

(一) Mathematical Logic

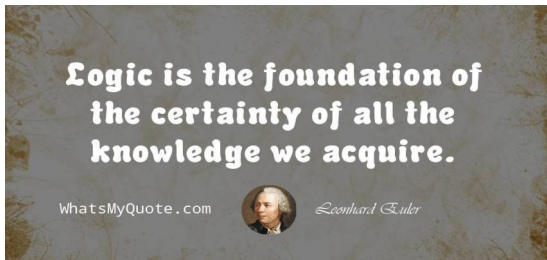
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 11 日



逻辑是研究**推理/证明** (Inference/Proof) 的一门学科。



什么样的推理是正确/合法 (Valid) 的?

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} \models \tau$$

正确性: 如果**前提** $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 都为真, 那么**结论** τ 也为真。

证明就是一系列根据**推理规则**将公式不断变形的步骤。

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} \vdash \tau$$

$$\frac{\alpha \quad \beta \quad \gamma}{\tau}$$

证明就是一系列根据**推理规则**将公式不断变形的步骤。

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} \vdash \tau$$

$$\frac{\alpha \quad \beta \quad \gamma}{\tau}$$

每一步推理都必须是正确的

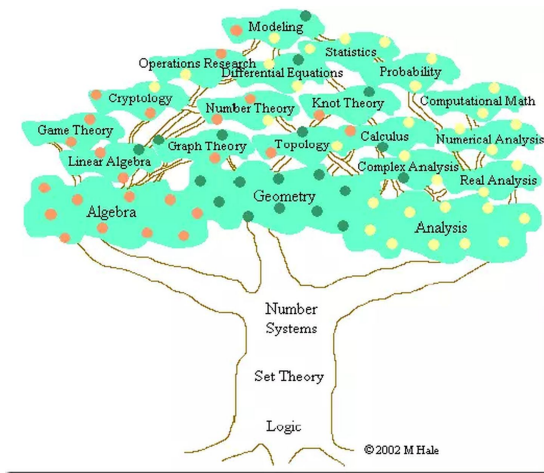
证明就是一系列根据**推理规则**将公式不断变形的步骤。

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} \vdash \tau$$

$$\frac{\alpha \quad \beta \quad \gamma}{\tau}$$

每一步推理都必须是正确的

什么样的推理是正确/合法 (Valid) 的?



逻辑要研究的是**不依赖于具体领域知识**的推理

$$\frac{P \text{ 是真的} \quad Q \text{ 是真的}}{P \text{ 与 } Q \text{ 都是真的}}$$

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

$$\frac{P \text{ 是真的} \quad Q \text{ 是真的}}{P \text{ 与 } Q \text{ 都是真的}}$$

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

$$\frac{\text{如果 } P \text{ 是真的, 则 } Q \text{ 是真的} \quad P \text{ 是真的}}{Q \text{ 是真的}}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad P}{Q}$$

$$\frac{\text{如果 } P \text{ 是真的, 则 } Q \text{ 是真的} \quad Q \text{ 是假的}}{P \text{ 是假的}}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P}$$

$$\frac{P \text{ 是真的} \quad Q \text{ 是真的}}{P \text{ 与 } Q \text{ 都是真的}}$$

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

$$\frac{\text{如果 } P \text{ 是真的, 则 } Q \text{ 是真的} \quad P \text{ 是真的}}{Q \text{ 是真的}}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad P}{Q}$$

$$\frac{\text{如果 } P \text{ 是真的, 则 } Q \text{ 是真的} \quad Q \text{ 是假的}}{P \text{ 是假的}}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P}$$

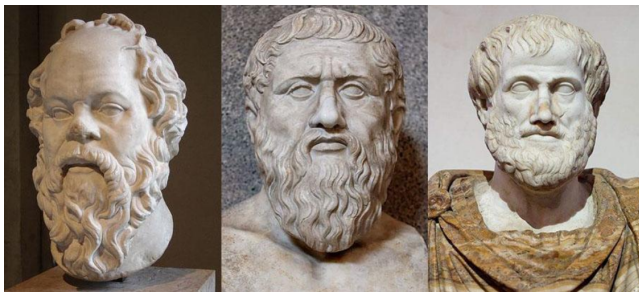
这些都是人类最基本的思维规律



逻辑就是**用数学的方法**研究**人类基本思维规律**的一门学科



数理逻辑的萌芽时期



Socrates

Plato

Aristotle





Gottfried Wilhelm Leibniz (莱布尼茨 1646 – 1716)

“我有一个梦想 ...”

建立一个能够涵盖人类思维活动的“通用符号演算系统”，
让人们的思维方式变得像数学运算那样清晰。

一旦有争论，不管是科学上的还是哲学上的，人们只要坐下来**算一算**，就可以毫不费力地辨明谁是对的。

Let us calculate [calculemus].

Syntax

Semantics

Definition (Proposition (命题))

A *proposition* is a sentence that is either true or false, (but not both).

Definition (Proposition (命题))

A *proposition* is a sentence that is either true or false, (but not both).

Which are propositions?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$
3. $X = X$
4. 哥德巴赫猜想。
5. Today is rainy.
6. Tomorrow is Friday.
7. This sentence is false.

Forget “Propositions”!!!

Mathematical logic is *NOT* about propositions, but about *the*

Definition (命题逻辑的语言)

Definition (公式 (Formula))

- (1) 每个命题符号 A_i 都是公式;
- (2) 如果 α 和 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是公式;
- (3) 除此之外, 别无其它。

符号	名称	英文读法	中文读法	L ^A T _E X
\neg	negation	not	非	
\wedge	conjunction	and	与	
\vee	disjunction	or	或	
\rightarrow	conditional	implies (if then)	蕴含 (如果, 那么)	
\leftrightarrow	biconditional	if and only if	当且仅当	

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

对公式的**结构**作归纳。

Theorem (归纳原理)

令 $P(\alpha)$ 为一个关于公式的性质。假设

- (1) 对所有的命题符号 A_i , 性质 $P(A_i)$ 成立; 并且
- (2) 对所有的公式 α 和 β , 如果 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 成立, 则 $P((\neg\alpha))$, $P(\alpha * \beta)$ 也成立,

那么 $P(\alpha)$ 对所有的公式 α 都成立。

Definition (公式的长度)

公式 α 的长度 $|\alpha|$ 定义如下:

- (1) 如果 α 是命题符号, 则 $|\alpha| = 1$;
- (2) 如果 $\alpha = (\neg\beta)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta|$;
- (3) 如果 $\alpha = (\beta * \gamma)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$.

Definition (公式的长度)

公式 α 的长度 $|\alpha|$ 定义如下:

- (1) 如果 α 是命题符号, 则 $|\alpha| = 1$;
- (2) 如果 $\alpha = (\neg\beta)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta|$;
- (3) 如果 $\alpha = (\beta * \gamma)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$.

作业题

假设公式 α 不含 “ \neg ” 符号。

请证明, α 中超过四分之一的符号是命题符号。

关于“公式”的约定

- ▶ 最外层的括号可以省略
- ▶ 优先级: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- ▶ 结合性: 右结合 ($\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$,
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$)

关于“公式”的约定

- ▶ 最外层的括号可以省略
- ▶ 优先级: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- ▶ 结合性: 右结合 ($\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$,
 $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$)

不要过分依赖这些约定; 尽情地使用括号吧

$$\cancel{P} \wedge \cancel{Q} \wedge \cancel{R}$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

用符号形式表示下列命题

- (1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
- (2) 我们不能既写作业又打游戏

用符号形式表示下列命题

- (1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
- (2) 我们不能既写作业又打游戏
- (3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

用符号形式表示下列命题

- (1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
- (2) 我们不能既写作业又打游戏
- (3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习
- (4) 如果张三和李四都不去, 王五就去

用符号形式表示下列命题

- (1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
- (2) 我们不能既写作业又打游戏
- (3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习
- (4) 如果张三和李四都不去, 王五就去
- (5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆

用符号形式表示下列命题

- (1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
- (2) 我们不能既写作业又打游戏
- (3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习
- (4) 如果张三和李四都不去, 王五就去
- (5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆
- (6) 我今天进城, 除非下雨

用符号形式表示下列命题

- (1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
- (2) 我们不能既写作业又打游戏
- (3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习
- (4) 如果张三和李四都不去, 王五就去
- (5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆
- (6) 我今天进城, 除非下雨
- (7) 如果你来了, 那么他是否唱歌将取决于你是否伴奏

Syntax

Semantics

命题逻辑的语义

命题逻辑公式的语义就是该公式的“真 ($T/1$)”、“假 ($F/0$)”值。

$$(((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

命题逻辑公式的语义就是该公式的“真 ($T/1$)”、“假 ($F/0$)”值。

$$(((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

某个公式 α 的真假值取决于

- ▶ α 中所含命题符号的真假值; 与
- ▶ 逻辑连接符号的含义

Definition (真值指派 (v))

令 S 为一个命题符号的集合。 S 上的一个**真值指派** v 是一个从 S 到真假值的映射

$$v : S \rightarrow \{T, F\}.$$

Definition (真值指派 (v))

令 S 为一个命题符号的集合。 S 上的一个**真值指派** v 是一个从 S 到真假值的映射

$$v : S \rightarrow \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

使用真值表定义逻辑联接符的语义

Definition (真值表 (Truth Table))

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

“如果中国足球队夺冠, 我就好好学习”

Definition (真值指派的扩张 (\bar{v}))

令 \bar{S} 为只含有 S 中命题符号的公式集。 S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 \bar{S} 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \rightarrow \{T, F\}.$$

Definition (真值指派的扩张 (\bar{v}))

令 \bar{S} 为只含有 S 中命题符号的公式集。 S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 \bar{S} 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \rightarrow \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

Definition (真值指派的扩张 (\bar{v}))

令 \bar{S} 为只含有 S 中命题符号的公式集。 S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 \bar{S} 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \rightarrow \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\bar{v}(\alpha) =$$

Definition (真值指派的扩张 (\bar{v}))

令 \bar{S} 为只含有 S 中命题符号的公式集。 S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 \bar{S} 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \rightarrow \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\bar{v}(\alpha) = T$$

构造下列公式的真值表

$$\neg P \vee Q$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(P \wedge Q) \wedge \neg P$$

$$(((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

Definition (满足 (Satisfy))

如果 $\bar{v}(\alpha) = T$, 则称真值指派 v **满足** 公式 α 。

Definition (满足 (Satisfy))

如果 $\bar{v}(\alpha) = T$, 则称真值指派 v **满足** 公式 α 。

$$\alpha : (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

真值指派 v 满足 α

Definition (可满足的 (Satisfiable))

Definition (可满足的 (Satisfiable))

Definition (可满足性问题 (Satisfiability))

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含** 公式 α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,
如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的真值指派都满足 α 。

Σ : 前提 α : 结论

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含** 公式 α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,
如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的真值指派都满足 α 。

Σ : 前提 α : 结论

$$\{A, \neg A\} \models B$$

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含** 公式 α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的真值指派都满足 α 。

Σ : 前提 α : 结论

$$\{A, \neg A\} \models B$$

$$\{\alpha \wedge \beta\} \models \alpha$$

Theorem

请证明: $\Sigma \cup \{a\} \models \beta$ 当且仅当 $\Sigma \models (\alpha \rightarrow \beta)$ 。

$$\Sigma = \emptyset$$

$\emptyset \models \alpha$ 简记为 $\models \alpha$

$$\Sigma = \emptyset$$

$\emptyset \models \alpha$ 简记为 $\models \alpha$

$\Sigma = \{\alpha\}$ 只含有一个公式

$\{\alpha\} \models \beta$ 简记为 $\alpha \models \beta$

Definition (重言式/永真式 (Tautology))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 为**重言式**, 记为 $\models \alpha$ 。

重言式在所有真值指派下均为真。

Definition (重言式/永真式 (Tautology))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 为**重言式**, 记为 $\models \alpha$ 。

重言式在所有真值指派下均为真。

Definition (矛盾式/永假式 (Contradiction))

若公式 α 在所有真值指派下均为假, 则称 α 为**矛盾式**。

Definition (重言等价)

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β 重言等价, 记为 $\alpha \equiv \beta$ 。

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

德摩根 (De Morgan) 律:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

逆否命题:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

(1)

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

(2)

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \vee \beta)$$

(3)

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$$

(4)

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

Definition (合取范式 (Conjunctive Normal Form))

我们称公式 α 是**合取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或者命题符号的否定。

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

求下列公式的合取范式

$$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

Definition (析取范式 (Disjunctive Normal Form))

我们称公式 α 是**析取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \wedge \beta_{i2} \wedge \cdots \wedge \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或者命题符号的否定。

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q$$

求下列公式的析取范式

$$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

求合取范式与析取范式的方法

- (1) 先将公式中的联结符号化归成 \neg , \wedge 与 \vee ;
- (2) 再使用 De Morgan 律将 \neg 移到各个命题变元之前 (“否定深入”);
- (3) 最后使用结合律、分配律将公式化归成合取范式或析取范式。

命题逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

从上往下看

$$\frac{\alpha \text{ (前提)}}{\beta \text{ (结论)}} \quad (\text{规则名称})$$

从下往上看

$\frac{}{P}$ (unit) P is an axiom???

$$\frac{}{[x : P]} \quad (\text{assum})$$

所有新引入的假设最终必须被“**释放**”(discharged)

$$\frac{\begin{array}{c} [x : P] \\ \vdots \\ Q \end{array}}{P \rightarrow Q} \quad (\rightarrow\text{-intro}/x)$$

Assumption x is discharged

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad (\rightarrow\text{-elim, modus ponens})$$

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \quad (\wedge\text{-intro})$$

$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad (\wedge\text{-elim-left})$$

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \quad (\wedge\text{-elim-right})$$

$$\frac{P}{P \vee Q} \quad (\vee\text{-intro-left})$$

$$\frac{Q}{P \vee Q} \quad (\vee\text{-intro-right})$$

$$\frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow R}{R} \quad (\vee\text{-elim})$$

$$\frac{P \rightarrow \perp}{\neg P} \quad (\neg\text{-intro})$$

$$\frac{\neg P}{P \rightarrow \perp} \quad (\neg\text{-elim})$$

$$\frac{\begin{array}{c} [x : \neg P] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{P} \quad (\text{RAA}/x, \text{ reductio ad absurdum})$$

$$\frac{\perp}{P} \quad (\text{EFQ, ex falso quodlibet})$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{[y : A \wedge B]} \quad (\text{A})}{A} \quad (\wedge\text{E}) \quad \frac{\overline{[x : A \Rightarrow B \Rightarrow C]} \quad (\text{A})}{B \Rightarrow C} \quad (\Rightarrow\text{E}) \quad \frac{\overline{[y : A \wedge B]} \quad (\text{A})}{B} \quad (\wedge\text{E}) \\
 \frac{\frac{C}{A \wedge B \Rightarrow C} \quad (\Rightarrow\text{I}, y)}{(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)} \quad (\Rightarrow\text{I}, x)
 \end{array}$$



Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn