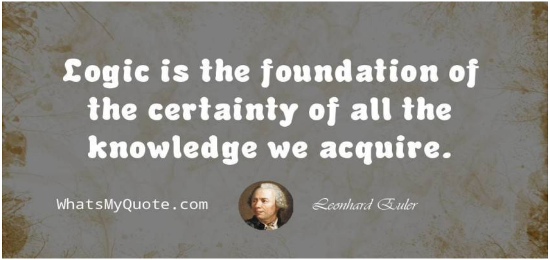
(一) 命题逻辑

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 11 日

逻辑是研究**推理/证明** (Inference/Proof) 的一门学科。



什么样的推理是正确/合法 (Valid) 的?

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} \models \tau$$

正确性: 如果**前提** $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 都为真, 那么**结论** τ 也为真。

证明就是一系列根据**推理规则**将公式不断变形的步骤。

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \vdash \tau$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta \qquad \gamma}{\tau}$$

证明就是一系列根据**推理规则**将公式不断变形的步骤。

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \vdash \tau$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta \qquad \gamma}{\tau}$$

每一步推理都必须是正确的

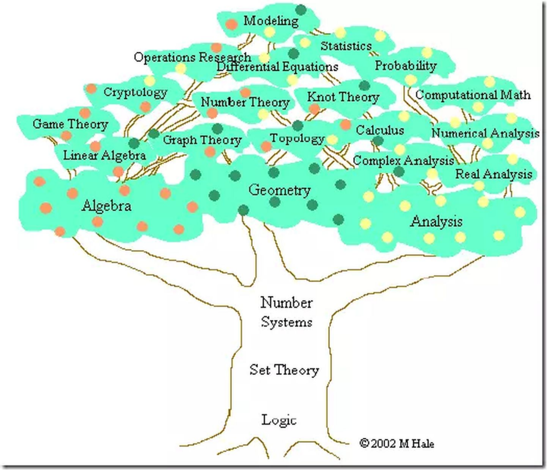
证明就是一系列根据**推理规则**将公式不断变形的步骤。

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \vdash \tau$$

$$\frac{\alpha \qquad \beta \qquad \gamma}{\tau}$$

每一步推理都必须是正确的

什么样的推理是正确/合法（Valid）的？



逻辑要研究的是**不依赖于具体领域知识**的推理

$$\frac{P\ \text{是真的} \qquad Q\ \text{是真的}}{P\ \text{与}\ Q\ \text{都是真的}} \qquad\qquad \frac{P \qquad Q}{P \land Q}$$

$$\frac{P\ \text{是真的} \qquad Q\ \text{是真的}}{P\ \text{与}\ Q\ \text{都是真的}} \qquad \frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}$$

$$\frac{\text{如果}\ P\ \text{是真的, 则}\ Q\ \text{是真的} \qquad P\ \text{是真的}}{Q\ \text{是真的}} \qquad \frac{P \to Q \qquad P}{Q}$$

$$\frac{P\text{ 是真的} \qquad Q\text{ 是真的}}{P\text{ 与 }Q\text{ 都是真的}} \qquad \frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}$$

$$\frac{\text{如果 }P\text{ 是真的, 则 }Q\text{ 是真的} \qquad P\text{ 是真的}}{Q\text{ 是真的}} \qquad \frac{P \to Q \qquad P}{Q}$$

$$\frac{\text{如果 }P\text{ 是真的, 则 }Q\text{ 是真的} \qquad Q\text{ 是假的}}{P\text{ 是假的}} \qquad \frac{P \to Q \qquad \neg Q}{\neg P}$$

$$\frac{P\text{ 是真的} \qquad Q\text{ 是真的}}{P\text{ 与 }Q\text{ 都是真的}} \qquad \frac{P \qquad Q}{P \land Q}$$

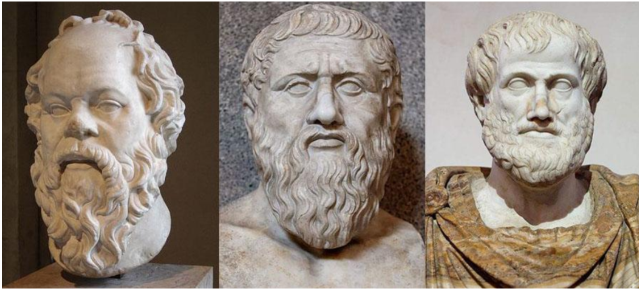
$$\frac{\text{如果 }P\text{ 是真的, 则 }Q\text{ 是真的} \qquad P\text{ 是真的}}{Q\text{ 是真的}} \qquad \frac{P \to Q \qquad P}{Q}$$

$$\frac{\text{如果 }P\text{ 是真的, 则 }Q\text{ 是真的} \qquad Q\text{ 是假的}}{P\text{ 是假的}} \qquad \frac{P \to Q \qquad \neg Q}{\neg P}$$

这些都是人类最基本的思维规律

逻辑就是**用数学的方法**研究**人类基本思维规律**的一门学科


History



Socrates Plato Aristotle

$$\frac{\text{所有人都是必死的} \qquad \text{所有希腊人都是人}}{\text{所有希腊人都是必死的}}$$

$$\frac{\text{所有人都是必死的} \qquad \text{所有希腊人都是人}}{\text{所有希腊人都是必死的}}$$

$$\frac{\text{所有人都是必死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是必死的}}$$

$$\frac{\text{所有人都是必死的} \qquad \text{所有希腊人都是人}}{\text{所有希腊人都是必死的}}$$

$$\frac{\text{所有人都是必死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是必死的}}$$

$$\frac{\text{金属可以导电} \qquad \text{铜是金属}}{\text{铜可以导电}}$$

$$\frac{\text{所有人都是必死的} \qquad \text{所有希腊人都是人}}{\text{所有希腊人都是必死的}}$$

$$\frac{\text{所有人都是必死的} \qquad \text{苏格拉底是人}}{\text{苏格拉底是必死的}}$$

$$\frac{\text{金属可以导电} \qquad \text{铜是金属}}{\text{铜可以导电}}$$

$$\frac{\forall x.\ People(x) \to Die(x) \qquad People(y)}{Die(y)}$$

格	A ∧ A		A ∧ E				A ∧ I		A ∧ O		E ∧ I
	AAA	*AAI*	AEE	*AEO*	EAE	*EAO*	AII	IAI	AOO	OAO	EIO
1	Barbara	*Barbari*			Celarent	*Celaront*	Darii				Ferio
2			Camestres	*Camestros*	Cesare	*Cesaro*			Baroco		Festino
3		*Darapti*				*Felapton*	Datisi	Disamis		Bocardo	Ferison
4		*Bamalip*	Calemes	*Calemos*		*Fesapo*		Dimatis			Fresison

亚里士多德总结的 24 种三段论


2000 YEARS
LATER

Gottfried Wilhelm Leibniz (莱布尼茨 1646 – 1716)

“17 世纪的亚里士多德”

“我有一个梦想 . . .”

建立一个能够涵盖人类思维活动的“通用符号演算系统”，
让人们的思维方式变得像数学运算那样清晰。

一旦有争论，不管是科学上的还是哲学上的，人们只要坐下来**算一算**，就可以毫不费力地辨明谁是对的。

Let us calculate [calculemus].

两个重要的符号逻辑系统："命题逻辑" 与 "一阶谓词逻辑"

Propositional Logic
and
Predicate Logic

Discrete Mathematics

"推理即（符号）计算"

今天，我们学习**命题逻辑**

下周，我们学习**一阶谓词逻辑**

Definition (命题 (Proposition))

命题是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假)。

Definition (命题 (Proposition))

命题是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假)。

以下哪些是命题?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$

Definition (命题 (Proposition))

命题是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假)。

以下哪些是命题?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$
3. 中国是一个伟大的国家
4. 你饿了吗?
5. 你要好好休息

Definition (命题 (Proposition))

命题是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假)。

以下哪些是命题?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$
3. 中国是一个伟大的国家
4. 你饿了吗?
5. 你要好好休息
6. 哥德巴赫猜想

Definition (命题 (Proposition))

命题是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假)。

以下哪些是命题?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$
3. 中国是一个伟大的国家
4. 你饿了吗?
5. 你要好好休息
6. 哥德巴赫猜想
7. 今天是雨天
8. 明天是周五

Definition (命题 (Proposition))

命题是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假)。

以下哪些是命题?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$
3. 中国是一个伟大的国家
4. 你饿了吗?
5. 你要好好休息
6. 哥德巴赫猜想
7. 今天是雨天
8. 明天是周五
9. 这句话是假话

忘掉“命题”!!!

逻辑不关心单个命题的真假, 而关心命题之间的关系

Definition (命题逻辑的语言)

命题逻辑的语言包括以下 3 部分:

(1) 任意多个**命题符号**: $A_0, A_1, P, Q, \dots;$

(2) 5 个**逻辑联词 (Connective):**

符号	名称	英文读法	中文读法	LaTeX
$\neg$	negation (否定)	not	非	`\lnot`
$\land$	conjunction (合取)	and	与	`\land`
$\lor$	disjunction (析取)	or	或	`\lor`
$\to$	conditional	implies (if then)	蕴含 (如果, 那么)	`\to`
$\leftrightarrow$	biconditional	if and only if	当且仅当	`\leftrightarrar`

(3) 左括号、右括号

Definition (公式 (Formula))

(1) 每个命题符号都是公式;

(2) 如果 α 和 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是公式;

(3) 除此之外, 别无其它。

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

数学归纳法

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

数学归纳法

对公式的**结构**作归纳

Theorem (归纳原理)

令 $P(\alpha)$ 为一个关于公式的性质。假设

(1) 对所有的命题符号 A_i, 性质 $P(A_i)$ 成立; 并且

(2) 对所有的公式 α 和 β, 如果 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 成立, 则 $P((\neg\alpha))$, $P((\alpha * \beta))$ 也成立,

那么 $P(\alpha)$ 对所有的公式 α 都成立。

Definition (公式的长度)

公式 α 的长度 $|\alpha|$ 定义如下:

(1) 如果 α 是命题符号, 则 $|\alpha| = 1$;

(2) 如果 $\alpha = (\neg\beta)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta|$;

(3) 如果 $\alpha = (\beta * \gamma)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$。

Definition (公式的长度)

公式 α 的长度 $|\alpha|$ 定义如下:

(1) 如果 α 是命题符号, 则 $|\alpha| = 1$;

(2) 如果 $\alpha = (\neg\beta)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta|$;

(3) 如果 $\alpha = (\beta * \gamma)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$。

作业题

假设公式 α 中不含 "$\neg$" 符号。
请证明, α 中超过四分之一的符号是命题符号。

关于“公式”的**约定**

- 最外层的括号可以省略
- 优先级: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
- 结合性: 右结合 $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma, \alpha \to \beta \to \gamma)$

关于“公式”的**约定**

- 最外层的括号可以省略
- 优先级: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
- 结合性: 右结合 $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma,\ \alpha \to \beta \to \gamma)$

不要过分依赖这些约定; 尽情地使用括号吧

$$\cancel{P \wedge Q \to R}$$

$$(P \wedge Q) \to R$$

用命题逻辑公式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

用命题逻辑公式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

用命题逻辑公式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

用命题逻辑公式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信，或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠，我就好好学习

(4) 如果张三和李四都不去，王五就去

用命题逻辑公式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

(4) 如果张三和李四都不去, 王五就去

(5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆

用命题逻辑公式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
(2) 我们不能既写作业又打游戏
(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习
(4) 如果张三和李四都不去, 王五就去
(5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆
(6) 我今天进城, 除非下雨

用命题逻辑公式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

(4) 如果张三和李四都不去, 王五就去

(5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆

(6) 我今天进城, 除非下雨

(7) 如果你来了, 那么他是否唱歌将取决于你是否伴奏

用命题逻辑公式表示下列命题

某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;
(2) 李、吴两人中必有一人去;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;
(4) 孙、李两人同去或同不去;
(5) 若吴去, 则赵、钱也去;
(6) 只有孙去, 赵才会去。

用命题逻辑公式表示下列命题

某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;
(2) 李、吴两人中必有一人去;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;
(4) 孙、李两人同去或同不去;
(5) 若吴去, 则赵、钱也去;
(6) 只有孙去, 赵才会去。

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ T$$

用命题逻辑公式表示下列命题

某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;
(2) 李、吴两人中必有一人去;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;
(4) 孙、李两人同去或同不去;
(5) 若吴去, 则赵、钱也去;
(6) 只有孙去, 赵才会去。

(1) $Z \to Q$;
(2) $L \vee W$;
(3) $(Q \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg Q)$;
(4) $(S \wedge L) \vee (\neg S \wedge \neg L)$;
(5) $W \to Z \wedge Q$;
(6) $Z \to S$。

P, Q, R, S, T

命题逻辑的语义

命题逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 $(T/1/\top)$”、“假 $(F/0/\bot)$”值。

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

命题逻辑公式的**语义**就是该公式的"真 $(T/1/\top)$"、"假 $(F/0/\bot)$"值。

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$$

某个公式 α 的真假值取决于

(1) α 中所含命题符号的真假值; 与

(2) 逻辑联词的语义

Definition (真值指派 (v))

令 S 为一个命题符号的集合。S 上的一个**真值指派** v 是一个从 S 到真假值的映射

$$v : S \to \{T, F\}.$$

Definition (真值指派 (v))

令 S 为一个命题符号的集合。S 上的一个**真值指派** v 是一个从 S 到真假值的映射

$$v : S \to \{T, F\}.$$

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

使用**真值表**定义**逻辑联词的语义**

Definition (真值表 (Truth Table))

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

"如果中国足球队夺冠, 我就好好学习"

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

α 的真值为 T

Definition (真值指派的扩张 ($\overline{v}$))

令 S 为一个命题符号的集合。令 $\overline{S}$ 为只含有 S 中命题符号的公式集。S 上的**真值指派 v 的扩张**是一个从 $\overline{S}$ 到真假值的映射

$$\overline{v} : \overline{S} \to \{T, F\}.$$

Definition (真值指派的扩张 ($\overline{v}$))

令 S 为一个命题符号的集合。令 $\overline{S}$ 为只含有 S 中命题符号的公式集。S 上的**真值指派 v 的扩张**是一个从 $\overline{S}$ 到真假值的映射

$$\overline{v} : \overline{S} \to \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

Definition (真值指派的扩张 ($\overline{v}$))

令 S 为一个命题符号的集合。令 $\overline{S}$ 为只含有 S 中命题符号的公式集。S 上的**真值指派 v 的扩张**是一个从 $\overline{S}$ 到真假值的映射

$$\overline{v} : \overline{S} \to \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\boxed{\overline{v}(\alpha) = T}$$

课堂练习：构造下列公式的真值表

$$\neg P \vee Q$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(P \wedge Q) \wedge \neg P$$

$$(((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$$

Definition (满足 (Satisfy))

如果 $\overline{v}(\alpha) = T$, 则称真值指派 v **满足**公式 α。

Definition (满足 (Satisfy))

如果 $\overline{v}(\alpha) = T$, 则称真值指派 v **满足**公式 α。

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\boxed{\overline{v}(\alpha) = T}$$

真值指派 v 满足 α

Definition (可满足的 (Satisfiable))

如果存在某个真值指派满足公式 α, 则 α 是可满足的。

$\neg P \vee Q$ 是可满足的

$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$ 是可满足的

$(P \wedge Q) \wedge \neg P$ 是不可满足的 (unsatisfiable)

Definition (命题逻辑公式的可满足性问题 (Satisfiability; **SAT**))

任给一个命题逻辑公式 α, α 是可满足的吗?

Definition (命题逻辑公式的可满足性问题 (Satisfiability; **SAT**))

任给一个命题逻辑公式 α, α 是可满足的吗?

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含**公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含**公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

$$\{\alpha\} \models \beta \to \alpha$$

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含**公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

$$\{\alpha\} \models \beta \to \alpha$$

$$\{\alpha \land \beta\} \models \alpha$$

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含**公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

$$\{\alpha\} \models \beta \to \alpha$$

$$\{\alpha \land \beta\} \models \alpha$$

$$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \models \beta$$

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含**公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

$$\{\alpha\} \models \beta \to \alpha$$

$$\{\alpha \land \beta\} \models \alpha$$

$$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \models \beta$$

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \models \beta$$

Theorem

请证明: $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ 当且仅当 $\Sigma \models (\alpha \to \beta)$。

Theorem

请证明: $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ 当且仅当 $\Sigma \models (\alpha \to \beta)$。

v_Σ： 满足 Σ 中所有公式的任一真值指派

$v_{\Sigma\cup\{\alpha\}}$： 满足 $\Sigma \cup \{\alpha\}$ 中所有公式的任一真值指派

Theorem

请证明: $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ 当且仅当 $\Sigma \models (\alpha \to \beta)$。

$$v_\Sigma\text{：满足 } \Sigma \text{ 中所有公式的任一真值指派}$$

$$v_{\Sigma\cup\{\alpha\}}\text{：满足 } \Sigma \cup \{\alpha\} \text{ 中所有公式的任一真值指派}$$

Lemma

如果 $\overline{v_{\Sigma\cup\{\alpha\}}}(\beta) = T$, 则 $\overline{v_\Sigma}(\alpha \to \beta) = T$。

Theorem

请证明: $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ 当且仅当 $\Sigma \models (\alpha \to \beta)$。

v_Σ： 满足 Σ 中所有公式的任一真值指派

$v_{\Sigma\cup\{\alpha\}}$： 满足 $\Sigma \cup \{\alpha\}$ 中所有公式的任一真值指派

Lemma

如果 $\overline{v_{\Sigma\cup\{\alpha\}}}(\beta) = T$, 则 $\overline{v_\Sigma}(\alpha \to \beta) = T$。

Lemma

如果 $\overline{v_\Sigma}(\alpha \to \beta) = T$, 则 $\overline{v_{\Sigma\cup\{\alpha\}}}(\beta) = T$。

$$\Sigma = \emptyset$$

$$\emptyset \models \alpha \text{ 简记为 } \models \alpha$$

$$\Sigma = \emptyset$$

$$\emptyset \models \alpha \text{ 简记为 } \models \alpha$$

$$\Sigma = \{\alpha\} \text{ 只含有一个公式}$$

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

Definition (重言式/永真式 (Tautology))
如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 为**重言式**, 记为 $\models \alpha$。

重言式在所有真值指派下均为真。

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

Definition (重言式/永真式 (Tautology))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 为**重言式**, 记为 $\models \alpha$。

重言式在所有真值指派下均为真。

$$\alpha = (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

Definition (矛盾式/永假式 (Contradiction))

若公式 α 在所有真值指派下均为假, 则称 α 为**矛盾式**。

$(P \land Q) \land \neg P$ 是不可满足的

Definition (重言等价 (Tautologically Equivalent))

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β **重言等价**, 记为 $\alpha \equiv \beta$。

$$(B \to (A \to C)) \equiv (B \land A) \to C$$

$$(((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

德摩根 (De Morgan) 律:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

双重否定律:

$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

双重否定律:

$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

双重否定律:

$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

双重否定律:

$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

逆否命题:

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

(1)

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$

(2)

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$$

(3)

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$$

(4)

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$

使用命题逻辑进行推理

某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;	(1) $Z \to Q$;
(2) 李、吴两人中必有一人去;	(2) $L \lor W$;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;	(3) $(Q \land \neg S) \lor (S \land \neg Q)$;
(4) 孙、李两人同去或同不去;	(4) $(S \land L) \lor (\neg S \land \neg L)$;
(5) 若吴去, 则赵、钱也去;	(5) $W \to Z \land Q$;
(6) 只有孙去, 赵才会去。	(6) $Z \to S$。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

Definition (合取范式 (Conjunctive Normal Form))

我们称公式 α 是**合取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或者命题符号的否定。

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

求下列公式的合取范式

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

Definition (析取范式 (Disjunctive Normal Form))

我们称公式 α 是**析取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \wedge \beta_{i2} \wedge \cdots \wedge \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或者命题符号的否定。

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q$$

求下列公式的析取范式

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

求合取范式与析取范式的方法

(1) 先将公式中的联结符号化归成 $\neg, \wedge$ 与 $\vee$;

(2) 再使用 De Morgan 律将 $\neg$ 移到各个命题变元之前 (“否定深入”);

(3) 最后使用结合律、分配律将公式化归成合取范式或析取范式。

命题逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

从上往下看: 展示证明过程

$$\frac{\alpha \qquad \beta \qquad \dots \quad (\text{前提})}{\gamma \quad (\text{结论})} \quad (\text{规则名称})$$

$$\{\alpha, \beta, \dots\} \vdash \gamma$$

从下往上看: 提供证明思路

$$\frac{}{[x : P]}\quad \text{(assum)}$$

所有引入的假设最终必须被“**释放**”(discharged)

$\wedge$

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q} \quad (\wedge\text{-intro})$$

$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad (\wedge\text{-elim-left})$$

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \quad (\wedge\text{-elim-right})$$

“∧” 推理规则的应用

$$\{p \land q, r\} \vdash q \land r$$

“∧” 推理规则的应用

$$\{p \wedge q, r\} \vdash q \wedge r$$

Proof.

$p \wedge q$	前提	(1)
r	前提	(2)
q	$\wedge$-elim-right (1)	(3)
$q \wedge r$	$\wedge$-intro (3), (2)	(4)

□

$\neg\neg$

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha} \quad (\neg\neg\text{-intro})$$

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \quad (\neg\neg\text{-elem})$$

"¬¬" 推理规则的应用

$$\{p, \neg\neg(q \land r)\} \vdash \neg\neg p \land r$$

$\rightarrow$

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta} \quad (\to\text{-elim (modus ponens)})$$

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \neg\beta}{\neg\alpha} \quad (\text{modus tollens})$$

“→” 推理规则的应用

$$\{p \to (q \to r), p, \neg r\} \vdash \neg q$$

$\rightarrow$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[x:\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \rightarrow \beta} \quad (\rightarrow\text{-intro}/x)$$

Assumption x is discharged

“$\rightarrow$” 推理规则的应用

$$\vdash p \rightarrow p$$

“→” 推理规则的应用

$$\vdash p \to p$$

“→” 推理规则的应用

$$\{\neg q \to \neg p\} \vdash p \to \neg\neg q$$

“→” 推理规则的应用

$$\{p \land q \to r\} \vdash p \to (q \to r)$$

$\vee$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad (\vee\text{-intro-left})$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \quad (\vee\text{-intro-right})$$

$\vee$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad (\vee\text{-intro-left})$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \quad (\vee\text{-intro-right})$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \alpha \to \gamma \qquad \beta \to \gamma}{\gamma} \quad (\vee\text{-elim; (分情况分析)})$$

“$\vee$” 推理规则的应用

$$p \vee q \vdash q \vee p$$

“$\vee$” 推理规则的应用

$$p \vee q \vdash q \vee p$$

$$\frac{p \vee q \qquad p \to q \vee p \qquad q \to q \vee p}{q \vee p}$$

“$\vee$” 推理规则的应用

$$q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$$

推理规则的应用

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

推理规则的应用

$$p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$$

推理规则的应用

$$(p \land q) \lor (p \land r) \vdash p \land (q \lor r)$$

$\perp$

$$\frac{\alpha \qquad \neg\alpha}{\perp} \quad (\perp\text{-intro})$$

$$\frac{\perp}{\alpha} \quad (\perp\text{-elim; EFQ, ex falso quodlibet (Principle of Explosion)})$$

“⊥” 推理规则的应用

$$\neg p \lor q \vdash p \to q$$

“⊥” 推理规则的应用

$$\neg p \vee q \vdash p \to q$$

“⊥” 推理规则的应用

$$p \to q \vdash \neg p \vee q$$

$\neg$

$$\frac{\alpha \to \bot}{\neg\alpha} \quad (\neg\text{-intro})$$

$$\frac{\neg\alpha}{\alpha \to \bot} \quad (\neg\text{-elim})$$

“¬” 推理规则的应用

$$\{p \to q, p \to \neg q\} \vdash \neg p$$

“¬” 推理规则的应用

$$\{p \to q, p \to \neg q\} \vdash \neg p$$

“¬” 推理规则的应用

$$\{(p \land \neg q) \to r, \neg r, p\} \vdash q$$

(提示：$\neg\neg q \vdash q$)

“¬” 推理规则的应用

$$\frac{\neg p \to \bot}{p} \quad (\text{RAA}/x, \text{ reductio ad absurdum (反证法)})$$

“¬” 推理规则的应用

$$\frac{\neg p \to \bot}{p} \quad (\mathrm{RAA}/x, \text{ reductio ad absurdum (反证法)})$$

“¬” 推理规则的应用

$$\vdash p \vee \neg p \qquad (\text{排中律; Law of the Excluded Middle (LEM)})$$

连这些推理规则也一并忘却吧!!!

使用命题逻辑进行推理

某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;	(1) $Z \to Q$;
(2) 李、吴两人中必有一人去;	(2) $L \lor W$;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;	(3) $(Q \land \neg S) \lor (S \land \neg Q)$;
(4) 孙、李两人同去或同不去;	(4) $(S \land L) \lor (\neg S \land \neg L)$;
(5) 若吴去, 则赵、钱也去;	(5) $W \to Z \land Q$;
(6) 只有孙去, 赵才会去。	(6) $Z \to S$。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

Theorem (命题逻辑的可靠性 (Soundness))

如果 $\Sigma \vdash \alpha$，则 $\Sigma \models \alpha$。

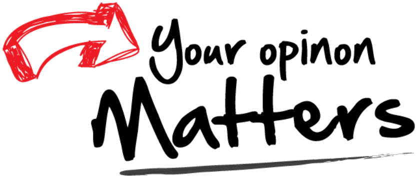
Theorem (命题逻辑的可靠性 (Soundness))

如果 $\Sigma \vdash \alpha$, 则 $\Sigma \models \alpha$。

Theorem (命题逻辑的完备性 (Completeness))

如果 $\Sigma \models \alpha$, 则 $\Sigma \vdash \alpha$。

Thank You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn