(六) 集合: 序关系 (Ordering Relations)

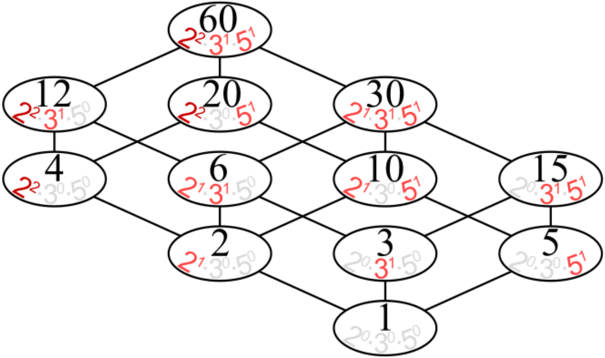
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 04 月 15 日

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

X 上的整除关系

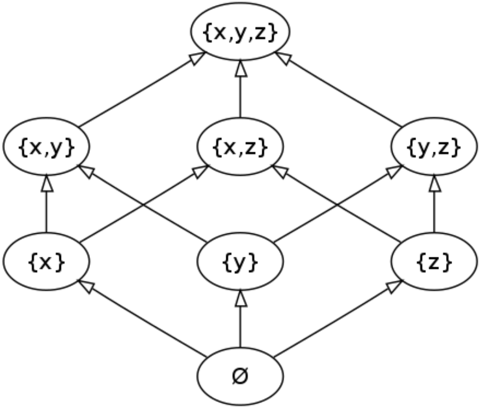


$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 $\subseteq$关系

$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 $\subseteq$关系



Definition (偏序关系 (Partial Order/Ordering))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 R 满足以下条件, 则称 R 是 X 上的 **偏序 (关系)**:

(1) R 是自反 (irreflexive)的。

$$\forall x \in X.\ xRx.$$

(2) R 是反对称 (antisymmetric)的。

$$\forall x, y \in X.\ xRy \wedge yRx \to x = y.$$

(3) R 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X.\ xRy \wedge yRz \to xRz.$$

Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order/Ordering))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 R 满足以下条件, 则称 R 是 X 上的 **严格偏序 (关系)**:

(1) R 是反自反 (irreflexive)的。

$$\forall x \in X.\ x\overline{R}x.$$

(2) R 是反对称 (antisymmetric)的。

$$\forall x, y \in X.\ xRy \land yRx \to x = y.$$

(3) R 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X.\ xRy \land yRz \to xRz.$$

Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order/Ordering))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 R 满足以下条件, 则称 R 是 X 上的 **严格偏序 (关系)**:

(1) R 是反自反 (irreflexive)的。

$$\forall x \in X.\ x \overline{R} x.$$

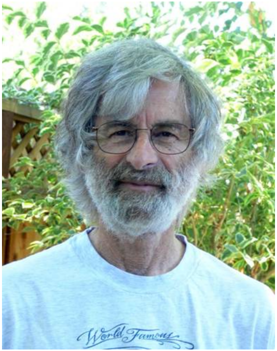
(2) R 是反对称 (antisymmetric)的。

$$\forall x, y \in X.\ xRy \land yRx \to x = y.$$

(3) R 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X.\ xRy \land yRz \to xRz.$$

$$(1) + (3) \implies (2)$$



Leslie Lamport $(1941 \sim)$

For "fundamental contributions to the theory and practice of **distributed and concurrent systems**, *notably the invention of concepts such as causality and logical clocks, safety and liveness, replicated state machines, and sequential consistency"*

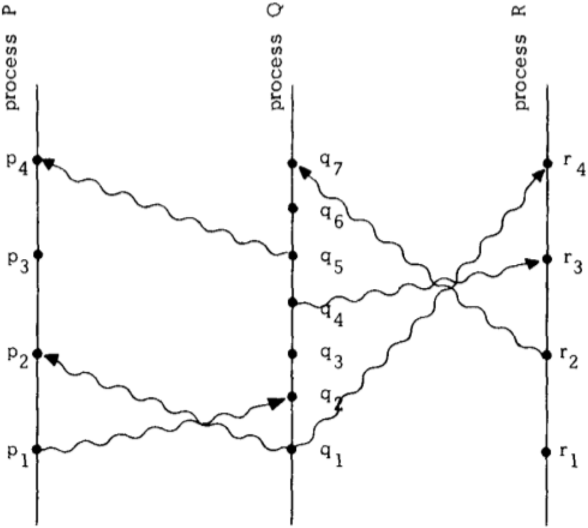
— *Turing Award (2013)*

Time, Clocks, and the Ordering of Events in a Distributed System

Leslie Lamport
Massachusetts Computer Associates, Inc.

