## § 2.3 差分与微分、求和与积分.

本节的目标是可否有一种记号，使得我们可以用类似于积分的方式记录求和？是否有像不定积分那样引申出"不定求和"？

### 1. 回忆：微分与差分.

在《数学分析》中定义：$\mathcal{D}f(x)=\dfrac{df(x)}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

定义 1.（差分）对于一个数列，定义其差分算子 $\Delta f(x)$ 为

$$\Delta f(x) := f(x+1)-f(x).$$

[注] 1° 此为《微分》定义中 $h$ 取 1 的特例.

2° 算子作用在函数上，给出新的函数（本质就是映射） $\mathbb{P}[x]_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{P}[x]_n$

例1.

回忆 $\mathcal{D}x^m = mx^{m-1}$，$m$ 是给定的数，$x$ 是变元.

求 ~~$\Delta x^m$~~. $\Delta x^3=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

这表明 $\Delta$ 算子并不像 $\mathcal{D}$ 算子那样有足够好的在幂函数上作用的性质.

例2. 试求 $\Delta(\underbrace{x(x-1)\cdots(x-m+1)}_{m项})$

$$= (x+1)x\cdots(x-m+2) - x(x-1)\cdots(x-m+1)$$

$$= m\underbrace{x(x-1)\cdots(x-m+2)}_{m-1项}$$

说明 $\Delta$ 算子在 $\underbrace{x(x-1)\cdots(x-m+1)}_{m项}$ 作用有与 $\mathcal{D}$ 在 $x^m$ 上作用有类似的效果.

定义 2.（下降幂）. 定义 $\underbrace{x(x-1)\cdots(x-m+1)}_{m项}$ 为 $x$ 的 $m$ 次下降幂.

记作 $x^{\underline{m}}$.

由上例可知，$\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$.（命题 1）.

我们发现，$\mathscr{D}$ 有逆运算 $\int$.（意味着 $\cancel{\mathscr{D}\circ\int} = \int\circ\mathscr{D} = \underset{\text{什么都不做.}}{\underset{\uparrow}{\mathrm{id}}}$ ）

即 $g(x) = \mathscr{D}f(x) \iff \int g(x)\,dx = f(x) + C$.

定理 2、 $g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x)\,\delta x = f(x) + C$.

这里 $\sum g(x)\delta x$ 是 $g(x)$ 的不定和式，是其差分等于 $g(x)$ 的函数类.

其中 $C$ 是满足 $p(x+1) = p(x)$ 的任一函数 $p(x)$.

证明按定义即可，略.

正如无限微积分有定积分，有限和式也可以变为"定和式"的东西，

回忆 $$\int_a^b g(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a).$$

定~~理~~义 3.（定和式） $\sum_a^b g(x)\,\delta x = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$.

如果 $g(x) = \Delta f(x)$.

实际上，$\sum_a^b g(x)\,\delta x = \sum\limits_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum\limits_{a\le k<b} g(k)$. 我们证明这一事实.（命题3.）

◁ 若 $b=a$，$\sum_a^a g(x)\,\delta x = f(a) - f(a) = 0$；

若 $b := a+1$，$\sum_a^b g(x)\,\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a)$.

若 $b := b+1$，

$$\begin{aligned}\sum_a^{b+1} g(x)\,\delta x - \sum_a^b g(x)\,\delta x &= \big(f(b+1) - f(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big) \\ &= f(b+1) - f(b) = g(b).\end{aligned}$$

依数学归纳法可知. ▷

◁ 另证：
$$\begin{aligned}\sum_{a\le k<b} f(k+1) - f(k) &= \big(f(a-1) - f(a)\big) + \big(f(a+2) - f(a+1)\big) + \cdots \\ &\quad + \big(f(b) - f(b-1)\big) \\ &= f(b) - f(a).\ \triangleright\end{aligned}$$

命题 4. $\sum_a^b g(x)\,\delta x = -\sum_b^a g(x)\,\delta x$.

◁ $f(b) - f(a) = -\big(f(a) - f(b)\big) = -\sum_b^a g(x)\,\delta x$. ▷

命题 5. $\sum_a^b g(x)\,\delta x + \sum_b^c g(x)\,\delta x = \sum_a^c g(x)\,\delta x$.

2、降来的好处：有限微积分

a) 下降幂　下面给 $m<0$ 时下降幂给出定义，观察

$$x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2)$$

$$x^{\underline{2}} = x(x-1)$$

$$x^{\underline{1}} = x$$

$$x^{\underline{0}} = 1$$

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

除以 $x-2$

除以 $x-1$

除以 $x$

除以 $x+1$

除以 $x+2$.

定义 2'（下降幂）$m>0$, $x^{\underline{-m}} = \dfrac{1}{(x+1)\cdots(x+m)}$.

这样定义仍会保持许多已有的性质.

命题 6.（下降幂之性质）.

$$\forall m, n \in \mathbb{Z},\quad x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}\, x^{\underline{n}}.$$

◁ 依照定义展开即可 ▷.

命题 7.（下降幂满足差分特性）. 若 $m>0$, $\Delta x^{\underline{-m}} = -m x^{\underline{-m-1}}$.

◁ 亦依定义展开通分即可 ▷.

由此可得

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \left[\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right]_a^b \qquad m\neq -1. \quad \text{（命题 8）}.$$

b) 调和级数. 如命题 8，若 $m=-1$, $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x$

若 $x\in\mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x} = H_n$.

所以

命题 8、

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right]_a^b, & m\neq -1 \\[2ex] \left[H_x\right]_a^b, & m = 1 \end{cases}.$$

c) 指数函数的类似物. 由 $De^x = e^x$，找一个 $\Delta f(x) = f(x)$.

即 $f(x+1) - f(x) = f(x) \iff f(x+1) = 2f(x)$，即

$f(x) = 2^x$.

对于 $\Delta c^x = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x$. 若 $c \neq 1$，那

命题 9. $\displaystyle\sum_{a\leq k<b} = \sum\nolimits_a^b c^x \delta x = \left[\frac{c^x}{c-1}\right]_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1}$.

(等比数列求和).

d) 差分表

| $\boxed{f} = \boxed{\Sigma}\, g$ | $\boxed{\Delta f} = g$. |
|---|---|
| $x^{\underline{m}}$ | $mx^{\underline{m-1}}$ |
| $2^x$ | $2^x$ |
| $c^x$ | $(c-1)c^x$ |
| $c \cdot u$ | $c \cdot \Delta u$ |
| $u + v$ | $\Delta u + \Delta v$ |
| $uv$ | $u\Delta v + Ev\Delta u$ ← 见下文. |

注：离散的情形没有复合函数求导很好的对应物.

3. 分部求和法

注意到 
$$\begin{aligned}\Delta(u(x)v(x)) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) \\ &\qquad + u(x)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= u(x)\Delta v(x) + \underline{\underline{v(x+1)}}\Delta u(x)\end{aligned}$$

若定义 $Ef(x) = f(x+1)$，那么

$$\Delta(uv) = u\Delta v + (Ev)\Delta u. \qquad \text{(定义 4)}$$

此时. 对两边取 $\Sigma$，即

$$\sum u\Delta v = uv - \sum (Ev)\Delta u. \qquad \text{(定理9)}.$$

[注]. $\Delta(uv) = u\Delta v + Ev\Delta u$

$= Eu\Delta v + v\Delta u$，两种形式均正确. 因而左右对称.

例1. 仿照 $\int xe^x dx$，求 $\sum x2^x \delta x$

记得平移1

$$\sum x 2^x \delta x = \sum x\,\delta(2^x) = x2^x - \sum 2^{\boxed{x+1}}\delta x$$

$$= x2^x - 2^{x+1} + C.$$

则 $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k = \sum_0^{n+1} x2^x \delta x = \left[x2^x - 2^{x+1}\right]_0^{n+1}$

$$= (n-1)2^{n+1} + 2.$$

例2. 仿照 $\int x\ln x\,dx$，求 $\sum kH_k \delta k$.

$$\sum x H_x \delta x = \sum H_x\, \delta\left(\frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)$$

$$= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2} x^{\underline{-1}} \delta x$$

$$= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{\underline{1}} \delta x$$

$$= \frac{x^{2}}{2}H_x - \frac{x^{2}}{4} + C.$$

那 $\sum\limits_{0\le k<n} kH_k = \left[\frac{x^2}{2}H_x - \frac{x^2}{4} + C\right]_0^n = \frac{n^{\underline{2}}}{2}\left(H_n - \frac{1}{2}\right).$