### 1 数值误差的避免

计算结果如下，其中exp是c++cmath库的函数，认为是标准答案

直接展开法在计算完前七项后选择罢工，猜测也许是直接计算和数值太大了。并且其计算出来的七项与实际的结果可以说是南辕北辙

递归法通过项之间的递推关系，有效的减少了计算量，并改善了数值太大的问题。但因为截断前n项计算，会发生严重的抵消，得到的结果也和准确没什么关系

先递归地计算，再求倒数的办法，先避免了数值太大的问题，又有效地避免了抵消，计算是稳定的，是一种有效可行的算法。

|  |  |
| --- | --- |
| Exp | 1  4.53999e-05  2.06115e-09  9.35762e-14  4.24835e-18  1.92875e-22  8.75651e-27  3.97545e-31  1.80485e-35  8.19401e-40  3.72008e-44 |
| 直接展开 | 1  4.53999e-05  -1.8323e-09  -0.000389238  -8.58218  -210219  -1.19475e+09 |
| 递归 | 1  4.53999e-05  5.62188e-09  -3.06681e-05  -3.16573  11072.9  -3.35168e+08  -3.29796e+13  9.18057e+16  -5.05163e+21  -2.91376e+25 |
| 递归求倒数 | 1  4.53999e-05  2.06115e-09  9.35762e-14  4.24835e-18  1.92875e-22  8.75651e-27  3.97545e-31  1.80485e-35  8.19401e-40  3.72008e-44 |

### 2 矩阵的模与条件数

## a

上三角矩阵的行列式为对角元的积，即1，奇异矩阵行列式为0，A不是奇异矩阵。

## b

用伴随矩阵法求，对于特定行，需要加上其下每一行乘上两行的行差，即为

## c

矢量的无穷模是其所有分量绝对值的最大值，矩阵的无穷模是其行向量绝对值的和的最大值

证明如下：

然后证明

其中k为矩阵行向量最大的一次模的行数，y为使的向量

以上，即证明矩阵的无穷模是其行向量绝对值的和的最大值

## d

要证

只要证(欧氏模)

即

因为幺正矩阵，所以

所以，同理

利用幺正变换的保模性质，对于条件数的证明如下：

## e

对于具体的矩阵, *，*

3.Hilbert矩阵

a

## b

使用二次型来证明：

又，故

且

所以H是正定矩阵

正定矩阵的所有主子行列式恒为正，所以是非奇异的。

## c

编程计算了C\_n的值，然后计算出det(H\_n）如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1.00E+00 | 8.33E-01 | 4.63E-04 | 1.65E-07 | 3.75E-12 | 5.37E-18 | 4.84E-25 | 2.74E-33 | 9.72E-43 | 2.16E-53 |

代码详见说明文档.

## d

下面给出分别用gem，cholesky和numpy.solve解出的解（n从1到10）

n=1

|  |  |
| --- | --- |
| GEM | 1 |
| Cholesky | 1 |
| Solve | 1 |

n=2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| GEM | -2 | 6 |
| Cholesky | -2 | 6 |
| Solve | -2 | 6 |

n=

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| GEM | 3 | -24 | 30 |
| Cholesky | 3 | -24 | 30 |
| Solve | 3 | -24 | 30 |

n=4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| GEM | -4 | 60 | -180 | 140 |
| Cholesky | -4 | 60 | -180 | 140 |
| Solve | -4 | 60 | -180 | 140 |

n=5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| GEM | 5 | -120 | 630 | -1120 | 630 |
| Cholesky | 5 | -120 | 630 | -1120 | 630 |
| Solve | 5 | -120 | 630 | -1120 | 630 |

n=

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| GEM | -6 | 210 | -1680 | 5040 | -6300 | 2772 |
| Cholesky | -6 | 210 | -1680 | 5040 | -6300 | 2772 |
| Solve | -6 | 210 | -1680 | 5040 | -6300 | 2772 |

n=7

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| GEM | 7 | -336 | 3780 | -16800 | 34650 | -33264 | 12012 |
| Cholesky | 7 | -336 | 3780 | -16800 | 34650 | -33264 | 12012 |
| Solve | 7 | -336 | 3780 | -16800 | 34650 | -33264 | 12012 |

n=8

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| GEM | -8 | -504 | -7560 | -46200 | -138600 | -216216 | -168168 | 51480 |
| Cholesky | -8 | -504 | -7560 | -46200 | -138600 | -216216 | -168168 | 51480 |
| Solve | -8 | -504 | -7560 | -46200 | -138600 | -216216 | -168168 | 51480 |

n=9

|  |  |
| --- | --- |
| GEM | 8.99995  -719.997  13859.9  -110880  450448  -1.009e+06  1.26126e+06  -823678  218789 |
| Cholesky | 8.99993  -719.995  13859.9  -110879  450448  -1.009e+06  1.26126e+06  -823677  218789 |
| Solve | 8.99996078e+00  -7.19997262e+02  1.38599532e+04  -1.10879663e+05  4.50448758e+05  -1.00900545e+06  1.26125706e+06  -8.23678217e+05  2.18789558e+05 |

n=10

|  |  |
| --- | --- |
| GEM | -9.99779  989.809  -23755.9  240203  -1.26108e+06  3.78329e+06  -6.72592e+06  7.0005e+06  -3.93781e+06  923690 |
| Cholesky | -9.99812  989.839  -23756.6  240209  -1.26111e+06  3.78338e+06  -6.72607e+06  7.00065e+06  -3.93789e+06  923708 |
| Solve | -9.99982337e+00  9.89984621e+02  -2.37596706e+04  2.40236992e+05  -1.26124560e+06  3.78374027e+06  -6.72665461e+06  7.00121663e+06  -3.93818664e+06  9.23772647e+05 |

可以看出，在n较小时，三种方法的解并没有差距，但是从9，10开始，三种方法出现了差距。如果我们认为numpy.solve是准确的解，那么cholesky比gem更接近正确的结果。

因为希尔伯特矩阵有高度的病态性，条件数非常大，使用gem时由于误差的累积，准确性会受到很大影响；而cholesky分解比gem更稳定，解更准确。但当n变大时，无论哪一种方法的误差都会变大。

### 4 矩阵与二次型

## a

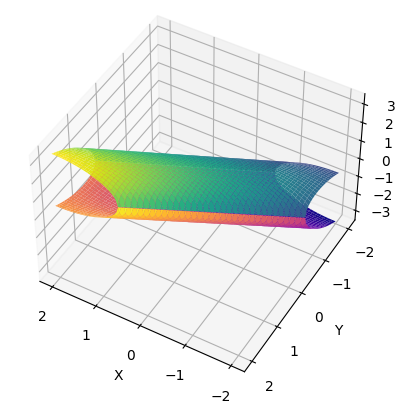
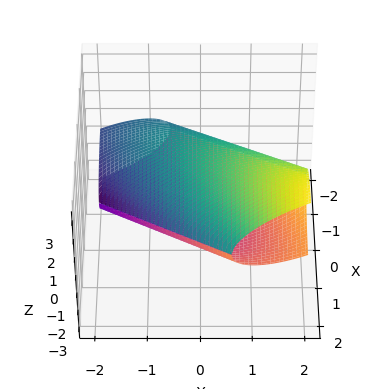
，为求特征值，解方程.

解得：，再将特征值代入解线性方程组，求得其对应的特征向量为

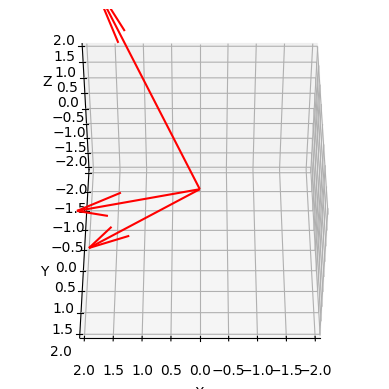
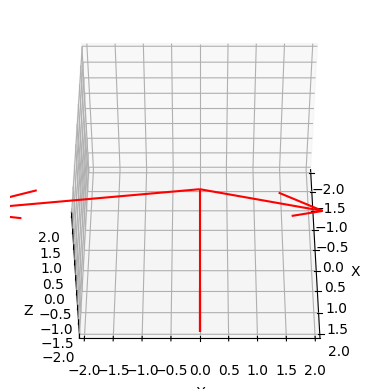
## b

𝐵=𝑄Σ𝑄𝑇，其中是B的特征值组成的对角矩阵，Q是B的与特征值对应的特征向量组成的矩阵，即

，（已标准化）

对二次型作图：  


特征向量方向作图：



### 5 正定矩阵

## a

即向量的内积，≥0显然成立

又因为A的各列向量线性无关，所以对于非零向量u，Au一定不是零向量，即其内积不为0，所以只能取大于号

## b

对于，s正定；对于，s半正定；主元是2，；