8.1 $\boxed{\text{对偶空间}}$：线性空间到其基域（一维线性空间）之间的映射，即线性函数构成的空间。

Def1、设 V 为 P 上的线性空间，V 到 P 上的映射 f 满足：

- $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$，$\forall \alpha,\beta\in V$.
- $f(k\alpha)=kf(\alpha)$，$\forall \alpha\in V, k\in P$.

称 f 为 V 上的线性函数

~~Eg1. 矩阵的迹~~ tr：

Analogy：V 上所有线性变换 $\mathcal{A}\rightarrow \mathrm{End}V$

V 上所有线性函数集合 $f\rightarrow V^*$

Property：1° $f: V\rightarrow P$ 为线性函数

$$\Leftrightarrow f(k\vec{\alpha}+l\vec{\beta})=kf(\vec{\alpha})+lf(\vec{\beta}).\ \forall k,l\in P,\ \vec{\alpha},\vec{\beta}\in V.$$

（使用定义易得）

2° 若 $f\in V^*$，则 $f(0)=0$，$f(-\vec{\alpha})=-f(\vec{\alpha})$

（由 1° $k=0, l=0$；以及 $k=-1, l=0$ 推得），

3° 若 $f\in V^*$，$\alpha_i\in V$，$k_i\in P$，$1\le i\le s$，则

$$f\left(\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{s}k_i f(\alpha_i).$$

（有限个时的推广）.

4° 设 $f,g\in V^*$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基，则 $f=g \Leftrightarrow f(\varepsilon_i)=g(\varepsilon_i).\ \forall i\in[1..n]$.

$\Rightarrow$ 映射定义

$\Leftarrow$ 线性函数的定义 Def1.

5° 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基，~~α_1, α_2~~，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in P$，则存在唯一的 $f \in V^*$，

使得：

$$f(\varepsilon_i) = a_i \quad, i=1,2,\cdots,n.$$

证明思路：对于 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \varepsilon_i \in V$，

取 $f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = \big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2) \cdots f(\varepsilon_n)\big)$

$$\operatorname{crd}(\alpha; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n).$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(回忆)}\quad \operatorname{crd}(\alpha; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \text{ 是 } (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \\ \text{s.t.}\quad \cancel{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\ \cancel{(\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)} = \alpha. \end{array}}$$

$$(\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例如对于 $\cancel{\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$，$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\alpha = 1 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + 3 \cdot \varepsilon_3$，$a_1 = 4$，$a_2 = 5$，$a_3 = 6$

$$f(\alpha) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$$

$$= (4 \cdot 5 \cdot 6)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

称 $(f(\varepsilon_1), \cdots, f(\varepsilon_n))$ 为 f 在基 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 下的矩阵.

由(4)可知此一这为唯一的. $[4\quad 5\quad 6]$ $P^{1\times n}$.

Th2、设 V 是 P 上线性空间，V^* 为 V 上所有线性函数集合，又设 $f, g \in V^*$，定义 f 与 g 的和如下：

$$(f+g)(\alpha) := f(\alpha)+g(\alpha),\quad \forall \alpha \in V$$

又设 $c \in P$，定义 c 与 f 的积 cf 如下：

$$(cf)(\alpha) = cf(\alpha).\quad \forall \alpha \in V.$$

则：(1) $f+g,\ cf \in V^*$

(2) V^* 对上述加法及数乘构成 P 上的线性空间，

(3) $\dim V^* = \dim V$.

证：(1) 设 $\alpha, \beta \in V$，$k, l \in P$，于是

$$(f+g)(k\alpha+l\beta) \xlongequal[\text{加法定义}]{\text{线性函数}} f(k\alpha+l\beta)+g(k\alpha+l\beta)$$

$$\xlongequal[\text{本题定义(1)}]{\text{线性函数}} \underline{kf(\alpha)}+lf(\beta)\ \underline{+kg(\alpha)}+lg(\beta)$$

$$\overset{Th2}{=} k(f+g)(\alpha)+l(f+g)(\beta)$$

$$(cf)(k\alpha+l\beta) \xlongequal[Th2]{Def1.} ckf(\alpha)+clf(\beta)$$

$$= k(cf)(\alpha)+l(cf)(\beta).$$

因而 $f+g,\ cf \in V^*$.

(2) 以 0 表示 V 上的如下函数：

$$0(\alpha) = 0,\quad \forall \alpha \in V.$$

~~$0(k\alpha)=0$~~

$0(k\alpha+l\beta)=0$

$\rightarrow 0 \in V^*$!

