1 线性变换的运算 1

§1 线性变换的运算

设 V 是 P 上的线性空间, $\operatorname{End} V$ 是 V 中所有线性变换的集合. 那么, 有

1. 加法 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \operatorname{End} V$, 定义 \mathscr{A}, \mathscr{B} 的和为

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})\alpha := \mathscr{A}\alpha + \mathscr{B}\alpha$$

可以证明 $\mathscr{A} + \mathscr{B} \in \operatorname{End} V$.

Proof. 实际上, 对于加法

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})(\alpha + \beta) \xrightarrow{\text{使用定义}} \mathscr{A}(\alpha + \beta) + \mathscr{B}(\alpha + \beta)$$
$$= \mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta + \mathscr{B}\alpha + \mathscr{B}\beta$$
$$= (\mathscr{A} + \mathscr{B})\alpha + (\mathscr{A} + \mathscr{B})\beta$$

对于数乘

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})(k\alpha) = \mathscr{A}(k\alpha) + \mathscr{B}(k\alpha)$$
$$= k\mathscr{A}\alpha + k\mathscr{A}\alpha$$
$$= k(\mathscr{A} + \mathscr{B})\alpha$$

这就证明了定理.

2. 数乘

§2 不变子空间

2.1. 基本的定义.

定义 2.1 (不变子空间). 设 $V \in P$ 上的线性空间, 且 $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, $W \in P$ 的子空间. 如果任意 $\alpha \in V$, 都有 $\mathscr{A} \alpha \in W$, 则称 $W \in P$ 的不变子空间. 简称 \mathscr{A} -子空间.

此时 $\mathscr A$ 可以看做 W 的线性变换, 因为不会跑到 W 外面去. 把它称作 $\mathscr A$ 在 W 上的**限制**. 记作 $\mathscr A|_W$. 并且 $\mathscr A|_W=\mathscr A(\alpha)\in\operatorname{End} W$

- 2.2. 不变子空间的性质. 下面来看一些常见的对于不变子空间的性质.
- **1. 对交与和的封闭性** \mathscr{A} -子空间的交与和仍然是 \mathscr{A} -子空间.
- **2.** 和基底 设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, 则W 是 \mathscr{A} -子空间 $\iff \mathscr{A}\alpha_1 \in W, 1 \leq i \leq n$.

2 不变子空间 2

3. 维数定理 若 dim $V < \infty$, $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$, 则

$$\dim V = \dim \ker \mathscr{A} + R(\mathscr{A}).$$

Proof. 在 ker \mathscr{A} 中取基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 然后扩充为 V 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$. 于是, 任意一个 $\alpha \in V$ 都有唯一的分解, 记作

$$\alpha = \sum_{r=1}^{r} x_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} y_j \beta_j$$

对左右两边同时施以线性变换 \mathscr{A} , 就得到 $\mathscr{A}\alpha=0+\sum_{j=1}^s y_j\mathscr{A}\beta_j$. 因而 $\mathscr{A}(V)=L(\mathscr{A}\beta_1,\mathscr{A}\beta_2,\cdots,\mathscr{A}\beta_s)$.

接下来考虑两个空间的交. 如果 $\sum_{j=1}^{s} k_j \mathscr{A} \beta_j = 0$,那么一定有 $\mathscr{A} \left(\sum_{j=1}^{s} k_j \beta_j \right) = 0$. 故

$$\sum_{j=1}^{s} k_j \beta_j \in \ker \mathscr{A} \cup L(\beta_1, \cdots, \beta_n) = \{0\}.$$