Lecture Note: 补充数学内容

2024 年 11 月 10 日

在《高等数学》的学习过程中, 引进的最主要的概念之一便是极限. 例如, 在 $\mathbb{R}$ 中很多函数的重要性质是由极限刻画的. 我们首先回顾以往学习过的空间 (实数、二维实数空间) 中的一些例子.

例 1. 一维空间: 数列的极限. 如果对于 $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n \geq N$ 的时候, 有

$$|x_n - x| < \epsilon$$

则称数列 $x_n \to x(n \to \infty)$.

这就意味着当 n 充分大的时候, x_n 和 x 的距离 $d(x, x_n)$ 之间的距离可以任意小. 则称数列 $x_n \to x(n \to \infty)$.

二维空间: 点列的极限. 二维空间所不同的是度量两点接近程度的距离这一标准发生了变化.

点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$ 的定义是: 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$d(x_n, x) = \sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2} < \epsilon$$

就说 $x_n = (\xi_n, \eta_n) \to x = (\xi, \eta)(n \to \infty)$. 可见上述定义中除了距离的度量有所不同, 其余的内容都基本上如出一辙.

所谓空间, 就是某个集合加上一定的结构. 在本节以及后面的内容中, 除了一维空间、二维空间, 我们将研究更加一般的空间, 并且在这些空间上面定义一些映射.

要在一般的空间建立类似上例的极限的定义, 就必须引入“距离”的概念. 即在一个集合上面定义两点之间的距离 (结构). 这就是距离空间.

§1 距离空间

1.1. 距离空间的定义. 通常的距离大体有如下的 4 个特性:

1. 距离是非负的: $d(x, y) \geq 0$;
2. 距离是严格正的: $d(x, y) \iff x = y$;
3. 距离是对称的: $d(x, y) = d(y, x)$;
4. 距离满足三角不等式 (两边之和大于第三边): $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

不妨把具有这些性质的从平面上的点到实数的二元映射 $X \times X \to \mathbb{R}$ 定义为距离. 从具体的例子中抽象出问题的本质加以概括, 给出更加一般的定义, 使其可以运用到更广阔的范围, 是数学学习重要的方法.

定义 1. (距离空间的定义) 设 X 是一个集合, 对于 X 中任何的两点 x, y, 都有一个实数 $d(x, y)$ 与之对应. 且满足如下的四个条件:

1. $d(x, y) \geq 0$ (非负性);
2. $d(x, y) \iff x = y$ (严格正);
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性);
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (三角不等式).

则称 $d(x, y)$ 是 X 中的一个**距离**.

定义了距离 d 的集合就称为一个**距离空间**.

注.

1. 实际上可以用数学归纳法推广为 $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$.
2. 如果 (X, d) 是一个距离空间, 实际上有两边之差小于第三边. 即 $x, y, z \in X$, 有 $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(x, z)$.

例 2. 在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 可以定义

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}.$$

其中 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间. 这是因为距离空间的定义 (1)~(3) 显然成立; (4) 的证明需要用到Cauchy 不等式($\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{1/2} (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{1/2}$).

证明. 设 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\vec{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任意三点.

那么经过配凑有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - z_k)^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k + y_k - z_k)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} ((x_k - y_k) + (y_k - z_k))^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

对于一般的不等式 $(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2)^{1/2}$, 如果小于 $(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{1/2}$, 问题就解决了. 只需要把 $a_k := (x_k - y_k), b_k := (y_k - z_k)$ 即可. 下面考虑证明上述式子.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \\
&\le \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2\left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}\right)^2
\end{aligned}
$$

从而可知 $d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)$. □

注. 在同一个集合上面可以定义不同的距离, 从而得到不同的距离空间. 例如还可以定义

- $d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_i-y_i|$
- $d_\infty(x,y)=\max_{i=1}^{n}\{x_i-y_i\}$.

距离不一定只 $\mathbb{R}^n$ 上有定义. 实际上, 还可以在别的更加抽象的内容中定义.

例 3. 连续函数空间 $C[a,b]$: 考虑闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数, 定义

$$d(x,y):=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|.$$

其中, 关于 t 的函数 $x(t),y(t)$ 是 $[a,b]$ 上的两个任意的连续函数. 我们说 $C[a,b]$ 是一个距离空间.

证明. (1)~(3) 显然成立. 对于 (4) 而言, 设 $x(t),y(t),z(t)$ 是 $[a,b]$ 的任意 3 个连续函数. 我们要证明 $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$, 即证明

$$\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|\le \max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)|.$$

虽说可以抽象地写函数, 但是对于其性质, 还需要取一个具体的值才可继续计算. 这是因为由于绝对值的不等式, $\forall t\in[a,b]$, 有

$$
\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &\le |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)| \\
&\le \max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)| \\
&= d(x,z)+d(z,y).
\end{aligned}
$$

由于 t 是我们任意取的, 所以 (4) 成立. □

我们说 $[a,b]$ 上的全体连续函数**赋予上述距离**成为一个距离空间, 记为 $C[a,b]$. 还可以定义另一个距离

$$d(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t.$$

和上述情况类似, (在后面一节中) 也可以验证这是一个距离空间. 而且这是**由内积产生的距离**. 在后面会详细说明.

一个集合上面可以定义多个距离, 但是有的距离下空间完备; 有的距离下空间不完备. 实际上, 有了完备性, 极限运算才能很好地进行. 另外, 不同距离导出的收敛性不同, 这就需要我们仔细地选择距离.

1.2. 距离空间的收敛性. 在定义了距离之后, 就可以在距离空间里面引入极限的概念.

定义 2. 设 (X, d) 是一个距离空间, $\{x_n\} \subset X, x_0 \in X$, 当 $n \to \infty$ 的时候, $d(x_n, x_n) \to 0$. 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 或者 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0. 记作 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$; 或者 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

注. 实际上可以认为这是 $\epsilon - N$ 的变形:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{当} n \geq N \text{时}, \text{有} d(x_n, x_0) < \epsilon.$$

和数列的极限一样, 有如下的性质. 其证明和高等数学中的证明类似.

定理 1. *$\{x_n\}$ 在 X 中收敛, 则*
- *$\{x_n\}$ 的极限是唯一的;*
- *若 x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限, 那么它的任何子列也收敛到 x_0.*

距离函数 d 另一个好处是它是一个连续函数. 即

定理 2. *$d(x, y)$ 是关于 x, y 的二元连续函数. 即当 $x_n \to x, y_n \to y (n \to \infty)$ 的时候, $d(x_n, y_n) \to d(x, y)(n \to \infty)$.*

证明. 这是因为根据三角不等式, 有

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \\ d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \end{aligned}$$

同理, 另一个角度有

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \\ d(x, y) - d(x_n, y_n) &\leq d(x, x_n) + d(y, y_n) \end{aligned}$$

根据距离的对称性, $d(x, x_n) = d(x_n, x)$, 有

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0 (n \to \infty).$$

□

1.3. 完备的距离空间 *. 这一节主要介绍完备的距离空间的产生条件. 实际上, 我们大多数使用 (X, d) 都是完备的.

注意到, 在全体有理数组成的距离空间中, Cauchy 列不一定收敛; 而全体实数组成的距离空间中, Cauchy 列一定收敛. "Cauchy 列一定收敛" 这一事实, 反应了**实数空间的完备性** (没有坑洞).

或者说, 一个点列 $\{x_n\}$ 是否收敛, 除了和点列的自身的性质有关, 还和空间结构有很大的关系. 在高等数学中, 学习过在 $\mathbb{R}$ 中, 点列收敛的充要条件是这个点列是 Cauchy 列. 类似实数空间, 在距离空间中也引入 Cauchy 列, 完备性的概念.

定义 3. 设 (X, d) 是距离空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X, d)$. 若对于**任意的** $\epsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $m, n \geq N$ 时, 有

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

称 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列.

和学习实数相关的内容类似, 在距离空间中同样满足收敛的点列一定是 Cauchy 列.

定理 3. *收敛的点列一定是 Cauchy 列.*

证明. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 则对于 $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 的时候, 有 $d(x_n, x_0) < \epsilon/2; d(x_m, x_0) < \epsilon/2$. 根据距离的三角不等式:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \epsilon, (n, m > N).$$

因此 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列. □

具有 "所有 Cauchy 列都收敛" 这一性质的距离空间是十分重要的. 这就是完备空间.

例 4. 这个例子将展示 $\mathbb{Q}$ 在距离 $d(x, y) = |x - y|$ 的情况下是一个距离空间, 但是并不完备. 例如, 以 π 为前 n 位数字组成的序列 $\{3, 3.1, 3.14, 3.1415, ...\}$ 是一个 Cauchy 列, 但它并不会收敛到 $\mathbb{Q}$ 中的某个元素 (因为 π 不是有理数).

又如距离空间 $(\mathbb{R} \cap (0, 1], d)$ 中的序列 $\{1/n\}$, 它是 $(0, 1]$ 中的 Cauchy 列, 但是并不收敛, 因为 $0 \notin (0, 1]$.

后续计算方法中经常用到的空间, 比如 $C[a, b]$ 是完备的. 下面给出说明.

例 5. $C[a, b]$ 是完备的. 要说明这件事情应该从下面三个方面入手: 假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a, b]$ 的**任一** Cauchy 列:

- 找出 $x(t)$($\{x_n\}$ 的极限);
- 证明 $x(t) \in C[a, b]$;
- 证明 $x_n(t) \to x(t)(n \to \infty)$, 距离的定义按照 $C[a, b]$ 的来.

证明. (1) 由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a, b]$ 的**任一** Cauchy 列, 根据定义, $\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{s.t.} n, m \geq N$ 的时候, $d(x_n, x_m) < \epsilon$. 即

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x_m(t)|\le\epsilon.$$

所以 $\forall t\in[a,b],|x_n(t)-x_m(t)|\le\epsilon\ (n,m\ge N)$. 从而 $\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列. 由于 $\mathbb{R}$ 的完备性, 存在 $x(t)$, s.t.$x_n(t)\to x(t)(n\to\infty)$.

(2) 当 $n,m\ge N$ 的时候,

$$|x_n(t)-x_m(t)|\le\epsilon,\forall t\in[a,b]$$

对于给定的 t, 令 $m\to\infty$, 有

$$|x_n(t)-x(t)|\le\epsilon\ ,(n\ge N),\forall t\in[a,b],$$

表明 $x_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)\implies x(t)$ 连续, 所以 $x(t)\in C[a,b]$.

(3) 当 $n\ge N$ 的时候,

$$\begin{aligned}&|x_n(t)-x(t)|\le\epsilon,\forall t\in[a,b]\\ \implies&\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\le\epsilon\end{aligned}$$

即

$$d(x_n,x)\le\epsilon,(n\ge N)\implies\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

□

在以往的内容中学习了 Newton 迭代法以及压缩映射原理 (Banach 不动点原理). 今天将其语言用距离空间中的说法改写.

定理 4. *设 (X,d) 是完备的距离空间. $T:X\to X$. 如果对于任意的 $x,y\in X$, 不等式 $d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)$ 成立 (满足 $0<\theta<1$), 那么存在唯一的 $\bar{x}\in X$, 使得 $T\bar{x}=\bar{x}$.*

证明. (1) T 是连续的 (一致连续): $\forall\epsilon>0$, 取 $\delta=\epsilon>0$, 当 $d(x,y)<\delta$ 时, $d(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)<\theta\delta<\delta=\epsilon$.

(2) 用迭代法求 x. 任取 $x_0\in X$, 令 $x_1=Tx_0,x_2=Tx_1,...,x_{n+1}=Tx_n$. 试图估计误差, 我们发现

$$\begin{aligned}d(x_1,x_2)&=d(Tx_0,Tx_1)\le\theta d(x_0,x_1)=\theta d(x_0,Tx_0)\\ d(x_2,x_3)&=d(Tx_1,Tx_2)\le\theta d(x_1,x_2)=\theta^2 d(x_0,Tx_0)\\ &\cdots\\ d(x_n,x_{n+1})&=\theta^n d(x_0,Tx_0).\end{aligned}$$

从而对于任意的自然数 p,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\le \theta^n d(x_0, Tx_0) + \theta^{n+1} d(x_0, Tx_0) + \cdots + \theta^{n+p-1} d(x_0, Tx_0) \\ &\le \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0) \end{aligned}$$

由于 $0 < \theta < 1$, 所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 由于完备性, 所以存在 $\bar{x}$ 满足 $x_n \to \bar{x}, (n \to \infty)$. 又因为 T 连续, 才有 $\lim_{n\to\infty} Tx_n = T \lim_{n\to\infty} x_n = T\bar{x}$.

(3) 唯一性: 倘若有另一个 $\bar{y}$ 使得 $T\bar{y} = \bar{y}$, 那么 $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \le \theta d(\bar{x}, \bar{y})$. 根据 $0 < \theta < 1$, 这表明 $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. □

§2 赋范空间

被赋予 Euclid 距离的平面可以看做赋范空间的典型例子. 在线性代数的课程中了解到的平面结构分为三方面:

- 集合结构: 平面上的点集是有序的实数组. 即 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- 代数结构: 平面上定义了加法和数乘; 且这个空间对加法, 数乘封闭.
- 拓扑结构: 对于 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 定义了距离 $d(x, y) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{1/2}$. 并借此引进了 "接近", "极限", "开集" 的概念.

截止第一小节 (和高等数学的教程), 我们已经在集合上面赋予了距离, 定义了开集, 闭集, 给出了空间上的拓扑结构.

这一小节我们在线性空间上引进元素的长度.

回顾, 在 $\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^n$ 空间中, 向量具有长度 (模). 但是对于更加一般的空间, 应该如何定义其长度? 我们希望从 $\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^n$ 空间中向量构造出长度的基本性质, 抽象出 "范数" 的定义.

在 $\mathbb{R}^2$ 中, 点 (x_1,x_2) 的长度记为 $||x||$, 满足 $||x|| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. 即 $||x|| = d(x, 0)$. 进一步, 在 $\mathbb{R}^n$ 空间中, 对于 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以定义为 $||\mathbf{x}|| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

实际上, $\mathbb{R}^n$ 中点 $\mathbf{x}$ 到原点的距离 $d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ 通常称为向量的模, 或者叫元素的 "长度". 而且我们知道模和距离的关系是 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.

由此我们抽象出向量的模的基本应满足的基本性质.

对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 向量的模函数应该满足:

1. $||\mathbf{x}|| = d(\mathbf{x}, 0) \ge 0$;
2. $||\mathbf{x}|| = d(\mathbf{x}, 0) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| = d(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{0}) \le d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.
4. $||\alpha\mathbf{x}|| = d(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{0}) = |\alpha| d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = |\alpha| ||\mathbf{x}||$.

把上述的内容推广到一般的线性空间, 我们给出模 (范数) 的定义.

2.1. 基本定义. 极限.

定义 4. X 是数域 $\mathbb{K}$ 的线性空间, 函数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ 满足

1. $\forall \mathbf{x} \in X, ||\mathbf{x}|| \ge 0$(非负性)
2. $||\mathbf{x}|| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.(正定性)

3. $\forall \mathbf{x} \in X, \alpha \in \mathbb{K}, ||\alpha \mathbf{x}|| = |\alpha|||\mathbf{x}||$.(正齐次)
4. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, ||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.(三角不等式)

则称 $||\cdot||$ 是 X 上的一个范数. 定义了范数的线性空间称为赋范线性空间 (赋范空间); 记为 $(X, ||\cdot||)$ 或 X.

我们看到, 赋范空间只要定义了范数, 就可以自然地定义其距离: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$. 可以使用距离的基本定义验证之. 通常把 (X, d) 称为由范数诱导的距离空间. 赋范空间一定是距离空间. 之后如果没有特殊说明, 赋范空间的距离一般都是指由范数诱导的距离.

另外, 赋范空间一旦有了距离, 就可以定义开集、闭集、收敛以及完备性等概念.

定义 5. 设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 中的点列, $x \in X$. 如果 $||x_n - x|| \to 0 (n \to \infty)$, 则称 $\{x_n\}$ 按范数收敛到 x, 记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

有了距离和收敛性, 我们引进十分重要的概念: Banach 空间.

定义 6. 完备的赋范空间称为 Banach 空间.

这表明, Banach 空间具有完备距离空间的所有性质, 是非常好的一种空间.

2.2. 范数的连续性.

定理 5. *设 $(X, ||\cdot||)$ 是赋范空间, 则*
1. *对于任意 $x, y \in X$, 有 $|\ ||y|| - ||x||\ | \leq ||y - x||$.*
2. *范数 $||\cdot||$ 是连续函数, 即 $x_n \to x (n \to \infty) \implies ||x_n|| \to ||x|| (n \to \infty)$.*
3. *范数 $||\cdot||$ 对线性运算是连续的. 即*

$$x_n \to x, y_n \to y \implies x_n + y_n \to x + y, (n \to \infty)$$
$$\alpha_n \to \alpha, x_n \to x \implies \alpha_n x_n \to \alpha x, (n \to \infty).$$

证明. (1) 由三角不等式,

$$\begin{aligned} ||y|| &\leq ||y-x|| + ||x|| \\ &\leq ||y-x|| + ||x-y|| + ||y|| \\ &= ||y-x|| + ||y|| \end{aligned}$$

从而得证.

(2) 根据 (1), $|||x_n|| - ||x||| \leq ||x_n - x||$. 于是由于 $x_n \to x$, 可以推出 $||x_n|| \to ||x|| (n \to \infty)$. 从而范数是连续函数.

(3) 由于 $||x_n + y_n - x - y|| \leq ||x_n - x|| + ||y_n - y||$, 以及

$$\begin{aligned} ||\alpha_n x_n - \alpha x|| &\leq ||\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x|| \\ &\leq |\alpha_n|||x_n - x|| + |\alpha_n - \alpha|||x||. \end{aligned}$$

由于 $|\alpha_n|$ 有界, 于是 $||\cdot||$ 对于线性运算连续. □

实际上, 赋范空间一定是距离空间, 但是距离空间不一定是赋范空间.

2.3. 赋范空间的例子. 由于距离有完备化和不完备的, 而且可以不完备的距离空间可以变为完备的. 遵循这一做法, 赋范空间也可以被完备化.

a) L^p 空间 下面考虑在赋范函数空间 $L^p[a,b](1 < p < \infty)$.

定义 7. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上的可测函数. 若 $|f|^p$ 在 $[a,b]$ 上可积 $(1 \leq p < \infty)$, 称为 f 是 p 次幂可积的. 全体在 $[a,b]$ 上区间 p 次幂可积的函数, 记为 $L^p[a,b]$. 即

$$L^p[a,b] := \left\{ x(t) : \int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t, p < \infty \right\}.$$

可以在 $L^p[a,b]$ 中引入范数

$$||x|| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

这确实是一个范数. 对于 $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ 需要使用 Holder 不等式证明. 这里略.

b) l^p 空间

定义 8. $l^p (1 \leq p < \infty)$ 表示全体 p 次方可求和的数列, 即

$$l^p := \left\{ x = \{\xi_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}.$$

这时候可以引进范数

$$||x||_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}.$$

同样可以像 L^p 空间那样证明.

c) 有限维赋范空间 下面我们来考察有限维赋范空间. 我们主要考察的是他们是否等价: 即, 他们是不是可以同时收敛或者同时发散? 用数学的语言描述, 就是

定义 9. 设 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 是线性空间 X 上的两个不同范数, 如果存在 $a > 0, b > 0$, 使得

$$a||\cdot||_1 \leq ||\cdot||_2 \leq b||\cdot||_1$$

称范数 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 是等价的.

也就是在等价的范数产生的赋范空间中, 虽说同一个元素的范数不同, 但是在空间的收敛性是一样的.

实际上, 有限维空间中 $\mathbb{R}^n$ 上定义的所有范数都等价.

定理 6. $\mathbb{R}^n$ 上的所有范数都等价.

证明. 令 $||\cdot||$ 是任意的一种范数, 我们证明存在 $a, b > 0$, 满足, $a||v|| < \underbrace{||v||_2}_{2\text{范数}} < b||v||$. 首先在 $\mathbb{R}^n$ 中选取一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 将 v 在这组基底下分解为 $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$. 根据三角不等式,

$$||v|| \le \sum_j |x_j|||e_j||$$

使用 Cauchy 不等式, 有

$$\sum_j |x_j|||e_j|| \le \left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_j ||e_j||^2\right)^{1/2}$$

所以

$$\underbrace{\frac{1}{\left(\sum_j ||e_j||^2\right)^{1/2}}}_{a} ||v|| \le \left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2} = ||v||_2$$

所以只要取 a 如上述式子, 等式左边成立.

接下来在 $K = \{v : ||v||_2 = 1\}$ 的集合上考虑. 由于这个集合是有界闭集, 由于范数的连续性, 这就意味着如果 $||v_j||_2 \to 0$, 那么 $||v_j|| \to 0$. 这样, 选择 m 是 $||v||$ 在集合 K 上的最小值 (不为 0), 令 $v \ne 0$ 为任意向量, 令 $u = v/||v||_2 \in \mathbb{R}^n$, 那么 $||u||_2 = 1$, 所以 $||u|| \ge m$. 因此

$$||v|| \ge m||v||_2\text{或者}||v_2|| \le b||v||, b = 1/m.$$

所以任意范数都和二范数是等价的; 进而可以说明任意两个范数都是等价的 (传递性). □

§3 内积空间

在 $\mathbb{R}$ 中可以定义距离, 范数, 内积的概念. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中, 如果 $\mathbf{a} = (a_1, a_2); \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, 其内积可以定义为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$. 从而 $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||}, ||\mathbf{a}|| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{a_1^2 + b_2^2}, a \perp b \iff (a, b) = 0$. 实际上, 内积还满足一些性质, 我们把它抽象出来.

定义 10. 设 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 对于任意 $x, y \in H$, 有 $\mathbb{K}$ 中的一个数 (x, y) 与他们对应, 使得对于任意的 $x, y \in H, a \in \mathbb{K}$, 满足

1. $(x, x) \ge 0; (x, x) = 0 \iff x = 0$;
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3. $(ax, y) = a(x, y)$;
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个内积, 定义了内积的空间称为内积空间.

注. 实际上 (x, y) 是一个二元函数. 对于固定的 $y \in H$,(x, y) 是一个关于 H 中元素 x 的一个线性函数.

另外, $(x, ay) = \overline{(ay, x)} = \overline{a(y, x)} = \overline{a}(x, y)$.

例 6. 对于实向量 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n); \mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. 注意到这是一个内积. 这就可以导致一个范数 $||\mathbf{x}|| = (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$. 在复的向量空间中, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n); \mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ 中, 可以定义内积 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$. 这同样可以生成一个范数.

3.1. 由内积生成的范数. 像我们可以在 $\mathbb{R}^2$ 中定义范数 $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ 那样, 我们下面展示由内积定义的范数满足范数的四个条件. 在证明的过程中, 首要证明的等式是 Schwartz 不等式.

定理 7. *设 H 是内积空间, $\forall x, y \in H$, 有 $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$.*

证明. 任取 $\lambda \in \mathbb{C}, \forall x, y \in H$,

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y) \geq 0.$$

设 $y \neq 0$, 令 $\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$, 带入上述得到

$$\begin{aligned}
(x, x) - 2\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} &\geq 0 \\
(x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 &\geq 0 \\
(x, x)(y, y) &\geq |(x, y)|^2.
\end{aligned}$$

并且当 $y = 0$ 的时候, $(y, y) = 0$. 取得等号. □

注. 下面给出一些注记

1. 等号成立当且仅当 x, y 线性相关的时候.
2. 实际上 Cauchy 不等式是 Schwartz 不等式的特殊形式, 只要取内积为 $(x, y) = (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$.

定义 11. 在内积空间 H 上, 对于 $\forall x \in H$, 定义 $||x|| = \sqrt{(x, x)}$, 则 $|| \cdot ||$ 是 H 上的一个范数.

能成为范数, 主要验证三角不等式,

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in H, ||x + y||^2 = (x + y, x + y) &\leq ||x + y|| ||x|| + ||x + y|| ||y|| \\
&= (||x + y||) ||x|| \\
&\leq ||x|| + ||y||.
\end{aligned}$$

所以我们说

定理 8. *每个内积空间 H 按范数 $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ 成为一个线性赋范空间.*

这是因为内积空间中定义了范数, 由范数可以定义距离, 这就有了点列的收敛性等距离空间中具有的性质.

此外, 内积函数也是关于 (x, y) 的连续函数. 即 $x_n \to x, y_n \to y$ 的时候, $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

定理 9. *设 H 是内积空间, 则内积 (x,y) 是关于 x,y 的连续函数. 即 $x_n \to x, y_n \to y$的时候, $(x_n,y_n) \to (x,y), (n \to \infty)$.*

证明. 由于 Schwartz 不等式,

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x,y)| &\leq |(x_n,y_n)-(x_n,y)|+|(x_n,y)-(x,y)|\\ &= |(x_n,y_n-y)|+(x_n-x,y)|\\ &\leq ||x_n||||y_n-y||+||x_n-x||||y||.\end{aligned}$$

从而 $\{||x_n||\}$ 有界. 且 $x_n \to x, y_n \to y$ 的时候, $(x_n,y_n) \to (x,y), (n \to \infty)$. □

这也说明极限运算和内积可以交换顺序.

此外, 内积和相应范数有一定的关系. 这类似于中学的时候向量操作的一些性质.

定理 10. *设 H 是内积空间, 对于任意 $x,y \in H$, 有*

1. *平行四边形法则: $||x+y||^2+||x-y|^2 = 2(||x||^2+||y||^2)$.*
2. *极化恒等式: $(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2+i||x+iy||^2-i||x-iy||^2)$.*

证明. 只要操纵下列的四个式子:

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) && (a)\\ ||x-y||^2 &= (x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y) && (b)\\ ||x+iy||^2 &= (x,x)-i(x,y)+i(y,x)+(y,y) && (c)\\ ||x-iy||^2 &= (x,x)+i(x,y)-i(y,x)+(y,y) && (d)\end{aligned}$$

使用 $(a)+(b)$ 得到 1.; 使用 $(a)-(b)+i(c)-i(d)$ 得到 2.. □

平行四边形法则是内积空间的特征. 后续在引入正交性之后, 可以发现平行四边形法则就变成了勾股定理. 即如果 $x \perp y$, 那么 $||x||^2+||y|^2 = ||x+y||^2$.