（三）数学归纳法

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 25 日

Theorem (第一数学归纳法 (The First Mathematical Induction))

令 $P(n)$ 表示关于自然数 n 的某个性质。如果

(i) $P(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $P(n)$ 成立, 则 $P(n+1)$ 成立。

那么, $P(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

Theorem (第一数学归纳法 (The First Mathematical Induction))

令 $P(n)$ 表示关于自然数 n 的某个性质。如果

(i) $P(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $P(n)$ 成立, 则 $P(n+1)$ 成立。

那么, $P(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

$$\frac{P(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.\ \big(P(n) \to P(n+1)\big)}{\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)} \quad (\text{第一数学归纳法})$$

Theorem (第一数学归纳法 (The First Mathematical Induction))

令 $P(n)$ 表示关于自然数 n 的某个性质。如果

(i) $P(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $P(n)$ 成立, 则 $P(n+1)$ 成立。

那么, $P(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

$$\frac{P(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big(P(n) \to P(n+1)\Big)}{\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)} \quad (\text{第一数学归纳法})$$

$$\bigg(P(0) \land \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big(P(n) \to P(n+1)\Big)\bigg) \to \forall n \in \mathbb{N}.\ P(n).$$

Theorem (第二数学归纳法 (The Second Mathematical Induction))

令 $Q(n)$ 表示关于自然数 n 的某个性质。如果

(i) $Q(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $Q(1), Q(2), \ldots, Q(n)$ 都成立, 则 $Q(n+1)$ 成立。

那么, $Q(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

Theorem (第二数学归纳法 (The Second Mathematical Induction))

令 $Q(n)$ 表示关于自然数 n 的某个性质。如果

(i) $Q(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $Q(1), Q(2), \ldots, Q(n)$ 都成立, 则 $Q(n+1)$ 成立。

那么, $Q(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

$$\frac{Q(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big((Q(1) \wedge \cdots \wedge Q(n)) \to Q(n+1)\Big)}{\forall n \in \mathbb{N}.\ Q(n)} \quad (\text{第二数学归纳法})$$

Theorem (第二数学归纳法 (The Second Mathematical Induction))

令 $Q(n)$ 表示关于自然数 n 的某个性质。如果

(i) $Q(0)$ 成立;

(ii) 对任意自然数 n, 如果 $Q(1), Q(2), \ldots, Q(n)$ 都成立, 则 $Q(n+1)$ 成立。

那么, $Q(n)$ 对所有自然数 n 都成立。

$$\frac{Q(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big((Q(1) \land \cdots \land Q(n)) \to Q(n+1)\Big)}{\forall n \in \mathbb{N}.\ Q(n)} \quad (\text{第二数学归纳法})$$

$$\Big(Q(0) \land \forall n \in \mathbb{N}.\ \Big((Q(1) \land \cdots \land Q(n)) \to Q(n+1)\Big)\Big) \to \forall n \in \mathbb{N}.\ Q(n).$$

Theorem (数学归纳法)

第一数学归纳法与第二数学归纳法等价。

Theorem (数学归纳法)

第一数学归纳法与第二数学归纳法等价。

Q : 第二数学归纳法也被称为**“强” (Strong)** 数学归纳法，它强在何处?

Lemma

第二数学归纳法蕴含第一数学归纳法。

Lemma

第一数学归纳法蕴含第二数学归纳法。

数学归纳法从何而来?

Definition (良序原理 (The Well-Ordering Principle))

自然数集的任意非空子集都有一个最小元。

Theorem

The Island of Blue Eyes

所有马的颜色都相同。

$F(n)$ 是偶数, 当且仅当 $F(n+3)$ 是偶数。

堆盒子游戏

现有 n 个盒子堆在一起。你可以移动这些盒子, 每次移动只能将一堆盒子分成不为空的两堆盒子, 最后得到 n 堆盒子, 即每堆只有一个盒子时, 游戏结束。

每次移动盒子时, 如果将高度为 $a+b$ 的盒子堆拆分成高度为 a 和 b 的两堆, 玩家可以得 ab 分。

玩家的总得分是每次移动盒子得分的总和。请问, 如何才能得到最高分?

+fig

Lemma

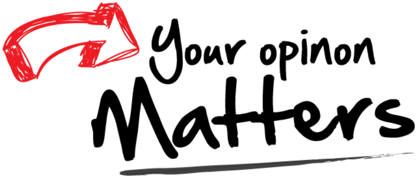
任何一种平铺 n 个盒子的方法，得分都是 $\frac{n(n-1)}{2}$。

只用以下三种图示拼出 $2 \times n$ 的形状, 有几种不同的拼法?

$$T(n) = ?T(n-1) + ??T(n-2) + \dots$$

请证明, 只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。


Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn