Théorie algorithmique des jeux et apprentissage par renforcement: Examen

Lundi 16 décembre 2024

Durée : 2 heures.
Tous les documents sur papier sont autorisés. Les appareils électroniques sont interdits. Le barême est indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (5 points)

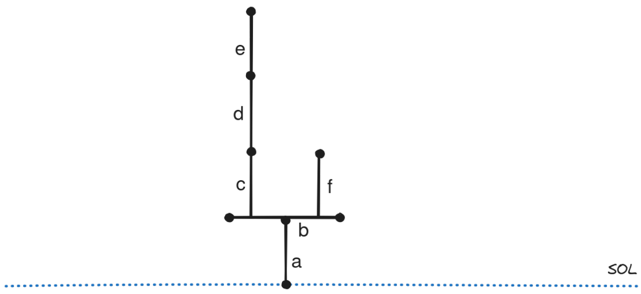
On rappelle les règles du jeu combinatoire du Hackenbush qui se joue sur un dessin constitué de segments :

— tant que le dessin contient un segment, le joueur à qui c'est le tour de jouer choisit un segment restant de la figure ;

— ce segment est supprimé du dessin, ainsi que tous les segments qui ne sont plus connectés à la ligne représentant le sol ;

— le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

On considère l'instance du jeu de Hackenbush de la figure suivante constitué des 6 segments a, b, c, d, e, f.



a) Calculer la valeur de Sprague-Grundy de ce jeu.

b) On considère maintenant un jeu de Nim noté Nim(n, k) constitué d'un tas à n batonnets dans lequel on peut retirer au plus $k \geq 1$ batonnets à chaque tour. Démontrer que la valeur de Sprague-Grundy de ce jeu vaut $n \mod (k+1)$.

c) On considère le jeu obtenu en faisant la somme du jeu du Hackenbuch de la figure, d'un jeu de Nim$(153, 4)$ et Nim(2024, 49). Calculer la valeur de Sprague-Grundy de ce jeu.

d) En déduire que le jeu est dans une S-position, et donner une stratégie gagnante dans cette position.

Exercice 2 (5 points)

On considère le jeu suivant : N personnes doivent simultanément choisir entre deux options, A et B. Le gain total pour l'ensemble des joueurs est défini comme le maximum entre le nombre de joueurs ayant choisi l'option A et ceux ayant choisi l'option B.

a) Proposer une formalisation stratégique du jeu ci-dessus. Précisez l'ensemble des joueurs, les ensemble de stratégies, les fonctions de coût.

b) Dans le cas où $N = 2$, écrire le jeu sous forme matricielle et donner l'ensemble des équilibres de Nash du jeu en traçant les courbes de meilleures réponses de chaque joueur.

c) Pour un nombre de joueurs quelconque N, déterminer l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures.

d) Dans le cas $N = 3$, déterminer l'ensemble des équilibres de Nash strictement mixte où chaque joueur choisit l'option A avec une probabilité identique p dont vous préciserez la ou les valeurs.

Exercice 3 (4 points)

On considère le jeu sous forme normale à 2 joueurs suivant :

	A	B	C
a	3,3	3,4	6,0
b	4,3	4,4	4,5
c	0,6	5,4	5,5

La première valeur correspond au gain du joueur qui choisit la ligne (a,b ou c), la deuxième valeur est celle du joueur qui choisit le colonne (A, B ou C). Les joueurs cherchent à maximiser leur gain.

a) Donner l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures du jeu.

b) Existe-t'il un équilibre de Nash dont le support sont les lignes b et c pour le joueur qui choisit les lignes, et les colonnes A et B pour l'autre joueur ? Si oui le calculer.

c) Existe-t'il un équilibre de Nash dont le support sont toutes les lignes et toutes les colonnes du jeu ? Si oui le calculer.

Exercice 4 (4 points)

On considère une variante du jeu Pierre Feuille Ciseau à un seul tour, dans laquelle on ajoute l'action Puits : le puits gagne contre Pierre et Ciseau, perd contre feuille, et fait match nul contre lui-même.

a) Modéliser ce jeu sous forme matricielle.

b) Ecrire un programme linéaire dont la valeur est la valeur de ce jeu.

c) Montrer que le profil de stratégies où chaque joueur choisit une stratégie uniforme sur l'ensemble des choix (probabilité 0.25 pour chaque choix) n'est pas un équilibre de Nash. On pourra utiliser le fait que le jeu est symétrique et donc que sa valeur est 0.

d) Après avoir supprimé itérativement les stratégies dominées (même faiblement), donner les stratégies d'équilibre minmax du jeu et sa valeur. Vérifier que la solution satisfait bien les contraintes du programme linéaire.

Exercice 5 (5 points)

On considère le jeu à un joueur suivant qui est utilisé pour prescrire le comportement d'un personnage géré par l'ordinateur dans un jeu vidéo. Le personnage doit d'une part manger (donc par exemple chasser, ce qui est risqué) et doit travailler pour produire des ressources (du bois, de l'or...) Le but est de calculer une stratégie qui permettra de maximiser le total des ressources extraites par le personnage avant sa mort.

Le personnage peut être dans trois états : *OK, Affamé ou Mort.*

— Dans l'état *OK*, le personnage doit choisir entre : *Manger* et *Travailler*.
  — S'il choisit *Manger*, alors le joueur gagne 1 ressource et il reste dans l'état *OK* avec une probabilité de 0.8 et devient *Affamé* avec une probabilité de 0.2.
  — S'il choisit *Travailler*, alors le joueur gagne 10 ressources, et le personnage reste *OK* avec probabilité 0.5 et devient *Affamé* avec probabilité 0.5 également.
— Dans l'état *Affamé*, le personnage doit choisir entre : *Manger* et *Travailler*.
  — S'il choisit *Manger*, alors il reste dans l'état *Affamé* avec une probabilité de 0.25, devient *Mort* avec une probabilité de 0.25 et repasse en *OK* avec une probabilité de 0.5.
  — S'il choisit *Travailler*, alors le joueur gagne R ressources où *R* est fixé à l'avance, et le personnage reste *Affamé* avec probabilité 0.5 et devient *Mort* avec probabilité 0.5 également.
— Dans l'état *Mort*, le jeu est terminé, le personnage disparaît, et on compte le total de ressources accumulées.

a) Modéliser précisément le jeu (un graphique avec une légende suffira).

b) Combien le personnage extraira-t'il de ressources en moyenne avant de mourir en partant de l'état OK dans le cas où la stratégie choisie est *Manger si Affamé* et *Travailler si OK*.

c) Déterminer à quelle condition sur R cette stratégie est optimale.