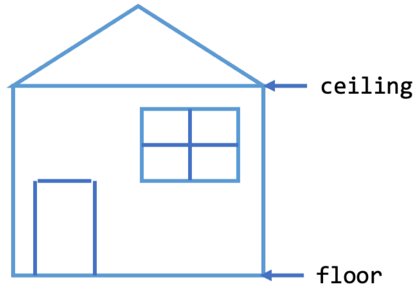
§1 上取整和下取整

实际上, 上取整和下取整实际上英语是对应着房子的 “天花板” 和 “地板”.



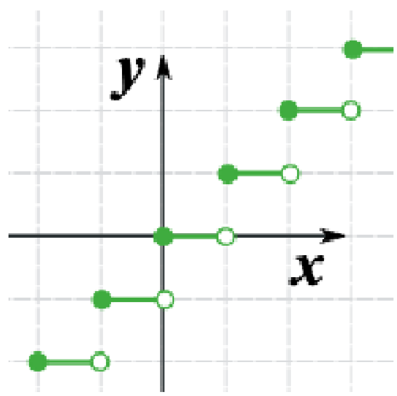
1.1. 基本定义.

定义 1.1 (上取整和下取整)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义下取整函数和上取整函数

$$\lfloor x \rfloor := \text{最大的} \leqslant x\text{的整数}$$
$$\lceil x \rceil := \text{最小的} \geqslant x \text{ 的整数}$$

分别称他们为 “上取整函数” 和 “下取整函数”.

例子 1.1. 绘制出下取整函数的图像



上取整函数的图像也是同理.

性质 1.1. 取整函数有如下的三个性质:

1. $\lfloor x \rfloor = x \iff x$ 是正数 $\iff \lceil x \rceil = x$.
2. (放缩) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$.
3. (对称)$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil, \quad Fx\rceil = -\lfloor x \rfloor$.

性质 1.2. 实际上, 上下取整函数是对一类不等式的缩写

$$\lfloor x \rfloor = n \begin{cases} \iff & x - n \leqslant x \qquad \text{(固定}x\text{, 考察}n\text{ 的范围)} \\ \iff & n \leqslant x \leqslant n + 1 \quad \text{(固定}n\text{, 考察}x\text{ 的范围)} \end{cases}$$

$$\lceil x \rceil = n \begin{cases} \iff & x \leqslant n \leqslant x+1 \\ \iff & n-1 < x \leqslant n. \end{cases}$$

推论 1.3. 若 $n \in \mathbb{Z}, \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

注: 实际上, 这一个性质经常用于将整数 (也许是配凑出来的) 移入或者移出取整记号中.

为了更加彰显不等式的地位, 特别有下面的一个不等式.

性质 1.4 (上下取整的不等式)**.**

$$x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n; \quad n < x \Leftrightarrow n < \lceil x \rceil.$$
$$x \leqslant n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant n; \quad n \leqslant x \Leftrightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor.$$

这是一个重要的式子. 可以通过分类讨论的方法证明之.

定义 1.2 (分数部分)**.** 定义一个数的分数部分为 $x - \lfloor x \rfloor$. 如果与集合的记号不相冲突的话, 可以记作 $\{x\}$.

例子 1.2. $\lfloor x+y \rfloor$ 是否永远等于 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? 实际上不是这样的. 将 x, y 写作 $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \quad y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, 那么

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$$

我们发现当且仅当 $\{x\}+\{y\} < 1$ 时, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. 否则由于 $0 \leqslant \{x\}+\{y\} < 2$, 其为 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

1.2. 上取整, 下取整的复合. 我们首先考察一些基本例子得到的结果.

例子 1.3. $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor; \lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil x \rceil$. 直接将两者复合得到的结果是平凡的.

例子 1.4. 证明或推翻: $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

首先尝试举反例, 但是 $\pi, e, \phi, 1, 2 \cdots$ 都是正确的, 于是考虑证明.

我们的目标为想办法除去 $\sqrt{\ }$ 下的 $\lfloor \rfloor$. 假设 $m := \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$, 解掉最外层的底可以得到

$$m \leqslant \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m^2 \leqslant \lfloor x \rfloor < (m+1)^2 \\ &\Rightarrow m^2 \leqslant x < (m+1)^2. \Longrightarrow m \leqslant \sqrt{x} < (m+1)^2 \\ &\Rightarrow m \leqslant \lfloor \sqrt{x} \rfloor < (m+1)^2. \end{aligned}$$

考虑泛化上述的例子.

定理 1.5. 令 $f(x)$ 为一个连续, 单调递增的函数, 满足

$$f(x)\text{是整数} \implies x\text{是整数}.$$

那么有

$$\lfloor f(x)\rfloor = \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor, \lceil f(x)\rceil = \lceil f(\lceil x\rceil)\rceil.$$

只要 $f(x), f(\lfloor x\rfloor), f(\lceil x\rceil)$ 有定义.

Proof. 1° 如果 x 是整数, 那么显然成立.

2° 若 $x > \lfloor x\rfloor$, 由于 f 单调递增, 那么 $f(x) > f(\lfloor x\rfloor)$. 然后两端同时取下取整符号, 由于下取整记号不减, 那么 $\lfloor f(x)\rfloor \geqslant \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor$. 我们接下来分类讨论, 以确定大于号的情形不成立.

- 如果 $\lfloor f(x)\rfloor = \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor$, 那么这就是我们想要的.
- 如果 $\lfloor f(x)\rfloor > \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor$, 那么由于 f 是一个连续的函数, 一定存在 y, 使得 $\lfloor x\rfloor \leqslant y < x$, 并且 $f(y) = \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor$. 根据 f 的性质, y 一定也是整数. 但是 $\lfloor x\rfloor$ 与 x 之间不存在另一个整数, 矛盾! 所以我们的假设不成立.

□

推论 1.6.

$$\left\lfloor\frac{x+m}{n}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor+m}{n}\right\rfloor, \left\lceil\frac{x+m}{n}\right\rceil = \left\lceil\frac{\lceil x\rceil+m}{n}\right\rceil.$$

比如,

$$\lfloor\lfloor\lfloor x/10\rfloor/10\rfloor/10\rfloor = \lfloor x/1000\rfloor.$$

1.3. 区间计数问题. 如果我们用如下的简写记后面的区间:

$$\begin{cases} [\alpha..\beta] & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ (\alpha..\beta] & \alpha < x \leqslant \beta \\ [\alpha..\beta) & \alpha \leq x < \beta \\ (\alpha..\beta) & \alpha < x < \beta \end{cases}$$

我们的问题是这个集合里面包含了多少个整数.(α, β 不一定是整数).

首先, 简化考虑的问题情形. 如果 α, β 均为整数, 那么数量就是

$$\beta - \alpha + \text{“[” 的个数} - 1$$

然后, 考虑转换, 因为

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant n < \beta \quad &\Leftrightarrow \lceil\alpha\rceil \leqslant n < \lceil\beta\rceil \\ \alpha < n \leqslant \beta \quad &\Leftrightarrow \lfloor\alpha\rfloor < n \leqslant \lfloor\beta\rfloor \end{aligned}$$

所以余下二者仅需要补充上 “+1” 或者 ‘‘ $-1''$. 也就是

$$\begin{array}{ll} [\alpha..\beta] & \lfloor\beta\rfloor - \lceil\alpha\rceil + 1 \\ (\alpha..\beta) & \lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1. \end{array}$$

注:

1. 我们习惯使用左闭右开的括号序列, 因为其具有可加性.

2. 上述记号在关于求和取整时非常有用, 因为可以迅速的把这些技术的内容收缩下来.

例子 1.5. 抽奖游戏. 在 $[1, 1000]$ 中选一整数. 记抽出数为 n. 若 $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \backslash n$(记号 $a \backslash b$ 表示 a 是 b 的正因子), 那么他就赢取了 5 元. 否则, 他就输了 1 元. 请求出它玩这个游戏得到的期望.

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{n=1}^{1000} [\text{抽到 } n \text{ 会让我们赢}] \\
&= \sum_{1 \leqslant n \leqslant 1000} [\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \backslash n] \xlongequal{k := \sqrt[3]{n}} \sum_{k,n} [k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor][k \backslash n][1 \leqslant n \leqslant 1000] \\
&\xlongequal{k \backslash n \text{ 变形为} n = km} \sum_{k,m,n} \left[(k)^3 \leqslant n < (k+1)^3\right] [n = km][1 \leqslant n \leqslant 1000] \\
&\xlongequal{\text{换掉} n := km} \sum_{k,m} \left[k^3 \leqslant km < (k+1)^3\right] [1 \leqslant km \leqslant 1000] \\
&\xlongequal{m = n/k = n/\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor} 1 + \sum_{k,m} \left[k^3 \leqslant km < (k+1)^3\right] [1 \leqslant k < 10] \\
&= 1 + \sum_{1 \leq k \leq 10} \left(\lceil k^2 + 3k + 3 + \frac{1}{k} \rceil - \lceil k^2 \rceil\right) \\
&= 1 + \sum_{1 \leqslant k < 10} (3k + 4) = 172
\end{aligned}
$$

拓展问题: 在 $[1..n]$ 中呢? 记 K 为最大的满足 $K^3 \leq n$ 的数字. 也就是我们先求出较为整体的部分.

$$
W = \sum_{1 \leqslant k < K} (3k + 4) + \sum_{m} \left[K^3 \leqslant K_m < N\right] \quad == \frac{3}{2}K^2 + \frac{5}{2}K - 4 + \underbrace{\sum_{m} \left[m \in \left[K^2, N/K\right]\right]}_{\lfloor \frac{N}{K} \rfloor - K^2 + 1}
$$

然后可以着手求零碎的部分. 较为零碎的部分并没有很好的封闭表达式, 因此我们只能够讨论它的渐进特性. 这个特性会在后续展开.

