§1 随机过程的基本概念

概率论中学习一个随机变量, 而随机过程研究通常随时间变化的一簇随机变量, 也就是 $\{X(t), t \in T\}$.

定义 1.1 (随机过程)**.** 随机过程是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$, 其中 T 称为指标集或参数集.

两种看待随机过程的观点:

- "状态" 的集合: 如果 $X(t)$ 表示在 t 时刻的状态, 所有可能的状态的集合记作 S. 按照 S 的性质, 可以分为连续和离散状态空间.
- "二元函数": 可以看做 $T \times \Omega$ 的二元函数.
  - 固定样本点 $w \in \Omega$, $X(t, w)$ 就是在 T 上的一个函数 (样本路径).
  - 固定时刻: 得到 $X(t) = X(t, w)$ 是概率空间上面的一个随机变量.

下面考虑刻画随机过程. 既然随机过程是一簇随机变量的集合, 我们如何刻画它? 自然我们知道每一个 $t \in T, X(t)$ 的分布函数, 也就是 $F(t, x) = \{X(t) \leq x\}$, 以及他们在**任意**2 个, 3 个, ..., n 个时间点的联合分布. 一般, 对任意有限个 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 我们还需定义随机过程的 n 维分布为

$$F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = P\left\{X\left(t_1\right) \leqslant x_1, X\left(t_2\right) \leqslant x_2, \cdots, X\left(t_n\right) \leqslant x_n\right\}$$

因此, 我们可以用随机过程的所有一维分布, 二维分布, ..., n 维分布来刻画一个随机过程. 也就是

$$\{F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_1, t_2, \ldots, t_n, t_n \in T, n \geq 1\}$$

我们一般叫做随机过程的**有限维分布簇**.

此外, 观察到有限维分布簇满足一些特性:

1. **对称性** 对 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$, 有

$$\begin{aligned} F_{t_1, t_{j_2} \cdots u_{j_n}}\left(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_n}\right) &= P\left\{X\left(t_{j_1}\right) \leqslant x_{j_1}, X\left(t_{j_2}\right) \leqslant x_{j_2}, \cdots, X\left(t_{j_n}\right) \leqslant x_{j_n}\right\} \\ &= P\left\{X\left(t_1\right) \leqslant x_1, X\left(t_2\right) \leqslant x_2, \cdots, X\left(t_n\right) \leqslant x_n\right\} \\ &= F_{i_1, t_2, \cdots, t_n}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \end{aligned}$$