Section 3.2 定点数的乘法运算

一、一位乘法运算

1、一位原码乘法： $[x]_原 = x_0.x_1x_2\cdots x_n$

$[y]_原 = y_1.y_2y_3\cdots y_n$

- 符号确定 $P_0 = x_0 \oplus y_0$.
- 求积数值 $|P| = |x| \times |y|$

回顾(小学) $32 \times 17 = ?$ →

$$
\begin{array}{r}
32 \\
\times\ 17 \\
\hline
224 \\
32 \\
\hline
544
\end{array}
$$

类比至二进制：设 $x=1101$, $y=-1011$.

$$
\begin{array}{rl}
0.1101 & x \\
\times\ 0.1011 & y \\
\hline
1101 & \rightarrow y_4 \times |x| \times 2^{-4} \\
1101 & \\
0000 & \\
1101 & \\
\hline
0.\underbrace{10001111}_{8位} &
\end{array}
$$

- 把y的每一位按权值乘上被乘数 $|x|$，得到 $y_i|x| \times 2^{-i}$.
- 再累加求和：$|P| = \sum_{i=1}^{n}(y_i|x| \times 2^{-i})$

形式 $|P| = \sum_{i=1}^{n}(y_i|x| \times 2^{-i})$

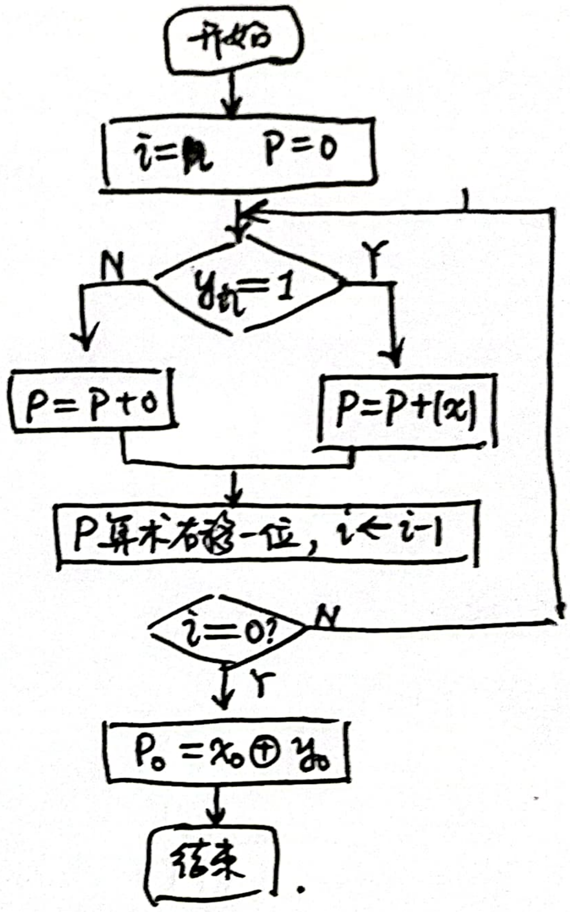
$$= 2^{-1}y_1|x| + 2^{-2}y_2|x| + \cdots + 2^{-n}y_n|x|$$

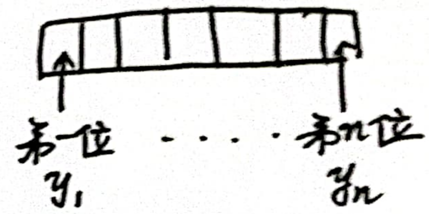
$$= \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(0+y_n|x|)2^{-1}}_{P_1} + y_{n-1}|x|)2^{-1}}_{P_2} + y_{n-2}|x|)2^{-1}}_{P_3} + \cdots + y_1|x|)\cdot 2^{-1}}_{P_n}.$$

有递归的形式 $\underset{\substack{\uparrow \\ 3\ 得到这个值.}}{P_{i+1}} = (\underbrace{P_i + y_{n-i}|x|}_{1\ 先算这个})\underset{\substack{\nwarrow \\ 2\ 移位}}{2^{-1}}$

好处：$2n$ 位长度的加法器 → n 位加法器.

P71 图 Suggest Change





例1. 已知 $x=0.1101$，$y=-0.1011$，用原码一位乘法求 $x\times y$.

部分积	乘数 |y|	
00.0000	1011	
+00.1011		
00.1011	1011	
→ 00.0110	1101	(右移)
+00.1101		
01.0011	1101	
→ 00.1001	1110	
+ 0.0000		
00.1001	1110	
~~→ 00.0100~~	~~1111~~	
~~01.0001~~	~~1111~~	
~~→ 00.1000~~	~~1111~~	

故 $[x\times y]_原 = 1.10001111$　　(71页例3.10 倒~~[illegible]~~)

→ 00.0100	1111	
+00.1101		
01.0001	1111	
→ 00.1001	1111	→ 结果

2*、补码乘法(一位)

将(1)中的乘法更改为补码。由于较复杂，使用例子说明之。

假设 M 需乘 00111110，即

M × 00111110 . 考虑被包起来的1.

$$M \times \boxed{0|0|1|1|1|1|1|0} = M \times (2^5+2^4+2^3+2^2+2^1)$$

$$= M \times \boxed{0|1|0|0|0|0|-1|0} = M \times (2^6-2^1)$$

$$= M \times 62 .$$

这表明了连续块的1可以拆为2块相减，即

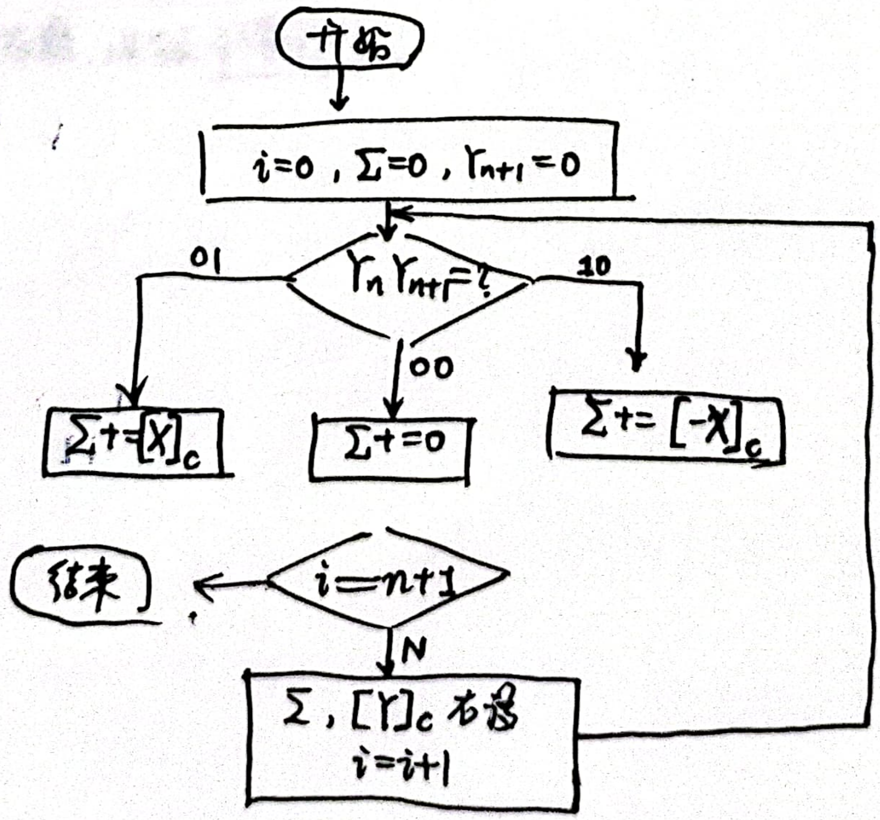
$$(0\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{n}0\cdots0)_2 = (\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{n}0\cdots)_2 - (\cdots0\underbrace{0\cdots1}_{n}0\cdots)_2 .$$

二、溢出判断

signed: 高n位全0/全1 ✓ 不溢出

unsigned: 全0 ✓ 不溢出

2* (Booth's algorithm)



2* 例18. 若 $[x]_c = 0.1101$，$[y]_c = 1.1101$，求 $[x]_c \times [y]_c$

知 $[-x]_c = 1.0011$

```
   00.0000
 + 11.0011            1.11010  ← 补上的0
 ----------------------------------
   11.0011                                   注意!
 → 11.10011           ~~1.1101~~ .11101
 + 00.1101
 ----------------------------------
   00.01101
 → 00.001101               .1110
 + 11.0011
 ----------------------------------
   11.011001
 → 11.1011001              .11
 + 00.0000
 ----------------------------------
   11.1011001
 → 11.11011001             结束
   最终.
```

$Y_{n+1}Y_n$ 决定累加值. $\Sigma += (Y_{n+1} - Y_n)[x]_c$.

算术右移，进位不带符号.