Section 2.0 进制位.

一、进制的基本原理.

引例：

3	2	4
↑	↑	↑
百位	十位	个位
100	10	1

$100 \xleftarrow{\times 10} 10 \xleftarrow{\times 10} 1$

十进制.

MSB 最高位　　LSB 最低位

Def. ~~若一个~~ 在k进制下，一串数码 ~~abc~~ $a_{n-1}\cdots a_0$ 中的 a_i 表示 k^i. $a_{n-1}\cdots a_0$ 表示数

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i k^i. \quad (a_i < k).$$

下面看若干初步的性质.

1° 乘以 i 在 i 进制下表征为数左移1位，末尾补0. 除以 i（在 i 进制下）表示右移1位，舍去最低位.

如 ~~10245~~ $114514 \times 10 = 1145140$

$114514 \div 10 = 11451$ （余4）.

即 多吸收/吐出了一个 k.

2° 任意一个十进制整数在 k ($k>1$, $k\in\mathbb{N}$) 进制中存在唯一表示.

证：使用反证. 设 m 位 k 进制数 $a_1\cdots a_m$ 与 n 位 k 进制数 $b_1\cdots b_n$ 代表两个相同十进制数（$a_1\ldots a_m$ 与 $b_1\ldots b_m$ 中至少有一位不同）.

那么 $x_1=\sum_{i=0}^{m-1} a_i k^i$，$x_2=\sum_{i=0}^{m-1} b_i k^i$

若 ~~$a_0 > a\,b_0$~~ $m>n$，$\Rightarrow$ x_1 中前 $m-n$ 项任一项，当它的系数 ~~大于 x_2~~ 不为0时，必定大于 x_2. 矛盾

若 $m<n$，同理

此证明了两者的位数是相等的.

下证其项项系数都相等.

若 $a_1 > b_1$, 即使后面都为最大, 也挡不住 a_1 变大带来的影响.
(直观上).

反之亦如此.

因而 $a_1 = b_1$. 同理, $a_2 = b_2$, $\cdots$

$\Rightarrow \forall a_i = b_i$. 故 k 进制时表示为唯一的.

二、进制的转换

1. (十进制⇒k) 过程: 整数部分除以 k 取余. 将取得的余数倒序排列

如 $(11)_{10} \to (?)_2$.

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 11 \\
2 & 5 \cdots 1 \\
2 & 2 \cdots 1 \\
2 & 1 \cdots 0 \\
 & 0 \cdots 1
\end{array}
\uparrow \quad 为 \boxed{1011}.
$$

(证明略). 数论多些

小数部分乘以 k 取整. 不必倒序排列.

如 $(0.6)_{10} \to (?)_2$.

$0.6 \times 2 = \boxed{1}.2$

$0.2 \times 2 = \boxed{0}.4$

$0.4 \times 2 = \boxed{0}.8$

$0.8 \times 2 = \boxed{1}.6$

$0.6 \times 2 = \boxed{1}.2$ 循环

$(0.\dot{1}00\dot{1})_2$.

可以说明一些可以出现循环 (Euler 函数…)

2. 常用的进制及其缩写

二进制	Binary	BIN	← 电脑用得多
八进制	Octal	OCT	← 缩短长度.
十进制	Decimal	DEC	← 日常用的多
十六进制	Hexadecimal	HEX	←

三、应当记忆的常见转换关系

1、2的幂次

2^5	2^{10}	2^{20}	2^{32}
32	1024	1048576	2147483647
	1K，1M 间单位差	1M	INT_MAX

2、二进制转十六进制

A	C	E
1010	1100	1110

此时，若有二进制

$$\underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0110}_{4+2=6}\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{1101}_{C+1=D}\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0001}_{1}$$

4位1组分组读入即可.