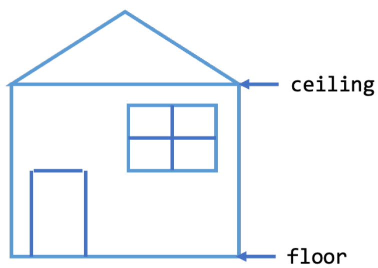
第三章　上取整和下取整

具体数学阅读笔记

2024 年 7 月 19 日

§1　上取整和下取整

实际上, 上取整和下取整实际上英语是对应着房子的 “天花板” 和 “地板”.



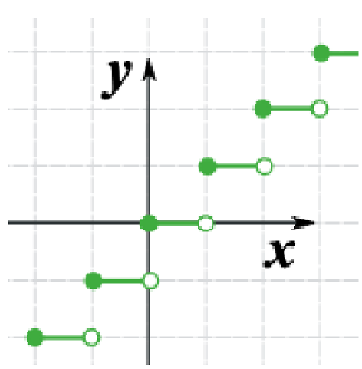
1.1. 基本定义.

定义 1.1 (上取整和下取整)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义下取整函数和上取整函数

$$\lfloor x \rfloor := \text{最大的} \leqslant x\text{的整数}$$
$$\lceil x \rceil := \text{最小的} \geqslant x \text{ 的整数}$$

分别称他们为 “上取整函数” 和 “下取整函数”.

例子 1.1. 绘制出下取整函数的图像



上取整函数的图像也是同理.

性质 1.1. 取整函数有如下的三个性质:

1. $\lfloor x\rfloor = x \iff x$ 是正数 $\iff \lceil x\rceil = x$.
2. (放缩) $x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil < x+1$.
3. (对称)$\lfloor -x\rfloor = -\lceil x\rceil, \quad Fx\rceil = -\lfloor x\rfloor$.

性质 1.2. 实际上, 上下取整函数是对一类不等式的缩写

$$\lfloor x\rfloor = n \begin{cases} \iff & x-n\leqslant x \qquad (\text{固定}x, \text{考察}n \text{ 的范围}) \\ \iff & n\leqslant x\leqslant n+1 \quad (\text{固定}n, \text{考察}x \text{ 的范围}) \end{cases}$$

$$\lceil x\rceil = n \begin{cases} \iff & x\leqslant n\leqslant x+1 \\ \iff & n-1 < x \leqslant n. \end{cases}$$

推论 1.3. 若 $n\in\mathbb{Z}, \lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$.

注: 实际上, 这一个性质经常用于将整数 (也许是配凑出来的) 移入或者移出取整记号中.

为了更加彰显不等式的地位, 特别有下面的一个不等式.

性质 1.4 (上下取整的不等式)**.**

$$x<n \Leftrightarrow \lfloor x\rfloor < n; \quad n<x \Leftrightarrow n<\lceil x\rceil.$$
$$x\leqslant n \Leftrightarrow \lceil x\rceil \leqslant n; \quad n\leqslant x \Leftrightarrow n\leqslant \lfloor x\rfloor.$$

这是一个重要的式子. 可以通过分类讨论的方法证明之.

定义 1.2 (分数部分)**.** 定义一个数的分数部分为 $x-\lfloor x\rfloor$. 如果与集合的记号不相冲突的话, 可以记作 $\{x\}$.

例子 1.2. $\lfloor x+y\rfloor$ 是否永远等于 $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$? 实际上不是这样的. 将 x,y 写作 $x=\lfloor x\rfloor + \{x\}, \quad y = \lfloor y\rfloor + \{y\}$, 那么

$$\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor \{x\}+\{y\}\rfloor$$

我们发现当且仅当 $\{x\}+\{y\} < 1$ 时, $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$. 否则由于 $0\leqslant \{x\}+\{y\} < 2$, 其为 $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.

1.2. 上取整, 下取整的复合. 我们首先考察一些基本例子得到的结果.

例子 1.3. $\lceil \lfloor x\rfloor\rceil = \lfloor x\rfloor; \lfloor\lceil x\rceil\rfloor = \lceil x\rceil$. 直接将两者复合得到的结果是平凡的.

例子 1.4. 证明或推翻: $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

首先尝试举反例, 但是 $\pi, e, \phi, 1, 2\cdots$ 都是正确的, 于是考虑证明.

我们的目标为想办法除去 $\sqrt{\ }$ 下的 $\lfloor\rfloor$. 假设 $m := \lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor$, 解掉最外层的底可以得到

$$m\leqslant \sqrt{\lfloor x\rfloor} < m+1$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow m^2 \leqslant \lfloor x \rfloor < (m+1)^2 \\
&\Rightarrow m^2 \leqslant x < (m+1)^2. \Longrightarrow m \leqslant \sqrt{x} < (m+1)^2 \\
&\Rightarrow m \leqslant \lfloor \sqrt{x} \rfloor < (m+1)^2.
\end{aligned}
$$

考虑泛化上述的例子.

定理 1.5. 令 $f(x)$ 为一个连续, 单调递增的函数, 满足

$$f(x)\text{是整数} \implies x\text{是整数}.$$

那么有

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor, \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil.$$

只要 $f(x), f(\lfloor x \rfloor), f(\lceil x \rceil)$ 有定义.

证明. 1° 如果 x 是整数, 那么显然成立.

2° 若 $x > \lfloor x \rfloor$, 由于 f 单调递增, 那么 $f(x) > f(\lfloor x \rfloor)$. 然后两端同时取下取整符号, 由于下取整记号不减, 那么 $\lfloor f(x) \rfloor \geqslant \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$. 我们接下来分类讨论, 以确定大于号的情形不成立.

- 如果 $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$, 那么这就是我们想要的.
- 如果 $\lfloor f(x) \rfloor > \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$, 那么由于 f 是一个连续的函数, 一定存在 y, 使得 $\lfloor x \rfloor \leqslant y < x$, 并且 $f(y) = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$. 根据 f 的性质, y 一定也是整数. 但是 $\lfloor x \rfloor$ 与 x 之间不存在另一个整数, 矛盾! 所以我们的假设不成立.

□

推论 1.6.

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor, \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil.$$

比如,

$$\lfloor \lfloor \lfloor x/10 \rfloor /10 \rfloor /10 \rfloor = \lfloor x/1000 \rfloor.$$

1.3. 区间计数问题. 如果我们用如下的简写记后面的区间:

$$
\begin{cases}
[\alpha..\beta] & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\
(\alpha..\beta] & \alpha < x \leqslant \beta \\
[\alpha..\beta) & \alpha \leq x < \beta \\
(\alpha..\beta) & \alpha < x < \beta
\end{cases}
$$

我们的问题是这个集合里面包含了多少个整数.(α, β 不一定是整数).

首先, 简化考虑的问题情形. 如果 α, β 均为整数, 那么数量就是

$$\beta - \alpha + \text{“[” 的个数} - 1$$

然后, 考虑转换, 因为

$$\begin{aligned}\alpha \leqslant n < \beta \quad &\Leftrightarrow \lceil \alpha \rceil \leqslant n < \lceil \beta \rceil \\ \alpha < n \leqslant \beta \quad &\Leftrightarrow \lfloor \alpha \rfloor < n \leqslant \lfloor \beta \rfloor\end{aligned}$$

所以余下二者仅需要补充上 “+1” 或者 “ $-1''$. 也就是

$$\begin{array}{ll}[\alpha..\beta] & \lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1 \\ (\alpha..\beta) & \lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1.\end{array}$$

注:

1. 我们习惯使用左闭右开的括号序列, 因为其具有可加性.
2. 上述记号在关于求和取整时非常有用, 因为可以迅速的把这些技术的内容收缩下来.

例子 1.5. 抽奖游戏. 在 $[1, 1000]$ 中选一整数. 记抽出数为 n. 若 $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \backslash n$(记号 $a \backslash b$ 表示 a 是 b 的正因子), 那么他就赢取了 5 元. 否则, 他就输了 1 元. 请求出它玩这个游戏得到的期望.

$$\begin{aligned}W &= \sum_{n=1}^{1000} [\text{抽到 } n \text{ 会让我们赢}] \\ &= \sum_{1 \leqslant n \leqslant 1000} [\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \backslash n] \xlongequal{k := \sqrt[3]{n}} \sum_{k,n} [k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor][k \backslash n][1 \leqslant n \leqslant 1000] \\ &\xlongequal{k \backslash n \text{ 变形为} n = km} \sum_{k,m,n} \left[(k)^3 \leqslant n < (k+1)^3\right] [n = km][1 \leqslant n \leqslant 1000] \\ &\xlongequal{\text{换掉} n := km} \sum_{k,m} \left[k^3 \leqslant km < (k+1)^3\right] [1 \leqslant km \leqslant 1000] \\ &\xlongequal{m = n/k = n/\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor} 1 + \sum_{k,m} \left[k^3 \leqslant km < (k+1)^3\right] [1 \leqslant k < 10] \\ &= 1 + \sum_{1 \leq k \leq 10} (\lceil k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k} \rceil - \lceil k^2 \rceil) \\ &= 1 + \sum_{1 \leqslant k < 10} (3k + 4) = 172\end{aligned}$$

拓展问题: 在 $[1..n]$ 中呢? 记 K 为最大的满足 $K^3 \leq n$ 的数字. 也就是我们先求出较为整体的部分.

$$W = \sum_{1 \leqslant k < K} (3k+4) + \sum_m \left[K^3 \leqslant K_m < N\right] \quad == \frac{3}{2}K^2 + \frac{5}{2}K - 4 + \underbrace{\sum_m \left[m \in \left[K^2, N/K\right]\right]}_{\lfloor \frac{N}{K} \rfloor - K^2 + 1}$$

然后可以着手求零碎的部分. 较为零碎的部分并没有很好的封闭表达式, 因此我们只能够讨论它的渐进特性. 这个特性会在后续展开.

例子 1.6. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, α 的谱是一个多重集, 定义做

$$\mathrm{spec}(\alpha) := \{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor 2\alpha\rfloor, \cdots\}$$

我们证明两个事实:

第一, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \mathrm{Spec}(\alpha) \neq \mathrm{Spec}(\beta)$.

证明说: 不妨设 $\alpha < \beta$. 我们发现 $\exists m$, s.t. $m(\beta-\alpha) \geqslant 1$.(可以取 $\left\lceil \frac{1}{\beta-\alpha} \right\rceil$). 由此 $m\beta - m\alpha \geqslant 1, \quad m\beta \geqslant 1 + m\alpha \Rightarrow \lfloor m\beta\rfloor > \lfloor m\alpha\rfloor$. 因而 $\mathrm{Spec}(\beta)$ 中 $\leqslant \lfloor m\alpha\rfloor$ 的元素小于 m 个. 而 $\mathrm{Spec}(\alpha)$ 中至少有 m 个 $\leqslant \lfloor m\alpha\rfloor$ 个元素. 这就表示这两个不同的谱序列永远不可能相等.

第二, $\mathrm{Spec}(\sqrt{2}) \cup \mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}) = \mathbb{N}, \quad \mathrm{Spec}(\sqrt{2}) \cap \mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}) = \varnothing$.

证明说: 考虑有多少个 $\leq n$ 个元素在 $\mathrm{spec}(\sqrt{2})$ 里面, 有多少个 $\leqslant n$ 的元素在 $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2})$ 里面. 定义 $N(\alpha, n)$ 表示 $\mathrm{Spec}(\alpha)$ 中 $\leqslant n$ 的之元素个数.

$$\begin{aligned} N(\alpha, n) &= \sum_{k>0} [\lfloor k\alpha\rfloor \leqslant n] \\ &= \sum_{k>0} [\lfloor k\alpha\rfloor < n+1] \\ &= \sum_{k>0} [k\alpha < n+1] = \sum_{k} \left[0 < k < \frac{n+1}{\alpha}\right] \\ &= \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - 1. \end{aligned}$$

然后求 $N(\sqrt{2}, n) + N(2+\sqrt{2}, n) \stackrel{?}{=} n$

$$\begin{aligned} &\left\lceil \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rceil - 1 = n \\ \Leftrightarrow &\left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor = n \qquad (\lfloor x\rceil - \lfloor x\rfloor = [x \text{ is not int }]) \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\frac{n+1}{\sqrt{2}} + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}}}_{n+1} - (\underbrace{\left\{\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\} + \left\{\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\}}_{1\text{, 因为两个不是整数的加起来等于整数一定进位了}}) = n \end{aligned}$$

这样的结论可推广到 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Spec}(\alpha) \cup \mathrm{Spec}(\beta) = \mathbb{N}$.

§2 二元运算: 模 (mod) 运算

2.1. 模. 我们已经知道了 n m 的商为 $\lfloor n/m \rfloor$, 我们下面定义 n m 的余数.

定义 2.1. $n \bmod m$ 为 n/m 的余数. 即

$$n \bmod m := n - m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor, \forall n, m \in \mathbb{R}., m \neq 0.$$

特别地, 定义 $n \bmod 0 = n$(方使起见).

例子 2.1.

$$\begin{aligned}
&5 \bmod 3 = 2 \\
&5 \bmod (-3) = 5 - (-3) \left\lfloor \frac{5}{-3} \right\rfloor = 5 - 3 \times 2 = -1 \\
&-5 \bmod 3 = -5 - 3 \left\lfloor \frac{-5}{3} \right\rfloor = 1 \\
&-5 \bmod (-3) = -5 - (-3) \times \left\lfloor \frac{-5}{-3} \right\rfloor = -2.
\end{aligned}$$

可见, 对 $x \bmod y$ 而言, 若 $y > 0, 0 \leqslant x \bmod y < y$;
$y < 0, \quad 0 \geqslant x \bmod y > y$..

例子 2.2.

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + x \bmod 1.$$

同样可以使用上取整定义 "不足近似量".

定义 2.2.

$$n \text{ mumble } := m \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - n., \forall n, m \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

例子 2.3.

$$5 \text{ mumble } 3 = 3 \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil - 5 = 1.$$

$$5 \text{ mumble } (-3) = -3 \left\lceil \frac{5}{-3} \right\rceil - 5 = -2$$

$$-5 \text{ mumble } 3 = 2$$

$$-5 \text{ mumble } -3 \quad = -1.$$

我们首先注意一个性质:

性质 2.1.

$$c(x \bmod y) = cx \bmod cy$$

证明. 首先验证一般情况:

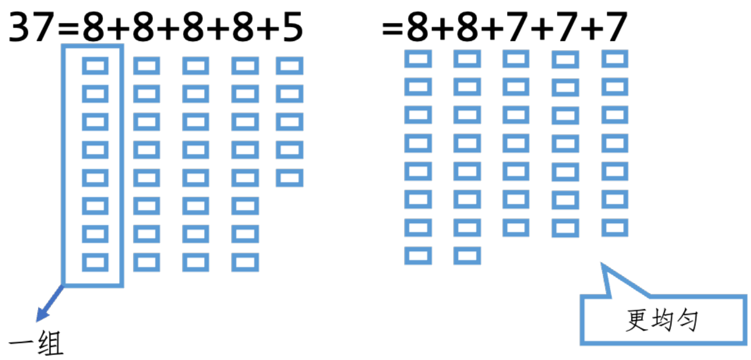
$$\begin{aligned}
c(x \bmod y) = c\left(x - y \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor\right) &= cx - cy \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \\
&= cx - cy \left\lfloor \frac{cx}{cy} \right\rfloor \\
&= cx \bmod cy.
\end{aligned}$$

然后对于 0 的情况, 有

$$c(x \bmod 0) = cx \bmod 0 = cx$$

也成立, 所以上面的性质成立. □

例子 2.4. 我们希望尽可能平均地将 n 个物品分为 m 份. 如 $37 = 8+8+8+8+5 = 8+8+7+7+7$.



可以考虑横着放

- 若 $n \nmid m$,"长的行"将会容纳 $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ 个物品. ($n \bmod m$)
- 若 $n \nmid m$,"短的行"将会容纳 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 个物品. ($n \,\mathrm{mumble}\, m$)

并且两种行最多仅仅相差 1.

我们考虑另一种方法. 要把 n 个物品"尽可能平均"分为 m 个组时 (干脆使用 $f(n, m)$ 表示之), 我们有如下的情况:

1. 把 $\lceil n/m \rceil$ 个物品放到当前组中
2. 递归执行 $f(n - \lceil n/m \rceil, m - 1)$.

比如 $m = 314, n = 6$, 那么有下表格的过程:

n	m	$\lceil n/m \rceil$
314	6	53
261	5	53
208	4	52
156	3	52
104	2	52
52	1	52

我们来说明这个算法的正确性. 假设 $n = \underbrace{q}_{\lfloor n/m \rfloor} m + \underbrace{r}_{n \bmod m}$. 那么

1. 若 $r = 0$, 放 $\lceil n/m \rceil = q, f(n - q, n - 1)$ 仍为 $r = 0$ 的情形.
2. 考 $r > 0, f(n - (q + 1), n - 1)$, 使下一次调用 r 减少 1 .

这样一来, 最后一定会到达 $r = 0$ 的情形.

接下来我们考虑第 k 组有多少物品. 答案是 $\begin{cases} \lceil n/m \rceil, 1 < k \leqslant n \bmod m \\ \lfloor n/m \rfloor, n \geqslant k > n \bmod m \end{cases}$

稍加改写, 有

$$
\begin{aligned}
&= q + [k \leqslant r] = q + \left\lceil \frac{r-k+1}{m} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{r-k+1}{m} \right\rceil + q = \left\lceil \frac{mq+r-k+1}{m} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{n-k+1}{m} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

根据上述的例子, 我们就得到了一个恒等式:

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil .$$

同时我们可以证明下面的命题:

性质 2.2.

$$n = \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m}{m} \right\rfloor}_{m\text{ 项}}$$

$$n = \overbrace{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil}$$

要证明这两个对称的形式, 只要注意到 $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$ 即可.

将 n 代换为 mx 可以得到如下推论:

推论 2.3.

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor$$

证明.

$$
\begin{aligned}
\lfloor mx \rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor + m - 1}{m} \right\rfloor \\
&\xlongequal{\text{去掉下取整}} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

□

2.2. 关于求和的递归式. 接下来看一些关于求和的递归式.

例子 2.5. 有如下的递推关系:

$$
\begin{aligned}
&K_0 = 1 \\
&K_{n+1} = 1 + \min\left(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor}\right) .
\end{aligned}
$$

求证 $K_n \geqslant n, \forall n \geqslant 0$.

证明. 使用归纳法.

- $n=0$, 成立.
- 假设这个性质对 $0,1,\cdots n$ 成立, 要推是否对 $n+1$ 成立. 由于 $K_{n+1}=1+\min\left(2K_{\lfloor n/2\rfloor},3K_{\lfloor n/3\rfloor}\right)$, 以及归纳假设可知: $2K_{\lfloor n/2\rfloor}\geqslant 2\lfloor n/2\rfloor, 3K_{\lfloor n/3\rfloor}\geqslant 3\lfloor n/3\rfloor$. 根据大小关系分类讨论:
  - 如果 $2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=n$ 成 $3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor=n$, 命题得证.
  - 如果 $K_{\lfloor n/2\rfloor}<\frac{n}{2}$ 或 $K_{\lfloor n/3\rfloor}<n/3$, 那么以 $K_{\lfloor n/2\rfloor}<\frac{n}{2}$ 为例, 就可以得到 $K_{\lfloor n'/2\rfloor}\leqslant\left\lfloor\frac{n'}{2}\right\rfloor$, $K_{\lfloor\lfloor n'/2\rfloor/2\rfloor}\leqslant\left\lfloor\frac{n'}{4}\right\rfloor$. 这就可以推出 $K_0\leqslant 0$. 但 $K_0=1$, 矛盾! $K_{\lfloor n'/3\rfloor}\leqslant\left\lfloor\frac{n'}{3}\right\rfloor$ 同理, 此情况不成立!

□

例子 2.6. 为 $\sum_{k=1}^{n}\lceil\lg k\rceil$ 寻找封闭形式.

实际上, 本式子是从选择排序的运行时间引申的. 记 $m=\lfloor\lg n\rfloor$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\lceil\lg k\rceil &= \sum_{k=1}^{2^m}\lceil\lg k\rceil = j[j=\lceil\lg k\rceil]\left[1\leqslant k\leqslant 2^m\right]\\ &= \sum_{j,k} j\left[2^{j-1}<k\leqslant 2^j\right]\left[1\leqslant j\leqslant m\right]\\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(2^j-2^{j-1}\right)j = 2^m(m-1)+1.\end{aligned}$$

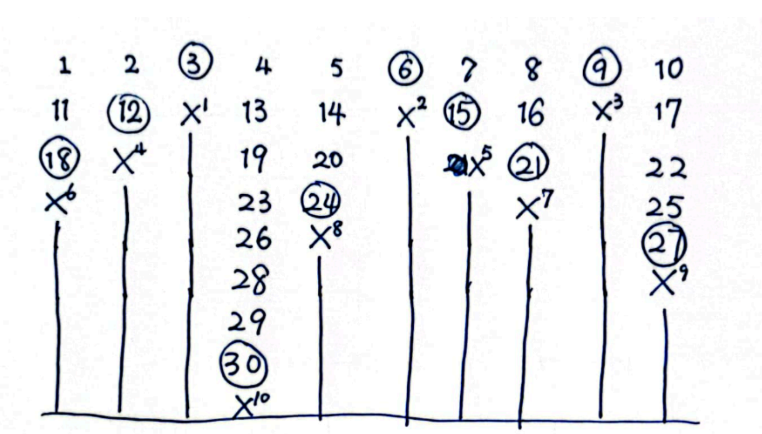
然后再加上 $\lfloor\lg n\rfloor\ldots n$ 的内容, 共有 $(n-m)\cdot(m+1)$ 项. 故封闭形式为 $2^m(m-1)+1+(n-m)(m+1)$.

例子 2.7 (Josephus 问题)**.** 求解递归式

$$\begin{aligned}&J(1)=1\\ &J(n)=2J\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)-(-1)^n, n>1.\end{aligned}$$

的推广: 每隔 m 个人杀死一个.

我们采取一个新思路, 每一个人经过的时候, 赋予它一个新的编号, 在下面的例子中, 展示的是每隔 3 个人杀死一个:



这样一来, 第 k 个被移除的人拥有号码 $3k$. 我们按照是不是他们的本身的号码进行分类讨论.

- $N > n$, 说明轮过一轮了, 若 ($N = n + 2k + 1$ 或 $N = n + 2k + 2$), 那么前一个数分别是 ($3k + 1$ 或 $3k + 2$), 其中 $k = \lfloor \frac{N-n-1}{2} \rfloor$.

因此寻找最后一个人的代码就可以用如下的伪代码实现:

$$
\begin{aligned}
&N \leftarrow 3n \\
&\text{while } N > n, \quad N \leftarrow 3\left\lfloor \frac{N-n-1}{2} \right\rfloor + (N - n - 2k) \\
&J_3(n) \leftarrow N. \quad = \left\lceil \frac{N-n-1}{2} \right\rceil + N - n
\end{aligned}
$$

下面做变量代换, 从 $3n$ 到 1 反向编号, 就有

$$
\begin{aligned}
D + 3n + 1 &- \left(\left\lfloor \frac{(3n+1-D)-n-1}{2} \right\rfloor + (3n+1-D) - n \right) \\
&= n + D - \left\lfloor \frac{2n-D}{2} \right\rfloor = D - \left\lfloor \frac{-D}{2} \right\rfloor = D + \left\lceil \frac{D}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} D \right\rceil .
\end{aligned}
$$

我们以一段对于数学归纳法的讨论结束这一小节.

> In trying to devise a proof by the Mathematical induction, you may fail for two opposite reasons. You may fail because you try to prove too much, Your $P(n)$ is too heavy a burden; Yet you may also fail because you prove too little, Your $P(n)$ is too weak to support. In general, you have to balance the statement of your theorem so that the support is just enough for the burden.
>
> — G. Polya

§3 关于底和顶的和式

3.1. 取整: 使用新变量替代. 在第 1.3 节中, 我们令 $m := \lfloor\sqrt{k}\rfloor$, 然后施用第 1 节中得到的 $m \leqslant \sqrt{k} < m+1$ 不等式, 最后使用了计数这个区间里面有多少个整数的方法.

另一种方法: 使用 $\sum_j [1 \leqslant j \leqslant x]$ 代替 $\lfloor x\rfloor.(x>0)$. 假若 $n = a^2$, 那么

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant k<n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor &= \sum_{j,k} [1 \leqslant j \leqslant \sqrt{k}]\left[0 \leqslant k \leqslant a^2\right] \\
&= \sum_{1\leqslant j<a} \sum_k \left[j^2 \leqslant k < a^2\right] \\
&= \sum_{1\leqslant j<a} \left(a^2 - j^2\right) = a^3 - \frac{1}{3}a\left(a+\frac{1}{2}\right)(a+1)
\end{aligned}
$$

3.2. 等差数列的例子. 我们希望求

$$
\sum_{0\leq k<m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor, m>0, n\in\mathbb{Z}.
$$

的封闭形式.

实际上各种情况下, 我们首先要做的事情是观察特例.

- 当 $n=1$ 的时候, $x := \frac{x}{m}$, 得

$$
\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+x}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m-1+x}{m} \right\rfloor = \lfloor x\rfloor.
$$

- 当 $m=2$ 的时候,

$$
\sum_{0\leqslant k<m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+x}{2} \right\rfloor
$$

  分类讨论:
  1. n 是偶数: $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2} = 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2}$.
  2. n 是奇数: $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \frac{n-1}{2} = \lfloor x\rfloor + \frac{n-1}{2}$.
- 若令 $m=3$,

$$
\sum_{0\leqslant k<m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2n}{3} \right\rfloor
$$

  分类讨论:
  1. $n \bmod 3 = 0 : \frac{n}{3}, \frac{2n}{3} \in \mathbb{Z}$. 和为

$$
\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \frac{n}{3}\right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \frac{2n}{3}\right) = 3\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + n
$$

2. $n \bmod 3 = 1, \frac{n-1}{3}, \frac{2(n-1)}{3} \in \mathbb{Z}$. 和为

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \frac{n-1}{3} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \frac{2n-2}{3} \right) = \lfloor x \rfloor + n - 1$$

3. $n \bmod 3 = 2, \frac{n-2}{3}, \frac{2(n-2)}{3}, \frac{2n-1}{3} \in \mathbb{Z}$,

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \frac{n-2}{3} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \frac{2n-1}{3} \right) = \lfloor x \rfloor + n - 1.$$

- 若令 $m = 4, \sum_{0 \le k < m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3n}{4} \right\rfloor$. 那就分为 4 类.
- 1. $n \bmod 4 = 0$ 的情况:

$$\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{n}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{2n}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{3n}{4} \right) = 4 \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{3n}{2}.$$

2. $n \bmod 4 = 1$,

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{4} \right\rfloor + \frac{n-1}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{2n-2}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+3}{4} \right\rfloor + \frac{3n-3}{4} \right) \\ &= \lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}.$$

3. $n \bmod 4 = 2$,

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{n-2}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{2n}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{3n-2}{4} \right) \\ =&2 \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor \right) + \frac{3n}{2} - 1 = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{3n}{2} - 1. \end{aligned}$$

4. $n \bmod 4 = 3$,

$$\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{4} \right\rfloor + \frac{3n-1}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{2n-2}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+3}{4} \right\rfloor + \frac{n-3}{4} \right) = \lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}.$$

总结为表格, 就有

m	$n \mod m = 0$	$n \mod m = 1$	$n \mod m = 2$	$n \mod m = 3$
1	$\lfloor x \rfloor$			
2	$2\left(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor\right) + \frac{n}{2}$	$\lfloor x \rfloor + n - \frac{1}{2}$		
3	$3\lfloor \frac{x}{3} \rfloor + n$	$\lfloor x \rfloor + n - 1$	$\lfloor x \rfloor + n - 1$	
4	$4\left(\lfloor \frac{x}{4} \rfloor\right) + \frac{3n}{2}$	$\lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$	$\lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{1}{2}$	$\lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

观察到其通式类似于 $a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + bn + c$. 考虑一般的情形, 改写为

$$\left\lfloor \frac{x+kn}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x + kn \bmod m}{m} \right\rfloor + \underbrace{\frac{kn}{m} - \frac{kn \bmod m}{m}}_{\text{整数}}$$

就有

$$\begin{array}{ccc}
\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor & +\frac{0}{m} & -\frac{0 \text{ mod m}}{m} \\
+\left\lfloor \frac{x+n \bmod m}{m} \right\rfloor & +\frac{n}{m} & -\frac{n \bmod m}{m} \\
+\left\lfloor \frac{x+2n \bmod m}{m} \right\rfloor & +\frac{2n}{m} & -\frac{2n \bmod m}{m} \\
 & \vdots & \\
+\left\lfloor \frac{x+(m-1)n \bmod m}{m} \right\rfloor & +\frac{(m-1)n}{m} & -\frac{(m-1)n \bmod m}{m}
\end{array}$$

第二列就是 $\frac{1}{2}\left(0+\frac{(m-1)n}{m}\right)m = \frac{(m-1)n}{2}$. 对于第一列, 考察序列 $0 \bmod m, n \bmod m, \cdots, (m-1)n \bmod m$.

- 如 $m = 12, n = 5, \quad \{0,5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7\}$;
- $m = 12, n = 8, \quad \{0,8,4,0,8,4,0,8,4,0,8,4\}$.

实际上, 循环节 $= \gcd(m,n)$. 这样一来, 先提出循环节: 设 $d := \gcd(m,n)$.

$$\begin{aligned}
&d\left(\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\alpha+d}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x+m-d}{m} \right\rfloor\right). \\
=&d\left(\left\lfloor \frac{x/d}{m/d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x/d+1}{m/d} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x/d+m/d-1}{m/d} \right\rfloor\right. \\
=&d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor
\end{aligned}$$

对于第三列, 由于已经可以提出重复的组, 其就变成了

$$d\left(\frac{1}{2}\left(0+\frac{m-d}{m}\right)\cdot\frac{m}{d}\right) = \frac{m-d}{2}.$$

综上,

$$\sum_{0\le k<m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2}.$$

, 而且有其对称的形式

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le k<m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor &= d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2} \\
&= d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{d-m}{2} \\
&= d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2} \\
&= \sum_{0\le k<n} \left\lfloor \frac{mk+x}{n} \right\rfloor
\end{aligned}$$