

Erzeugung Modifizierter Antwortspektren zur Vordimensionierung von Seismisch Isolierten Bauwerken



Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Arne Rick

2. März 2020, Karlsruhe

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Danksagung

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet. Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum. Stet clita kasd gubergren, no sea takimata sanctus est Lorem ipsum dolor sit amet.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	5
1.1 Erdbeben	5
1.2 Berechnung	7
1.2.1 Vereinfachtes Antwortspektrenverfahren	7
1.2.2 Antwortspektrenverfahren unter Berücksichtigung mehrerer Schwingungsformen (Modalanalyse)	8
1.2.3 Kapazitätsspektrenmethode	10
1.2.4 Zeitschrittberechnung	10
1.3 Bestimmung des Antwortspektrums	11
2 Isolatoren	15
2.1 Gleitpendelisolatoren	15
2.2 Funktionsweise	17
2.2.1 Abstimmung	17
2.2.2 Steifigkeit	18
2.2.3 Dämpfung	19
2.3 Schwierigkeiten bei der Vordimensionierung	20
3 Berechnung des modifizierten Antwortspektrums	21
3.1 Ansatz über die Übertragungsfunktion	21
3.2 Vereinfachter Ansatz	23
3.3 Ansatz über die Transmissibilität	24
3.3.1 Transmissibilität	24
3.3.2 Rayleigh-Dämpfung	26
3.3.3 Erzeugung des isolierten Antwortspektrums	28
4 Vergleich der Ansätze am Beispiel	29
4.1 Betrachtung als effektiver Einmassenschwinger	30
4.2 Vereinfachtes Verfahren	31
4.3 Verfahren der Transmissibilität	32
4.4 Vergleich der Ergebnisse	36
4.5 Korrekturansätze	40
5 Beispielberechnung mit EDV	43
5.1 Beispielgebäude	43
5.2 Berechnung mit RStab	44
5.3 Diskussion der Ergebnisse	45
6 Analyse	46

6.1	Variation von μ	46
6.2	Ansätze für verschiedene Dämpfungskorrekturbeiwerte η	47
6.3	Linearisierungen	48
7	Zusammenfassung	50
	Abbildungsverzeichnis	51
	Bibliographie	52
	Eidesstattliche Erklärung	54

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Erdbeben

Erdbeben sind geophysikalische Extremereignisse, die eine Erschütterung des Erdkörpers darstellen und meist durch tektonische Massenverschiebungen an den Bruchfugen der Platten in der Lithosphäre, aber auch durch vulkanische Aktivität ausgelöst werden. [1]

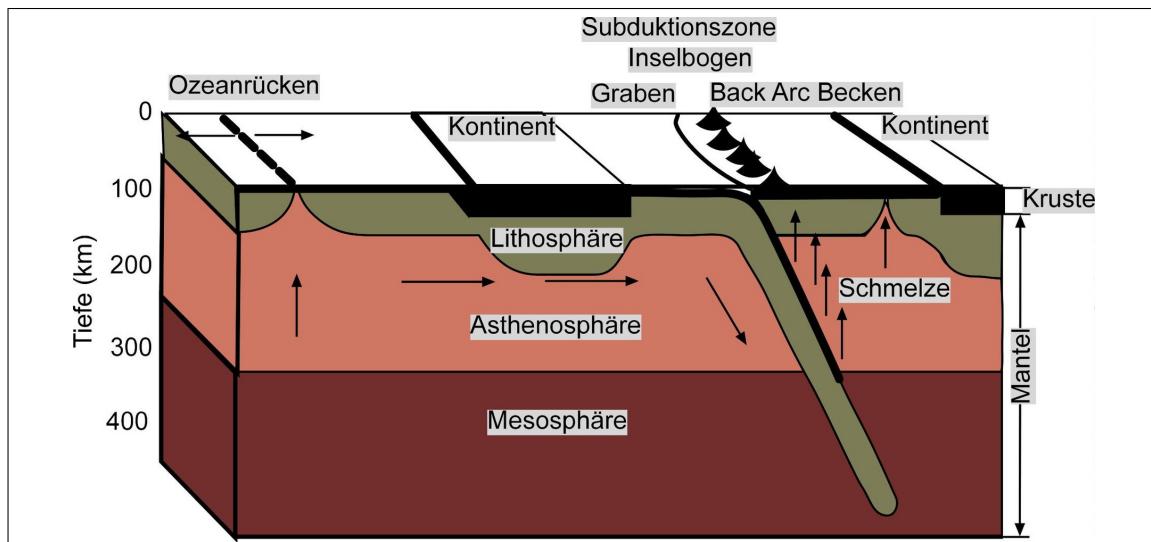


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der Dynamik von Lithosphärenplatten: Divergenz an Mittelozeanischen Rücken und Konvergenz an Subduktionszonen - [Gunnar Ries]

In einer Analyse von mehr als 35.000 weltweiten Katastrophenereignissen in den Jahren zwischen 1900 und 2015 des Karlsruher Institut für Technologie (KIT) zeigte sich, dass Erdbeben für 26% der Schäden verantwortlich waren. Der größte Schaden trat jedoch durch das Tohoku-Erdbeben am 11. März 2011 vor Honshū, Japan auf. Der Schaden durch das Erdbeben und den dadurch ausgelösten Tsunami belief sich auf 18.500 Tote, 450.000 Menschen wurden obdachlos, und einen direkten wirtschaftlichen Schaden von etwa 296 Milliarden Euro. [6]

Aufgrund des Erdbeben kam es zu der Fukushima-Nuklearkatastrophe im Atom-

kraftwerk Fukushima Daiichi.

Erdbebensicheres Design ist also von wirtschaftlicher und sicherheitstechnischer Bedeutung, um die Aufgabe von Gebäuden zum Schutz des Menschen vor Naturereignissen und ein effektives Tragverhalten zu gewährleisten.

Die Ziele das Eurocode 8 sind daher das Schützen menschlichen Lebens, Schadensbegrenzung und das Aufrechthalten des Betriebs von Strukturen, die zum zivilen Schutz dienen. Beispielsweise sollten Krankenhäuser keine großen Schäden davontragen und den Betrieb nach dem Ereignis vortsetzen können, um ihren Aufgaben im Katastrophenschutz unmittelbar weiter nachzugehen. Diese Anforderung der Wichtigkeit einer Struktur wird im Bedeutungsbeiwert erfasst. [7]

1.2 Berechnung

Grundlegend unterscheidet der Eurocode 8 vier verschiedene Berechnungsmethoden.

- Vereinfachtes Antwortspektrenverfahren
- Antwortspektrenverfahren unter Berücksichtigung mehrerer Schwingungsformen (Modalanalyse)
- Kapazitätsspektrenmethode
- Zeitschrittberechnung

Da die beiden letzteren Verfahren ein genaueres Gebäudemodell voraussetzen und deutlich aufwändiger sind als die Antwortspektrenverfahren, eignen sich diese nur schwer für die Vordimensionierung von Strukturen. Hier werden weiterhin nur die vereinfachten Verfahren mittels Antwortspektren und Modalanalyse betrachtet, die Kapazitätsspektrenmethode und Zeitschrittberechnung soll aber kurz erläutert werden.

1.2.1 Vereinfachtes Antwortspektrenverfahren

Dieses Verfahren kann nur angewandt werden, wenn die Anforderungen aus dem Eurocode 8 an die Regelmäßigkeit des Grund- und Aufrisses erfüllt sind. Hier wird nur die Grundschwingung der Struktur berücksichtigt. Daher kann dieses Verfahren nur angewendet werden wenn, die höheren Schwingungsformen keinen wesentlichen Einfluss haben.

Die Grundschwingzeit kann in einer Näherung nach Müller/Keintzel bestimmt werden.

$$T_1 = \frac{2\pi H^2}{\alpha_1^2} \sqrt{\frac{m}{hEI}}$$

H Gestamthöhe des Bauwerks

Geschosszahl	α_1
1	1,32
2	1,53
5	1,71
10	1,78

h Geschossgröße

m Geschossmasse

EI Steifigkeit

α_1 Schwingzeitbeiwert

Mit der Grundschwingzeit kann nun aus dem Antwortspektrum (Abschnitt 1.3) der Bemessungswert der Spektralbeschleunigung S_d bestimmt und die Gesamterdbebenkraft F_b berechnet werden.

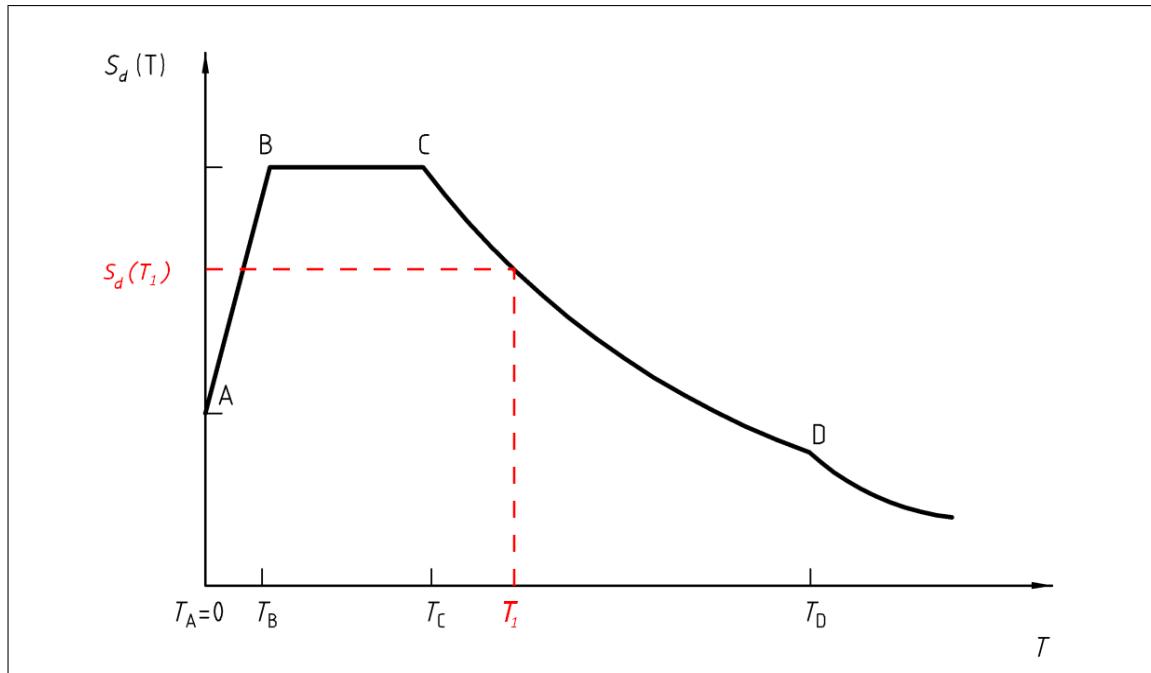


Abbildung 1.2: Bemessungsspektrum

$$F_b = S_d(T_1) \cdot M \cdot \lambda$$

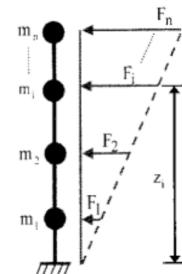
Wobei M die Gesamtmasse des Bauwerks und λ der Korrekturfaktor von 0,85 für $T_1 \leq 2T_c$ für Gebäude mit mehr als zwei Geschossen und sonst $\lambda = 1,0$ ist. Die Grundschwingungsform darf linear angenähert werden. Somit können die angreifenden Horizontalkräfte vereinfacht linear über die Geschosse verteilt werden.

$$F_i = F_b \cdot \frac{z_i m_i}{\sum z_i m_i}$$

F_i Am Geschoss i angreifende Horizontalkraft

z_i Höhen vom Boden zu den Geschossen

m_i Geschossmassen



Mit den Horizontalkräften können nun die Nachweise der Standsicherheit geführt werden.

1.2.2 Antwortspektrenverfahren unter Berücksichtigung mehrerer Schwingungsformen (Modalanalyse)

Sind die Bedingungen an die Regelmäßigkeit des Bauwerks nicht erfüllt und es sollen mehr Schwingungsformen, zum Beispiel auch an einem dreidimensionalen Modell, betrachtet werden, so kann eine Modalanalyse durchgeführt werden.

Das Vorgehen ist ähnlich zu Abschnitt 1.2.1, jedoch wird für jede Schwingungsform die Periode ermittelt, eine Spektralbeschleunigung bestimmt und die Horizontallasten anhand der Beteiligungsfaktoren der Schwingungsform angesetzt.

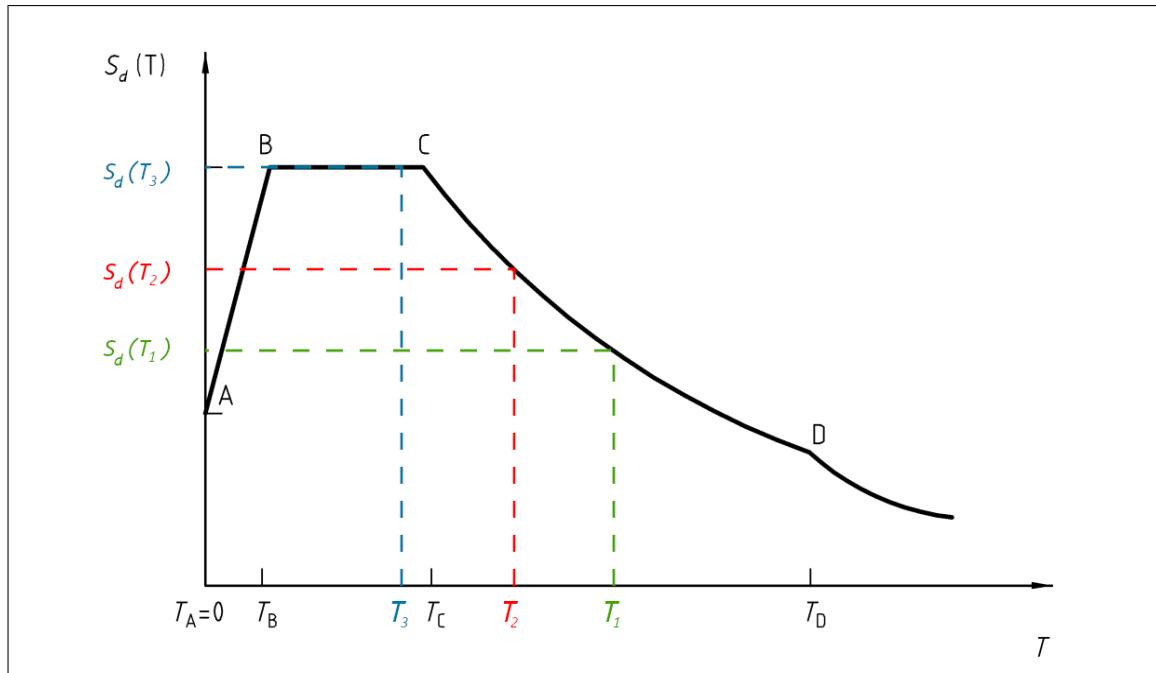


Abbildung 1.3: Bemessungsspektrum Modalanalyse

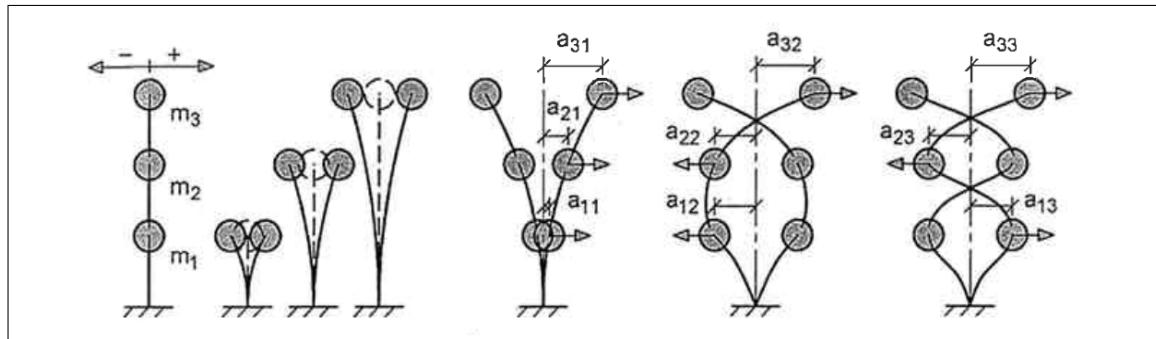


Abbildung 1.4: Eigenschwingungsformen eines Dreimassensystems [12]

Anschließend müssen die modalen Schnittgrößen und Verschiebungen kombiniert werden. Hier sieht der Eurocode die SRSS-Methode (Square Root of Sum of Squares)

$$S = \sqrt{\sum_{j=1}^n S_j^2}$$

und die CQC-Methode (Complete Quadratic Combination)

$$S = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n S_j \cdot \rho_{jk} \cdot S_k}$$

vor. Wobei ρ_{jk} der Wechselwirkungsfaktor ist, der sich für konstante $\xi_j = \xi_k = \xi$ wie folgt berechnet.

$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2} \quad \text{mit} \quad r = \frac{\omega_k}{\omega_j}$$

Neben der CQC-Methode darf auch die CQCi-Methode angewendet werden, welche eine Modifikation unter Berücksichtigung des Vorzeichens der i-ten Eigenform darstellt.

1.2.3 Kapazitätsspektrenmethode

Die auch als "pushover analysis" bezeichnete Methode ist ein nicht-elastisches statisches Verfahren unter Berücksichtigung des Eigengewichts und monoton ansteigender horizontaler Lasten zur Bestimmung der Grenzlast über die Grenzduktilität. Sie ist ein genaueres Verfahren zur Bestimmung der plastischen Kapazität, die in den vereinfachten Verfahren von dem Verhaltensbeiwert q erfasst werden.

1.2.4 Zeitschrittberechnung

Die Berechnung mittels Zeitschrittverfahren ("time-history analysis") ist ein nicht-lineares Verfahren, welches eine zeitabhängige Antwort einer Struktur über die direkte numerische Integration der Differentialgleichungen der Bewegung unter den im Eurocode 8 angegebenen simulierten oder tatsächlich aufgezeichneten Akzelerogrammen der Bodenbeschleunigung bestimmt.

1.3 Bestimmung des Antwortspektrums

Zur Gewinnung des Antwortspektrums wird ein Einmassenschwinger unter Fußpunktanregung durch ortspezifische Akzelerogramme betrachtet und dessen Eigenfrequenz variiert.

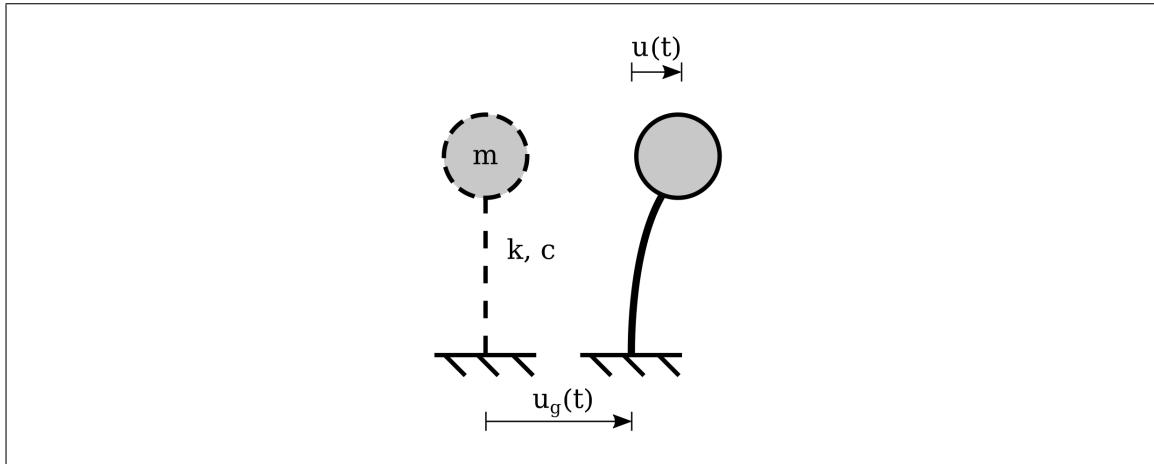


Abbildung 1.5: Einmassenschwinger mit Fußpunktanregung

Die Bewegungsgleichung des Systems

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g \quad (1.1)$$

nach Umformung mit $\xi = c/(2m\omega)$ und $\omega = \sqrt{k/m}$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = -\ddot{u}_g \quad (1.2)$$

zeigt, dass die Antwort lediglich von ω , der Anregung \ddot{u}_g und ξ abhängig ist, wobei ξ mit 5% angenommen wird. Das Antwortspektrum stellt die Einhüllende des Maximalwertes der Absolutbeschleunigung der Systemantwort $S_a = \max|\ddot{u} + \ddot{u}_g|$ über die Eigenfrequenz des Systems ω dar. [4]

Sie wird über die Eckperioden T_B, T_C, T_D und den Bemessungswert der Bodenbeschleunigung a_g parametrisiert. Hinzu kommt noch der Bedeutungsbeiwert γ_1 , der Einfluss des Baugrundes über den Bodenparameter S und ein Dämpfungs-Korrekturbeiwert η , der bei 5% viskoser Dämpfung 1,0 beträgt und sonst mit $\eta = \sqrt{10/(5 + \xi)} \geq 0,55$ angegeben wird.

Die Ortsgebundenheit spiegelt sich in den Baugrundverhältnissen und der Bodenbeschleunigung wider. Die Erdbebenzone kann aus einer Karte oder Karte entnommen werden und liefert den Referenz-Spitzenwert der Bodenbeschleunigung a_g .

Erdbebenzone	$a_g[m/s^2]$
Zone 0	-
Zone 1	0,4
Zone 2	0,6
Zone 3	0,8

Tabelle 1.1: Tabelle NA.3 — Zuordnung von Referenz-Spitzenwerten der Bodenbeschleunigung zu den Erdbebenzonen [DIN EN 1998-1/NA:2011-01]

Über die Baugrundverhältnisse kann nach Eurocode 8 NAD eine Baugrundklasse ermittelt werden und in dessen Abhängigkeit Parameter für den Bodenparameter S und die Eckperioden T_B, T_C, T_D angegeben werden.

Baugrundklasse	S	$T_B[s]$	$T_C[s]$	$T_D[s]$
A-R	1,00	0,05	0,20	2,0
B-R	1,25	0,05	0,25	2,0
C-R	1,50	0,05	0,30	2,0
B-T	1,00	0,10	0,30	2,0
C-T	1,25	0,10	0,40	2,0
C-S	0,75	0,10	0,50	2,0

Tabelle 1.2: Tabelle NA.4 — Werte der Parameter zur Beschreibung des elastischen horizontalen Antwortspektrums [DIN EN 1998-1/NA:2011-01]

Der Bedeutungsbeiwert bildet die Wichtigkeit einer Struktur ab und erhöht die Wiederkehrperiode bei einer Auftretenswahrscheinlichkeit P_R von 10% in einer Zeitspanne T_L von 50 Jahren. Bei einem Bedeutungsbeiwert von $\gamma_1 = 1,0$ beträgt die mittlere Wiederkehrperiode T_R

$$\begin{aligned}
 T_R &= \frac{-T_L}{\ln(1 - P_R)} \\
 &= \frac{-50}{\ln(1 - 0,1)} \\
 &= 475 \text{ Jahre}
 \end{aligned}$$

Bedeutungskategorie	Bauwerke	γ_1	T_R [a]
I	Bauwerke ohne Bedeutung für den Schutz der Allgemeinheit, mit geringem Personenverkehr (z. B. Scheunen, Kulturgewächshäuser, usw.).	0,8	225
II	Bauwerke, die nicht zu den anderen Kategorien gehören (z. B. kleinere Wohn- und Bürogebäude, Werkstätten, usw.).	1,0	475
III	Bauwerke, von deren Versagen bei Erdbeben eine große Zahl von Personen betroffen ist (z. B. große Wohnanlagen, Schulen, Versammlungsräume, Kaufhäuser, usw.).	1,2	820
IV	Bauwerke, deren Unversehrtheit im Erdbebenfall von hoher Bedeutung für den Schutz der Allgemeinheit ist (z. B. Krankenhäuser, wichtige Einrichtungen des Katastrophenschutzes, der Feuerwehr und der Sicherheitskräfte, usw.).	1,4	1300

Tabelle 1.3: Tabelle NA.6 — Bedeutungskategorien und Bedeutungsbeiwerte [DIN EN 1998-1/NA:2011-01]

Das elastische Antwortspektrum $S_e(T)$ wird somit über folgende Ausdrücke bestimmt

$$T_A \leq T \leq T_B : S_e(T) = a_g \gamma_1 S \left[1 + \frac{T}{T_B} (\eta_{2,5} - 1) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_e(T) = a_g \gamma_1 S \eta_{2,5}$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_e(T) = a_g \gamma_1 S \eta_{2,5} \frac{T_C}{T}$$

$$T_D \leq T : S_e(T) = a_g \gamma_1 S \eta_{2,5} \frac{T_C T_D}{T^2}$$

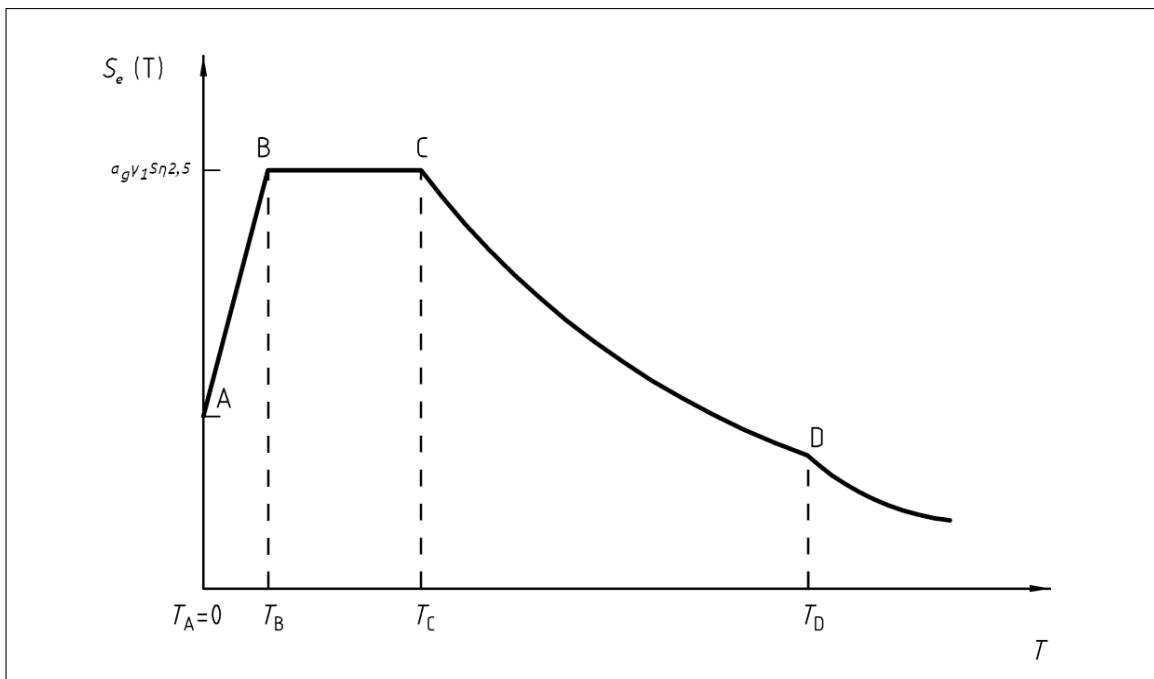


Abbildung 1.6: Elastisches Antwortspektrum

Kapitel 2

Isolatoren

Wenn die Einwirkungen aus Erdbeben sehr hoch werden, zum Beispiel durch eine hohe Anforderung an den Bedeutungsbeiwert oder wenn sich das Bauwerk in einem Starkbebengebiet befindet, ist es meistens technisch und wirtschaftlich günstiger, die Struktur von der Einwirkung zu isolieren, damit sie dieser nicht mehr vollends ausgesetzt wird.

Es können leichtere Konstruktionen gebaut werden, die durch geringere Aufwendung an Material die Kosten senken und die Nachhaltigkeit durch senken des Ausstoßes an CO₂ erhöhen.

Die horizontale Isolation ist keine Lösung der Neuzeit. Schon die Baumeister im alten China ordneten zwischen Fundament und Grundplatte eine Schicht aus rolligem Sand an [16]. Im 20. Jahrhundert folgten einige Patente mit dem selben Grundprinzip und 1921 realisierte Frank Lloyd Wright das Imperial Hotel in Tokyo mit einer Isolation mittels einer 3m mächtigen Schicht aus Weichboden. Das Gebäude überstand ein zwei Jahre später aufgetretenes schweres Erdbeben nahezu unbeschadet [14].

Für die Isolierung stehen einige verschiedene Mechanismen, wie zum Beispiel kinematische Lager, Gleitpendelisolatoren und Elastomerlager (ggf. mit Bleikern) zur Verfügung. In dieser Arbeit sollen nur Gleitpendelisolatoren betrachtet werden.

2.1 Gleitpendelisolatoren

Gleitpendelisolatoren bestehen aus zwei sphaerisch angeformten Lagerplatten, zwischen denen ein Gleitschuh geschaltet wird.

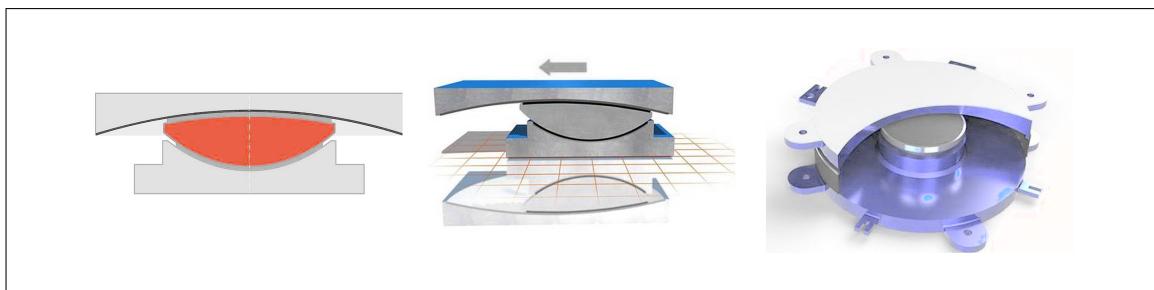


Abbildung 2.1: Gleitpendelisolator [Maurer SE (maurer.eu)]

Die Reibung zwischen den Schnittstellen und somit die Energiedissipation kann eingestellt werden. Bei einem zu hohen Reibkoeffizienten besteht jedoch die Gefahr, dass die Rückzentrierung nicht mehr gewährleistet werden kann, welche ein großer Vorteil der Gleitpendelisolatoren ist. Zur Erhöhung der Dissipation können aber auch zusätzliche viskose Dämpfungselemente angeordnet werden (Abbildung 2.3).

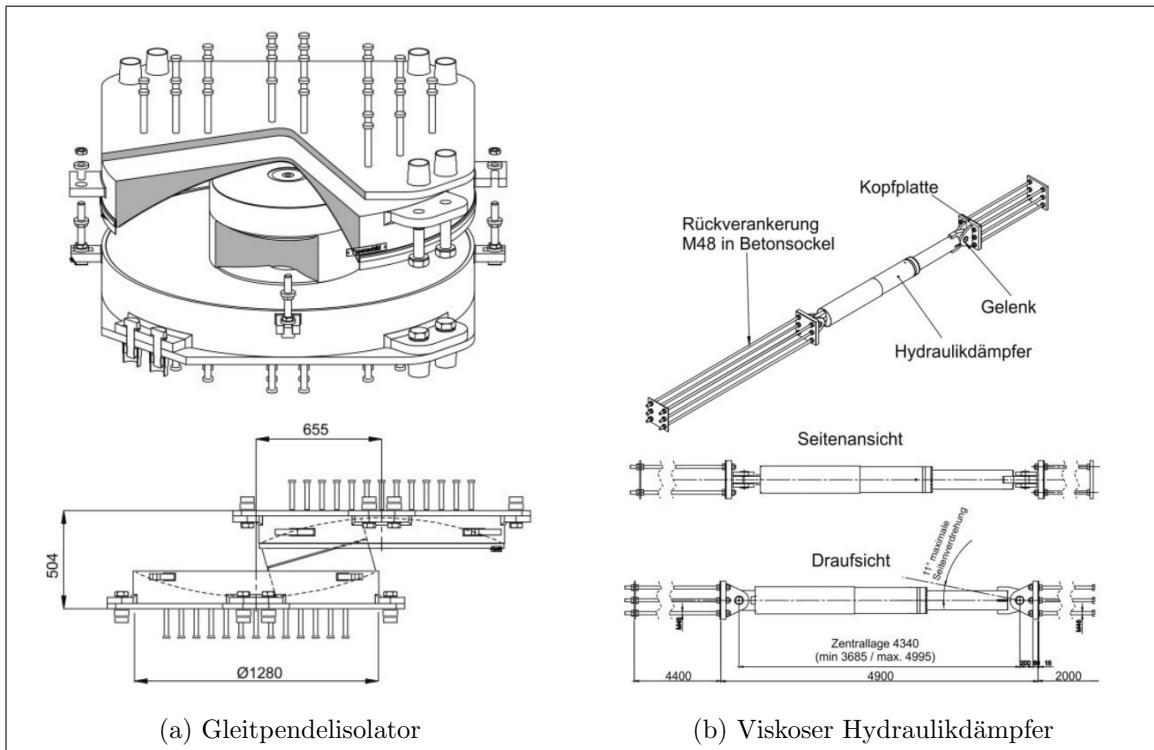


Abbildung 2.2: Bauform der Iolatoren (a) und Dämpfer (b) der Großen Moschee von Algerien [3]

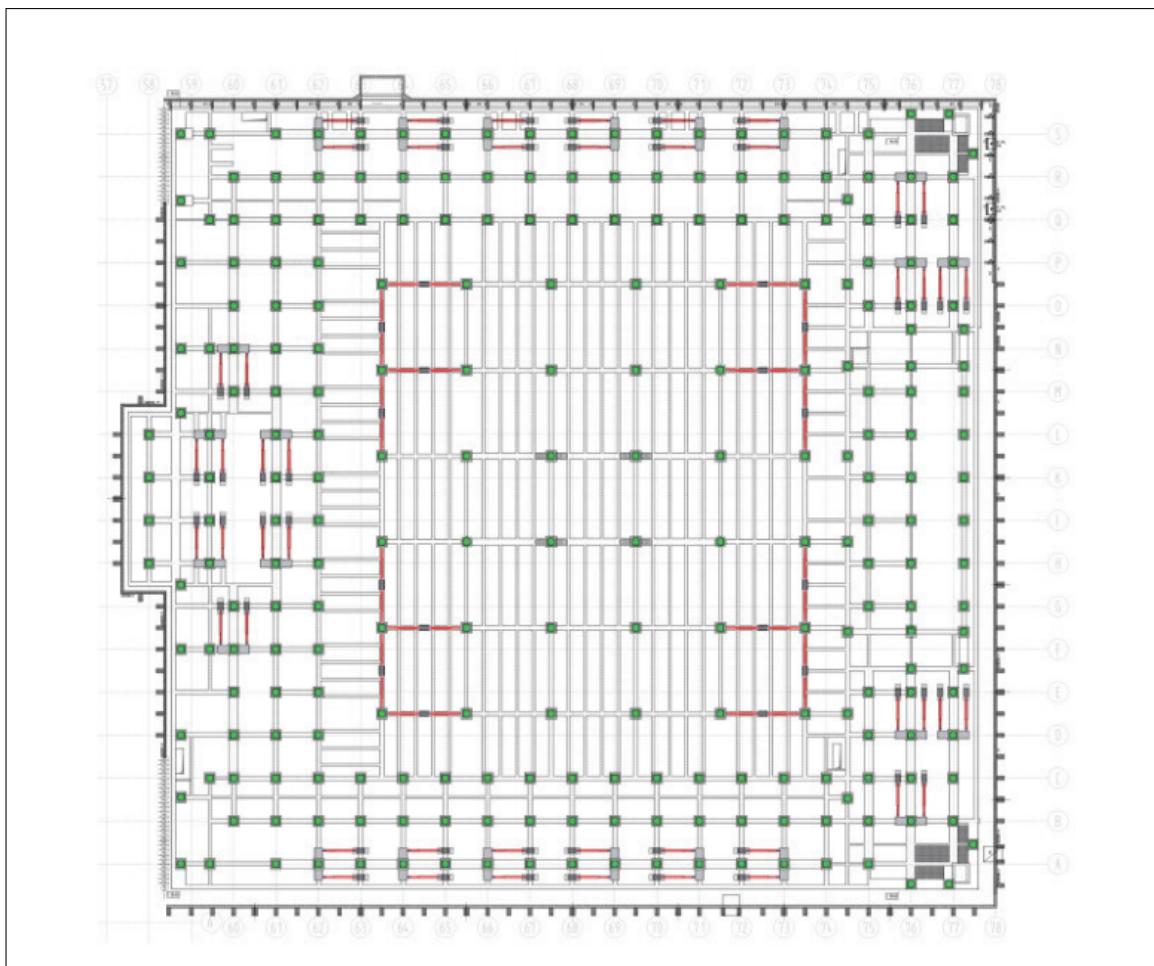


Abbildung 2.3: Verteilung der Iolatoren (grün) und Dämpfer (rot) im Grundriss [3]

2.2 Funktionsweise

Isolatoren stellen eine Ebene zwischen der Gründung und dem aufgehendem Bauwerk dar. Sie haben eine deutlich geringere Steifigkeit als die zu isolierende Struktur, wodurch zwar große Verschiebungen am Isolator auftreten (Abbildung 2.4), aber die Grundschatzzeit reduziert wird. Die relativen Verschiebungen der Struktur werden verringert und somit die Beschleunigungen und ebenso die Trägheitskräfte der Massen reduziert.

Die Dissipationsfähigkeit, Steifigkeit und Eigenfrequenz dieser Isolatoren kann über den Reibkoeffizienten, den Radius des Pendels und der Masse über dem Isolator beeinflusst werden.

2.2.1 Abstimmung

Damit der Isolator möglichst effektiv wirkt sollte das Ziel sein, die Masse direkt über dem Isolator möglichst groß zu wählen und die Steifigkeit zu reduzieren, wobei die aufgehende Struktur möglichst steif sein sollte. Dadurch sollte die Periode des Isolators T_I möglichst weit von der Periode der Struktur T_S entfernt sein. Ein Wert, der sich in der Praxis als angestrenswert erwiesen hat, ist $T_I \approx 3 \cdot T_S$.

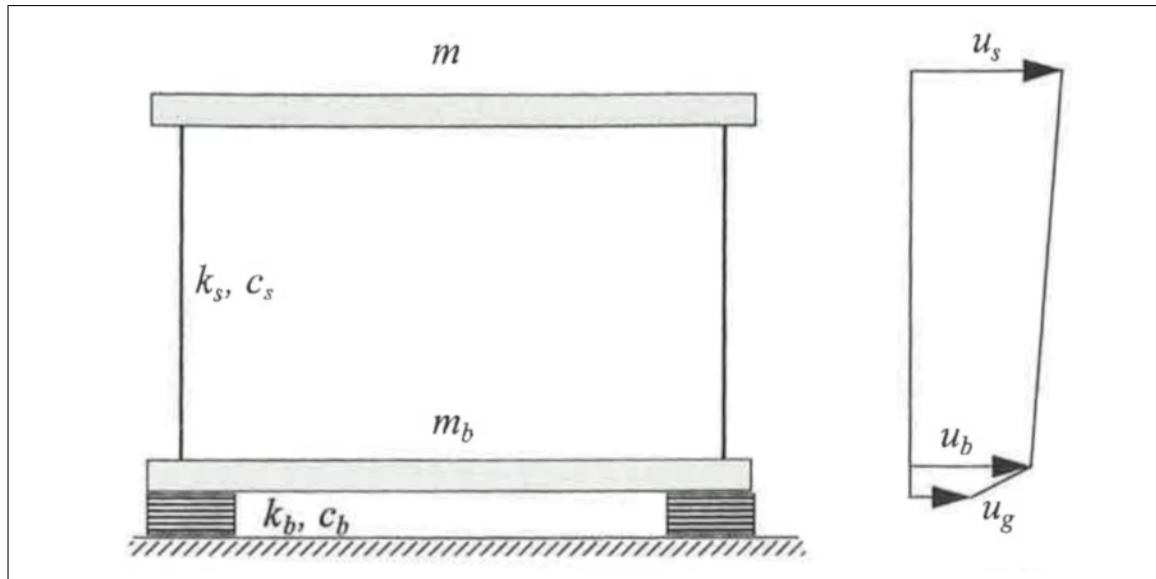


Abbildung 2.4: Verteilung der Verschiebungen an einem isolierten System [13]

2.2.2 Steifigkeit

Die effektive Steifigkeit kann über die Rückstell- und Reibkraft des Gleitpendellagers berechnet werden. Die Rückstellkraft wird durch die Anhebung der Vertikalkraft (Eigengewicht des Bauwerks) ausgelöst. [12]

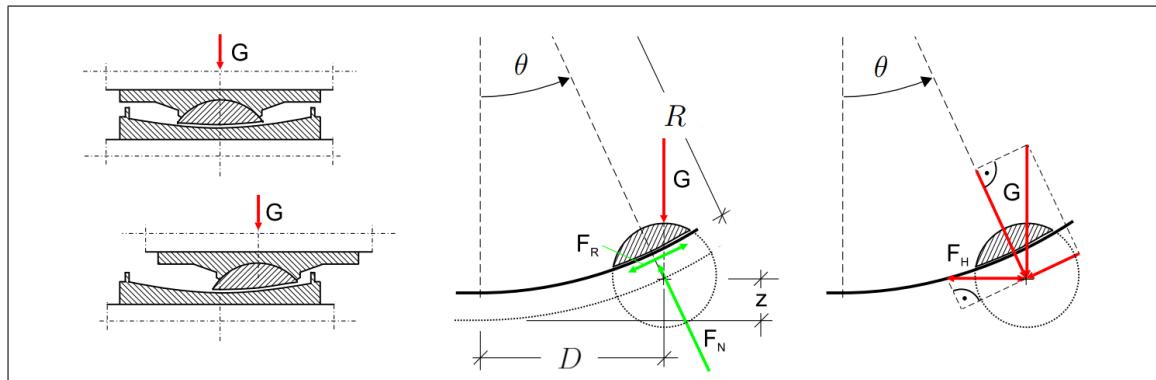


Abbildung 2.5: Schematischer Aufbau des Gleitpendellagers im zentriertem sowie im ausgelenkten Zustand [15]

$$F_{\text{Rück}} = \frac{GD}{R \cos \theta}$$

$$F_{\text{Reib}} = \mu G$$

G Vertikalkraft (Eigengewicht)

D Auslenkung

R Radius der Isolator-Gleitfläche

θ Winkel der Auslenkung

μ Reibungskoeffizient des Isolators

Für kleine Winkel mit $\cos \theta = 1$ ergibt sich die Steifigkeit zu:

$$\begin{aligned} k_{eff} &= \frac{F_{Rück} + F_{Reib}}{D} \\ &= \frac{G}{R} + \mu \frac{G}{D} \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2.3 Dämpfung

Die effektive Dämpfung ergibt sich aus der Fläche der Hystereseschleife und der effektiven Steifigkeit des Gleitpendellagers. [8][12]

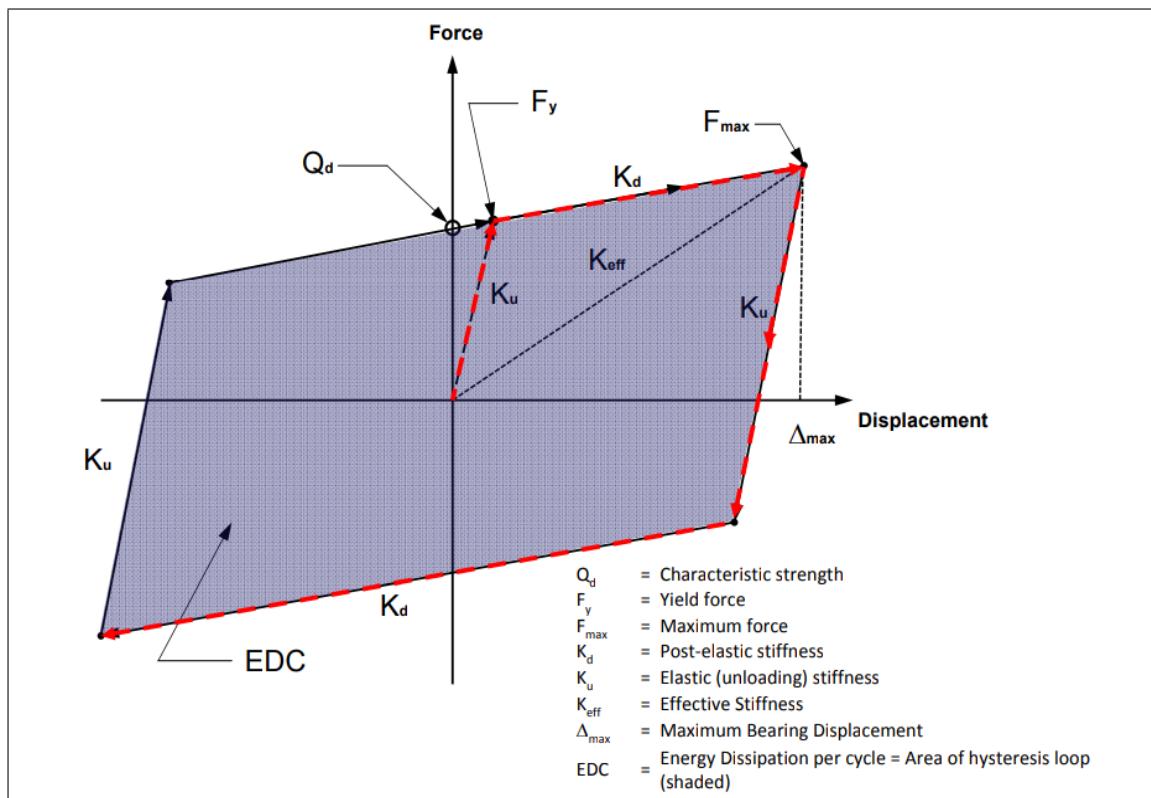


Abbildung 2.6: Hysterese-Zyklus [HDR Engineering Inc.]

$$\begin{aligned} \xi_{eff} &= \frac{4\mu GD}{2\pi k_{eff} D^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\mu R}{(D + \mu R)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3 Schwierigkeiten bei der Vordimensionierung

Für eine genaue Berechnung ist es sinnvoll, ein Gebäudemodell samt Isolator zu erstellen und mit dem Zeitschrittverfahren und Erdbebenzeitverläufen zu berechnen. Dies ist jedoch sehr aufwendig und bei einer Vordimensionierung nicht immer praktikabel, da sich Parameter noch ändern können. Ein Ansatz ist es, die Gesamtstruktur auf einen Einmassenschwinger mit der effektiven Masse aus Struktur (m_S) und Isolator (m_I) zu vereinfachen. Er beruht auf der Annahme, dass die Steifigkeit der Struktur sehr hoch ist und die des Isolators k_I die Eigenform somit dominiert [10]. Die Eigenfrequenz kann dann mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k_I}{m_S + m_I}} \quad (2.3)$$

bestimmt und die Spektralbeschleunigung $Sa(\frac{2\pi}{\omega})$ aus dem Antwortspektrum entnommen werden.

Soll allerdings eine Modalanalyse am Gebäude mittels EDV vorgenommen werden, wird ein isoliertes Antwortspektrum benötigt. So könnte man ein grobes Gebäudemodell erstellen und mit dem isolierten Antwortspektrum eine computergestützte Modalanalyse durchführen.

Kapitel 3

Berechnung des modifizierten Antwortspektrums

Hier soll nun ein Verfahren hergeleitet und anschließend mit zwei vereinfachten Verfahren verglichen werden.

Für die Erzeugung der Isolationsspektren wird hier das System um den Isolator erweitert und als Zweimassenschwinger (Abbildung 3.1) betrachtet, wobei der obere Schwinger die aufgehende Struktur (s) und der untere Schwinger den Isolator (i) samt des steifen Kellergeschosses beschreiben soll.

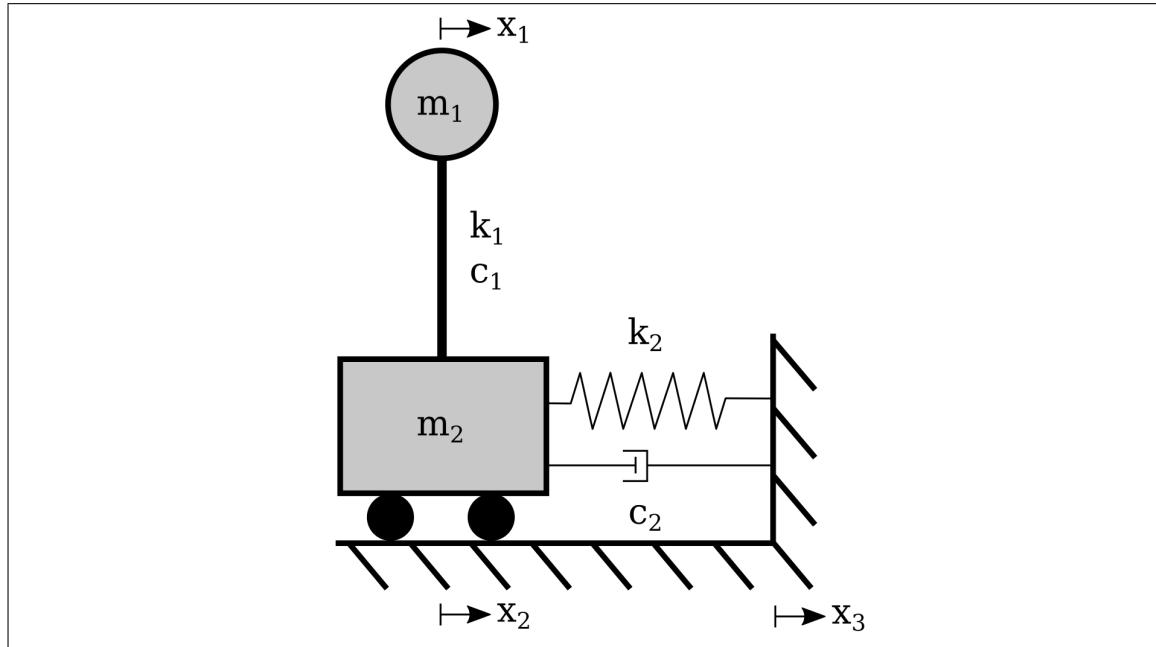


Abbildung 3.1: Voigt-Kelvin-Modell

3.1 Ansatz über die Übertragsfunktion

Im ersten Ansatz wurde die Möglichkeit untersucht, das Modell in zwei getrennte System zu zerlegen und getrennt zu betrachten. Die Annahme war, dass der Isolator lediglich als Filter auf das Antwortspektrum wirkt.

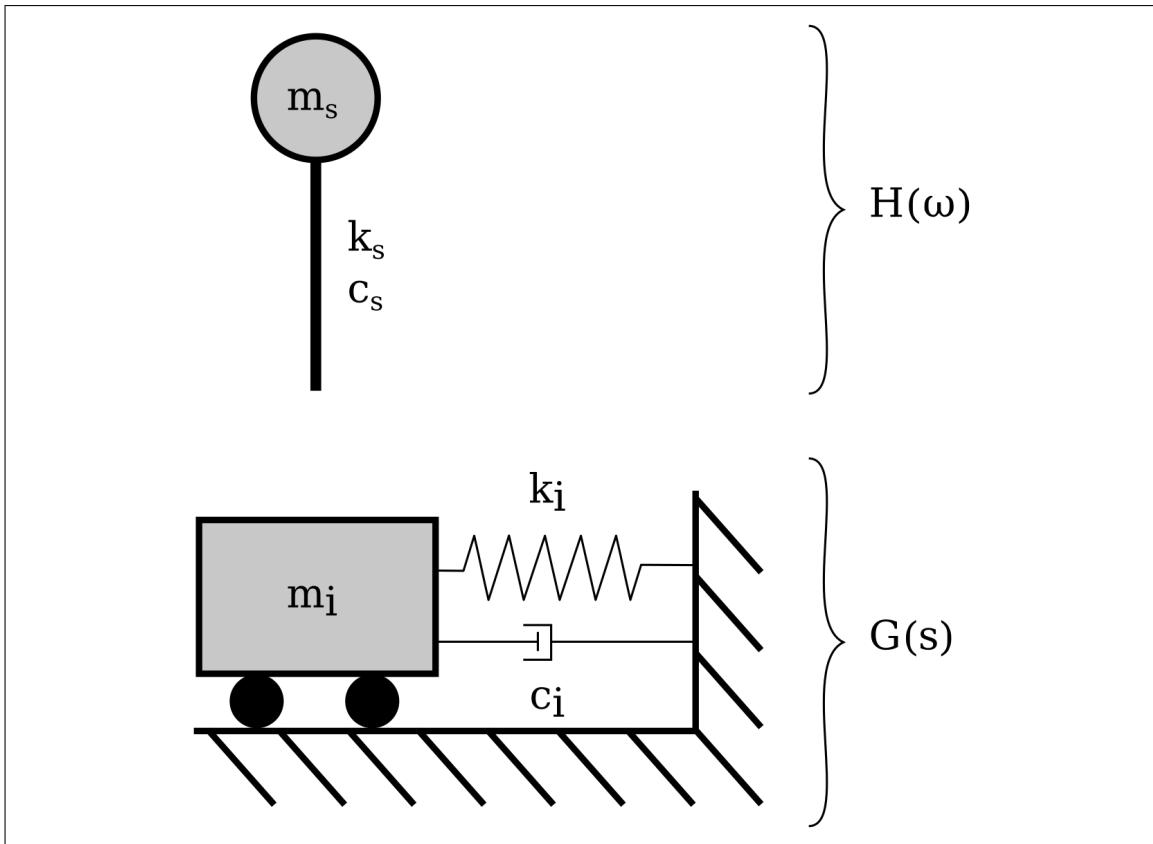


Abbildung 3.2: Komposition

Die Funktion $H(\omega)$ stellt hier das Antwortspektrum dar und $G(s)$ die Übertragungsfunktion des Isolators. Sie kann mittels der Laplace-Transformation

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (3.1)$$

aus der Bewegungsgleichung des Isolators [11]

$$c_i \cdot \dot{x}(t) + k_i \cdot x(t) = -m_i \cdot \ddot{x}(t) \quad (3.2)$$

für eine Kraftanregung zu

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_i \cdot s^2 + c_i \cdot s + k_i} \quad (3.3)$$

bestimmt (wobei $s = i\omega$) und das isolierte Antwortspektrum ($H(\omega) \cdot |G(s)|$) gewonnen werden, da der Betrag der Übertragungsfunktion den Amplitudengang angibt.

Allerdings war dieser Ansatz nicht zielführend, da (wie an den Bewegungsdifferentialgleichungen (Gleichung (3.18) und Gleichung (3.19)) erkennbar ist) die Systeme gekoppelt sind und nicht getrennt betrachtet werden können.

3.2 Vereinfachter Ansatz

Zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenzen des Zweimassenschwingers $\omega_{L,1,2}$ werden die Verhältniswerte

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1} \quad (3.4)$$

(3.5)

eingeführt. Damit lassen sich die Eigenkreisfrequenzen und Perioden des isolierten Systems bezogen auf die Eigenkreisfrequenz ω des nicht isolierten Bauwerks wie folgt berechnen [12] [9]

$$\omega_{L,1}^2 = \frac{1 + \alpha + \beta - \sqrt{(1 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2\beta} \omega^2 \quad (3.6)$$

$$\omega_{L,2}^2 = \frac{1 + \alpha + \beta + \sqrt{(1 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2\beta} \omega^2 \quad (3.7)$$

$$T_{L,1} = \frac{2\pi}{\omega_{L,1}} \quad T_{L,2} = \frac{2\pi}{\omega_{L,2}} \quad (3.8)$$

Die Komponenten der Eigenvektoren $\vec{\Phi}_{1,2}$ lassen sich über die Beiwerte α und β bestimmen.

$$r_1 = \frac{1 + \alpha - \beta + \sqrt{(1 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2} \quad (3.9)$$

$$r_2 = \frac{1 + \alpha - \beta - \sqrt{(1 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2} \quad (3.10)$$

Die Schwingungsformen lauten damit wie folgt und können normiert werden.

$$\vec{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\vec{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 1/r_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} 1/r_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Der Beteiligungs faktor der ersten Schwinungsf orm wird wie folgt definiert.

$$L_1 = \frac{\vec{\Phi}_1^T M \vec{I}}{\vec{\Phi}_1^T M \vec{\Phi}_1} \quad (3.13)$$

Da die Steifigkeit des Isolators idealerweise deutlich geringer als die der Struktur ist gilt $\alpha \rightarrow 0$, $\vec{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und L_2 wird klein, da die Schwingungsform durch die erste bestimmt wird. Damit lässt sich die maximale absolute Beschleunigung der Massen der ersten Schwingungsform des Zweimassenschwingers infolge einer Fußpunktanregung bestimmen.

$$\ddot{U}_{max} = \vec{\Phi}_1 L_1 S_a(T_{L,1}, \xi_{L,1}) \quad (3.14)$$

Für die Erzeugung des isolierten Antwortspektrums wird die Steifigkeit der Struktur variiert und die Eigenkreisfrequenz dieser ermittelt.

$$k_{1,i} = \frac{4\pi^2 m_1}{T_i^2} \quad (3.15)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (3.16)$$

Da die Antwortspektren im Eurocode auf eine Dämpfung von 5% normiert sind, wird unter der Annahme, dass die Dämpfung des Isolators dominiert, das Antwortspektrum abgemindert.

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi_2}} \quad (3.17)$$

3.3 Ansatz über die Transmissibilität

Die Beschleunigung aus dem Antwortspektrum wird in eine äquivalente harmonische Beschleunigungsanregung am Fußpunkt umgerechnet. Anschließend wird über die Bewegungsgleichungen (Gleichungen (3.20) and (3.21)) das Verhältnis der Amplituden von Fußpunktanregung zu harmonischer Schwingung an der oberen Masse m_1 hergeleitet. Da die Perioden im Antwortspektrum die Eigenfrequenz des zur Erzeugung verwendeten Einmassenschwingers darstellen, kann eine harmonische Anregung erzeugt werden, deren Erregerfrequenz der Eigenfrequenz des Einmassenschwingers entspricht. Zur Erzeugung eines isolierten Antwortspektrums soll dann die Steifigkeit k_1 variiert werden, sodass die Eigenfrequenz des oberen Systems der Periode des Antwortspektrums entspricht, und die Parameter des Isolators konstant bleiben. So kann ein Isolationsspektrum erzeugt werden, das für jede Periode der aufgehenden Struktur eine äquivalente Beschleunigungsantwort angibt.

3.3.1 Transmissibilität

Die Bewegungsdifferentialgleichungen für das in Abbildung 3.1 dargestellte System lauten:

$$\ddot{x}_1 m_1 = -(x_1 - x_2) k_1 - (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) c_1 \quad (3.18)$$

$$\ddot{x}_2 m_2 = (x_1 - x_2) k_1 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) c_1 - (x_2 - x_3) k_2 - (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) c_2 \quad (3.19)$$

Ansatz für harmonische Schwingung:

$$x_j = S_j e^{i\omega t} \quad \dot{x}_j = i\omega S_j e^{i\omega t} \quad \ddot{x}_j = -\omega^2 S_j e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 S_1 m_1 e^{i\omega t} = -(S_1 - S_2) e^{i\omega t} k_1 - (S_1 - S_2) i\omega c_1 e^{i\omega t} \quad (3.20)$$

$$-\omega^2 S_2 m_2 e^{i\omega t} = (S_1 - S_2)(k_1 + i\omega c_1) e^{i\omega t} - (S_2 - S_3)(k_2 + i\omega c_2) e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

Gleichung (3.20) nach S_2 umgestellt:

$$\begin{aligned} \omega^2 S_1 m_1 &= (S_1 - S_2)(k_1 + i\omega c_1) \\ \Rightarrow X_1 &= \frac{\omega^2 m_1}{k_1 + i\omega c_1} \\ S_2 &= S_1(1 - X_1) \end{aligned}$$

S_2 in Gleichung (3.21) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \omega^2 m_2 S_1 &= -(S_1 - S_1(1 - X_1))(k_1 + i\omega c_1) + (S_1(1 - X_1) - S_3)(k_2 + i\omega c_2) \\ \Rightarrow X_2 &= \frac{\omega^2 m_2}{k_2 + i\omega c_2} \\ S_1(1 - X_1)X_2 &= S_1(1 - X_1) - S_3 - S_1 X_1 \frac{k_1 + i\omega c_1}{k_2 + i\omega c_2} \\ \Rightarrow X_{12} &= \frac{\omega^2 m_1}{k_2 + i\omega c_2} \\ S_1(1 - X_1)(X_2 - 1) &= S_3 + S_1 X_{12} \\ S_3 &= S_1[(1 - X_1)(1 - X_2) - X_{12}] \end{aligned}$$

Mit den komplexwertigen Transmissionskoeffizienten X_1 , X_2 und X_{12} ergibt sich die Transmissibilität aus dem Betrag des Verhältnisses von S_1 zu S_3 .

$$VT = \left| \frac{S_1}{S_3} \right| = \left| \frac{1}{[(1 - X_1)(1 - X_2) - X_{12}]} \right| \quad (3.22)$$

Ein Hindernis stellen jedoch noch die Dämpfungsbeiwerte c_1 und c_2 dar. Die Gleichungen (3.18) und (3.19) können nicht entkoppelt werden und daher kann das vom Einmassenschwinger gewohnte Lehr'sche Dämpfungsmaß hier nicht angewendet werden. Ein Ansatz, der hier untersucht werden soll, ist die steifigkeits- und massenproportionale modale Dämpfung. Sie wird auch als Rayleigh-Dämpfung bezeichnet. [12]

3.3.2 Rayleigh-Dämpfung

Bei diesem Ansatz soll eine Proportionalität zwischen der Dämpfungsmaatrix C und den generalisierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen M^* und K^* verwendet werden.

$$C^* = \alpha M^* + \beta K^*$$

Wobei α und β die Beiwerte der Rayleigh-Dämpfung sind. αM kann als äußere und der Term βK als innere Dämpfung verstanden werden.

Die Bestimmungsgleichungen der Beweirte lauten wie folgt. [5]

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2\omega_1^* \omega_2^* (\xi_2 \omega_2^* - \xi_1 \omega_1^*)}{\omega_2^{*2} - \omega_1^{*2}} \\ \beta &= \frac{2(\xi_1 \omega_2^* - \xi_2 \omega_1^*)}{\omega_2^{*2} - \omega_1^{*2}}\end{aligned}$$

Um die Eigenkreisfrequenzen ω_1^* und ω_2^* zu erhalten, werden zunächst die Eigenkreisfrequenzen am ungedämpften System berechnet und die Eigenvektoren der zugehörigen Eigenformen bestimmt.

Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(k_2 + k_1)m_1 + k_1 m_2 \pm \sqrt{((k_2 + k_1)m_1 + k_1 m_2)^2 - 4m_2 m_1 k_2 k_1}}{2m_2 m_1}$$

Eigenvektoren des ungedämpften Systems:

$$\vec{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad \vec{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\varepsilon_1 = \frac{k_2 + k_1 - m_2 \omega_1^2}{k_1} \quad \varepsilon_2 = \frac{k_2 + k_1 - m_2 \omega_2^2}{k_1}$$

Nach Betragsgröße normierte Eigenvektoren des ungedämpften Systems:

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_1^2}} & \varphi_{12} &= \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_2^2}} \\ \varphi_{21} &= \varepsilon_1 \varphi_{11} & \varphi_{22} &= \varepsilon_2 \varphi_{12}\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Eigenvektoren können die generalisierten Massen und Steifigkeiten ermittelt werden und damit die Eigenkreisfrequenzen.

Generalisierte Massen:

$$\begin{aligned} m_2^* &= \vec{\Phi}_1^T M \vec{\Phi}_1 \\ &= \varphi_{11}^2 m_2 + \varphi_{21}^2 m_1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} m_1^* &= \vec{\Phi}_2^T M \vec{\Phi}_2 \\ &= \varphi_{12}^2 m_2 + \varphi_{22}^2 m_1 \end{aligned}$$

Generalisierte Steifigkeiten:

$$\begin{aligned} k_2^* &= \vec{\Phi}_1^T K \vec{\Phi}_1 \\ &= \varphi_{11}^2 (k_2 + k_1) - 2\varphi_{21}\varphi_{11}k_1 + \varphi_{21}^2 k_1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} k_1^* &= \vec{\Phi}_2^T K \vec{\Phi}_2 \\ &= \varphi_{12}^2 (k_2 + k_1) - 2\varphi_{22}\varphi_{12}k_1 + \varphi_{22}^2 k_1 \end{aligned}$$

Eigenkreisfrequenzen der zwei Einmassenschwinger:

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{k_2^*}{m_2^*}} \quad \omega_2^* = \sqrt{\frac{k_1^*}{m_1^*}}$$

Damit ergeben sich die Dämpfungsbeiwerte der Rayleigh-Dämpfung

$$\begin{aligned} c_1^* &= \alpha m_1^* + \beta k_1^* \\ c_2^* &= \alpha m_2^* + \beta k_2^* \end{aligned}$$

und die gedämpfte Eigenfrequenz der ersten, durch den Isolator gesteuerten, Eigenform

$$\begin{aligned} \omega_{1d} &= \omega_1 \sqrt{1 - \xi_2^2} \\ T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_{1d}} \end{aligned}$$

Das System wird nun aus der Modal- zurück in die Normalform transformiert um die Dämpfungsmatrix C zu erhalten. [2]

$$C = \vec{\Phi}^{-T} C^* \vec{\Phi}^{-1}$$

Die Transmissibilität kann damit bestimmt werden.

$$VT(m_2, k_2, c_2, m_1, k_1, c_1) \tag{3.23}$$

3.3.3 Erzeugung des isolierten Antwortspektrums

Das isolierte Antwortspektrum kann aus dem elastischen Antwortspektrum erlangt werden. Für jede Periode T_i wird die Steifigkeit der aufgehenden Struktur berechnet, wobei die restlichen Parameter konstant bleiben.

$$k_{1,i} = m_1 \left(\frac{2\pi}{T_i} \right)^2 \quad (3.24)$$

Damit können die Transmissibilität VT , die gedämpfte erste Eigenkreisfrequenz ω_{1d}

$$\omega_{1d} = \omega_1^* \sqrt{1 - \xi_2^2} \quad (3.25)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{1d}} \quad (3.26)$$

und die zugehörige äquivalente Amplitude der Beschleunigung der Fußpunktanregung

$$S_{a,x_3} = Sa(T_1) \quad (3.27)$$

ermittelt werden. Die Ordinate des isolierten Antwortspektrums beträgt dann

$$S_{a,isoliert} = S_{a,x_3} \cdot VT \quad (3.28)$$

Kapitel 4

Vergleich der Ansätze am Beispiel

Die Ansätze sollen anhand eines konkreten Beispiels verglichen werden. Hierzu werden die Werte aus [9] Kapitel 11.2.3 verwendet. Die Parameter des Systems lauten:

$$D = 0.35 \text{ m}$$

$$\mu = 0.04$$

$$m_1 = 2486.7 \text{ t}$$

$$m_2 = 1619.5 \text{ t}$$

$$R = 2.5 \text{ m}$$

Es soll ein Antwortspektrum mit folgenden Eckperioden und Bodenbeschleunigung verwendet werden.

$$T_B = 0.4 \text{ s}$$

$$T_C = 1.6 \text{ s}$$

$$T_D = 2.0 \text{ s}$$

$$a_g = 3.924 \text{ m/s}^2$$

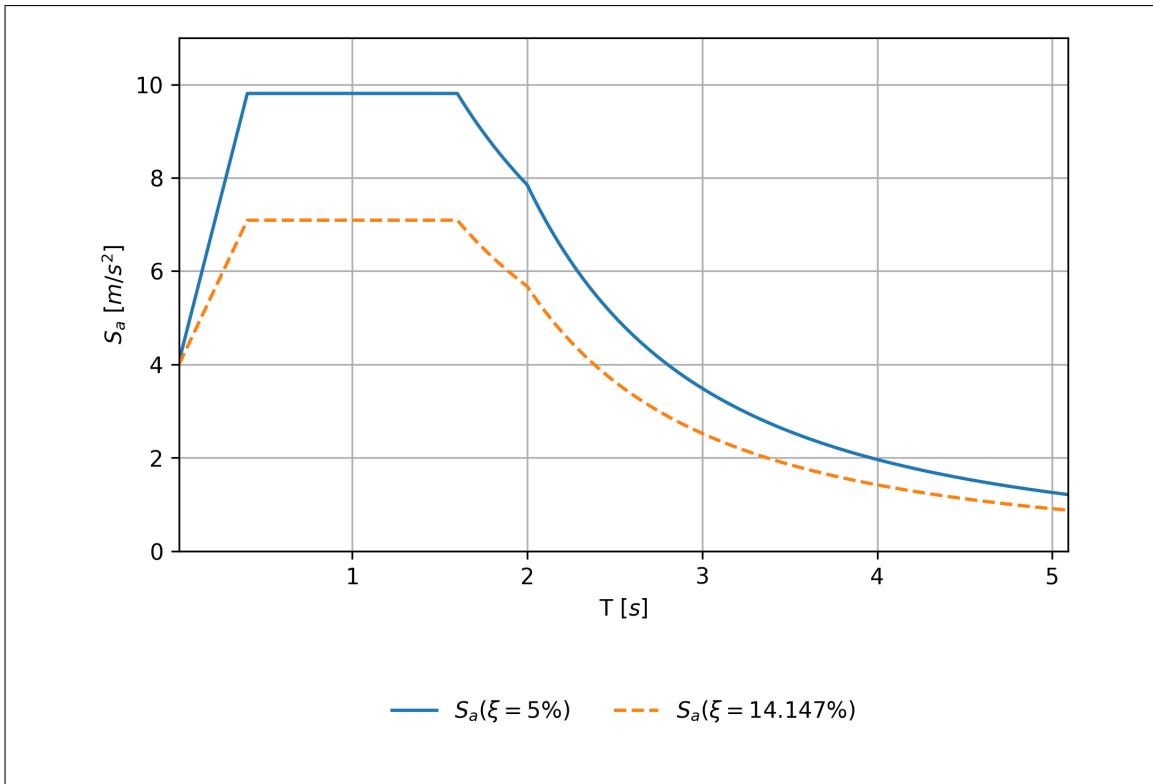


Abbildung 4.1: Antwortspektrum

Die Steifigkeit k_2 ergibt sich aus der effektiven Steifigkeit des Isolators nach Gleichung (2.1)

$$k_2 = k_{eff} = \frac{G}{R} + \mu \frac{G}{D} = \frac{41062kN}{2.5m} + 0.04 \cdot \frac{41062kN}{0.35m} = 21117kN/m$$

Die Dämpfung ξ_1 wird mit 5% angenommen und die effektive Dämpfung des Isolators ξ_2 nach Gleichung (2.2) bestimmt.

$$\xi_2 = \xi_{eff} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu R}{(D + \mu R)} = \frac{2}{\pi} \frac{0.04 \cdot 2.5m}{(0.35m + 0.04 \cdot 2.5m)} \approx 0.14147$$

Hier sollen zunächst die Ergebnisse für eine Periode der aufgehenden Struktur von $T = 1s$ betrachtet werden. Daraus ergibt sich eine Steifigkeit k_1 von

$$k_1 = m_1 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = 2486.7t \cdot \left(\frac{2\pi}{1s} \right)^2 = 98170kN/m$$

4.1 Betrachtung als effektiver Einmassenschwinger

Wie in Abschnitt 2.3 erwähnt kann das System unter der Annahme, dass der Isolator die Eigenform dominiert (Abbildung 2.4), auch als verinfachter Einmassenschwinger modelliert werden.

Die Eigenperiode beträgt dann

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{21117kN/m}{4106.2t}} \approx 2.267\frac{1}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2.267\frac{1}{s}} \approx 2.77s$$

Für eine Periode von $T = 2.77s$ im Bereich $T_D \leq T$ und unter der Annahme, dass auch die Dämpfung des Isolators dominiert, $\eta = \sqrt{10/(5 + 14.147)} \approx 0.723$ beträgt die Spektralbeschleunigung

$$\begin{aligned} S_a(T) &= a_g \eta 2.5 \frac{T_C T_D}{T^2} \\ &= 3.924m/s^2 \cdot 0.723 \cdot 2.5 \cdot \frac{1.6s \cdot 2.0s}{(2.77s)^2} \\ &= \underline{\underline{2.958m/s^2}} \end{aligned}$$

4.2 Vereinfachtes Verfahren

Im ersten Schritt wird die Eigenkreisfrequenz des nicht isolierten Bauwerks ω und die Verhältniswerte α und β ermittelt.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{98170kN/m}{2486.7t}} = 6.2832\frac{1}{s}$$

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1} = \frac{21117kN/m}{98170kN/m} = 0.2151 \quad \beta = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1619.5t}{2486.7t} = 0.65$$

Damit lassen sich die Eigenkreisfrequenzen und Perioden des isolierten Systems bestimmen.

$$\begin{aligned} \omega_{L,1}^2 &= \frac{1 + \alpha + \beta - \sqrt{(1 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2\beta} \omega^2 \\ &= \frac{1 + 0.215 + 0.65 - \sqrt{(1 + 0.215 + 0.65)^2 - 4 \cdot 0.215 \cdot 0.65}}{2 \cdot 0.65} \cdot (6.2832\frac{1}{s})^2 \\ &= 4.7504 \Rightarrow \omega_{L,1} = 2.18\frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$T_{L,1} = \frac{2\pi}{\omega_{L,1}} = \frac{2\pi}{2.18\frac{1}{s}} = 2.882s$$

Für die Periode von $T = 2.77s$ im Bereich $T_D \leq T$ und der Dämpfung des Isolators mit $\eta = \sqrt{10/(5 + 14.147)} \approx 0.723$ beträgt die Spektralbeschleunigung

$$\begin{aligned} S_a(T) &= a_g \eta 2.5 \frac{T_C T_D}{T^2} \\ &= 3.924m/s^2 \cdot 0.723 \cdot 2.5 \cdot \frac{1.6s \cdot 2.0s}{(2.882s)^2} \\ &= 2.733m/s^2 \end{aligned}$$

Um dann die maximale Beschleunigung zu erhalten, wird noch der erste Eigenvektor und Beteiligungsfaktor berücksichtigt.

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + \alpha - \beta + \sqrt{(1 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2} \\ &= \frac{1 + 0.215 - 0.65 + \sqrt{(1 + 0.215 + 0.65)^2 - 4 \cdot 0.215 \cdot 0.65}}{2} \\ &= 1.137 \end{aligned}$$

$$\vec{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 1/r_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/1.137 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8795 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \frac{\vec{\Phi}_1^T M \vec{I}}{\vec{\Phi}_1^T M \vec{\Phi}_1} = \frac{(0.8795 \quad 1) \begin{bmatrix} 1619.5t & 0t \\ 0t & 2486.7t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(0.8795 \quad 1) \begin{bmatrix} 1619.5t & 0t \\ 0t & 2486.7t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.8795 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1.0458$$

$$\ddot{U}_{max} = \vec{\Phi}_1 L_1 S_a(T_{L,1}, \xi_{L,1}) = 1.0 \cdot 1.0458 \cdot 2.733m/s^2 = \underline{\underline{2.858m/s^2}}$$

4.3 Verfahren der Transmissibilität

Zunächst werden die Dämpfungsbeiwerte mit dem Ansatz der Rayleigh-Dämpfung ermittelt. Dafür werden die Eigenkreisfrequenzen des ungedämpften Systems benötigt.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(k_2 + k_1)m_1 + k_1m_2 \pm \sqrt{((k_2 + k_1)m_1 + k_1m_2)^2 - 4m_2m_1k_2k_1}}{2m_2m_1}$$

mit $(k_2 + k_1)m_1 + k_1m_2 = (21117 + 98170) \cdot 2486.7 + 98170 \cdot 1619.5 = 455568212.9$
und $4m_2m_1k_2k_1 = 4 \cdot 1619.5 \cdot 2486.7 \cdot 21117 \cdot 98170 = 3.3370719 \cdot 10^{14}$

$$\begin{aligned} &= \frac{455568212.9 \pm \sqrt{((21117 + 98170) \cdot 2486.7 + 98170 \cdot 1619.5)^2 - 3.33.. \cdot 10^{14}}}{2 \cdot 1619.5 \cdot 2486.7} \\ \Rightarrow \omega_1 &\approx 2.179 \frac{1}{s} \\ \Rightarrow \omega_2 &\approx 10.410 \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Damit können die normierten Komponenten der Eigenvektoren bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{k_2 + k_1 - m_2\omega_1^2}{k_1} \\ &= \frac{21117kN/m + 98170kN/m - 1619.5t \cdot (2.179 \frac{1}{s})^2}{98170kN/m} \\ &= 1.136 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{k_2 + k_1 - m_2\omega_2^2}{k_1} \\ &= \frac{21117kN/m + 98170kN/m - 1619.5t \cdot (10.410 \frac{1}{s})^2}{98170kN/m} \\ &= -0.572 \end{aligned}$$

$$\varphi_{11} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_1^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1.136^2}} \approx 0.660$$

$$\varphi_{21} = \varepsilon_1 \varphi_{11} = 1.136 \cdot 0.660 \approx 0.750$$

$$\varphi_{12} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (-0.572)^2}} \approx 0.867$$

$$\varphi_{22} = \varepsilon_2 \varphi_{12} = -0.572 \cdot 0.867 \approx -0.497$$

Die generalisierten Massen und Steifigkeiten sind dann

$$\begin{aligned}m_2^* &= \varphi_{11}^2 m_2 + \varphi_{21}^2 m_1 = 0.660^2 \cdot 1619.5t + 0.750^2 \cdot 2486.7t \\&= 2108.3t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_1^* &= \varphi_{12}^2 m_2 + \varphi_{22}^2 m_1 = 0.867^2 \cdot 1619.5t + -0.497^2 \cdot 2486.7t \\&= 1833.8t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_2^* &= \varphi_{11}^2(k_2 + k_1) - 2\varphi_{21}\varphi_{11}k_1 + \varphi_{21}^2k_1 \\&= 0.660^2 \cdot (21117kN/m + 98170kN/m) - 2 \cdot 0.750 \cdot 0.660 \cdot 98170kN/m \\&\quad + 0.750^2 \cdot 98170kN/m \\&= 10013.4kN/m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_1^* &= \varphi_{12}^2(k_2 + k_1) - 2\varphi_{22}\varphi_{12}k_1 + \varphi_{22}^2k_1 \\&= 0.867^2 \cdot (21117kN/m + 98170kN/m) - 2 \cdot -0.497 \cdot 0.867 \cdot 98170kN/m \\&\quad + -0.497^2 \cdot 98170kN/m \\&= 198759.0kN/m\end{aligned}$$

und die Eigenkreisfrequenzen der zwei Einmassenschwinger

$$\begin{aligned}\omega_1^* &= \sqrt{\frac{k_2^*}{m_2^*}} = \sqrt{\frac{10013.4kN/m}{2108.3t}} \\&= 2.179 \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2^* &= \sqrt{\frac{k_1^*}{m_1^*}} = \sqrt{\frac{198759.0kN/m}{1833.8t}} \\&= 10.410 \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Dämpfungsbeiwerte der Rayleigh-Dämpfung

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2\omega_1^*\omega_2^*(\xi_2\omega_2^* - \xi_1\omega_1^*)}{\omega_2^{*2} - \omega_1^{*2}} \\ &= \frac{2 \cdot 2.179\frac{1}{s} \cdot 10.410\frac{1}{s} \cdot (0.14147 \cdot 10.410\frac{1}{s} - 0.05 \cdot 2.179\frac{1}{s})}{(10.410\frac{1}{s})^2 - (2.179\frac{1}{s})^2} \\ &\approx 0.597\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{2(\xi_1\omega_2^* - \xi_2\omega_1^*)}{\omega_2^{*2} - \omega_1^{*2}} \\ &= \frac{2 \cdot (0.05 \cdot 10.410\frac{1}{s} - 0.14147 \cdot 2.179\frac{1}{s})}{(10.410\frac{1}{s})^2 - (2.179\frac{1}{s})^2} \\ &\approx 0.004\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_1^* &= \alpha m_1^* + \beta k_1^* = 0.597 \cdot 1833.8t + 0.004 \cdot 198759.0kN/m \\ &\approx 1909.1 \\ c_2^* &= \alpha m_2^* + \beta k_2^* = 0.597 \cdot 1833.8t + 0.004 \cdot 10013.4kN/m \\ &\approx 1300.0\end{aligned}$$

Rücktransformation aus der Modalform

$$\begin{aligned}C &= \vec{\Phi}^{-T} C^* \vec{\Phi}^{-1} \\ \Rightarrow c_1 &= 867538.6 \\ \Rightarrow c_2 &= 334635.2\end{aligned}$$

und die Eigenfrequenz der ersten, durch den Isolator gesteuerten, Eigenform

$$\begin{aligned}\omega_{1d} &= \omega_1 \sqrt{1 - \xi_2^2} = 2.179\frac{1}{s} \cdot \sqrt{1 - 0.14147^2} \\ &\approx 2.157\frac{1}{s} \\ T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_{1d}} = \frac{2\pi}{2.157\frac{1}{s}} \\ &\approx 2.912s\end{aligned}$$

Mit der Periode lässt sich bereits S_a aus dem Antwortspektrum (mit $\eta = 1$) ermitteln.

$$\begin{aligned}
 S_a(T) &= a_g \eta 2.5 \frac{T_C T_D}{T^2} \\
 &= 3.924 m/s^2 \cdot 2.5 \cdot \frac{1.6s \cdot 2.0s}{(2.912s)^2} \\
 &= 3.702 m/s^2
 \end{aligned}$$

Die Transmissibilität kann nun mit den Dämpfungsbeiwerten der Rayleigh-Dämpfung bestimmt werden. Dazu werden zuerst die drei komplexwertigen Transmissionskoeffizienten (mit $\omega = \omega_{1d}$) berechnet.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{\omega^2 m_1^*}{k_1^* + i\omega c_1^*} = \frac{(2.157 \frac{1}{s})^2 \cdot 1833.8t}{198759.0 kN/m + i \cdot 2.157 \frac{1}{s} \cdot 867538.6} \\
 &\approx 0.0003 - 0.006i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \frac{\omega^2 m_2^*}{k_2^* + i\omega c_2^*} = \frac{(2.157 \frac{1}{s})^2 \cdot 2108.3t}{10019.4 kN/m + i \cdot 2.157 \frac{1}{s} \cdot 334635.2} \\
 &\approx 0.0003 - 0.010i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{12} &= \frac{\omega^2 m_1^*}{k_2^* + i\omega c_2^*} = \frac{(2.157 \frac{1}{s})^2 \cdot 1833.8t}{10019.4 kN/m + i \cdot 2.157 \frac{1}{s} \cdot 334635.2} \\
 &\approx 0.0004 - 0.016i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 VT &= \left| \frac{1}{(1 - X_1)(1 - X_2) - X_{12}} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{(1 - (0.0003 - 0.006i)) \cdot (1 - (0.0003 - 0.010i)) - (0.0004 - 0.016i)} \right| \\
 &\approx 1.0006
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{a,isoliert} &= S_a \cdot VT = 3.702 m/s^2 \cdot 1.0006 \\
 &= \underline{\underline{3.704 m/s^2}}
 \end{aligned}$$

4.4 Vergleich der Ergebnisse

Einmassenschwinger	Vereinfacht	Transmissibilität
2.958 m/s ²	2.858 m/s ²	3.704 m/s ²

Tabelle 4.1: Vergleich der Beschleunigungen aus den drei Ansätzen

Es zeigt sich, dass jeder Ansatz leicht andere Werte liefert. Die Streuung beträgt $\approx 22\%$. Um einen besseren Einblick zu erhalten, sollen die gesamten Spektren betrachtet werden. Dafür wird k_1 in Abhängigkeit von der Periode T variiert. Die Spektren sind in Abbildung 4.3 dargestellt und zeigen, dass im interessanten Bereich der Perioden niedriger als die des Isolators eine Isolation grundlegend abgebildet werden konnte.

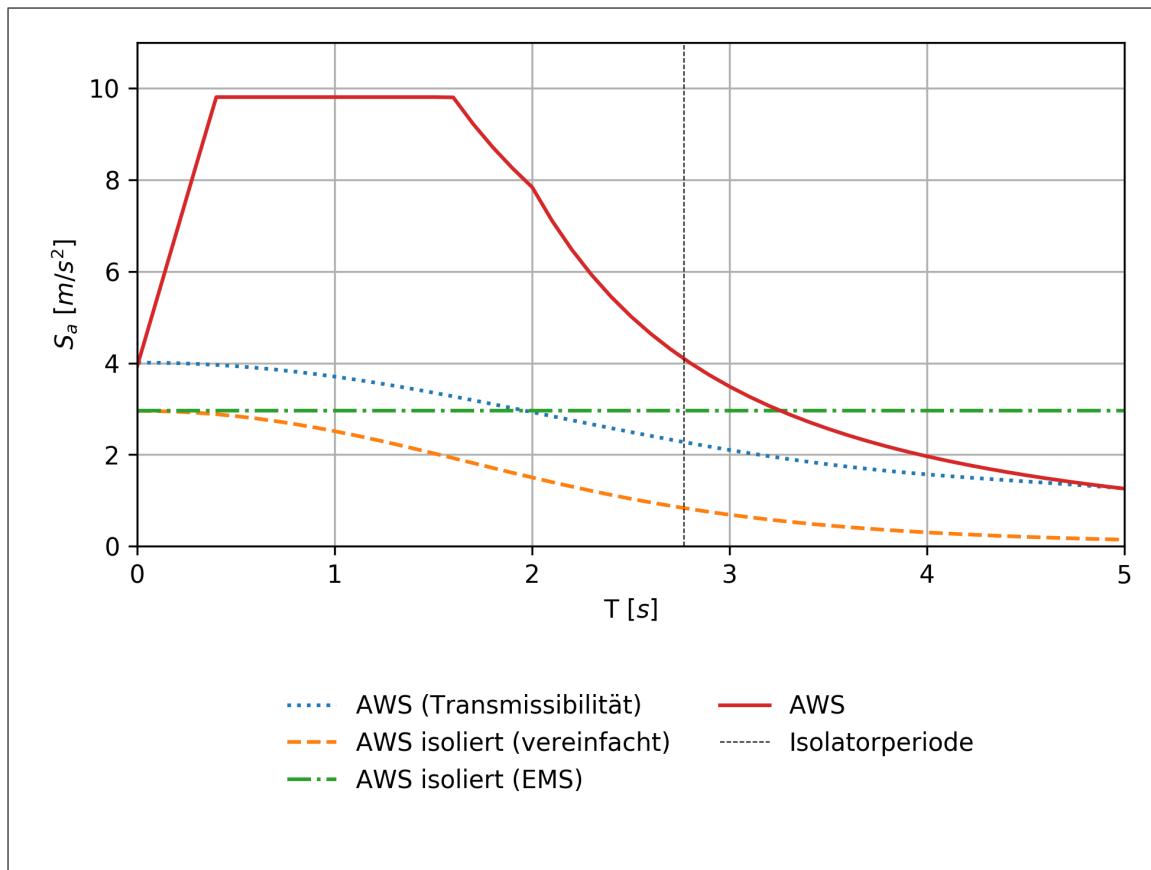


Abbildung 4.2: Isolationsspektren der drei Ansätze

Wie zu erwarten war, ist die Modellierung als effektiver Einmassenschwinger nur eine Näherung. Die Ergebnisse über die Transmissibilität liefern durchweg größere Beschleunigungen als der vereinfachte Ansatz, wobei diese Differenz in der Nähe der Isolatorperiode sich stärker ausprägt. Auch ist anzumerken, dass die Isolationsspektren geglättet sind, da sie aus dem ebenfalls geglätteten Antwortspektrum berechnet wurden.

Um auch einen Vergleich mit den numerisch ermittelten Werten aus [9] zu machen, wurde das Beispiel in Kapitel 11.3 untersucht. Mit den angegebenen Massen und der Isolatorsteifigkeit stimmt jedoch die Periode des Isolators, die mit $T = 2.251\text{s}$ angeben wurde, nicht überein.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\pi}{\sqrt{(k_2/(m_2 + m_1))}} \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{(32000/(2486.7t + 1619.5t))}} \\
 &= 2.347s \neq 2.251s
 \end{aligned}$$

Die Vermutung liegt nahe, dass für m_1 die Masse aus dem vorrangingen Beispiel in den Berechnungen verwendet wurde und es sich in den Angaben um einen „Zahlendreher“ handelt.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\pi}{\sqrt{(32000/(2486.7t + 1619.5t))}} \\
 &= 2.251s = 2.251s
 \end{aligned}$$

Mit dieser bestätigten Vermutung wird weiterhin mit $m_1 = 2486.7t$ gerechnet. Aus der angegebenen Steifigkeit für den Isolator von $k_2 = 32000kN/m$ lässt sich der verwendete Radius und das Dämpfungsmaß bestimmen.

$$\begin{aligned}
 k_2 &= \frac{G}{R} + \mu \frac{G}{D} \\
 &= \frac{41062kN}{R} + 0.05 \cdot \frac{41062kN}{0.325m} = 32000kN/m \Rightarrow R \approx 1.599m
 \end{aligned}$$

$$\xi_2 = \xi_{eff} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu R}{(D + \mu R)} = \frac{2}{\pi} \frac{0.05 \cdot 1.599m}{(0.325m + 0.05 \cdot 1.599m)} \approx 0.1257$$

$$D = 0.325 \text{ m}$$

$$\mu = 0.05$$

$$m_1 = 2486.7 \text{ t}$$

$$m_2 = 1619.5 \text{ t}$$

$$k_2 = 32000 \text{ kN/m}$$

$$R = 1.599 \text{ m}$$

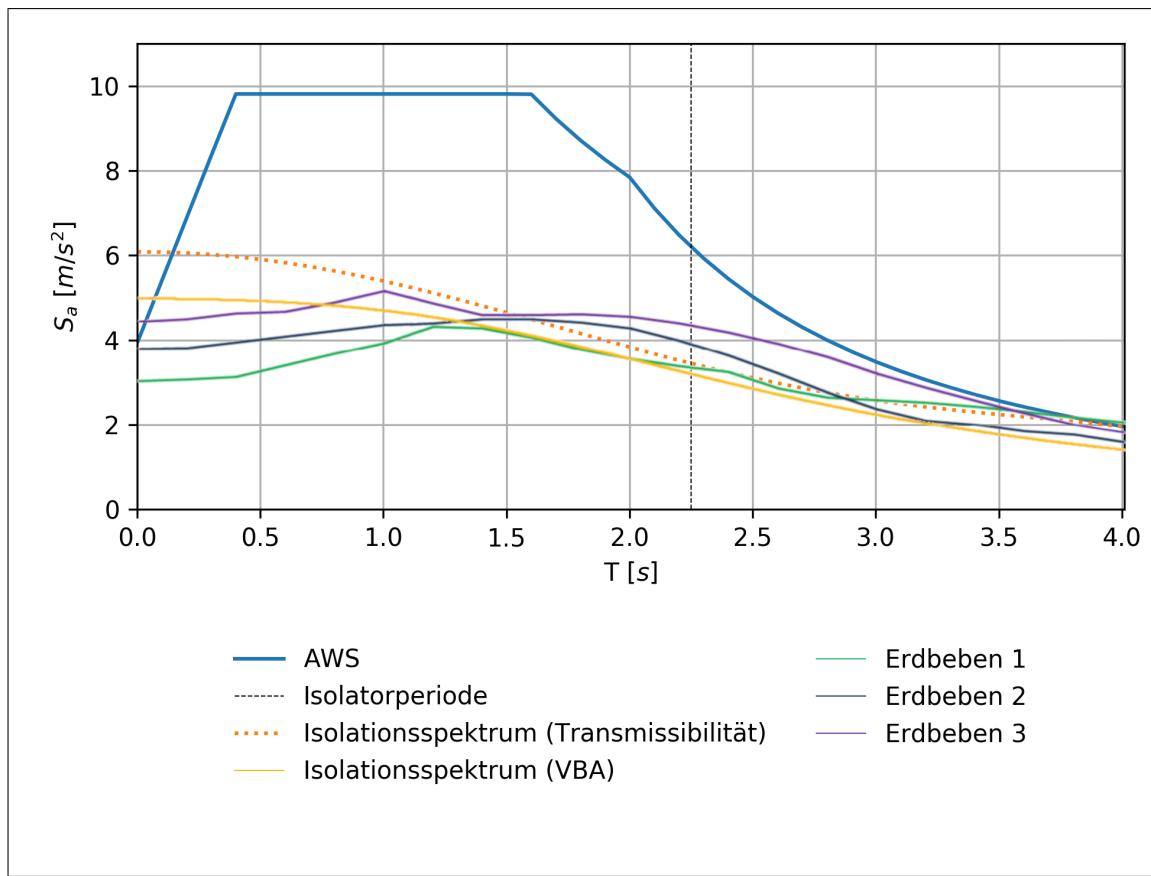


Abbildung 4.3: Vergleich der Isolationsspektren aus Zeitschrittberechnung [9], vereinfachten Ansatz und Ansatz der Transmissibilität

Hier wird deutlich, dass der vereinfachte Ansatz auf der unsicheren Seite liegt. Bei dem Ansatz der Transmissibilität liegt die Vermutung nahe, dass die Bestimmung der Beschleunigung am gedämpften Antwortspektrum eine doppelte Berücksichtigung der Dämpfung zufolge hatte, da diese bereits in den Transmissibilitätskoeffizienten erfasst wurde. Eine Anpassung (Abbildung 4.6) mit $\eta = \sqrt{10/(5+0)} = 1.4142$ zeigt, dass das Isolationsspektrum nun eine Einhüllende darstellt, allerdings auch deutlich zu große Werte ergibt.

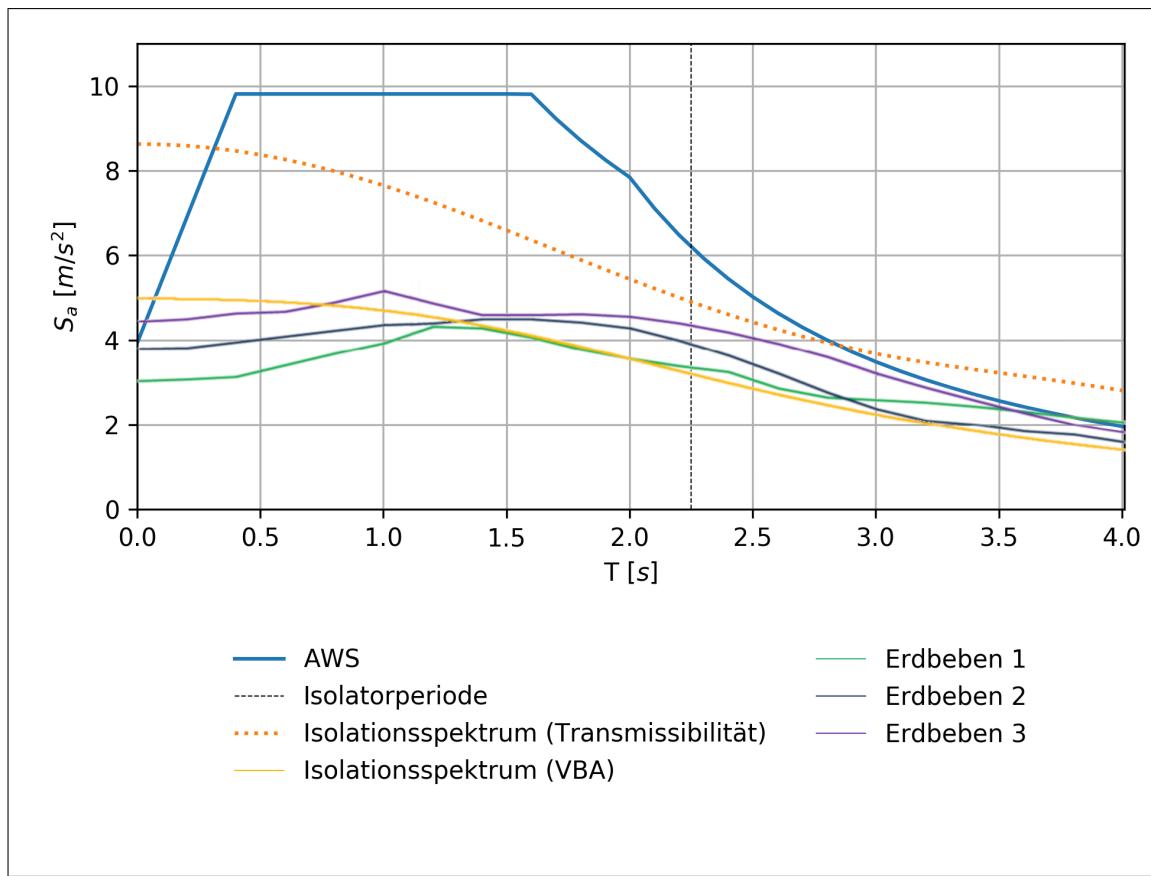


Abbildung 4.4: Vergleich der Isolationsspektren aus Zeitschrittberechnung [9], vereinfachten Ansatz und Ansatz der Transmissibilität ($\eta = 1.4142$)

4.5 Korrekturansätze

In [9] wurden verschiedene Ansätze untersucht das Isolationsspektrum nach oben zu korrigieren. Auch bei dem Ansatz der Transmissibilität könnte man nun versuchen die Werte nach unten zu korrigieren. Betrachtet man die Transmissionskoeffizienten (Gleichung (3.22)), so lässt sich erkennen, dass die Dämpfung auch eine Koppelung darstellt.

Unter der Annahme, dass die Eigenformen von dem weichen Isolator dominiert werden, soll eine grobe Näherung untersucht werden, nach der die Dämpfungsbeiwerte der beiden Systeme getrennt voneinander bestimmt werden.

$$c_1 = 2\xi_1 \sqrt{k_1 m_1}$$

$$c_2 = 2\xi_2 \sqrt{k_2 m_2}$$

Die Berechnung der Transmissibilität erfolgt dann am nicht transformierten System.

$$VT(m_2, k_2, c_2, m_1, k_1, c_1)$$

Einmassenschwinger	Vereinfacht	Transmissibilität
2.958 m/s^2	2.858 m/s^2	3.525 m/s^2

Tabelle 4.2: Vergleich der Beschleunigungen aus den drei Ansätzen

Die Werte aus dem ersten Beispiel liegen nun deutlich näher zusammen.

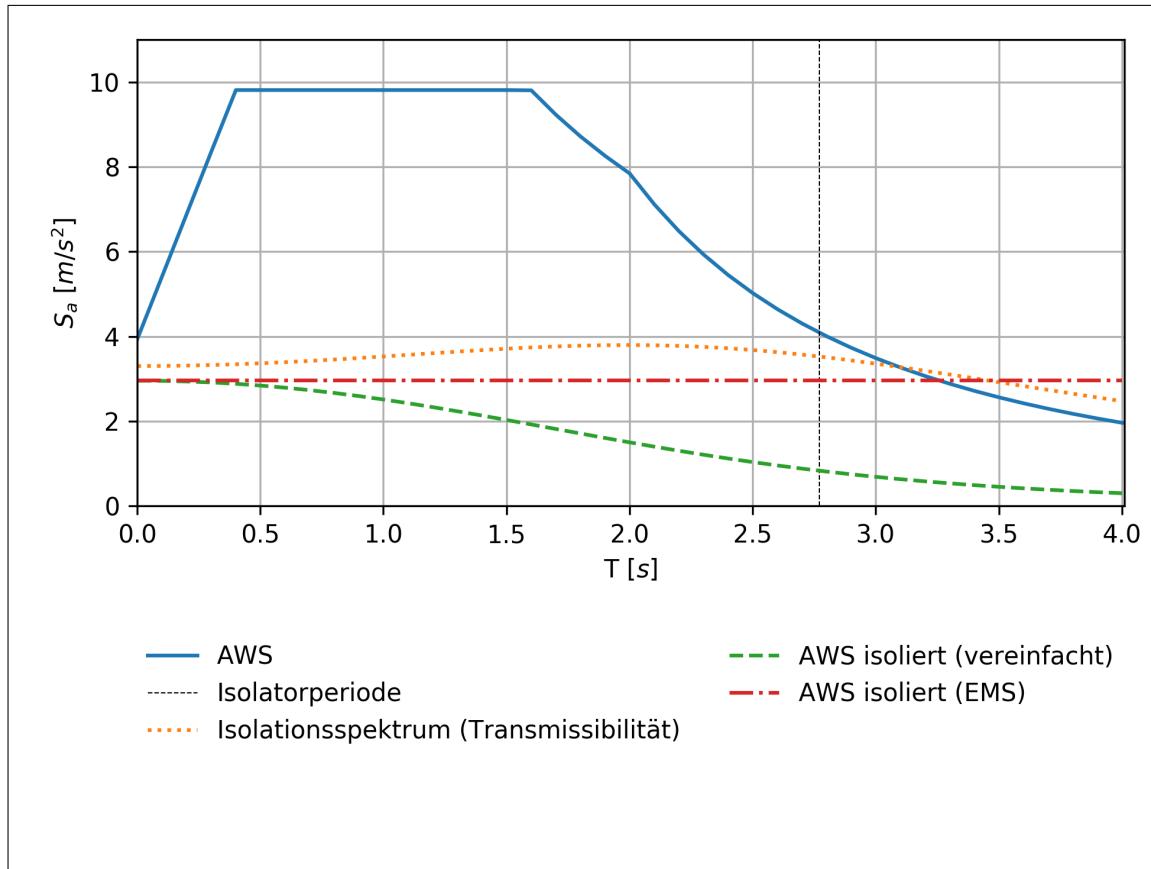


Abbildung 4.5: Isolationsspektren der drei Ansätze

Im zweiten Beispiel kann anhand des Vergleiches der numerischen Werte auch festgestellt werden, dass der qualitative Verlauf besser abgebildet werden konnte.

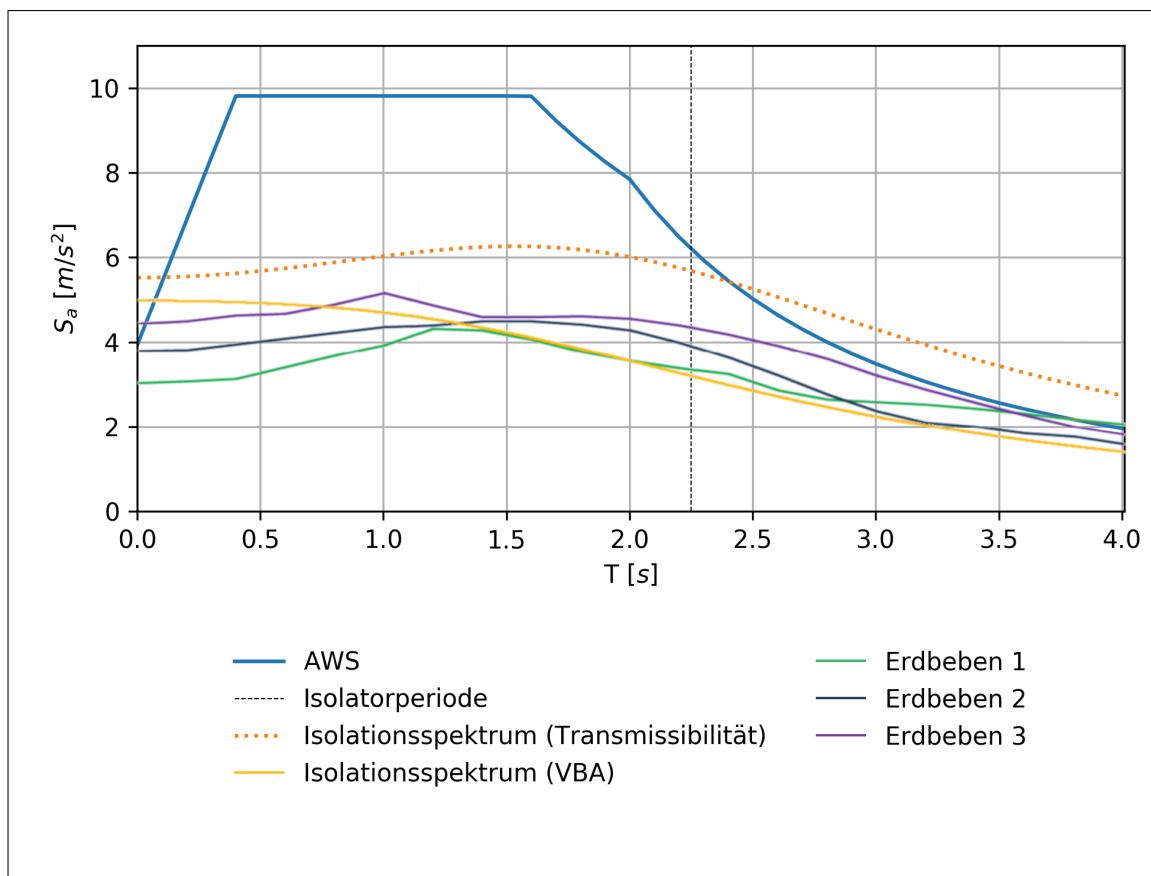


Abbildung 4.6: Vergleich der Isolationsspektren aus Zeitschrittberechnung [9], vereinfachten Ansatz und Ansatz der Transmissibilität

Kapitel 5

Beispielberechnung mit EDV

5.1 Beispielgebäude

$D = 0.325 \text{ m}$ $m_u = 0.05 \text{ m}$ $m_1 = 2486.7 \text{ t}$ $m_2 = 1619.5 \text{ t}$ $k_2 = 32000 \text{ kN/m}$ $R = 1.599 \text{ m}$

$T[s]$	S_a Transmissibilität [m/s^2]	S_a Vereinfacht [m/s^2]
0.01	5,60674664200148	4,67490580045368
0.20	5,63467499209289	4,63042028154013
0.40	5,71268557687775	4,49803343352122
0.60	5,83030581704598	4,28242143699944
0.80	5,97368100820268	3,99218798167146
1.00	6,12388037700022	3,64087769649182
1.20	6,25648687706686	3,24712262982812
1.40	6,34351458724908	2,83331072362479
1.60	6,35821574645013	2,42266417036407
1.80	6,28168144090241	2,03558382801768
2.00	6,10832152112823	1,68670956690896
2.20	5,84721687995431	1,38378025927877
2.40	5,51863414429968	1,12834913010178
2.60	5,14780403798720	0,91758357989544
2.80	4,75901616490822	0,74623440762497
3.00	4,37194145867057	0,60820075617877
3.20	4,00039726694917	0,49752555413495
3.40	3,65277761818416	0,40890321453645
3.60	3,33323005004162	0,33785895564762
3.80	3,04294312417884	0,28074320474709
4.00	2,78123704406094	0,23464010367599

Tabelle 5.1: Spektralbeschleunigungen der Isolationsspektren

5.2 Berechnung mit RStab

5.3 Diskussion der Ergebnisse

Kapitel 6

Analyse

6.1 Variation von μ

Interessant ist die Beobachtung, dass bei Variation des Reibungskoeffizienten (Abbildung 6.1) deutlich wird, dass die optimale Isolation von μ abhängig ist und ab einem Grenzwert ein negativer Effekt eintritt.

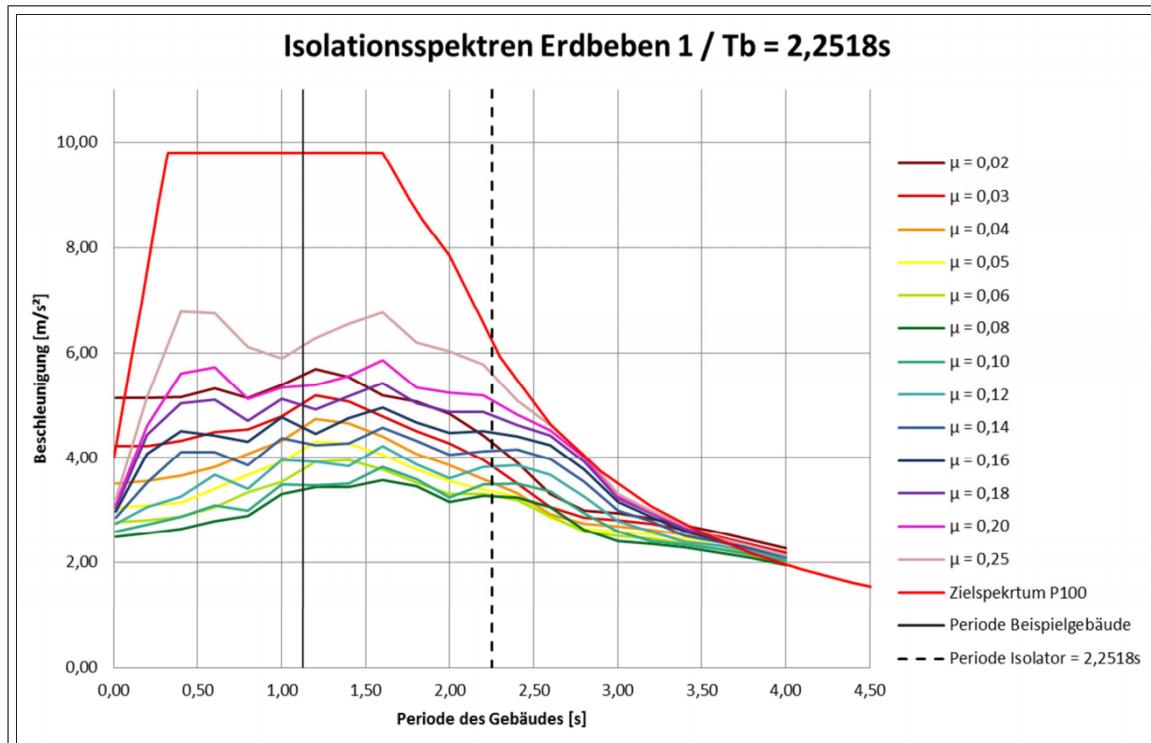


Abbildung 6.1: Bild 10.10: Vergleich der Isolationsspektren des „Erdbeben 1“ bei verschiedenen Reibungskoeffizienten [9]

Dieser Effekt kann mit dem vereinfachten Verfahren und dem über die Transmissibilität nicht abgebildet werden. Das liegt daran, dass bei diesen Verfahren μ einen direkten linearen Einflus auf die effektive Steifigkeit (Gleichung (2.1)) und Dämpfung (Gleichung (2.2)) hat.

$$k_{eff} = \frac{G}{R} + \mu \frac{G}{D}$$

$$\xi_{eff} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu R}{(D + \mu R)}$$

Er geht also bei der Linearisierung verloren und kann nur von nicht-linearen Berechnungen, oder empirischen Korrekturfaktoren abgebildet werden.

6.2 Ansätze für verschiedene Dämpfungskorrekturbeiwerte η

Wie in Abschnitt 4.5 schon erwähnt, wurde in [9] auch eine Korrektur über andere Ansätze für die Bestimmung des Dämpfungskorrekturbeiwertes η untersucht. Der Eurcode 8 sieht dabei folgende Bestimmungsgleichung vor.

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi}}$$

Betrachtet man aber die Gleichung für den Vergrößerungsfaktor eines Einmassenschwingers

$$\frac{u_{max}}{u_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_1)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_1)^2}} \quad (6.1)$$

so ergibt sich im Resonanzfall für $\omega = \omega_1$, nach Umstellung die Beziehung

$$\eta = \frac{1}{2\xi} \quad (6.2)$$

Für $\mu = 0.05$ und $R = 2m$ zeigt sich aber auch hier, dass die Werte überkorrigiert werden und deutlich zu geringe Beschleunigungen liefern.

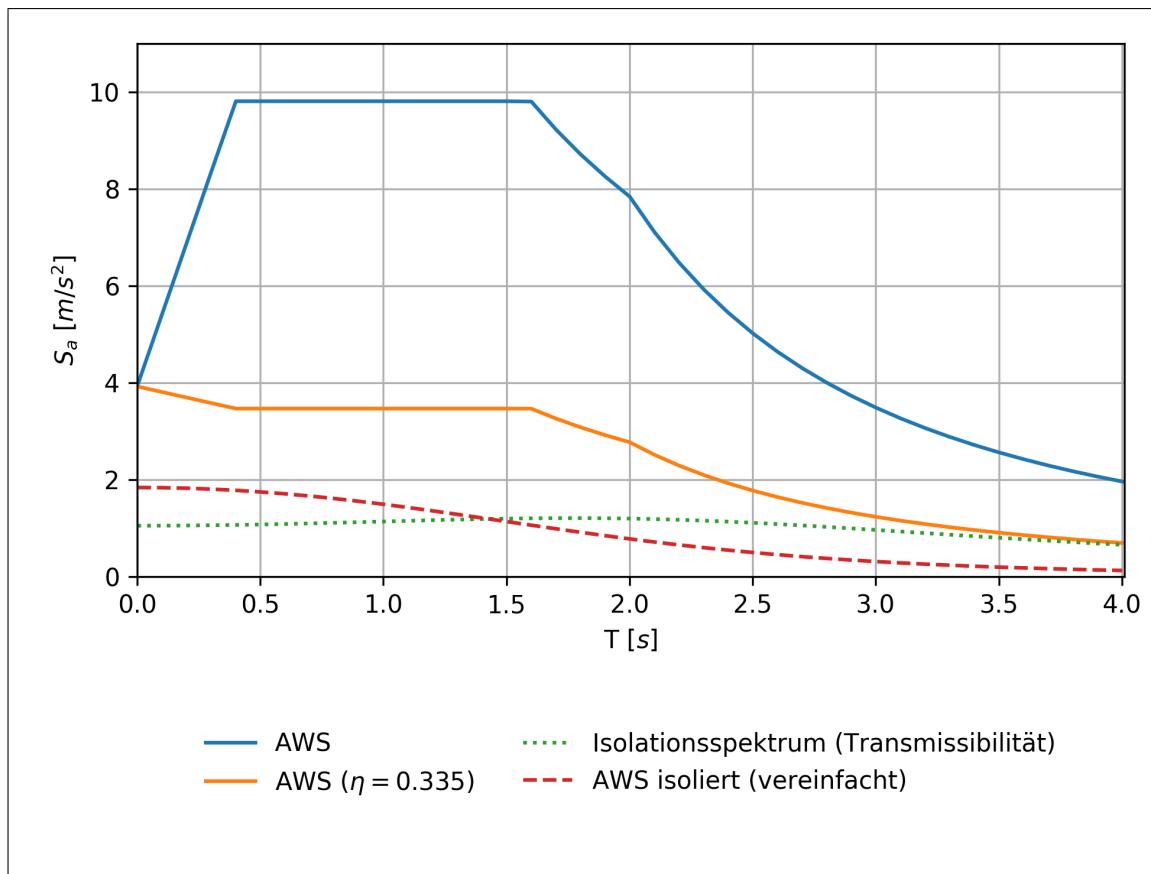


Abbildung 6.2

Nun könnte eine empirische Korrektur vorgenommen werden, die die Ergebnisse aus einer Zeitschrittberechnung mit einfließen lässt. Da diese aber von den Parametern des Bauwerks abhängig sind, wurde an dieser Stelle darauf verzichtet, weil das Ziel sein sollte Isolationsspektren ohne die Erforderniss einer Zeitschrittberechnung zu erstellen.

6.3 Linearisierungen

Xieff und keff Zeitschrittanalyse Wavelet Analyse

Relativ viel Aufwand und es zeigte sich dass die Annahmen stimmen und daher die Rayleigh Dämpfung nicht angesetzt werden muss

Excel Sheet Excel Sheet nach zweitem Ansatz

Kapitel 7

Zusammenfassung

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung der Dynamik von Lithosphärenplatten: Divergenz an Mittelozeanischen Rücken und Konvergenz an Subduktionszonen - [Gunnar Ries]	5
1.2	Bemessungsspektrum	8
1.3	Bemessungsspektrum Modalanalyse	9
1.4	Eigenschwingungsformen eines Dreimassensystems [12]	9
1.5	Einmassenschwinger mit Fußpunktanregung	11
1.6	Elastisches Antwortspektrum	14
2.1	Gleitpendelisolator [Maurer SE (maurer.eu)]	16
2.2	Bauform der Iolatoren (a) und Dämpfer (b) der Großen Moschee von Algerien [3]	16
2.3	Verteilung der Iolatoren (grün) und Dämpfer (rot) im Grundriss [3] .	17
2.4	Verteilung der Verschiebungen an einem isolierten System [13] . . .	18
2.5	Schematischer Aufbau des Gleitpendellagers im zentriertem sowie im ausgelenkten Zustand [15]	18
2.6	Hysterese-Zyklus [HDR Engineering Inc.]	19
3.1	Voigt-Kelvin-Modell	21
3.2	Komposition	22
4.1	Antwortspektrum	30
4.2	Isolationsspektren der drei Ansätze	37
4.3	Vergleich der Isolationsspektren aus Zeitschrittberechnung [9], vereinfachten Ansatz und Ansatz der Transmissibilität	39
4.4	Vergleich der Isolationsspektren aus Zeitschrittberechnung [9], vereinfachten Ansatz und Ansatz der Transmissibilität ($\eta = 1.4142$)	40
4.5	Isolationsspektren der drei Ansätze	41
4.6	Vergleich der Isolationsspektren aus Zeitschrittberechnung [9], vereinfachten Ansatz und Ansatz der Transmissibilität	42
6.1	Bild 10.10: Vergleich der Isolationsspektren des „Erdbeben 1“ bei verschiedenen Reibungskoeffizienten [9]	46
6.2	48

Literatur

- [1] Schweizerischer Erdbebendienst (SED). *Ursache von Erdbeben*. 2014. URL: https://web.archive.org/web/20141228103510/http://www.seismo.ethz.ch/eq_swiss/Ursache_Erdbeben/index (besucht am 28.12.2014).
- [2] Sondipon Adhikari und A. Srikantha Phani. “Rayleigh’s Classical Damping Revisited”. In: () .
- [3] Jan Akkermann und Alexander Hewener. “Seismische Isolierung des Gebetssaals der Großen Moschee von Algerien”. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 110.2 (2015).
- [4] Prof. Dr. Dr.h.c. Hugo Bachmann. *Erdbebensicherung von Bauwerken*. 2. Aufl. Birkhäuser Basel, 2002. ISBN: 978-3-0348-9455-5, 978-3-0348-8143-2.
- [5] Indrajit Chowdhury und Shambhu Dasgupta. “Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems”. In: *Int. J. Space Struct.* 43 (Jan. 2003), S. 6855–6868.
- [6] James Daniell. “Bilanz von Naturkatastrophen seit 1900: acht Millionen Tote, sieben Billionen Dollar Schaden”. In: *KIT-Zentrum Klima und Umwelt - Presseinformation* 058 (2016).
- [7] *Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben - Teil 1: Grundlagen, Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten; Deutsche Fassung EN 1998-1:2004 + AC:2009*. 2010.
- [8] Peter Huber und Dr. Renzo Medeot. “The Sliding Isolation Pendulum for seismic Protection of Buildings”. In: *WIT Transactions on the Built Environment* 98 (2008).
- [9] Marco Isenmann. “Übertragungsverfahren für Erdbebenbemessungsspektren zur Vordimensionierung seismisch isolierter Bauwerke”. Magisterarb. Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft, 2014.
- [10] James M. Kelly. “The Theory and Development of Seismic Isolation and its Implementation”. In: *Proceedings of Paraseismic Work Days* (2009).
- [11] Helmut Kramer. *Angewandte Baudynamik. Grundlagen und Beispiele für Studium und Praxis*. 2. Aufl. Ernst & Sohn, 2013. ISBN: 978-3433030288.
- [12] Adrian Pocanschi und Marios C. Phocas. *Kräfte in Bewegung. Die Techniken des erdbebensicheren Bauens*. 1. Aufl. Teubner, 2003. ISBN: 3-3519-00429-1.
- [13] Farzad Naeim und James M. Jelly. *Design Of Seismic Isolated Structures. From Theory to Practice*. John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN: 9780471149217.
- [14] Robert Reitherman. “International Aspects of the History of Earthquake Engineering”. In: *EERI Earthquake Engineering Research Institute* (2008).
- [15] Norbert Romen. “Zum Rückstellverhalten von Gleitpendellagern unter seismischer Einwirkung”. Diss. Universität der Bundeswehr München, 2017.

- [16] Andrew W. Taylor und Takeru Igusa. *Primer on Seismic Isolation*. American Society of Civil Engineers, 2004.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Master Thesis ohne Hilfe Dritter, nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln, angefertigt zu haben. Alle Stellen, die den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden.

Arne Rick
2. März 2020, Karlsruhe