

## 第二章 和式基础

具体数学阅读笔记

May 17, 2024

### §1 和式及其基本操作

要使得求和便于书写和分析, 我们最好 (跟随傅里叶) 引入如下的记号:  $\sum$ .

#### 1.1. 和式与求和记号.

**定义 1.1** (求和记号  $\sum$ ). 对于一个可数的集合  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 求和实际上是将这个集合的每一个元素在某一个函数  $f: S \rightarrow X$  作用之后, 把对应的值相加. 记作  $\sum_{i \in S} f(i)$ ; 表示  $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \dots + f(a_n) + \dots$ .

**例子 1.1.** 考虑

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n} a_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_n. \\ \sum_{\substack{1 \leq k \leq 100 \\ k \text{ odd}}} k^2 &= \sum_{0 \leq k \leq 49} (2k+1)^2. \end{aligned}$$

**a) 换元法** 如果将  $\sum_{i \in S} f(i)$  换为  $\sum_{k \in S} f(k)$ , 求和的表示内容将不变. 这是因为仅仅是“当前  $S$  中的代表”用来表示的字母不同, 从而肯定不会影响整个映射  $f$  所表达的意思.

**例子 1.2.** 考虑

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k \xrightarrow{k \text{ 代换为 } s+1} \sum_{1 \leq s+1 \leq n} a_{s+1} \xrightarrow{s \text{ 代换为 } k} \sum_{1 \leq k+1 \leq n} a_{k+1}$$

**注:** 有时候  $\sum_{a \leq i \leq b} f(i)$  也写作  $\sum_{i=a}^b f(i)$ . 但是看到这样一来, 变量代换之后就得到了

$$\sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow{k \text{ 代换为 } k+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

更易于出错.

此外, 我们用  $k := k+1$  来表示把  $k$  代换为  $k+1$ . 最后, 数列可以看做特殊的函数. 实际上书写  $a_k$  实际上就相当于  $f(k)$ .

**b) 求和的性质** 尽管我们可以对可数无限个元素进行求和操作, 但是, 那样的数列我们在高等数学的级数部分就已经学过了. 这里先讨论有限项求和的情形.

**定理 1.1.** 设  $K$  是某一有限个正整数的集合, 我们有如下的三条规则:

- 常数项进出求和记号:

$$\sum_{k \in K} cf(k) = c \sum_{k \in K} f(k);$$

- 求和记号的拆分:

$$\sum_{k \in K} f(k)g(k) = \sum_{k \in K} f(k) + \sum_{k \in K} g(k);$$

- 若  $p(k)$  应用于  $K$  中的每一个元素之后组成的集合依然是  $K$  的一个排列, 那么

$$\sum_{k \in K} f(k) = \sum_{p(k) \in K} f(p(k)).$$

上述定理的证明可以直接由定义得到.

**例子 1.3.** 如  $K = \{-1, 0, 1\}$ ,  $p(k) = -k$ , 由于  $p(-1) = 1, p(0) = 0, p(1) = -1$ ,  $p$  对  $k$  中每一个元素构成集合为  $\{-1, 0, 1\} = K$ .

**例子 1.4** (等差数列求和). 求

$$S = \sum_{0 \leq k \leq n} (a + bk)$$

的值.

考虑

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{0 \leq k \leq n} (a + bk) \\ &\stackrel{k:=n-k}{=} \sum_{0 \leq n-k \leq n} (a + b(n-k)) = \sum_{0 \leq k \leq n} (a + bn - bk) \end{aligned}$$

令  $S + S_2$  得

$$\begin{aligned} S + S_2 &= 2S = \sum_{0 \leq k \leq n} (a + bk) + \sum_{0 \leq k \leq n} (a + bn - bk) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} (2a + bn) = (2a + bn) \sum_{0 \leq k \leq n} 1 = (2a + bn)(n+1) \end{aligned}$$

那

$$S = \frac{(n+1)(2a + bn)}{2}.$$

## 1.2. Iverson 括号.

**定义 1.2** (Iverson 括号). 假设  $P$  是一个命题, 定义

$$[P] = \begin{cases} 1, & \text{命题 } P \text{ 为真} \\ 0, & \text{命题 } P \text{ 为假} \end{cases}$$

这样的记号便于优化很复杂的求和操作, 并且可以把求和符号的下标转换为命题之间的操作.

