非线性方程 $f(x) = 0$ 的解法

《计算方法》课程笔记

2024 年 11 月 27 日

§1 引言

非线性方程的求根问题是科学与工程应用中常遇到的一大类问题. 譬如 $f(x) = 0$: 其中 $f(x)$ 为非线性函数. 方程的根也称为函数 f 的零点.

理论上, n 次代数方程在复数域内一定有 n 个根 (考虑重数). 16 世纪人们发现了三/四次方程的求根公式, 但是其过于复杂, 基本没人用. 19 世纪从群论的角度可以证明大于等于 5 次的一般代数方程不能用代数公式求解.

至于超越方程, 求解过程就更加困难. 解可能是一个或多个, 也可能是无穷多个, 一般也不存在根的解析表达式. 因此, 研究用数值方法求满足一定精度要求的根的近似解具有重要的现实意义.

用数值方法求非线性方程的根大体分为三个部分:

1. 判定根的存在性. 方程有没有根? 若有, 有几个?
2. 确定根的分布范围. 将每个根用区间分隔开来, 获得各根的初始近似值.
3. 根的精确化. 将根的初始近似值按某种方法逐步精确化, 直到满足预先要求的精度为止.

本章研究内容是在有根的前提下求出方程的近似根.

§2 非迭代法简介

2.1. 二分法. 二分法的原理在高中就讲过. 下面简单回顾.

若 $f \in C[a, b]$, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 f 在 (a, b) 上必有一根.

其具体方法大约可以描述为通过二等分不断缩小有根区间的长度, 直到满足精度为止. 其算法也是显而易见的:

> 给定有根区间 $[a, b](f(a) \cdot f(b) < 0)$ 和精度要求 ϵ 或 δ.
> 1. 令 $x = (a + b)/2$
> 2. 如果 $b–a \le 2\epsilon$ 或 $|f(x)| \le \delta$, 停止计算, 输出 x, 否则执行第 3 步;
> 3. 如果 $f(a)f(x) < 0$, 则令 $b = x$, 否则令 $a = x$, 返回第 1 步.

a) 误差分析 记 $a_0 = a, b_0 = b$, 第 k 步的有根区间为 $[a_k, b_k]$, 设 x^* 为准确值. 有

$$|x_k - x^*| = \left|\frac{b_k + a_k}{2} - x^*\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2^2} = \cdots\cdots$$
$$|x_k - x_{k-1}| = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} = \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

对于给定精度 ϵ , 可估计二分法所需的步数 k:

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1,$$

干脆取得

$$\boxed{k = \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil - 1}$$

即可满足我们对误差的要求.

2.2. 试值法. 二分法的迭代过程没有考虑 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的大小. 试值法认为, 如果在等分区间的过程中, 比如, 如果 $f(a)$ 比 $f(b)$ 更接近于 0, 则根有可能更靠近 $f(a)$. 因此, 试值法用过 $f(a)$ 和 $f(b)$ 割线的交点代替区间中点.

设 $f(a)f(b) < 0$, 过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的割线 L 与 x 轴交点 $(c, 0)$.

我们知道, 经过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的割线是 $f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - b)$. 令 $y = 0$, 就有 $x = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$.

试值法的过程只要把上述二分法第一步改为 $\boxed{x = b - \dfrac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}}$ 即可.

下面探讨试值法的收敛性. 实际上可构造一系列 $\{[a_n, b_n]\}$ 区间序列, 其中每个序列都包含零点. 上面提到在每一步中, 零点 r 的近似值为

$$c_n = b_n - f(b_n)\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

迭代许多轮之后, 我们说 a_k, b_k 将会靠得很近, 所以我们采用红色的式子进行计算, 来避免丢失精度.

实际上, 试值法碰到"不动点"的时候, 可能越来越慢, 甚至还不如二分法; 另外尽管区间宽度 $b_n - a_n$ 越来越小, 但可能不趋近于零, 无法作为终止判别条件. 因此就需要根据 δ 来判别.

§3 迭代法简介

3.1. 迭代法的收敛性.

a) 是否收敛

定理 1. *设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导, 对 $\forall x \in [a, b]$, 若:*

1. *$g(x) \in [a, b]$ (映内性),*
2. *$|g'(x)| \le L < 1$ (压缩性, L 为常数, 称为压缩系数).*

那么

1. 函数 $f(x) = x - g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一零点 x^*.
2. 对于任意初值 $x_0 \in [a, b]$, 迭代公式 $x_{k+1} = g(x_k)$ 均收敛于方程的根 x^*;
3. 迭代误差可用如下两个等价的不等式来估计:

$$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$$
$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

其证明大致思路只要使用 Lagrange 中值定理即可.

例 1. $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 [1,2] 上有一个根 (正根), 分析 $g(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$ 的收敛性.

求导得到

$$g' = -\frac{3x^2}{4\sqrt{10-x^3}} \quad g'' = -\left(\frac{3x}{2\sqrt{10-x^3}} + \frac{9x^4}{8\sqrt{(10-x^3)^3}}\right),$$

显然, 在此区间上 $g'(x)$、$g''(x)$ 均 < 0, $g(x)$、$g'(x)$ 均为减函数. 考虑

- 映内性: $g(1) = 3/2 \in [1, 2]$, 但 $g(2) = \sqrt{2}/2 \approx 0.7071 \notin [1, 2]$.
- 压缩性: $|g'(1)| = 0.25 < 1$, 但 $|g'(2)| \approx 2.12 > 1$.

均不满足收敛条件. 但是考虑子区间 [1, 1.5], 上述两个条件均满足了.

收敛定理有了, 满足定理的两个条件不容易. 下面我们探讨一种在某一点附近收敛的情况.

定义 1. 若存在 $g(x)$ 的不动点 x^* 及其某个邻域 $N(x^*, \delta) := [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 使得 $\forall x_0 \in N$, 由迭代公式生成的序列 $\{x_k\}(\{x_k\} \subset N)$ 收敛于 x^*, 则称迭代公式局部收敛.

定理 2. *设 x^* 是 $g(x)$ 的不动点, $g'(x)$ 在 x^* 的某个邻域上连续, 且 $|g'(x^*)| < 1$, 则迭代公式局部收敛.*

证明可以使用连续函数的定义和 Lagrange 中值定理得到.

但是, x^* 本身就是待求的, 如何判断 $|g'(x^*)| < 1$ 呢? 实际上, $g'(x)$ 的连续性表明: 如果 $g(x)$ 迭代收敛到 x^*, 在 x^* 的某个邻域内就应该有 $|g'(x)| < 1$. 在应用中, 如已知 x^* 的大致位置, 而 x_0 为 x^* 的一个较好的近似值, 可用 $|g'(x_0)| < 1$ 代替 $|g'(x^*)| < 1$, 这就可以判定上述迭代公式的收敛性.

b) 收敛速度

定义 2. 设迭代 $x_{k+1} = g(x_k)$ 收敛到 $g(x)$ 的不动点 x^*. 记绝对误差 $e_k = x_k - x^*$. 若 $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{e_{k+1}}{e_k^p}\right| = C \neq 0$ (C为常数), 则称该迭代为以收敛阶 p 收敛到 x^*. 数 C 称为渐近误差常数.

更进一步, 当 $p = 1$ 时称为线性收敛;

当 $p > 1$ 时称为超线性收敛. 当 $p = 2$ 时称为二次 (阶) 收敛（或平方收敛）.

注. 实际上, 不动点迭代中, 若迭代数列 $\{x_k\}$ 收敛, 且 $g'(x) \neq 0$, 则 $e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = g(x_k) - g(x^*) = g'(\xi)e_k$. 取极限得 $\lim_{n\to\infty} |e_{k+1}/e_k| = |g'(x^*)| \neq 0$, 这就表明其线性收敛. 实际上要想得到超线性收敛, 就必然满足 $g'(x^*) = 0$. 并且可以看出来线性收敛的时候 $|C| < 1$.

