离散数学讲义

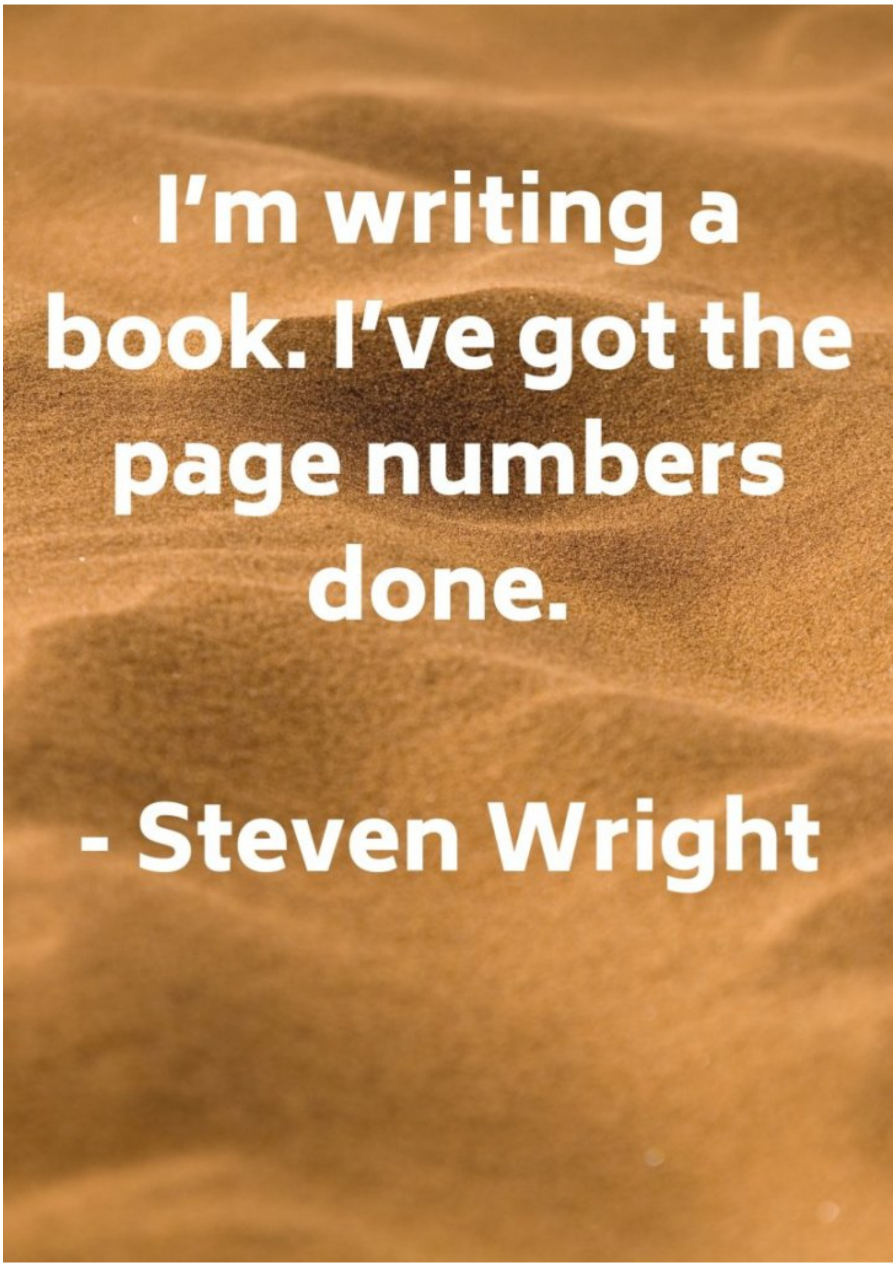
作者：软件学院 2020 级学生

组织：南京大学

时间：2021 年 3 月 27 日 ～2021 年 3 月 27 日

版本：3.14

前言



魏恒峰 (hfwei@nju.edu.cn)
2021 年 3 月 27 日

目录

第一章 概述

第 二 章　命题逻辑

2.1　引言

2.2　命题逻辑的语法

2.3　命题逻辑的语义

2.4　命题逻辑的推理系统

第 三 章　一阶谓词逻辑

第四章 数学归纳法

4.1 数学归纳法与良序原理

定理 4.1. 第一数学归纳法

设 $P(n)$ 是关于自然数的一个性质。如果

(i) $P(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $P(n)$ 成立, 则 $P(n+1)$ 成立。

那么, $P(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

可以表达为推理规则:

$$\frac{P(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big(P(n) \to P(n+1)\Big)}{\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)} \quad (\text{第一数学归纳法})$$

或表达为一阶谓词逻辑公式:

$$\bigg(P(0) \land \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big(P(n) \to P(n+1)\Big)\bigg) \to \forall n \in \mathbb{N}.\ P(n).$$

注 TODO: 一阶 vs. 高阶

定理 4.2. 第二数学归纳法 (The Second Mathematical Induction)

设 $Q(n)$ 是关于自然数的一个性质。如果

(i) $Q(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $Q(0), Q(1), \ldots, Q(n)$ 都成立,
则 $Q(n+1)$ 成立。

那么, $Q(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

$$\frac{Q(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big(\big(Q(0) \land \cdots \land Q(n)\big) \to Q(n+1)\Big)}{\forall n \in \mathbb{N}.\ Q(n)} \quad (\text{第二数学归纳法})$$

$$\bigg(Q(0) \land \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big(\big(Q(0) \land \cdots \land Q(n)\big) \to Q(n+1)\Big)\bigg) \to \forall n \in \mathbb{N}.\ Q(n).$$

定理 4.3

第二数学归纳法蕴含第一数学归纳法。

定理 4.4

第一数学归纳法蕴含第二数学归纳法。

证明 令 $P(n) \triangleq Q(0) \wedge \ldots \wedge Q(n)$。第一数学归纳法对上述 $P(n)$ 也成立，即

$$\Big(Q(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}.\ \big(Q(0) \wedge \ldots \wedge Q(n) \to Q(0) \wedge \ldots \wedge Q(n+1)\big)\Big) \to \forall n \in \mathbb{N}.\ Q(0) \wedge \ldots Q(n). \tag{4.1}$$

要证明第二数学归纳法，先引入如下两个前提

$$Q(0) \tag{4.2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ Q(0) \wedge \ldots Q(n) \to Q(n+1) \tag{4.3}$$

首先，

$$\big(Q(0) \wedge \ldots \wedge Q(n) \to Q(n+1)\big) \to \big(Q(0) \wedge \ldots \wedge Q(n) \to Q(0) \wedge \ldots \wedge Q(n+1)\big) \tag{4.4}$$

根据 **(??)**, **(??)** 与 **(??)**, 我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}. Q(0) \wedge \ldots \wedge Q(n) \tag{4.5}$$

因此，

$$\forall n \in \mathbb{N}. \wedge Q(n) \tag{4.6}$$

所以，第二数学归纳法得证。

4.2 第一数学归纳法示例

4.3 第二数学归纳法示例

4.4 蓝眼人谜题

4.5 数学归纳法变种