取 $-f = (-1)\cdot f$，则

$$f+(-f) = 0.$$

因而 V^* 对 $+, \cdot$ 构成 P 上线性空间

(3) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基，由线性函数的性质 5° 知：$\exists f_1, f_2, \cdots, f_n \in V^*$，s.t.

$$f_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n)$$

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}}$$

~~实际~~

即 $f_1(\varepsilon_1) = 1$，$f_1(\varepsilon_2) = 0$，$\cdots$ $f_1(\varepsilon_n) = 0$

$f_2(\varepsilon_1) = 0$，$f_2(\varepsilon_2) = 1$，$\cdots$，$f_2(\varepsilon_n) = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$f_n(\varepsilon_1) = 0 \quad f_2(\varepsilon_2) = 0 \cdots \quad f_n(\varepsilon_n) = 1$.

线性相关吗？（适用于任一个定义了 $+$，$\cdot$ 的线性空间）.

若 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in P$，s.t.

$$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i = 0$$

函数

，则 k_j 某一个不等于 0。

~~反证法 （不会为0，加起来结果为0）~~. 只能系数全为0，才可以得到 0

$$\forall j, \quad k_j = \sum_{i=1}^{n} k_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(\varepsilon_j) = 0(\varepsilon_j) = \boxed{0} \in P$$

因为计算时结果为0。 计算得到 取的 展开

因而式子结果为 0 时 $\Leftrightarrow$ 每一个 k_j 都是 0.

因而 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关.

是不是可以构成一组基？

若 $f \in V^*$，由于

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) f_i\right)(\varepsilon_j) \xlongequal[\text{v.s.}]{\text{构成}} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \boxed{f_i(\varepsilon_j)}, \quad 1 \le j \le n.$$

$$\xlongequal[\text{相应}]{\text{i=j时}} f(\varepsilon_j)$$

因此 $f = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) f_i$.

因而 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 V^* 的基. 故 $\dim V = \dim V^*$.

Def. 13. Vec Space V 上所有线性函数构成的线性空间 V^* 称为 V 的 对偶空间.

又设 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的基. 由 $f_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ $\begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{in} \end{pmatrix} = \varepsilon_i$

$(1 \le i, j \le n)$ 所决定的 V^* 的基 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 称为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的对偶基.

转至 $\boxed{5'}$ 看例 2.

基变换 $\alpha_1 \cdots \alpha_n \xrightarrow{T(\text{二})} \beta_1 \cdots \beta_n$

对偶空间 $A^* \xrightarrow{?} B^*$

对偶基

下面研究对偶基变换时之场景.

Th 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 与 $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ 都是线性空间的基, $f_1 \cdots f_n$ 与 $g_1 \cdots g_2$ 是它们的对偶基, 则

$$\boxed{T\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}}, \boxed{T\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix}} = I_n$$

Eg 1. Let $V=\mathbb{R}^3$, $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. then
$\phi(x,y,z)=2x+3y+4z$ is a member of V^*.

Eg 2. Let $V=\mathbb{P}_n$ (the set of poly with degree n); and $\phi: \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}$. then $\phi(p)=p(1)$ is a member of V^*.

Eg 3. Let $V=\mathbb{M}^{n\times n}$ and $\phi: \mathbb{M}^{n\times n} \to \mathbb{R}$; then
$\Phi(A)=tr(A)$ is a member of V^*.

Dual Basis

Assume $V=\mathbb{R}^2$ and a vector basis
$b=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$; find dual basis of b^*.

By defn, $\phi_i(v_j)=\delta_{ij}$, meaning

$$\phi_1(\vec{v_1})=\delta_{11}=1 \qquad \phi_1(\vec{v_2})=\delta_{12}=0$$

$$\phi_2(\vec{v_1})=\delta_{21}=0 \qquad \phi_2(\vec{v_2})=\delta_{22}=1.$$

看前两行:

$$\phi_1(2,1)=1 \Leftrightarrow \phi_1\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\phi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\phi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1.$$

$$\phi(3,1)=0 \Leftrightarrow \phi_1\left(3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\phi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\phi_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(1,0)\\\phi_1(0,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi_1(1,0)=-1, \quad \phi_1(0,1)=3.$$

$$\Rightarrow \phi_1(x,y)=x\phi_1(1,0)+y\phi_1(0,1)=-x+3y$$

证：设 $\alpha = \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j \in V$, $^{(*)}$ $f = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j$ $^{(**)}$ ∴ 系数间有何关联？

空间中任意一个向量　　空间中任意一个线性函数

① 看"基"

$$f_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{f_i(\varepsilon_j)}_{\text{当且仅当 } i=j \text{ 时为} 1} = x_i$$

看向量 α 在每一个基 f 下的取值.

$f_i(\alpha) = x_i$

$$f(\varepsilon_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \underbrace{f_j(\varepsilon_i)}_{\text{同样 } i=j \text{ 时为} 1} = y_i$$

看每一个函数组合在某一个基上的作用（取值）.

$f(\varepsilon_i) = y_i$

这表明：

反作用

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \boxed{f_i(\alpha)} \varepsilon_i$$

反作用

$$f = \sum_{i=1}^{n} \boxed{f(\varepsilon_i)} f_i$$

彼此纠缠在一起

$\alpha \xLeftarrow{\text{表出}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 基 V

$f \xLeftarrow{\text{表出}} f_1, \cdots, f_n$ 对偶基 V^*

进而：（看"两个组合"）

~~$f(\alpha) = \sum_{i=1} f$~~

系数 x_i

看一个具体的 α 被 f 作用；~~激~~ 长啥样

$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$(4\ 5\ 6)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\boxed{f(\alpha)} \overset{(**)}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right)(\alpha)$$

$$\overset{y_j = f(\varepsilon_j)}{=} \sum_{j=1}^{n} f(\varepsilon_j) f_j(\alpha).$$

$$= \left(\mathrm{crd}(f; f_1, f_2, \cdots, f_n)\right)^T \mathrm{crd}(\alpha; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n).$$

(α) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$

$$= \underline{\mathrm{crd}(\alpha; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^T}\ \underline{\mathrm{crd}(f; f_1, f_2 \cdots f_n)}$$

注：~~求逆矩阵之行列式~~；把上述两坐标变换了 ~~[ ]~~ [|]

$$\forall i,j,\quad \mathrm{row}_i\left(T\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\\ \eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}^T\right)\mathrm{col}_j\left(T\begin{pmatrix}f_1 & \cdots & f_n\\ g_1 & \cdots & g_n\end{pmatrix}\right)$$

$$=\left(\mathrm{col}_i\, T\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\\ \eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}\right)^T \mathrm{col}_j\left(T\begin{pmatrix}f_1 & \cdots & f_n\\ g_1 & \cdots & g_n\end{pmatrix}\right).$$

$$=\mathrm{crd}(\eta_i;\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)^T\,\mathrm{crd}(g_j;f_1,f_2,\cdots,f_n).$$

$$=g_j(\eta_i)\ \overset{\text{对偶基}}{\underset{\text{Def}}{=\!=\!=}}\ \delta_{ij}.$$ 这里成立.

即：

$$T\begin{pmatrix}f_1 & \cdots & f_n\\ g_1 & \cdots & g_n\end{pmatrix}=\left(T\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\\ \eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}'\right)^{-1}$$

不是个双射!

$\boxed{\text{对偶空间上的对偶空间}}$

~~Def~~ 设 V 是 P 上的 v.s.，V^* 是 V 的对偶空间，设 $\alpha\in V$，由下面的方式定义 V^* 上的函数 α^{**}：

$$\alpha^{**}(f)=f(\alpha),\ \forall f\in V^*,$$ 是 V^* 上的线性函数．即 $\alpha^{**}\in(V^*)^*$.

$$\alpha^{**}(f+g)=(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$$
$$=\alpha^{**}(f)+\alpha^{**}(g)$$

$$\alpha^{**}(kf)=kf(\alpha)=k\alpha^{**}(f)$$

Th. 设 $(V^*)^*$ 为 v.s V 的对偶空间的对偶空间，对 $\alpha\in V$，α^{**} 定义如上. 则 V 到 $(V^*)^*$ 的映射 $\alpha\to\alpha^{**}$ 是线性同构映射.

Proof. 设 $\alpha,\beta\in V$，$k,l\in P$，由

$$
\begin{aligned}
(k\alpha+l\beta)^{**}(f) &= f(k\alpha+l\beta)\\
&= kf(\alpha)+lf(\beta)\\
&= (k\alpha^{**}+l\beta^{**})(f).
\end{aligned}
$$

即 $\alpha\to\alpha^{**}$ is a linear map.

又因为 $\alpha^{**}=0$ 即 $f(\alpha)=0$，$\forall f\in V^*$. 映射一一的.

由 $\dim(V^*)^*=\dim V^*=\dim V$. 知映射同构.