Cours n° 2 PRB212 : 13/4/21

§ Description du modèle de Black-Scholes.

L'évolution du cours est un modèle à temps continu :

(.) Un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t)

(..) Un actif sans risque (prix S_t^0 à l'instant t)

Actif sans risque :

Supposons que r désigne le taux d'intérêt sur une année.

$$t=0 \xrightarrow{\;r\;} t = 1 \text{ an}$$

$$1€ \qquad\qquad 1 + r \times 1 = 1 + r \text{ €}.$$

$$t=0 \xrightarrow{\;r/2\;} t = 0{,}5 \text{ an} \xrightarrow{\;r/2\;} t = 1 \text{ an}$$

$$1€ \longrightarrow \left(1+\frac{r}{2}\right) \longrightarrow \left(1+\frac{r}{2}\right)^2$$

$\vdots$

$$t=0 \xrightarrow{\;r/n\;} t = \frac{1}{n} \text{ an} \;\ldots\ldots \xrightarrow{\;r/n\;} t = 1 \text{ an}$$

$$1€ \longrightarrow \left(1+\frac{r}{n}\right) \;\ldots\ldots \longrightarrow \left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

Si on fait tendre $n \longrightarrow +\infty$ $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \longrightarrow e^{r \times 1}$ 1 : année

Donc, en temps continu, l'actif sans risque est modélisé par, l'e.d.o.

$$\boxed{\begin{cases} dS_t^0 = r S_t^0 \, dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases} \iff S_t^0 = e^{rt}}$$

r : désigne le taux d'intérêt instantané

<u>Actif risqué</u> :

L'évolution de l'actif risqué est régie par l'E.D.S :

$$\boxed{(B\text{-}S) \begin{cases} dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t \\ S_0 = S_0 > 0 \end{cases}}$$

μ : tendance de l'actif

σ : volatilité

S_0 : Spot.

On a vu que l'E.D.S (BS) admet une solution unique donnée par :

$$\boxed{S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right).}$$

Rq :

D'après le théorème d'existence et d'unicité d'E.D.S

Comme $S_0 \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |S_t|^2\right] < +\infty$.

Quelques propriété :

(·) $t \longmapsto S_t$ est continu.

(··) Pour $0<u<t$ $\boxed{\dfrac{S_t}{S_u} = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) + \sigma(W_t - W_u)\right)}$.

Donc $\dfrac{S_t}{S_u} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_u = \sigma(W_s, 0\leq s\leq u)$

(∴) Pour $0<u<t$ $\dfrac{S_t}{S_u} \overset{\text{Loi}}{=} \dfrac{S_{t-u}}{S_0}$

car $W_t - W_u \overset{\text{Loi}}{=} W_{t-u} \sim N(0, t-u)$.

§ Les stratégies autofinancées :

Déf :

Une stratégie de gestion de portefeuille sera définie par un processus $(\Phi_t)_{0\leq t\leq T} = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T} \in \mathbb{R}^2$, adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ du m. b. s. $(W_t)_{0\leq t\leq T}$.

H_t^0 : désigne la quantité d'actif sans risque qu'on détient dans le portefeuille

H_t : désigne la quantité d'actif risqué détenue dans le portefeuille.

Ainsi, à l'instant t, la valeur du portefeuille associée à la stratégie $(\phi_t)_{0\le t\le T}$ est donnée par :

$$\boxed{V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t}.$$

Déf : (Stratégie autofinancée)

Une stratégie autofinancée est définie par un couple de processus adaptés $(H_t^0)_{0\le t\le T}$ et $(H_t)_{0\le t\le T}$ vérifiant :

1°/ $\int_0^T |H_t^0|\, dt < +\infty$ p.s.

2°/ $(H_t)_{0\le t\le T} \in \mathcal{H}_T(\mathcal{F})$

et

3°/ $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u^0\, dS_u^0 + \int_0^t H_u\, dS_u$

Rq :

3°/ $\Leftrightarrow$ $dV_t(\phi) = H_t^0\, dS_t^0 + H_t\, dS_t$.

c'est à dire, d'un point de vue économique, aucun apport ou retrait ne se fait sur le portefeuille au cours du temps. Seules les variations des actifs non-risqué et risqué font changer la valeur du portefeuille au cours du temps.

normalement $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$

$$dV_t(\phi) = d(H_t^0 S_t^0) + d(H_t S_t)$$

$$= H_t^0\, dS_t^0 + \boxed{S_t^0\, dH_t^0 + d[H^0, S^0]_t}$$
$$+ H_t\, dS_t + \boxed{S_t\, dH_t + d[H, S]_t}$$

$= 0$

stratégie autofinancée

§ Actualisation :

On a vu qu'avec l'actif sans-risque

$$t=0 \quad \boxed{1\,€} \longrightarrow t=T, \ \boxed{e^{rT}\,€}$$

$$t=0 \quad \boxed{e^{-rT}} \longleftarrow t=T, \ \boxed{1\,€}$$

Donc, un actif qui vaut X_T à la date $t=T$, aujourd'hui il vaut à $t=0$ $\boxed{\tilde{X}_T = e^{-rT} X_T}$.