**例子 1.5.** 求和式  $\sum_{0 \leq k \leq n} k$  可被改为  $\sum_k k[0 \leq k \leq n]$ .

如果  $k$  未指定限定条件, 我们认为  $k \in \mathbb{Z}$ . 也就是说上述式子

$$\begin{aligned} \sum_k k[0 \leq k \leq n] &= \cdots + (-3 \cdot 0) + (-2 \cdot 0) + (-1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + \cdots + (n \cdot 1) \\ &= (0 \cdot 1) + (1 \cdot 1) + \cdots + (n \cdot 1) \end{aligned}$$

**例子 1.6.** 如果  $K$  与  $K'$  是两个整数集合, 那么  $\forall k$ ,

$$[k \in K] + [k \in K'] = [k \in (K \cap K')] + [k \in (K \cup K')]$$

由此可以导出对应的和式

$$\sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K'} a_k = \sum_{k \in K \cap K'} a_k + \sum_{k \in K \cup K'} a_k$$

这是一个很有用的命题. 下面我们会看到它的用途.

**命题 1.2.**  $[k \in K] + [k \in K'] = [k \in (K \cap K')] + [k \in (K \cup K')]$  对  $k, k'$  为可数集,  $\forall k$ .

### 1.3. 常见的求和方法.

**a) 成套方法** 这个方法类似于在解答微分方程的时候, 首先求解特解, 然后求解通解. 在这里我们不再赘述.

**b) 扰动法** 要计算  $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k$ , 可以有两种方法改写

**命题 1.3.** 扰动法是指

$$\begin{aligned} \boxed{S_n + a_{n+1}} &= \sum_{0 \leq k \leq n+1} a_k = a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n+1} a_k \\ &\stackrel{k:=k+1}{=} a_0 + \sum_{1 \leq k+1 \leq n+1} a_k \\ &= \boxed{a_0 + \sum_{0 \leq k \leq n} a_k} \end{aligned}$$

**例子 1.7.** 用上述的方法计算等比数列.  $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} ax^k$ .

$$\begin{aligned} S_n + ax^{n+1} &= ax^0 + \sum_{0 \leq k \leq n} ax^{k+1} \\ &= ax^0 + x \sum_{0 \leq k \leq n} ax^k \\ &= ax^0 + xS_n \end{aligned}$$

对于  $x \neq 1$ , 有

$$S_n = \sum_{k=1}^n ax^k = \frac{a - ax^{n+1}}{1 - x}$$

例子 1.8 (等差数列乘等比数列). 计算

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k \cdot 2^k.$$

按照上面的方法,

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)2^{n+1} &= 0 + \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)2^{k+1} \\ &= 0 + \sum_{0 \leq k \leq n} k \cdot 2^{k+1} + \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} \\ &= 2S_n + 2^{n+2} - 2 \end{aligned}$$

解出  $S_n$ , 就是

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

例子 1.9. 从上面的推导中, 我们知道  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ , 两边对  $x$  求导, 就有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kx^{k-1} &= \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

同样也可以得到上一式子的结果.

### c) 求和因子

例子 1.10. 由递推关系

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

倘若两端同时除以  $2^n$ , 就得到

$$\begin{aligned} T_0/2^0 &= 0 \\ T_n/2^n &= T_{n-1}/2^{n-1} + 1/2^n \end{aligned}$$

令  $S = T_n/2^n$ , 得  $\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = S_{n-1} + 2^{-n} \end{cases}$ , 即  $S_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k}$ , 为一等比数列.

对于更为一般的式子, 如  $a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$ , 可变为  $S_n = S_{n-1} + S_n c_n$  的形式.

1° 方法: 使两边同时乘以和因子  $S_n$ :

$$\underbrace{s_n a_n T_n}_{:=S_n} = \underbrace{S_n b_n T_{n-1}}_{\text{必须得是 } S_{n-1} = S_{n-1} a_{n-1} T_{n-1}} + S_n c_n$$

由此  $S_n = S_0 a_0 \cdot T_0 + \sum_{k=1}^n S_k c_k = S_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^n S_k c_k$ , 那么

$$T_n = \frac{1}{S_n a_n} \left( S_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^n S_k c_k \right)$$

2° 寻找  $S_n$  的方法: 由于上式要满足  $S_n b_n T_{n-1} = S_{n-1} a_{n-1} T_{n-1}$ , 代入展开, 有

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{s_{n-1} a_{n-1}}{b_n} \\ &= \frac{s_{n-2} a_{n-1} a_{n-2}}{b_n b_{n-1}} = \dots \\ &= \frac{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}{b_n b_{n-1} \dots b_2}. \end{aligned}$$

因此我们就这样找到了求和因子.

**例子 1.11.** 解由快速排序带来的递归式:

$$C_0 = 0$$

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n > 0.$$

将  $C_n$  两侧同乘以  $n$ , 得

$$nC_n = n^2 + n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad (n > 0).$$

令  $n := n - 1$ , 有

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 2 \sum_{k=0}^{n-2} C_k.$$

上面两式相减, 有  $nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}$ , 即

$$C_0 = 0$$

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n.$$

将上述  $a_n = n, b_n = n+1, c_n = 2n$ , 得  $s = \frac{(n-1) \dots 1}{(n+1) \dots 3} = \frac{2}{n(n+1)}$ .  
得

$$C_n = 2(n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 2(n+1)H_{n+1}.$$

## §2 多重和式

### 2.1. 引例与启发性讨论. 考虑

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j, k \leq 3} a_j b_k &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 \\ &\quad + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 \\ &\quad + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

其中  $j, k$  是两个指标.

如果  $P(j, k)$  是关于  $j, k$  的性质, 那么  $\sum_{P(j, k)} a_{j, k} = \sum a_{j, k} [P(j, k)]$ , 有时候也写作  $\sum_j (\sum_k a_{j, k} [P(j, k)])$ , 可以简写做作  $\sum_j \sum_k a_{j, k} [P(j, k)]$ .

**命题 2.1.** 如果  $k$  的表示不依赖于  $j$  的话, 那么

$$\sum_j \sum_k a_{j, k} [P(j, k)] = \sum_k \sum_j a_{j, k} [P(j, k)]$$

**例子 2.1.** 上述的考量最简单的情形如下:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq 2} \sum_{1 \leq k \leq 2} a_{j, k} &= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2} \\ &= a_{2,1} + a_{2,1} + a_{1,2} + a_{2,2} = \sum_{1 \leq k \leq 2} \sum_{1 \leq j \leq 2} a_{j, k}. \end{aligned}$$

**命题 2.2** (一般分配率). 对于任意的整数集合  $J, K$  有

$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_j b_k = \left( \sum_{j \in J} a_j \right) \left( \sum_{k \in K} b_k \right).$$

**注:** 这里  $J$  和  $K$  集合要不依赖对方就能确定. 例如,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^m f(i, j)$$

就无法使用这个方式.

*Proof.* 我们可以考虑

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{j \in J} a_j \right) \left( \sum_{k \in K} b_k \right) &= \sum_j a_j [j \in J] \sum_{k \in K} b_k [k \in K] \\
 &= \sum_j a_j [j \in J] \left( \sum_k b_k [k \in k] \right) \\
 &\stackrel{j \text{ 与 } k \text{ 独立}}{=} \sum_j \sum_k a_j b_k [j \in J] [k \in K] \\
 &= \sum_j \sum_k a_j b_k [j \in J, k \in K].
 \end{aligned}$$

□

例子 2.2. 例如,

$$\sum_{1 \leq j, k \leq 3} a_j b_k = \left( \sum_{j=1}^3 a_j \right) \left( \sum_{k=1}^3 b_k \right)$$

请再次注意这里的  $k$  的取值构成何种集合与  $j$  无关. 与这个例子相对,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^m f(i, j)$  就不适用这个规则. 因为  $i \leq j \leq m$  表示什么集合与  $i$  的值有关.

下面我们来看相互依赖的集合的情形.

**命题 2.3.** 对于依赖于  $j$  取值的集合  $K(j), j \in J$ , 可以按照如下的方式进行交换求和记号,

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k \in K'} \sum_{j \in J'(k)} a_{j,k}$$

满足  $[j \in J][k \in K(j)] = [k \in K'][j \in J'(k)]$ .

**注:** 可以把这个与交换二重积分次序相联系起来. 例如对于区域  $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$  的区域积分, 可以写作

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy \quad (\text{从下向上}) \\
 &= \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx. \quad (\text{从左向右})
 \end{aligned}$$

命题中表述的事实是保证每个元素都计算了且仅仅被计算了一次.

**推论 2.4.** 类似上面举例的二重积分更换  $x, y$ , 有

$$\begin{aligned}
 [1 \leq j \leq n][1 \leq k \leq n] &= [1 \leq j \leq k \leq n] \\
 &= [1 \leq k \leq n][1 \leq j \leq k]
 \end{aligned}$$

例子 2.3. 根据上述推论,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n a_{j,k} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_{j,k}.$$

例子 2.4. 给出矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n a_1 & & & a_n a_n \end{bmatrix}$$

求

$$S_{\setminus |} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k$$

由于该矩阵是对称的, 即  $a_i a_j = a_j a_i$ ,  $S_{\setminus |} \approx \frac{1}{2} S_{\square}$ , 那么

$$S_{\setminus |} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_k a_j \xrightarrow{\text{对换 } j, k} \sum_{l \leq k \leq j \leq n} a_j a_k = S_{\setminus |}$$

根据  $[k \in k'] + [k \in k] = [k \in (k \cap k')] + [k \in (k \cup K')]$ , 就有

$$[1 \leq j \leq k \leq n] + [1 \leq k \leq j \leq n] = [1 \leq j, k \leq n] + [1 \leq j = k \leq n].$$

所以

$$\begin{aligned} 2S_{\setminus |} &= S_{\setminus |} + S_{\setminus |} = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_j a_k + \sum_{1 \leq j = k \leq n} a_j a_k \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \end{aligned}$$

那么

$$S_{\setminus |} = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \right).$$

例子 2.5. 求解

$$S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j) (b_k - b_j).$$

注意到  $i, j$  的对称性, 将  $i, j$  对换得:

$$S = \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_j - a_k) (b_j - b_k) = \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k - a_j) (b_k - b_j)$$

由于

$$[1 \leq j < k \leq n] + [1 \leq k < j \leq n] = [1 \leq j, k \leq n] - [1 \leq j = k \leq n]$$



因此

$$\begin{aligned}
 2S &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) - \sum_{1 \leq j=k \leq n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) \\
 &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) - 0 \\
 &= \boxed{\sum_{1 \leq j, k \leq n} a_j b_j} - \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_j b_k - \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_k b_j + \boxed{\sum_{1 \leq j, k \leq n} a_k b_k} \\
 &= \boxed{2n \sum_{1 \leq k \leq n} a_k b_k} - 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right).
 \end{aligned}$$

那么

$$S = n \sum_{1 \leq k \leq n} a_k b_k - \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right).$$

我们便得到

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) = n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

这是 Chebyshev 单调不等式的特例.

Chebyshev 单调不等式是说, 如果  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ , 那么

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

反之亦然.

**2.2. 与一重求和中第三条的联系.** 回顾定理 1.1 中的第三条 ( $\sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)}$ ,  $p(k)$  是一个原集合的排列). 如果现在将  $k$  换做  $f(j)$ , 其中  $f$  是一个  $J \rightarrow K$  的映射, 那么

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{k \in K} a_k \# f^{-}(k).$$

其中  $f^{-}(k) = \{j \mid f(j) = k\}$ ,  $\#S$  是集合  $S$  的元素个数. 通俗地说, 就是对  $j \in J$ ,  $f(j) = k$  的数量.

*Proof.* 直接展开:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in J} a_{f(j)} &= \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_k [f(j) = k] = \sum_{k \in K} a_k \sum_{j \in J} [f(j) = k] \\
 &= \sum_{k \in K} a_k \# f^{-}(k).
 \end{aligned}$$

□

例子 2.6. 若  $f$  是一个一对一的函数, 那么  $\#f^{-}(k) = 1$ , 也就是

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{f(j) \in k} a_{f(j)} \cdot 1 = \sum_{k \in k} a_k.$$

例子 2.7. 求算

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j} \\ S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{1}{k-j} \\ &\stackrel{j:=k-j}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq k-j < k} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{0 < j \leq k-1} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} H_{k-1} \\ &\stackrel{k:=k+1}{=} \sum_{0 \leq k < n} H_k \end{aligned}$$

如果在换元之前进行代换, 就有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j} \stackrel{k:=k+j}{=} \sum_{1 \leq j \leq k+j \leq n} \frac{1}{k} = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n-k} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n-k}{k} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n}{k} - \sum_{1 \leq k \leq n} 1 \\ &= n \left( \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \right) - n = nH_n - n. \end{aligned}$$

### §3 差分与微分、求和与积分

本节的目标是, 是不是有这样的一种记号, 使得我们可以使用类似于积分的方式记录求和? 是否能够像不定积分那样引申出“不定求和”?

**3.1. 回忆: 微分与差分.** 数学分析中我们定义过微分算子

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

同样的可以定义差分算子.

