PRB 212 9/4/2021

Cours n° 1 :

I- Rappels de Calcul stochastique:

§ Intégrale stochastique : On se donne une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$

On introduit l'espace :

$$\boxed{\mathcal{H}_T(\mathcal{F}) := \left\{ (H_t)_{0\le t\le T} \text{ processus } (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T} - \text{adapté t.q } \mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s|^2 ds\right] < +\infty \right\}.}$$

(•) si $H \in \mathcal{H}_T(\mathcal{F})$ alors $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\le t\le T}$ est défini en tant que martingale Continue par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, avec $(W_t)_{0\le t\le T}$ c'est un $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ - m.b.s

(i.e P.A.I.S avec W_t est $\mathcal{F}_t$- mesurable et $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ $\forall\ 0 \le s \le t \le T$).

(••) Isométrie d'Itô : Pour $(H_t)_{0\le t\le T}$ et $(K_t)_{0\le t\le T} \in \mathcal{H}_T(\mathcal{F})$

On a :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dW_s\right)\left(\int_0^t K_s dW_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s K_s ds\right], \ \forall t \in [0,T].$$

Rq : (*) Si $W \perp\!\!\!\perp W^{\perp}$ sont deux m.b.s alors

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)\left(\int_0^t K_s\, dW_s^{\perp}\right)\right] = 0 \quad , \ \forall\, t \in [0,T].$$

(**) On peut étendre la définition de $\int_0^t H_s\, dW_s$ pour une classe de processus plus large, notamment

$$\tilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{F}) := \left\{ (H_t)_{0 \le t \le T} \ (\mathcal{F}_{t-})_{0 \le t \le T} - \text{adapté t.q } \int_0^T H_s^2\, ds < +\infty \text{ p.s} \right\}$$

on a :

$$\mathcal{H}_T(\mathcal{F}) \subset \tilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{F}),$$

mais $\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)_{0 \le t \le T}$ pour $H \in \tilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{F})$ est défini en tant que martingale locale : c'est à dire :

$\exists\, (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt t.q $\tau_n \nearrow +\infty$ p.s et t.q

localisation $\rightarrow$ $\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} H_s\, dW_s\right)_{t \in [0,T]}$ est une martingale pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

⚠ Quand $H \in \tilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{F})$, on perd la propriété d'isométrie, mais on peut l'écrire en passant par une localisation à l'aide de $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.a. $\nearrow +\infty$ p.s.

§ Processus d'Itô :

On se donne $(W_t)_{0 \le t \le T}$ un m.b.s par rapport $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$.

Un processus $(X_t)_{0 \le t \le T}$ est dit processus d'Itô, si c'est un processus continu, $\mathcal{F}_t$ - adapté t.q

$$\boxed{X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t K_s\, ds}_{v.b.} + \underbrace{\int_0^t H_s\, dW_s}_{\text{int. stochastique}} , \quad \text{avec}}$$

(·) X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

(··) $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ est $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-adapté t.q $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ p.s

(∴) $(H_t)_{0\leq t\leq T} \in \widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{F})$.

Rappel : Un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est dit à variations bornées si pour toute subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ de l'intervalle $[0,T]$, on a

$$\sup_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < +\infty \quad p.s.$$

Rq Si $t \longmapsto X_t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ou bien

$X_t = X_t^1 - X_t^2$ avec $t \mapsto X_t^i$ est $\nearrow$ $i \in \{1,2\}$

alors $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus à v.b.

[Si $t \mapsto X_t$ est $\mathcal{C}^1$. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X'_{\alpha_i} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{O(\frac{1}{n})} < +\infty.$

$\sup_i |X'_{\alpha_i}| < +\infty$]

⚠ $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ n'est pas à v.b.

§ <u>Formule d'Itô multi-dimensionnelle</u> :

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

i.e $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$. Soit

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{t.q}$$
$$(t,x) \longmapsto f(t, x_1, \dots, x_d)$$

f est de classe $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ i.e

$\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont continues $1\leq i,j\leq d$.

$$\boxed{f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\,ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(s,X_s)\,dX_s^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s)\,d[X^i,X^j]_s .}$$

<u>Rappel</u> : <u>Covariation quadratique</u>.

Soient $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ deux processus d'Itô, la covariation ou crochet droit entre X et Y

est défini par :

$$[X,Y]_t \overset{u.c.p}{=} \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

si cette limite existe.

<u>Calcul du crochet :</u>

si

$$\left.\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s^1 \, ds + \int_0^t H_s^1 \, dW_s \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t K_s^2 \, ds + \int_0^t H_s^2 \, dW_s \end{aligned}\right] \quad (1).$$

(·) $(X,Y) \mapsto [X,Y]_t$ est une application bilinéaire.

(··) si $(Z_t)_{t \geq 0}$ est à <u>v.b.</u> et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô quelconque alors :

$$[X, Z]_t = 0.$$

(···) $$\left[\int_0^t H_s^1 \, dW_s , \int_0^t H_s^2 \, dW_s\right] = \int_0^t H_s^1 H_s^2 \, ds$$

Donc, pour X et Y données par le système (1), on a :

$$[X,Y]_t = \overbrace{[\underbrace{X_0}_{v.b}, Y]_t}^{=0} + \overbrace{[\underbrace{\int_0^\cdot K_s^1 ds}_{v.b}, Y]_t}^{=0}$$

$$+ \overbrace{[\int_0^\cdot H_s^1 dW_s, \underbrace{Y_0 + \int_0^\cdot K_s^2 ds}_{v.b}]_t}^{=0}$$

$$+ [\int_0^\cdot H_s^1 dW_s, \int_0^\cdot H_s^2 dW_s]_t = \int_0^t H_s^1 H_s^2 ds.$$

$$\boxed{[X,Y]_t = \int_0^t H_s^1 H_s^2 ds}.$$

§ Équations différentielles stochastiques : E.D.S.

On considère l'E.D.S.

$$X_t = \underbrace{X_0}_{\in \mathcal{F}_0} + \underbrace{\int_0^t b(s,X_s)\, ds}_{\text{terme drift v.b}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s,X_s)\, dW_s}_{\text{terme de diffusion ou int. sto}} \qquad (2)$$

<u>Théorème</u> : (Existence et unicité des E.D.S)

si $\exists C>0$ t.q $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

$(\cdot)$ $\sup_{0\le t\le T} |b(t,x)| + \sup_{0\le t\le T} |\sigma(t,x)| \le C(1+|x|)$

$(\bullet\bullet)$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\sup_{0\le t\le T} |b(t,x)-b(t,y)| + \sup_{0\le t\le T} |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le c\,|x-y|$$

<u>alors</u> l'EDS (2). admet une solution unique forte.
De plus si $X_0 \in L^2(\Omega)$ (i.e $\mathbb{E}[|X_0|^2]<+\infty$)
alors
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2\Big] < +\infty.$$

<u>Rq</u> :(*) Si $a : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne uniformément en temps avec $t \mapsto a(t,x)$ continue alors a est à croissance linéaire uniformément en temps.

(**) E.D.S multidimensionnelles :

$$\underbrace{X_t}_{\in\mathbb{R}^d} = \underbrace{X_0}_{\in\mathbb{R}^d} + \int_0^t \underbrace{b(s,X_s)}_{\in\mathbb{R}^d}\, ds + \int_0^t \underbrace{\sigma(s,X_s)}_{\in\mathbb{R}^{d\times q}}\, \overbrace{dW_s}^{\in\mathbb{R}^q}$$

$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d) \in \mathbb{R}^d$

$b = (b^1, \dots, b^d) \in \mathbb{R}^d$ et $\sigma = (\sigma^{ij})_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le q}} \in \mathbb{R}^{dq}$

$W = (W^1, \dots, W^q) \in \mathbb{R}^q$

Donc pour $i \in \{1, \dots, d\}$

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b^i(s, X_s)\, ds + \sum_{j=1}^{q} \int_0^t \sigma^{ij}(s, X_s)\, dW_s^j .$$

Exemple : Modèle de Black-Scholes en finance qui est solution de l'E.D.S

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u\, du + \int_0^t \sigma S_u\, dW_u , \quad t \in [0,T]$$

S_t : modélise la valeur à l'instant t d'un actif financier donné

$S_0 \in \mathbb{R}$: Spot ou valeur actuelle de l'actif

μ : trend i.e la tendance d'évolution de l'actif

σ : volatilité, elle impacte l'intensité des fluctuations aléatoires (à la hausse ou à la baisse) subies par la valeur de l'actif

Rq : S_0 et μ sont des données du marché, alors que σ ne l'est pas, d'où la nécessité de la calibrer.

On note que $x \mapsto \mu x$ et $x \mapsto \sigma x$ satisfont les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité des EDS, de plus on a formellement en appliquant la formule d'Itô

$$\mathrm{Log}(S_t) = \mathrm{Log}(S_0) + \int_0^t \frac{dS_u}{S_u} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d[S]_u}{S_u^2}$$

on a $\quad dS_u = \mu S_u \, du + \sigma S_u \, dW_u$

Donc

$$\mathrm{Log}(S_t) = \mathrm{Log}(S_0) + \int_0^t (\mu \, du + \sigma \, dW_u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 \, du$$

$$= \mathrm{Log}(S_0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$$

Donc

$$\boxed{S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right)}$$

Donc

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma \, dW_t \\ S_0 = s_0 > 0 \end{cases}$$

admet une solution explicite

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\right).$$

Complément de rappel :

La formule d'intégration par partie d'Itô.

Soit $(X_t)_{0\le t\le T}$ et $(Y_t)_{0\le t\le T}$ deux processus d'Itô :

en appliquant la formule d'Itô multidimensionnelle

à l'application $(x,y) \overset{f}{\longmapsto} xy$ on a :

$$\boxed{X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + [X,Y]_t}$$

II Petite introduction à la finance de marché :

On commence par une présentation de produits financiers :

§ les titres de base : ce sont des titres

[i.e des instruments négociables, cotés ou susceptibles de l'être, représentant selon le cas une part du capital social de l'émetteur (action ou part) en anglais (Stock or Share), une part d'un emprunt à long terme émis par une société ou une collectivité publique (obligation) en anglais (Bond), un droit de souscrire une valeur de l'émetteur (Bon ou droit de souscription), ou encore une option ou un contrat à terme négociable sur une marchandise, sur une valeur ou même sur un autre instrument financier (Réf. Grand dictionnaire terminologique)] tels que les actions

[i.e. titre cessible et négociable, nominatif ou au porteur représentant une participation au capital social d'une société par actions, auquel sont attachés différents droits définis dans la législation ou les statuts de la société.
(Réf. Grand dictionnaire terminologique)] (Shares / Stocks)

ou les obligations (Bond)
[i.e c'est un titre d'emprunt collectif remis par une société ou une collectivité publique à ceux qui leur prêtent des capitaux pour répondre à une demande d'emprunt à long terme
(Réf : Grand dictionnaire terminologique)] :

Donc titres de base : titres, actions, obligations.

§ Les produits dérivés :

Ce sont aussi des titres, mais ils ont la particularité que leur valeur dépend du cours d'un titre de base, appelé actif sous-jacent (en anglais underlying asset).

Les produits dérivés sont des produits "d'assurance" qui permettent de réduire ou d'éliminer certains risques financiers (liés aux fluctuations des taux de change, aux fluctuations du cours des matières premières (en anglais commodities)) mais qui peuvent être utilisés à des fins spéculatives.

On peut citer deux marchés importants en France où se négocient des produits dérivés :

(•) Le MATIF : marché à terme international de France.

(••) Le MONEP. marché des options négociables de Paris.

<u>Exemples de produits dérivés :</u>

① une société aéronautique européenne tient sa comptabilité en euros et signe des contrats en dollars, payables à la livraison. Entre la signature du contrat et la livraison le taux de change Euro/Dollar va fluctuer. L'entreprise est donc soumise à un <u>risque de change</u>. Si elle ne souhaite pas s'y exposer, elle va chercher sur le marché à faire supporter ce risque par une société spécialisée.

② Le cours du cuivre est très fluctuant. Une mine de cuivre souhaite se prémunir contre ces variations de cours. Elle va chercher un contrat qui lui permettra à une certaine échéance T de vendre son cuivre à un prix minimal K. Ce contrat s'appelle une option de vente (Put option)

Donc, pour éliminer ce type de risques, les produits financiers usuels sont les options d'achats (Call option) et de vente (Put option). Ce sont des produits dérivés classiques.

Def: Option d'achat européenne :

c'est un contrat qui donne à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter un actif (t.q une action, un baril de pétrole, etc) à une date future T (l'échéance) au prix K (strike) fixé à la date $t=0$ de signature du contrat. Ce contrat a un prix C qu'on appelle la prime (spread).

Soit $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ le processus qui modélise le prix de l'actif sous-jacent à l'option, on a deux scénarios possibles:

(•) Si $S_T < K$: dans ce cas le détenteur de l'option a le droit d'acheter au prix K

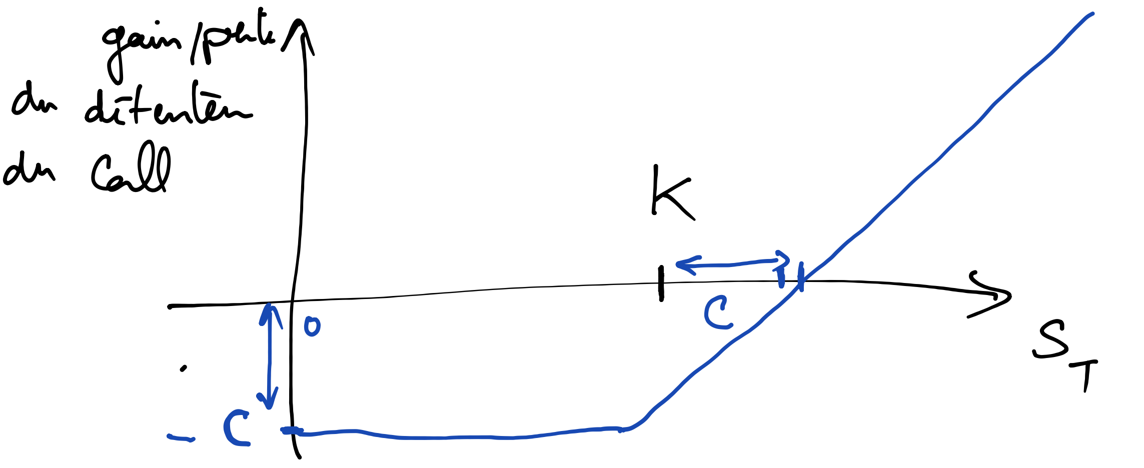
un actif financier qu'il pouvait acheter moins cher sur le marché. Dans ce cas, l'option ne donne aucun avantage. Donc il n'a pas intérêt à exercer l'option et il ne se passe rien.

(••) Soit $S_T > K$: le détenteur du call a le droit d'acheter l'actif moins cher que sur le marché. Donc il a intérêt à exercer son option. Dans ce cas, le vendeur de l'option (institution financière) doit acheter l'actif au prix S_T et le revendre au prix K au détenteur de l'option.

Pour l'institution financière, ça revient à payer $S_T - K$ au détenteur de l'option.

En conclusion :

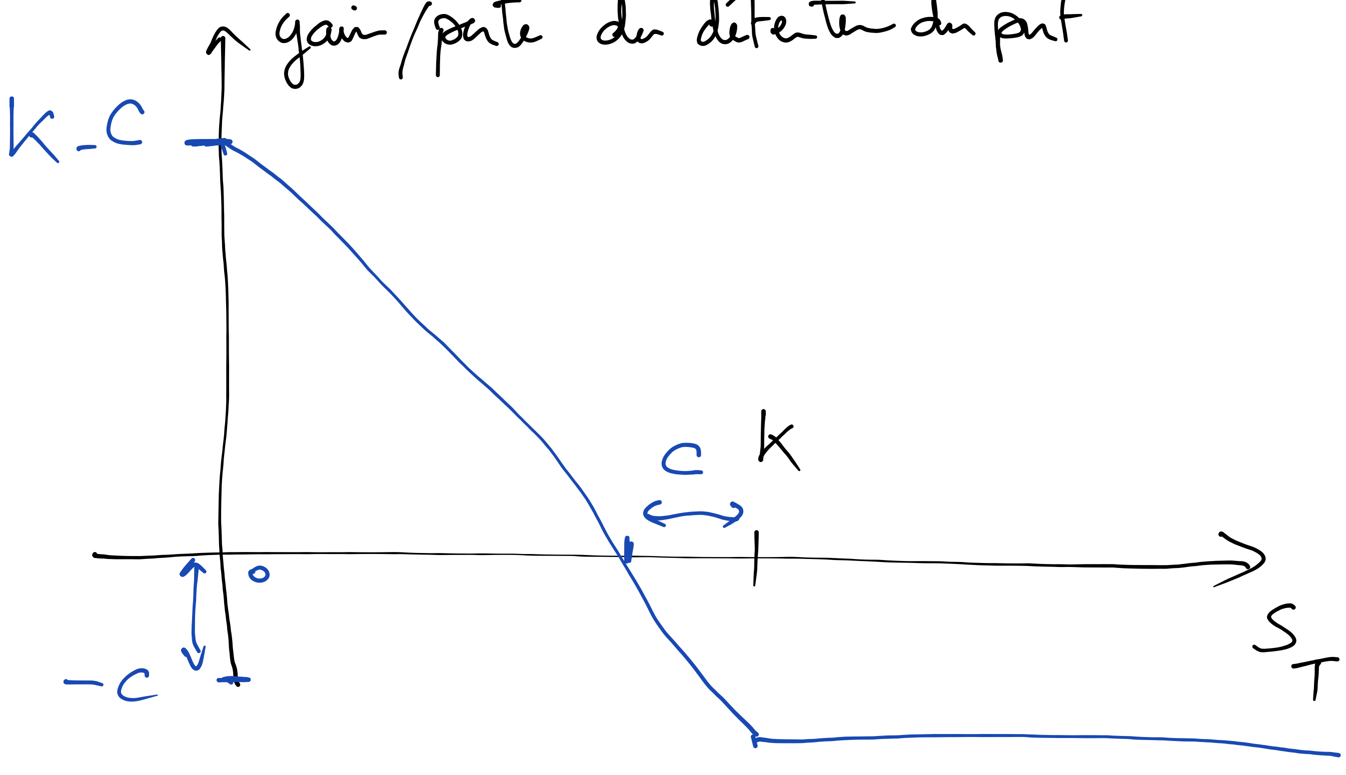
A la date $t = 0$, le détenteur de l'option call paie C à l'institution financière. Puis à l'échéance $t = T$ l'institution financière paie $(S_T - K)_+$ $= \max(S_T - K, 0)$



Déf (Put européen)

C'est un contrat qui donne à son détenteur le droit mais non l'obligation de vendre un actif à une date future T au prix K fixé à l'avance. Ce contrat a un prix C. Dans ce cas la fonction de paiement (payoff)

$$(K-S_T)_+ = \max(K-S_T, 0)$$



Déf : Option d'achat (resp. vente) américaine : c'est un contrat qui donne à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter (resp. de vendre) un actif à n'importe quelle date entre 0 et T au prix K fixé à l'avance. Ce contrat a un prix $\tilde{C}$.

Rq : Pour une option américaine, le détenteur a le droit d'exercer son option à n'importe quelle date intermédiaire entre 0 et T. Vu cet avantage, la prime de cette dernière est logiquement plus chère que celle d'une option européenne.

Il existe d'autres options dites exotiques : par exemple

(•) option d'achat Collar de payoff : $\min(\max(K_1, S_T), K_2)$

(•) Option de Boston de payoff : $(S_T - K_1)_+ - (K_2 - K)$ avec $K_1 < K_2$

Les options qui sont à la base des produits d'assurance peuvent être utilisées comme produit de spéculation à fort potentiel mais avec un risque fort.

Exemple :

Une action S cotée aujourd'hui à 100 €.

Vous pressentez une hausse du cours de l'action dans le mois à venir et vous avez 1500 € à investir.

→ Une première possibilité, c'est d'acheter 15 actions, si dans 1 mois le cours de l'action est passé à 110 € vous aurez gagné $15(110 - 100) = 150$ €. A contrario, si le cours passe à 90€ vous aurez perdu 150 €.

→ Une alternative est d'investir des options call européennes plutôt que dans des actions. Supposons qu'un Call européen avec une échéance d'un mois et de strike $K = 95$ €

coûte 7,5 €.

Vous pouvez alors acheter 200 options avec vos 1500.

(•) Si le cours passe à 110 €, vous exercez l'option

et percevez $200 \times (110 - 95) = 3000$ €.

d'où un bénéfice net $3000 - 1500 = 1500$ €.

On double son capital initial.

(••) Par contre, si le cours passe à 90 € vous

ne percevez rien et vous aurez perdu vos 1500 €

<u>C.C</u> :

Pour un usage spéculatif, les produits dérivés permettent d'augmenter significativement les gains potentiels mais aussi les pertes. On parle d'effet de "levier"

§ <u>L'objet des mathématiques financière</u>.

L'institution (banque d'investissement) qui vend des produits dérivés est confrontée à deux questions :

$\boxed{1^o}$ Quel est le prix "équitable" C d'un produit dérivé.

c'est le problème du calcul de la prime d'un produit dérivé.

$\boxed{2°}$. Comment $\boxed{\text{gérer}}$ la prime reçue (au temps 0) de telle sorte qu'à l'échéance T, l'institution financière puisse faire face à son engagement (i.e. verser le payoff $(S_T - K)_+$ ds le cas d'un call européen).

c'est le problème de couverture de produits dérivés (hedging problem).

Pour répondre à ces deux questions, la $1^{\underline{ère}}$ étape consiste à modéliser le marché. Comme l'avenir est incertain, il faut donc prévoir un modèle probabiliste. Comme le cours de l'action fluctue aléatoirement au cours du temps, il sera modélisé par un "processus stochastique" par exemple le célèbre modèle de Black-Scholes qui décrit l'évolution de l'actif sous-jacent par un m.b géométrique.

→ Une fois le marché est modélisé, il faut répondre aux deux questions précédentes.

Plus le modèle est complexe, plus son analyse est difficile.

Dans ce cours nous allons voir comment calculer le prix d'une option et la couvrir sous diverses hypothèses simplificatrices telles que:

(i) absence de coûts de transactions

(ii) absence de dividende sur les actifs

(iii) la possibilité d'emprunt illimité à découvert

(iv) l'existence d'acheteurs et de vendeurs pour toute quantité de produits financiers et à tout instant (marché liquide)

§ <u>Principe de la couverture des produits dérivés :</u>

Le principe de couverture de produits dérivés diffère fondamentalement de celui de la couverture du risque d'une assurance classique (contre le vol, le feu etc)

Pour faire face à ses obligations, un assureur classique vend beaucoup de contrats et compte sur le fait qu'un trop grand nombre de sinistres aient lieu simultanément est suffisamment faible.

Cette stratégie de couverture du risque s'appelle "Couverture du risque par diversification".

Une telle stratégie de couverture n'est pas adéquate pour les produits dérivés (entre autre à cause de la forte corrélation entre les cours financiers).

La banque doit donc éliminer le risque sur un seul contrat.

Le principe est le suivant :

Considérons une option d'achat européenne. La banque va utiliser la prime C ainsi qu'un emprunt pour acheter un peu de sous-jacent S. On dit qu'elle constitue un portefeuille. Au cours du temps elle va faire varier la quantité de sous-jacent dans son portefeuille de telle sorte qu'à l'échéance elle dispose d'une richesse $(S_T - K)_+$

Réf :

→ Pour mieux connaître les produits dérivés

(•) Hull : Option, Futures and other derivatives

(••) Chabardes, Delcaux : Produits dérivés (Livret)

→ Pour le calcul stochastique en finance

(•) Lamberton - Lapeyre : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.

(••) Demange - Rochet : Méthodes mathématiques de la finance.

→ Pour les entretiens :

(•) Gilles Pagès : 101 Quizz qui banquent (Recueil des questions d'entretien pour les étudiants du M2 El Karoui).