PRB 221. 12/4/21

§ Importance Sampling :

En finance et surtout en mesure de risque on a besoin de calculer la probabilité d'événements rares :

X = Loss (perte ou gain potentiel d'un portefeuille financier)

v.a

$\mathbb{P}(X \geq L) = ?$

déterministe

en pratique : L désigne la quantité de "fonds propres" (traité de Bâle) qu'il faut mettre de côté avant d'investir dans la "position" X pour éviter à l'investisseur de faire défaut.

D'un pt de vue simulation : le calcul de $\mathbb{P}(X \geq L)$ peut poser des problèmes numériques.

événements rares.

Exemple : Le loss X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

Si on met de côté $L = 5$ €, on veut calculer

$\mathbb{P}(X \geq 5)$ = explicitement pour quantifier le risque exact encouru

Numériquement :

X avec 99,99 % $\in [-4,4]$.

Numériquement $\mathbb{P}(X \geq 5) \simeq 0$

or théoriquement on sait que ce n'est pas exact.

[Comment calculer alors plus précisément $\mathbb{P}(X \geq 5) = ?$]

Importance Sampling

On rappelle la formule :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}\left[f(X+\mu)\, e^{-\mu^2/2 - \mu X}\right].$$

En particulier pour $f(X) = \mathbb{1}_{\{X \geq L\}}$.

(•) M.C. naïf :

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \geq 5\}}\right] \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{1}_{\{X_i \geq 5\}}}_{\substack{\| \\ 0}}$$

— numériquement

(..) Importance sampling : $\forall \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \geq 5\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X+\mu \geq 5\}} e^{-\frac{\mu^2}{2} - \mu X}\right]$$

$$\underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{X_i + \mu \geq 5\}} e^{-\frac{\mu^2}{2} - \mu X_i}$$

$\mu \simeq 5$ n'est pas mal.

Pour $\mu \simeq 5$