

§1 线性变换的运算

设 V 是 P 上的线性空间, $\text{End } V$ 是 V 中所有线性变换的集合. 那么, 有

1. 加法 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End } V$, 定义 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的和为

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\alpha := \mathcal{A}\alpha + \mathcal{B}\alpha$$

可以证明 $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \text{End } V$.

Proof. 实际上, 对于加法

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\alpha + \beta) &\stackrel{\text{使用定义}}{=} \mathcal{A}(\alpha + \beta) + \mathcal{B}(\alpha + \beta) \\ &= \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta + \mathcal{B}\alpha + \mathcal{B}\beta \\ &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})\alpha + (\mathcal{A} + \mathcal{B})\beta \end{aligned}$$

对于数乘

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B})(k\alpha) &= \mathcal{A}(k\alpha) + \mathcal{B}(k\alpha) \\ &= k\mathcal{A}\alpha + k\mathcal{B}\alpha \\ &= k(\mathcal{A} + \mathcal{B})\alpha \end{aligned}$$

这就证明了定理. □

2. 数乘

§2 不变子空间

2.1. 基本的定义.

定义 2.1 (不变子空间). 设 V 是 P 上的线性空间, 且 $\mathcal{A} \in \text{End } V$, W 是 V 的子空间. 如果任意 $\alpha \in W$, 都有 $\mathcal{A}\alpha \in W$, 则称 W 是 \mathcal{A} 的不变子空间. 简称 \mathcal{A} -子空间.

此时 \mathcal{A} 可以看做 W 的线性变换, 因为不会跑到 W 外面去. 把它称作 \mathcal{A} 在 W 上的限制. 记作 $\mathcal{A}|_W$. 并且 $\mathcal{A}|_W = \mathcal{A}(\alpha) \in \text{End } W$

2.2. 不变子空间的性质.

1. 对交与和的封闭性 \mathcal{A} -子空间的交与和仍然是 \mathcal{A} -子空间.

2. 和基底 设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 则 W 是 \mathcal{A} -子空间 $\iff \mathcal{A}\alpha_i \in W, 1 \leq i \leq s$.

3. 维数定理 若 $\dim V < \infty$, $\mathcal{A} \in \text{End } V$, 则

$$\dim V = \dim \ker \mathcal{A} + R(\mathcal{A}).$$

Proof. 在 $\ker \mathcal{A}$ 中取基底 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 然后扩充为 V 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. 于是, 任意一个 $\alpha \in V$ 都有唯一的分解, 记作

$$\alpha = \sum_{i=1}^r x_i \alpha_i + \sum_{j=1}^s y_j \beta_j$$

对左右两边同时施以线性变换 \mathcal{A} , 就得到 $\mathcal{A}\alpha = 0 + \sum_{j=1}^s y_j \mathcal{A}\beta_j$. 因而 $\mathcal{A}(V) = L(\mathcal{A}\beta_1, \mathcal{A}\beta_2, \dots, \mathcal{A}\beta_s)$.

接下来考虑两个空间的交. 如果 $\sum_{j=1}^s k_j \mathcal{A}\beta_j = 0$, 那么一定有 $\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^s k_j \beta_j\right) = 0$. 故

$$\sum_{j=1}^s k_j \beta_j \in \ker \mathcal{A} \cup L(\beta_1, \dots, \beta_n) = \{0\}.$$

□