**定义 3.1** (差分). 对于一个数列, 定义其差分算子  $\Delta f(x)$  为

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x).$$

注:

1. 实际上这是极限定义中,  $h = 1$  的特例.
2. 算子作用在函数上, 给出新的函数. 其本质就是从函数到函数的映射. 例如在多项式上面求导算子给出的实际上是映射

$$\mathbb{P}[x]_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{P}[x]_{n-1}.$$

**例子 3.1.** 回忆  $\mathcal{D}x^m = mx^{m-1}$ , 其中  $m$  是给定的数,  $x$  是变元.

如果对它施以差分算子, 得到  $\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ . 这表明求导算子和差分算子他们之间的性质有所不同. 接下来考察特殊的多项式, 使得差分算子得到类似的结构.

**例子 3.2** (下降幂). 如果我们求

$$\Delta \underbrace{x(x-1) \cdots (x-m+1)}_{m \text{ 项}}$$

就会得到

$$\begin{aligned} & \Delta \left( \underbrace{x(x-1) \cdots (x-m+1)}_{m \text{ 项}} \right) \\ &= (x+1)x \cdots (x-m+2) - x(x-1) \cdots (x-m+1) \\ &= \underbrace{m(x-1) \cdots (x-m+2)}_{m-1 \text{ 项}} \end{aligned}$$

说明  $\Delta$  算子在上述的多项式上面作用有与求导算子在  $x^m$  次多项式有类似的效果.

我们先定义

$$\underbrace{x(x-1) \cdots (x-m+1)}_{m \text{ 项}}$$

为  $x$  的  $m$  次下降幂. 记作  $x^{\underline{m}}$

**命题 3.1.** 由于上面的性质, 注意到

$$\Delta x^m = mx^{m-1}.$$

我们发现,  $\mathcal{D}$  有逆运算  $\int$ , 意味着  $\int \cdot \mathcal{D} = \text{id}$ . 并且微积分基本定理告诉我们:

$$g(x) = \mathcal{D}f(x) \Leftrightarrow \int g(x)dx = f(x) + C.$$

**定理 3.2** (差分基本定理). 对于差分而言,

$$g(x) = \Delta f(x) \Leftrightarrow \sum g(x)\delta x = f(x) + C.$$

这里  $\sum g(x)\delta x$  是  $g(x)$  的不定和式, 是差分等于  $f(x)$  的函数类. 其中  $C$  是满足  $p(x+1) = p(x)$  的任意一个函数  $p(x)$ .

正如微积分中有定积分这件事情, 有限和式也可以仿照写作“定和式”. 仿照  $\int_a^b g(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$ . 我们给出下面的定义.

**定义 3.2** (定和式). 定义

$$\sum_a^b g(x)\delta x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

如果  $g(x) = \Delta f(x)$ .

**命题 3.3.** 对于这样的一个和式, 有

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leq k < b} g(k).$$

*Proof.* 若  $b = a$ ,  $\sum_a^a g(x)\delta x = f(a) - f(a) = 0$ ; 若  $b := a + 1$ ,  $\sum_a^b g(x)\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a)$ . 若  $b := b + 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_a^{b+1} g(x)\delta x - \sum_a^b g(x)\delta x &= (f(b+1) - f(a)) - (f(b) - f(a)) \\ &= f(b+1) - f(b) = g(b). \end{aligned}$$

根据数学归纳法可以证明. □

*Proof.* 另外的证明: 考虑裂项 (伸缩法, telescoping)

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq k < b} f(k+1) - f(k) &= (f(a+1) - f(a)) + (f(a+2) - f(a+1)) + \cdots \\ &\quad + (f(b) - f(b-1)) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

□

**命题 3.4.** 像定积分那样, 不定求和有

$$\sum_a^b g(x)\delta x = -\sum_b^a g(x)\delta x.$$

*Proof.* 实际上

$$f(b) - f(a) = -(f(a) - f(b)) = -\sum_b^a g(x)\delta x.$$

□

**命题 3.5.** 像定积分那样, 不定求和有

$$\sum_a^b g(x)\delta x + \sum_b^c g(x)\delta x = \sum_a^c g(x)\delta x.$$

**3.2. 带来的好处: 有限微积分.**

**a) 下降幂** 下面给  $m < 0$  的时候下降幂给出定义. 观察

$$\begin{aligned} x^3 &= x(x-1)(x-2) && \text{除以 } x-2 \\ x^2 &= x(x-1) && \text{除以 } x-1 \\ x^1 &= x && \text{除以 } x \\ x^0 &= 1 && \text{除以 } x+1 \\ x^{-1} &= \frac{1}{x+1} && \text{除以 } x+2 \\ x^{-2} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

**定义 3.3** (下降幂). 我们定义

$$\underbrace{x(x-1)\cdots(x-m+1)}_{m \text{ 项}}$$

为  $x$  的  $m$  次下降幂. 记作  $x^{\underline{m}}$ .

如果  $m > 0$ ,

$$m > 0, x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)}$$

像这样的扩展定义仍然保留了对应的性质.

**命题 3.6** (下降幂的性质).

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad x^{m+n} = x^m x^n.$$

**命题 3.7** (下降幂的满足差分的性质). 若  $m > 0$ ,  $\Delta x^{\underline{-m}} = -mx^{\underline{-m-1}}$ .

因此可得, 对于下降幂, 有

$$\sum_a^b x^m \delta x = \left[ \frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_a^b \quad m \neq -1.$$

**b) 调和级数** 根据上述的描述, 如果  $m = -1$ ,  $x^{-1} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ . 若  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x} = H_n$ . 所以

**命题 3.8.** 类似与积分的情形,

$$\sum_a^b x^m \delta x = \begin{cases} \left[ \frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_a^b, & m \neq -1 \\ [H_x]_a^b, & m = 1 \end{cases}$$

**c) 指数函数的类似物** 由于  $\mathcal{D}e^x = e^x$ , 希望找一个  $\Delta f(x) = f(x)$ . 实际上,

$$f(x+1) - f(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x+1) = 2f(x), \text{ 即} \\ f(x) = 2^x.$$

对于  $\Delta c^x = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x$ . 若  $c \neq 1$ , 那

**命题 3.9.** 等比数列的求和

$$\sum_{a \leq k < b} = \sum_a^b c^x \delta x = \left[ \frac{c^x}{c-1} \right]_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1}.$$

**d) 差分表和加法, 乘法的差分** 我们希望得到如下的差分表:

$f = \sum g$	$\Delta f = g.$
$x^{\frac{m}{m}}$	$mx^{\frac{m-1}{m-1}}$
$2^x$	$2^x$
$c^x$	$(c-1)c^x$
$c \cdot u$	$c \cdot \Delta u$
$u + v$	$\Delta u + \Delta v$
$uv$	$u\Delta v + Ev\Delta u$ (见下文)

具体地, 我们需要看加法, 乘法的情形下, 差分的变化. 注意, 复合函数差分在离散的情形没有很好的对应物.

**3.3. 分部求和法.** 注意到

$$\begin{aligned} \Delta(u(x)v(x)) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) \\ &\quad + u(x)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= u(x)\Delta v(x) + v(x+1)\Delta u(x) \end{aligned}$$

若定义  $Ef(x) := f(x+1)$ , 那么

$$\Delta(uv) = u\Delta v + (Ev)\Delta u.$$

此时, 对两边同时取  $\sum$ , 有

$$\sum u \Delta v = uv - \sum (E\eta) \Delta u.$$

注: 实际上, 这个还有另一种选择方式, 如

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= u\Delta v + Ev\Delta u \\ &= Eu\Delta v + v\Delta u\end{aligned}$$

两种形式都是正确的, 因此左右是对称的.

**例子 3.3.** 仿照  $\int x e^x dx$ , 求  $\sum x 2^x \delta x$

$$\begin{aligned}\sum x \boxed{2^x} \delta x &= \sum x \delta(2^x) = x 2^x - \sum 2^{\boxed{x+1}} \delta x \\ &= x 2^x - 2^{x+1} + c.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k 2^k &= \sum_0^{n+1} x 2^x \delta x = [x 2^x - 2^{x+1}]_0^{n+1} \\ &= (n-1) 2^{n+1} + 2.\end{aligned}$$

**例子 3.4.** 仿照  $\int x \ln x dx$ , 求  $\sum k H_k \delta k$ ,

$$\begin{aligned}\sum \boxed{x} H_x \delta x &= \sum H_x \delta \left( \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} H_x - \sum \frac{(x+1)^2}{2} x^{-1} \delta x \\ &= \frac{x^2}{2} H_x - \frac{1}{2} \sum x^1 \delta x \\ &= \frac{x^2}{2} H_x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

那么

$$\sum_{0 \leq k < n} k H_k = \left[ \frac{x^2}{2} H_x - \frac{x^2}{4} + C \right]_0^n = \frac{n^2}{2} \left( H_n - \frac{1}{2} \right).$$