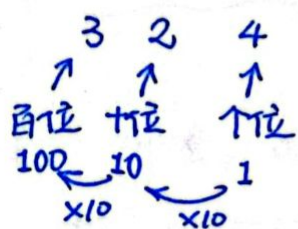


Section 2.0 进制位.

一、进制的基本原理.

引例:



十进制.



Def. 若一个在 k 进制下, 一串数码 $a_{n-1} \dots a_0$ 中的 a_i 表示 k^i . $a_{n-1} \dots a_0$ 表示数

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i k^i. \quad (a_i < k).$$

下面看若干初步的性质.

- 乘以 i 在 i 进制下表示为数左移 1 位, 末尾补 0. 除以 i (在 i 进制下) 表示右移 1 位, 舍去最低位.

如 ~~11245~~ $114514 \times 10 = 1145140$
 $114514 \div 10 = 11451$ (余 4).
 即 ~~多~~ 吸收 / 吐出了一个 k .

- 任意一个十进制整数在 k ($k > 1, k \in \mathbb{N}$) 进制中存在唯一表示.

证: 使用反证. 设 m 位 k 进制数 $a_1 \dots a_m$ 与 n 位 k 进制数 $b_1 \dots b_n$ 代表两个相同十进制数 ($a_1 \dots a_m$ 与 $b_1 \dots b_n$ 中至少有一位不同).

$$\text{那么 } x_1 = \sum_{i=0}^{m-1} a_i k^i, \quad x_2 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i k^i$$

若 ~~$a_0 > b_0$~~ $m > n$, $\Rightarrow x_1$ 中前 $m-n$ 项非零, 当它的系数 ~~大于~~ 不为 0 时, 必永远大于 x_2 . 矛盾

若 $m < n$, 同理

此证明了两者的位数是相等的。

下证其该表示数相等。

若 $a_1 > b_1$, 即使后面都为最大, 也挡不住 a_1 变大带来的影响。
(直线上)。

反之亦如此。

因而 $a_1 = b_1$. 同理, $a_2 = b_2, \dots$

$\Rightarrow \forall a_i = b_i$. 故 k 进制时表示为唯一的。

二、进制的转换

1. (十进制 \Rightarrow k) 过程: 整数部分除以 k 取余 . 将取得的余数倒序排列

如 $(11)_{10} \rightarrow (?)_2$.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 11} \\ 2 \overline{) 5} \dots 1 \uparrow \\ 2 \overline{) 2} \dots 1 \\ 2 \overline{) 1} \dots 0 \\ 0 \dots 1 \end{array} \quad \text{为 } \boxed{1011} .$$

(证明略). 数论多些

小数部分乘以 k 取整 . 不必倒序排列。

如 $(0.6)_{10} \rightarrow (?)_2$.

$$0.6 \times 2 = \boxed{1}.2$$

$$0.2 \times 2 = \boxed{0}.4$$

$$0.4 \times 2 = \boxed{0}.8$$

$$0.8 \times 2 = \boxed{1}.6$$

$$\frac{0.6 \times 2 = \boxed{1}.2}{0.6 \times 2 = \boxed{1}.2} \downarrow \text{循环}$$

$$(0.1001)_2 .$$

可以说明一定可以出现循环 (Euler 证明...)

2. 常用的进制及其符号

二进制

Binary

BIN

← 电脑用得最多

八进制

Octal

OCT

← 缩短长度

十进制

Decimal

DEC

← 日常用的多

十六进制

Hexadecimal

HEX

←

三、应当记忆的常见转换关系

1、2的幂次

2^5	2^{10}	2^{20}	2^{32}
32	1024	1048576	2147483647
	1K, 1M 间单位差	↓ 1M	INT_MAX

2、二进制转十六进制

A	C	E
1010	1100	1110

此时，若有二进制

$\underbrace{1010}_A$ $\underbrace{0110}_{4+2=6}$ $\underbrace{1100}_C$ $\underbrace{1101}_{C+1=D}$ $\underbrace{1111}_F$ $\underbrace{0001}_1$

4位1组分组填入即可。