Dans la suite, $\tilde{X}_t = e^{-rt} X_t$ désigne la valeur actualisée à aujourd'hui $t=0$ de X_t.

En d'autres termes, $\tilde{X}_t = \dfrac{X_t}{S_t^0}$, donc $\tilde{X}_t$ correspond au nombre d'unité d'actifs non-risqué présents dans X_t

Rq : Donc $(S_t^0)_{0\le t\le T}$ joue le rôle de numéraire (voir les chapitres suivants)

Proposition :

Soit $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0\le t\le T}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ t.q :

(•) $\int_0^T |H_t^0|\,dt < +\infty$ p.s

(••) $(H_t)_{0\le t\le T} \in \mathcal{H}_T(\mathcal{F})$

On pose $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ $\leftarrow$ (valeur à la date t du portefeuille de stratégie ϕ)

et

$\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ $\leftarrow$ (valeur actualisée du portefeuille).

Alors, ϕ définit une stratégie autofinancée

ssi

$$\boxed{\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u \, d\tilde{S}_u \quad \text{où} \quad \tilde{S}_t = e^{-rt} S_t}$$

<u>Preuve</u> :

"$\Rightarrow$" Soit ϕ une <u>stratégie autofinancée</u>, on calcule alors par la formule d'I.P.P.

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\phi) &= d\left(e^{-rt} V_t(\phi)\right) \\ &= -r e^{-rt} V_t(\phi)\, dt + e^{-rt} dV_t(\phi) \\ &\quad + \underbrace{d\left[e^{-r\cdot}, V_\cdot(\phi)\right]_t}_{=0} \end{aligned}$$

car $t \mapsto e^{-rt}$ est à v.b.

Comme ϕ est une stratégie autofinancée on a :

$$dV_t(\phi) = H_t^0 \, dS_t^0 + H_t \, dS_t .$$

Donc $d\tilde{V}_t(\phi) = -r e^{-rt} V_t(\phi)\, dt + e^{-rt} H_t^0\, dS_t^0 + e^{-rt} H_t\, dS_t$

De plus on sait que $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$.

Donc,

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -r e^{-rt} [\cancel{H_t^0 e^{rt}} + H_t S_t]\, dt$$
$$+ \cancel{e^{-rt} H_t^0 r e^{rt} dt} + e^{-rt} H_t\, dS_t.$$

Donc, $d\tilde{V}_t(\phi) = -r e^{-rt} H_t S_t\, dt + e^{-rt} H_t\, dS_t$

$$= H_t \underbrace{[-r e^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt} dS_t]}_{d\tilde{S}_t}$$

Car par I.P.P.

$$d\tilde{S}_t = d(e^{-rt} S_t)$$
$$= -r e^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt} dS_t + 0.$$

Donc, $d\tilde{V}_t(\phi) = H_t\, d\tilde{S}_t$

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \int_0^t H_u\, d\tilde{S}_u, \text{ or}$$

$$\tilde{V}_0(\phi) = e^{-r0} V_0(\phi) = V_0(\phi)$$

Donc $\boxed{\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u\, d\tilde{S}_u}$.

" $\Leftarrow$ " il faut réécrire la preuve de Sens en haut. $\square$.

§ Changement de probabilité.

Déf :

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un ensemble muni d'une tribu.
Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$

(•) On dit que $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :

$$\forall N \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(N) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(N) = 0$$

(i.e. les évènements négligeables % à $\mathbb{P}$ sont forcément négligeables % à $\mathbb{Q}$).

Dans ce cas, on note $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$.

(••) On dit que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes :

si $\mathbb{P} << \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$.

Dans ce cas on note $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

Théorème (de Radon - Nikodym)

On a :

$$(\mathbb{Q} << \mathbb{P}) \iff \begin{cases} \exists \text{ une v.a } Z \geq 0 \text{ avec } \mathbb{E}[Z] = 1 \\ \text{t.q} \\ \forall A \in \mathcal{F} \\ \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \end{cases}$$

La v.a Z est appelée la densité de $\mathbb{Q}$ % à $\mathbb{P}$

et on note $\dfrac{dQ}{d\mathbb{P}} = Z$.

<u>Rq</u> : Lorsque $A = \Omega$

$$1 \underset{\substack{\text{car} \\ Q \text{ est une proba}}}{=} Q(\Omega) = \underbrace{\int_\Omega Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)}_{} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$$

Dans la suite pour une v.a X, on notera

$$\mathbb{E}^{Q}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, dQ(\omega) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

<u>Proposition</u> :

Supposons que $Q \ll \mathbb{P}$ de densité $Z \geq 0$ p.s avec $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$ i.e $\dfrac{dQ}{d\mathbb{P}} = Z$.

Alors,

$$(\mathbb{P} \sim Q) \iff (Z > 0 \text{ p.s})$$

donc $\dfrac{d\mathbb{P}}{dQ} = Z^{-1}$

$\rightarrow$ Comment passer de $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ vers $\mathbb{E}^{Q}$ et vice versa

Soit X une v.a.

$$\mathbb{E}^{Q}[X] \overset{\text{déf}}{=} \int_\Omega X(\omega)\, dQ(\omega) = \int_\Omega X(\omega) \frac{dQ(\omega)}{d\mathbb{P}(\omega)}\, d\mathbb{P}(\omega)$$

$$= \int_\Omega X(\omega)\, Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ].$$

idem. $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X Z^{-1}]$.

Théorème de Girsanov :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(W_t)_{t\geq 0}$ un m.b.s sur cet espace.

On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

Soit $T>0$ et $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de $\mathcal{H}_T(\mathcal{F})$

On pose :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right).$$

Si $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale, alors il existe une probabilité $\mathbb{P}' \sim \mathbb{P}$ t.q $\boxed{\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = L_T}$

t.q le processus $W'_t = W_t + \int_0^t \theta_s \, ds$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ m.b.s sous $\mathbb{P}'$.

Rq :

Sous $\mathbb{P}$: $(W_t)_{t\geq 0}$ est un m.b.s mais $(W'_t)_{t\geq 0}$ ne l'est pas

Sous $\mathbb{P}'$: $(W_t)_{t\geq 0}$ n'est pas un m.b.s mais $(W'_t)_{t\geq 0}$ l'est.

Notons que si $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale alors

$L_t > 0$ p.s et $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_0] = 1 \Rightarrow \mathbb{P} \sim \mathbb{P}'$.

Théorème (critère de Novikov)

Si $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ vérifie $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds\right)\right] < +\infty$

alors $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale.

§ Théorème de représentation des martingales :

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un m.b.s et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Pour $T>0$, on a vu que si $(H_t)_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}_T(\mathcal{F})$ l'intégrale stochastique $\left(\int_0^t H_u\, dW_u\right)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale.

Question :

Est ce que la réciproque est vraie ? i.e si on a $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale peut-on la représenter comme intégrale stochastique ?

Théorème

Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ - martingale de carré intégrable

avec $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ filtration naturelle d'un m.b.s $(W_t)_{0\leq t\leq T}$

Alors il existe un processus $(H_t)_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{H}^2_T(\mathcal{F}_t)$

t.q

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dW_s \quad \text{p.s.} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Rq : ⚠

cette représentation n'est possible que pour les martingales relatives à une filtration brownienne (filtration naturelle d'un m.b.s) et il faut qu'elles soient de carré intégrable.

§ Pricing et Couverture des options européennes dans le modèle de Black-Scholes.

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$, on dispose de :

(•) Un actif non-risqué

$$\begin{cases} dS_t^0 = r S_t^0\, dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases} \iff S_t^0 = e^{rt}.$$

où r : taux d'intérêt instantané supposé constant.

(••) Un actif (ou d actifs) risqués :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \\ S_0 = S_0 > 0 \end{cases} \iff S_t = S_0\, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

où $(W_t)_{t\ge 0}$ est un m.b.s sous la probabilité initiale $\mathbb{P}$.

→ Question : Quelle est la dynamique du processus $(\tilde{S}_t)_{0\le t\le T}$ avec $\tilde{S}_t = \dfrac{S_t}{S_t^0} = e^{-rt} S_t$.

Par I.P.P.

car $t \mapsto e^{-rt}$ à v.f.

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}\,dS_t + \underbrace{d[e^{-r\cdot}, S_\cdot]_t}_{=0}$$

Donc

$$d\tilde{S}_t = -re^{-rt}S_t\,dt + e^{-rt}[\mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t]$$

$$\boxed{d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t\,dt + \sigma\tilde{S}_t\,dW_t}\ . \quad \boxed{\text{Sous } \mathbb{P}}$$

Question : Est ce que $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ est une martingale ?

