§2.1 和式及其基本操作.

要使得求和便于书写，最好引入如下的记号.

1. 和式与求和记号

记号 1. (和式 Σ) 对于一个可数的集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，求和实际上是~~表达了~~把这些集合的元素在某一函数 ($f: S\to \mathbb{P}$) 作用下的值加起来. 如 记作 $\sum_{i\in S} f(i)$；表示 $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_n)+\cdots$.

例子 1. a) $\sum_{1\le k\le n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$.

b) $\sum_{\substack{1\le k\le 100 \\ k \text{ odd}}} k^2 = \sum_{0\le k\le 49} (2k+1)^2$.

a) 换元法. 如果将 $\sum_{i\in S} f(i)$ 换为 $\sum_{k\in S} f(k)$，求和的表示内容将不变. 因为仅仅是"当前 S 中的代表"用来表示的字母不同，从而肯定不会影响整个映射 f 所表达的意思.

例子 2. $\sum_{1\le k\le n} a_k \overset{k代为s+1}{=\!=\!=} \sum_{1\le s+1\le n} a_{s+1} \overset{s代为k}{=\!=\!=} \sum_{1\le k+1\le n} a_{k+1}$

注：有时 $\sum_{a\le i\le b} f(i)$ 亦写作 $\sum_{i=a}^{b} f(i)$. 但将看到在作变量代换后将变为 $\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{i代为i+1}{=\!=\!=} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$. 更易于出错.

b) 求和的性质. 尽管求和无限项是可行的，但为了方便起见，先介绍求和有限项的情形.

定理 1. 令 K 是某有限个整数的集合. 我们有如下的三条规则.

- $\sum_{k\in K} c\cancel{a}f(k) = c\sum_{k\in K} f(k)$
- $\sum_{k\in K} f(k)+g(k) = \sum_{k\in K} f(k) + \sum_{k\in K} g(k)$.
- 若 $p(k)$ 应用于 K 中的每一个元素组成的集合依然是

K 的一个排列，那么 $\sum\limits_{k\in K} af(k) = \sum\limits_{p(k)\in K} f(p(k))$.

◁ 证明：由求和记号的定义可立刻得到. ▷

例子3.(2) 如 $K=\{-1,0,1\}$，$p(k)=-k$，由于 $p(-1)=1$，$p(0)=0$，$p(1)=-1$，p 对 K 中每一个元素构成集合为 $\{-1,0,1\}=K$.

例子4. 算术级数（等差数列之求和）：求 $S=\sum\limits_{0\le k\le n}(a+bk)$ 之值.

$$S_2=\sum_{0\le k\le n}(a+bk)$$

$$\overset{k代为n-k}{=\!=\!=}\sum_{0\le n-k\le n}(a+b(n-k))=\sum_{0\le k\le n}(a+bn-bk)$$

令 $S+S_2$ 得

$$S+S_2=2S=\sum_{0\le k\le n}(a+bk)+\sum_{0\le k\le n}(a+bn-bk)$$

$$=\sum_{0\le k\le n}(2a+bn)=(2a+bn)\sum_{0\le k\le n}1=(2a+bn)(n+1)$$

那 $S=\dfrac{(n+1)(2a+bn)}{2}$.

2、Iverson 括号

记号2.（Iverson 括号）假设 P 是一个命题，则定义

$$[P]=\begin{cases}1, & 命题 P 是真\\ 0, & 命题 P 是假.\end{cases}$$

这样的记号便于优化很复杂的求和记号，并且可将下标的变换转为命题间的操作.

例子5. 求和式 $\sum\limits_{0\le k\le n} k$ 可被改写为 $\sum\limits_{k} k\,[0\le k\le n]$.

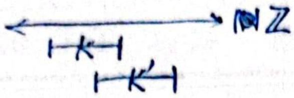
如果 k 未指定限定条件，我们认为 $k\in\mathbb{Z}$.

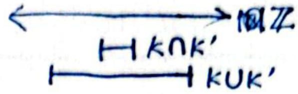
即 $\sum\limits_{k} k\,[0\le k\le n]=\cdots+(-3\cdot 0)+(-2\cdot 0)+(-1\cdot 0)+(0\cdot 0)+(1\cdot 1)+(2\cdot 1)+\cdots+(n\cdot 1)$

$$=(0\cdot 1)+(1\cdot 1)+\cdots+(n\cdot 1).$$

例子6. 如果 K 与 K' 是两个整数集合，那么 $\forall k$，

$$[k\in K]+[k\in K'] = [k\in(K\cap K')]+[k\in(K\cup K')].$$





由此可以导出对应的和式

$$\sum_{\substack{\cancel{k\in K'}\\ k\in K}} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cap K'} a_k + \sum_{k\in K\cup K'} a_k .$$

命题2. $[k\in K]+[k\in K'] = [k\in(K\cap K')]+[k\in(K\cup K')]$

对 K, K' 是整数集，$\forall k$.

