Cours PRB222

Options à Barrière

Enjeu

Ce sujet propose le calcul du prix d'une option sur un actif dont l'exercice peut avoir lieu à une date prédéfinie uniquement si le prix de l'actif n'est pas descendu en dessous d'un niveau prédéfinie (barrière). Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Black & Scholes. Nous considérons tout d'abord le cas sans barrière qui permet d'obtenir une solution analytique simple que nous confrontons ensuite au calcul par Monte Carlo. Nous étudions ensuite le prix de l'option à barrière et l'influence de la discrétisation des observations du franchissement de la barrière.

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 1. On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t. Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ la volatilité (supposée constante) et S_0 la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)\,(rdt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= S_0 > 0 \end{aligned}$$

Q1) Calculer $S(t)$.

Option Européenne vanille

Un Put confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P^{euro} = e^{-rT}\mathbb{E}[(K - S(T))_+] \quad (1)$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q2) Calculer analytiquement P^{euro}. On choisira pour les applications $\sigma = 0.15$ (sauf pour Q9), $S_0 = 1$ (sauf pour Q9), $r = 0.015$, $T = 2$ ans et $K = 1$. La volatilité et le taux sont annuels.

Q3) Proposer une méthode pour simuler $W(T)$. Implémenter la calcul de P^{euro} par une méthode de Monte Carlo classique.

Q4) Implémenter également le calcul de l'intervalle de confiance asymptotique de l'estimateur Monte Carlo à 90%. Tracer sur le même graphique l'estimateur Monte Carlo de P^{euro} en fonction du nombre de trajectoires ainsi que l'intervalle de confiance asymptotique à 90%. Ajouter également le prix théorique. Commenter.

Option à Barrière Down & Out

Un Put à Barrière de type Down & Out confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance si le prix de l'actif n'est pas descendu en dessous d'une barrière B avant T. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P^{DO} = e^{-rT}\mathbb{E}[(K - S(T))_+ \mathbb{1}_{\min\limits_{u \le T} S(u) \ge B}] \quad (2)$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q5) Calculer analytiquement P^{DO} dans le cas où $B \geq K$.

La simulation continue de $\min\limits_{u \le T} S(u)$ n'etant pas possible en pratique, on se propose d'approximer P^{DO} par

$$P^{DO,\Delta} = e^{-rT}\mathbb{E}[(K - S(T))_+ \mathbb{1}_{\min\limits_{u \in \{T^i\}_{i=1..N}} S(u) \ge B}] \quad (3)$$

avec

$$\begin{cases} N^{\Delta} & = Ent\left[\frac{T}{\Delta}\right] \\ \{T^i\}_{i=1..N^{\Delta}} & = \{i\Delta\}_{i=1..N^{\Delta}} \end{cases}$$

Q6) Proposer une méthode pour simuler $\left(W(T^i)\right)_{i=1..N^{\Delta}}$. Implémenter la calcul de $P^{DO,\Delta}$ par une méthode de Monte Carlo classique. On choisira $B = 0.7$

(sauf pour Q8) et $\Delta = \frac{1}{52}$ (sauf pour Q10, Q11, Q12).

Q7) Améliorer la convergence en utilisant une méthode de réduction de variance par variables antithétiques. Tracer sur le même graphique les 2 estimateurs de $P^{DO,\Delta}$ (avec et sans réduction de variance) ainsi que leurs intervalles de confiance à 90% en fonction du nombre de trajectoires. Commenter.

Q8) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (avec réduction de variance seulement) (préciser votre critère) et tracer le prix $P^{DO,\Delta}$ en fonction de B pour $B \in [0.5, 1]$ (garder les autres paramètres). Commenter.

Q9) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (avec réduction de variance seulement) et tracer le prix $P^{DO,\Delta}$ en fonction de σ pour $\sigma \in [0, 0.8]$ (garder les autres paramètres). On se placera dans les deux cas suivants: $S_0 = 1$ et $S_0 = 0.8$. Commenter.

Q10) En utilisant la proprieté suivante $\forall\,(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}&\left[\inf_{u\in[t_1,t_2]} \{W_u\} < x^* \,\middle|\, W_{t_1}, W_{t_2}\right] \\ &= 1 + \left[e^{-2\frac{\left(W_{t_1}-x^*\right)\left(W_{t_2}-x^*\right)}{t_2-t_1}} - 1\right] \mathbb{1}_{W_{t_1}\wedge W_{t_2} > x^*}\end{aligned}$$

proposer une méthode d'approximation de P^{DO} à partir de $P^{DO,\Delta}$ (avec Δ suffisament petit) et l'implémenter.

Q11) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (avec réduction de variance seulement) et tracer sur le même graphique le prix $P^{DO,\Delta}$ en fonction de Δ pour $\Delta \in \left\{\frac{1}{250}, \frac{1}{52}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 1, 3\right\}$ et P^{DO} (garder les autres paramètres).

Q12) Tracer également le probabilités de non-sortie $\zeta^{DO,\Delta}$

$$\zeta^{DO,\Delta} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\min\limits_{u\in\{T^i\}_{i=1..N}} S(u) \geq B}]$$

en fonction de Δ et ζ^{DO}

$$\zeta^{DO} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\min\limits_{u\leq T} S(u) \geq B}]$$

(garder les autres paramètres). Commenter.

Option à Barrière Down & In

Un Put à Barrière de type Down & In confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance uniquement si le prix de l'actif est descendu en dessous d'une barrière B avant T. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P^{DI} \quad = \quad e^{-rT}\mathbb{E}[(K - S(T))_+ \mathbb{1}_{\min\limits_{u \leq T} S(u) \leq B}] \tag{4}$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q13) Calculer analytiquement

$$P^{DO} + P^{DI}$$

Q14) En déduire une méthode de réduction de variance de P^{DO} par variables de contrôle. Illustrer graphiquement cette méthode.

Facultatif

Q15) Prouver le résultat donné en question Q10.

Q16) Déduire de ce résultat que P^{DO} s'écrit de la forme

$$P^{DO} \quad = \quad e^{-rT}\mathbb{E}[(K - S(T))_+ A\left(T, W_T\right) \mathbb{1}_{S(T)>B}]$$

Indication. Effectuer le changement de probabilité associé à

$$L_T \quad = \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)^2 T + \left(-\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right) W_T\right]$$

ANNEXE

Approximation de Abramowitz & Stegun de la fonction de distribution d'une Gaussienne centrée réduite : $\forall x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5\right) + \epsilon(x)$$

avec $t = \frac{1}{1+b_0 x}$ et

$$\begin{cases} b0 &= 0.2316419 \\ b1 &= 0.319381530 \\ b2 &= -0.356563782 \\ b3 &= 1.781477937 \\ b4 &= -1.821255978 \\ b5 &= 1.330274429 \end{cases}$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}$.