3.2. Newton 迭代法.

a) 基本思想 在学习微积分的时候我们知道性质还不算差的函数可以被线性近似, 即 $f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$. 当 $f'(x_k) \neq 0$ 时, $f(x) = 0$ 可用此线性方程 (切线) 近似代替, 即 $f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) \approx 0$. 解这个方程, 就得到了迭代公式 $x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. 使左端取得 x_{k+1}, 就得到了

$$\boxed{x_{k+1} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \cdots}$$

这就是 Newton 迭代公式.

b) 收敛情况 Newton 迭代法在单根情形下至少二阶收敛.

例 2. 试说明: 设 $f(x)$ 在零点 x^* 的邻域内 f'' 连续, 则牛顿迭代公式在 x^* 是单根的情况下至少平方局部收敛.

先证局部收敛: Newton 法可写成不动点迭代的形式:$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. 若 x^* 是方程 $f(x) = 0$的单根$f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0 \Rightarrow x^* = \varphi(x^*)$. 所以 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点. 又

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow \varphi'(x^*) = 0.$$

再证至少收敛阶 $p = 2$: 将 $f(x^*)$ 在 x_k 处做一阶 Taylor 展开:

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x_k)^2$$

因为没有重根, $f'(x_k) \neq 0$, 等式两边同时除以 $f'(x_k)$, 得到

$$\begin{aligned}
x_k - x^* &= \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2 \\
\Rightarrow x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^* &= \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2 \\
\Rightarrow x_{k+1} - x^* &= \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2 \\
\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^2} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} = c \neq 0
\end{aligned}$$

所以 Newton 迭代法 (单根的情况下) 至少二阶局部收敛.

Newton 法也适用于求重根的情形, 但是收敛速度会变慢. 实际上当 x^* 是 $f(x)$ 的 $m(m > 1)$ 重根时, $f(x)$ 可以表示为: $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$ (其中$g(x^*) \neq$

0), 迭代公式变为 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{(x_k-x^*)g(x_k)}{mg(x_k)+(x_k-x^*)g'(x_k)}$. 令 $e_k=x_k-x^*$, 则将上式两边同减 x^*, 得 $e_{k+1}=x_{k+1}-x^*=e_k-\frac{e_kg(x_k)}{mg(x_k)+e_kg'(x_k)}$. 两边同时除以 e_k, 取极限, 得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{g(x_k)}{mg(x_k)+e_kg'(x_k)}\right)=1-\frac{1}{m}\neq 0$$

这表明牛顿法求方程的重根时仅为线性收敛. 并且 m 重数越高, 收敛越慢.

3.3. 割线法. 由于 Newton 迭代法每次迭代都要计算导数 $f'(x_k)$, 当 $f(x)$ 较复杂时, 计算量大. 下面考察一种避免导数运算的求根方法. 在迭代过程中用到前两步 x_k 和 x_{k-1} 处的函数值构造迭代函数来提高迭代的收敛速度.

虽说不必计算 f 在 x_k 处的导数, 但是也应该有和导数一样的类似物. 我们考虑两个点 x_k, x_{k-1} 之间的差商 $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$, 并用这个来近似替代替代牛顿公式中的点 x_k 处的导数 $f'(x_k)$, 得到

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}), k=1,2,3,\cdots.$$

这称为割线迭代公式, 相应的迭代法称为割线法、弦截 (两步) 法或多点迭代法.

所以, 割线法的迭代过程如下所示:

用曲线上两点 $P_0(x_0,f(x_0))$、$P_1(x_1,f(x_1))$ 的割线来代替曲线, 用割线与 x 轴交点的横座标作为方程的近似根 x_2, 再过 P_1 和 $P_2(x_2,f(x_2))$ 作割线求出 x_3, ... 以此类推, 当收敛时可求出满足精度要求的 x_k.

这种方法只需计算函数值, 避免计算导数；但是它需要两个初始点, 收敛比牛顿迭代法稍慢, 对初始点要求同样高.

可以证明, 割线法的收敛阶为 $\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618.}$

定理 3. *在 $f(x)$ 的单根 x^* 的邻域内 $f''(x)$ 连续, 则存在 x^* 的某个邻域 $N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得当 x_0 , x_1 $N(x^*)$ 时, 由弦截法产生的序列收敛到 x^*, 且收敛阶为* $\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618.}$

证明过于复杂, 这里略.