# (七) 集合: 序关系 (Ordering Relations)

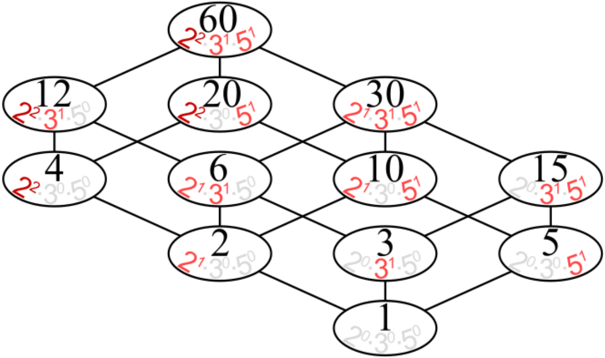
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 04 月 22 日

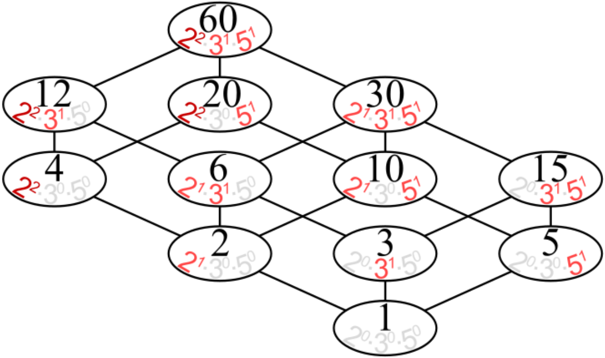
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$X$ 上的整除关系



$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$X$ 上的整除关系



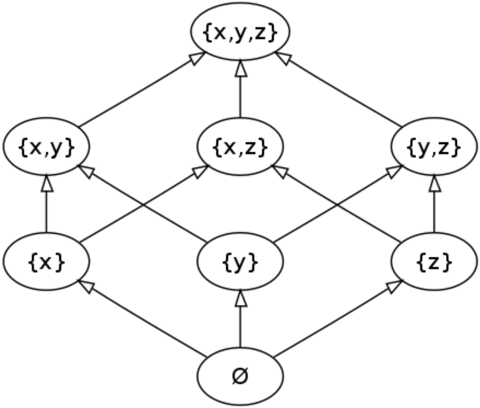

自反 + 反对称 + 传递

$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 $\subseteq$关系

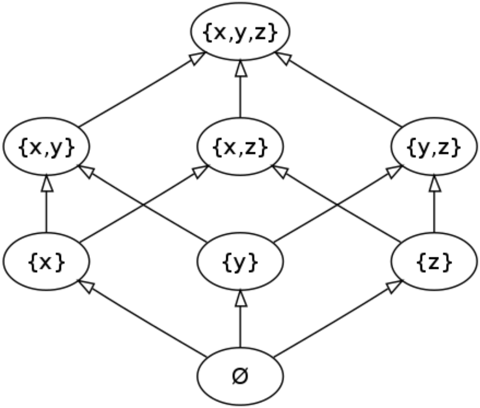
$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 $\subseteq$关系



$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 $\subseteq$关系




自反 + 反对称 + 传递

Definition (偏序关系 (Partial Order))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的二元关系。

如果 $\preceq$ 满足以下条件, 则称 $\preceq$ 是 $X$ 上的偏序关系,

并称 $(X, \preceq)$ 为偏序集 (poset; Partially Ordered Set):

(1) $\preceq$ 是自反 (irreflexive)的。

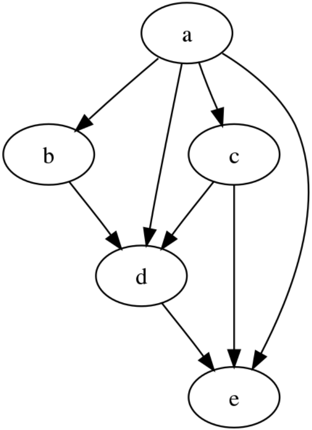
$$\forall x \in X.\ x \preceq x.$$

(2) $\preceq$ 是反对称 (antisymmetric)的。

$$\forall x, y \in X.\ x \preceq y \land y \preceq x \to x = y.$$

(3) $\preceq$ 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X.\ x \preceq y \land y \preceq z \to x \preceq z.$$




有向无环图 (DAG; Directed Acyclic Graph) 上的

可达 (reachability) 关系

Definition

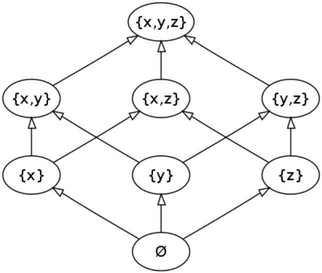
设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。对任意 $a, b \in X$,

严格小于 (strictly less than):

$$a \prec b \triangleq a \preceq b \land a \neq b$$

$a$ 被 $b$ 覆盖 (covered by):

$$a \prec b \land (\forall c \in X.\ (c \neq a \land c \neq b) \to \neg(a \preceq c \preceq b))$$



Definition

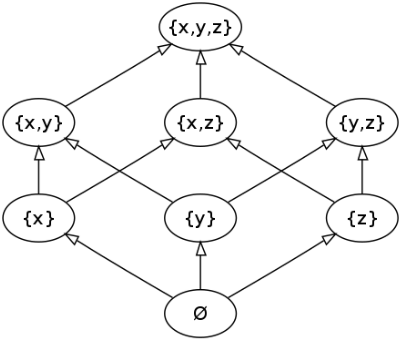
设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。对 $a, b \in X$,

可比的 (Comparable):

$$a \preceq b \lor b \preceq a$$

不可比的 (Incomparable):

$$\neg(a \preceq b \lor b \preceq a)$$

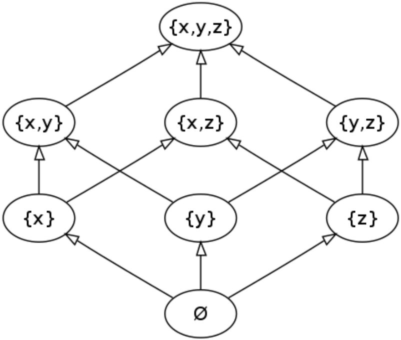


Definition (链与反链 (Chain; Antichain))

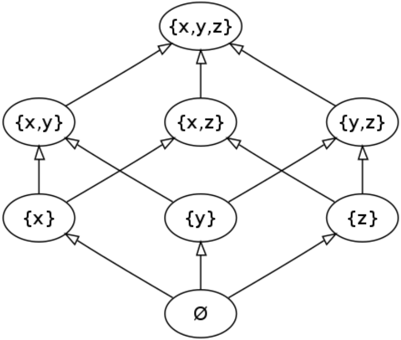
设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

- 设 $S \subseteq X$ 且 $S$ 中元素两两可比, 则称 $S$ 是链。
- 设 $S \subseteq X$ 且 $S$ 中元素两两不可比, 则称 $S$ 是反链。

规定: 单元素集合既是链, 也是反链



$$\{\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}, \{\{y\}, \{y, z\}\}, \{\{z\}, \{x, z\}\}\}$$




$$\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$$

**Theorem (Dilworth's Theorem)**

最大反链的大小 = 最小链分解中链的条数

**Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order))**

令 $\prec \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的二元关系。

如果 $\prec$ 满足以下条件, 则称 $\prec$ 是 $X$ 上的严格偏序关系:

(1) $\prec$ 是反自反 (irreflexive)的。

$$\forall x \in X.\ \neg(x \prec x).$$

(2) $\prec$ 是非对称 (asymmetric)的。

$$\forall x, y \in X.\ x \prec y \to \neg(y \prec x).$$

(3) $\prec$ 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X.\ x \prec y \land y \prec z \to x \prec z.$$

$$(\mathcal{P}(X), \subset)$$

## Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order))

令 $\prec \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的二元关系。

如果 $\prec$ 满足以下条件, 则称 $\prec$ 是 $X$ 上的严格偏序关系:

(1) $\prec$ 是反自反 (irreflexive)的。

$$\forall x \in X.\ \neg(x \prec x).$$

(2) $\prec$ 是非对称 (asymmetric)的。

$$\forall x, y \in X.\ x \prec y \to \neg(y \prec x).$$

(3) $\prec$ 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X.\ x \prec y \land y \prec z \to x \prec z.$$

$$(\mathcal{P}(X), \subset)$$

$$(1) + (3) \implies (2)$$

Theorem

设 $\prec \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的严格偏序关系。

对于任意 $x, y, z \in X$:

(1) $x \prec y$, $x = y$, $y \prec x$ 三者中至多有一个成立;

(2) $(x \preceq y \land y \preceq x) \to x = y$。

$$(x \preceq y \triangleq x \prec y \lor x = y)$$

### Theorem

设 $\prec \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的严格偏序关系。

对于任意 $x, y, z \in X$:

(1) $x \prec y$, $x = y$, $y \prec x$ 三者中至多有一个成立;

(2) $(x \preceq y \land y \preceq x) \to x = y$。

$$(x \preceq y \triangleq x \prec y \lor x = y)$$

$$\begin{aligned}
& x \preceq y \land y \preceq x \\
\iff & (x \prec y \lor x = y) \land (y \prec x \lor x = y) \\
\iff & x = y \lor (x \prec y \land y \prec x) \\
\implies & x = y \lor \text{False} \\
\implies & x = y
\end{aligned}$$

### Definition (全序关系 (Total Order))

令 $\preceq\ \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的关系。

如果 $\preceq$ 满足以下性质, 则称 $\preceq$ 是 $X$ 上的全序关系:

(1) 自反 (Reflexivity):

$$\forall x \in X.\ x \preceq x$$

(2) 反对称性 (Antisymmetric):

$$\forall x, y \in X.\ (x \preceq y \land y \preceq x) \to x = y$$

(3) 传递性 (Transitive):

$$\forall x, y, z \in X.\ x \preceq y \land y \preceq z \to x \preceq z$$

(4) 连接性 (Connex; Totality):

$$\forall x, y \in X.\ x \preceq y \lor y \preceq x.$$

$$(\mathbb{R}, \leq) \qquad (\mathbb{R}, \geq)$$

全序关系 = 偏序关系 + 连接性

## Definition (严格全序关系 (Strict Total Order))

令 $\prec \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的关系。

如果 $\prec$ 满足以下条件, 则称 $\prec$ 是 $X$ 上的严格全序关系:

(1) 反自反 (Irreflexivity):

$$\forall x \in X.\ \neg(x \prec x)$$

(2) 传递性 (Transitive):

$$\forall x, y, z \in X.\ x \prec y \land y \prec z \to x \prec z$$

(3) 半连接性 (Semi-Connex):

$$\forall x, y \in X.\ \neg(x = y) \to ((x \prec y) \lor (y \prec x))$$

$$(\mathbb{R}, <) \qquad (\mathbb{R}, >)$$

Definition (严格全序关系 (Strict Total Order))

令 $\prec \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的关系。

如果 $\prec$ 满足以下条件, 则称 $\prec$ 是 $X$ 上的严格全序关系:

(1) 反自反 (Irreflexivity):

$$\forall x \in X.\ \neg(x \prec x)$$

(2) 传递性 (Transitive):

$$\forall x, y, z \in X.\ x \prec y \land y \prec z \to x \prec z$$

(3) 半连接性 (Semi-Connex):

$$\forall x, y \in X.\ \neg(x = y) \to ((x \prec y) \lor (y \prec x))$$

$$(\mathbb{R}, <) \qquad (\mathbb{R}, >)$$

严格全序关系 = 严格偏序关系 + 半连接性

### Theorem

设 $\prec \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的严格全序关系。

$\prec$ 满足三歧性 *(Trichotomous)*:

$$\forall x, y \in X.\ (\textit{exactly one of}\ x \prec y, x = y,\ \textit{or}\ y \prec x\ \textit{holds})$$

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(a \prec x),$$

则称 $a$ 是 $X$ 的极大元。

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(a \prec x),$$

则称 $a$ 是 $X$ 的极大元。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \prec a),$$

则称 $a$ 是 $X$ 的极小元。

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X. \neg(a \prec x),$$

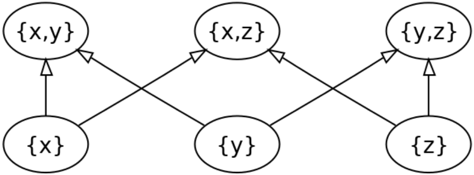
则称 $a$ 是 $X$ 的极大元。

如果

$$\forall x \in X. \neg(x \prec a),$$

则称 $a$ 是 $X$ 的极小元。

$Q$ : 极大/极小元是否一定存在? 如果存在, 是否唯一?


{x,y}
{x,z}
{y,z}
{x}
{y}
{z}

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

$(\mathbb{R}, \leq)$

无极大元、无极小元

$(\mathbb{N}, \leq)$

无极大元、有唯一极小元 0

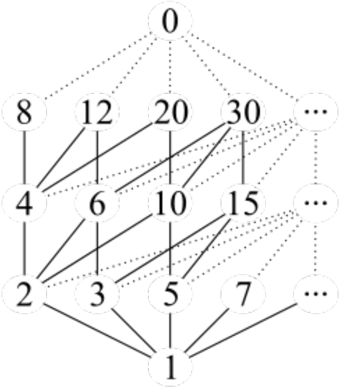
$$(\{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$$

$$(\{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$$

无极大元、有无穷多个极小元 (所有的素数)

$$(\{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$$

无极大元、有无穷多个极小元 (所有的素数)



Definition (最大元与最小元 (Maximum/Minimum; Greatest/Least; Largest/Smallest))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

**Definition (最大元与最小元 (Maximum/Minimum; Greatest/Least; Largest/Smallest))**

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ x \preceq a,$$

则称 $a$ 是 $X$ 的最大元。

Definition (最大元与最小元 (Maximum/Minimum; Greatest/Least; Largest/Smallest))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ x \preceq a,$$

则称 $a$ 是 $X$ 的最大元。

如果

$$\forall x \in X.\ a \preceq x,$$

则称 $a$ 是 $X$ 的最小元。

**Definition (最大元与最小元 (Maximum/Minimum; Greatest/Least; Largest/Smallest))**

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 $X$ 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ x \preceq a,$$

则称 $a$ 是 $X$ 的最大元。

如果

$$\forall x \in X.\ a \preceq x,$$

则称 $a$ 是 $X$ 的最小元。

$Q$ : 最大/最小元是否一定存在? 如果存在, 是否唯一?

**Theorem**

偏序集 $(X, \preceq)$ 如果有最大元或最小元，则它们是唯一的。

**Theorem**

偏序集 $(X, \preceq)$ 如果有最大元或最小元，则它们是唯一的。

假设存在两个最大元 $x$ 与 $y$。

## Theorem

偏序集 $(X, \preceq)$ 如果有最大元或最小元，则它们是唯一的。

假设存在两个最大元 $x$ 与 $y$。

$$x \preceq y \land y \preceq x$$

## Theorem

偏序集 $(X, \preceq)$ 如果有最大元或最小元，则它们是唯一的。

假设存在两个最大元 $x$ 与 $y$。

$$x \preceq y \wedge y \preceq x \implies x = y$$

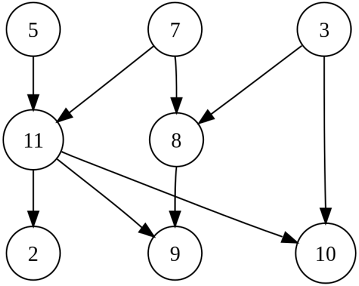
(反对称性)

**Definition (线性拓展 (Linear Extension))**

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $(X, \preceq')$ 是全序集。如果

$$\forall x, y \in X.\ x \preceq y \to x \preceq' y,$$

则称 $\preceq'$ 是 $\preceq$ 的线性拓展。

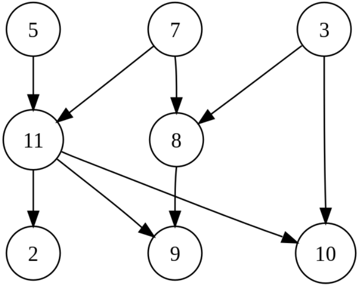


### Definition (线性拓展 (Linear Extension))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $(X, \preceq')$ 是全序集。如果

$$\forall x, y \in X.\ x \preceq y \to x \preceq' y,$$

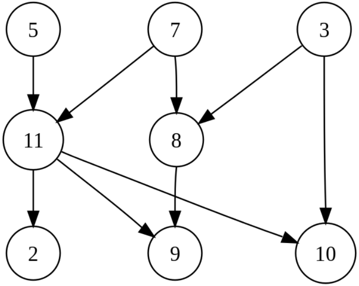
则称 $\preceq'$ 是 $\preceq$ 的线性拓展。




$5, 7, 3, 11, 8, 2, 9, 10$ $3, 5, 7, 8, 11, 2, 9, 10$

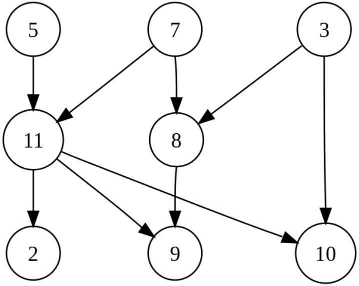
Theorem

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集且 $X$ 是有限集，则 $\preceq$ 的线性拓展必定存在。



## Theorem

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集且 $X$ 是有限集，则 $\preceq$ 的线性拓展必定存在。




## Theorem

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集且 $X$ 是有限集，则极小元一定存在。

### Definition (上界 (Upper Bound) 与下界 (Lower Bound))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。对于 $Y \subseteq X$, 如果

$$\exists x \in X.\ \forall y \in Y.\ y \preceq x,$$

则称 $x$ 为 $Y$ 的上界。

### Definition (上界 (Upper Bound) 与下界 (Lower Bound))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。对于 $Y \subseteq X$, 如果

$$\exists x \in X.\ \forall y \in Y.\ y \preceq x,$$

则称 $x$ 为 $Y$ 的上界。

类似地, 如果

$$\exists x \in X.\ \forall y \in Y.\ x \preceq y,$$

则称 $x$ 为 $Y$ 的下界。

Definition (上界 (Upper Bound) 与下界 (Lower Bound))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。对于 $Y \subseteq X$, 如果

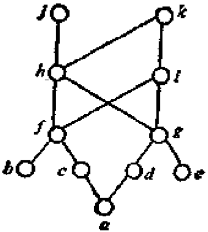
$$\exists x \in X.\ \forall y \in Y.\ y \preceq x,$$

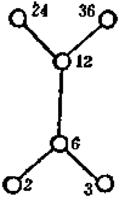
则称 $x$ 为 $Y$ 的上界。

类似地, 如果

$$\exists x \in X.\ \forall y \in Y.\ x \preceq y,$$

则称 $x$ 为 $Y$ 的下界。



Definition (最小上界 (Least Upper Bound; LUB))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $Y \subseteq X$ 是 $X$ 的子集, $x \in X$ 是 $Y$ 的上界。

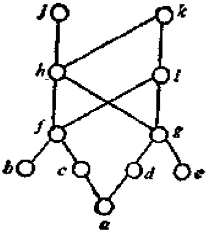
Definition (最小上界 (Least Upper Bound; LUB))

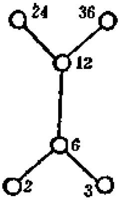
设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $Y \subseteq X$ 是 $X$ 的子集, $x \in X$ 是 $Y$ 的上界。
如果对于 $B$ 的所有下界 $x'$, 均有 $x \preceq x'$, 则称 $x$ 是 $Y$ 的最小上界。

Definition (最小上界 (Least Upper Bound; LUB))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $Y \subseteq X$ 是 $X$ 的子集, $x \in X$ 是 $Y$ 的上界。

如果对于 $B$ 的所有下界 $x'$, 均有 $x \preceq x'$, 则称 $x$ 是 $Y$ 的最小上界。

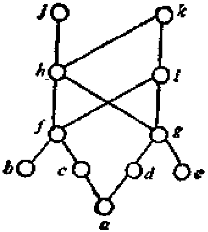


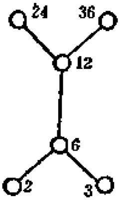



**Definition (最小上界 (Least Upper Bound; LUB))**

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $Y \subseteq X$ 是 $X$ 的子集, $x \in X$ 是 $Y$ 的上界。

如果对于 $B$ 的所有下界 $x'$, 均有 $x \preceq x'$, 则称 $x$ 是 $Y$ 的最小上界。




**Definition (最大下界 (Greatest Lower Bound; GLB))**

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $Y \subseteq X$ 是 $X$ 的子集, $x \in X$ 是 $Y$ 的下界。

如果对于 $B$ 的所有下界 $x'$, 均有 $x' \preceq x$, 则称 $x$ 是 $Y$ 的最大下界。

Definition (格 (Lattice))

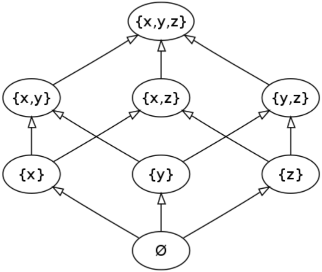
设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果任意两个元素都有最小上界与最大下界, 则称 $(X, \preceq)$ 为格。

### Definition (格 (Lattice))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

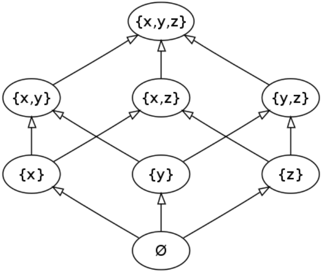
如果任意两个元素都有最小上界与最大下界, 则称 $(X, \preceq)$ 为格。

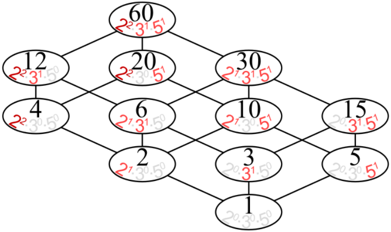


### Definition (格 (Lattice))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果任意两个元素都有最小上界与最大下界, 则称 $(X, \preceq)$ 为格。

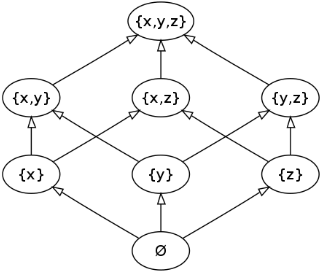


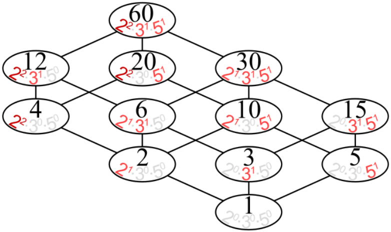



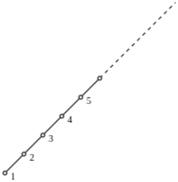
**Definition (格 (Lattice))**

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果任意两个元素都有最小上界与最大下界, 则称 $(X, \preceq)$ 为格。




"LET'S STOP HERE, SO WE HAVE
ONLY GOOD MEMORIES
OF WHAT WE LIVE."
QUOTESLIBRARY.ORG
FB/QUOTESLIBRARY.ORG

**Definition (良序 (Well-Ordering))**

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果 $X$ 的任意非空子集都有最小元, 则称 $(X, \preceq)$ 为良序集。

**Definition (良序 (Well-Ordering))**

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果 $X$ 的任意非空子集都有最小元, 则称 $(X, \preceq)$ 为良序集。

$$(\mathbb{N}, \leq) \qquad (\mathbb{Z}, \leq) \qquad (\mathbb{R}, \leq)$$

Definition (良序 (Well-Ordering))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果 $X$ 的任意非空子集都有最小元, 则称 $(X, \preceq)$ 为良序集。

$$(\mathbb{N}, \leq) \qquad (\mathbb{Z}, \leq) \qquad (\mathbb{R}, \leq)$$

数学归纳法　　良序集

Definition (良序 (Well-Ordering))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果 $X$ 的任意非空子集都有最小元, 则称 $(X, \preceq)$ 为良序集。

$$(\mathbb{N}, \leq) \qquad (\mathbb{Z}, \leq) \qquad (\mathbb{R}, \leq)$$

数学归纳法　　良序集

Theorem

良序集 $(X, \preceq)$ 一定是全序集。

### Definition (良序 (Well-Ordering))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果 $X$ 的任意非空子集都有最小元, 则称 $(X, \preceq)$ 为良序集。

$$(\mathbb{N}, \leq) \qquad (\mathbb{Z}, \leq) \qquad (\mathbb{R}, \leq)$$

数学归纳法　　　良序集

### Theorem

良序集 $(X, \preceq)$ 一定是全序集。

对任意两个元素 $x, y \in X$, 考虑 $\{x, y\}$ 非空子集。

Definition (良序 (Well-Ordering))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

如果 $X$ 的任意非空子集都有最小元, 则称 $(X, \preceq)$ 为良序集。

$$(\mathbb{N}, \leq) \qquad (\mathbb{Z}, \leq) \qquad (\mathbb{R}, \leq)$$

数学归纳法　　良序集

Theorem

良序集 $(X, \preceq)$ 一定是全序集。

对任意两个元素 $x, y \in X$, 考虑 $\{x, y\}$ 非空子集。

$$x \preceq y \vee y \preceq x$$

Theorem

每个有限的全序集 $(X, \preceq)$ 一定是良序集。

### Theorem

每个有限的全序集 $(X, \preceq)$ 一定是良序集。

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

**Theorem**

每个有限的全序集 $(X, \preceq)$ 一定是良序集。

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

反设 $(X, \preceq)$ 不是良序集。

**Theorem**
每个有限的全序集 $(X, \preceq)$ 一定是良序集。

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

反设 $(X, \preceq)$ 不是良序集。

存在非空子集 $\emptyset \neq Y \subseteq X$, $Y$ 中没有最小元素。

Theorem

每个有限的全序集 $(X, \preceq)$ 一定是良序集。

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

反设 $(X, \preceq)$ 不是良序集。

存在非空子集 $\emptyset \neq Y \subseteq X$, $Y$ 中没有最小元素。

则 $Y$ 中存在不可比元素

Theorem

每个有限的全序集 $(X, \preceq)$ 一定是良序集。

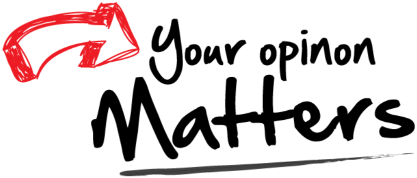
$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

反设 $(X, \preceq)$ 不是良序集。

存在非空子集 $\emptyset \neq Y \subseteq X$, $Y$ 中没有最小元素。

则 $Y$ 中存在不可比元素　($Y$ 是有限的!)


Thank
You!




Office 926

hfwei@nju.edu.cn