_s = \mathbf{y}_s$ 的取值的概率的和。

假定，我们相信一个概率分布 p 可以表示成一组因子，记做 $\Psi(\mathbf{y}_a)$ 的连乘。其中， a 是一个整数索引（下标），从1变化到 A ，而 A 就是因子的个数。每个因子 $\Psi(\mathbf{y}_a)$ 只依赖于部分变量 $\mathbf{Y}_a \in \mathbf{Y}$ 。 $\Psi(\mathbf{y}_a)$ 是一个非负数，可以被看成 \mathbf{y}_a 的自洽性的度量。自洽性高的取值，其发生的概率就高。这种分解让我们更高效地表示分布 p ，因为集合 \mathbf{Y}_a 要比完整的集合 \mathbf{Y} 小得多。

一个无向图模型是这样一种概率分布，它根据一组给定的因子来分解模型。正式地，给定 \mathbf{Y} 的子集 $\{\mathbf{Y}_a\}_{a=1}^A$ 的集合，一个无向图模型是所有可以写成下式的分布：

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{Z} \prod_{a=1}^A \Psi(\mathbf{y}_a) \quad (2.1)$$

其中，对于任意的因子 $\mathcal{F} = \{\Psi(\mathbf{y}_a)\}$ ，及其对应的所有可能的 \mathbf{y}_a ，都有 $\Psi(\mathbf{y}_a) \geq 0$ 。（这些因子又被称作局部函数或自洽性函数。）我们将用随机场来表示由某个无向图定义的特定分布。常数 Z 是一个归一化因子，保证分布 p 的和为1。它定义如下：

$$Z = \sum_{\mathbf{y}} \prod_{a=1}^A \Psi(\mathbf{y}_a). \quad (2.2)$$

Z 的值，考虑成因子集合 \mathcal{F} 的函数的话，也被称作配分函数（partition function）。注意，式(2.2)中的求和，需要在爆炸式的 \mathbf{y} 的所有可能取值上进行。因此，计算 Z 通常是不可行的，但是有很多关于估计它的研究（见第4章）。

术语“图模型”的由来，在于式（2.1）所表示的因子分解，可以建紧凑地表示成一张图。因子图【58】提供了一个特别自然的构图方法。一个因子图是一个两两连接图 $G = (\mathbf{V}, \mathbf{F}, \mathbf{E})$ 。其中，节点的集合 $\mathbf{V} = \{1, 2, \dots, |\mathbf{Y}|\}$ 索引了模型中的全部随机变量，另一组节点的集合 $\mathbf{F} = \{1, 2, \dots, A\}$ 索引了所有的因子。对图的理解是：如果一个变量节点 s 连接到一个因子节点 a ，那么在模型中，变量 Y_s 就是因子 Ψ_a 的一个参数。所以，因子图直接描述了，一个分布是如何被分解成多个局部函数的乘积的。

我们正式地定义——一个因子图是否“描述”了一个分布？记 $N(a)$ 包含了所有连接到因子节点 a 上的变量节点，那么：

定义2.1 仅当存在一组局部方程 $\Psi(y_a)$ ，使得 p 可以写成：

$$p(y) = Z^{-1} \prod_{a \in F} \Psi(y_{N(a)}) \quad (2.3)$$

时，一个分布 $p(y)$ 根据因子图 G 分解了。

一组子集描述了无向模型，而一个因子图同样如此。在式（2.1）中，取子集为节点的邻居 $\{Y_N(a) | \forall a \in F\}$ 。根据式（2.1）定义无向图模型，对应着所有根据 G 进行分解所得的分布。

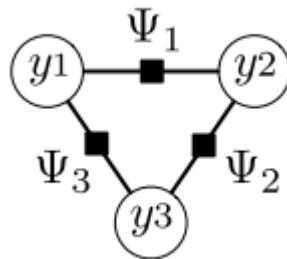


图2.1 带3个变量的因子图

图2.1展示了一个带有3个随机变量的因子图，图中，圆圈是变量节点，而灰色方块是因子节点。我们根据节点的索引进行了标注。这个因子图能够描述所有的带3个变量的分布，前提是对于任意的 $y = (y_1, y_2, y_3)$ ，该分布能够写成 $p(y_1, y_2, y_3) = \Psi_1(y_1, y_2)\Psi_2(y_2, y_3)\Psi_3(y_1, y_3)$ 的形式。

图模型的因子分解与变量间（在其取值范围里）的条件独立性密切相关。这种联系可通过另一种无向图来理解——马尔科夫网。它直接描述了多元分布的条件独立关系。马尔科夫网只是随机变量的图，不包括因子。现记 G 为整数序列 $V = \{1, 2, \dots, |Y|\}$ 上的无向图，而 V 仍是随机变量的索引。对于某一个索引 s ，记 $N(s)$ 为它的邻居。那么我们称 p 是关于 G 的马尔科夫网，仅当它满足局部的马尔科夫特性：对于任意的两个变量 $Y_s, Y_t \in Y$ ， Y_s 关于它的邻居独立于 Y_t 。

把所有连接到同一个因子的变量都两两连接起来，可将如式(2.1)的分布，变成其对应的马尔科夫网。这很显然，因为由式（2.1）而来的条件分布 $p(y_s | y_{N(s)})$ 仅仅是那些马尔科夫毯中的变量的函数。

从因子分解的角度看，马尔科夫网存在着不好的歧义性。考虑图2.2（左）的3变量马尔科夫网。任何按照

$p(y_1, y_2, y_3) \propto f(y_1, y_2, y_3)$ 分解的分布，都可能与它对应。然而，我们希望使用更严格的参数化——

$p(y_1, y_2, y_3) = f(y_1, y_2)g(y_2, y_3)h(y_1, y_3)$ 。后面这组模型簇是前面的严格子集，且需要更少的数据来获得准确的分布估计译注：参数估计？。然而，马尔科夫网不能区分这两种参数化。相反，因子图无歧义地描述了模型的因子分解。

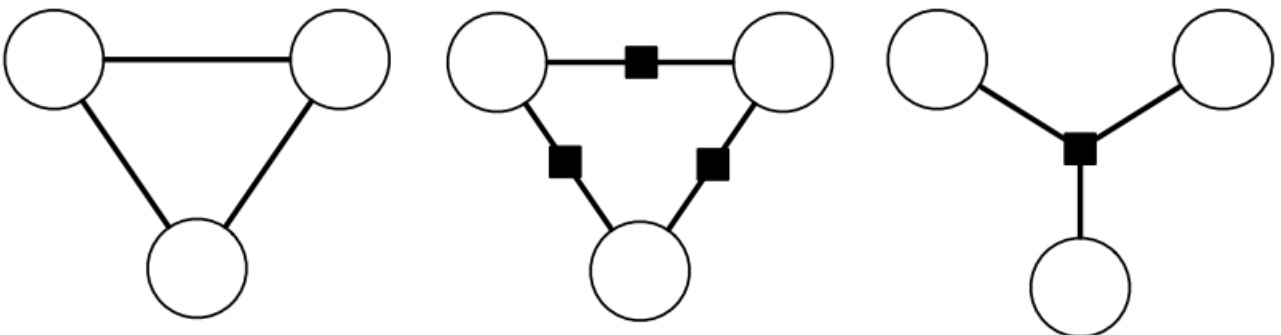


图2.2带有歧义的马尔科夫网（左）。右边的两种分解都有可能与左图对应。

2.1.2有向图

无向模型中的局部函数无需带有方向性的概率表达，有向图模型却把分布分解成局部的条件概率分布。记 G 为有向无环图， $\pi(s)$ 为 Y_s 的所有父节点的序号集合。一个有向图模型是一簇按照如下分解的分布：

$$p(y) = \prod_{s=1}^S p(y_s | y_{\pi(s)}). \quad (2.4)$$

我们称 $p(y_s | y_{\pi(s)})$ 为局部条件分布（local conditional distributions）。注意，对于没有父节点的变量， $\pi(s)$ 可以是空的。这时， $p(y_s | y_{\pi(s)})$ 可被理解为 $p(y_s)$ 。可以推断 p 是合理归一化的。可以这样来理解有向模型——其每个因子都在局部完成了特殊的归一化，使得（1）因子相当于局部变量上的条件分布，且（2）归一化常数 $Z = 1$ 。有向模型常用于生成模型，我们将在第2.2.3节讲述这一点。有向模型的一个例子是贝叶斯模型（2.7），被描述在图2.3（左）了。在这些图中，灰节点表示了某些数据集上观测的变量。贯穿本文，我们都将采用这一习惯。

2.2生成与判别模型

本节我们探讨几个已被用于自然语言处理的简单图模型。虽然它们已被熟知，但它们一方面可以澄清前文提到的诸多概念，另一方面也可以说明某些今后讨论CRFs时会遇到的议题。我们尤其关注隐马尔科夫模型（HMM），因为它与线性链条件随机场密切相关。

本节的主要目的是对比生成与判别模型。将会提到的模型，包括两个生成模型（朴素贝叶斯和HMM），一个判别模型（逻辑回归模型）。生成模型描述了，一个输出向量 y 以怎样的概率“生成”输入特征 x 。判别模型从相反的方向工作，直接描述了如何利用输入特征 x 来给输出 y 赋值。一般来说，这两者可根根据贝叶斯法则互相转化。但在实践中却相去甚远，各自隐藏着一些优点（将在2.2.3节讲述）。

2.2.1 分类

我们首先讨论分类问题——根据给定的一个向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_K)$ ，来预测单一的 y 变量的离散值（类别标签）。一个简单的方法是，假定当类别标签已知时，所有的特征是独立的。结果是所谓的朴素贝叶斯分类器。它基于如下的联合概率模型：

$$p(y, x) = p(y) \prod_{k=1}^K p(x_k | y). \quad (2.7)$$

这个模型可以描述为图2.3（左）的有向模型。为每个特征 x_k 定义因子 $\Psi(y) = p(y)$ ，以及因子 $\Psi_k(y, x_k) = p(x_k | y)$ ，我们也可以写成因子图。这样的因子图如图2.3（右）所示。

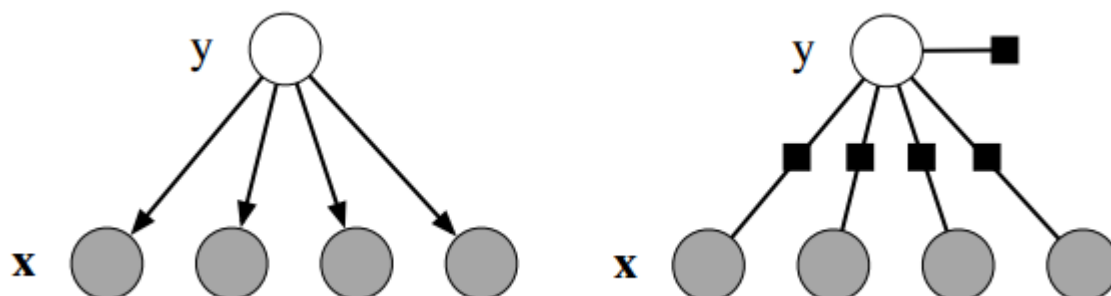


图2.3 朴素贝叶斯分类器，被当成有向模型（左），或因子图（右）

逻辑回归（有时在NLP圈子里叫做最大熵分类器）是另一个知名的，且很自然地表达为图模型的分器。该分类器源于将每个类的逻辑概率， $\log p(y|\mathbf{x})$ ，假设为 \mathbf{x} 的线性函数，以及一个归一化常数。这导致了如下的条件概率：

$$p(y|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp\{\theta_y + \sum_{j=1}^K \theta_{y,j} x_j\}, \quad (2.8)$$

其中 $Z(\mathbf{x}) = \sum_y \exp\{\theta_y + \sum_{j=1}^K \theta_{y,j} x_j\}$ ，是归一化常数。而 θ_y 是偏置量，相当于朴素贝叶斯里面的 $\log p(y)$ 。与其像式（2.8）那样为每一个类制定一个权重向量，我们不如采用被所有类共享的一组权重的记号。这一技巧通过定义一组特征函数(feature functions)来实现，而这些特征只对某一类时非零。为了达到这个目的，特征权重的特征函数被定义为 $f_{y',j}(y, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\{y'=y\}} x_j$ ，而把偏置权重的特征函数定义为 $f_{y'}(y, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\{y'=y\}}$ 。现在我们可以用 f_k 来遍历每个特征函数 $f_{y',j}$ ，用 θ_k 来索引对应的权重 $\theta_{y',j}$ 。利用这一符号技巧，逻辑回归模型变成了：

$$p(y|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp\{\sum_{k=1}^K \theta_k f_k(y, \mathbf{x})\}. \quad (2.9)$$

我们之所以引入这样的记号，是因为它简化了下文介绍CRFs时的记号。译注：（2.8）中的 θ_y 好像丢失了？

2.2.2 序列模型

分类器只对单一变量做预测，但图模型的真正用处在于对大量互相关变量的建模能力。本节，我们讨论了可能是最简单的相关性——图模型中的输出变量被排列成一个序列。为了展示该模型的好处，我们讨论一个自然语言处理中的应用——命名实体识别（named-entity recognition, NER）。NER是在文本中识别并分类命名实体，包括地点（如China），人（如George Bush）和组织（如United Nations）。给定一个句子，命名实体识别任务是将其中的单词切分成几段，每一段对应一个实体，然后对该实体进行分类（类别包括人，组织，地点等等）。该问题的挑战性在于，很多实体的字符串很少见，哪怕在一个很大的训练集上。于是，我们只能根据上下文来识别它们。

一种办法是独立地对每个单词进行分类，看它是一个人、地点、组织或者其他（既不是一个实体）。这种办法的缺点在于：给定输入之后，它假定所有的命名实体标签是独立的。实际上，临近单词的标签是相关的。例如，New York是一个地点，Now York Times却是一个组织。一种缓解这种无关性假设的方法，是把输出变量安排到一个线性链中。这是隐马尔科夫模型（HMM）【111】的方法。一个HMM通过假定一个潜在的状态序列 $\mathbf{Y} = \{y_t\}_{t=1}^T$ ，来对一序列的观测 $\mathbf{X} = \{x_t\}_{t=1}^T$ 建模。记 \mathcal{S} 为可能状态的有限集， \mathcal{O} 为可能观测的有限集，即是说，对于任何的 t ， $x_t \in \mathcal{O}, y_t \in \mathcal{S}$ 。译注： \mathcal{S} 包含了所有可能的输出值， \mathcal{O} 包含了所有可能的输入值。在命名实体例子中， t 位置的单词就是观测 x_t ，而 y_t 是该位置的标签。

为了可行地对联合分布 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 建模，一个HMM做了两个无关性假设。第一，它假设每个状态只依赖于它的前一个状态，即给定 y_{t-1} 之后， y_t 于 y_1, y_2, \dots, y_{t-1} 都无关了。第二，它假定每个观测变量 x_t 只与对应的状态 y_t 有关。基于这些假设，我们可用三个概率分布来指明一个HMM。第一个，初始状态的概率布 $p(y_1)$ ；第二个，转移概率 $p(y_t|y_{t-1})$ ；最后，观测概率 $p(x_t|y_t)$ 。总之，状态序列 \mathbf{y} 于观测序列 \mathbf{x} 的联合分布被分解为：

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \prod_{t=1}^T p(y_t|y_{t-1}) p(x_t|y_t). \quad (2.10)$$

为了简化上式的符号，我们创造了“虚拟”初始状态 y_0 ，它总是0，并是所有状态序列的起点。这让我们把初始状态概率 $p(y_1)$ 写成 $p(y_1|y_0)$ 。

HMMs已在自然语言处理中用于很多序列标注任务，如part-of-speech tagging, 命名实体识别和信息提取。

2.2.3 比较

生成模型和判别模型都描述了 (\mathbf{y}, \mathbf{x}) 的分布，却是从不同的方向。生成模型，如朴素贝叶斯分类器和HMM，是一簇按照 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{y})p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 进行分解的联合分布。也就是说，它描述了如何根据标签采样或“生成”特征。判别模型，如逻辑回归模型，是一簇条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 。也就是说，直接对分类规则建模。原理上，利用输入的边缘分布 $p(\mathbf{x})$ ，一个判别模型可以被转化成联合分布 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ，然而很少需要这么做。

判别和生成模型在概念上的主要区别，就是条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 没有包含 $p(\mathbf{x})$ 的模型，而它对分类并没有用。对 $p(\mathbf{x})$ 建模的困难性在于，它包含了很多高度相关的特征，而这是很难建模的。如在命名实体识别中，朴素的HMM只依赖于单一的特征——单词本身。然而许多单词，特别是专有名词，却从未在训练集中出现过，因而以单词本身作为特征是缺乏足够的信息的。为了对全新单词进行标注，我们想要利用其它的特征，如它的大小写、它的临近单词、它的前后缀、它在预先确定的一组人或地方中的身份（its membership in predetermined lists of people and locations??），等等。

判别模型的主要优势在于它适合包含丰富的、重叠的特征。为了理解这一点，考虑一簇朴素贝叶斯分布(2.7)。这簇联合分布的条件部分均采用了“逻辑回归的形式”（2.9）。然而还有很多其他的联合模型，有些带有 \mathbf{x} 之间的复杂的依赖，而条件分布也采用了（2.9）的形式。为了直接对条件分布建模，我们仍然可以认为 $p(\mathbf{x})$ 是不可知的。判别模型，如CRF，仅对 \mathbf{y} 的条件独立性做假设，以及 \mathbf{y} 如何依赖于 \mathbf{x} ，但是不对 \mathbf{x} 之间的条件独立性做假设。这一点也可以通过图形的方式来理解。假定我们有关于联合分布 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 的因子图，现在要构建条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 的因子图，那么，所有只与 \mathbf{x} 有关的因子都可以消失了。它们与条件部分无关，因为它们关于 \mathbf{y} 是常数。

为了在生成模型中包含互相关的特征，我们有两个选择。一是增强模型以表达输入间的相关性，如在每个 \mathbf{x}_t 之间增加连接。然而很难可操作地这样做。例如，很难想象如何对单词的大小写以及前后缀之间的相关性建模。亦或者，我们也不想去做这个件事，因为我们总是看得到输入的句子。

第二个办法是只做一些简单的相关性假设，如朴素贝叶斯假设。例如，带有朴素贝叶斯假设的HMM采用了 $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{t=1}^T p(y_t|y_{t-1}) \prod_{k=1}^K p(x_{tk}|y_t)$ 的形式。这一思路有时很凑效，但也可能很有问题，因为这一独立性假设会影响性能。例如，虽然朴素贝叶斯分类器在文档分类方面表现优秀，它在许多应用中的平均表现要比逻辑回归差【19】。

而且，朴素贝叶斯可以产生差的概率估计。作为说明的例子，想象朴素贝叶斯在一个二分类问题上训练。现在，我们把输入特征向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_K)$ 重复一下，变换成 $\mathbf{x}' = (x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_K, x_K)$ ，然后运行朴素贝叶斯分类器。虽然没有任何新的信息被加入到数据中，这一变换却增加了概率估计的信心。就是说，朴素贝叶斯对 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}')$ 的估计，相比于 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ ，更倾向远离0.5。

当我们扩展到序列模型的时候，想朴素贝叶斯那样的假设尤其有问题，因为推断过程需要综合模型不同部分的证据。如果序列的每个位置的标签，其概率估计都偏大，那么很难合理地把它们综合起来。

朴素贝叶斯和逻辑回归之间的差别，正是前者是生成的，而后者是判别的。在输入为离散时，这两个分类器在其他方面完全一致。朴素贝叶斯和逻辑回归考虑了相同的假设空间，因为在相同的决策范围里，任何逻辑回归分类器都可以转变成朴素贝叶斯分类器，反之亦然。再者，朴素贝叶斯模型(2.7)与逻辑回归模型（2.9）定义了相同的分布簇。我们可以生成式地表示（2.7）如下：

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\exp\{\sum_k \theta_k f_k(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}}{\sum_{\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}}} \theta_k f_k(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})}. \quad (2.11)$$

这意味着，如果朴素贝叶斯(2.7)按照极大条件似然来训练，我们会获得与逻辑回归一样的分类器。相反，如果按照生成方法来表示逻辑回归，如（2.11），并按照最大化联合似然 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 来训练，我们会得到与朴素贝叶斯同样的分类器。按照Ng和Jordan【98】的说法，朴素贝叶斯和逻辑回归构成了生成-判别对（generative-discriminative pair）。关于最新的生成与判别模型的理论视角，请参考Liang和Jordan【72】。

原理上，我们可能不清楚这两种方案如此不同的原因，毕竟它们之间可通过贝叶斯法则互相转化。如在朴素贝叶斯模型中，是很容易把联合分布 $p(\mathbf{y})p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 转化成条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 的。实际上，该条件分布与逻辑回归模型（2.9）的形式是一样的。另外如果我们想获得关于数据的“真实”生成模型，即真正把数据产生出来的分布

$p^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = p^*(\mathbf{y})p^*(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ ，那么我们只需简单地计算真实的 $p^*(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ ，而这正是判别方法的目标。然而正是因为我们无

法准确地获得真实的分布，造成这两种方案在实践中是不同的。先估计 $p(\mathbf{y})p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ ，然后计算 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ （生成方案），会产生与直接估计 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 不同的结果。也就是说，生成与判别模型的目标都是估计 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ ，却是通过不同的路径达到。

我们关于生成与判别之间差异的深入观点，来自Minka【93】。假如我们拥有一个生成模型 p_g ，其参数为 θ 。根据定义，其形式为：

$$p_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta) = p_g(\mathbf{y}; \theta)p_g(\mathbf{x}|\mathbf{y}; \theta). \quad (2.12)$$

但是我们也可以按照概率的链式法则重写 p_g 如下：

$$p_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta) = p_g(\mathbf{x}; \theta)p_g(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta), \quad (2.13)$$

