

(七) 集合: 序关系 (Ordering Relations)

魏恒峰

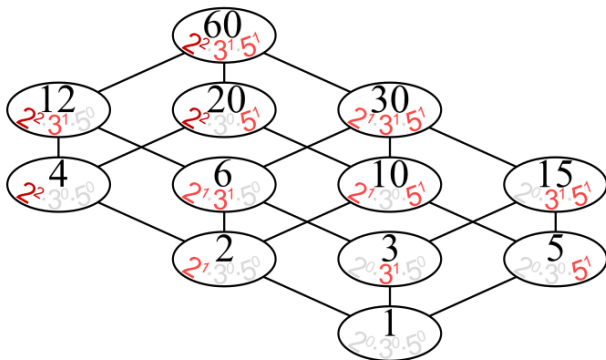
hfwei@nju.edu.cn

2021 年 04 月 22 日



$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

X 上的整除关系

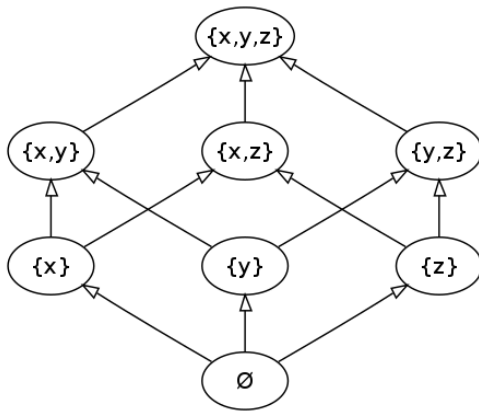


$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 \subseteq 关系

$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 \subseteq 关系



Definition (偏序关系 (Partial Order/Ordering))

令 $\leq \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 R 满足以下条件, 则称 R 是 X 上的 **偏序 (关系)**:

(1) R 是**自反 (irreflexive)**的。

$$\forall x \in X. xRx.$$

(2) R 是**反对称 (antisymmetric)**的。

$$\forall x, y \in X. xRy \wedge yRx \rightarrow x = y.$$

(3) R 是**传递 (transitive)**的。

$$\forall x, y, z \in X. xRy \wedge yRz \rightarrow xRz.$$

R vs. \leq

$$R \quad \text{vs.} \quad \leq$$

$$R^{-1} \quad \text{vs.} \quad \geq \triangleq \leq^{-1}$$

$$R \quad \text{vs.} \quad \leq$$

$$R^{-1} \quad \text{vs.} \quad \geq \triangleq \leq^{-1}$$

$$a < b \triangleq a \leq b \wedge a \neq b$$

$$aRb \wedge a \neq b$$

Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order/Ordering))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 R 满足以下条件, 则称 R 是 X 上的 **严格偏序 (关系)**:

(1) R 是**反自反 (irreflexive)**的。

$$\forall x \in X. x \bar{R} x.$$

(2) R 是**反对称 (antisymmetric)**的。

$$\forall x, y \in X. x R y \wedge y R x \rightarrow x = y.$$

(3) R 是**传递 (transitive)**的。

$$\forall x, y, z \in X. x R y \wedge y R z \rightarrow x R z.$$

Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order/Ordering))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 R 满足以下条件, 则称 R 是 X 上的 **严格偏序 (关系)**:

(1) R 是**反自反 (irreflexive)**的。

$$\forall x \in X. x \bar{R} x.$$

(2) R 是**反对称 (antisymmetric)**的。

$$\forall x, y \in X. x R y \wedge y R x \rightarrow x = y.$$

(3) R 是**传递 (transitive)**的。

$$\forall x, y, z \in X. x R y \wedge y R z \rightarrow x R z.$$

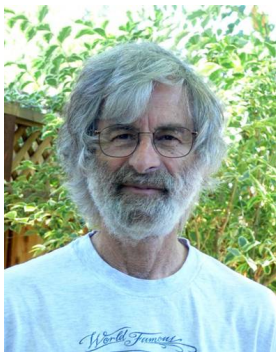
$$(1) + (3) \implies (2)$$

Theorem

设 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的严格偏序。

对于任意 $x, y, z \in X$:

- (1) $x < y, x = y, y < x$ 三者中至多有一个成立;
- (2) $x \leq y \leq x \rightarrow x = y$ 。



Leslie Lamport (1941 ~)

*For “fundamental contributions to the theory and practice of **distributed and concurrent systems**, notably the invention of concepts such as causality and logical clocks, safety and liveness, replicated state machines, and sequential consistency”*

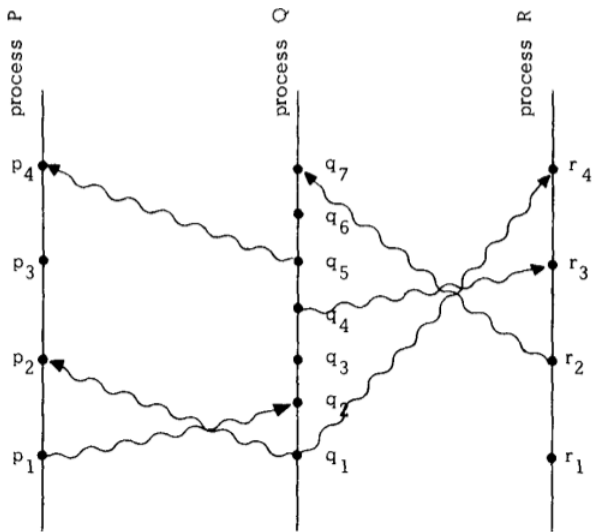
— Turing Award (2013)

Time, Clocks, and the Ordering of Events in a Distributed System

Leslie Lamport
Massachusetts Computer Associates, Inc.

The concept of one event happening before another in a distributed system is examined, and is shown to define a partial ordering of the events. A distributed algorithm is given for synchronizing a system of logical clocks which can be used to totally order the events.

引用量 ≥ 12525



Definition (事件间的“先于”关系 (“Happened Before” Relation on Events))

令 E 是表示事件的集合。

$\rightarrow \subseteq E \times E$ 是 E 上的“先于”关系, 如果它是满足以下条件的最小关系:

- ▶ 对任何事件 $a \in E$, $a \not\rightarrow a$;
- ▶ 如果 a, b 事件属于同一个进程且 a 在 b 之前发生, 则 $a \rightarrow b$;
- ▶ 如果 a, b 分别表示同一个消息的发送事件与接收事件, 则 $a \rightarrow b$;
- ▶ 如果 $a \rightarrow b$ 且 $b \rightarrow c$, 则 $a \rightarrow c$ 。

Definition (事件间的“先于”关系 (“Happened Before” Relation on Events))

令 E 是表示事件的集合。

$\rightarrow \subseteq E \times E$ 是 E 上的“先于”关系, 如果它是满足以下条件的最小关系:

- ▶ 对任何事件 $a \in E$, $a \not\rightarrow a$;
- ▶ 如果 a, b 事件属于同一个进程且 a 在 b 之前发生, 则 $a \rightarrow b$;
- ▶ 如果 a, b 分别表示同一个消息的发送事件与接收事件, 则 $a \rightarrow b$;
- ▶ 如果 $a \rightarrow b$ 且 $b \rightarrow c$, 则 $a \rightarrow c$ 。

Theorem

$\rightarrow \subseteq E \times E$ 是 E 上的严格偏序。

Definition (偏序集 (Partially Ordered Set; Poset))

如果 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序, 则称 (X, R) 为偏序集。

Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn