Simulation: Examen

Vendredi 23 mai 2025

Durée : 2 heures.
Seule une feuille A4 recto verso est autorisée. Le barême est indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 : variable aléatoire (5 points)

On considère la loi de probabilité donnée par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = k \exp(-x), x \in [0, M]$$

où $M > 0$ est un paramètre fixé, et k est à déterminer.

On rappelle la formule de dérivation : si $f(x) = \exp(ax)$, alors $f'(x) = a \exp(ax)$, où a est un nombre.

a) On pose $M = +\infty$. Que doit valoir k pour que f soit une fonction de densité ? Quelle est alors la loi obtenue ?

Dans les questions suivantes, on se place dans le cas où $M < \infty$.

b) Donner la valeur de k en fonction de $M > 0$ pour que f soit une fonction de densité. Dans la suite, k est fixé à cette valeur.

c) Écrire un algorithme reposant sur la méthode de rejet qui génère des valeurs aléatoires suivant la loi définie par f à partir de la fonction `unif()` qui renvoie un nombre aléatoire uniforme sur $[0, 1]$.

d) Combien d'appels à la fonction `unif()` faut-il en moyenne pour que votre algorithme génère une valeur ?

e) Calculer la fonction de répartition associée à la fonction de densité f.

f) Ecrire un algorithme reposant sur l'inversion de la fonction de répartition qui génère des valeurs suivant la loi définie par f.

Exercice 2 : chaîne de Markov en temps discret (5 points)

Soit une chaîne de Markov en temps discret à n états numérotés de 1 à n. Pour chaque état i, avec $1 \leq i \leq n-1$, il y a une transition de l'état i vers l'état $i+1$ avec probabilité p. De plus, il y a une transition de l'état n vers l'état 1 de probabilité p. On suppose $0 < p < 1$.

Pour tout état i, avec $2 \leq i \leq n$, il y a une transition de l'état i vers l'état $i-1$ de probabilité $1-p$. De plus, il y a une transition de l'état 1 vers l'état n de probabilité $1-p$.

a) Dessiner le graphe de transition de cette chaîne de Markov quand $n = 4$?

b) Quand $n = 4$, la chaîne est-elle irréductible ?

c) Quand $n = 4$, la chaîne est-elle apériodique ?

d) Quand $n = 5$, la chaîne est-elle apériodique ?

e) Montrer que, quel que soit n, la chaîne de Markov admet la distribution uniforme (probabilité $1/n$ pour chaque état i) comme distribution stationnaire.

f) Pour cette question, on suppose la valeur de n quelconque. Supposons que dans l'état i on gagne i euros. Combien d'euros gagnera-t'on en moyenne à chaque étape si la chaîne de Markov est simulée sur une durée infinie ?

Exercice 3 : simulation (10 points)

On considère une file d'attente de capacité infinie. Les durées entre deux arrivées suivent une loi exponentielle de paramètre λ. Un unique serveur sert les clients avec une durée qui suit une loi exponentielle de paramètre μ.

Le serveur peut tomber en panne. Quand une panne survient, le service en cours est annulé, et le client doit reprendre le service du début. La durée entre la fin d'une panne et le début de la panne suivante suit une loi exponentielle de paramètre α. Enfin, la durée d'une panne suit une loi exponentielle de paramètre 1.

L'objectif est de connaître le **temps moyen de séjour des clients**, temps d'attente et temps de service compris.

a) Ecrire le simulateur à événements discrets qui permet de faire cette estimation, en donnant :

- les événements et les variables utilisées
- le code modifiant les variables pour chaque événement
- la valeur retournée à la fin de la simulation afin de répondre à l'objectif

b) Modéliser ce système par une chaîne de Markov en temps continu. Vous préciserez :

- l'espace d'état
- les taux de transitions entre états

c) Dessiner le graphe des taux pour quelques états de manière à bien capturer la structure de la chaîne.

d) Donner 4 équations satisfaites par la probabilité stationnaire.

e) En supposant qu'elle existe, quelle formule reposant sur la probabilité stationnaire permet de calculer le temps moyen de séjour des clients ?