(二) 一阶谓词逻辑

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 18 日

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

$$\frac{\text{每个人都是要死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是要死的}}$$

$$\frac{P \qquad Q}{R}$$

命题逻辑无法表达：个体、全体以及它们之间的关系

我们需要使用表达能力更强的**一阶谓词逻辑**

例子：谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

(2) 李四与张三是好朋友

(3) 李四也是一个法外狂徒

(4) 王五站在张三与李四中间 (害怕极了)

(5) 王五长得比张三与李四都高

一元谓词表达了个体的性质

多元谓词表达了个体之间的关系

零元谓词即命题逻辑中的命题符号

一阶谓词逻辑的语法

Definition (一阶谓词逻辑的语言 (Language))

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

- 逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 量词符号: $\forall$ (forall; 全称量词), $\exists$ (exists; 存在量词)
- 变元符号: $x, y, z, \ldots$
- 左右括号: (,)

- 常数符号: 零个或多个常数符号 $a, b, c, \ldots$, 表达特殊的个体
- 函数符号: n-元函数符号 $f, g, h, \ldots$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, 表达个体上的运算
- 谓词符号: n-元谓词符号 $P, Q, R, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$, 表达个体的性质与关系

初等数论的语言: $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

"项" 是一阶谓词逻辑要讨论的个体对象, 它本身无所谓真假

Definition (项 (Term))

(1) 每个变元 $x, y, z, \ldots$ 都是一个项;

(2) 每个常数符号都是一个项;

(3) 如果 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项, 且 f 为一个 n-元函数符号,
则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;

(4) 除此之外, 别无其它。

$$L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$$

$$x$$

$$\mathbf{0}$$

$$S\mathbf{0} \qquad x + SSS0 \qquad (x + SSS0) \times y$$

公式刻画了个体的性质或者个体之间的关系, 它的语义就是它的真假值

Definition (公式 (Formula))

(1) 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号, 则 $P(t_1, \ldots, t_n)$ 为公式, 称为**原子公式**;

(2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;

(3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x.\ \alpha$ 与 $\exists x.\ \alpha$ 也是公式;

(4) 除此之外, 别无其它。

约定: 量词符号 $\forall$ 与 $\exists$ 的管辖范围尽可能短

$\forall x.\ \alpha \to \beta$: 表示 $(\forall x.\ \alpha) \to \beta$ 不表示 $\forall x.\ (\alpha \to \beta)$

$$\frac{\text{每个人都是要死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是要死的}}$$

$$\frac{\forall x.\ (H(x) \to M(x)) \qquad H(s)}{M(s)}$$

$$L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$$

(1) 0 不是任何自然数的后继

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

(3) x 是素数 ($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

(4) 哥德巴赫猜想 (任一大于 2 的偶数, 都可表示成两个素数之和)

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

对于任意的正实数 ϵ, 存在一个正实数 δ,

使得对于任意的 x, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - b| < \epsilon$ 成立。

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+. \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+. \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - b| < \epsilon)$$

$\forall x \in A.\ \alpha$ 实际上是 $\forall x.\ (x \in A \to \alpha)$ 的简记

$\exists x \in A.\ \alpha$ 实际上是 $\exists x.\ (x \in A \land \alpha)$ 的简记

以下概念与程序设计语言中相应概念类似, 此处举例说明, 不作正式定义

Definition (作用域 (Scope)、约束变元 (Bind)、自由变元 (Free))

(1) $\forall x.\ (P(x) \to Q(x))$

(2) $(\forall x.\ P(x)) \to Q(x)$

(3) $\forall x.\ \Big(P(x) \to (\exists y.\ R(x,y))\Big)$

(4) $\Big(\forall x.\ \forall y.\ (P(x,y) \land Q(y,z))\Big) \land \exists x.\ P(x,y)$

Definition (改名 (Rename))

为尽量避免重名, 可将约束变元或自由变元**改名**为新鲜 (fresh)变元

$$\Big(\forall x.\ \forall y.\ (P(x,y) \land Q(y,z))\Big) \land \exists t.\ P(t,v)$$

Definition (t is free for x in α)

$$y - 1 \text{ is free for } x \text{ in } \exists z.\ (z < x)$$

$$y - 1 \text{ is } \textit{not} \text{ free for } x \text{ in } \exists y.\ (y < x)$$

在公式 α 中, 项 t 可以替换变量 x ($\alpha[t/x]$)

一阶谓词逻辑的语义

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真假”值

$$\forall x.\ Sx > \mathbf{0}$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (y < x)$$

$$x > \mathbf{0}$$

一阶谓词逻辑公式的真假值取决于

(1) 对量词论域 (universe) 的解释, 限定个体范围

(2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释

(3) 对自由变元的解释 (赋值函数 s)

这种“**解释**”将公式映射到一个**数学结构** $\mathcal{U}$上, 决定了该公式的语义

Definition ($(\mathcal{U}, s) \models \alpha$)

$\mathcal{U}$ 与 s 满足公式 α:

$$(\mathcal{U}, s) \models \alpha$$

- 将 α 中的常数符号、函数符号、谓词符号按照结构 $\mathcal{U}$ 进行解释,
- 将量词的论域限制在集合 $|\mathcal{U}|$ 上,
- 将自由变元 x 解释为 $s(x)$,
- 这样就将公式 α 翻译成了某个数学领域中的命题,
- 然后, 使用数学领域知识我们知道该命题成立

$$\alpha : \forall x.\ (x \times x \neq 1 + 1)$$

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$ 中为真

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ 中为假

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的结构 $\mathcal{U}$ 与赋值 s都满足 α。

$$\{\forall x.\ P(x)\} \models P(y)$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \land P(y, z)) \to P(x, z))$$

$$\beta : \forall x \forall y ((P(x, y) \land P(y, x)) \to x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\{\alpha, \beta\} \models \gamma\ ?$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{N} \qquad P(x, y) : x \leq y$$

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

Definition (语义等价 (Logically Equivalent))

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β **语义等价**, 记为 $\alpha \equiv \beta$。

$$\neg(\forall x.\ \alpha) \equiv \exists x.\ \neg\alpha$$

相当于命题逻辑中的“重言式”, 可用于公式推导

Definition (普遍有效的 (Valid))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 是**普遍有效的**, 记为 $\models \alpha$。

普遍有效的公式在所有可能的结构 $\mathcal{U}$ 与所有可能的赋值 s下均为真。

$$(\forall x.\ P(x)) \to P(y) \text{ 是普遍有效的}$$

$$\forall x.\ P(x) \models P(y)$$

$$\boxed{\neg \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg \alpha}$$

$$\boxed{\neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha}$$

$$\neg(\forall x \in A.\ \alpha) \leftrightarrow \exists x \in A.\ \neg \alpha$$

$$\forall x \forall y \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \leftrightarrow \exists y \exists x \alpha$$

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$$

$$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$$

$$\forall x\alpha \to \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \to \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall y\exists x\alpha \not\to \exists x\forall y\alpha$$

反例: $U = \{a, b\}$, 关系 $P(a, b), P(b, a)$

$\forall y\exists xP(y, x) \equiv T$ $\exists x\forall yP(y, x) \equiv F$

$$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$$

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$$

要求: β 中不含 x

$$\forall x.\ (\alpha \lor \beta) \leftrightarrow (\forall x.\ \alpha) \lor \beta$$

$$\forall x.\ (\alpha \land \beta) \leftrightarrow (\forall x.\ \alpha) \land \beta$$

$$\exists x.\ (\alpha \lor \beta) \leftrightarrow (\exists x.\ \alpha) \lor \beta$$

$$\exists x.\ (\alpha \land \beta) \leftrightarrow (\exists x.\ \alpha) \land \beta$$

一阶谓词逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

(简化版本)

$\forall$-elim

$$\frac{\forall x.\ \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is free for x in α

$$\forall x.\ P(x) \vdash P(c) \quad (c \text{ 是任意常元符号})$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (x < y) \vdash \exists y.\ (c < y) \quad (c \text{ 是任意常元符号})$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (x < y) \vdash \exists y.\ (z < y) \quad (z \neq y \text{ 是任意变元符号})$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (x < y) \nvdash \exists y.\ (y < y) \quad (y \text{ is } \textit{not} \text{ free for } x \text{ in } \alpha)$$

∀-elim推理规则的应用

$$\frac{\text{每个人都是要死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是要死的}}$$

$$\frac{\forall x.\ (H(x) \to M(x)) \qquad H(s)}{M(s)}$$

∀-intro

$$\frac{\begin{matrix}[t] \\ \vdots \\ \alpha[t/x]\end{matrix}}{\forall x.\ \alpha} \quad (\forall x\text{-intro})$$

where, t is a fresh variable

“任取 t, 如果能证明 α 对 t 成立, 则 α 对所有 x 成立”

∀-推理规则的应用

$$\left\{P(t), \forall x(P(x) \to \neg Q(x))\right\} \vdash \neg Q(t)$$

$$P(t) \quad (\text{前提}) \tag{1}$$

$$\forall x.\ (P(x) \to \neg Q(x)) \quad (\text{前提}) \tag{2}$$

$$P(t) \to \neg Q(t) \quad (\forall\text{-elim}, (2)) \tag{3}$$

$$\neg Q(t) \quad (\to\text{-elim}, (1), (3)) \tag{4}$$

$\forall$-推理规则的应用

$$\left\{\forall x.\ (P(x) \to Q(x)), \forall x.\ P(x)\right\} \vdash \forall x.\ Q(x)$$

$$\forall x.\ (P(x) \to Q(x)) \quad (\text{前提}) \tag{1}$$

$$\forall x.\ P(x) \quad (\text{前提}) \tag{2}$$

$$[x_0] \quad (\text{引入变量}) \tag{3}$$

$$P(x_0) \to Q(x_0) \quad (\forall\text{-elim}, (1), (3)) \tag{4}$$

$$P(x_0) \quad (\forall\text{-elim}, (2), (3)) \tag{5}$$

$$Q(x_0) \quad (\to\text{-elim}, (4), (5)) \tag{6}$$

$$\forall x.\ Q(x) \quad (\forall\text{-intro}, (3) - (6)) \tag{7}$$

$\exists$-intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x.\ \alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is free for x in α

“如果 α 对某个项 t 成立, 则 $\exists x.\ \alpha$ 成立。”

$P(c) \vdash \exists x.\ P(x) \quad c$ 是任意常元符号

$\forall y.\ (y = y) \nvdash \exists x.\ \forall y.\ (x = y) \quad$ (y is *not* free for x in α)

∃-elim

$$\frac{\exists x.\ \alpha}{\alpha[x_0/x]} \quad (\exists\text{-elim})$$

where x_0 is free for x in α

$\exists$-elim

$$\dfrac{\exists x.\ \alpha \qquad [x_0] \qquad \begin{array}{c}\big[\alpha[x_0/x]\big] \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\beta}\ (\exists\text{-elim})$$

where x_0 is free for x in α

"假设 x_0 使得 α 成立, 如果从 $\alpha[x_0/x]$ 可以推导出 β,
则从 $\exists x.\ \alpha$ 可以推导出 β"

∃-推理规则的应用

$$\forall x.\ P(x) \vdash \exists x.\ P(x)$$

$$\forall x.\ P(x) \quad (\text{前提}) \tag{1}$$

$$[x_0] \quad (\text{引入变量}) \tag{2}$$

$$P(x_0) \quad (\forall\text{-elim}, (1), (2)) \tag{3}$$

$$\exists x.\ P(x) \quad (\exists\text{-intro}, (3)) \tag{4}$$

$\forall, \exists$-推理规则的应用

$$\left\{\forall x.\ (P(x) \to Q(x)), \exists x.\ P(x)\right\} \vdash \exists x.\ Q(x)$$

$$\begin{aligned}
\forall x.\ (P(x) \to Q(x)) &\quad (\text{前提}) && (1)\\
\exists x.\ P(x) &\quad (\text{前提}) && (2)\\
[x_0] \quad [P(x_0)] &\quad (\text{引入变量与假设}) && (3)\\
P(x_0) \to Q(x_0) &\quad (\forall\text{-elim}, (1), (3)) && (4)\\
Q(x_0) &\quad (\to\text{-elim}, (3), (4)) && (5)\\
\exists x.\ Q(x) &\quad (\exists\text{-intro}, (5)) && (6)\\
\exists x.\ Q(x) &\quad (\exists\text{-elim}, (2), (3)-(6)) && (7)
\end{aligned}$$

$\forall, \exists$-推理规则的应用

$$\left\{\exists x.\ P(x), \forall x.\ \forall y.\ (P(x) \to Q(y))\right\} \vdash \forall y.\ Q(y)$$

$$\exists x.\ P(x) \quad \text{(前提)} \qquad (1)$$

$$\forall x.\ \forall y.\ (P(x) \to Q(y)) \quad \text{(前提)} \qquad (2)$$

$$[x_0] \quad [P(x_0)] \quad \text{(引入变量与假设)} \qquad (3)$$

$$\forall y.\ (P(x_0) \to Q(y)) \quad (\forall\text{-elim}, (2), (3)) \qquad (4)$$

$$[y_0] \quad \text{(引入变量)} \qquad (5)$$

$$P(x_0) \to Q(y_0) \quad (\forall\text{-elim}, (4), (5)) \qquad (6)$$

$$Q(y_0) \quad (\to\text{-elim}, (3), (6)) \qquad (7)$$

$$Q(y_0) \quad (\exists\text{-elim}, (1), (3)-(7)) \qquad (8)$$

$$\forall y.\ Q(y) \quad (\forall\text{-intro}, (5)-(8)) \qquad (9)$$

$\forall, \exists$-推理规则的应用

请使用一阶谓词逻辑公式表达下列命题与推理

给定如下“前提”, 请判断“结论”是否有效, 并说明理由。

前提:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;

(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧 (幸亏如此)。

$$\frac{\forall x.\ A(x) \lor K(x) \qquad \forall x.\ J(x) \to \neg A(x) \qquad \exists x.\ \neg K(x)}{\exists x.\ \neg J(x)}$$

$$
\begin{aligned}
&\forall x.\ A(x) \lor K(x) && (\text{前提}) && (1)\\
&\forall x.\ J(x) \to \neg A(x) && (\text{前提}) && (2)\\
&\exists x.\ \neg K(x) && (\text{前提}) && (3)\\
&[x_0] \quad [\neg K(x_0)] && (\text{引入变量与假设}) && (4)\\
&A(x_0) \lor K(x_0) && (\forall\text{-elim}, (1), (4)) && (5)\\
&A(x_0) && ((4), (5)) && (6)\\
&J(x_0) \to \neg A(x_0) && (\forall\text{-elim}, (2), (4)) && (7)\\
&\neg J(x_0) && ((6), (7)) && (8)\\
&\exists x.\ \neg J(x) && (\exists\text{-intro}, (8)) && (9)\\
&\exists x.\ \neg J(x) && (\exists\text{-elim}, (3) - (8)) && (10)
\end{aligned}
$$

$$\forall x.\ A(x) \lor K(x) \tag{1}$$

$$\forall x.\ J(x) \to \neg A(x) \tag{2}$$

$$\exists x.\ \neg K(x) \tag{3}$$

根据 (3), 不妨设 $\neg K(x)$ 对 x_0 成立:

$$\neg K(x_0) \tag{4}$$

根据 (1), 有

$$A(x_0) \lor K(x_0) \tag{5}$$

根据 (4) 与 (5), 有

$$A(x_0) \tag{6}$$

根据 (2), 有

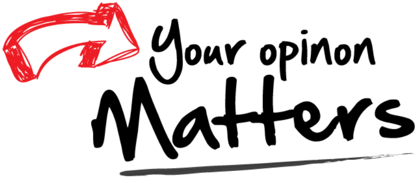
$$J(x_0) \to \neg A(x_0) \tag{7}$$

根据 (6) 与 (7), 有

$$\neg J(x_0) \tag{8}$$

因此, $\exists x.\ \neg J(x)$


Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn