

# 计算物理作业 5

## 作业说明:

- 完成所有题目，作业提交截止时间为 2023 年 12 月 30 日 23:59。迟交作业将只能取得本次作业所得分数的 90%。每人有一次迟交作业且不影响成绩的机会，且该次迟交须在规定截止时间的 48 小时内。病假等其他向助教在截止时间前说明的特殊情况除外。
- 请提交一个 PDF 格式的作业解答，其中可以描述相应的解题步骤，必要的图表等。
- 请提交程序的源文件 (格式: python/fortran/c,c++)，并请提交一个源文件的说明文档 (任意可读格式)，主要说明源程序如何编译、运行、输入输出格式等方面的事宜。请保证它们能够顺利编译通过，同时运行后产生你的解答中的结果。
- 本次作业相关的所有文件打包到一个压缩文件后发送到课程的公邮，地址为 com\_phy2023@163.com。压缩包的文件名和邮件题目请取为“学号-姓名-hw5”(例如 210000000-张三-hw5)。
- 作业严禁抄袭，助教会抽查部分同学当面对作业内容进行提问。

## 作业题目:

- (20pt) 二阶常微分方程  $u'' + u = 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 其初值条件为  $u(0) = 1$ ,  $u'(0) = 0$ 。请用至少 3 种不同的差分方法给出数值结果，并作图(横轴为  $u$ , 纵轴为  $u'$ )及给予讨论。
- (20pt) 参考课件《偏微分方程 A》，对 Kruskal, Zalusky 孤立子问题，给出数值解（随时间演化的动画示意图，或者代表性时刻的帧图）及说明，注意保证大  $t$  时数值结果的稳定

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = \cos(\pi x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$u, u_x, u_{xx}$  为在  $[0, 2]$  上的周期函数

- (20pt) 参考课件《偏微分方程 B》，使用谱方法或者其他方法求解 2 维扩散方程，给出数值解（随时间演化的动画示意图，或者代表性时刻的帧图）及说明：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

其中  $D=1$ ,  $0 \leq x, y \leq 1$ 。初始条件为  $T(0.1 < x < 0.9, 0.1 < y < 0.9, t=0) = 1$ 。

$x$  方向边界条件为  $T(x=0, y) = T(x=1, y) = 0$ ;

$y$  方向边界条件为  $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y=0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=1) = 0$ 。

- (40pt) 考虑由以下初始条件和边界条件给出的振动方膜的二维波动方程:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & x, y \in [0,1], t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y) & x, y \in (0,1) \\ u = 0 \text{ boundary} & t \geq 0 \\ \partial u / \partial t |_{t=0} = 0 & x, y \in (0,1) \end{array} \right.$$

边界由  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$  及  $y=1$  给定。 $\lambda$  可以取为 1。

- (a) 使用分离变量法给出该方程的解析解。
- (b) 使用二维差分网格,写出求解该方程的显式方法的算法,并编写数值求解离散波动方程的程序。特别是描述如何处理边界条件和初始条件,并将结果与封闭形式的解决方案进行比较。
- (c) 给出不同差分步长 ( $\Delta t, \Delta x$  及  $\Delta y$ ) 情形的数值表现,特别是考虑和校验数值稳定性条件 (此处可以设置  $\lambda=1,2$  等不同值):

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1/2}$$

- (d) 对  $\Delta x = \Delta y$  情形,给出结果的动画展示。