§1 线性空间的定义

定义 1.1 (线性空间)**.** 设 P 是一个数域, V 是一个非空集合, 对 V 中的任意两个元素 α, β, 有唯一的元素与之对应, 记作 α 与 β 的和. 我们称在 V 中定义了加法 "+".

又对于 P 中任意一个数 k 与 V 中的任意一个元素 α, 有唯一的 V 中的元素与他们对应. 我们称为 k 与 α 的积. 记作 $k\alpha$. 我们称在 V 中定义了数量积 (纯量积).

并且这两种运算满足如下的八条性质:

1. 加法部分
   (a) 加法交换律: $\forall \alpha, \beta \in V. \alpha + \beta = \beta + \alpha$.
   (b) 加法结合律: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V. (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
   (c) 存在零元: $\exists 0 \in V. 0 + \alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$.
   (d) 存在负元: $\forall \alpha \in V. \exists -\alpha \in V. \alpha + (-\alpha) = 0$.
2. 乘法部分
   (a) 存在单位元: $1 \cdot \alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$.
   (b) 数乘结合律: $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
3. 加法与数乘
   (a) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha, \forall k, l \in P, \alpha \in V$
   (b) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \forall k \in P, \alpha, \beta \in V$.

则称 V 是属于 P 上的线性空间 (向量空间), V 中的元素称为向量, P 为 V 的基域.

接下来考察线性空间的常见性质.

性质 1.1. 对于这个定义, 立即有以下的性质.

1. 零元是唯一的.
2. 对于 $\alpha \in V$, 负元唯一.
3. 有消去律, 也就是如果 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \implies \beta = \gamma$.
4. $\forall k \in P, k \cdot 0 = 0; \forall \alpha \in V, 0 \cdot \alpha = 0, (-1) \cdot \alpha = -\alpha$.

Proof. 1. 设若有 $0' \in V$, 使得 $0' + \alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$, 取 $\alpha = 0$, 那就是说 $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$. 因此 0 和 $0'$ 实际上是一个东西.

2. 若 $\beta \in V$, 取 α 使得 $\alpha + \beta = 0$, 则

$$\beta = 0 + \beta = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = (-\alpha) + (\alpha + \beta) = -\alpha.$$

3. 可以通过如下证明

$$\beta = 0 + \beta = -\alpha + \alpha + \beta = -\alpha + \alpha + \gamma = \gamma.$$

4. 使用分配率, 有 $0 + k \cdot 0 = k \cdot 0 = k \cdot (0 + 0) = k \cdot 0 + k \cdot 0$. 这就意味着 $k \cdot 0 = 0$.
另一方面, $0 + 0 \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = (0 + 0)\alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha$. 因此得到 $0 \cdot \alpha = 0$.
由于 $0 \cdot \alpha = 0$ 知 $\alpha + (-1)\alpha = (1 + (-1))\alpha = 0 = \alpha + (-\alpha)$. 这就说明 $(-1)\alpha = -\alpha$.
5. 如果 $k \neq 0, \alpha = (k\frac{1}{k})\alpha = \frac{1}{k}(k\alpha) = \frac{1}{k} \cdot 0 = 0$. 另一方面类似可以证明.

□

例子 1.1. 1. 行向量空间 $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 和列向量空间 $[x_1, x_2, \cdots, x_n]'$.

2. P 上的一元多项式 $P[x]$ 对多项式和多项式的加法, 多项式和数的乘法封闭. 构成 P 上的线性空间.
3. 设 V 是所有收敛实数序列的集合 $V = \left\{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) : \lim_{n\to\infty} a_n \text{ 存在}\right\}$, 则对数列的加法, 数列与实数的乘法封闭. 也就是 V 构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

我们在给出一个定义之后, 自然要考察其初步的性质, 与它关联的结构, 以及结构与结构之间有何种联系. 下面我们来看这个结构和它满足某种条件的子集有什么联系. 我们称为子空间.

设 W 是 $\mathbb{P}$ 上的线性空间的子集, 如果对于任意 α, β, 都有 $\alpha + \beta \in W$(W 对加法封闭), 以及 $\forall k \in \mathbb{P}, \alpha \in W$, 有 $k\alpha \in W$(W 对纯量乘法封闭), 我们把这样的子集称为 W 的子空间.

定义 1.2. 设 W 且数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 的非空子集, 如果对于 V 的加法, 纯量乘法 W 也构成一个线性空间, 则称 W 是 V 的子空间. 简称子空间.

下面来考察初步的性质.

性质 1.2. 若 W 是线性空间 V 上的非空子集, 下列的三个命题等价
1. W 是 V 的子空间;
2. W 对 V 的加法, 数乘封闭;
3. $\forall k, l \in \mathbb{P}, \alpha, \beta \in W, k\alpha + l\beta \in W$.

§2 子空间

2.1. 子空间的更多性质.

1. 基的扩充 设 W 是线性空间 V 的子空间, 则 W 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可以扩充为 V 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 这是因为在 V 中取一组基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, 根据替换定理, 有 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{j_{r+1}}, \cdots, \beta_{j_n}$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价并且线性无关.

2. 子空间的交与和 如果 V_1, V_2, V_3 都是 V 的子空间, 那么对于交运算有
- 交换律: $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$;
- 结合律: $V_1 \cap (V_2 \cap V_3) = (V_1 \cap V_2) \cap V_3$;
- 封闭性: $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cup V_s = \bigcap_{i=1}^{s} V_i$ 也是 V 的子空间

对于和运算有
- 交换律: $V_1 + V_2 = V_2 + V_1$;
- 结合律: $V_1 + (V_2 + V_3) = (V_1 + V_2) + V_3$;
- 封闭性: $V_1 + V_2 + \cdots + V_s = \sum_{i=1}^{s} V_i$ 也是 V 的子空间

3. 子空间的等价条件 设 V_1, V_2 都是 V 的子空间, 那么下面三个条件是等价的:
- $V_1 \subset V_2$;
- $V_1 + V_2 = V_2$;
- $V_1 \cup V_2 = V_1$.

4. 子空间之间的关系 设 V_1, V_2 都是 V 的子空间, 那么

- 如果 $W \subset V_1, W \subset V_2$, 那么 $W \subset V_1 \cap V_2$;
- 如果 $W \supset V_1, W \supset V_2$, 那么 $W \supset V_1 + V_2$.

2.2. 维数定理.

定理 2.1. 设 V_1, V_2 都是 V 的子空间, 那么有

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Proof. 假设 $\dim V_1 = s, \dim V_2 = t, \dim(V_1 \cup V_2) = r$. 先在 $V_1 \cap V_2$ 中取基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$. 然后把它扩充为 V_1 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \beta r + 1, \cdots, \beta$. 然后对 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 又扩充为 V_2 的基底 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_t$.

因为 $\alpha \in V_1 + V_2$, 那么有 $\beta \in V_1, \gamma \in V_2$, 使得 $\alpha = \beta + \gamma$. 由于 β, γ 可以被上面的两个扩充的基底表示, 自然, α 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_t, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_t$ 表示, 也就是

$$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s, \gamma_{r+1}, \gamma_t).$$

设有 $x_1, \cdots, x_r, y_{r+1}, \cdots, y_s, z_{r+1}, \cdots, z_t \in P$ 使得

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i + \sum_{j=r+1}^{s} y_j \beta_j + \sum_{k=r+1}^{t} z_k \gamma_k = 0$$

因此

$$\sum_{j=r+1}^{s} y_j \beta_j = -\sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i - \sum_{k=r+1}^{t} z_k \gamma_k$$

由于等式左侧是 V_1 中的元素, 右侧是 $V_1 \cap V_2$ 的元素减去 V_2 中的元素, 所以我们断定, $\sum_{j=r+1}^{s} y_j \beta_j$ 一定属于 $V_1 \cap V_2$. 又因为 $V_1 \cap V_2$ 的基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$, 于是一定有

$$\sum_{j=r+1}^{s} y_j \beta_j = \sum_{i=1}^{r} x_i' \alpha_i.$$

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 直到

$$y_{r+1} = \cdots = y_s = -x_1' = \cdots = -x_r' = 0.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i + \sum_{k=r+1}^{t} z_k \gamma_k = 0.$$

因此 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1} \cdots, \beta_s, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_t$ 线性无关且为 $V_1 + V_2$ 的基. 于是

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

□

推论 2.2. 如果 $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V$, 那么 $V_1 \cup V_2 \neq \{0\}$.

2.3. 直和.

定理 2.3 (直和的等价定义)**.** 设 V_1, V_2 都是 V 的子空间, 则下列条件等价:
1. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$;
2. $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
3. $\forall \alpha \in V_1 + V_2$, $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$,$\alpha$ 的分解式唯一.
4. $\beta \in V_1, \gamma \in V_2, \alpha$ 若 $\beta + \gamma = 0$, 那么 $\beta = \gamma = 0$.

若 V_1, V_2 满足上述五条的任何一条, 则称 $V_1 + V_2$ 是 $V_1 + V_2$ 的直和, 通常记作 $V_1 \oplus V_2$.

Proof. (1) $\iff$ (2) 根据上述定理可知.

(1) $\implies$ (3) 设 $\alpha = \beta + \gamma = \beta_1 + \gamma_1, \beta, \beta_1 \in V_1, \gamma, \gamma_1 \in V_2$. 两边相减就有

$$\beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

由此说明 $\beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$, 分解唯一.

(3) $\implies$ (4) $0 = \beta + \gamma, \beta \in V_1, \gamma \in V_2$, 又因为 $0 = 0 + 0, 0 \in V_1, 0 \in V_2$. 由于分解的唯一性知 $\beta = \gamma = 0$.

(4) $\implies$ (1) 设 $\beta = V_1 \cap V_2$, 因此 $-\beta \in V_1 \cup V_2$, 而 $0 = \beta + (-\beta), \beta \in V_1, -\beta \in V_2$, 于是 $\beta = -\beta = 0$, 因此 $V_1 \cup V_2 = \{0\}$.

□

定义 2.1 (直和)**.** 设 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 都是线性空间 V 的子空间. 又 $W = V_1 + V_2 + \cdots + V_s$. 如果 $\alpha \in W$ 的分解

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \alpha_i \in V_i, 1 \leq i \leq s$$

是唯一的, 则称 W 是 $V_1, V_2 \ldots, V_s$ 的直和. 记为

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

定理 2.4. 设 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 为线性空间 V 的子空间. 又 $W = V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 则下面四个条件等价.
1. 1) $W = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} \cdots \dot{+} V_s$.
2. $\alpha_i \in V_i, 1 \leq i \leq s$, 且 $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 0$. 则 $\alpha_i = 0, 1 \leq i \leq s$.
3. $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_j = (0), 1 \leq i \leq s$.
4. $\dim W = \sum_{i=1}^{s} \dim V_i$.

§3 商空间

定义 3.1 (商空间)**.** 设 V 是数域 P 上的线性空间. W 是 V 的子空间. 设 $\alpha, \beta \in V$, 且 $\alpha - \beta \in W$; 则称 α, β 模 W 同余, 记为

$$\alpha \equiv \beta (\mathrm{mod} W).$$

$$\bar{\alpha} = \{\beta\}, \beta \equiv \alpha (\mathrm{mod} W))\}$$

称为 α 模 W 的同余类. 类中的任一向量称为此类的代表.

例子 3.1 (多项式同余)**.** 对于多项式的同余, 设 $V=P[x], g(x)\neq 0$. 令 $W=\langle g(x)\rangle=\{h(x)\in P[x]|g(x)|h(x)\}$ 模 V 的子空间. 自然 $\alpha,\beta\in V, \alpha\equiv\beta(\text{mod} g(x))$ 当且仅当 $\alpha\equiv\beta\,(\text{mod}W)$, 且 $\{\beta\mid\beta\equiv\alpha(\text{mod}g(x))\}=\{\beta\mid\beta\equiv\ \alpha(\text{mod}W))\}$

例子 3.2 (空间坐标的同余)**.** 在空间中取定标架 $\{O;\alpha,\beta,\gamma\}$. 于是 XOY 平面 π 可看成 $\mathbf{R}^{3\times 1}$ 中子空间 $W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}\right\}$. 则

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}(\text{mod}W)$$

当且仅当 $c=c_1$. 因而 $\alpha=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ 的模 W 的同余类 $\bar{\alpha}$ 的图形是通过 $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ c\end{pmatrix}$ 平行 π 的平面 π_1.

我们构造这样的商空间, 主要是用来进行更好地对研究对象进行分类. 例如, 我们可以把相同余数的多项式分为一类, 亦可以将相同的高度的坐标分为一类. 实际上, 同余也是一个等价关系.

1. (自反性). $\alpha\equiv\alpha(\text{mod}W)$
2. (对称性). 若 $\alpha\equiv\beta(\text{mod}W)$, 则 $\beta\equiv\alpha(\text{mod}W)$.
3. (传递性). 若 $\alpha\equiv\beta(\text{mod}W), \beta\equiv\gamma(\text{mod}W)$, 则 $\alpha\equiv\gamma(\text{mod}W)$.

实际上, 我们还会发现, 我们的两个同余类或者相等, 或者不相交.

4. $\alpha,\beta\in V.\bar{\alpha}=\bar{\beta}$ 当且仅当 $\bar{\alpha}\cap\bar{\beta}\neq\emptyset$ 当且仅当 $\alpha\equiv\beta(\text{mod}W)$.

我们接下来说明商空间也是线性空间.

定理 3.1. 设 W 是 V 的子空间. 又 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in V, k\in P$. 且 $\alpha_i\equiv\beta_i(\text{mod}W), i=1,2$. 则

$$\alpha_1+\alpha_2\equiv\beta_1+\beta_2(\text{mod}W).$$
$$k\alpha_1\equiv k\beta_1(\text{mod}W).$$

定理 3.2. 设 V 是数域 P 上的线性空间. W 是 V 的一个子空间. 以 V/W 表示 V 中元素模 W 的同余类的集合. 在: V/W 中定义加法和纯量乘法如下:

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta}, \forall\bar{\alpha},\bar{\beta}\in V/W,$$
$$k\cdot\bar{\alpha}=\overline{k\alpha}, \forall\bar{\alpha}\in V/W, k\in P.$$

则 V/W 构成数域 P 上的线性空间, 称为 V 对 W 的商空间.