Par la formule d'Itô, la solution de

$$\begin{cases} d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t\,dt + \sigma\tilde{S}_t\,dW_t \\ \tilde{S}_0 = S_0 \end{cases}$$

est donnée par : $\tilde{S}_t = S_0 \exp\left((\underbrace{\mu - r}_{\neq 0} - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right)$

Ce n'est pas une martingale si $\mu \neq r$ car :

$\left(\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)\right)_{t\geq 0}$ qui est une martingale.

et d'un point de vue financier on ne peut pas exiger que la tendance d'un actif donné soit égale au taux d'intérêt du marché.

→ Comment faire pour avoir que $(\tilde{S}_t)_{\leq t \leq T}$ soit une martingale ?

ce terme nous gène pour avoir la prop. de mart.

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

Sous $\mathbb{P}$.

$$= S_0 \exp\left(\sigma \left(W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) t \right) - \frac{\sigma^2}{2} t \right)$$

Sous $\mathbb{P}$

On pose $\boxed{B_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t}$.

→ On applique le théorème de Girsanov

$$B_t = W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) ds \Rightarrow \boxed{\theta_s \equiv \frac{\mu - r}{\sigma}}$$

Donc, on pose

$$L_t = \exp\left(- \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 ds \right)$$

$$= \exp\left(- \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) W_t - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \frac{t}{2} \right)$$

Si on pose $\bar{\sigma} := - \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)$

$$L_t = \exp\left(\bar{\sigma} W_t - \frac{t}{2} \bar{\sigma}^2 \right), \text{ donc}$$

$\boxed{(L_t)_{t \geq 0} \text{ est une martingale}}$. (même pas besoin de vérifier Novikov)

Comme $(L_t)_{t\geq 0}$ est une martingale dans le théorème de Girsanov s'applique et on a :

Il existe une probabilité $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ telle que :

$$\boxed{\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = L_T}$$ et telle que :

le processus $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par

$$\boxed{B_t = W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)t}$$ est un m.b.s sous $\mathbb{P}^*$.

→ Donc, sous $\mathbb{P}^*$, $(\tilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ est donné

$$\tilde{S}_t = S_0 e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$$ donc $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$

est clairement une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

Déf : (Probabilité risque neutre)

On dit que $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre si

(•) $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$

(••) $(\tilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ (actif de base actualisé) soit une martingale sous $\mathbb{P}^*$

→ Comment interpréter cette probabilité $\mathbb{P}^*$?

Sous $\mathbb{P}^*$, les évolutions possibles du marché sont les mêmes que dans le monde réel (i.e sous $\mathbb{P}$).

c'est à dire on garde les mêmes scénarios d'évolution que sous $\mathbb{P}$ mais avec une probabilité différente.

La probabilité $\mathbb{P}^*$, n'est donc pas observée sur les marchés mais c'est un outil de calcul très utile. La proba $\mathbb{P}^*$ permet de se ramener à un marché "risque neutre" où la valeur relative $\left(\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_0} = \frac{S_t}{e^{rt}} \right)$ du cours de l'actif risqué par rapport au cours de l'actif non-risqué n'a pas de tendance haussière ou baissière. (car c'est c'est une martingale)

Donc $\frac{S_t}{S_t^0}$ n'a ni tendance à croître ni à décroître sous $\mathbb{P}^*$

i.e sous $\mathbb{P}^*$, S_t (actif risqué) et S_t^0 (actif sans risque) ont la même tendance d'évolution,

§ Problème de pricing des options européennes

On rappelle qu'une option européenne est définie par la fonction profit (payoff) de son exercice.

Par exemple, l'exercice d'une option Call permet de réaliser un profit de $(S_T - K)_+$.

→ Le payoff d'une option européenne est donc une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable positive qu'on notera h

Définition : (Stratégie admissible)

Une stratégie $\phi = ((H_t^0)_{0\leq t\leq T}, (H_t)_{0\leq t\leq T})$ est admissible si

(•) ϕ est autofinancée,

(••) $\tilde{V}_t(\phi) \geq 0 \quad \forall\ t \in [0,T]$,

(•••) $\mathbb{E}^*\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\tilde{V}_t(\phi)|^2\right] < +\infty$.

Définition : (Option réplicable ou "hedgeable")

On dira qu'une option est réplicable si sa valeur à l'échéance (payoff) est égale à la valeur à l'échéance d'un portefeuille associé à une stratégie admissible.