

(二) 一阶谓词逻辑

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 18 日



如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

每个人都是要死的 苏格拉底是人

苏格拉底是要死的

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

每个人都是要死的 苏格拉底是人

苏格拉底是要死的

$$\frac{P \quad Q}{R}$$

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

$$\frac{\text{每个人都是要死的} \quad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是要死的}}$$

$$\frac{P \quad Q}{R}$$

命题逻辑无法表达：个体、全体以及它们之间的关系

一阶谓词逻辑



Gottlob Frege (1848 ~ 1925)

一阶谓词逻辑的语法



例子: 谓词 (Predicate)

例子: 谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

例子: 谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

(2) 5 大于 3

例子: 谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

(2) 5 大于 3

(3) 地球绕着太阳转

例子: 谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

(2) 5 大于 3

(3) 地球绕着太阳转

(4) 点 a 在点 b 与点 c 之间

例子: 谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

(2) 5 大于 3

(3) 地球绕着太阳转

(4) 点 a 在点 b 与点 c 之间

例子: 谓词 (Predicate)

- (1) 张三是个法外狂徒
- (2) 5 大于 3
- (3) 地球绕着太阳转
- (4) 点 a 在点 b 与点 c 之间

一元谓词表达了个体的性质

多元谓词表达了个体之间的关系

零元谓词即命题逻辑中的命题 (P : 张三是个法外狂徒)

Definition (一阶谓词逻辑的语言 (Language))

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词符号: \forall (forall; 全称量词), \exists (exists; 存在量词)

变元符号: x, y, z, \dots

左右括号: $(,)$

Definition (一阶谓词逻辑的语言 (Language))

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词符号: \forall (forall; 全称量词), \exists (exists; 存在量词)

变元符号: x, y, z, \dots

左右括号: $(,)$

常数符号: 零个或多个常数符号 a, b, c, \dots , 表达特殊的个体

函数符号: n -元函数符号 f, g, h, \dots ($n \in \mathbb{N}^+$), 表达个体上的运算

谓词符号: n -元谓词符号 P, Q, R, \dots ($n \in \mathbb{N}$), 表达个体的性质与关系

初等数论的语言

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

“项”是一阶谓词逻辑要讨论的个体对象，它本身无所谓真假。

Definition (项 (Term))

- (1) 每个变元 x, y, z, \dots 都是一个项;
- (2) 每个常数符号都是一个项;
- (3) 如果 t_1, t_2, \dots, t_n 是项, 且 f 为一个 n -元函数符号, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- (4) 除此之外, 别无其它。

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

x

0

$$S0 \quad x + SSS0 \quad (x + SSS0) \times y$$

公式刻画了个体的性质或者个体之间的关系, 它的语义就是它的真假值。

Definition (公式 (Formula))

- (1) 如果 t_1, \dots, t_n 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 为公式, 称为原子公式;
- (2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;
- (3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x. \alpha$ 与 $\exists x. \alpha$ 也是公式;
- (4) 除此之外, 别无其它。

公式刻画了个体的性质或者个体之间的关系, 它的语义就是它的真假值。

Definition (公式 (Formula))

- (1) 如果 t_1, \dots, t_n 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 为公式, 称为**原子公式**;
- (2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;
- (3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x. \alpha$ 与 $\exists x. \alpha$ 也是公式;
- (4) 除此之外, 别无其它。

约定: 量词符号 \forall 与 \exists 的管辖范围尽可能短

$\forall x. \alpha \rightarrow \beta$: 表示 $(\forall x. \alpha) \rightarrow \beta$ 不表示 $\forall x. (\alpha \rightarrow \beta)$

$$L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

$$L = \{\mathbf{0}, \mathbf{S}, +, \times, <, =\}$$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x. \forall y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x. \forall y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数 ($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$\text{Prime}(x) : S0 < x \wedge \forall y. \forall z. (y < x \wedge z < x) \rightarrow \neg(y \times z = x)$$

$$L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$\forall x. \forall y. (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数 ($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$\text{Prime}(x) : S0 < x \wedge \forall y. \forall z. (y < x \wedge z < x) \rightarrow \neg(y \times z = x)$$

(4) 哥德巴赫猜想 (任一大于 2 的偶数, 都可表示成两个素数之和)

$$\begin{aligned} \forall x. (SS0 < 2 \wedge (\exists y. 2 \times y = x)) \rightarrow \\ (\exists x_1. \exists x_2. \text{Prime}(x_1) \wedge \text{Prime}(x_2) \wedge x_1 + x_2 = x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

对于任意的正实数 ϵ , 存在一个正实数 δ ,
使得对于任意的 x , 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - b| < \epsilon$ 成立。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

对于任意的正实数 ϵ , 存在一个正实数 δ ,
使得对于任意的 x , 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - b| < \epsilon$ 成立。

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+. \exists \delta \in \mathbb{R}^+. \forall x \in \mathbb{R}^+. (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

$\forall x \in A. \alpha$ 实际上是 $\forall x. (x \in A \rightarrow \alpha)$ 的简记

$\exists x \in A. \alpha$ 实际上是 $\exists x. (x \in A \wedge \alpha)$ 的简记

本周作业之一: 使用一阶谓词逻辑公式表达下列概念

A function f from \mathbb{R} to \mathbb{R} is called

- (1) *pointwise continuous* (连续的) if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- (2) *uniformly continuous* (一致连续的) if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

请使用一阶谓词逻辑公式表达下列命题

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。

前提：

- (1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧（幸亏如此）。

请使用一阶谓词逻辑公式表达下列命题

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。

前提：

- (1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧（幸亏如此）。

$$\frac{\forall x. A(x) \vee K(x) \quad \forall x. J(x) \rightarrow \neg A(x) \quad \exists x. \neg K(x)}{\exists x. \neg J(x)}$$

