

§1 与期望相关的不等式

当我们求出一个随机变量期望之后, 自然想知道进行一次实验, 随机变量的取值在均值附近的概率是多少. 为了解决这个问题, 首先介绍 Markov 不等式.

定理 1.1 (Markov 不等式). 令 X 是一个非负的随机变量, 那么对于任意的 $a > 0$, 有

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Proof. 令指示变量 $I := I(X \geq a)$, 由于 $X \geq 0, a > 0$, 有

$$I = I(X \geq a) \leq \left\lfloor \frac{X}{a} \right\rfloor \leq \frac{X}{a}$$

因此,

$$\Pr(X \geq a) = \mathbb{E}[I] \leq \mathbb{E}\left[\frac{X}{a}\right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

□