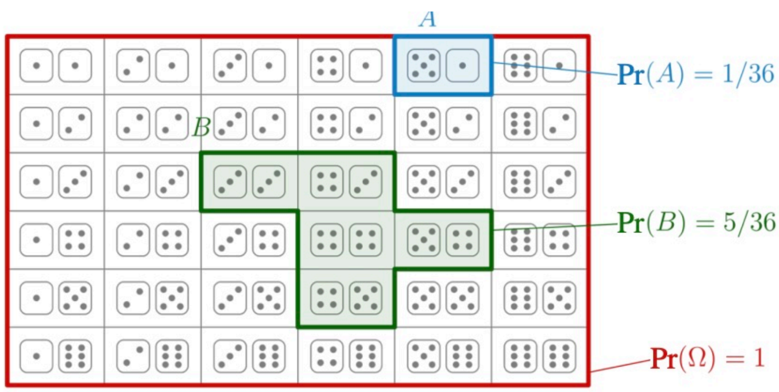
§1 概率空间

1.1. 定义的由来. 随机试验是概率论的基本概念, 试验的结果虽说事先不能准确地预言, 但具有如下三个特性:

1. 可以在相同的条件下重复进行;
2. 每次试验的结果不止一个, 但预先知道试验的所有可能的结果;
3. 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

这就使得我们把一次试验中所有可能出现的结果 (possible outcomes)的集合放在一起考虑. 构成**样本空间 (sample space)**, 一般用 Ω 表示. 对于样本空间的每一个元素 $\omega \in \Omega$, 称为**样本 (sample)**(或**基本事件 (elementary event)**). 下文所讨论的**事件 (event)** 一般认为是 Ω 的一个子集.

例子 1.1. 下图展示了投掷两枚筛子的所有可能结果. 如果我们认为事件 $A :=$ 第一枚是 6, 第二枚是 1, 可以看到这是样本空间的一个子集. 事件 B 和 C 表示什么? 我们为什么会认为 "一小格" 代表的概率是 1/36?



实际上, 我们不假思索地认为一小格就是 1/36, 是因为我们认为这 36 种情况是等可能发生的. 因此将某一个小格子 (事件)映射成了一个实数. 假设这些小格子不是等可能出现的, 我们当然可以把这些小格子映成互不相同的实数. 但是这样的映射 $p : \Omega \to [0, 1]$ 要满足:

- $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. 我们希望所有的事件发生的概率加起来等于 1.

有了这样对基本元素的映射, 我们就可以定义一个事件 $A \subseteq \Omega$ 的概率, 定义作 $\Pr(A) := \sum_{\omega\in A} p(\omega)$, 称为**事件的概率 (Probability of event)**. 这也引出下一个问题: 到底什么样的集合我们才可以把它称为事件构成的集合?

对于一个有限 (或者可数) 的样本空间 Ω 而言, 我们可以写出样本空间上所有可能的事件: 2^Ω. 但是, 这个要求能不能放松些? 通过我们以前的知识, 我们发现:

- $\emptyset$ 和 Ω 一定要在事件的集合里面. 它们是基础.
- 如果 A 在事件的集合中, 其补集 A^c 也要在. 不然我们就没有办法很方便地对一个事件取反.
- 如果有可数多个集合 $A_1, A_2, \ldots$ 在事件集合里面, 那么 $\bigcup_i A_i$ 和 $\bigcap_i A_i$ 也要在事件的集合里面. 这是为了我们方便地做并集和交集运算.

可以看到, 我们这里定义这样的规则, 完全是基于我们希望我们定义出来的这操作在集合的交、并、补下面对事件集合封闭. 也就是事件集合中拿出任意可数多个元素进

行集合的运算, 得到的结果一定还在这定义的事件集合里面. 这样我们定义的概率映射 p 才有意义.

于是经过上述探讨, 得到下面的概率空间的定义:

定义 1.1. 设 Ω 是一个样本空间 (或任意一个集合), $\mathcal{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族. 如果满足:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$ ，则 $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$;

则称 $\mathcal{F}$ 为 σ **代数 (σ-algebra)**. $(\Omega, \mathcal{F})$ 称为**可测空间 (measurable space)**, $\mathcal{F}$ 中的元素称为**事件 (events)**.

这里没有定义交集的原因是，交集可以通过并集取反得到. 这定义是一个最精简的版本.

例子 1.2. 如果研究掷一次硬币的结果, 可用如下 Ω 表示样本空间:

$$\Omega = \{H, T\}$$

如果研究掷两次次硬币的结果，可用如下 Ω 表示样本空间:

$$\Omega = \{\{H, H\}, \{H, T\}, \{T, H\}, \{T, T\}\}$$

如果研究掷一次六面骰子出现 2 或 3 的概率, 可用如下可测空间严格描述:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, F = \{\emptyset, \Omega, \{2, 3\}, \{1, 4, 5, 6\}\}$$

如果研究掷一次六面骰子出现 2 和 3 的概率, 可用如下可测空间严格描述

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$F = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}\}$$

定义 1.2. 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间, Pr 是一个从事件 Σ 的集合到实数集合的映射 ($\mathrm{Pr} : \Sigma \to [0, 1]$), 满足

(1) (归一化) $\mathrm{Pr}(\Omega) = 1$;

(2) (σ-可加性) 对两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots$, (即当 $i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \emptyset$) 有

$$\mathrm{Pr}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Pr}\left(A_i\right)$$

则称 Pr 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的**概率测度 (probability measure)**, 三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间, $\mathcal{F}$ 中的元素称为事件, $P(A)$ 称为事件 A 的概率.