

## (七) 集合: 序关系 (Ordering Relations)

魏恒峰

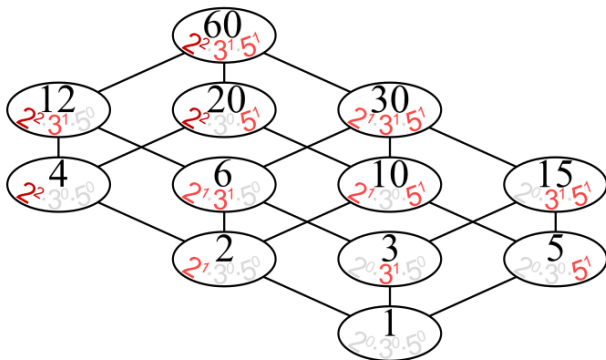
hfwei@nju.edu.cn

2021 年 04 月 22 日



$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

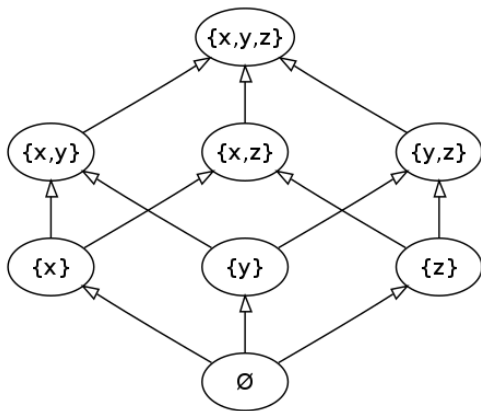
$X$  上的整除关系



自反 + 反对称 + 传递

$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$  上的包含  $\subseteq$  关系



自反 + 反对称 + 传递

## Definition (偏序关系 (Partial Order))

令  $\preceq \subseteq X \times X$  是  $X$  上的二元关系。

如果  $\preceq$  满足以下条件, 则称  $\preceq$  是  $X$  上的偏序关系,  
并称  $(X, \preceq)$  为偏序集 (poset; Partially Ordered Set):

(1)  $\preceq$  是自反 (irreflexive) 的。

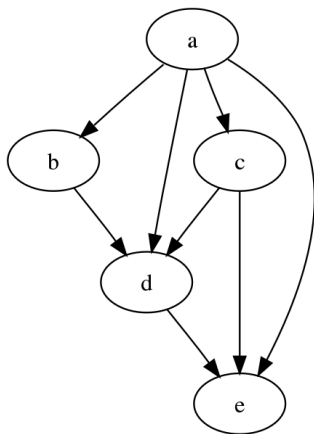
$$\forall x \in X. x \preceq x.$$

(2)  $\preceq$  是反对称 (antisymmetric) 的。

$$\forall x, y \in X. x \preceq y \wedge y \preceq x \rightarrow x = y.$$

(3)  $\preceq$  是传递 (transitive) 的。

$$\forall x, y, z \in X. x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z.$$



有向无环图 (DAG; Directed Acyclic Graph) 上的  
可达 (reachability) 关系

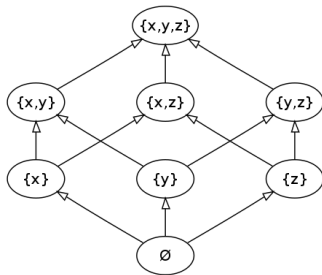
## Definition

设  $(X, \preceq)$  是偏序集。对任意  $a, b \in X$ ,  
严格小于 (strictly less than):

$$a \prec b \triangleq a \preceq b \wedge a \neq b$$

$a$  被  $b$  覆盖 (covered by):

$$a \prec b \wedge (\forall c \in X. (c \neq a \wedge c \neq b) \rightarrow \neg(a \preceq c \preceq b))$$



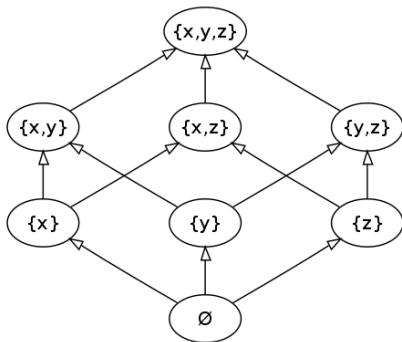
## Definition

设  $(X, \preceq)$  是偏序集。对  $a, b \in X$ ,  
可比的 (Comparable):

$$a \preceq b \vee b \preceq a$$

不可比的 (Incomparable):

$$\neg(a \preceq b \vee b \preceq a)$$

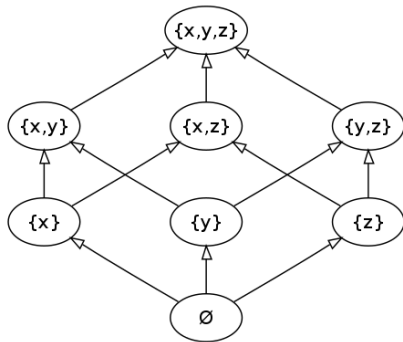


## Definition (链与反链 (Chain; Antichain))

设  $(X, \preceq)$  是偏序集。

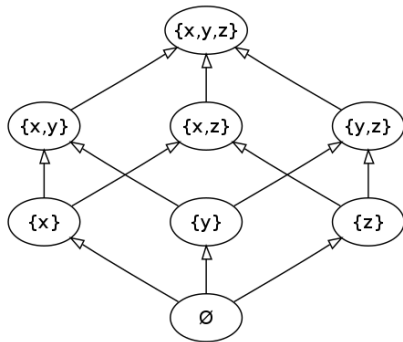
- ▶ 设  $S \subseteq X$  且  $S$  中元素两两可比, 则称  $S$  是链。
- ▶ 设  $S \subseteq X$  且  $S$  中元素两两不可比, 则称  $S$  是反链。

规定: 单元素集合既是链, 也是反链





$$\{\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}, \{\{y\}, \{y, z\}\}, \{\{z\}, \{x, z\}\}\}$$



$$\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$$

Theorem (Dilworth's Theorem)

最大反链的大小 = 最小链分解中链的条数

## Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order))

令  $\prec \subseteq X \times X$  是  $X$  上的二元关系。

如果  $\prec$  满足以下条件, 则称  $\prec$  是  $X$  上的严格偏序关系:

(1)  $\prec$  是反自反 (irreflexive) 的。

$$\forall x \in X. \neg(x \prec x).$$

(2)  $\prec$  是非对称 (asymmetric) 的。

$$\forall x, y \in X. x \prec y \rightarrow \neg(y \prec x).$$

(3)  $\prec$  是传递 (transitive) 的。

$$\forall x, y, z \in X. x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z.$$

$$(\mathcal{P}(X), \subset)$$

$$(1) + (3) \implies (2)$$

## Theorem

设  $\prec \subseteq X \times X$  是  $X$  上的严格偏序关系。

对于任意  $x, y, z \in X$ :

(1)  $x \prec y, x = y, y \prec x$  三者中至多有一个成立;

(2)  $(x \preceq y \wedge y \preceq x) \rightarrow x = y$ 。

$$(x \preceq y \triangleq x \prec y \vee x = y)$$

$$x \preceq y \wedge y \preceq x$$

$$\iff (x \prec y \vee x = y) \wedge (y \prec x \vee x = y)$$

$$\iff x = y \vee (x \prec y \wedge y \prec x)$$

$$\implies x = y \vee \text{False}$$

$$\implies x = y$$

## Definition (全序关系 (Total Order))

令  $\preceq \subseteq X \times X$  是  $X$  上的关系。

如果  $\preceq$  满足以下性质, 则称  $\preceq$  是  $X$  上的全序关系:

(1) 自反 (Reflexivity):

$$\forall x \in X. x \preceq x$$

(2) 反对称性 (Antisymmetric):

$$\forall x, y \in X. (x \preceq y \wedge y \preceq x) \rightarrow x = y$$

(3) 传递性 (Transitive):

$$\forall x, y, z \in X. x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z$$

(4) 连接性 (Connex; Totality):

$$\forall x, y \in X. x \preceq y \vee y \preceq x.$$

$$(\mathbb{R}, \leq) \quad (\mathbb{R}, \geq)$$

全序关系 = 偏序关系 + 连接性

## Definition (严格全序关系 (Strict Total Order))

令  $\prec \subseteq X \times X$  是  $X$  上的关系。

如果  $\prec$  满足以下条件, 则称  $\prec$  是  $X$  上的严格全序关系:

(1) 反自反 (Irreflexivity):

$$\forall x \in X. \neg(x \prec x)$$

(2) 传递性 (Transitive):

$$\forall x, y, z \in X. x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z$$

(3) 半连接性 (Semi-Connex):

$$\forall x, y \in X. \neg(x = y) \rightarrow ((x \prec y) \vee (y \prec x))$$

$$(\mathbb{R}, <) \quad (\mathbb{R}, >)$$

严格全序关系 = 严格偏序关系 + 半连接性

## Theorem

设  $\prec \subseteq X \times X$  是  $X$  上的严格全序关系。

$\prec$  满足三歧性 (*Trichotomous*):

$$\forall x, y \in X. (\textit{exactly one of } x \prec y, x = y, \textit{ or } y \prec x \textit{ holds})$$

## Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令  $\preceq \subseteq X \times X$  是  $X$  上的偏序。设  $a \in X$ 。

如果

$$\forall x \in X. \neg(a \prec x),$$

则称  $a$  是  $X$  的极大元。

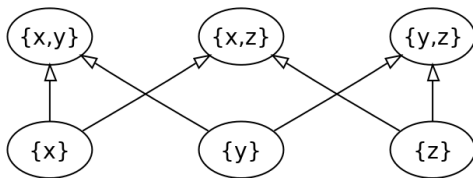
如果

$$\forall x \in X. \neg(x \prec a),$$

则称  $a$  是  $X$  的极小元。

$Q$  : 极大/极小元是否一定存在? 如果存在, 是否唯一?





$$(\mathbb{R}, \leq)$$

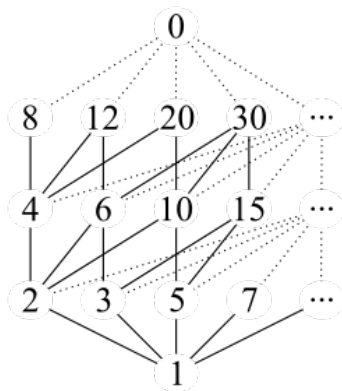
无极大元、无极小元

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

无极大元、有唯一极小元 0

$$(\{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$$

无极大元、有无穷多个极小元 (所有的素数)



Definition (最大元与最小元 (Maximum/Minimum; Greatest/Least; Largest/Smallest))

令  $\preceq \subseteq X \times X$  是  $X$  上的偏序。设  $a \in X$ 。

如果

$$\forall x \in X. x \preceq a,$$

则称  $a$  是  $X$  的**最大元**。

如果

$$\forall x \in X. a \preceq x,$$

则称  $a$  是  $X$  的**最小元**。

**Q : 最大/最小元是否一定存在? 如果存在, 是否唯一?**

## Theorem

偏序集  $(X, \preceq)$  如果有最大元或最小元, 则它们是唯一的。

假设存在两个最大元  $x$  与  $y$ 。

$$x \preceq y \wedge y \preceq x \implies x = y$$

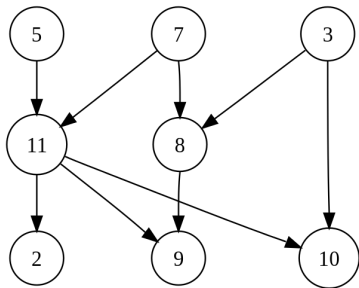
(反对称性)

## Definition (线性拓展 (Linear Extension))

设  $(X, \preceq)$  是偏序集,  $(X, \preceq')$  是全序集。如果

$$\forall x, y \in X. x \preceq y \rightarrow x \preceq' y,$$

则称  $\preceq'$  是  $\preceq$  的线性拓展。

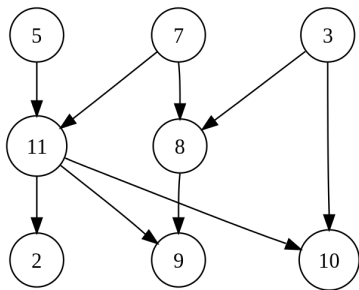


5, 7, 3, 11, 8, 2, 9, 10

3, 5, 7, 8, 11, 2, 9, 10

## Theorem

设  $(X, \preceq)$  是偏序集且  $X$  是有限集, 则  $\preceq$  的线性拓展必定存在。



## Theorem

设  $(X, \preceq)$  是偏序集且  $X$  是有限集, 则极小元一定存在。

## Definition (上界 (Upper Bound) 与下界 (Lower Bound))

设  $(X, \preceq)$  是偏序集。对于  $Y \subseteq X$ , 如果

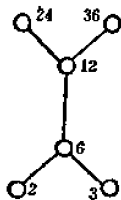
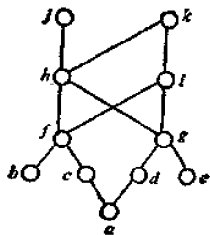
$$\exists x \in X. \forall y \in Y. y \preceq x,$$

则称  $x$  为  $Y$  的上界。

类似地, 如果

$$\exists x \in X. \forall y \in Y. x \preceq y,$$

则称  $x$  为  $Y$  的下界。

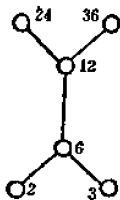
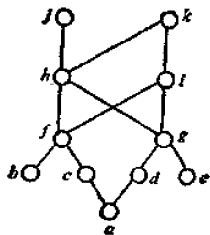




### Definition (最小上界 (Least Upper Bound; LUB))

设  $(X, \preceq)$  是偏序集,  $Y \subseteq X$  是  $X$  的子集,  $x \in X$  是  $Y$  的上界。

如果对于  $Y$  的所有上界  $x'$ , 均有  $x \preceq x'$ , 则称  $x$  是  $Y$  的最小上界。



### Definition (最大下界 (Greatest Lower Bound; GLB))

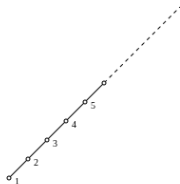
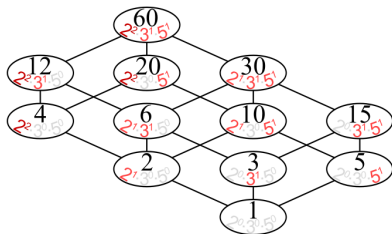
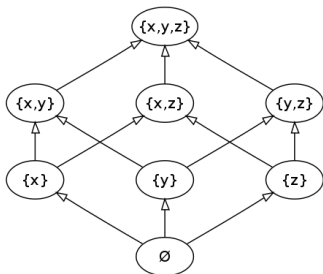
设  $(X, \preceq)$  是偏序集,  $Y \subseteq X$  是  $X$  的子集,  $x \in X$  是  $Y$  的下界。

如果对于  $Y$  的所有下界  $x'$ , 均有  $x' \preceq x$ , 则称  $x$  是  $Y$  的最大下界。

## Definition (格 (Lattice))

设  $(X, \preceq)$  是偏序集。

如果任意两个元素都有最小上界与最大下界, 则称  $(X, \preceq)$  为格。





"LET'S STOP HERE, SO WE HAVE  
ONLY GOOD MEMORIES  
OF WHAT WE LIVE."

QUOTESLIBRARY.ORG

FB/QUOTESLIBRARY.ORG

## Definition (良序 (Well-Ordering))

设  $(X, \preceq)$  是偏序集。

如果  $X$  的任意非空子集都有最小元, 则称  $(X, \preceq)$  为良序集。

$$(\mathbb{N}, \leq) \quad (\mathbb{Z}, \leq) \quad (\mathbb{R}, \leq)$$

数学归纳法      良序集

## Theorem

良序集  $(X, \preceq)$  一定是全序集。

对任意两个元素  $x, y \in X$ , 考虑  $\{x, y\}$  非空子集。

$$x \preceq y \vee y \preceq x$$

## Theorem

每个有限的全序集  $(X, \preceq)$  一定是良序集。

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

反设  $(X, \preceq)$  不是良序集。

存在非空子集  $\emptyset \neq Y \subseteq X$ ,  $Y$  中没有最小元素。

则  $Y$  中存在不可比元素 ( $Y$  是有限的!)

Thank  
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn