§1 上取整和下取整

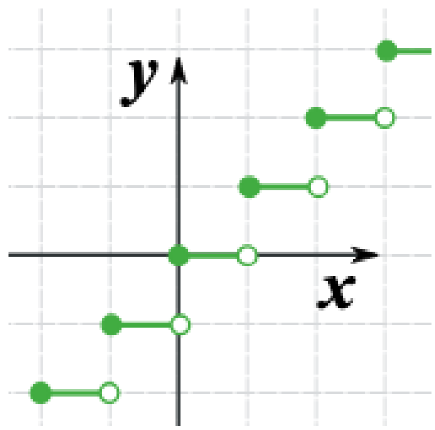
1.1. 基本定义.

定义 1.1 (上取整和下取整)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义下取整函数和上取整函数

$$\lfloor x \rfloor := \text{最大的} \leqslant x \text{的整数}$$
$$\lceil x \rceil := \text{最小的} \geqslant x \text{ 的整数}$$

分别称他们为 “上取整函数” 和 “下取整函数”.

例子 1.1. 绘制出下取整函数的图像



上取整函数的图像也是同理.

性质 1.1. 取整函数有如下的三个性质:

1. $\lfloor x \rfloor = x \iff x$ 是正数 $\iff \lceil x \rceil = x$.
2. (放缩) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$.
3. (对称)$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil, \quad F x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

性质 1.2. 实际上, 上下取整函数是对一类不等式的缩写

$$\lfloor x \rfloor = n \begin{cases} \iff & x - n \leqslant x \qquad \text{(固定}x\text{, 考察}n\text{ 的范围)} \\ \iff & n \leqslant x \leqslant n + 1 \quad \text{(固定}n\text{, 考察}x\text{ 的范围)} \end{cases}$$

$$\lceil x \rceil = n \begin{cases} \iff & x \leqslant n \leqslant x + 1 \\ \iff & n - 1 < x \leqslant n. \end{cases}$$

推论 1.3. 若 $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

注: 实际上, 这一个性质经常用于将整数 (也许是配凑出来的) 移入或者移出取整记号中.

为了更加彰显不等式的地位, 特别有下面的一个不等式.

性质 1.4 (上下取整的不等式)**.**

$$x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n; \quad n < x \Leftrightarrow n < \lceil x \rceil.$$
$$x \leqslant n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant n; \quad n \leqslant x \Leftrightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor.$$

这是一个重要的式子. 可以通过分类讨论的方法证明之.

定义 1.2 (分数部分)**.** 定义一个数的分数部分为 $x - \lfloor x \rfloor$. 如果与集合的记号不相冲突的话, 可以记作 $\{x\}$.

例子 1.2. $\lfloor x+y \rfloor$ 是否永远等于 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? 实际上不是这样的. 将 x, y 写作 $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \quad y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, 那么

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$$

我们发现当且仅当 $\{x\} + \{y\} < 1$ 时, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. 否则由于 $0 \leqslant \{x\} + \{y\} < 2$, 其为 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

1.2. 上取整, 下取整的复合. 我们首先考察一些基本例子得到的结果.

例子 1.3. $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor; \lfloor \lceil x \rceil \rfloor = \lceil x \rceil$. 直接将两者复合得到的结果是平凡的.

例子 1.4. 证明或推翻: $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

首先尝试举反例, 但是 $\pi, e, \phi, 1, 2 \cdots$ 都是正确的, 于是考虑证明.

我们的目标为想办法除去 $\sqrt{\ }$ 下的 $\lfloor \rfloor$. 假设 $m := \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$, 解掉最外层的底可以得到

$$m \leqslant \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow m^2 \leqslant \lfloor x \rfloor < (m+1)^2 \\ &\Rightarrow m^2 \leqslant x < (m+1)^2. \Longrightarrow m \leqslant \sqrt{x} < (m+1)^2 \\ &\Rightarrow m \leqslant \lfloor \sqrt{x} \rfloor < (m+1)^2. \end{aligned}$$

考虑泛化上述的例子.

定理 1.5. 令 $f(x)$ 为一个连续, 单调递增的函数, 满足

$$f(x)\text{是整数} \implies x\text{是整数}.$$

那么有

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor, \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil.$$

只要 $f(x), f(\lfloor x \rfloor), f(\lceil x \rceil)$ 有定义.

Proof. 1° 如果 x 是整数, 那么显然成立.

2° 若 $x > \lfloor x \rfloor$, 由于 f 单调递增, 那么 $f(x) > f(\lfloor x \rfloor)$. 然后两端同时取下取整符号, 由于下取整记号不减, 那么 $\lfloor f(x) \rfloor \geqslant \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$. 我们接下来分类讨论, 以确定大于号的情形不成立.

- 如果 $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$, 那么这就是我们想要的.

- 如果 $\lfloor f(x)\rfloor > \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor$, 那么由于 f 是一个连续的函数, 一定存在 y, 使得 $\lfloor x\rfloor \leqslant y < x$, 并且 $f(y) = \lfloor f(\lfloor x\rfloor)\rfloor$. 根据 f 的性质, y 一定也是整数. 但是 $\lfloor x\rfloor$ 与 x 之间不存在另一个整数, 矛盾! 所以我们的假设不成立.

$\square$

推论 1.6.

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor + m}{n} \right\rfloor, \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x\rceil + m}{n} \right\rceil.$$

比如,

$$\lfloor\lfloor\lfloor x/10\rfloor/10\rfloor/10\rfloor = \lfloor x/1000\rfloor.$$

1.3. 区间计数问题. 如果我们用如下的简写记后面的区间:

$$\begin{cases} [\alpha..\beta] & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ (\alpha..\beta] & \alpha < x \leqslant \beta \\ [\alpha, \beta) & \alpha \leq x < \beta \\ (\alpha, \beta) & \alpha < x < \beta \end{cases}$$

我们的问题是这个集合里面包含了多少个整数.