其中， $p_g(\mathbf{x}; \theta)$ 和 $p_g(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta)$ 是通过推断来计算的，即 $p_g(\mathbf{x}; \theta) = \sum_{\mathbf{y}} p_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta)$ 以及 $p_g(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta) = p_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta)/p_g(\mathbf{x}; \theta)$ 。

现在要在同样的联合分布簇上，把这个生成模型与判别模型做比较。为了这么做，我们定义一个关于输入的先验概率 $p(\mathbf{x})$ ，使得 $p(\mathbf{x})$ 可以从 p_g 的某个参数配置中产生。就是说， $p(\mathbf{x}) = p_c(\mathbf{x}; \theta') = \sum_{\mathbf{y}} p_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta')$ 译注：原文是 $p(\mathbf{x}) = p_c(\mathbf{x}; \theta') = \sum_{\mathbf{y}} p_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta')$ ，其中 θ' 往往与（2.13）中的 θ 不同。把这与同样从 p_g 中产生的条件分布 $p_c(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta)$ 组合，即 $p_c(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta) = p_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta)/p_g(\mathbf{x}; \theta)$ 。那么结果分布是：

$$p_c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = p_c(\mathbf{x}; \theta')p_c(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta). \quad (2.14)$$

通过比较(2.13)和（2.14），可以看到条件方案具有更大的灵活性来拟合数据，因为它不要求 $\theta' = \theta$ 。直观地，因为（2.13）中的参数 θ 被同时用于输入的和条件部分。那么一组参数需要在两方面都表现良好。潜在地，需要损失我们所关心的 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 的准确性，来弥补我们不怎么关心的 $p(\mathbf{x})$ 的准确性。另一方面，引入了更多的自由度，增加了过拟合的风险，降低了泛化到新数据的能力。

尽管到目前为止我们一直在批判生成模型，它们也有自己的优势。第一，生成模型可以更自然地处理隐藏变量，半标注数据以及未标注数据。在更极端的例子中，当整个数据都未被标注时，生成模型可以按照非监督模式使用。相反，非监督学习在判别模型中不够自然，且仍是一个活跃的研究领域。

第二，在某些例子中生成模型表现得比判别模型好，直观上是因为输入模型 $p(\mathbf{x})$ 对条件分布的影响是光滑的（smoothing）。Ng和Jordan【98】争辩道，这一作用在小数据机上尤其显著。对于任何特定的数据集，我们不可能知道谁更有优势。总之，要么问题本身需要一个自然的生成模型，要么需要同时预测输入与输出译注：一般应用假定输入为已知，而只需预测输出，都会使生成模型更被青睐。

因为生成模型的形式为 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{y})p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ ，使得通过有向图来表示它更自然。其中在拓扑意义上，输出 \mathbf{y} 要在输入之前。相似地，我们将会看到，用无向图来表示判别模型更自然。然而，并非总是如此。无向的生成模型，如马尔科夫随机场（2.32），以及有向的判别模型，如MEMM（6.2），有时也会被采用。有时用有向图来表示判别模型也会有用，其中 \mathbf{x} 在 \mathbf{y} 之前。

朴素贝叶斯与逻辑回归之间的关系，正如HMMs和线性链CRFs。正如朴素贝叶斯与逻辑回归是生成-判别对，也存在着HMMs的判别对应物。这一对应物是一种特殊的CRF。我们将在下一章中介绍。朴素贝叶斯、逻辑回归、生成模型和CRFs之间的类比，如图2.4所示。

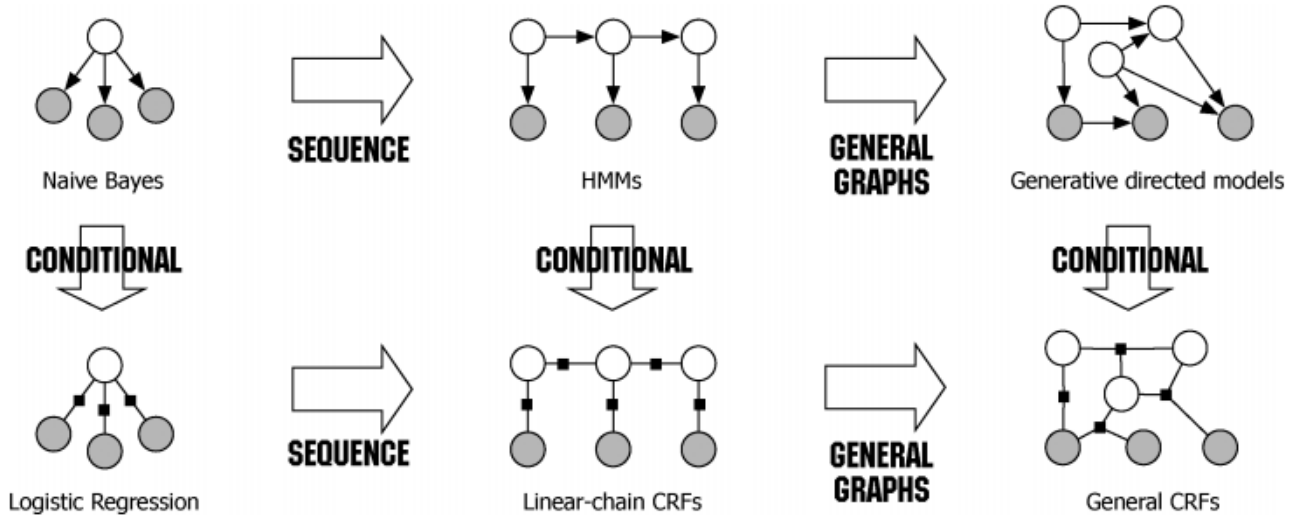


图2.4 朴素贝叶斯、逻辑回归、HMMs、线性链CRFs、生成模型和广义CRFs之间的关系图

2.3 线性链CRFs

为了引出线性链CRFs，我们考虑从HMM的联合分布 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 引出的条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 。关键点在于，这一条件分布是一种具有特殊的特征方程的CRF。

首先，我们来重写HMM的联合分布(2.10)，使其更利于扩展，即：

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_{t=1}^T \exp \left\{ \sum_{i,j \in S} \theta_{ij} \mathbf{1}_{\{y_t=i\}} \mathbf{1}_{\{y_{t-1}=j\}} + \sum_{i \in S} \sum_{o \in O} \mu_{oi} \mathbf{1}_{\{y_t=i\}} \mathbf{1}_{\{x_t=o\}} \right\}, \quad (2.15)$$

其中， $\theta = \{\theta_{ij}, \mu_{oi}\}$ 是分布的实值参数， Z 是归一化常数，能使分布的和为1。如果我们不在（2.15）中添加 Z ，那么参数 θ 有可能带来不合理的关于 (\mathbf{y}, \mathbf{x}) 的分布，如当所有参数都是1时。

现在有意思的是，（2.15）（几乎）确切地描述了（2.10）一类的HMMs。每个同类的HMM都可通过如下设置，写成（2.15）的形式：

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \log p(y' = i | y = j) \\ \mu_{oi} &= \log p(x = o | y = i) \\ Z &= 1 \end{aligned}$$

反过来也是正确的，即是说，每个按照（2.15）分解的分布都是HMM。（利用4.1节介绍的前向-反向算法，可构造对应的HMM，从而证明这一点）。因而尽管在参数中增加了灵活性，我们却没有扩大分布簇。

通过使用特征函数**feature functions**，我们可以把（2.15）弄得更紧凑，正如我们在（2.9）的逻辑回归那里一样。每个特征函数都具有形式 $f_k(y_t, y_{t-1}, x_t)$ 。对于（2.15），我们需要给每个转移 (i, j) 一个特征 $f_{ij}(y, y', x) = \mathbf{1}_{\{y=i\}} \mathbf{1}_{\{y'=j\}}$ ，以及给每个“状态-特征对” (i, o) 一个特征 $f_{io}(y, y', x) = \mathbf{1}_{\{y=i\}} \mathbf{1}_{\{x=o\}}$ 。我们泛泛地用 f_k 来引用一个特征，其中 f_k 涵盖了全部的 f_{ij} 和全部的 f_{io} 。于是，我们可以重写HMM如下：

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_{t=1}^T \exp \left\{ \sum_{k=1}^K \theta_k f_k(y_t, y_{t-1}, x_t) \right\}. \quad (2.16)$$

再一次，方程（2.16）定义了与（2.15）完全一样的分布簇，从而也与最初的HMM方程（2.10）一样。

最后一步，是把来自HMM（2.16）的条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 写出来，即：

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{y}'} p(\mathbf{y}', \mathbf{x})} = \frac{\prod_{t=1}^T \exp\left\{\sum_{k=1}^K \theta_k f_k(y_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_t)\right\}}{\sum_{\mathbf{y}'} \prod_{t=1}^T \exp\left\{\sum_{k=1}^K \theta_k f_k(y'_t, y'_{t-1}, \mathbf{x}_t)\right\}}. \quad (2.17)$$

(2.17) 所描述的条件分布，是线性链CRF的一种特例，即那种只包含当前单词作为特征的。然而，很多线性链CRF使用更为丰富的特征，如前后缀等等。幸运的是，将我们现有的记号扩展并非难事。我们只需简单地允许特征函数包含更多的输入。这导致了我们的关于线性链CRFs的一般定义

定义2.2 记 \mathbf{Y}, \mathbf{X} 是随机向量， $\theta = \{\theta_k\} \in \mathcal{R}^K$ 是一个参数向量， $\mathcal{F} = \{f_k(y, y', \mathbf{x}_t)\}_{k=1}^K$ 为一组实值特征函数。那么线性链条件随机场是如下形式的分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_{t=1}^T \exp\left\{\sum_{k=1}^K \theta_k f_k(y_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_t)\right\}, \quad (2.18)$$

其中， $Z(\mathbf{x})$ 是依赖于输入的归一化函数：

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} \prod_{t=1}^T \exp\left\{\sum_{k=1}^K \theta_k f_k(y_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_t)\right\}. \quad (2.19)$$

译注：线性链条件随机场，好像是一类随机场，实际是一个随机场——结构是定死的。我觉得这是条件随机场最非常核心的问题，本文却并没有阐明。当然，它对输入的引用还是很灵活的。

注意，线性链CRF可以用 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 上的因子图来描述，即

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \prod_{t=1}^T \Psi_t(y_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_t) \quad (2.20)$$

其中，局部函数 Ψ_t 具有一种特殊的 log-linear形式：

$$\Psi_t(y_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_t) = \exp\left\{\sum_{k=1}^K \theta_k f_k(y_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_t)\right\}. \quad (2.21)$$

当我们在下一节进入一般意义CRF的时候，这会很有用。

一般来说，我们将从数据中学得参数 θ 。这将在第5节讲述。

之前我们已看到，如果一个联合分布 $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ 像HMM一样分解了，那么对应的条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 是一个线性链CRF。这一很像HMM的CRF如图2.5所示。然而，其他类型的线性链CRFs也是有用的。例如，在一个HMM中，状态 i 到 j 的转移概率与输入无关，都是 $\log p(y_t = j | y_{t-1} = i)$ 。在CRF中，我们可以让转移概率 (i, j) 依赖于当前的观测向量，这只需添加特征 $\mathbf{1}_{\{y_t=j\}} \mathbf{1}_{\{y_{t-1}=i\}} \mathbf{1}_{\{\mathbf{x}_t=o\}}$ 。具有这一转移特征的CRF常常被用于文本处理，如图2.6所示。

实际上，因为CRFs不在乎输入变量 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T$ 之间的关系，我们可以让因子 Ψ_t 依赖于所有的输入 \mathbf{x} 。这不会大破线性图的结构——允许我们把 \mathbf{x} 当成单一的整体变量。结果，特征函数可以写成 $f_k(y_t, y_{t-1}, \mathbf{x})$ ，从而可以把全部的输入变量 \mathbf{x} 一块考虑。这一事实对CRFs都适用，而不只是对线性链。具有这一结构的线性链如图2.7所示。途中，我们把 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$ 画成一个巨大的观测节点，冰杯所有的因子依赖，而不是把 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T$ 画成独立的节点。

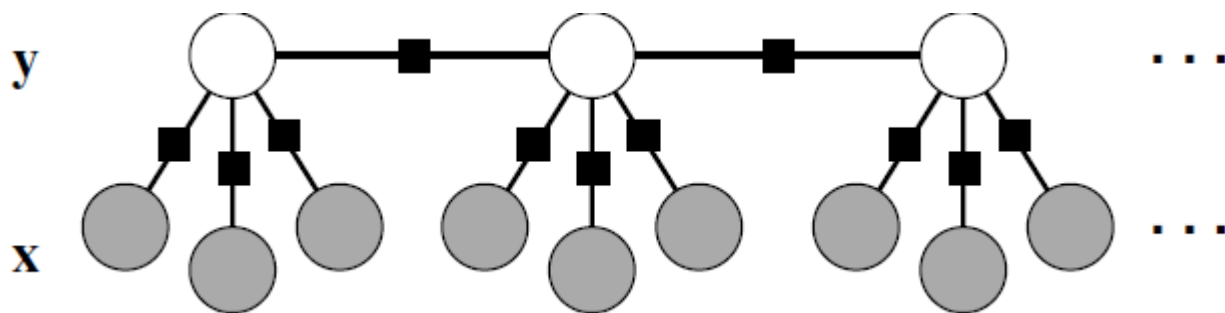


图2.5 来自式 (2.17) 的类HMM的线性链CRF

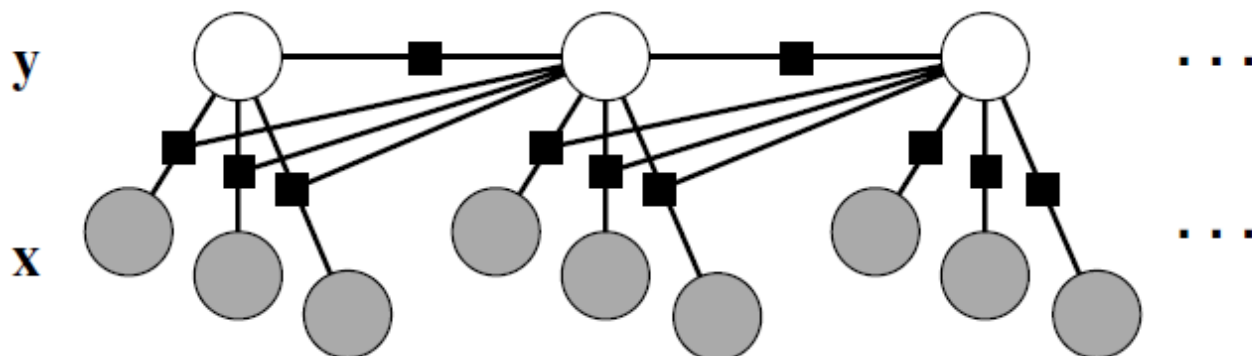


图2.6 转移因子依赖于当前输入的线性链CRF

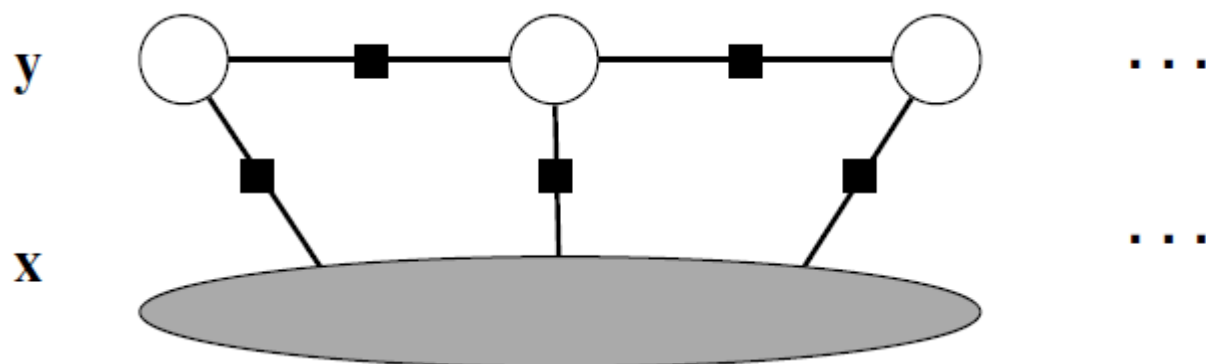


图2.7 转移因子依赖于全部输入的线性链CRF

需支出，在我们关于线性链CRF的定义中，特征函数可以从任意时刻依赖于输入，把 f_k 关于输入的参数写成了 \mathbf{x}_t 。 \mathbf{x}_t 应当被理解成——计算 t 时刻特征所需的全部输入译注：而不是 t 时刻的输入。例如，如果CRF需要下一时刻的单词 \mathbf{x}_{t+1} ，那么 \mathbf{x}_t 应当包含了 \mathbf{x}_{t+1} 。