◁ 上面已经证明过了 ▷.

3. 常见的求和方法.

a) 成套方法（类似于微分方程的先求特解，再求通解，…）.

b) 扰动法.

$$S_n=\sum_{0\le k\le n} a_k$$

重写 S_{n+1}，用两种方式.

(命题3.)

$$\boxed{S_n + a_{n+1}} = \sum_{0\le k\le n+1} a_k = a_0 + \sum_{1\le k\le n+1} a_k$$

$$\overset{k:=k+1}{=\!=\!=} a_0+\sum_{1\le k+1\le n+1} a_k$$

$$\boxed{= a_0+\sum_{0\le k\le n} a_k}$$

例子7. 几何级数（等比数列）. $S_n=\sum_{0\le k\le n} ax^k$.

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0\le k\le n} ax^{k+1}$$

$$= ax^0 + x\boxed{\sum_{0\le k\le n} ax^k}$$

$$= ax^0 + xS_n$$

对 $x\ne 1$，有

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} ax^k = \frac{a-ax^{n+1}}{1-x}.$$

例子8.（等差乘等比） $S_n = \sum_{0\le k\le n} k\cdot 2^k$

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 0+\sum_{0\le k\le n}(k+1)2^{k+1}$$

$$= 0+\sum_{0\le k\le n} k\cdot 2^{k+1} + \sum_{0\le k\le n} 2^{k+1}$$

$$= 2S_n + 2^{n+2}-2$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{0\le k\le n} k\,2^k = (n-1)2^{n+1}+2.$$

例子9. $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n-1}}{1-x}$ ，两边对 x 求导，就有

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n)+1-x^{n+1}}{(1-x^2)}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

这个等式也是成立的.

c) 求和因子.

例子10. 由递归关系 $T_0 = 0$

$T_n = 2T_{n-1}+1$ ，

倘若同除 2^n，即得

$T_0/2^0 = 0$

$T_n/2^n = T_{n-1}/2^{n-1} + 1/2^n$. 令 $S = T_n/2^n$，得

$S_0 = 0$

$S_n = S_{n-1}+2^{-n}$ ，即 $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ ，为一等比数列.

对于更为一般的式子，如 $a_nT_n = b_nT_{n-1}+c_n$ ，可变为

$S_n = S_{n-1} + s_nc_n$ 之形式.

1° 方法：使两边同乘<u>求和因子</u> S_n，

$$\underbrace{\boxed{S_n a_n T_n}}_{=\,S_n} = S_n b_n T_{n-1} + S_n c_n$$

↓ 寻找 S_n 使得：$S_n b_n T_{n-1} = S_{n-1} a_{n-1} T_{n-1}$ (*)

$$\underbrace{S_{n-1} a_{n-1} T_{n-1}}_{=\,S_{n-1}}$$

由此 $S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k = s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k$，那么

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right).$$

2° 寻找 s_n 的方法：由 (*) 知 $s_n = \frac{s_{n-1} a_{n-1}}{b_n}$

$$= \frac{s_{n-2} a_{n-1} a_{n-2}}{b_n b_{n-1}} = \cdots$$

$$= \frac{a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1}{b_n b_{n-1} \cdots b_2}. \qquad \text{(命题4)}.$$

例子11. 解 由快速排序带来的递归式.

$$C_0 = 0$$
$$C_n = n+1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad , n>0.$$

将 C_n 两侧同乘以 n，得 $nC_n = n^2 + n + 2\sum_{k=0}^{n} C_k \quad (n>0) \quad (1)$

令 $n := n-1$，有 $(n-1)C_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \quad (n-1>0) \quad (2)$

用 (2)-(1) 得 $nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}$

即

$$C_0 = 0$$
$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n.$$

将上述 $a_n = n$，$b_n = n+1$，$c_n = 2n$，得 $s = \frac{(n-1)\cdots 1}{(n+1)\cdots 3} = \frac{2}{n(n+1)}$.

得 $C_n = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = 2(n+1)H_{n+1}$.