1. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire d-dimensionnel de vecteur moyenne $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$ et de matrice de v cov V. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^d$

On a

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle u, X\rangle}) = \mathbb{E}(e^{iu^t X}) = \mathbb{E}(e^{i(u_1X_1 + \dots u_dX_d)}) \quad (*)$$

$$\cancel{\neq \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{d} e^{iu_jX_j}\right)}$$

On pose $Y = u_1X_1 + \dots + u_dX_d$

On sait que Y est gaussienne car combinaison linéaire des composants d'un vecteur gaussien

Cherchons ses caractéristiques

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(u_1X_1 + \dots + u_dX_d) = u_1\mathbb{E}(X_1) + \dots + u_d\mathbb{E}(X_d)$$

$$\mathbb{E}(Y) = u_1 b_1 + \dots + u_d b_d = u^t b = \langle u, b\rangle$$

$$Var(Y) = Var(u_1X_1 + \dots + u_dX_d)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{d} u_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i\neq j} u_i u_j \, cov(X_i, X_j)$$

~~Or V est une matrice symetrique~~

Or on sait

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY}) = e^{it\mathbb{E}(Y) - \frac{t^2}{2}Var(Y)}$$

ainsi $\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iY}) = \varphi_Y(1)$ d'après $(*)$

ainsi $\cancel{\varphi_X(u) = e^{it\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{2}}}$

$$\varphi_X(u) = e^{i\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{2}Var(Y)}$$

~~626~~

626 49 57 70

$$= e^{iu^t b - \frac{1}{2}Var(Y)}$$

En calculant $\langle u, Vu\rangle$ on a

$$\langle u, Vu\rangle = (u_1 \cdots u_d) \begin{pmatrix} Var(X_1) & \cdots & cov(X_1, X_d) \\ & \ddots & \\ cov(X_d, X_1) & & Var(X_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} u_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i \neq j} u_i u_j cov(X_i, X_j)$$

$$\langle u, Vu\rangle = Var(Y)$$

ainsi $\varphi_X(u) = e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Vu\rangle}$ cqfd

2) soit X une variable aléatoire symétrique par rapport à 0 ie $P_X = P_{-X}$

On a

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \overline{\varphi_X(t)}$

Or X est symetrique $\Rightarrow \varphi_X = \varphi_{-X}$

alors $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$

X étant donc symetrique $\Rightarrow \varphi_X = \varphi_{-X}$

$\Rightarrow$ alors $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$

Or un complexe est égal à son conjugué ssi sa partie imaginaire est nulle

d'où φ_X est à valeurs réelles.

3) Ici on part de ce qu'on appelle transformée de Fourier

On suppose que X admet une fonction de densité dans le cas $f(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt$

$E|X|^p < +\infty \Rightarrow x \mapsto (ix)^p e^{itx} f(x)$

est uniformement integrable et d'après les prop de l'inte la derivation sous le signe intégrale, φ_X est p fois derivable et

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^{(k)} e^{itx} f(x)\, dx \quad \forall k = 1 \dots p$$

ie $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_X^{(k)}(t) = E\left((iX)^k e^{itX}\right) \quad k = 1 \dots p$$

En particulier si $t = 0$,

$$\varphi_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(i^k X^k e^0)$$

$$= i^k \, \mathbb{E}(X^k) \quad \forall\, k \in \{1, \dots, p\}$$

$$\boxed{\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \, \mathbb{E}(X^k)}$$

cqfd