

(二) 一阶谓词逻辑

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 18 日



Syntax

Semantics

语法与语义是“对立统一”的

Definition (命题逻辑的语言)

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词符号: \forall (全称量词), \exists (存在量词)

变元符号: x, y, z, \dots

左右括号: $(,)$

常数符号: 零个或多个常数符号

函数符号: n -元函数符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)

谓词符号: n -元谓词符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)

Definition (命题逻辑的语言)

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词符号: \forall (全称量词), \exists (存在量词)

变元符号: x, y, z, \dots

左右括号: $(,)$

常数符号: 零个或多个常数符号

函数符号: n -元函数符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)

谓词符号: n -元谓词符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)

Q : 为什么没有命题符号 P, Q, \dots ?

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

Definition (项 (Item))

- (1) 每个变元 x, y, z, \dots 都是一个项;
- (2) 每个常数符号都是一个项;
- (3) 如果 t_1, t_2, \dots, t_n 是项, 且 f 为一个 n 元函数符号, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- (4) 除此之外, 别无其它。

x

0

$S0 \quad + (x, SSS0) \quad \times (+ (x, SSS0), y)$

Definition (公式 (Formula))

- (1) 如果 t_1, \dots, t_n 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 为公式, 称为**原子公式**;
- (2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;
- (3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x. \alpha$ 与 $\exists x. \alpha$ 也是公式;
- (4) 除此之外, 别无其它。

约定:

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, \mathbf{S}, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x, y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x, y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数

($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \wedge \forall y, z. (y < x \wedge z < x) \rightarrow \neg(y \times z = x)$$

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, \mathbf{S}, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x, y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数

($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \wedge \forall y, z. (y < x \wedge z < x) \rightarrow \neg(y \times z = x)$$

(4) 给定任何性质 (谓词) $P(x)$, 自然数上的数学归纳原理

$$(P(0) \wedge \forall x. (P(x) \rightarrow P(Sx))) \rightarrow (\forall x. P(x))$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x, y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数

($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \wedge \forall y, z. (y < x \wedge z < x) \rightarrow \neg(y \times z = x)$$

(4) 给定任何性质 (谓词) $P(x)$, 自然数上的数学归纳原理

$$(P(0) \wedge \forall x. (P(x) \rightarrow P(Sx))) \rightarrow (\forall x. P(x))$$

(5) 哥德巴赫猜想 (任一大于 2 的偶数, 都可表示成两个素数之和)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+. \exists \delta \in \mathbb{R}^+. \forall x \in \mathbb{R}^+. (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

A function f from \mathbb{R} to \mathbb{R} is called

- ▶ pointwise continuous if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- ▶ uniformly continuous if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Syntax

Semantics

一阶谓词逻辑的语义

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\perp$)”值。

$$\forall x. Sx > 0$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\perp$)”值。

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\perp$)”值。

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\perp$)”值。

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式 α 的真假值取决于

- (1) 确定量词的论域
- (2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释
- (3) 对**自由**变元的解释 (赋值函数 s)

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\perp$)”值。

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式 α 的真假值取决于

- (1) 确定量词的论域
- (2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释
- (3) 对**自由**变元的解释 (赋值函数 s)

这种“**解释**”将公式映射到一个**数学结构** \mathcal{U} 上, 决定了该公式的语义

Definition $((\mathcal{U}, s) \models \alpha)$

\mathcal{U} 与 s 满足公式 α :

$$(\mathcal{U}, s) \models \alpha$$

- ▶ 将 α 中的常数符号、函数符号、谓词符号按照数学结构 \mathcal{U} 进行解释
- ▶ 将量词的论域限制在集合 $|\mathcal{U}|$ 上,
- ▶ 将自由变元 x 解释为 $s(x)$,
- ▶ 这样就将公式 α 翻译成了某个数学领域中的命题
- ▶ 使用数学领域知识我们知道该命题成立

$$\alpha : \forall x. (x \times x \neq 1 + 1)$$

$$\alpha : \forall x. (x \times x \neq 1 + 1)$$

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$ 中为真

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ 中为假

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的**结构** \mathcal{U} 与**赋值** s 都满足 α 。

$$\forall x. P(x) \models P(y)$$

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的**结构** \mathcal{U} 与**赋值** s 都满足 α 。

$$\forall x. P(x) \models P(y)$$

$$P(y) \not\models \forall x. P(x)$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz)$$

$$\beta : \forall x \forall y ((Pxy \wedge Pyx) \rightarrow x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y Pxy \rightarrow \exists y \forall x Pxy$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz)$$

$$\beta : \forall x \forall y ((Pxy \wedge Pyx) \rightarrow x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y Pxy \rightarrow \exists y \forall x Pxy$$

$$\{\alpha, \beta\} \models \gamma ?$$

$\{\alpha\} \models \beta$ 简记为 $\alpha \models \beta$

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

Definition (语义等价 (Logically Equivalent))

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β **语义等价**, 记为 $\alpha \equiv \beta$ 。

Definition (普遍有效的 (Valid))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 是**普遍有效的**, 记为 $\models \alpha$ 。

普遍有效的公式在**所有可能的结构 \mathcal{U}** 与**所有可能的赋值 s** 下均为真。

$$\forall x. P(x) \models P(y)$$

$$\forall x. P(x) \rightarrow P(y)$$

$$\neg \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha$$

$$\forall x \forall y \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \leftrightarrow \exists y \exists x \alpha$$

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$$

$$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$$

$$\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$$

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$$

$$\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$$

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$$

$$\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta)$$

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。

前提如下：

- (1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧（幸亏如此）。

例子

一阶谓词逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

$$\frac{\forall x\alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\frac{\forall x\alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \rightarrow \exists y(\textcolor{blue}{t} < y)$$

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \rightarrow \exists y(t < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \rightarrow \exists y(t < y)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [t] \\ \vdots \\ \alpha[t/x] \end{array}}{\forall x \alpha} \quad (\forall x\text{-intro})$$

where, t is **fresh** variable never used elsewhere

\forall -推理规则的应用

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall xP(x)\} \vdash \forall xQ(x)$$

\forall -推理规则的应用

$$\{P(t), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))\} \vdash \neg Q(t)$$

\exists -intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y(x = y)$$

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y(x = y)$$

\exists -intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y(x = y)$$

$$\exists x \forall y (x \neq y)$$

\exists -elim

$$\frac{\exists x\alpha \quad \begin{array}{c} [\alpha[t/x]] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta} \quad (\exists\text{-elim})$$

where t does not occur in β

\exists -推理规则的应用

$$\forall xP(x) \vdash \exists xP(x)$$

\exists -推理规则的应用

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists xP(x)\} \vdash \exists xQ(x)$$

\forall, \exists -推理规则的应用

$$\{\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$$

\forall, \exists -推理规则的应用

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。

前提如下：

- (1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧（幸亏如此）。

\forall, \exists -推理规则的应用

Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn