数学基础 **Summer 2024**

第 1 节: 逻辑符号, 集合, 函数

Lecturer: 张栊玮 *Scribes:* ________

本系列文本主要阐明一些基础的数学概念. 由于其基础性, 放在课件上面未免也太难阅读了. 于是统一放在这里. 请大家按需索取.

如何得到的文本: 打开卓里奇《数学分析》第一章, 把文本照抄, 例子改为初高中例子. 我们也鼓励有志向报考数学和 (或) 计算机专业的同学首先预习大学数学 (计算机科学) 的内容.

§1 逻辑符号

在中学的时候, 我们学习了二次方程. 我们会说 "$x^2 - 3x + 2 = 0$, 等价于 $x = 1$ 或 $x = 2$". 数学中有相当多类似的表达. 为了表达简洁起见, 最好把它们用专门的符号代指.

我们使用如下的记号:

- $\neg$: 否定词**非**(not) 非
- $\wedge$: **与**(and) 与
- $\vee$: **或**(or) 或
- $\implies$: **蕴含**(implies) 蕴含
- $\iff$: **等价**(if and only if, iff) 等价

为了节约括号, 我们规定逻辑符号的优先级如 $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$. 也就是说语句 "$\neg$ 我计算很好 $\wedge$ 他喜欢计算" 表示的是 "($\neg$ 我计算很好)$\wedge$(他喜欢计算) ".

1.1. 蕴含记号. $A \implies B$ 表示从 A 中可以推出 B. 我们也常说做 "A 蕴含 B", "B 是 A 的必要特征 (**必要条件**)", "A 是 B 的充分特征 (**充分条件**)". 特别注意, 如果 $A \implies B$ 的情况下, 如果前提条件为假, 那么 $A \implies B$ 为真. 这可以大致理解为: 前提为假的情况下, 无论如何做都没有说谎, 故整体来看, 说的话是真的. 必要条件 充分条件

对于 $A \iff B$, 可以理解为 $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$. 也就是 A 既是 B 的充分条件, 也是必要条件. 简称**充要条件**. 通常还会用 "当且仅当", "等价" 描述他们. 充要条件

1.2. 记号的相互作用. 我们列举几个常见的表述. 请大家找一些实际的例子把 A 和 B 换掉, 感受一下这些陈述为什么是对的:

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$;

- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

1.3. 数学证明. 一般而言, 证明的形式如同 $A \implies B$. 其中 A 是**前提**, B 是**结论**. 要证明这个命题, 就是建立一连串蕴含关系: 前提 结论

$$A \implies C_1 \implies C_2 \implies ... \implies C_n \implies B$$

其中每一个蕴含关系要么是公理, 要么是已经被证明的命题.

证明的时候, 采用经典的推导法则 (三段论): 如果 A 成立, 而且有 $A \implies B$, 那么 B 也成立.

此外, 我们还是用**排中律**. 即无论命题 A 的具体内容是什么, $A \vee \neg A$ 总是成立的. 我们还认为 $\neg(\neg A) = A$. 排中律

1.4. 某些特殊的记号. 我们约定, 可以用专门的符号 ":="(根据定义等于) 表示某件事情就是这样定义的. 其中冒号的位置位于被定义的对象的一侧. 例如

$$x := 2$$

表示 x 根据定义等于 2. 同样, 对于已有定义的表达式, 可以用此记号引入一个缩写. 例如

$$x_1 + x_2 + x_3 =: f(x_1, x_2, x_3)$$

需要注意的是, 我们这里做了一个关于记号的表面的说明, 根本没有讨论数理逻辑中有效性, 完备性等深刻的内容. 因为我们所掌握的, 总是比这时能够总结成的一般理论多一些.

§2 集合及基本运算

从 19 世纪末 20 世纪初开始, 集合论成为了最通用的数学语言. 在数学的一种定义中, 甚至提到 "数学是研究集合上的各种结构 (关系) 的科学."

首先来看朴素集合论. 朴素集合论的前提有三个:

- 集合由有区别的对象组成;
- 集合由其组成对象唯一确定;
- 任何性质都确定一个具有该性质的集合.

如果 x 是一个对象, P 是一种性质, $P(x)$ 表示 x 具有性质 P, 那么用 $\{x : P(x)\}$ 表示具有性质 P 的整整一类的对象. 他们构成一个**集合**. [1] 组成集合的对象称为集合的**元素**. 集合 元素

由元素 $x_1, x_2, ..., x_n$ 组成的集合可以写作 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, 为了方便书写, 可以在不引起误会的场合用 a 代表单元素集合 $\{a\}$. [2]

2.1. 包含关系. 通常习惯为, 用大写的拉丁字母表示集合, 对应的小写拉丁字母表示集合中的元素.

[1] 有时候也写作 $\{x|P(x)\}$.

[2] 高中范围内不要用这个记号 – 到处都是误会!

我们说 “x 是 X 的元素”, 或 “集合 X 有一个元素 x”, 或 “x **属于**集合 X”, 用符号记为 属于

$$x \in X(\text{或} X \ni x)$$

其否定记作 $x \notin X$. 即 “x **不属于**集合 X”. 不属于

在考虑集合相关的问题时, 会经常使用 “任意” 和 “存在” 两个逻辑符号.

- $\forall$: **任何**, 对于任何的...(全称量词) 任何
- $\exists$: **存在**, 可以找到... (特称量词) 存在

$\forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ 表示, 对于任何对象 x, 关系 $x \in A$ 与 $x \in B$ 是等价的. 这是因为一个集合完全由其元素所定义, 可以简单记作 $A = B$.

如果集合 A 的任何元素都是集合 B 的元素, 我们就采用记号 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作“集合 A 是集合 B 的**子集**”, 或者“A 包含于 B ”, 或者“B 包含 (含有) A ”. 使用符号表达就是 子集

$$(A \subset B) := \forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

如果 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 我们就说, 包含关系 $A \subset B$ 是严格的, 或者 A 是 B 的**真子集**. 真子集

给出上述的定义, 可以得出结论

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

如果 M 是一个集合, 则任何一个性质 P 都可在 M 中分离出一个子集

$$\{x \in M : P(x)\},$$

其元素 M 具有这个性质. 例如, 显然

$$M = \{x \in M : x \in M\}.$$

另外, 如果取集合 M 中任何元素都不具有的一个性质作为 P, 例如 $P(x) := (x \neq x)$, 我们就得到集合

$$\varnothing := \{x \in M : x \neq x\},$$

称为集合 M 的**空子集**. 空子集

2.2. 最简单的集合运算. 下面考察最简单的集合运算.

a) 集合 A 与 B 的**并集**是指集合 并集

$$A \cup B := \{x \in M : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

它由全部至少属于集合 A, B 之一的元素组成.

b) 集合 A 与 B 的**交集**是指集合 交集

$$A \cap B := \{x \in M : (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

它由全部同时属于集合 A 和 B 的元素组成.

c) 集合 A 与 B 的**差集**是指集合 差集

$$A\backslash B := \{x \in M : (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

它由全部属于 A 但不属于 B 的元素组成. 集合 M 与其子集 A 的差集通常称为 A 在 M 中的**补集**, 记为 $C_M A$ 或 $\overline{A}$, 后者用于从上下文显然知道在哪一个集合中求 A 的补集的情况. 补集

d) 集合的**直积** (笛卡儿积). 对于任何两个集合 A, B, 还以组成一个新的集合 – $\{A, B\} = \{B, A\}$, 其元素是且仅是集合 A 和 B. 这个集合在 $A \neq B$ 时由两个元素组成, 而在 $A = B$ 时由一个元素组成. 直积

上述新集合称为集合 A, B 的无序偶, 以区别于**序偶** (A, B), 序偶的元素 A, B 能够区别 $\{A, B\}$ 中的第一个元素和第二个元素. 按照定义, 序偶等式 序偶

$$(A, B) = (C, D)$$

表示 $A = C$ 且 $B = D$. 特别地, 如果 $A \neq B$, 则 $(A, B) \neq (B, A)$. 现在设 X, Y 是任意集合. 集合

$$X \times Y := \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$$

称为集合 X, Y (按这样的顺序!) 的直积或笛卡儿积, 它是由第一项属于 X 而第二项属于 Y 的全部序偶 (x, y) 组成的.[3]

从直积的定义和关于序偶的上述说明可以看出, 一般而言, $X \times Y \neq Y \times X$. 等式仅当 $X = Y$ 时才成立, 这时 $X \times X$ 简写为 X^2.

§3 函数

3.1. 映射的概念. 映射是十分基础的概念, 在日常生活中到处都有体现. 映射

设 X 与 Y 是某两个集合.

如果集合 X 的每一个元素 x 都按照某规律 f 与集合 Y 的元素 y 相对应, 我们就说有一个**函数**, 它定义于 X 并取值于 Y. 函数

这时, 集合 X 称为函数的**定义域**, 其元素 x 称为函数的变元或自变量, 而与**自变量** x 的具体值 $x_0 \in X$ 相对应的元素 $y_0 \in Y$ 称为元素 x_0 上的或自变量 $x = x_0$ 时的**函数值**, 并表示为 $f(x_0)$. 当自变量 $x \in X$ 变化时, 一般而言, 值 $y = f(x) \in Y$ 随 x 的值而变化. 因此, 量 $y = f(x)$ 经常称为**因变量**. 定义域 自变量 函数值 因变量

函数在集合 X 各元素上的全部函数值的集合

$$f(X) := \{y \in Y : \exists x((x \in X) \wedge (y = f(x)))\}$$

称为函数的值集或**值域**. 值域

[3] 这类似于 pair 或有序对, 在第一个位置和第二个位置是不一样的

通常使用以下记号来表示函数 (映射):

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

当函数的定义域和值域从上下文看很明显时, 也用记号 $x \mapsto f(x)$ 或 $y = f(x)$ 来表示函数, 更常见的则是只用一个字母 f 来表示函数.

如果两个函数 f_1, f_2 具有相同的定义域 X, 并且在每个元素 $x \in X$ 上的值 $f_1(x), f_2(x)$ 相同, 就认为这两个函数相同或相等, 记作 $f_1 = f_2$.

如果 $A \subset X$, 而 $f : X \to Y$ 是某函数, 就用 $f \mid A$ 或 $f|_A$ 来表示在集合 A. 上与 f 相等的函数 $\varphi : A \to Y$. 更确切地, 如果 $x \in A$, 则 $f|_A(x) := \varphi(x)$. 函数 $f|_A$ 称为函数 f 在集合 A 上的收缩或**限制**, 而相对于函数 $\varphi = f|_A : A \to Y$ 来说, 函数 $f : X \to Y$ 称为函数 φ 在集合 X 上的扩展或**延拓**. 限制 延拓

我们看到, 有时必须研究在某集合 X 的子集 A 上定义的函数 $\varphi : A \to Y$, 并且函数 φ 的值域 $\varphi(A)$ 也可能是 Y 的一个与之不等的子集. 因此, 有时使用术语"函数的出发域"来表示包含函数定义域在内的任何一个集合 X, 而包含函数值域在内的任何一个集合 Y 则称为"函数的到达域".

于是, 为了给出一个函数 (映射), 就要指出它的三要素 (X, f, Y) :

- X 是被映射的集合或函数的定义域,
- Y 是映射所到达的集合或函数的到达域,
- f 是让每一个元素 $x \in X$ 与确定元素 $y \in Y$ 相对应的规律.

我们看到, 这里的 X 与 Y 并不对称, 这表明映射的方向恰恰是从 X 到 Y.

3.2. 映射的分类. 当函数 $f : X \to Y$ 称为映射时, 它在元素 $x \in X$ 上的值 $f(x) \in Y$ 通常称为元素 x 的**像**. 对于映射 $f : X \to Y$, 集合 Y 中作为集合 $A \subset X$ 中各元素的像的集合 像

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x((x \in A) \land (y = f(x)))\}$$

称为集合 A 的像, 而集合 X 中以集合 $B \subset Y$ 中各元素为像的元素的集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

称为集合 B 的**原像**. 原像

映射 $f : X \to Y$ 分为以下几类:

- **满射**, 这时 $f(X) = Y$; 满射
- **单射** (或称为嵌入), 这时对于集合 X 的任何元素 x_1, x_2 有 单射

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2),$$

- **双射** (或称为一一映射), 这时它既是满射又是单射. 双射

如果映射 $f : X \to Y$ 是双射, 即如果它给出集合 X 与 Y 的元素之间的一一对应关系, 自然就存在一个映射

$$f^{-1} : Y \to X,$$

其定义方法如下: 如果 $f(x)=y$, 则 $f^{-1}(y)=x$, 即与元素 $y\in Y$ 相对应的是在映射 f 下以 y 为像的元素 $x\in X$. 因为 f 是满射, 所以这样的元素 $x\in X$ 存在, 又因为 f 是单射, 所以该元素是唯一的. 因此, 映射 f^{-1} 的定义是良好的. 这个映射称为原映射 f 的**逆映射**. 逆映射

从逆映射的构造方式可以看出, $f^{-1}:Y\to X$ 本身也是双射, 并且它的逆映射 $\left(f^{-1}\right)^{-1}:X\to Y$ 就是 $f:X\to Y$.

因此, 两个映射具有逆映射关系的性质是相互的: 如果 f^{-1} 是 f 的逆映射, 则 f 同样也是 f^{-1} 的逆映射.

我们指出, 尽管集合 $B\subset Y$ 的原像 $f^{-1}(B)$ 与反函数 f^{-1} 共用同样的符号, 但是应该注意, 集合的原像对于任何映射 $f:X\to Y$ 都有定义, 即使它不是双射, 从而没有逆映射, 原像的定义仍然成立.

3.3. 映射的复合, 互逆映射. 映射的复合运算, 一方面是生成新函数的丰富源泉, 另一方面是把复杂函数分解为简单函数的一种方法.

如果在映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 中, 一个映射 (这里是 g) 定义于另一个映射 (f) 的值域, 就可以构造一个新的映射

$$g\circ f:X\to Z,$$

它在集合 X 的元素上的值由公式

$$(g\circ f)(x):=g(f(x))$$

给出. 这样构造出来的映射 $g\circ f$ 称为映射 f 与 g (按这种顺序!) 的**复合映射**. 复合映射

鉴于复合运算有时需要连续进行若干次, 指出该运算满足结合律是有益的, 即

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

这是因为

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))=(h\circ g)(f(x))=((h\circ g)\circ f)(x).$$

我们还指出, 即使两种复合 $g\circ f$ 与 $f\circ g$ 都有定义, 它们一般也不相等:

$$g\circ f\neq f\circ g.$$

比如, 取二元素集合 $\{a,b\}$ 和映射 $f:\{a,b\}\to a, g:\{a,b\}\to b$, 则显然有 $g\circ f:\{a,b\}\to b$, 同时 $f\circ g:\{a,b\}\to a$.

使集合 X 的每个元素与自身相对应的映射 $f:X\to X$, 即映射 $x\xrightarrow{f}x$, 记作 e_X 并称为集合 X 的**恒等映射**. 恒等映射

实际上我们看到, 映射 $f:X\to Y, g:Y\to X$ 当且仅当 $g\circ f=e_X, f\circ g=e_Y$ 时才是互逆的双射.

3.4. 作为关系的函数. 函数的图像. 本节最前面对函数概念的描述是一种反映其本质的相当动态的描述, 但从现代标准来看, 还不能称之为定义, 因为它使用

了一个与函数等价的概念 — 对应. 为了让读者有所了解, 我们在这里指出用集合论语言给出函数定义的方法. (有趣的是, 我们现在就要介绍的关系的概念, 在莱布尼茨的著作中也出现在函数的概念之前.)

a) 关系 序偶 (x, y) 的任何集合称为**关系** $\mathcal{R}$. 组成 $\mathcal{R}$ 的所有序偶的第一个元素的集合 X 称为关系 $\mathcal{R}$ 的定义域, 而第二个元素的集合 Y 称为关系 $\mathcal{R}$ 的值域. 关系

因此, 可以把关系 $\mathcal{R}$ 解释为直积 $X \times Y$ 的子集 $\mathcal{R}$. 如果 $X \subset X'$ 且 $Y \subset Y'$, 则显然 $\mathcal{R} \subset X \times Y \subset X' \times Y'$, 所以同一个关系可以作为不同集合的子集给出.

包含某关系的定义域的集合, 称为这个关系的**出发域**. 包含某关系的值域的集合, 称为这个关系的**到达域**. 常常把 $(x, y) \in \mathcal{R}$ 写为 $x\mathcal{R}y$, 并说 x 与 y 之间的关系为 $\mathcal{R}$. 如果 $\mathcal{R} \subset X^2$, 就说在 X 上给定了关系 $\mathcal{R}$. 出发域 到达域

例子 3.1. 设 X 是平面上的直线的集合. 如果直线 $b \in X$ 平行于直线 $a \in X$, 我们就认为这两条直线之间的关系为 $\mathcal{R}$, 记为 $a\mathcal{R}b$. 显然, 这就从 X^2 中划分出满足 $a\mathcal{R}b$ 的序偶 (a, b) 的集合 $\mathcal{R}$. 从几何课程可知, 直线之间的平行关系具有下列性质:

- $a\mathcal{R}a$ (**自反性**); 自反性
- $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ (**对称性**); 对称性
- $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$ (**传递性**). 传递性

任何具有上述三个性质的关系 $\mathcal{R}$, 即任何自反的 (1) 对称的和传递的关系 $\mathcal{R}$, 通常称为**等价关系**. 等价关系由专用符号 $\sim$ 表示, 它这时代替表示关系的字母 $\mathcal{R}$. 于是, 对于等价关系, 我们把 $a\mathcal{R}b$ 写为 $a \sim b$, 并说 a 与 b 等价. 等价关系

例子 3.2. 设 M 是某集合, $X = \mathcal{P}(M)$ 是其一切子集的全体. 对于集合 $X = \mathcal{P}(M)$ 的任意两个元素 a 和 b, 即集合 M 的任意两个子集 a 和 b, 下列三种可能之一总是成立的: a 包含于 b; b 包含于 a; a 不是 b 的子集, b 也不是 a 的子集. 作为 X^2 中的关系 $\mathcal{R}$, 我们来考虑 X 的子集之间的包含关系, 即按照定义令

$$a\mathcal{R}b := (a \subset b).$$

这个关系显然具有下列性质:

$$\begin{aligned}
&a\mathcal{R}a \text{ (自反性)};\\
&(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c \text{ (传递性)};\\
&(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b \text{ (\textbf{反对称性})}.
\end{aligned}$$

反对称性

如果某集合 X 的任意两个元素之间的关系具有上述三个性质, 则该关系称为集合 X 上的偏序关系. 对于偏序关系, 经常把 $a\mathcal{R}b$ 写为 $a \preccurlyeq b$, 并说 b 在 a 之后. 如果除了偏序关系定义中的三个性质, 还成立条件

$$\forall a \forall b((a\mathcal{R}b) \vee (b\mathcal{R}a)),$$

即集合 X 的任何两个元素都是可比的, 则关系 $\mathcal{R}$ 称为**序关系**, 而定义了序 序关系

关系的集合 X 称为**线性序集**. 线性序集

这个术语的来源与数轴的直观形态有关, 因为数轴上任何一对实数之间的关系都具有 $a \leqslant b$ 的形式.

b) 函数与函数的图像 满足

$$(x\mathcal{R}y_1) \wedge (x\mathcal{R}y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$$

的关系 $\mathcal{R}$ 称为函数关系. 函数关系称为函数.

特别地, 设 X 与 Y 是两个集合 (不一定不同), $\mathcal{R} \subset X \times Y$ 是定义在 X. 上的关系, 即 X 的元素 x 与 Y 的元素 y 之间的关系. 如果对于任何 $x \in X$, 都存在唯一的元素 $y \in Y$, 使得 y 与 x 满足以上关系, 即 $x\mathcal{R}y$, 则关系 $\mathcal{R}$ 是函数关系. 这样的函数关系 $\mathcal{R} \subset X \times Y$ 也是 X 到 Y 上的映射, 或 X 到 Y 上的函数. 我们常用符号 f 来表示函数. 设 f 是函数, 我们将像前面那样用记号 $y = f(x)$ 或 $x \overset{f}{\longmapsto} y$ 来代替 xfy, 并把 $y = f(x)$ 称为函数 f 在元素 x 上的值, 或元素 x 在映射 f 下的像.

我们在最初描述函数的概念时曾经说, 元素 $x \in X$ 按照"规律"f 与元素 $y \in Y$ 相对应. 我们看到, 这样的对应就是, 对于每一个元素 $x \in X$, 均可指出唯一的元素 $y \in Y$, 使得 xfy, 即 $(x, y) \in f \subset X \times Y$.

对于按照最初描述来理解的函数 $f : X \to Y$, 由一切形如 $(x, f(x))$ 的元素组成的集合 Γ 称为该函数的图像, 它是直积 $X \times Y$ 的子集. 于是,

$$\Gamma := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

在关于函数概念的新描述下, 我们用子集 $f \subset X \times Y$ 的形式给出函数, 这时函数与它的图像当然已经没有区别.