1

在hw1作业代码的基础上调整了一下，详见源代码说明文档（此题用的c++，我知道错了，但是懒得改成python了）

2

## A

根据二次导数值为零的边界条件，，所以矩阵的第一行为1，0，0，第三号为0，0，1

再根据递推公式和，，分别的推导公式（此处省略，详见ppt），可以写出要求解的线性方程组为：

解得：

解得m后，即可代回的表达式（详见ppt）求得具体的函数。

所以

## B

根据一次导数值的边界条件：

，其中A为x=0点的一阶导

，其中B为x=0.9点的一阶导

可列出线性方程组

解得

解得m后，即可代回的表达式（详见ppt）求得具体的函数。

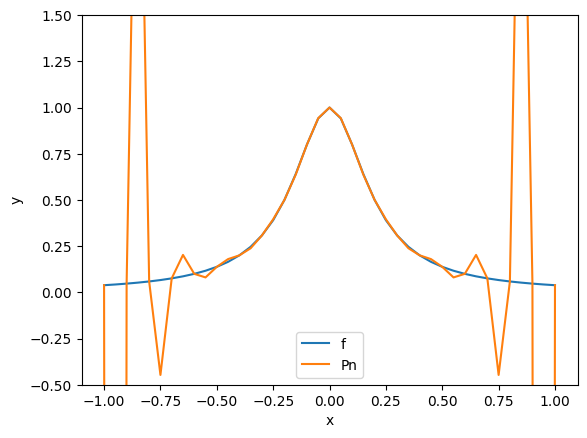
### 3

## A

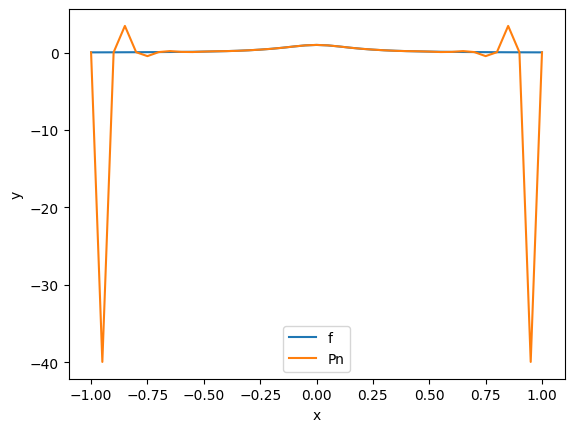
根据-1到1之间21个均匀分布的节点使用拉格朗日内插法创建，然后对41个点（包括中点），分别获得，列表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| -1.0000 | 0.0385 | 0.0385 | 0.0000 |
| -0.9500 | 0.0424 | -39.9524 | 39.9949 |
| -0.9000 | 0.0471 | 0.0471 | 0.0000 |
| -0.8500 | 0.0525 | 3.4550 | -3.4025 |
| -0.8000 | 0.0588 | 0.0588 | 0.0000 |
| -0.7500 | 0.0664 | -0.4471 | 0.5134 |
| -0.7000 | 0.0755 | 0.0755 | 0.0000 |
| -0.6500 | 0.0865 | 0.2024 | -0.1159 |
| -0.6000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.0000 |
| -0.5500 | 0.1168 | 0.0807 | 0.0361 |
| -0.5000 | 0.1379 | 0.1379 | 0.0000 |
| -0.4500 | 0.1649 | 0.1798 | -0.0148 |
| -0.4000 | 0.2000 | 0.2000 | 0.0000 |
| -0.3500 | 0.2462 | 0.2384 | 0.0077 |
| -0.3000 | 0.3077 | 0.3077 | 0.0000 |
| -0.2500 | 0.3902 | 0.3951 | -0.0048 |
| -0.2000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.0000 |
| -0.1500 | 0.6400 | 0.6368 | 0.0032 |
| -0.1000 | 0.8000 | 0.8000 | 0.0000 |
| -0.0500 | 0.9412 | 0.9425 | -0.0013 |
| 0.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| 0.0500 | 0.9412 | 0.9425 | -0.0013 |
| 0.1000 | 0.8000 | 0.8000 | 0.0000 |
| 0.1500 | 0.6400 | 0.6368 | 0.0032 |
| 0.2000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.0000 |
| 0.2500 | 0.3902 | 0.3951 | -0.0048 |
| 0.3000 | 0.3077 | 0.3077 | 0.0000 |
| 0.3500 | 0.2462 | 0.2384 | 0.0077 |
| 0.4000 | 0.2000 | 0.2000 | 0.0000 |
| 0.4500 | 0.1649 | 0.1798 | -0.0148 |
| 0.5000 | 0.1379 | 0.1379 | 0.0000 |
| 0.5500 | 0.1168 | 0.0807 | 0.0361 |
| 0.6000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.0000 |
| 0.6500 | 0.0865 | 0.2024 | -0.1159 |
| 0.7000 | 0.0755 | 0.0755 | 0.0000 |
| 0.7500 | 0.0664 | -0.4471 | 0.5134 |
| 0.8000 | 0.0588 | 0.0588 | 0.0000 |
| 0.8500 | 0.0525 | 3.4550 | -3.4025 |
| 0.9000 | 0.0471 | 0.0471 | 0.0000 |
| 0.9500 | 0.0424 | -39.9524 | 39.9949 |
| 1.0000 | 0.0385 | 0.0385 | 0.0000 |

在同一张图上画出如图：



在更大的y尺度上如图：



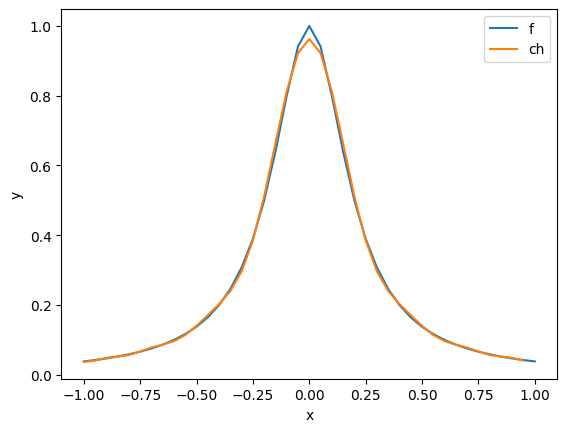
可以看出，内插阶数较高时，拉格朗日多项式体现出越来越严重的震荡特性，Runge现象十分明显。

## B

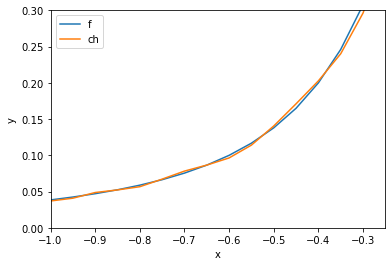
使用对20个标准的chebyshev节点使用chebyshev方法进行函数插值得到，然后对41个点（包括中点），分别获得，列表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| -1.0000 | 0.0385 | 0.0370 | 0.0014 |
| -0.9500 | 0.0424 | 0.0408 | 0.0016 |
| -0.9000 | 0.0471 | 0.0487 | -0.0016 |
| -0.8500 | 0.0525 | 0.0523 | 0.0002 |
| -0.8000 | 0.0588 | 0.0567 | 0.0021 |
| -0.7500 | 0.0664 | 0.0672 | -0.0008 |
| -0.7000 | 0.0755 | 0.0783 | -0.0028 |
| -0.6500 | 0.0865 | 0.0865 | 0.0000 |
| -0.6000 | 0.1000 | 0.0964 | 0.0036 |
| -0.5500 | 0.1168 | 0.1141 | 0.0027 |
| -0.5000 | 0.1379 | 0.1405 | -0.0026 |
| -0.4500 | 0.1649 | 0.1711 | -0.0062 |
| -0.4000 | 0.2000 | 0.2028 | -0.0028 |
| -0.3500 | 0.2462 | 0.2402 | 0.0060 |
| -0.3000 | 0.3077 | 0.2963 | 0.0114 |
| -0.2500 | 0.3902 | 0.3853 | 0.0049 |
| -0.2000 | 0.5000 | 0.5119 | -0.0119 |
| -0.1500 | 0.6400 | 0.6639 | -0.0239 |
| -0.1000 | 0.8000 | 0.8126 | -0.0126 |
| -0.0500 | 0.9412 | 0.9221 | 0.0191 |
| 0.0000 | 1.0000 | 0.9624 | 0.0376 |
| 0.0500 | 0.9412 | 0.9221 | 0.0191 |
| 0.1000 | 0.8000 | 0.8126 | -0.0126 |
| 0.1500 | 0.6400 | 0.6639 | -0.0239 |
| 0.2000 | 0.5000 | 0.5119 | -0.0119 |
| 0.2500 | 0.3902 | 0.3853 | 0.0049 |
| 0.3000 | 0.3077 | 0.2963 | 0.0114 |
| 0.3500 | 0.2462 | 0.2402 | 0.0060 |
| 0.4000 | 0.2000 | 0.2028 | -0.0028 |
| 0.4500 | 0.1649 | 0.1711 | -0.0062 |
| 0.5000 | 0.1379 | 0.1405 | -0.0026 |
| 0.5500 | 0.1168 | 0.1141 | 0.0027 |
| 0.6000 | 0.1000 | 0.0964 | 0.0036 |
| 0.6500 | 0.0865 | 0.0865 | 0.0000 |
| 0.7000 | 0.0755 | 0.0783 | -0.0028 |
| 0.7500 | 0.0664 | 0.0672 | -0.0008 |
| 0.8000 | 0.0588 | 0.0567 | 0.0021 |
| 0.8500 | 0.0525 | 0.0523 | 0.0002 |
| 0.9000 | 0.0471 | 0.0487 | -0.0016 |
| 0.9500 | 0.0424 | 0.0408 | 0.0016 |
| 1.0000 | 0.0385 |  |  |

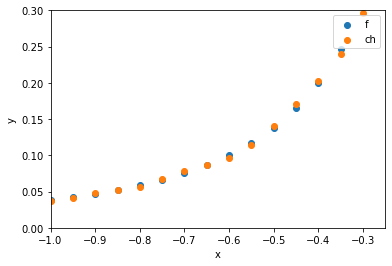
在同一张图上画出如图：



放大局部细节如图：



散点图是这样的：



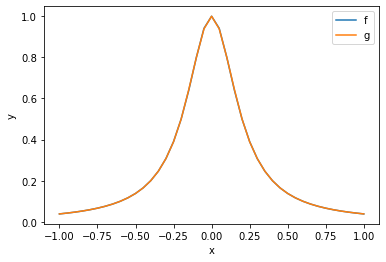
从表格和图像上都能看出，chebyshev内插给出了函数f(x)一个非常好的近似，并且避免了runge现象。

## C

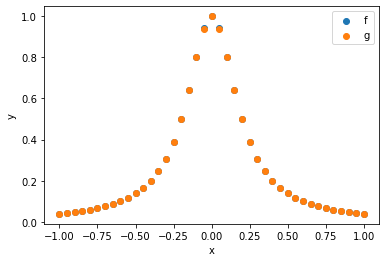
根据-1到1之间21个均匀分布的节点使用三次样条内插法创建，然后对41个点（包括中点），分别获得，列表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| -1.0000 | 0.0385 | 0.0385 | 0.0000 |
| -0.9500 | 0.0424 | 0.0425 | -0.0001 |
| -0.9000 | 0.0471 | 0.0471 | 0.0000 |
| -0.8500 | 0.0525 | 0.0524 | 0.0000 |
| -0.8000 | 0.0588 | 0.0588 | 0.0000 |
| -0.7500 | 0.0664 | 0.0664 | 0.0000 |
| -0.7000 | 0.0755 | 0.0755 | 0.0000 |
| -0.6500 | 0.0865 | 0.0865 | 0.0000 |
| -0.6000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.0000 |
| -0.5500 | 0.1168 | 0.1168 | 0.0000 |
| -0.5000 | 0.1379 | 0.1379 | 0.0000 |
| -0.4500 | 0.1649 | 0.1649 | 0.0001 |
| -0.4000 | 0.2000 | 0.2000 | 0.0000 |
| -0.3500 | 0.2462 | 0.2463 | -0.0001 |
| -0.3000 | 0.3077 | 0.3077 | 0.0000 |
| -0.2500 | 0.3902 | 0.3894 | 0.0008 |
| -0.2000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.0000 |
| -0.1500 | 0.6400 | 0.6432 | -0.0032 |
| -0.1000 | 0.8000 | 0.8000 | 0.0000 |
| -0.0500 | 0.9412 | 0.9389 | 0.0023 |
| 0.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| 0.0500 | 0.9412 | 0.9389 | 0.0023 |
| 0.1000 | 0.8000 | 0.8000 | 0.0000 |
| 0.1500 | 0.6400 | 0.6432 | -0.0032 |
| 0.2000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.0000 |
| 0.2500 | 0.3902 | 0.3894 | 0.0008 |
| 0.3000 | 0.3077 | 0.3077 | 0.0000 |
| 0.3500 | 0.2462 | 0.2463 | -0.0001 |
| 0.4000 | 0.2000 | 0.2000 | 0.0000 |
| 0.4500 | 0.1649 | 0.1649 | 0.0001 |
| 0.5000 | 0.1379 | 0.1379 | 0.0000 |
| 0.5500 | 0.1168 | 0.1168 | 0.0000 |
| 0.6000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.0000 |
| 0.6500 | 0.0865 | 0.0865 | 0.0000 |
| 0.7000 | 0.0755 | 0.0755 | 0.0000 |
| 0.7500 | 0.0664 | 0.0664 | 0.0000 |
| 0.8000 | 0.0588 | 0.0588 | 0.0000 |
| 0.8500 | 0.0525 | 0.0524 | 0.0000 |
| 0.9000 | 0.0471 | 0.0471 | 0.0000 |
| 0.9500 | 0.0424 | 0.0425 | -0.0001 |
| 1.0000 | 0.0385 | 0.0385 | 0.0000 |

在同一张图上画出如图：



原始散点图如图：



综合表和图可以看出，三次样条函数内插效果最好，41个点中有36个点的误差小于0.0001.

### 4

## A

选取，，给出和的值，列表如下：

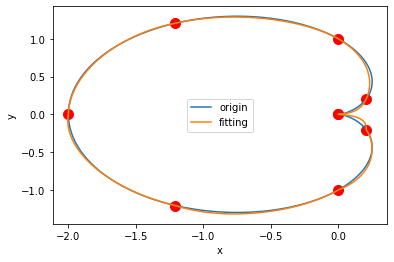
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0.0000 | 0.0000 |
| 0.2071 | 0.2071 |
| 0.0000 | 1.0000 |
| -1.2071 | 1.2071 |
| -2.0000 | 0.0000 |
| -1.2071 | -1.2071 |
| 0.0000 | -1.0000 |
| 0.2071 | -0.2071 |
| 0.0000 | 0.0000 |

## B

通过三次样条插值给出过这九个点的两个三次样条函数具体过程见源代码4b

## C

画出参数形式的曲线，同时画出严格的曲线，即心形线，并将9个节点画在图上，如图：



## D

三次样条插值通过使用三次多项式来平滑地连接给定的离散数据点，它的平滑性来自于两个主要方面：

1. 连续性：曲线必须要通过每个节点，这确保了在相邻数据点之间的过渡是无缝的，没有突变或跳跃
2. 光滑性：因为在相邻数据点之间的曲线段上，一阶导数和二阶导数是连续的，所以曲线段是平滑的，没有锐角或拐点

### 5

## A

经过初等行列变换对角化H，

即,,使得

## B

同A中操作一样进行初等行列变换，

，其中,要使H为半正定，只要D的三个矩阵元都≥零，所以q的最小是是2/3

## C

当右下角的矩阵元为2时，对于这个三角矩阵可以看出规律：

当时，解方程得到

对于4\*4的矩阵求特征值，

先列出其特征方程:

，解得其四个特征值.