1

对此函数分别给出 3 阶和 5 阶的 chebyshev 近似展开, 因为函数表达式中的$T_m(x)$是不变的, 所以只给出两个 c 的列表

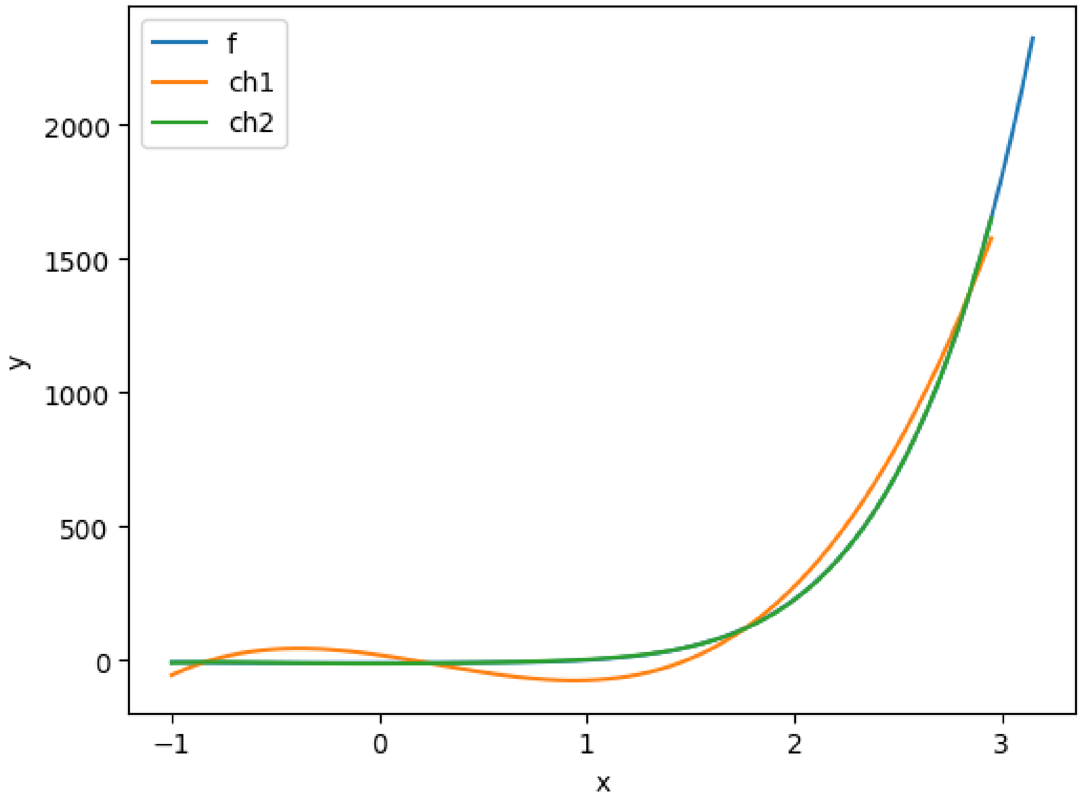
3 阶

[369.3333333333333, 663.9999999999999, 443.99999999999994, 204.66666666666669]

5 阶

[369.33333333333326, 663.9999999999999, 445.99999999999983, 222.66666666666663, 80.00000000000006, 17.999999999999904]

从-1，3，隔 0.05 取一个点作为展示，将两个近似的 chebyshev 和原函数画在同一张图上



可以看出，3 阶 chebyshev 不能很好地拟合一个 6 阶的函数，而 5 阶 chebyshev 就拟合的很好了。

2

为求$f(x) = e^x$的（2，2）阶 pade 近似，先求其前五项泰勒展开系数

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
1	1	1/2	1/6	1/24

然后根据公式，求出b_1 , b_2和a_0, a_1, a_2

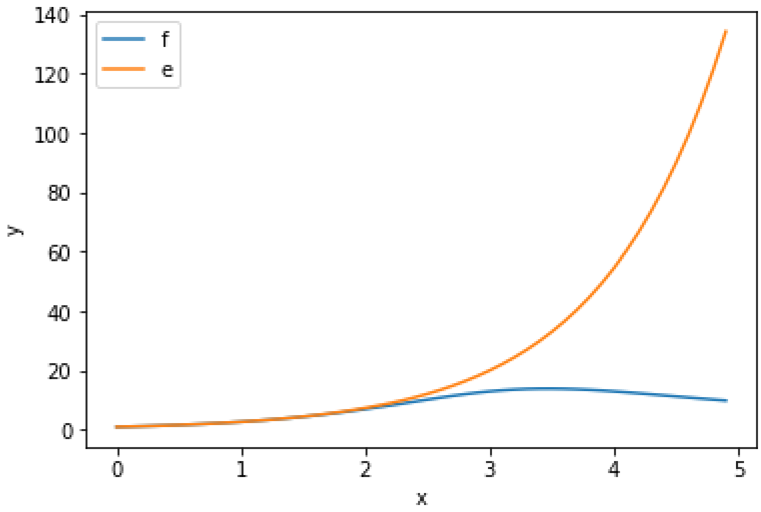
$$b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = 1/12$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1/2, a_2 = 1/12$$

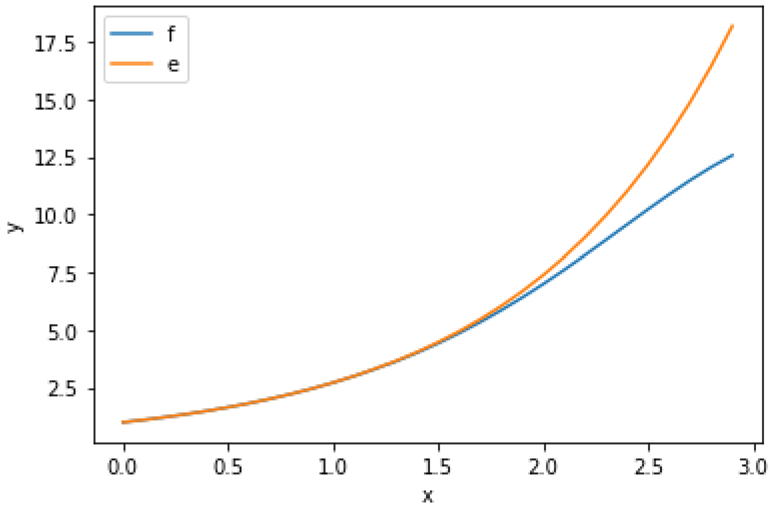
然后可以给出函数表达式

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{12}}$$

用程序画图：

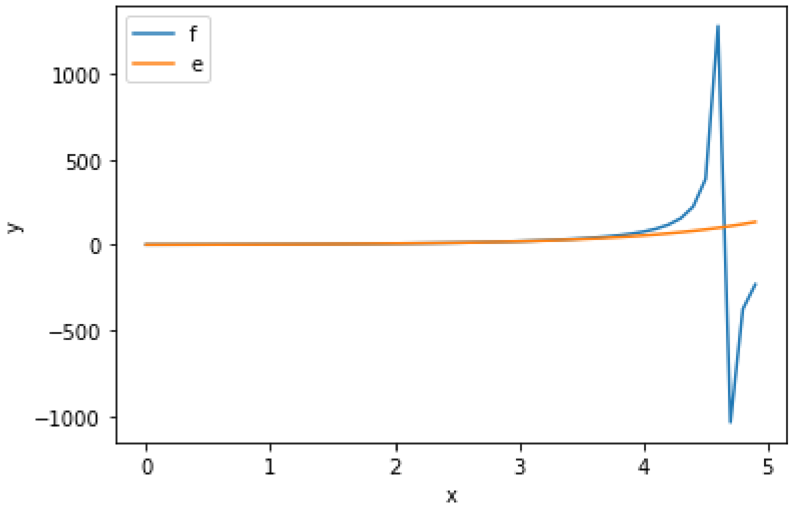


聚焦在 0，3 上：

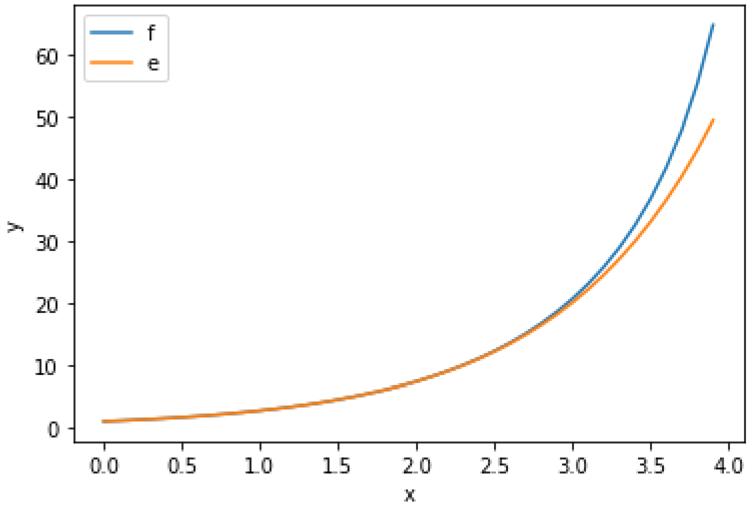


可以看出在 1.5 之前近似的都是很好的，但是之后的差别就逐渐变大了。

如果用（3，3）阶近似的话，效果会好一些：



聚焦到 0，4 上：



可以看出直到 3.0 近似的都是不错的。

3

用 scipy 计算的结果：

0.21938393439552029，将此视为标准答案

以下三种方法给出三种答案

梯形法则：

10	100	1000
2.023342558686669	0.2747354248013607	0.21998528440244491

辛普森法则

10	100	1000
0.6761437178920752	0.22075700448180582	0.21938413034561477

Gauss -Legendre：

10	100
0.14604476471703118	0.21938393439556392

4

(a)

用 scipy 的 bisect 求得答案为 1.8954942670060777

二分法

根为 1.8955001831054688
每次迭代的左右区间如下:
迭代次数 左区间 右区间
0 1.5 2
1 1.75 2
2 1.875 2
3 1.875 1.9375
4 1.875 1.90625
5 1.890625 1.90625
6 1.890625 1.8984375
7 1.89453125 1.8984375
8 1.89453125 1.896484375
9 1.89453125 1.8955078125
10 1.89501953125 1.8955078125
11 1.895263671875 1.8955078125
12 1.8953857421875 1.8955078125
13 1.89544677734375 1.8955078125
14 1.895477294921875 1.8955078125
15 1.8954925537109375 1.8955078125
16 1.8954925537109375 1.8955001831054688

牛顿法

根为 1.8954942670339812
每次迭代的 x 值如下:
1 2.076558200630435
2 1.9105066156590806
3 1.895622002987846
4 1.8954942764727707
5 1.8954942670339812

割线法

根为 1.8954942670060777
每次迭代的 x 值如下:

1 1.8472170635174783
2 1.8908694114251112
3 1.8956283140491865
4 1.8954939072262598
5 1.8954942670060777

(b)

对于这个函数，二分法的端点值都为正，不再适用

牛顿法

根为 1.895493552292121
每次迭代的 x 值如下：
1 1.7882791003152174
2 1.8457723359438054
3 1.8714005418318977
4 1.8836210857870135
5 1.8895991366086125
6 1.8925568378904405
7 1.8940280587800475
8 1.8947617860795662
9 1.895128181927505
10 1.895311263270625
11 1.8954027748437559
12 1.8954485233613476
13 1.895471395804558
14 1.895482831572534
15 1.8954885493418605
16 1.895491408210215
17 1.8954928376412095
18 1.895493552292121

割线法

根为 1.8954956126630178
每次迭代的 x 值如下：
1 2.5227676865858104
2 2.0492997270231283
3 2.0293589866091692
4 1.9719757310263355
5 1.9465419681500566
6 1.9271023905787463
7 1.9154315962717388

8	1.9078868611726614
9	1.9032026433753295
10	1.9002723811531708
11	1.8984539551645232
12	1.897325726679809
13	1.8966271108019368
14	1.896194746784561
15	1.8959273226584448
16	1.8957619609806693
17	1.8956597306388456
18	1.895596536623472
19	1.895557475977574
20	1.8955333334009419
21	1.8955184117910013
22	1.8955091894748253
23	1.895503489667072
24	1.8954999669555255
25	1.8954977898064183
26	1.8954964442231443
27	1.8954956126630178