1 数值误差的避免

计算结果如下，其中 exp 是 c++cmath 库的函数，认为是标准答案

直接展开法在计算完前七项后选择罢工，猜测也许是直接计算x^n和$n!$数值太大了。并且其计算出来的七项与实际的结果可以说是南辕北辙

递归法通过项之间的递推关系，有效的减少了计算量，并改善了数值太大的问题。但因为截断前 n 项计算，会发生严重的抵消，得到的结果也和准确没什么关系

先递归地计算e^x，再求倒数的办法，先避免了数值太大的问题，又有效地避免了抵消，计算是稳定的，是一种有效可行的算法。

Exp	1 4.53999e-05 2.06115e-09 9.35762e-14 4.24835e-18 1.92875e-22 8.75651e-27 3.97545e-31 1.80485e-35 8.19401e-40 3.72008e-44
直接展开	1 4.53999e-05 -1.8323e-09 -0.000389238 -8.58218 -210219 -1.19475e+09
递归	1 4.53999e-05 5.62188e-09 -3.06681e-05 -3.16573 11072.9 -3.35168e+08 -3.29796e+13 9.18057e+16 -5.05163e+21 -2.91376e+25
递归求倒数	1 4.53999e-05 2.06115e-09 9.35762e-14

	4.24835e-18 1.92875e-22 8.75651e-27 3.97545e-31 1.80485e-35 8.19401e-40 3.72008e-44

2 矩阵的模与条件数

a

上三角矩阵的行列式为对角元的积，即 1，奇异矩阵行列式为 0，A 不是奇异矩阵。

b

用伴随矩阵法求A^{-1}，对于特定行，需要加上其下每一行乘上两行的行差，即为

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & \cdots & 2^{n-4} & 2^{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2^{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

c

矢量的无穷模是其所有分量绝对值的最大值,矩阵的无穷模是其行向量绝对值的和的最大值
证明如下:

$$\|A\|_{\infty} = \max(max|a_i^T x|) \le \max\left(\max\sum|a_{i,p}^T||x_p|\right) \le \max\left(max\sum|a_{i,p}^T|\|x\|_\infty\right)$$

$$= max\sum|a_{i,p}| = \|a_i\|_1$$

然后证明$\|A\|_{\infty} \ge \|a_i\|_1$

$$\|A\|_{\infty} = max\|Ax\| \ge |a_k^T y| = \|a_k\|_1 = \|a_i\|_1$$

其中 k 为矩阵行向量最大的一次模的行数，y 为使$a_k^T y = \|a_k\|_1$的向量
以上，即证明矩阵的无穷模是其行向量绝对值的和的最大值

d

要证

$$\|U\|_2 = max\frac{\|Ux\|}{\|x\|} = 1$$

只要证$\|Ux\| = \|x\|$(欧氏模)

即$< Ux, Ux > = < x, x >$

因为幺正矩阵$U^T U = I$，所以$< Ux, Ux > = (Ux)^T Ux = x^T U^T Ux = x^T x = < x, x >$

所以$\|U\|_2 = 1$，$\|U^H\|_2$同理

利用幺正变换的保模性质，对于条件数$K_2(A) = K_2(UA)$的证明如下:

$$K_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \|UA\|_2\|(UA)^{-1}\|_2 = K_2(UA)$$

e

对于具体的矩阵$\|A\|_\infty = n$，$\|A^{-1}\|_\infty = 2^{n-1}$，$K_\infty(A) = n2^{n-1}$

3.Hilbert 矩阵

a

$$(H_n)_{ij} = \int_0^1 x^{i+j-2}dx$$

$$b_i \ = \int_0^1 x^{i-1}f(x)dx$$

b

使用二次型来证明:

$$g(x) = \ x^T Hx$$

$$f(x) = g(x)x = \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \frac{2}{2n-2}x^{2n-2} + \frac{3}{2n-3}x^{2n-3} + \cdots + \frac{2}{2}x^2 + x$$

$$f(x)' = x^{2n-1} + 2x^{2n-3} + \cdots + nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 1$$

$$= (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1)^2 \geq 0$$

又$f(0) = 0$，故$f(x) \geq 0$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \geq 0, x \neq 0$$

且$g(0) = 0$

所以 H 是正定矩阵

正定矩阵的所有主子行列式恒为正，所以是非奇异的。

c

编程计算了 C_n 的值，然后计算出 det(H_n）如下表:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.00E+00	8.33E-01	4.63E-04	1.65E-07	3.75E-12	5.37E-18	4.84E-25	2.74E-33	9.72E-43	2.16E-53

代码详见说明文档.

d

下面给出分别用 gem，cholesky 和 numpy.solve 解出的解（n 从 1 到 10）

n=1

GEM	1
Cholesky	1
Solve	1

n=2

GEM	-2	6
Cholesky	-2	6
Solve	-2	6

n=

GEM	3	-24	30
Cholesky	3	-24	30
Solve	3	-24	30

n=4

GEM	-4	60	-180	140
Cholesky	-4	60	-180	140
Solve	-4	60	-180	140

n=5

GEM	5	-120	630	-1120	630
Cholesky	5	-120	630	-1120	630
Solve	5	-120	630	-1120	630

n=

GEM	-6	210	-1680	5040	-6300	2772
Cholesky	-6	210	-1680	5040	-6300	2772

Solve	-6	210	-1680	5040	-6300	2772

n=7

GEM	7	-336	3780	-16800	34650	-33264	12012
Cholesky	7	-336	3780	-16800	34650	-33264	12012
Solve	7	-336	3780	-16800	34650	-33264	12012

n=8

GEM	-8	-504	-7560	-46200	-138600	-216216	-168168	51480
Cholesky	-8	-504	-7560	-46200	-138600	-216216	-168168	51480
Solve	-8	-504	-7560	-46200	-138600	-216216	-168168	51480

n=9

GEM	8.99995 -719.997 13859.9 -110880 450448 -1.009e+06 1.26126e+06 -823678 218789
Cholesky	8.99993 -719.995 13859.9 -110879 450448 -1.009e+06 1.26126e+06 -823677 218789
Solve	8.99996078e+00 -7.19997262e+02 1.38599532e+04 -1.10879663e+05 4.50448758e+05 -1.00900545e+06 1.26125706e+06 -8.23678217e+05 2.18789558e+05

n=10

GEM	-9.99779 989.809 -23755.9 240203 -1.26108e+06 3.78329e+06 -6.72592e+06 7.0005e+06 -3.93781e+06 923690
Cholesky	-9.99812 989.839 -23756.6 240209 -1.26111e+06 3.78338e+06 -6.72607e+06 7.00065e+06 -3.93789e+06 923708
Solve	-9.99982337e+00 9.89984621e+02 -2.37596706e+04 2.40236992e+05 -1.26124560e+06 3.78374027e+06 -6.72665461e+06 7.00121663e+06 -3.93818664e+06 9.23772647e+05

可以看出，在 n 较小时，三种方法的解并没有差距，但是从 9，10 开始，三种方法出现了差距。如果我们认为 numpy.solve 是准确的解，那么 cholesky 比 gem 更接近正确的结果。因为希尔伯特矩阵有高度的病态性，条件数非常大，使用 gem 时由于误差的累积，准确性会受到很大影响；而 cholesky 分解比 gem 更稳定，解更准确。但当 n 变大时，无论哪一种方法的误差都会变大。

4　矩阵与二次型

a

$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，为求特征值，解方程$|B-\lambda I|=0$.

解得：$\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=3\end{cases}$，再将特征值代入解线性方程组，求得其对应的特征向量为

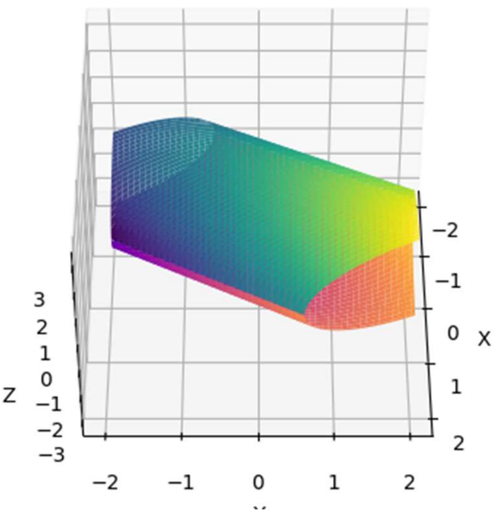
$$\begin{cases}a_1=(1,1,1)\\ a_2=(1,0,-1)\\ a_3=(1,-2,1)\end{cases}$$

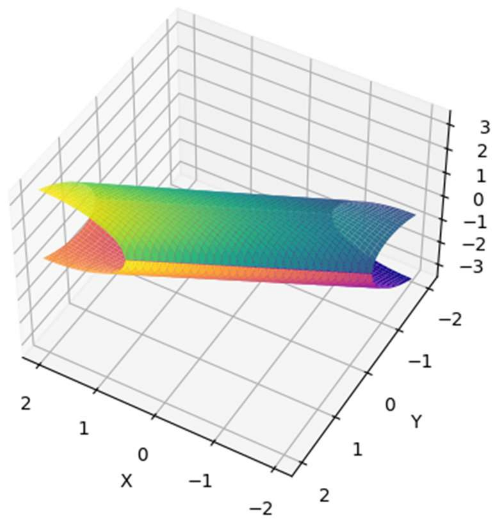
b

$B=Q\Sigma Q_T$，其中Σ是 B 的特征值组成的对角矩阵，Q 是 B 的与特征值对应的特征向量组成的矩阵，即

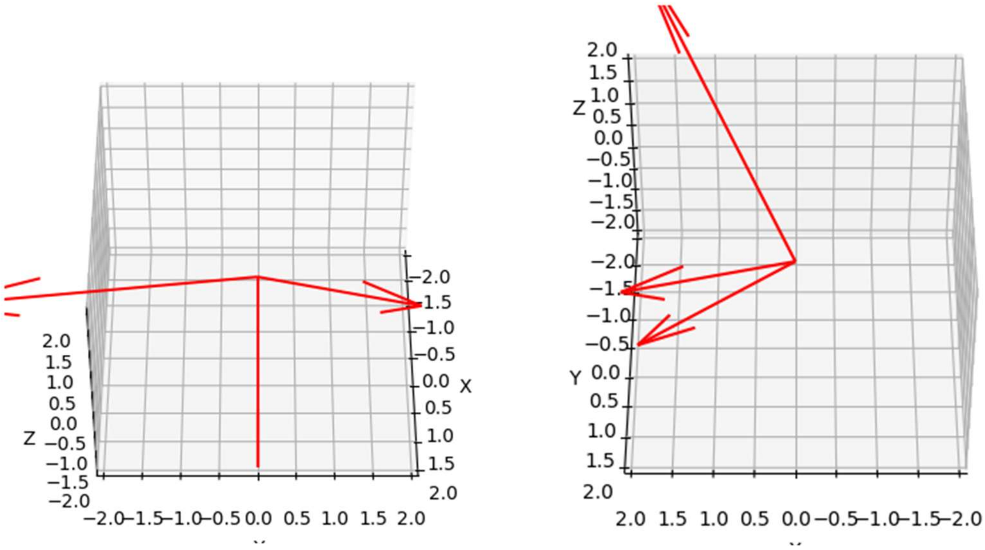
$\Sigma=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$（已标准化）

对二次型作图：





特征向量方向作图：



5 正定矩阵

a

$u^T A^T A u = < Au, Au >$即向量的内积，≥0 显然成立
又因为 A 的各列向量线性无关，所以对于非零向量 u，Au 一定不是零向量，即其内积不为 0，所以只能取大于号

b

对于$b^2 < 8$，s 正定；对于$b^2 = 8$，s 半正定；主元是 2，$4 - \frac{b^2}{2}$；