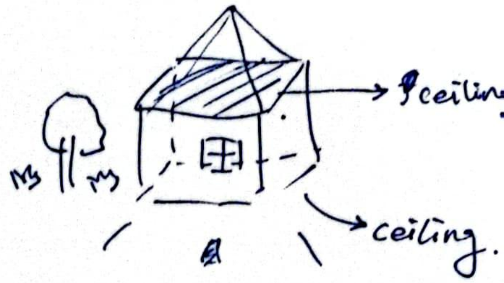
§3.1 下取整(floor)和上取整(ceiling)



1. 上取整和下取整.

Def 1. $\forall x\in\mathbb{R}$，定义 $\lfloor\cdot\rfloor$，$\lceil\cdot\rceil$ 函数

$\lfloor x\rfloor :=$ 最大的 $\leqslant x$ 的整数；

$\lceil x\rceil :=$ 最小的 $\geqslant x$ 的整数.

分别称它们为"上取整函数"、"下取整函数".

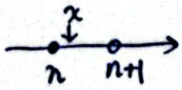
例子1. 绘制出 $\lfloor x\rfloor$ 与 $\lceil x\rceil$ 的图像.

性质1. 1° $\lfloor x\rfloor = x \iff x$ 是整数 $\iff \lceil x\rceil = x$.

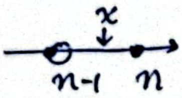
2° (放缩) $x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil < x+1$.

3° (对称) $\lfloor -x\rfloor = -\lceil x\rceil$，$\lceil -x\rceil = -\lfloor x\rfloor$.

性质2.



$\lfloor x\rfloor = n \begin{cases} \iff & x-1 < n \leqslant x \quad (\text{固定 } x \text{ 考察 } n \text{ 的范围}) \\ \iff & n \leqslant x < n+1 \quad (\text{固定 } n \text{ 考察 } x \text{ 的范围}) \end{cases}$



$\lceil x\rceil = n \begin{cases} \iff & x \leqslant n < x+1 \quad (\ \cdots\ ) \\ \iff & n-1 < x \leqslant n. \quad (\ \cdots\ ) \end{cases}$

推论3. 若 $n\in\mathbb{Z}$，$\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$.

[注] 我们经常用此性质将整数(也许是很复杂的)移出 $\lfloor\ \rfloor$ 中.

性质4. $x<n \iff \lfloor x\rfloor < n$ ； $n<x \iff n<\lceil x\rceil$.

$\boxed{x\leqslant n \iff \lceil x\rceil \leqslant n \quad ; \quad n\leqslant x \iff n\leqslant \lfloor x\rfloor.}$

[注] 可以分2类讨论之. (重要)!

Def 2、(分数部分) 定义一个数的分数部分为 $x-\lfloor x\rfloor$，

记作 $\{x\}$，在不与仅有一个集合的元素混淆时.

例1. $\lfloor x+y\rfloor$ 是否永远等于 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$？

不一定. 将 $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$，$y=\lfloor y\rfloor+\{y\}$.

$$\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor\{x\}+\{y\}\rfloor$$

iff $\{x\}+\{y\}<1$ 时，$\cancel{\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor}=\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$

否则由于 $0\le\{x\}+\{y\}<2$，其为 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$.

2. 上取整、下取整的复合. 首先由一些基本例子得出一些结果

例2、$\lceil\lfloor x\rfloor\rceil=\lfloor x\rfloor$；$\lfloor\lceil x\rceil\rfloor=\lceil x\rceil$，因为 $\lceil\ \rceil$，$\lfloor\ \rfloor$ 在整数上作用是平凡的.

例3. 证明或推翻 $\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor=\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

举反例：π、e、$\varnothing$、1，2… 可能正确？

目标：想办法除去 $\sqrt{\ }$ 下的"$\lfloor\ \rfloor$".

假设 $m:=\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\rfloor$，~~那么 $\sqrt{\lfloor x\rfloor}-1<m\le\sqrt{\lfloor x\rfloor}$~~

$$\boxed{\underbrace{\sqrt{\lfloor x\rfloor}-1}_{\text{平方太繁}}<m\le\sqrt{\lfloor x\rfloor}}\ \times$$

看 m 的范围：$m\le\sqrt{\lfloor x\rfloor}<m+1$

$\Rightarrow$ $m^2\le\lfloor x\rfloor<(m+1)^2$

$\xRightarrow{\text{性质4}}$ $m^2\le x<(m+1)^2$. $\xRightarrow{\text{取}\sqrt{\ }}$ $m\le\sqrt{x}<(m+1)^2$

$\xRightarrow{\text{性质4}}$ $m\le\lfloor\sqrt{x}\rfloor<(m+1)^2$.

考虑泛化例3.

定理5、令 $f(x)$ 为一个连续、单调递增的函数，满足

$$f(x) \text{ 是整数} \Rightarrow x \text{ 是整数}.$$

则有 $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$ ，$\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.

当 $f(x)$，$f(\lfloor x \rfloor)$，$f(\lceil x \rceil)$ 有意义时.

证明：分类讨论.

1° 若 x 是整数，显然成立.

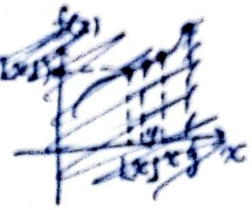
2° 若 $x > \lfloor x \rfloor$，由 f 是单增的，$f(x) > f(\lfloor x \rfloor)$.

两端同时取"$\lfloor\ \rfloor$"，有 $\lfloor f(x) \rfloor \geq \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$.（由 $\lfloor\ \rfloor$ 不减）

分类讨论

a) 若 $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$，即是想要的. 下证另一种情形不成立

b) 若 $\lfloor f(x) \rfloor > \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$， ~~一定存在y使得~~

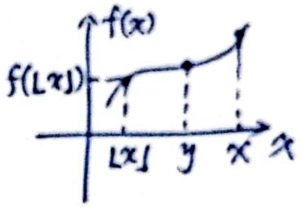


由于 f 是一个连续的函数，一定存在 y，

满足 $\lfloor x \rfloor \leq y < x$，且 $f(y) = \lceil f(\lfloor x \rfloor) \rceil$

由 f 的性质，y 是整数. 但 $\lfloor x \rfloor$ 与 x 之间

没有另一个整数，矛盾！



推论6. $$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor, \quad \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil.$$

（直接由定理5推知）.

例. $\lfloor \lfloor \lfloor x/10 \rfloor /10 \rfloor /10 \rfloor = \lfloor x/1000 \rfloor$.

3、区间计数问题. 如果我们记 $[\alpha..\beta]$ 为 $\alpha \leq x \leq \beta$ 的集合，

$(\alpha..\beta]$ $\quad \alpha < x \leq \beta$

$[\alpha..\beta)$ $\quad \alpha \leq x < \beta$

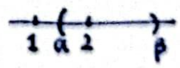
$(\alpha..\beta)$ $\quad \alpha < x < \beta$

求这个集合中包含了多少整数. （α，β 不一定是整数）.

1° 简化情形：若均为整数：

$\beta - \alpha +$ "[的个数" -1

2° 考虑转换. $\alpha \leq n < \beta \iff \lceil \alpha \rceil \leq n < \lceil \beta \rceil$.



$\alpha < n \leq \beta \iff \lfloor \alpha \rfloor < n \leq \lfloor \beta \rfloor$.

余下二者仅需要补上"+1"或"-1"即可.

$[\alpha..\beta) \qquad \lfloor\beta\rfloor-\lceil\alpha\rceil+1$

$(\alpha..\beta) \qquad \lceil\beta\rceil-\lfloor\alpha\rfloor-1.$

[注] 1° 我们习惯使用左闭右开的括号序列，因为其具有可加性.
2° 上述记号在关于求和取整时非常有用.

例4. 一个抽奖游戏，在 $[1,1000]$ 中选一整数，若记抽出数为 n. 若 $\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor \backslash n$ ($a\backslash b$ 意味着 a 是 b 的正因子)，赢取 \$5，否则输掉 \$1. 请求出对应的期望.

考虑 $W=\sum_{n=1}^{1000}[n\text{ 抽到 }n\text{ 会让我们赢}]$

$$=\sum_{1\le n\le 1000}\left[\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\backslash n\right] \overset{k:=\sqrt[3]{n}}{=\!=\!=} \sum_{k,n}\left[k=\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\right][k\backslash n][1\le n\le 1000]$$

$$\overset{k\backslash n\text{变形}}{\underset{n=km}{=\!=\!=}} \sum_{k,m,n}\left[k^3\le n<(k+1)^3\right][n=km][1\le n\le 1000]$$

$$\overset{\text{换掉 }n=km}{=\!=\!=} \sum_{k,m}\left[k^3\le km<(k+1)^3\right][1\le km\le 1000]$$

$$\overset{m=\frac{n}{k}=\frac{n}{\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor}}{=\!=\!=} 1+\sum_{k,m}\left[k^3\le km<(k+1)^3\right][1\le k<10]$$

$$=1+\sum_{1\le k<10}\left(\left\lceil k^2+3k+3+1/k\right\rceil-\lceil k^2\rceil\right)$$

$$=1+\sum_{1\le k<10}(3k+4)=172.$$

Bonus: 在 $[1..n]$ 中呢? 记 K 为 $K^3\le n$ 最大的 K:

$$W=\sum_{1\le k<K}(3k+4)+\sum_m\left[K^3\le Km<N\right]$$

最大的 $K^3\le n$.

$$=\frac{3}{2}K^2+\frac{5}{2}K-4+\underbrace{\sum_m\left[m\in[K^2,N/K]\right]}_{\lfloor\frac{N}{K}\rfloor-K^2+1}$$

例5. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，α 的谱是一个多重集，定义作

$$\mathrm{Spec}(\alpha) := \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \cdots\}.$$

- $\alpha \neq \beta \Rightarrow \mathrm{Spec}(\alpha) \neq \mathrm{Spec}(\beta)$

◁. 不妨设 $\alpha < \beta$. $\exists m$, s.t. $m(\beta-\alpha) \geq 1$. (取 $\left\lceil \frac{1}{\beta-\alpha} \right\rceil \cdots$)

由此 $m\beta - m\alpha \geq 1$，$m\beta \geq 1 + m\alpha \Rightarrow \lfloor m\beta \rfloor > \lfloor m\alpha \rfloor$

因而 $\mathrm{Spec}(\beta)$ 中，$\leq \lfloor m\alpha \rfloor$ 的元素小于 m 个，而 $\mathrm{Spec}(\alpha)$ 中至少有 m 个 $\leq \lfloor m\alpha \rfloor$ 的个元素. ▷

- $\mathrm{Spec}(\sqrt{2}) \cup \mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}) = \mathbb{N}$，$\mathrm{Spec}(\sqrt{2}) \cap \mathrm{Spec}(2+\sqrt{2}) = \varnothing$.

◁ 考虑有多少个 $\leq n$ 的元素在 $\mathrm{Spec}(\sqrt{2})$ 里面，有多少个 $\leq n$ 的元素在 $\mathrm{Spec}(2+\sqrt{2})$ 里面. 定义 $N(\alpha, n)$ 表示 $\mathrm{Spec}(\alpha)$ 中 $\leq n$ 的元素个数.

$$\begin{aligned} N(\alpha, n) &= \sum_{k>0} \left[\lfloor k\alpha \rfloor \leq n \right] \\ &= \sum_{k>0} \left[\lfloor k\alpha \rfloor < n+1 \right] \\ &= \sum_{k>0} \left[k\alpha < n+1 \right] = \sum_{k} \left[0 < k < \frac{n+1}{\alpha} \right] \\ &= \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - 1. \end{aligned}$$

然后求 $N(\sqrt{2}, n) + N(2+\sqrt{2}, n) \stackrel{?}{=} n$

$$\left\lceil \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rceil - 1 = n$$

$$\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor = n \qquad \lceil \alpha \rceil - \lfloor \alpha \rfloor = [\alpha \text{ is not int}]$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt{2}} + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}}}_{n+1} - \underbrace{\left(\left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} + \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} \right)}_{1} = n$$

两个不是整数加起来等于整数
一定发生进位.

- 可推广到 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Spec}\,\alpha \cup \mathrm{Spec}\,\beta = \mathbb{N}$.