Simulation: Examen

Jeudi 30 mai 2024

Durée : 2 heures.
Tous les documents sur papier sont autorisés. Les appareils électroniques sont interdits. Le barême est indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 : variable aléatoire (5 points)

Soit f une fonction sur l'intervalle réel $[0, A]$ avec $A > 0$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < A/2 \\ 2 & \text{si } A/2 \leq x < A \end{cases}$$

a) Pour quelle valeur de A la fonction f est elle une fonction de densité ?

Dans la suite, la valeur de A est fixée de manière à ce que f soit une fonction de densité.

Afin d'écrire les générateurs demandés, on dispose de la fonction `unif()` qui retourne une valeur aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) Écrire un algorithme reposant sur la méthode de rejet qui génère des valeurs aléatoires suivant la loi définie par f.

c) Combien d'appels à la fonction `unif()` faut-il en moyenne afin de générer une valeur par votre algorithme ?

d) Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire ayant pour densité f.

e) Ecrire un algorithme reposant sur l'inversion de la fonction de répartition qui génère des valeurs suivant la loi définie par f.

Exercice 2 : chaîne de Markov en temps discret (5 points)

On considère la chaîne de Markov définie sur l'ensemble d'états $\{1, 2, 3\}$ donnée par la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & x & 1-x \\ 2 & y & 0 & 1-y \\ 3 & z & 1-z & 0 \end{array}$$

avec $0 < x, y, z < 1$.

a) Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

b) Montrer que la chaîne de Markov est irréductible et apériodique.

c) On pose $x = 0.2, y = 0.4, z = 0.8$. Calculer la probabilité stationnaire de la chaîne de Markov.

d) A chaque fois que la chaîne de Markov est sur l'état $i \in \{1, 2, 3\}$, on gagne i euros. Combien d'euros gagne-t'on à chaque étape en moyenne ?

e) A quelles conditions sur x, y et z la chaîne de Markov admet-elle la probabilité uniforme comme probabilité stationnaire ?

Exercice 3 : simulation (10 points)

On considère une file d'attente de capacité infinie. Cette file possède deux serveurs. Le 2-ème serveur ne peut démarrer le service d'un client que quand le nombre de clients dans la file (clients en service compris) est supérieur ou égal à 3.

Les durées inter-arrivées dans la file suivent une distribution exponentielle de paramètre λ. Les services de chaque serveur ont une durée exponentielle de paramètre μ.

L'objectif est de connaître la proportion du temps où le 2-ème serveur est inactif.

a) Ecrire le simulateur à événements discrets qui permet de faire cette estimation, en donnant :

* les événements et les variables utilisées

* le code modifiant les variables pour chaque événement

* la valeur retournée à la fin de la simulation afin de répondre à l'objectif

b) Modéliser ce système par une chaîne de Markov en temps continu. Vous préciserez :

* l'espace d'état

* les taux de transitions entre états

c) Dessiner le graphe des taux pour quelques états de manière à bien capturer la structure de la chaîne.

d) Donner 4 équations satisfaites par la probabilité stationnaire.

e) En supposant qu'elle existe, comment obtenir la proportion du temps où le 2-ème serveur est vide à partir de la probabilité stationnaire ?