例子 1.6. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, α 的谱是一个多重集, 定义做

$$
\operatorname{spec}(\alpha) := \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \cdots\}
$$

我们证明两个事实:

第一, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \operatorname{Spec}(\alpha) \neq \operatorname{Spec}(\beta)$.

证明说: 不妨设 $\alpha < \beta$. 我们发现 $\exists m$, s.t. $m(\beta - \alpha) \geqslant 1$.(可以取 $\left\lceil \frac{1}{\beta - \alpha} \right\rceil$). 由此 $m\beta - m\alpha \geqslant 1, \quad m\beta \geqslant 1 + m\alpha \Rightarrow \lfloor m\beta \rfloor > \lfloor m\alpha \rfloor$. 因而 $\operatorname{Spec}(\beta)$ 中 $\leqslant \lfloor m\alpha \rfloor$ 的元素小于 m 个. 而 $\operatorname{Spec}(\alpha)$ 中至少有 m 个 $\leqslant \lfloor m\alpha \rfloor$ 个元素. 这就表示这两个不同的谱序列永远不可能相等.

第二, $\operatorname{Spec}(\sqrt{2}) \cup \operatorname{Spec}(2 + \sqrt{2}) = \mathbb{N}, \quad \operatorname{Spec}(\sqrt{2}) \cap \operatorname{Spec}(2 + \sqrt{2}) = \varnothing$.

证明说: 考虑有多少个 $\leq n$ 个元素在 $\mathrm{spec}(\sqrt{2})$ 里面, 有多少个 $\leqslant n$ 的元素在 $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2})$ 里面. 定义 $N(\alpha,n)$ 表示 $\mathrm{Spec}(\alpha)$ 中 $\leqslant n$ 的之元素个数.

$$\begin{aligned} N(\alpha,n) &= \sum_{k>0}[\lfloor k\alpha\rfloor \leqslant n] \\ &= \sum_{k>0}[\lfloor k\alpha\rfloor < n+1] \\ &= \sum_{k>0}[k\alpha < n+1] = \sum_{k}\left[0<k<\frac{n+1}{\alpha}\right] \\ &= \left\lceil\frac{n+1}{\alpha}\right\rceil - 1. \end{aligned}$$

然后求 $N(\sqrt{2},n)+N(2+\sqrt{2},n) \stackrel{?}{=} n$

$$\begin{aligned} &\left\lceil\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\rceil - 1 + \left\lceil\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\rceil - 1 = n \\ \Leftrightarrow &\left\lfloor\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\rfloor = n && (\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor = [x \text{ is not int }]) \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\frac{n+1}{\sqrt{2}} + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}}}_{n+1} - (\underbrace{\left\{\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right\} + \left\{\frac{n+1}{2+\sqrt{2}}\right\}}_{1,\text{因为两个不是整数的加起来等于整数一定进位了}}) = n \end{aligned}$$

这样的结论可推广到 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \Leftrightarrow \mathrm{Spec}(\alpha)\cup\mathrm{Spec}(\beta)=\mathbb{N}$.

§2 二元运算: 模 (mod) 运算

2.1. 模. 我们已经知道了 n m 的商为 $\lfloor n/m\rfloor$, 我们下面定义 n m 的余数.

定义 2.1. $n \bmod m$ 为 n/m 的余数. 即

$$n \bmod m := n - m\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor, \forall n,m\in\mathbb{R}., m\neq 0.$$

特别地, 定义 $n \bmod 0 = n$(方使起见).

例子 2.1.

$$\begin{aligned} &5 \bmod 3 = 2 \\ &5 \bmod (-3) = 5-(-3)\left\lfloor\frac{5}{-3}\right\rfloor = 5-3\times 2 = -1 \\ &-5 \bmod 3 = -5-3\left\lfloor\frac{-5}{3}\right\rfloor = 1 \\ &-5 \bmod (-3) = -5-(-3)\times\left\lfloor\frac{-5}{-3}\right\rfloor = -2. \end{aligned}$$

可见, 对 $x \bmod y$ 而言, 若 $y>0$ $0\leqslant x \bmod y < y$;

$y < 0, \quad 0 \geqslant x \bmod y > y..$

例子 2.2.

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + x \bmod 1.$$

同样可以使用上取整定义 “不足近似量”.

定义 2.2.

$$n \text{ mumble } := m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rceil - n., \forall n, m \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

例子 2.3.

$$5 \text{ mumble } 3 = 3 \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil - 5 = 1.$$
$$5 \text{ mumble } (-3) = -3 \left\lceil \frac{5}{-3} \right\rceil - 5 = -2$$
$$-5 \text{ mumble } 3 = 2$$
$$-5 \text{ mumble } -3 \quad = -1.$$

我们首先注意一个性质:

性质 2.1.

$$c(x \bmod y) = cx \bmod cy$$

Proof. 首先验证一般情况:

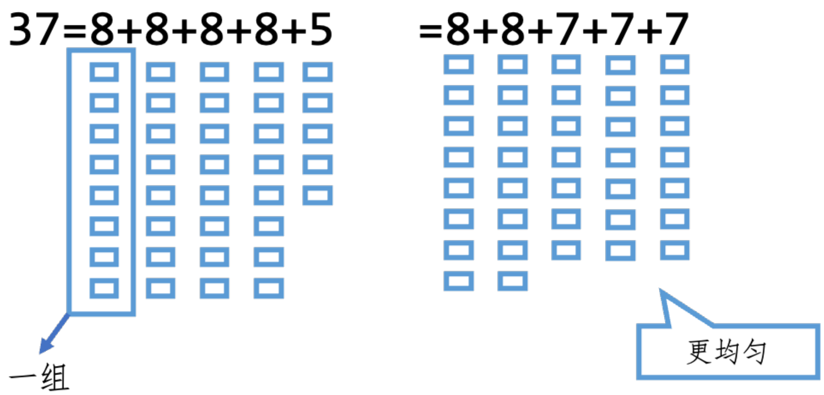
$$\begin{aligned} c(x \bmod y) = c\left(x - y \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor\right) &= cx - cy \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \\ &= cx - cy \left\lfloor \frac{cx}{cy} \right\rfloor \\ &= cx \bmod cy. \end{aligned}$$

然后对于 0 的情况, 有

$$c(x \bmod 0) = cx \bmod 0 = cx$$

也成立, 所以上面的性质成立. □

例子 2.4. 我们希望尽可能平均地将 n 个物品分为 m 份. 如 $37 = 8+8+8+8+5 = 8+8+7+7+7$.



可以考虑横着放

- 若 $n \nmid m$,“长的行”将会容纳 $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ 个物品. ($n \bmod m$)
- 若 $n \nmid m$,“短的行”将会容纳 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 个物品. ($n \,\mathrm{mumble}\, m$)

并且两种行最多仅仅相差 1.

我们考虑另一种方法. 要把 n 个物品“尽可能平均”分为 m 个组时 (干脆使用 $f(n,m)$ 表示之), 我们有如下的情况:

1. 把 $\lceil n/m \rceil$ 个物品放到当前组中
2. 递归执行 $f(n - \lceil n/m \rceil, m-1)$.

比如 $m = 314, n = 6$, 那么有下表格的过程:

n	m	$\lceil n/m \rceil$
314	6	53
261	5	53
208	4	52
156	3	52
104	2	52
52	1	52

我们来说明这个算法的正确性. 假设 $n = \underbrace{q}_{\lfloor n/m \rfloor} m + \underbrace{r}_{n \bmod m}$. 那么

1. 若 $r = 0$, 放 $\lceil n/m \rceil = q, f(n-q, n-1)$ 仍为 $r = 0$ 的情形.
2. 考 $r > 0, f(n-(q+1), n-1)$, 使下一次调用 r 减少 1 .

这样一来, 最后一定会到达 $r = 0$ 的情形.

接下来我们考虑第 k 组有多少物品. 答案是 $\begin{cases} \lceil n/m \rceil, 1 < k \leqslant n \bmod m \\ \lfloor n/m \rfloor, n \geqslant k > n \bmod m \end{cases}$

稍加改写, 有

$$
\begin{aligned}
&= q + [k \leqslant r] = q + \left\lceil \frac{r-k+1}{m} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{r-k+1}{m} \right\rceil + q = \left\lceil \frac{mq+r-k+1}{m} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{n-k+1}{m} \right\rceil.
\end{aligned}
$$

根据上述的例子, 我们就得到了一个恒等式:

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil.$$

同时我们可以证明下面的命题:

性质 2.2.

$$n = \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m}{m} \right\rfloor}_{m\text{ 项}}$$

$$n = \overbrace{\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil}$$

要证明这两个对称的形式, 只要注意到 $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$ 即可.

将 n 代换为 mx 可以得到如下推论:

推论 2.3.

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor$$

Proof.

$$\begin{aligned} \lfloor mx \rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\lfloor mx \rfloor + m - 1}{m} \right\rfloor \\ &\xlongequal{\text{去掉下取整}} \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor \end{aligned}$$

□