插值法

《计算方法》课程笔记

2024 年 11 月 19 日

§1 引言

在实际问题中出现的函数是多种多样的. 常遇到这样的情况: 表达式过于复杂, 不便于计算, 但需在多点上求取函数值; 或者函数仅提供离散的函数值表(若干采样点处的值), 需要获取非采样点处的函数值.

于是, 可以考虑在允许一定误差的基础上, 构建便于计算的近似解析函数表达式, 以简化复杂或未知函数的问题. 利用邻近点上已知函数值的加权平均来估计未知函数值–插值法 (interpolation). 这种问题大体可以定义做:

当函数 $y = f(x)$ 非常复杂或其表达式未知时, 可在一系列节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 处进行采样, 满足 $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$, 据此构造一个简单易算的近似函数 $g(x) \approx f(x)$, 使得 $g(x_i) = f(x_i)(i = 0, \ldots n)$, 称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数.

§2 仅关注插值点处相等的多项式插值法

2.1. Taylor 多项式插值. 根据《高等数学》中学习的 Taylor 公式, 我们可以使用某一点处的 Taylor 展开来估计. 但是, Taylor 展开对于函数的表达式要求很高: 一来, 函数表达式必须现实的给出; 二来, 函数 f 还要属于 $C^{N+1}[a, b]$, 如果要展开 N 次的话. 不易进行估计.

2.2. Lagrange 多项式插值.

a) 直接解方程组 实际我们面对的数据是若干个离散的点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 满足 $a \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$. 插值法就是找到一个多项式, 使得下面的定义成立:

定义 1. 设 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 且已知它在 $n + 1$ 个互异点 $a \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$. 上的函数值 $y_0, y_1, \ldots, y_n$, 若存在一个次数不超过 n 次的多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

满足 $p(x_i) = y_i(i = 0, \ldots n)$, 则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次插值多项式.

我们可以说明这个插值多项式的唯一性.

定理 1. *满足 $n + 1$ 个插值条件的 n 次插值多项式存在且唯一.*

证明. 设所要构造的插值多项式为: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 由插值条件 $P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n$, 得到如下线性代数方程组:

$$\begin{cases} 1 \cdot a_0 + x_0 a_1 + \cdots + x_0^n a_n = y_0 \\ 1 \cdot a_0 + x_1 a_1 + \cdots + x_1^n a_n = y_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \cdot a_0 + x_n a_1 + \cdots + x_n^n a_n = y_n \end{cases}$$

此方程组的系数行列式为 Vandermonde 行列式, 即

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

当 $x_i \neq x_j$ 的时候, $D \neq 0$, 因此 $P_n(x)$ 由 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 唯一确定. □

显然, 求 $P_n(x)$ 可通过求线性方程组的解 $a_0 \sim a_n$ 的方法. 当 n 较大时, 计算量大, 表达式复杂, 不具有实用意义. 我们如何寻求易于计算、表达简单的 $P_n(x)$?

b) Lagrange 插值

线性插值 先做一个简单的探索. 根据点斜式, 过两点 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 的直线方程可写为

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{斜率}}(x - x_0) \\ &= y_0 \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{l_0(x)} + y_1 \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{l_1(x)}. \end{aligned}$$

我们发现 $\begin{cases} l_0(x_0) = 1 & l_0(x_1) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 & l_1(x_0) = 0 \end{cases}$, 满足线性插值的条件. 即, 可以写作 $y = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$.

抛物插值 过三点 (x_0, y_0) 、(x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 可唯一确定一个抛物线. 设方程为

$$y = A(x - x_1)(x - x_2) + B(x - x_0)(x - x_2) + C(x - x_0)(x - x_1).$$

这样设置的好处是可以在带入的时候把不想干的内容消去变为 0. 将三个插值点分别代入, 得

$$A = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad B = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad C = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

代入方程, 得

$$y = \underbrace{\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}}_{l_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}}_{l_1(x)} y_1 + \underbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}_{l_2(x)} y_2.$$

并且 l_0, l_1, l_2 满足 $\begin{cases} l_0(x_0) = 1 & l_0(x_1) = l_0(x_2) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 & l_1(x_0) = l_1(x_2) = 0 \\ l_2(x_2) = 1 & l_2(x_0) = l_2(x_1) = 0 \end{cases}$. 可写作 $y = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$, 即三个 (二次) 插值基函数的线性组合.

这里的基函数的 “基” 暗示着他们是线性空间的一组基底. 具体一点, 他们是不超过二次的多项式空间 $\mathbb{F}[x]$ 中的一组基 (元素互相线性无关, 并且可以通过线性组合生成所有的不超过二次的多项式). 另外值得注意到的是, 我们的基函数就如同坐标里面的标准正交基那样, 具有比较好的性质: 在我们感兴趣的点处取得 1, 不感兴趣的点处取得 0. 后续的基函数也有类似的效果. 可以帮助我们证明很多有趣的性质.

推广到一般情况 过 $n+1$ 个点的 n 次插值多项式是否也可以表示为一组插值基函数的线性组合? 即如下所示的内容

$$L_n(x) = \underbrace{\frac{(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n)}}_{l_1(x)} y_0 + \underbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}}_{l_2(x)} y_1 + \cdots$$
$$+ \underbrace{\frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})}}_{l_n(x)} y_n$$

这个式子每一项的插值基函数 $l_k(x)$ 的特点是:

- 分子: x 与其他所有节点的差相乘
- 分母: x_k 与其他所有节点的差相乘

也就是可以表示成

$$l_k(x) = \frac{{\color{red}(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})}{\color{blue}(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}}{{\color{red}(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})}{\color{blue}(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

可以发现, 我们构造的基函数具有 $\boxed{l_k(x_i)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}}$ 的性质, 满足插值条件. 即 $L_n(x)$ 是通过这 $n+1$ 个点的 n 次插值多项式, 称为 Lagrange 插值多项式.

误差分析 对于插值区间 a,b 上通过 $n+1$ 个节点的 n 次插值多项式而言, 除了在插值节点 x_i 上没有误差之外, 在其它点上, 只是 $y=f(x)$ 的近似值, 一般存在误差. 我们称 $R(x)=f(x)-P(x)$ 为插值多项式的截断误差或余项. 其估计有如下定理所示.

定理 2. *设 $f\in C^n[a,b]$, 且 $f^{(n+1)}$ 在 (a,b) 内存在, 则 f 的 n 次插值多项式 $\varphi(x)$ 对于任何 $x\in[a,b]$ 有插值余项*

$$R_n(x)=f(x)-\varphi_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

其中 $\xi=\xi(x)\in(a,b),\omega_{n+1}=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

证明. (概要) 由于插值函数在插值点上误差为 0, 故将 R_n 做因式分解为 $\omega_{n+1}(x):=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 和一个未知项 $k(x)$. 即

$$R_n(x)=k(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=k(x)\omega_{n+1}(x).$$

希望研究 $k(x)$ 的具体性质, 于是考虑固定 x, 依照定理中的形式构造出辅助函数 $\psi(t)=f(t)-\varphi_n(t)-K(x)w_{n+1}(t),t\in[a,b]$. 它满足

- 插值点处 $\psi(x_i)=0$;
- 固定点处 $\psi(x)=0$.

因此至少有 $n+2$ 个零点. 根据 Rolle 定理, 可以得到 $\psi'(t)$ 在 $[a,b]$ 中有 $n+1$ 个零点; $\psi''(t)$ 在 $[a,b]$ 中有 n 个零点. 持续应用 Rolle 定理, 有 $\psi^{(n+1)}(t)$ 在 $[a,b]$ 中有 1 个零点, 即至少 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\psi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-0-(n+1)!k(x)=0.$$

从而得到 $K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\xi=\xi(x)\in(a,b)$, 带入误差的定义可得 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$.

由于 ξ 在 (a,b) 内的具体位置无法确切给出, 但是对于连续函数而言只要知道最大值就可以估计误差. □

例 1. 线性插值的误差截为 $R_1(x)=f(x)-P_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\quad\xi\in(a,b)$.

对于抛物插值, 误差为

$$\begin{aligned}R_2(x)&=f(x)-P_2(x)\\&=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\quad\xi\in(a,b)\end{aligned}$$

例 2. 已知 $x_0 = 100, x_1 = 121$, 用线性插值估计 $f(x) = \sqrt{x}$ 在$x = 115$ 时的截断误差.

考虑

可能作为填空题出现

$$|R_1| = |\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)| \le |\frac{1}{2!}\max_{t\in[x_0,x_1]} f''(t)(x-x_0)(x-x_1)|.$$

得知 $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, 其在 $[x_0, x_1]$ 上单调递增, 最大值是 $f''(100) = -1/4000$, 带入原式有误差上限为 0.1125.

例 3. 已知 $y = f(x)$ 的函数表

可能作为大题出现

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

构造 Lagrange 插值多项式.

这只需要构造好基函数即可.

2.3. 差商. Newton 多项式插值. 若已由 $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ 算出 $P_{n-1}(x)$, Lagrange 公式无法直接利用其去计算 $P_n(x)$, 只能重算所有插值基函数；能不能从 $P_{n-1}(x)$ 简单修正一下, 直接构造出 $P_n(x)$?

由此, 我们希望令 $g(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$, 观察这个差的规律. 我们发现, 则 g(x) 必是一个不超过 k 次的多项式.

又 $P_n(x)$ 和 $P_{n-1}(x)$ 都是 $f(x)$ 的插值多项式, 则在 $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ 处有 $P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i)$, 也就意味着在 $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ 处 $g(x_i) = P_n(x_i) - P_{n-1}(x_i) = 0$. 从而可以考虑令 $g(x) = a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$, 其中 a_n 为某一个待定的常数. 从而得到递推公式

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

倘若设定初始情况 $P_0 = a_0$ 这个 0 次多项式的话, 就表明, 当我们有一个待插节点 x_0 做一次插值的时候, 我们希望得到的式子是 $P_1(x) = P_0(x) + a_1(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0)$; 由这个式子很容易得到两个节点 x_0, x_1 导致的二次插值. 即 $P_2(x) = P_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$.

这样, 我们就得到了一种新的多项式插值公式, 称为 Newton 插值公式. 其可以大体表达做

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i).$$

下面考虑求解各个 a_n. 我们可以列方程组解决.

为保证满足插值条件 $P_n(x_i) = y_i$, 需且仅需满足如下的方程组:

$$\begin{cases} y_0 = P_n(x_0) = a_0 & (1) \\ y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) & (2) \\ y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & (3) \\ \cdots & (...) \\ y_n = P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) & (n) \end{cases}$$

首先容易解得 $y_0 = a_0; y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. 对于 a_2 而言, 如果我们把形式变得统一, 把公因子消去的话, 解答式就会变得颇具规律. 即

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_0} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a_2(x_2 - x_1) \\ \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} &= a_2 \end{aligned}$$

实际上, 上述的规律大致可以体现为不断地求函数平均变化率; 平均变化率的平均变化率, 如此往复. 这足以让我们给出一个新定义–差商.

定义 2. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的平均变化率 $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ 称为 $f(x)$ 在 x_i, x_{i+1} 处的一阶差商, 记为 $f[x_i, x_{i+1}]$.

一阶差商的平均变化率 $\frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$ 称为 $f(x)$ 在 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 处的二阶差商, 记为 $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$.

一般地, 可以定义 $f(x)$ 的 n 阶差商 $f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots x_n] - f[x_0, x_1, \cdots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$. 实际上高阶差商可由低一阶的两个差商线性组合而得到.

特别地, 可将 $f(x_i)$ 看成 $f(x)$ 在 x_i 处的零阶差商.

实际上我们上述得到的系数就是各个差商的值. 为了得到一个更加易于理解的 Newton 插值法, 需要对差商的性质做进一步的探究.

定理 3. *差商具有对称性, 与节点的顺序无关.*

这是说, 好比 $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$,$n$ 阶差商是 $n+1$ 阶对称的函数.

证明. (概要) 实际上, k 阶差商可表示为函数值 $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_k)$ 的线性组合

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (x_i - x_j)},$$

可以使用数学归纳法证明. 这里省略. □

定理 4. *若 $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_k]$ 是 x 的 k 次多项式, 则下一级差商 $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]$ 是 x 的 $k-1$ 次多项式.*

证明. 这是由于定义中 $f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}] - f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_{k+1} - x}$ 右端分子为 k 次多项式, 且当 $x = x_{k+1}$ 时分子为 0, 故分子必含有因式 $x_{k+1} - x$, 与分母中的因式相消后, 右端为 $k-1$ 次多项式. □

推论. 若 $f(x)$ 是 n 次多项式函数, 则 $f(x)$ 的 $n+1$ 阶差商 $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]$ 恒为 0.

这可以看做上述定理的直接推论. 使用差商的语言重写上述的推导过程, 就有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) && (1)\\
f[x, x_0] &= f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1) && (2)\\
f[x, x_0, x_1] &= f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2) && (3)\\
\cdots & && (\cdots)\\
f[x, x_0, \cdots, x_{n-2}] &= f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] + f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}](x - x_{n-1}) && (n-1)\\
f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] &= f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_n) && (n)
\end{aligned}
$$

只要将第 (n) 式代入第 $(n-1)$ 式, 第 $(n-1)$ 式代入第 $(n-2)$ 式, 依次类推, 最后, 第 (1) 式可以变为:

$$
\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
& + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) + f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_n)
\end{aligned}.
$$

a) 误差分析 由插值多项式的唯一性可知: 满足同一组插值条件的 Lagrange 插值多项式 $P_n(x)$ 与 Newton 插值多项式 $N_n(x)$ 实际上是同一个多项式仅是同一插值多项式的不同表达形式而已. 因此误差也完全相等.

例 4. 已知 $y = f(x)$ 的函数表

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

构造 Newton 插值多项式.

列出差商表格可以知道:

可能作为考试大题出现.

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
1	9	$\frac{9-1}{1-0} = 8$		
2	23	$\frac{23-9}{2-1} = 14$	$\frac{14-8}{2-0} = 3$	
4	3	$\frac{3-23}{4-2} = -10$	$\frac{-10-14}{4-1} = -8$	$\frac{-8-3}{4-0} = -\frac{11}{4}$

于是 $N(x) = 1 + 8x + 3x(x-1) - \frac{11}{4}x(x-1)(x-2)$.

§3 关注插值点导数的插值法

Lagrange, Newton 插值多项式的插值条件是: 在插值节点上, 插值函数与被插函数的函数值相等. 如要保证插值函数能更好与被插函数相重合, 我们可以考虑不但要求“过点”, 还要要求“相切”, 即两者在节点上还有相同的导数值, 甚至更高阶导数也相等. 这类插值称为埃尔米特插值.

3.1. Hermite 插值.

Hermite 插值内容考试不考.

定义 3. 已知 $n+1$ 个互异点 $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ 上的函数值 $f(x_i)$ 和导数值 $f'(x_i)$, 若存在一个次数不超过 $2n+1$ 次的多项式 $H(x)$, 满足

$$H\left(x_i\right)=f\left(x_i\right), H'\left(x_i\right)=f'\left(x_i\right), i=0,1,\cdots,n$$

则称 $H(x)$ 为 $f(x)$ 的 $2n+1$ 次 Hermite 插值多项式.

式中给出了 $2n+2$ 个条件, 可唯一确定一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)$, 采用类似于 Lagrange 插值多项式基函数的方法, 可求出埃尔米特多项式 $H_{2n+1}(x)$.

例 5. 已知函数在两个互异节点 x_0, x_1 上的函数值 $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1$ 和一阶导数值 $f'(x_0)=m_0, f'(x_1)=m_1$, 求一个三次插值多项式 $H(x)$ 使其满足:

$$\begin{cases} H(x_0)=y_0, H(x_1)=y_1 \\ H'(x_0)=m_0, H'(x_1)=m_1 \end{cases}$$

这样的 $H(x)$ 称为三次 Hermite 插值多项式.

仿照上述 Newton, Lagrange 插值法, 采用构造插值基函数的方法, 可设: $H(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+H_0(x)m_0+H_1(x)m_1$, 其取值如下表:

基函数	函数值 x_0	函数值 x_0	一阶导数 x_0	一阶导数 x_1
$h_0(x)$	1	0	0	0
$h_1(x)$	0	1	0	0
$H_0(x)$	0	0	1	0
$H_1(x)$	0	0	0	1

我们还是可以采用因子分析加上待定系数的方法. 首先考察 $h_0(x)$, 由于 $h_0(x_1)=h_0'(x_1)=0$, 所以 $h_0(x)$ 中必有因子 $(x-x_1)^2$. 由于 $h_0(x)$ 最多是一个三次多项式, 要使得它满足基函数, 可以设 $h_0=(x-x_1)^2(A+Bx)$. 不过由于我们一会儿要求 x_1, 干脆让整个式子与 x_0, x_1 的对称性结合起来. 于是设

$$h_0(x)=(a+b(x-x_0))\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2.$$

这个式子和上述是等价的. 只是常数发生了不同. 带入 $h_0(x_0)=1$, 解得 $a=1$; 对于 b 而言, 需要带入 $h_0'(x_0)=0$, 解得 $b=\frac{-2}{x_0-x_1}$. 从而得到

$$\boxed{h_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2},$$

对于 h_1 而言, 可以设

$$h_1(x)=(a+b(x-x_1))\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

这样一个对称形式. 由于基函数中正好同时具有这个对称形式, 因此只要将 h_0 中 x_0, x_1 变量对换即可得到. 即解得

$$\boxed{h_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2}.$$

再求 $H_0(x)$, 由于 $H_0(x_0) = H_0(x_1) = 0$, 且 $H_0'(x_1) = 0$, 所以 $H_0(x)$ 中必有因子 $(x - x_1)^2(x - x_0)$. 又由于 $H_0(x)$最多是一个3次多项式，可以设：$H_0(x) = a(x - x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$(同样还是为了对称性考虑). 对 $H_0(x)$ 求导数, 利用 $H_0'(x_0) = 1$ 可得 $a = 1$. 于是得:

$$\boxed{H_0(x) = (x - x_0)(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})^2}$$

由对称性可知: $\boxed{H_1(x) = (x - x_1)(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2}$. 带入上面式子即可得到.

实际上, 可以说明满足插值条件的 Hermite 多项式是唯一的. 并且其误差估计的方法与 Newton 多项式误差的证明相似, 我们给出如下的定理:

定理 5. *若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在 $2n + 2$ 阶导数, 则 $2n + 1$ 次 Hermite 插值多项式的余项为*

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!}\omega^2(x),$$

其中 $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \quad \xi \in (a, b)$.

§4 分段插值

高次插值 $P_n(x)$ 在区间两端出现激烈振荡, 带来数值不稳定, 越靠近端点处逼近效果越差. 增加插值多项式次数, 并不能总能提高插值精度. 于是我们考虑对于插值过程分段, 每一小段使用低次插值.

4.1. 分段线性插值. 分段线性插值的主要思路是：将区间分成若干个小区间，在每个小区间进行线性（或者低次）插值. 用连接相邻节点的折线逼近被插函数.

直观地说, 我们的任务是, 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}](i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 内做连接插值点 (x_i, y_i) 与 (x_{i+1}, y_{i+1}) 的直线. 譬如, 函数 S_1 在区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$ 的表达式为

$$S_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}y_i = l_{i-1}(x)y_{i-1} + l_i(x)y_i \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i);$$

函数 S_1 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内的表达式为

$$S_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}y_{i+1} = l_i(x)y_i + l_{i+1}(x)y_{i+1} \quad (x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}).$$

这里有重叠区间的重叠是因为他们的表达式是一样的.

下面我们来考察使用基函数的方法如何书写. 如果使用基函数, 那么 $S_1(x)$ 在插值区间 $[a.b]$ 内的表达式可以统一表示为

$$S_1(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i,$$

其中

$$l_i(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1}\le x\le x_i, i=1,2,\cdots,n\\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x_i\le x\le x_{i+1}, i=0,1,\cdots,n-1\\ 0 & x\in[a,b]\backslash[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}.$$

这个基函数只在 x_i 附近不为 0, 在其他地方均为 0. 这样的性质叫局部非零性. 当插值点有误差的时候, 局部非零性将误差控制在一个给定的区域内.

下面对它做误差估计. 由于 $[a,b]$ 区间内线性插值的误差可以被估计为

$$\begin{aligned}|R_1(x)|=|f(x)-P_1(x)|&=\frac{1}{2}|f''(\xi)\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)| \qquad ,\xi\in(a,b)\\ &\le\frac{1}{2}\max_{x\in(a,b)}|f''(x)||\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)|\end{aligned}$$

倘若对于我们插值的第 i 个小区间 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,2,\cdots,n)$ 应用这个式子, 便得到了

$$\begin{aligned}|R(x)|&=\frac{1}{2}\max_{x\in(x_i,x_{i+1})}|f''(x)||\left(x-x_0\right)\left(x_1-x\right)|\\ &\le\frac{1}{2}\max_{x\in(x_i,x_{i+1})}|f''(x)|\frac{((x-x_0)+(x_1-x))^2}{4} \quad (\text{这是因为}ab\le\frac{(a+b)^2}{4})\\ &=\frac{1}{2}\max_{x\in(x_i,x_{i+1})}|f''(x)|\frac{(x_1-x_0)^2}{4}\\ &=\underbrace{\max_{x\in(x_i,x_{i+1})}|f''(x)|}_{M}\frac{(x_1-x_0)^2}{8}\end{aligned}$$

综合考虑, 最大的误差应当取得这一些小区间中最大的那一个, 于是最后估计为

$$|R(x)|\le\max_{0\le i\le i-1}|R_i(x)|\le\max_{x\in(x_i,x_{i+1})}|f''(x)|\frac{(\max_{0\le i\le n-1}x_{i+1}-x_i)^2}{8}.$$

例 6. 已知函数 $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0,5]$ 上取如下的等距插值节点; 求区间上分段线性插值函数, 并利用它求出 $f(4.5)$ 的近似值.

测试信息: 可能出现在考试中的解答题中.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	0.5	0.2	0.1	0.05882	0.03846

对于第 i 分段区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的插值函数为 $P_1(x)=\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}=\frac{x_{i+1}-x}{1+x_i^2}+\frac{x-x_i}{1+x_{i+1}^2}$.

得到

$$P(x)=\begin{cases}-(x-1)+0.5x, & x\in[0,1]\\ -0.5(x-2)+0.2(x-1), & x\in[1,2]\\ -0.2(x-3)+0.1(x-2), & x\in[2,3]\\ -0.1(x-4)+0.05882(x-3), & x\in[3,4]\\ -0.05882(x-5)+0.03846(x-4), x\in[4,5] & x\in[4,5]\end{cases}$$

, 从而 $P(4.5)=-0.05882\times(4.5-5)+0.03846\times(4.5-4)=0.04864.$

注意：以下内容可以当做待定系数法的综合练习．考试中不考．

4.2. 样条函数插值． 高次插值函数可以保证曲线的光滑性, 但计算量大, 有剧烈振荡, 数值稳定性差；采用分段线性插值, 虽然计算简单, 但在分段点上仅连续而不光滑 (导数不连续), 这往往不能满足某些工程技术的高精度要求．如在船体、飞机等外形曲线的设计中, 不仅要求曲线连续, 而且要有二阶光滑度, 即有连续的二阶导数. 样条函数可以同时解决这两个问题, 使插值函数既是低阶分段函数, 又是光滑的函数.

具体来讲, 我们称下面曲线为样条函数.

定义 4. $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 处的函数值为 y_k, 则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的 m 次样条插值函数 $S(x)$ 满足:

1. $S(x_k)=y_k, k=0,1,\cdots,n$;
2. $S(x)$ 在 (a,b) 上 $m-1$ 阶导数连续;
3. 在区间 $[x_k,x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$ 上 $S(x)$ 是 m 次多项式.

在工程实践中, 令 $m=3$, 可以得到常用的三次样条函数．三次样条函数可以使用待定系数法求解; 但是计算量非常大．更加常见的办法是使用下面的方法求解.

由二阶导数连续, 设 $S''(x_k)=m_k(k=0,1,\cdots,n)$. m_k 是未知、待定的数．因为 $S(x)$ 是分段三次多项式, 则 $S''(x)$ 是分段一次多项式, 在每个区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 内,

$$S''(x)=\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}m_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}m_{k+1}$$

为了简便起见, 记 $h_k:=x_{k+1}-x_k$, 则

$$S''(x)=\frac{x_{k+1}-x}{h_k}m_k+\frac{x-x_k}{h_k}m_{k+1}$$

将上式在区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上积分两次, 并且由 $S(x_k)=y_k$, $S(x_{k+1})=y_{k+1}$ 来确定两个积分常数. 当 $x\in[x_k,x_{k+1}]$ 时,

$$S(x)=-\frac{(x-x_{k+1})^3}{6h_k}m_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}m_{k+1}-(y_k-\frac{h_k^2}{6}m_k)\frac{x-x_{k+1}}{h_k}+(y_{k+1}-\frac{h_k^2}{6}m_{k+1})\frac{x-x_k}{h_k}$$

利用 $S(x)$ 一阶导数连续的性质, 对上式求导, 得:

$$S'(x)=-\frac{(x-x_{k+1})^2}{2h_k}m_k+\frac{(x-x_k)^2}{2h_k}m_{k+1}-\frac{h_k}{6}(m_{k+1}-m_k)+\frac{1}{h_k}(y_{k+1}-y_k)$$

在上式中, 令 $x=x_k$, 得:

$$S'(x_k+0)=-\frac{h_k}{6}m_{k+1}-\frac{h_k}{3}m_k+\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}$$

将上式中的 k 换成 $k-1$, 得 $S'(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的表达式, 用 $x=x_k$ 代入,

$$S'(x_k-0)=\frac{h_{k-1}}{6}m_{k-1}+\frac{h_{k-1}}{3}m_k+\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}$$

而 $S'(x_k+0)=S'(x_k-0)$, 联立上述两式, 得到关于 m_k 的方程:

$$\frac{h_{k-1}}{6}m_{k-1}+\frac{h_k+h_{k-1}}{3}m_k+\frac{h_k}{6}m_{k+1}=\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

两边乘以 $\frac{6}{h_k+h_{k-1}}$, 得:

$$\frac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}}m_{k-1}+2m_k+\frac{h_k}{h_k+h_{k-1}}m_{k+1}=\frac{6}{h_k+h_{k-1}}\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right).$$

上式中, 等式左边含未知量 m_{k-1},m_k,m_{k+1}, 等式右边 y_{k-1} , y_k , y_{k+1} 是已知的, 令

$$\lambda_k=\frac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}},\quad \mu_k=\frac{h_k}{h_k+h_{k-1}}=1-\lambda_k,\quad C_k=\frac{6}{h_k+h_{k-1}}\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}\right)$$

则得:

$$\lambda_k m_{k-1}+2m_k+\mu_k m_{k+1}=C_k\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

这是含有 $n+1$ 个未知量 $m_0,m_1,\cdots,m_n$, 共有 $n-1$ 个方程组成的线性方程组. 欲确定方程的解, 尚缺 2 个方程. 因此, 求三次样条函数还要 2 个附加条件. 通常在区间端点 $a=x_0$, $b=x_n$ 上各加一个条件, 称为端点约束. 常用端点约束有三种类型.

1. 给定两端点 $f(x)$ 的一阶导数值: $S'(x_0)=S'(x_n)$
2. 给定两端点 $f(x)$ 的二阶导数值: $S''(x_0)=S''(x_n)$
3. 当 $f(x)$ 是以 (x_n,x_0) 为周期的函数时, 则要求 $S(x)$ 也是周期函数. 这时边界条件应满足当 $f(x_0)=f(x_n)$ 时, $S'(x_0)=S'(x_n);S''(x_0)=S''(x_n)$.

a) 第一类端点约束: 三转角方程 给出边界端点的一阶导数值:

$$S'(x_0)=y'_0\,,\quad S'(x_n)=y'_n。$$

利用前面已推导的公式,

当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时,

$$S'(x) = -\frac{(x-x_{k+1})^2}{2h_k}m_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k}m_{k+1} - \frac{h_k}{6}(m_{k+1}-m_k) + \frac{1}{h_k}(y_{k+1}-y_k)$$

取 $k=0$, $x=x_0$, 得:

$$y_0' = -\frac{h_0}{3}m_0 - \frac{h_0}{6}m_1 + \frac{y_1-y_0}{h_0}$$

取 $k=n-1$, $x=x_n$, 得:

$$y_n = \frac{h_{n-1}}{6}m_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3}m_n + \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

移项得

$$\begin{aligned} 2m_0+m_1 &= \frac{6}{h_0}\left(\frac{y_1-y_0}{h_0} - y_0'\right) = C_0 \\ m_{n-1}+2m_n &= \frac{6}{h_{n-1}}\left(y_n' - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) = C_n \end{aligned}$$

于是, 我们可以建立如下方程组; $\begin{cases} 2m_0+m_1=C_0 \\ \lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = C_1 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{n-1}m_{n-2} + 2m_{n-1} + \mu_{n-1}m_n = C_{n-1} \\ m_{n-1}+2m_n = C_n \end{cases}$

其系数矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是严格对角占优的三对角矩阵, 从而可以解出对应的 $m_0, m_1, \cdots, m_n$. 可以得到三次样条函数的分段表达式. 解得当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$的时候,$S(x) = -\frac{(x-x_{k+1})^3}{6h_k}m_k + \frac{(x-x_k)^3}{6h_k}m_{k+1} - (y_k - \frac{h_k^2}{6}m_k)\frac{x-x_{k+1}}{h_k} + (y_{k+1} - \frac{h_k^2}{6}m_{k+1})\frac{x-x_k}{h_k}$.

b) 第二类端点约束: 三弯矩方程 这种情况下, 附加条件为 $S''(x_0)=m_0, S''(x_n)=m_n$. 对应的方程组为

$$\begin{cases} 2m_1+\mu_1 m_2 & =C_1-\lambda_1 m_0 \\ \lambda_2 m_1+2m_2+\mu_2 m_3 & =C_2 \\ \lambda_3 m_2+2m_3+\mu_3 m_4 & =C_3 \\ \cdots\cdots & \\ \lambda_{n-2}m_{n-3}+2m_{n-2}+\mu_{n-2}m_{n-1} & =C_{n-2} \\ \lambda_{n-1}m_{n-2}+2m_{n-1}= & C_{n-1}-\mu_{n-1}m_n \end{cases}$$

其系数矩阵正好是 $\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix}$, 严格对角占优, 存在唯一解.

c) 第三类端点约束: 自然样条 第三类端点约束的条件为 $s'(x_0)=s'(x_n), \quad s''(x_0)=s''(x_n)$. 可以得到约束条件 $m_0=m_n, \lambda_n m_1+\mu_n m_{n-1}+2m_n=d_n$, 与剩余的方程联立可以得到

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}.$$

系数矩阵严格对角占优, 方程组存在唯一解.