以下概念与程序设计语言中相应的概念类似, 我们举例说明, 不作定义

Definition (作用域 (Scope)、约束变元 (Bind)、自由变元 (Free))

$$(1) \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(2) (\forall x. P(x)) \rightarrow Q(x)$$

$$(3) \forall x. (P(x) \rightarrow (\exists y. R(x, y)))$$

$$(4) (\forall x. \forall y. (P(x, y) \wedge Q(y, z))) \wedge \exists x. P(x, y)$$

以下概念与程序设计语言中相应的概念类似, 我们举例说明, 不作定义

Definition (作用域 (Scope)、约束变元 (Bind)、自由变元 (Free))

$$(1) \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(2) (\forall x. P(x)) \rightarrow Q(x)$$

$$(3) \forall x. (P(x) \rightarrow (\exists y. R(x, y)))$$

$$(4) (\forall x. \forall y. (P(x, y) \wedge Q(y, z))) \wedge \exists x. P(x, y)$$

Definition (改名 (Rename))

为尽量避免重名, 可将约束变元或自由变元**改名**为**新鲜 (fresh)**变元

一阶谓词逻辑的语义



一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真假”值

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真假”值

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式的真假值取决于

- (1) 对量词论域 (universe) 的解释, 限定个体范围
- (2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释
- (3) 对自由变元的解释 (赋值函数 s)

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真假”值

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式的真假值取决于

- (1) 对量词论域 (universe) 的解释, 限定个体范围
- (2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释
- (3) 对自由变元的解释 (赋值函数 s)

这种“**解释**”将公式映射到一个**数学结构** \mathcal{U} 上, 决定了该公式的语义

Definition $((\mathcal{U}, s) \models \alpha)$

\mathcal{U} 与 s 满足公式 α :

$$(\mathcal{U}, s) \models \alpha$$

- ▶ 将 α 中的常数符号、函数符号、谓词符号按照结构 \mathcal{U} 进行解释,
- ▶ 将量词的论域限制在集合 $|\mathcal{U}|$ 上,
- ▶ 将自由变元 x 解释为 $s(x)$,
- ▶ 这样就将公式 α 翻译成了某个数学领域中的命题,
- ▶ 然后, 使用数学领域知识我们知道该命题成立

$$\alpha : \forall x. (x \times x \neq 1 + 1)$$

$$\alpha : \forall x. (x \times x \neq 1 + 1)$$

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$ 中为真

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ 中为假

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的**结构** \mathcal{U} 与**赋值** s 都满足 α 。

$$\forall x. P(x) \models P(y)$$

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的**结构** \mathcal{U} 与**赋值** s 都满足 α 。

$$\forall x. P(x) \models P(y)$$

$$P(y) \not\models \forall x. P(x)$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$$

$$\beta : \forall x \forall y ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\{\alpha, \beta\} \models \gamma ?$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$$

$$\beta : \forall x \forall y ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\{\alpha, \beta\} \models \gamma ?$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{N} \quad P(x, y) : x \leq y$$

$\{\alpha\} \models \beta$ 简记为 $\alpha \models \beta$

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

Definition (语义等价 (Logically Equivalent))

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β **语义等价**, 记为 $\alpha \equiv \beta$ 。

$$\neg(\forall x. \alpha) \equiv \exists x. \neg\alpha$$

相当于命题逻辑中的“重言式”，可用于公式推导

Definition (普遍有效的 (Valid))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 是**普遍有效的**, 记为 $\models \alpha$ 。

相当于命题逻辑中的“重言式”，可用于公式推导

Definition (普遍有效的 (Valid))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 是**普遍有效的**, 记为 $\models \alpha$ 。

普遍有效的公式在**所有可能的结构 \mathcal{U}** 与**所有可能的赋值 s** 下均为真。

$(\forall x. P(x)) \rightarrow P(y)$ 是普遍有效的

$$\forall x. P(x) \models P(y)$$

$$\neg \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha$$

$$\neg(\forall x \in A. \alpha) \leftrightarrow \exists x \in A. \neg \alpha$$

$$\forall x \forall y \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \leftrightarrow \exists y \exists x \alpha$$

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$$

$$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$$

$$\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$$

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$$

一阶谓词逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

$$\frac{\forall x\alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\frac{\forall x\alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \rightarrow \exists y(\textcolor{blue}{t} < y)$$

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \rightarrow \exists y(t < y)$$

$$\forall x \exists y(x < y) \rightarrow \exists y(t < y)$$

$$\frac{\begin{array}{c} [t] \\ \vdots \\ \alpha[t/x] \end{array}}{\forall x \alpha} \quad (\forall x\text{-intro})$$

where, t is **fresh** variable never used elsewhere

\forall -推理规则的应用

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall xP(x)\} \vdash \forall xQ(x)$$

\forall -推理规则的应用

$$\{P(t), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))\} \vdash \neg Q(t)$$

\exists -intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y(x = y)$$

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y(x = y)$$

\exists -intro

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x\alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\alpha : \forall y(x = y)$$

$$\exists x \forall y (x \neq y)$$

\exists -elim

$$\frac{\exists x\alpha \quad \begin{array}{c} [\alpha[t/x]] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta} \quad (\exists\text{-elim})$$

where t does not occur in β

\exists -推理规则的应用

$$\forall xP(x) \vdash \exists xP(x)$$

\exists -推理规则的应用

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists xP(x)\} \vdash \exists xQ(x)$$

\forall, \exists -推理规则的应用

$$\{\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y))\} \vdash \forall y Q(y)$$

\forall, \exists -推理规则的应用

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。

前提如下：

- (1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧（幸亏如此）。

\forall, \exists -推理规则的应用

Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn