(二) 一阶谓词逻辑

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 18 日

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

$$\frac{\text{每个人都是要死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是要死的}}$$

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

$$\frac{\text{每个人都是要死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是要死的}}$$

$$\frac{P \qquad Q}{R}$$

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

$$\frac{\text{每个人都是要死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是要死的}}$$

$$\frac{P \qquad Q}{R}$$

命题逻辑无法表达：个体、全体以及它们之间的关系

一阶谓词逻辑

Gottlob Frege (1848 ∼ 1925)

一阶谓词逻辑的语法

Definition (命题逻辑的语言)

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

- 逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
- 量词符号: $\forall$ (全称量词), $\exists$ (存在量词)
- 变元符号: $x, y, z, \ldots$
- 左右括号: (,)
- 常数符号: 零个或多个常数符号
- 函数符号: n-元函数符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)
- 谓词符号: n-元谓词符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)

Definition (命题逻辑的语言)

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

- 逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 量词符号: $\forall$ (全称量词), $\exists$ (存在量词)
- 变元符号: $x, y, z, \ldots$
- 左右括号: (,)
- 常数符号: 零个或多个常数符号
- 函数符号: n-元函数符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)
- 谓词符号: n-元谓词符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)

Q : 为什么没有命题符号 $P, Q, \ldots$?

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

Definition (项 (Item))

(1) 每个变元 $x, y, z, \ldots$ 都是一个项;

(2) 每个常数符号都是一个项;

(3) 如果 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项, 且 f 为一个 n 元函数符号, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;

(4) 除此之外, 别无其它。

$$x$$

$$\mathbf{0}$$

$$S\mathbf{0} \qquad +(x, SSS0) \qquad \times(+(x, SSS0), y)$$

Definition (公式 (Formula))

(1) 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号,
则 $P(t_1, \ldots, t_n)$ 为公式, 称为**原子公式**;

(2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;

(3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x.\ \alpha$ 与 $\exists x.\ \alpha$ 也是公式;

(4) 除此之外, 别无其它。

约定:

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg (Sx = 0)$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y.\ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y. \ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数
($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \land \forall y, z. \ (y < x \land z < x) \to \neg(y \times z = x)$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg (Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y.\ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数
($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \wedge \forall y, z.\ (y < x \wedge z < x) \to \neg (y \times z = x)$$

(4) 给定任何性质 (谓词) $P(x)$, 自然数上的数学归纳原理

$$(P(0) \wedge \forall x.\ (P(x) \to P(Sx))) \to (\forall x.\ P(x))$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y.\ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数
($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \land \forall y, z.\ (y < x \land z < x) \to \neg(y \times z = x)$$

(4) 给定任何性质 (谓词) $P(x)$, 自然数上的数学归纳原理

$$(P(0) \land \forall x.\ (P(x) \to P(Sx))) \to (\forall x.\ P(x))$$

(5) 哥德巴赫猜想 (任一大于 2 的偶数, 都可表示成两个素数之和)

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+}.\ \exists \delta \in \mathbb{R}^{+}.\ \forall x \in \mathbb{R}^{+}.\ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon)$$

A function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is called

- pointwise continuous if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- uniformly continuous if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

一阶谓词逻辑的语义

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\bot$)”值。

$$\forall x.\ Sx > \mathbf{0}$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\bot$)”值。

$$\forall x.\ Sx > \mathbf{0}$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (y < x)$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 $(T/1/\top)$”、“假 $(F/0/\bot)$”值。

$$\forall x.\ Sx > \mathbf{0}$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (y < x)$$

$$x > \mathbf{0}$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\bot$)”值。

$$\forall x.\ Sx > \mathbf{0}$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (y < x)$$

$$x > \mathbf{0}$$

一阶谓词逻辑公式 α 的真假值取决于

(1) 确定量词的论域

(2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释

(3) 对自由变元的解释 (赋值函数 s)

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的"真 $(T/1/\top)$"、"假 $(F/0/\perp)$"值。

$$\forall x.\ Sx > \mathbf{0}$$

$$\forall x.\ \exists y.\ (y < x)$$

$$x > \mathbf{0}$$

一阶谓词逻辑公式 α 的真假值取决于

(1) 确定量词的论域

(2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释

(3) 对自由变元的解释 (赋值函数 s)

这种"**解释**"将公式映射到一个**数学结构** $\mathcal{U}$ 上, 决定了该公式的语义

Definition ($(\mathcal{U}, s) \models \alpha$)

$\mathcal{U}$ 与 s 满足公式 α:

$$(\mathcal{U}, s) \models \alpha$$

- 将 α 中的常数符号、函数符号、谓词符号按照数学结构 $\mathcal{U}$ 进行解释
- 将量词的论域限制在集合 $|\mathcal{U}|$ 上,
- 将自由变元 x 解释为 $s(x)$,
- 这样就将公式 α 翻译成了某个数学领域中的命题
- 使用数学领域知识我们知道该命题成立

$$\alpha : \forall x. \ (x \times x \neq 1 + 1)$$

$$\alpha : \forall x.\ (x \times x \neq 1 + 1)$$

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$ 中为真

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ 中为假

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的结构 $\mathcal{U}$ 与赋值 s都满足 α。

$$\forall x.\ P(x) \models P(y)$$

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的结构 $\mathcal{U}$ 与赋值 s 都满足 α。

$$\forall x.\ P(x) \models P(y)$$

$$P(y) \not\models \forall x.\ P(x)$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((Pxy \land Pyz) \to Pxz)$$

$$\beta : \forall x \forall y ((Pxy \land Pyx) \to x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y Pxy \to \exists y \forall x Pxy$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z((Pxy \wedge Pyz) \to Pxz)$$

$$\beta : \forall x \forall y((Pxy \wedge Pyx) \to x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y Pxy \to \exists y \forall x Pxy$$

$$\{\alpha, \beta\} \models \gamma \, ?$$

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

Definition (语义等价 (Logically Equivalent))

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β **语义等价**, 记为 $\alpha \equiv \beta$。

Definition (普遍有效的 (Valid))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 是**普遍有效的**, 记为 $\models \alpha$。

普遍有效的公式在所有可能的结构 $\mathcal{U}$ 与所有可能的赋值 s下均为真。

$$\forall x.\ P(x) \models P(y)$$

$$\forall x.\ P(x) \to P(y)$$

$$\neg\forall x\alpha \leftrightarrow \exists x\neg\alpha$$

$$\neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha$$

$$\forall x \forall y \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \leftrightarrow \exists y \exists x \alpha$$

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$$

$$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$$

$$\forall x\alpha \to \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \to \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \to \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \to \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$$

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$$

$$\forall x\alpha \to \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \to \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$$

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$$

$$\forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \exists x\beta)$$

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。
前提如下：

(1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者)；
(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧 (幸亏如此)。

例子

一阶谓词逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

∀-elim

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

∀-elim

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$\forall$-elim

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \ \rightarrow \ \exists y(t < y)$$

∀-elim

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \ \to \ \exists y(t < y)$$

$$\cancel{\forall x \exists y(x < y) \ \to \ \exists y(y < y)}$$

$\forall$-intro

$$\dfrac{\begin{array}{c}[t]\\ \vdots \\ \alpha[t/x]\end{array}}{\forall x\alpha}\quad(\forall x\text{-intro})$$

where, t is **fresh** variable never used elsewhere

∀-推理规则的应用

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x)\} \vdash \forall x Q(x)$$

∀-推理规则的应用

$$\{P(t), \forall x(P(x) \to \neg Q(x))\} \vdash \neg Q(t)$$

∃-intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x \alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$\exists$-intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x \alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y(x = y)$$

∃-intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x \alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y (x = y)$$

$\exists$-intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x \alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y (x = y)$$

$$\cancel{\exists x \forall y (x \neq y)}$$

∃-elim

$$\cfrac{\exists x\alpha \qquad \begin{matrix}[\alpha[t/x]] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\ (\exists\text{-elim})$$

where t does not occur in β

∃-推理规则的应用

$$\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$$

∃-推理规则的应用

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x)\} \vdash \exists x Q(x)$$

∀, ∃-推理规则的应用

$$\{\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$$

∀, ∃-推理规则的应用

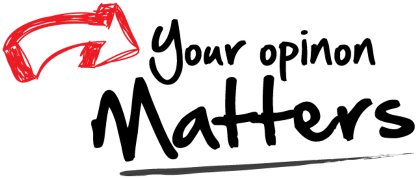
给定如下“前提”, 请判断“结论”是否有效, 并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;
(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧 (幸亏如此)。

$\forall, \exists$-推理规则的应用


Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn