1

最速下降法，设置$\epsilon=10^{-5}$

计算得到的解向量(0.92824216 1.04335172 1.01803114 0.98931875)

共轭梯度法，设置$\epsilon=10^{-5}$

计算得到的解向量为(0.9996097 1.00000527 1.00017104 1.0000978)

2

QR 算法求本征值

我设置的收敛条件是最大的非对角元(即 1 行 2 列的元素)小于10^{-4}，

一共迭代了 28 次

第 5,10,15,20,次迭代后的矩阵 Tk：

```
5 [[ 4.29276628e+00 -7.21313977e-01 -8.18666697e-17 -5.43358514e-16]
 [-7.21313977e-01  3.55611356e+00 -3.34967464e-01  2.34289842e-16]
 [-4.81736808e-17 -3.34967464e-01  1.89640130e+00 -3.99652715e-04]
 [-2.29665523e-16  2.47087812e-17 -3.99652715e-04  2.54718859e-01]]
10 [[ 4.73418406e+00 -1.31448547e-01 -1.93246264e-16 -5.88422845e-16]
 [-1.31448547e-01  3.18812610e+00 -1.85822775e-02 -5.23882601e-17]
 [-4.91447089e-17 -1.85822775e-02  1.82297108e+00 -2.07643132e-08]
 [-2.15069804e-16 -8.42262145e-17 -2.07643133e-08  2.54718760e-01]]
15 [[ 4.74507887e+00 -1.78120256e-02 -2.13428616e-16 -5.83027491e-16]
 [-1.78120256e-02  3.17748431e+00 -1.15075434e-03 -9.57586083e-17]
 [-4.90024094e-17 -1.15075434e-03  1.82271806e+00 -1.10653406e-12]
 [-2.08367533e-16 -9.96575175e-17 -1.10658672e-12  2.54718760e-01]]
20 [[ 4.74527757e+00 -2.39738535e-03 -2.16210952e-16 -5.82057684e-16]
 [-2.39738535e-03  3.17728658e+00 -7.14944440e-05 -1.01528010e-16]
 [-4.90014462e-17 -7.14944440e-05  1.82271708e+00 -6.32650951e-18]
 [-2.07377671e-16 -1.01701275e-16 -5.89837548e-17  2.54718760e-01]]
25 [[ 4.74528117e+00 -3.22632786e-04 -2.16592401e-16 -5.81922832e-16]
 [-3.22632786e-04  3.17728299e+00 -4.44210350e-06 -1.02300699e-16]
 [-4.90014294e-17 -4.44210350e-06  1.82271708e+00  5.26537674e-17]
 [-2.07242919e-16 -1.01975586e-16 -3.47195046e-21  2.54718760e-01]]
```

Jacobi 算法求本征值

我设置的收敛条件是最大的非对角元小于10^{-6}，一共迭代了 15 次

第 5, 10, 15, 20, 次迭代后的矩阵 Tk：

```
5 [[ 3.02671876e-01   1.98877843e-01   2.83269704e-17   3.90083050e-01]
 [ 1.98877843e-01   3.15387625e+00 -1.13689848e-01   1.15838509e-16]
 [ 6.75012884e-17 -1.13689848e-01   1.84612375e+00   1.98877843e-01]
 [ 3.90083050e-01   2.65066327e-18   1.98877843e-01   4.69732812e+00]]
10 [[ 2.54777527e-01   8.28956379e-04 -9.51832874e-03 -1.84018719e-03]
 [ 8.28956379e-04   3.17728268e+00 -4.96426137e-06   1.61604514e-18]
 [-9.51832874e-03 -4.96426137e-06   1.82265953e+00   8.17755211e-04]
 [-1.84018719e-03 -1.19810643e-16   8.17755211e-04   4.74528026e+00]]
15 [[ 2.54718760e-01 -2.52080934e-12   3.41591974e-07   1.92963626e-10]
 [-2.52071295e-12   3.17728292e+00 -3.08506021e-22 -3.41591974e-07]
 [ 3.41591974e-07 -2.28100143e-17   1.82271708e+00 -2.52080926e-12]
 [ 1.92963590e-10 -3.41591974e-07 -2.52086171e-12   4.74528124e+00]]
```

Sturm 序列和对分法求本征值

我设置的收敛条件是对分法的区间长度小于10^{-6}，一共迭代了 23 次

第 5, 10, 15, 20, 次迭代后的特征值：

```
5 [4.84375 3.28125 1.71875 0.15625]
10 [4.74121094 3.17871094 1.82128906 0.25878906]
15 [4.74533081 3.17733765 1.82266235 0.25466919]
20 [4.74527836 3.17728519 1.82271481 0.25472164]
```

3

(a)

将$x(t) = xe^{-i\omega t}$求二阶导，得到$x'' = -x\omega^2 e^{-i\omega t}$, 代入方程$x'' = -\mathrm{A}x$的左边，

消去负号和$e^{-i\omega t}$即可得到$Ax = \lambda x$，其中$\lambda = \omega^2$

（b）

幂次法的证明：

$$x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$Ax_0 = A(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$= c_1(Ax_1) + c_2(Ax_2) + \cdots + c_n(Ax_n)$$

$$= c_1(\lambda_1x_1) + c_2(\lambda_2x_2) + \cdots + c_3(\lambda_nx_n)$$

乘 k 次后

$$A^kx_0 = c_1\left(\lambda_1^kx_1\right) + c_2\left(\lambda_2^kx_2\right) + \cdots$$

$$= \lambda_1^k(c_1x_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots)$$

因为λ_1大于其他所有λ，所有后面的项都可以忽略，所以$A^kx_0 = \lambda_1^kc_1x_1, c_1 \neq 0$，得证

然后编写程序求解相应的本征值和本征矢为：

3.999999996240157
[0.31618364 -0.31618934 0.31620972 -0.31623699 0.31626074 -0.31627189 0.31626619 -0.31624581 0.31621854 -0.31619479]

这和 numpy 给出的标准结果一样

Eigenvalues:

4.0

Eigenvectors:

[0.31622777 -0.31622777 0.31622777 -0.31622777 0.31622777 -0.31622777 0.31622777 -0.31622777 0.31622777 -0.31622777]

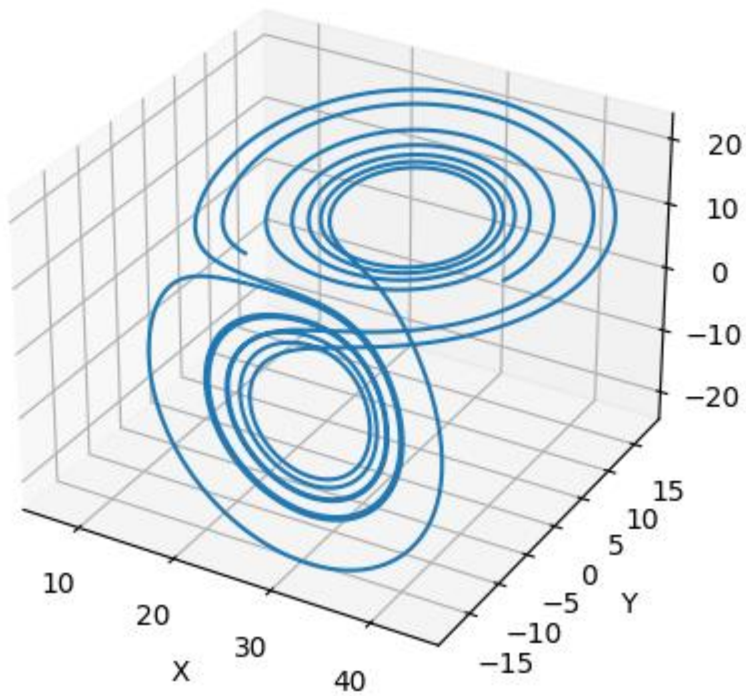
4

取 beta = 8.0 / 3.0

rho = 28.0

sigma = 10.0

重复得到的结果是：

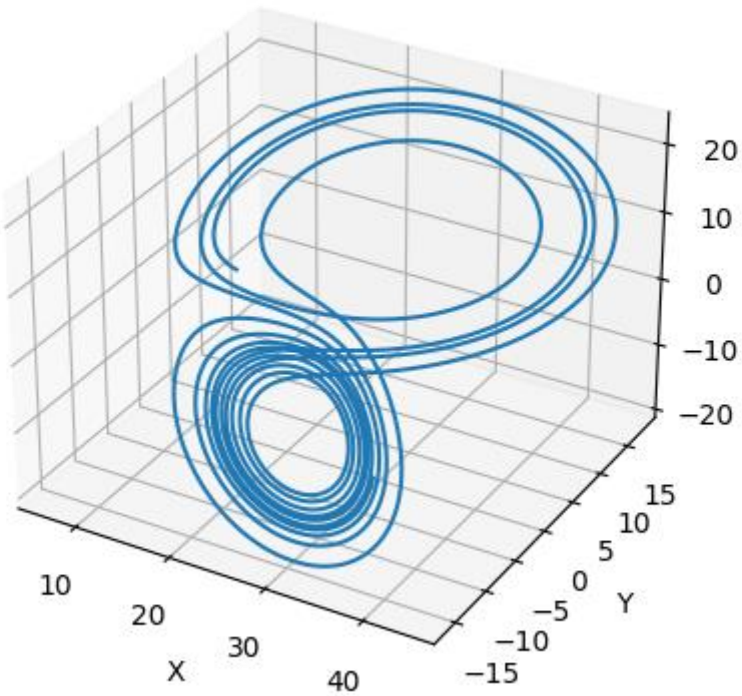


取 beta = 8.0 / 3.0

rho = 28.1

sigma = 10.0

得到的结果是：



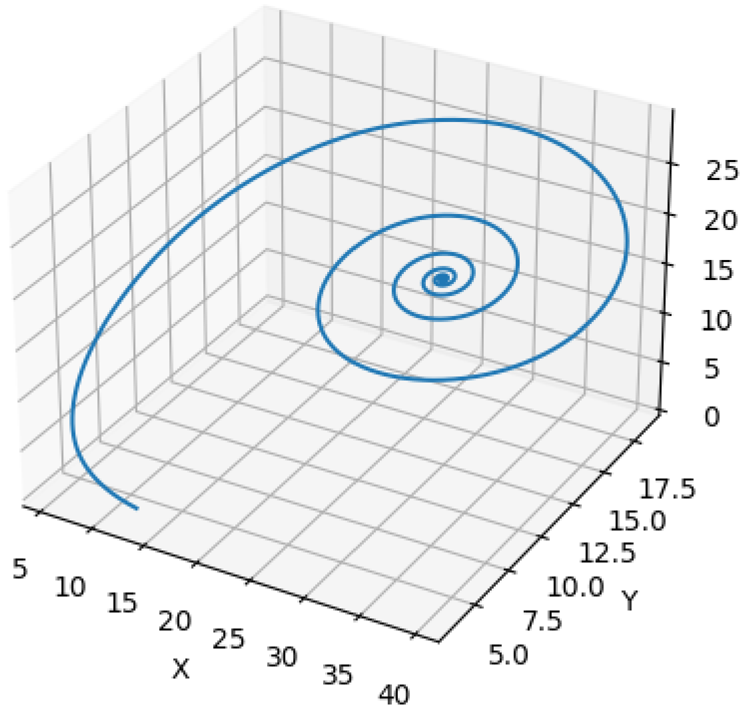
可以看出只是beta变化了一点整个的轨迹就变化的很大

取beta = 8.0 / 1.0

rho = 28.0

sigma = 5

得到的结果是：



在这种情况下，解收敛于一个固定点