The concept of one event happening before another in a distributed system is examined, and is shown to define a partial ordering of the events. A distributed algorithm is given for synchronizing a system of logical clocks which can be used to totally order the events.

引用量 ≥ 12525


process P
process Q
process R
p4
p3
p2
p1
q7
q6
q5
q4
q3
q2
q1
r4
r3
r2
r1

Definition (事件间的 “先于” 关系 (“Happened Before” Relation on Events))

令 E 是表示事件的集合。

$\rightarrow \subseteq E \times E$ 是 E 上的“先于”关系, 如果它是满足以下条件的最小关系:

- 对任何事件 $a \in E$, $a \not\rightarrow a$;
- 如果 a, b 事件属于同一个进程且 a 在 b 之前发生, 则 $a \rightarrow b$;
- 如果 a, b 分别表示同一个消息的发送事件与接收事件, 则 $a \rightarrow b$;
- 如果 $a \rightarrow b$ 且 $b \rightarrow c$, 则 $a \rightarrow c$。

Definition (事件间的 “先于” 关系 (“Happened Before” Relation on Events))

令 E 是表示事件的集合。

$\to \subseteq E \times E$ 是 E 上的“先于”关系, 如果它是满足以下条件的最小关系:

- 对任何事件 $a \in E$, $a \not\to a$;
- 如果 a, b 事件属于同一个进程且 a 在 b 之前发生, 则 $a \to b$;
- 如果 a, b 分别表示同一个消息的发送事件与接收事件, 则 $a \to b$;
- 如果 $a \to b$ 且 $b \to c$, 则 $a \to c$。

Theorem

$\to \subseteq E \times E$ 是 E 上的严格偏序。

Definition (偏序集 (Partially Ordered Set; Poset))

如果 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序, 则称 (X, R) 为偏序集。

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (a, x) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (a, x) \notin R).$$

则称 a 是 X 的极大元。

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (a, x) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (a, x) \notin R).$$

则称 a 是 X 的极大元。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (x, a) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (x, a) \notin R).$$

则称 a 是 X 的极小元。

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (a, x) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (a, x) \notin R).$$

则称 a 是 X 的极大元。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (x, a) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (x, a) \notin R).$$

则称 a 是 X 的极小元。

Q : 极大/极小元是否一定存在? 如果存在, 是否唯一?

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

无极大元、有唯一极小元 0

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

无极大元、有唯一极小元 0

$$(\{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$$

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

无极大元、有唯一极小元 0

$$(\{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$$

无极大元、有无穷多个极小元 (所有的素数)

Definition (最大元与最小元 (Greatest/Least))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

Definition (最大元与最小元 (Greatest/Least))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (a, x) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (a, x) \notin R).$$

则称 a 是 X 的最大元。

Definition (最大元与最小元 (Greatest/Least))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (a, x) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (a, x) \notin R).$$

则称 a 是 X 的最大元。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (x, a) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (x, a) \notin R).$$

则称 a 是 X 的最小元。

Definition (最大元与最小元 (Greatest/Least))

令 $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (a, x) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (a, x) \notin R).$$

则称 a 是 X 的最大元。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \neq a \land (x, a) \in R).$$

$$\forall x \in X.\ (x \neq a \to (x, a) \notin R).$$

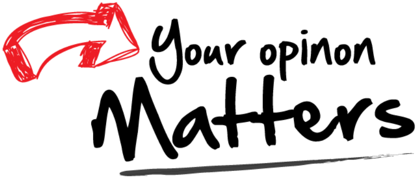
则称 a 是 X 的最小元。

Q：最大/最小元是否一定存在？如果存在，是否唯一？

Theorem

偏序集 (X, R) 如果有最大元或最小元，则它们是唯一的。


Thank You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn