§ 2.2 多重和式

1. 引例与启发性讨论、交换次序

例1. 考虑 $\sum\limits_{1\le j,k\le 3} a_j b_k = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$.

其中 j,k 是两个指标. 如果 $P(j,k)$ 是关于 j 和 k 的性质,

那么 $\sum\limits_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum a_{j,k}[P(j,k)]$. 有时亦写作 $\sum\limits_j\left(\sum\limits_k a_{j,k}[P(j,k)]\right)$.

可以简写作 $\sum\limits_j \sum\limits_k a_{j,k}[P(j,k)]$.

命题1. $\sum\limits_j \sum\limits_k a_{j,k}[P(j,k)] = \sum\limits_k \sum\limits_j a_{j,k}[P(j,k)]$. 当$k$中不依赖$j$表示时.（因为有交换律）.

例2.

$$\sum_{1\le j\le 2}\sum_{1\le k\le 2} a_{j,k} = a_{1,1}+a_{1,2}+a_{2,1}+a_{2,2}$$
$$= a_{1,1}+a_{2,1}+a_{1,2}+a_{2,2} = \sum_{1\le k\le 2}\sum_{1\le j\le 2} a_{j,k}.$$

命题2.（一般分配律）对于任意的整数集 J, K, 有

$$\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_j b_k = \left(\sum_{j\in J} a_j\right)\left(\sum_{k\in K} b_k\right).$$

[注]. 这里的 j 或 k 不能依赖对方.

证明: $\left(\sum\limits_{j\in J} a_j\right)\left(\sum\limits_{k\in K} b_k\right) = \sum\limits_j a_j[j\in J] \sum\limits_{k} b_k[k\in K]$

$$= \sum_j a_j[j\in J]\left(\sum_k b_k[k\in K]\right)$$

$$\underset{\text{j与k独立}}{=} \sum_j\sum_k a_jb_k[j\in J][k\in K]$$

$$= \sum_j\sum_k a_jb_k[j\in J,\ k\in K].$$

□

例3. $\sum\limits_{1\le j,k\le 3} a_j b_k = \left(\sum\limits_{j=1}^{3} a_j\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{3} b_k\right)$. 再次注意这里 k 的取值构成什么集合与 j 无关.

与上例相对，$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{m} f(i,j)$ 就无法使用此式. 因为"$i\le j\le m$"表示什么集合与 i 的值有关.

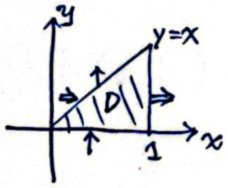
命题3. 对于 $\underbrace{\text{集合}}_{\text{互相依赖的}}$ J，$K(j)$，$j\in J$.

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k\in K'}\sum_{j\in J'(k)} a_{j,k},$$

满足 $[j\in J][k\in K(j)] = [k\in K'][j\in J'(k)]$.

◁ 仿照命题2即可证得 ▷.

[注] 将其与"更改二重积分次序联系起来".



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy \quad (\text{从下向上})$$
$$= \int_0^1 dy\int_x^1 f(x,y)\,dx. \quad (\text{从左向右})$$

其道理之意味为保证原来计算的每一项都不重不漏地求和了.

推论4. $[1\le j\le n][1\le k\le n] = [1\le j\le k\le n]$
$= [1\le k\le n][1\le j\le k]$.

例4.
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}.$$

很像上述二重积分之情形.

例5. 给出矩阵 $\begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_na_1 & & & a_na_n \end{bmatrix}$，求 $S_{\triangledown} = \sum\limits_{1\le j\le k\le n} a_ja_k$.

由于该矩阵是对称的，即 $a_ia_j = a_ja_i$. $S_{\triangledown} \approx \frac{1}{2}S_{\square}$.

那么 $S_{\triangledown} = \sum\limits_{1\le j\le k\le n} a_ja_k = \sum\limits_{1\le j\le k\le n} a_ka_j \xlongequal{\text{对换}j,k} \sum\limits_{1\le k\le j\le n} a_ja_k = S_{\triangle}$

由于 $[1\le j\le k\le n] + [1\le k\le j\le n] = [1\le j,k\le n] + [1\le j=k\le n]$.

（用到了 $[k\in K'] + [k\in K] = [k\in(K\cap K')] + [k\in(K\cup K')]$.）

所以 $2S_{\triangledown} = S_{\triangledown} + S_{\triangle} = \sum\limits_{1\le i,k\le n} a_ja_k + \sum\limits_{1\le j=k\le n} a_ja_k$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

那么 $S_{\triangledown} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)$.

例6. 求和. $S = \sum\limits_{1\le j<k\le n} (a_k-a_j)(b_k-b_j)$

注意到 i,j 的对称性，将 i,j 对换得.

$$S = \sum_{1\le k<j\le n} (a_j-a_k)(b_j-b_k) = \sum_{1\le k<j\le n} (a_k-a_j)(b_k-b_j)$$

由于 $[1\le j<k\le n] + [1\le k<j\le n] = [1\le j,k\le n] - [1\le j=k\le n]$

因此

$$2S = \sum_{1\le j,k\le n} (a_j-a_k)(b_j-b_k) - \sum_{1\le j=k\le n} (a_j-a_k)(b_j-b_k).$$

$$= \sum_{1\le j,k\le n} (a_j-a_k)(b_j-b_k) - 0.$$

$$= \boxed{\sum_{1\le j,k\le n} a_jb_j} - \sum_{1\le j,k\le n} a_jb_k - \sum_{1\le j,k\le n} a_kb_j + \boxed{\sum_{1\le j,k\le n} a_kb_k}$$

$$= \boxed{2n\sum_{1\le k\le n} a_kb_k} - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

$$S = n\sum_{1\le k\le n} a_kb_k - \cancel{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

我们便得到

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1\le j<k\le n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)$$

这是 Chebyshev 单调不等式的特例.

· 若 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$ ，$b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \le n\sum_{i=1}^{n} a_k b_k$$

，反之亦然.

2、与一重求和中第三条的联系.

回顾在 §2.1 中求和性质的第3条 $\left(\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}\right.$，$p(k)$ 是一个原集合的排列$\left.\right)$. 如果现在将 k 换作 $f(j)$ （f 是一个 $J\to K$ 的映射），那么 $\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{k\in K} a_k \, \# f^{-}(k)$.

其中，$f^{-}(k)=\{j \mid f(j)=k\}$ ，$\# S$ 表示集合 S 中元素的个数.

通俗表达：对 $j\in J$，$f(j)=k$ 的数量.

~~例7.~~

证明：
$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_k\,[f(j)=k] = \sum_{k\in K} a_k \sum_{j\in J}[f(j)=k]$$
$$= \sum_{k\in K} a_k \,\# f^{-}(k).$$

例7. 若 f 是一个一对一的函数，那么 $\# f^{-}(k)=1$，即变为

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{f(j)\in K} a_{f(j)}\cdot 1 = \sum_{k\in K} a_k.$$

例8. 求和 $S_n = \sum\limits_{1 \le j < k \le n} \frac{1}{k-j}$

$$S_n = \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le j < k} \frac{1}{k-j}$$

$$\overset{j:=k-j}{=\!=} \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le k-j < k} \frac{1}{j}$$

$$= \sum_{1 \le j \le n} \sum_{0 < j \le k-1} \frac{1}{j}$$

$$= \sum_{1 \le k \le n} H_{k-1}$$

$$\overset{k:=k+1}{=\!=} \sum_{0 \le k < n} H_k$$

$$S_n = \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j < k < n} \frac{1}{k-j}$$

$$\overset{k=k+j}{=\!=} \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j < k+j < n} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{1 \le j \le n} \sum_{0 < k \le n-j} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{1 \le j \le n} H_{n-j}$$

$$\overset{j:=n-j}{=\!=} \sum_{0 \le j < n} H_j$$

另一种方式：

$$S_n = \sum_{1 \le j < k \le n} \frac{1}{k-j} \overset{k:=k+j}{=\!=} \sum_{1 \le j \le k+j \le n} \frac{1}{k} = \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le j \le n-k} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{1 \le k \le n} \frac{n-k}{k} = \sum_{1 \le k \le n} \frac{n}{k} - \sum_{1 \le k \le n} 1$$

$$= n\left(\sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k}\right) - n = nH_k - n.$$

即 $\sum\limits_{0 \le k < n} H_k = nH_n - n$. $\longrightarrow$

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$j=1$		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$j=2$			1	$\frac{1}{2}$
$j=3$				1
$j=4$				