

---

# NUMERICAL METHODS FOR PDEs IN FINANCE

## Liste Projets

---

Ce fichier contient une liste des projets proposés pour l'examen de Méthodes numériques pour les EDP en finance. Les projets seront rédigés, de préférence, en binôme ou trinôme. Les méthodes peuvent être codées en Python (le langage que nous utiliserons pendant le cours), Matlab, Octave, ou Scilab ; C++, C aussi admis. Le rapport final du projet (toujours en format pdf) avec les codes doit être envoyé *au moins une semaine avant la soutenance* (deux si un avis est demandé).

Soutenances sous forme de présentations orales en janvier (environ 10 minutes présentation + 10 minutes de questions). Les présentations peuvent se faire au tableau ou avec des transparents. Dans le deuxième cas, le jour de la soutenance il est impératif de se présenter avec un clef USB contenant une copie pdf des transparents eu/ou un ordinateur (pensez aux câbles pour vous connecter au projecteur).

Adresse courriel : [alessandro.zilio@u-paris.fr](mailto:alessandro.zilio@u-paris.fr), [azilio@math.univ-paris-diderot.fr](mailto:azilio@math.univ-paris-diderot.fr)

Projets :

1. Asian fixed strike option
2. Option asiatique strike flottant
3. Look-back option
4. American option
5. Gamma-constrained option
6. Amerasian option
7. Option en présence d'un processus de Levy

# 1. PROJET : OPTION ASIATIQUE STRIKE FIXE

Une option asiatique portant sur un actif  $S_t$  et sur une valeur moyenne

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$$

et payoff  $\varphi(S, A)$  vaut  $V_t = \mathbf{E}[e^{-r(T-t)} \varphi(S_T, A_T)]$ . Le prix est également donné par une fonction  $V = V(t, S, A)$  tel que

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\partial_t V - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS} V - rS \partial_S V - \frac{S-A}{t} \partial_A V + rV = 0 \\ V(T, S, A) = \varphi(S, A) \end{cases}$$

pour  $S > 0$ ,  $A > 0$  et  $t \in [0, T[$ .

1. En considérant le processus bidimensionnel  $X_t := (S_t, A_t)$ , retrouver l'EDP (1.1).

2. On considère que le prix de l'option à la date  $T$  d'échéance est  $\varphi = (A_T - K)_+$  (cas du call strike fixe). Vérifier que cela correspond à un droit d'achat au prix  $K - A_T + S_T$  à l'échéance.

On fait le changement de variable  $x := \frac{K-tA/T}{S}$  et on cherche une solution particulière sous la forme  $V(t, S, A) = Sf(T-t, x)$ . On commencera par montrer que  $f$  doit vérifier l'EDP suivante :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} f + \left( \frac{1}{T} + rx \right) \partial_x f = 0 \\ f(0, x) = x_- = \max(-x, 0). \end{cases}$$

La valeur cherchée est alors  $V(0, S, S) = Sf(T, x = K/S)$ .

3. Dans le cas où la condition initiale (1.2) est  $g(0, x) := -x$ , déterminer une solution analytique de l'équation de la forme  $g(t, x) = xa(t) + b(t)$  (calculer explicitement  $a(t)$  et  $b(t)$ ). Ensuite, pour le cas de  $f(0; x) := x_-$ , on admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t, x) = 0$  et que  $f(t, x) \sim g(t, x)$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . En déduire une EDP approchée sur un domaine spatial de type  $[X_{\min}, X_{\max}]$  (avec  $X_{\min} \leq 0$ ,  $X_{\max} > \bar{x} := K/S$ ), en précisant les conditions aux limites utilisées.

4. Résoudre l'EDP en utilisant les différences finies : on s'intéressera en particulier aux schémas d'Euler explicite, d'Euler implicite, et de Crank-Nicolson pour la discrétisation en temps, et avec un schéma centré pour la discrétisation en espace. Pour chaque méthode, on pourra étudier la stabilité.

On pourra aussi étudier si l'ordre numérique est conforme à l'ordre théorique attendu. Pour étudier l'ordre numérique, comme on ne connaît pas explicitement la solution exacte, on pourra utiliser comme solution de référence la solution numérique obtenue avec un maillage très fin en espace et en temps, et comparer les valeurs en un point  $S$  fixé.

5. Comparer avec les résultats de [15] (typiquement avec  $r = 0.09$  et  $\sigma = 0.3$ ). (On pourra aussi consulter [9] pour des résultats plus précis)

6. Comparer les résultats obtenus avec  $X_{\min} = 0$  et avec  $X_{\min} < 0$ .

Références : [15], [9], [18], [1].

## 2. PROJET : OPTION ASIATIQUE STRIKE FLOTTANT

Une option asiatique portant sur un actif  $S_t$  et sur une valeur moyenne

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$$

et payoff  $\varphi(S, A)$  vaut  $V_t = \mathbf{E}[e^{-r(T-t)} \varphi(S_T, A_T)]$ . Le prix est également donné par une fonction  $V = V(t, S, A)$  tel que

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\partial_t V - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS} V - rS \partial_S V - \frac{S-A}{t} \partial_A V + rV = 0 \\ V(T, S, A) = \varphi(S, A) \end{cases}$$

pour  $S > 0$ ,  $A > 0$  et  $t \in [0, T[$ .

1. En considérant le processus bidimensionnel  $X_t := (S_t, A_t)$ , retrouver l'EDP (2.1).

2. On considère que le prix de l'option à la date  $T$  d'échéance est  $\varphi = (A_T - S_T)^+$  (cas du put strike flottant). Vérifier que cela correspond à un droit de vente au prix  $A_T$  à l'échéance.

On fait le changement de variable  $x := -\frac{t}{T} \frac{A}{S}$ , et on cherche une solution particulière sous la forme  $V(t, S, A) = Sf(T - t, x)$ . Montrer que  $f$  doit vérifier l'EDP suivante :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} f + \left( \frac{1}{T} + rx \right) \partial_x f = 0 \\ f(0, x) = (1 + x)_- = \max(-x, 0). \end{cases}$$

La valeur cherchée est alors  $V(0, S, S) = Sf(T, x = 0)$ .

3. Dans le cas où la condition initiale (2.2) est  $f(0, x) = (1 + x)$ , déterminer une solution analytique de (2.2) de la forme  $f(t, x) = xa(t) + b(t)$  (calculer explicitement  $a(t)$  et  $b(t)$ ). Ensuite, pour le cas de  $f(0, x) := (1 + x)_-$ , on admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t, x) = 0$  et que  $f(t, x) \sim xa(t) + b(t)$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . En déduire une EDP approchée sur un domaine spatial de type  $[X_{\min}, X_{\max}]$  (avec  $X_{\min} < 0$ ,  $X_{\max} > 0$ ), en précisant les conditions aux limites utilisées.

4. Résoudre l'EDP en utilisant les différences finies : on s'intéressera en particulier aux schémas d'Euler explicite, d'Euler implicite, et de Crank-Nicolson pour la discrétisation en temps, et avec un schéma centrée pour la discrétisation en espace. Pour chaque méthode, on pourra étudier la stabilité.

On pourra aussi étudier si l'ordre numérique est conforme à l'ordre théorique attendu. Pour étudier l'ordre numérique, comme l'on ne connaît pas explicitement la solution exacte, on pourra utiliser comme solution de référence la solution numérique obtenue avec un maillage très fin en espace et en temps.

5. Comparer avec les résultats de [15] (On pourra aussi consulter [9])

Références : [15], [9], [18], [1].

### 3. PROJET : OPTION SUR MAXIMUM (FLOATING LOOKBACK PUT)

On considère un sous-jacent qui vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(rdt + dB_t)$$

sous la probabilité risque neutre. On note  $M_t = \max_{0 \leq \tau \leq t} S$  la valeur maximale sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Le prix de l'option à l'instant  $t$  est

$$e^{r(T-t)} \mathbf{E}[\varphi(S_T, M_T) | \mathcal{F}_t]$$

où  $\varphi(S_T, M_T)$  est le payoff de option. On peut vérifier [7] que le prix à l'instant  $t$  peut s'écrire  $V(t, S_t, M_t)$  où  $V = V(t, S, M)$  est solution de l'EDP

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\partial_t V - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} V - rS \partial_S V + rV = 0 & 0 \leq S \leq M, 0 \leq t \leq T, \\ V(T, S, M) = \varphi(S, M) & 0 \leq S \leq M, \\ \partial_M V(T, S, S) = 0 & S \geq 0. \end{cases}$$

On considère le cas du payoff  $\varphi(S, M) = M - S$  ("floating lookback put"). Montrer que si  $V = MW(t, S/M)$  alors  $W$  vérifie l'EDP

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\partial_t W - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} W - rx \partial_x W + rW = 0 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T, \\ W(T, x) = \tilde{\varphi}(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ \partial_x W(t, 1) = W(t, 1) & t > 0 \end{cases}$$

ou  $\tilde{\varphi}(x)$  est une fonction à préciser. L'objectif sera d'approcher numériquement la solution de (3.2) par les différences finies (schéma explicite, implicite, Crank-Nicolson pour la discrétisation en temps, schéma centré pour la discrétisation spatiale). Pour chaque méthode, on précisera les conditions de stabilité et on étudiera si l'ordre numérique est conforme à l'ordre théorique attendu.

On comparera avec les prix donnés par les formules fermées (voir [17], avec  $D = 0$  (dividendes) et  $b = r$ ; Pour le put strike flottant, on a une formule fermée.<sup>1</sup>

---

1.

$$\begin{aligned} V(t, S, M) := & M e^{-r(T-t)} N(-d_1 + \sigma \sqrt{T-t}) - S N(-d_1) \\ & + S e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[ \left( \frac{S}{M} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(d_1 - 2\frac{r}{\sigma} \sqrt{T-t}) + e^{-r(T-t)} N(d_1) \right] \end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

#### 4. PROJET : OPTIONS AMÉRICAINES

On considère la valeur d'une option américaine put

$$u(t, x) = \sup_{\tau \in \text{TA}[t, T]} \mathbf{E} \left[ e^{-r(T-\tau)} \varphi(S_\tau^{t, x}) \right]$$

où  $\text{TA}[t, T]$  est l'ensemble de temps d'arrêt adaptés à la filtration, et  $\varphi(x) = (K - x)^+$ . On peut montrer que la fonction  $V(t, x) = u(T - t, x)$  vérifie l'EDP non-linéaires suivante

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\min \left( \partial_t V - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} V - r x \partial_x V + r V, V - \varphi(x) \right) = 0 \\ V(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

1. Comparer différentes approches (Euler explicite et implicite, Crank-Nicolson) pour le calcul d'une approximation de la solution exacte. Utiliser comme conditions limites gauche  $v(t, X_{\min}) = v_\ell(t) := K - X_{\min}$  et droite  $v(t, X_{\max}) = 0$ , pour des choix opportunes des paramètres (cas typiques :  $r = 0.1, \sigma = 0.2, T = 1, \dots$ ). Pour traiter l'obstacle dans le cas du schéma Euler implicite, tester les algorithmes PSOR, LU et la méthode de Newton.

2. Étudier le schéma implicite Backward Difference Scheme (BDF) proposé dans [5] pour les options américaines, et comparer les résultats obtenus avec ces du schéma de Crank-Nicolson et d'autres schémas similaires, en particulier pour des grandes valeurs du nombre CFL.

References : [5], [6].

## 5. PROJET : ÉQUATION DE BLACK ET SCHOLES AVEC CONTRAINTE GAMMA

On considère un portefeuille constitué d'un actif sans risque  $S^0$  et d'un actif risque  $S_t$ , évoluant suivant

$$dS^0 = S^0 r dt \quad \text{et} \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma(t, S_t) dB_t)$$

Notons  $Y_t$  la part d'actif risque à l'instant  $t$ . Dans le modèle de Black-Scholes, la stratégie de hedging classique consiste à prendre  $Y_t = \frac{\partial v}{\partial s}(t, S_t)$ . En pratique les contraintes du marché font que cette stratégie optimale n'est pas toujours possible, et on examine ici un modèle où l'on impose une contrainte sur les variations de  $Y$ . Plus précisément, on se donne une constante  $\Gamma > 0$  et on considère contrainte

$$s \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \leq \Gamma$$

(On dit alors que  $v$  est  $\Gamma$ -concave).

On montre [16] que le prix de l'option  $v$  avec contrainte Gamma est solution de

$$(5.1) \quad \begin{cases} \min \left( -\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t, s) s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - rs \frac{\partial v}{\partial s} + rv, \Gamma - s \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) = 0 \\ v(T, s) = \hat{g}(s). \end{cases}$$

La fonction  $\hat{g}$  est elle même définie comme la plus petite fonction  $\Gamma$ -concave majorant  $g(s)$ , et on montre que cette fonction est solution de l'équation

$$\min \left( \hat{g}(s) - g(s), \Gamma - s \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial s^2} \right) = 0, \quad s > 0.$$

1. On commencera en particulier par proposer un algorithme de calcul de  $\hat{g}$  dans le cas du put :  $g(s) = (K - s)_+$ . On pourra adapter la méthode de Newton pour les options américaines [6].

On pourra comparer avec la solution analytique  $\hat{g}(s)$  donnée dans [14, Sec. 8].

2. Programmer les différences finies pour (5.1).

Applications numériques :  $K = 100$ ,  $\sigma(t, s) = 0.1$ ,  $r = 0.1$ ,  $T = 0.1$ ,  $\Gamma = 1$ , et avec cas 1 :  $g(s) = (K - s)_+$ , puis cas 2 :  $g(s) = (K - 2|s - K|)_+$ .

3. Comparer ces résultats (cas 1 et 2) avec le prix d'une option  $u$  de payoff  $g$  évoluant sans contraintes, cad suivant le modèle classique de Black et Scholes :

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t, s) s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - rs \frac{\partial u}{\partial s} + ru = 0$$

avec la condition terminale :  $u(T; s) = \hat{g}(s)$ .

4. Réfléchir à un schéma aux différences finies, et éventuellement le programmer, pour une option avec coût de transaction (modèle de Leland, 1985), et contrainte Gamma, modélisée par

$$\min \left[ -\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t, s) s^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \text{Le} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right| \right) - rs \frac{\partial v}{\partial s} + rv, \Gamma - s \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right] = 0$$

avec Le (nombre de Leland) petit, et  $v(T, s) = \hat{g}(s)$ .

## 6. PROJET : OPTION AMÉRICANO-ASIATIQUE

On considère un modèle d'option américano-asiatique<sup>2</sup> (resp. asiatique) portant sur un actif  $S_t$  et sur une valeur moyenne

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau.$$

On considère que le prix de l'option à échéance est  $(A_T - S_T)_+$  (cas du call-strike flottant). Le détenteur du contrat a le droit d'exercer à tout moment pour un payoff de valeur

$$\varphi(S_t, A_t) = (A_t - S_t)_+$$

On montre que la valeur  $V = V(t, S, A)$  d'une telle option vérifie l'EDP

$$(6.1) \quad \min \left( -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{t} (S - A) \partial_A V + rV, V - \varphi(S, A) \right) = 0$$

resp.

$$(6.2) \quad -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{t} (S - A) \partial_A V + rV = 0$$

avec  $S, A \geq 0$  pour tout  $t \in ]0, T[$  et la condition terminale  $V(T, S, A) = \varphi(S, A)$ .

1. On fait les changement de variables  $x := -\frac{A}{S}$  et  $t \rightarrow T - t$ , et on cherche une solution particulière sous la forme  $V(t, S, A) = Sf(T - t, x)$ . Dans le cas de (6.1), montrer

$$\min \left( \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left( \frac{1+x}{T-t} + rx \right) \frac{\partial f}{\partial x}, f - g(x) \right) = 0$$

et resp. dans (6.2)

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left( \frac{1+x}{T-t} + rx \right) \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

avec  $x \leq 0$   $t \in ]0, T[$  et conditions initiales

$$f(0, x) = g(x) := (-1 - x)_+$$

La valeur cherchée est alors  $V(0, S_0, S_0) = S_0 f(T, x = -1)$ .

Pour les questions suivantes, on pourra commencer par traiter le cas plus simple (6.2) (cas asiatique), afin de valider la méthode et les conditions aux limites utilisées (on pourra se comparer à [15] dans ce cas). On pourra ensuite traiter (6.1).

2. On commencera par implémenter un schéma aux différences finies explicite. Constaté des problèmes de stabilité numérique.

3. Considérer ensuite un schéma implicite (Euler implicite ou Crank-Nicolson), et tester en particulier une version décentrée en espace afin d'assurer la stabilité : choisir un décentrage gauche ou droit suivant la position du nœud<sup>3</sup>. Pour traiter la partie "américaine", on pourra considérer une méthode de splitting. (On pourra éventuellement comparer dans un deuxième temps avec une méthode de type Newton.) On travaillera sur un intervalle de discrétisation

2. Références : [15] (options asiatiques), On pourra aussi consulter [4] : approche EDP pour une option américano-asiatique, mais pour une fonction payoff différente.

3. Si  $b(x_i) = \frac{1+x_i}{T-t} + rx_i \geq 0$ , choisir  $b(x_i)v(x_i) \simeq b(x_i) \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$ . Si  $b(x_i) < 0$ , choisir  $b(x_i)v(x_i) \simeq b(x_i) \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$

$[X_{\min}, X_{\max}]$  avec  $X_{\min} = 1$  et  $X_{\max} = 0$  et des conditions aux limites appropriées (Dirichlet à gauche, Neumann à droite :  $\partial_x f(t, X_{\max}) = 0$ )<sup>4</sup>

Exemple de données numériques :  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $K = 100$ ,  $S_0 = 100$ ,  $T = 1$ . On tachera d'évaluer le prix avec 3 chiffres significatifs.

---

4. Afin de trouver de bonnes conditions aux limites quand  $x \rightarrow -\infty$ , on pourra commencer par déterminer une solution analytique de la forme  $k(t, x) = a(t)x + b(t)$  dans le cas où la condition initiale est  $k(0, x) = -1 - x$  et l'équation

$$\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \left(\frac{1+x}{T-t} + rx\right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0.$$

On pourra alors prendre la condition limite à gauche  $f(t, X_{\min}) = k(t, X_{\min})$  et  $x = X_{\min}$



## 7. PROJET : OPTION AVEC SAUTS

On considère le prix d'une option de payoff  $\varphi$  pour un modèle de diffusion avec sauts (suivant le modèle de Merton [12])

$$dS = S(vdt + \sigma dB_t + (\eta - 1)dq)$$

où  $dq$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  indépendant de  $dB_t$ .<sup>5</sup>

On montre que la valeur  $V = V(t, s)$  correspondant à une option de payoff sur l'actif  $S$  satisfait l'EDP :

$$(7.1) \quad \begin{cases} -\partial_t V - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} V - (r - \lambda\kappa)s\partial_s V + rV + L(V) = 0 & s > 0, 0 < t < T, \\ V(T, s) = \varphi(s) \end{cases}$$

où on a noté  $V \mapsto L(V)$  l'opérateur linéaire t.q. :

$$L(V)(s) := \lambda \left( V(s) - \int_0^\infty V(s\eta)g(\eta)d\eta \right)$$

avec  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de l'amplitude du saut  $\eta$ , vérifiant

$$g \geq 0, \quad \int_0^\infty g(\eta)d\eta = 1, \quad \text{et où} \quad \kappa := \mathbb{E}[\eta - 1] = \int (\eta - 1)g(\eta)d\eta.$$

Les paramètres du marchés (taux  $r$ , volatilité  $\sigma$ ) sont supposés fixes. On propose d'implémenter une méthode numérique similaire à [8], mais simplifiée (pas d'interpolation entre maillages ni d'utilisation de FFT).

1. Proposer des conditions aux limites raisonnables au voisinage de  $S = 0$ , de la forme  $v(t, S) = a(t)S + b(t)$ . (Condition limite à droite : prendre  $v(t, S) = 0$  pour  $S$  assez grand).

2. On travaillera sur un intervalle du type  $[S_{\min}, S_{\max}]$  avec  $S_{\min} > 0$ , et on effectue le changement de variable logarithmique  $s = Ke^x$ , soit  $x = \log(s/K)$ . Écrire l'EDP correspondante pour la fonction  $u(t, x)v(t, s)$ . Comme conditions aux limites on prendra

$$\begin{cases} u_g(t, x) = a(t)Ke^x + b(t), & \text{pour } x \leq X_{\min} := \log(S_{\min}/K) \\ u_d(t, x) = 0 & \text{pour } x \geq X_{\max} := \log(S_{\max}/K). \end{cases}$$

3. Écrire une approximation du terme intégral sur un maillage uniforme  $(x_i)$  de  $[X_{\min}, X_{\max}]$ .<sup>6</sup>

4. Mettre en œuvre un schéma explicite aux différences finies pour la fonction  $u$ .

5. Comparer avec une formule exacte.<sup>7</sup> (comparer aussi avec un modèle sans saut).

6. Programmer un schéma Euler implicite, puis un schéma Crank-Nicolson.

5. La probabilité que  $dq = 1$  est  $\lambda dt$  et la probabilité que  $dq = 0$  est  $1 - dt$ . Au voisinage d'un saut on a donc  $dS \simeq S(\eta - 1)$  et donc on saute de la valeur  $S$  à la valeur  $S + dS = \eta S$ . Ici  $\eta$  représente l'amplitude du saut.

6. On approchera l'intégrale avec  $2P + 1$  termes  $(x_j)$  centres en  $j = 0 : \int_0^\infty v(s\eta)g(\eta)d\eta = \int_{\mathbb{R}} v(Ke^{x_i+y})g(Ke^y)dy \simeq \Delta y \sum_j v(Ke^{x_i+j})g(Ke^{x_j})e^{x_j}$ . On pourra utiliser  $I$  points  $x_i = X_{\min} + ih, i = 1, \dots, I$  dans  $[X_{\min}, X_{\max}]$ ,  $x_0 = X_{\min}, x_{I+1} = X_{\max}$ , le terme intégral dépendra au final des valeurs du schéma  $(u_i)_{1 \leq i \leq I}$  et de  $P$  valeurs de bord  $u_i$  pour des  $i \leq 0$  et aussi de  $P$  valeurs pour  $i > I$ , et qui pourront être calculées à l'aide de  $u_g$  et  $u_d$ .

7. Formule de Merton : pour  $t < T$  et  $\tau = T - t$ , avec  $r_n = r - \lambda(e^{\mu+\gamma^2/2} - 1) + n\frac{\mu}{t}$ ,  $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n\frac{\gamma^2}{t}}$ ,  $s_n = se^{n\gamma^2/2}$ ,  $\kappa := \mathbb{E}[\eta - 1] = e^{\mu+\gamma^2/2} - 1$ ,

$$P_{\text{Merton}}(t, s) := e^{-r\tau} \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{r_n\tau} V_{BS}(t, s_n, K, r_n, \sigma_n)$$

et où  $V_{BS}(t, S, K, r, \sigma)$  est la formule de Black et Scholes après renversement du temps  $t \mapsto T - t$ .

7. (Facultatif) Proposer une EDP et un schéma pour l'option américaine correspondante.

RÉFÉRENCES

- [1] Yves ACHDOU et Olivier PIRONNEAU. *Computational methods for option pricing*. T. 30. Frontiers in Applied Mathematics. Society for Industrial et Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005, p. xviii+297.
- [2] G. BARLES, Ch. DAHER et M. ROMANO. « Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory ». In : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 5.1 (1995), p. 125-143.
- [3] Ana BERMÚDEZ et Maria R. NOGUEIRAS. « Numerical solution of two-factor models for valuation of financial derivatives ». In : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14.2 (2004), p. 295-327.
- [4] Alfredo BERMÚDEZ, Maria R. NOGUEIRAS et Carlos VÁZQUEZ. « Numerical solution of variational inequalities for pricing Asian options by higher order Lagrange-Galerkin methods ». In : *Appl. Numer. Math.* 56.10-11 (2006), p. 1256-1270.
- [5] Olivier BOKANOWSKI et K. DEBRABANT. « High order finite difference schemes for some diffusion obstacle problems ». In : (2015).
- [6] Olivier BOKANOWSKI, Stefania MAROSO et Hasnaa ZIDANI. « Some convergence results for Howard's algorithm ». In : *SIAM J. Numer. Anal.* 47.4 (2009), p. 3001-3026.
- [7] Olivier BOKANOWSKI, Athena PICARELLI et Hasnaa ZIDANI. « Dynamic programming and error estimates for stochastic control problems with maximum cost ». In : *Appl. Math. Optim.* 71.1 (2015), p. 125-163.
- [8] Y. D'HALLUIN, P. A. FORSYTH et K. R. VETZAL. « Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes ». In : *IMA J. Numer. Anal.* 25.1 (2005), p. 87-112.
- [9] François DUBOIS et Tony LELIÈVRE. « Efficient pricing of Asian options by the PDE approach ». In : *Journal of Computational Finance* 8.2 (2004), p. 55-64.
- [10] Kazufumi ITO et Karl KUNISCH. « Semi-smooth Newton methods for variational inequalities of the first kind ». In : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 37.1 (2003), p. 41-62.
- [11] Damien LAMBERTON et Bernard LAPEYRE. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Second. Ellipses, Édition Marketing, Paris, 1997, p. 176.
- [12] Robert C MERTON. « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous ». In : *Journal of financial economics* 3.1-2 (1976), p. 125-144.
- [13] Bernt OKSENDAL. *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] Huyên PHAM. *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*. T. 61. Mathématiques et Applications (Berlin) [Mathematics and Applications]. Springer, Berlin, 2007, p. xvi+186.
- [15] L. C. G. ROGERS et Z. SHI. « The value of an Asian option ». In : *J. Appl. Probab.* 32.4 (1995), p. 1077-1088.
- [16] H. Mete SONER et Nizar TOUZI. « Superreplication under gamma constraints ». In : *SIAM J. Control Optim.* 39.1 (2000), p. 73-96.
- [17] Paul WILMOTT. « Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering ». In : 1998.
- [18] Paul WILMOTT et al. *The mathematics of financial derivatives : a student introduction*. Cambridge university press, 1995.