最后，归一化常数 $Z(\mathbf{x})$ 需要在全部可能的输出序列上求和，包含有爆炸式的大量的项。然而，它可以被前向-反向算法有效地解，正如我们在第4.1节所揭示的。

2.4 通用CRFs

现在，我们将刚刚探讨的线性链扩展到通用图，以与Lafferty在【63】中对CFR的定义相匹配。概念上，这一扩展是显而易见的。我们只需简单地把线性链因子图变成通用因子图。

定义2.3 记 G 是在 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 上的因子图。如果对于 \mathbf{X} 中任意的值 \mathbf{x} ，分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 是根据 G 来分解的，那么 (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) 是一个条件随机场conditional random field。

那么，每个条件分布 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 都是某些因子图的CRF，包括是平凡的。如果 $F \in \{\Psi_a\}$ 是G中的因子的集合，那么一个CRF的条件分布为：

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \prod_{a=1}^A \Psi_a(\mathbf{y}_a, \mathbf{x}_a). \quad (2.22)$$

本定义相比一般无向图的定义（2.1），差别在于归一化常数 $Z(\mathbf{x})$ 现在变成了关于输入 \mathbf{x} 的函数。因为条件性趋向于简化图模型， $Z(\mathbf{x})$ 有可能被计算，而Z却不是。

正如我们在HMMs和线性链CRFs中的做法，让 Ψ_a 是一组特征的线性函数是有用的，即：

$$\Psi_a(\mathbf{y}_a, \mathbf{x}_a) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{K(A)} \theta_{ak} f_{ak}(\mathbf{y}_a, \mathbf{x}_a) \right\}, \quad (2.23)$$

其中特征函数 f_{ak} 和权重 θ_{ak} 都使用了因子的下标 a ，这是为了强调每个因子都有自己的权重集。一般来说，每个因子也可以拥有自己的特征函数。注意，如果 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 是离散的，那么（2.23）中的log-线性假设并没有带来额外的局限，因为我们可以给 $(\mathbf{y}_a, \mathbf{x}_a)$ 的每一个值安排一个指示函数 f_{ak} ，类似于我们把HMMs转变成线性链CRF时的做法。

综合（2.22）和（2.23），可以把log-线性因子CRF的条件分布写成

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \prod_{\Psi_a \in F} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{K(A)} \theta_{ak} f_{ak}(\mathbf{y}_a, \mathbf{x}_a) \right\}. \quad (2.24)$$

另外，许多应用模型常常需要参数绑定。以线性链为例，每一时刻的因子 $\Psi_t(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{x}_t)$ 常常使用相同的权重。为了表示这一情况，我们把G的因子划分成 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_P\}$ ，其中每个 C_P 是一个团模板clique template，是一组共享了特征函数 $\{f_{pk}(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c)\}_{k=1}^{K(p)}$ 和参数 $\theta_p \in \mathcal{R}^{K(p)}$ 的因子。一个使用了团模板的CRF可以写成

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \prod_{C_p \in \mathcal{C}} \prod_{\Psi_c \in C_p} \Psi_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c; \theta_p). \quad (2.27)$$

其中每个模板因子是这样参数化的

$$\Psi_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c; \theta_p) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{K(p)} \theta_{pk} f_{pk}(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c) \right\}, \quad (2.26)$$

而归一化函数为

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} \prod_{C_p \in \mathcal{C}} \prod_{\Psi_c \in C_p} \Psi_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c). \quad (2.27)$$

这一团模板的记号方法即指明了结构重复，也指明了参数绑定。以线性链CRF为例，典型的团模板 $C_0 = \{\Psi_t(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{x}_t)\}_{t=1}^T$ 倍整个网络使用，因而 $\mathcal{C} = \{C_0\}$ 是元素单一的集合。如果相反地，我们希望给每个因子 Ψ_t 分配独立的参数，就像非齐次HMM，那么需要T个模板，即 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t=1}^T, C_t = \{\Psi_t(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{x}_t)\}$ 。

定义通用CRF时，如何给出重复的结构以及参数绑定，是属于最需要考虑的问题。人们推荐了一系列的规范，用于指定团模板，而我们仅仅在这里简单的罗列一下。例如，动态条件随机场dynamic conditional random field[140]是一些序列模型，允许在每个时刻拥有多个标签译注：不是指有多个类别，而是有多个变量，而不只是单一的标签，很像动态贝叶斯网络。第二，关系马尔科夫网relational Markov networks【142】，是一种用类SQL的语法来指明图结构和参数绑定的通用CRF。马尔科夫逻辑网Markov logic networks【113,128】用逻辑式子（logic formulae）来给出无向图的局部函数的分数。实质上，知识库中的每条一阶规则都存在一组参数。MLN的逻辑部分，本质上，可以被看成一种编码惯例，用来指明无向图中的重复结构以及参数绑定。Imperatively define factor graphs【87】使用了完整表达的Turing-complete函数来定义团模板，即给出了模型的结构，也给出了充分统计量 f_{pk} 。这些函数灵活

地采用了先进的编程思想，包括递归、任意搜索（arbitrary search）、惰性计算以及记忆化。本文采用的团模板的记号，来自于Taskar et al.[142]， Sutton et al. [140]， Richardson 和 Domingos [113]， 以及McCallum et al.[87]

2.5特征工程
