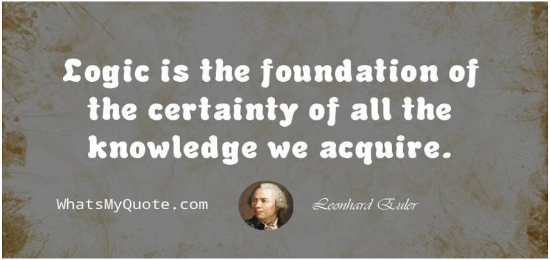
(一) Mathematical Logic

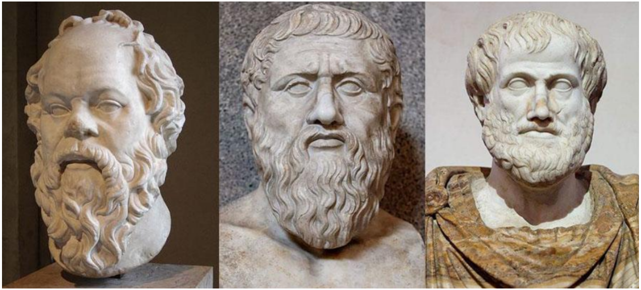
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 11 日


Logic is the foundation of the certainty of all the knowledge we acquire.
WhatsMyQuote.com
Leonhard Euler

数理逻辑的萌芽时期



Socrates　　Plato　　Aristotle

Gottfried Wilhelm Leibniz (莱布尼茨 1646 – 1716)

建立一个能够涵盖人类思维活动的“通用符号演算系统”，
让人们的思维方式变得像数学运算那样清晰。

一旦有争论，不管是科学上的还是哲学上的，人们只要坐下来**算一算**，就可以毫不费力地辨明谁是对的。

Let us calculate [calculemus].


Syntax
Semantics

Definition (Proposition (命题))

A *proposition* is a sentence that is either true or false, (but not both).

Definition (Proposition (命题))

A *proposition* is a sentence that is either true or false, (but not both).

Which are propositions?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$
3. $X = X$
4. 哥德巴赫猜想。
5. Today is rainy.
6. Tomorrow is Friday.
7. This sentence is false.

Forget "Propositions"!!!

Mathematical logic is *NOT* about propositions, but about the

Definition (命题逻辑的语言)

Definition (公式 (Formula))

(1) 每个命题符号 A_i 都是公式;

(2) 如果 α 和 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是公式;

(3) 除此之外, 别无其它。

符号	名称	英文读法	中文读法	LaTeX
$\neg$	negation	not	非	
$\wedge$	conjunction	and	与	
$\vee$	disjunction	or	或	
$\to$	conditional	implies (if then)	蕴含 (如果, 那么)	
$\leftrightarrow$	biconditional	if and only if	当且仅当	

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

对公式的结构作归纳。

Theorem (归纳原理)

令 $P(\alpha)$ 为一个关于公式的性质。假设

(1) 对所有的命题符号 A_i, 性质 $P(A_i)$ 成立; 并且

(2) 对所有的公式 α 和 β, 如果 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 成立, 则 $P((\neg\alpha))$, $P(\alpha * \beta)$ 也成立,

那么 $P(\alpha)$ 对所有的公式 α 都成立。

Definition (公式的长度)

公式 α 的长度 $|\alpha|$ 定义如下:

(1) 如果 α 是命题符号, 则 $|\alpha| = 1$;

(2) 如果 $\alpha = (\neg\beta)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta|$;

(3) 如果 $\alpha = (\beta * \gamma)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$。

Definition (公式的长度)

公式 α 的长度 $|\alpha|$ 定义如下:

(1) 如果 α 是命题符号, 则 $|\alpha| = 1$;

(2) 如果 $\alpha = (\neg\beta)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta|$;

(3) 如果 $\alpha = (\beta * \gamma)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$。

作业题

假设公式 α 不含 "$\neg$" 符号。
请证明, α 中超过四分之一的符号是命题符号。

关于 “公式” 的约定

- 最外层的括号可以省略
- 优先级: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
- 结合性: 右结合 ($\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, $\alpha \to \beta \to \gamma$)

关于“公式”的约定

- 最外层的括号可以省略
- 优先级: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$
- 结合性: 右结合 ($\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, $\alpha \to \beta \to \gamma$)

不要过分依赖这些约定; 尽情地使用括号吧

$$\cancel{P \wedge Q \to R}$$

$$(P \wedge Q) \to R$$

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

(4) 如果张三和李四都不去, 王五就去

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

(4) 如果张三和李四都不去, 王五就去

(5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

(4) 如果张三和李四都不去, 王五就去

(5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆

(6) 我今天进城, 除非下雨

用符号形式表示下列命题

(1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了

(2) 我们不能既写作业又打游戏

(3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习

(4) 如果张三和李四都不去, 王五就去

(5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆

(6) 我今天进城, 除非下雨

(7) 如果你来了, 那么他是否唱歌将取决于你是否伴奏

命题逻辑的语义

命题逻辑公式的语义就是该公式的"真 $(T/1)$"、"假 $(F/0)$"值。

$$(((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

命题逻辑公式的语义就是该公式的“真 $(T/1)$”、“假 $(F/0)$”值。

$$(((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

某个公式 α 的真假值取决于

- α 中所含命题符号的真假值; 与
- 逻辑连接符号的含义

Definition (真值指派 (v))

令 S 为一个命题符号的集合。S 上的一个**真值指派** v 是一个从 S 到真假值的映射

$$v : S \to \{T, F\}.$$

Definition (真值指派 (v))

令 S 为一个命题符号的集合。S 上的一个**真值指派** v 是一个从 S 到真假值的映射

$$v : S \to \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

使用真值表定义逻辑联接符的语义

Definition (真值表 (Truth Table))

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

"如果中国足球队夺冠, 我就好好学习"

Definition (真值指派的扩张 ($\bar{v}$))

令 $\bar{S}$ 为只含有 S 中命题符号的公式集。S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 $\bar{S}$ 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \to \{T, F\}.$$

Definition (真值指派的扩张 ($\bar{v}$))

令 $\bar{S}$ 为只含有 S 中命题符号的公式集。S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 $\bar{S}$ 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \to \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

Definition (真值指派的扩张 ($\bar{v}$))

令 $\bar{S}$ 为只含有 S 中命题符号的公式集。S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 $\bar{S}$ 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \to \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\bar{v}(\alpha) =$$

Definition (真值指派的扩张 ($\bar{v}$))

令 $\bar{S}$ 为只含有 S 中命题符号的公式集。S 上的真值指派 v 的扩张是一个从 $\bar{S}$ 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \to \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\bar{v}(\alpha) = T$$

构造下列公式的真值表

$$\neg P \lor Q$$

$$(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$

$$(P \land Q) \land \neg P$$

$$(((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \land A) \to C)))$$

Definition (满足 (Satisfy))

如果 $\bar{v}(\alpha) = T$, 则称真值指派 v **满足**公式 α。

Definition (满足 (Satisfy))

如果 $\bar{v}(\alpha) = T$, 则称真值指派 v **满足**公式 α。

$$\alpha : (((B \to (A \to C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \to C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

真值指派 v 满足 α

Definition (可满足的 (Satisfiable))

Definition (可满足的 (Satisfiable))

Definition (可满足性问题 (Satisfiability))

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含** 公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

Σ : 前提 $\qquad$ α : 结论

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含** 公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

$$\Sigma : \text{前提} \qquad \alpha : \text{结论}$$

$$\{A, \neg A\} \models B$$

Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含** 公式 α, 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果每个满足 Σ 中所有公式的真值指派都满足 α。

$$\Sigma : \text{前提} \qquad \alpha : \text{结论}$$

$$\{A, \neg A\} \models B$$

$$\{\alpha \wedge \beta\} \models \alpha$$

Theorem

请证明: $\Sigma \cup \{a\} \models \beta$ 当且仅当 $\Sigma \models (\alpha \to \beta)$。

$$\Sigma = \emptyset$$

$\emptyset \models \alpha$ 简记为 $\models \alpha$

$$\Sigma = \emptyset$$

$\emptyset \models \alpha$ 简记为 $\models \alpha$

$\Sigma = \{\alpha\}$ 只含有一个公式

$\{\alpha\} \models \beta$ 简记为 $\alpha \models \beta$

Definition (重言式/永真式 (Tautology))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 为**重言式**, 记为 $\models \alpha$。

重言式在所有真值指派下均为真。

Definition (重言式/永真式 (Tautology))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 为**重言式**, 记为 $\models \alpha$。

重言式在所有真值指派下均为真。

Definition (矛盾式/永假式 (Contradiction))

若公式 α 在所有真值指派下均为假, 则称 α 为**矛盾式**。

Definition (重言等价)

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β 重言等价, 记为 $\alpha \equiv \beta$。

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

德摩根 (De Morgan) 律:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

双重否定律:

$$((\neg(\neg A)) \leftrightarrow A)$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

逆否命题:

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

(1)

$$\alpha \to (\beta \to \alpha)$$

(2)

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$$

(3)

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$$

(4)

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$

Definition (合取范式 (Conjunctive Normal Form))

我们称公式 α 是**合取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或者命题符号的否定。

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

求下列公式的合取范式

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

Definition (析取范式 (Disjunctive Normal Form))

我们称公式 α 是**析取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \wedge \beta_{i2} \wedge \cdots \wedge \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或者命题符号的否定。

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q) \vee \neg Q$$

求下列公式的析取范式

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

求合取范式与析取范式的方法

(1) 先将公式中的联结符号化归成 $\neg, \wedge$ 与 $\vee$;

(2) 再使用 De Morgan 律将 $\neg$ 移到各个命题变元之前 ("否定深入");

(3) 最后使用结合律、分配律将公式化归成合取范式或析取范式。

命题逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

从上往下看

$$\frac{\alpha \quad (\text{前提})}{\beta \quad (\text{结论})} \quad (\text{规则名称})$$

从下往上看

$$\frac{}{P}\ (\text{unit}) \qquad P \text{ is an axiom???}$$

$$\frac{}{[x : P]} \quad \text{(assum)}$$

所有新引入的假设最终必须被“**释放**”(discharged)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[x : P] \\ \vdots \\ Q\end{array}}{P \to Q} \quad (\to \text{-intro}/x)$$

Assumption x is discharged

$$\dfrac{P \qquad P \to Q}{Q} \quad (\to \text{-elim, modus ponens})$$

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q} \quad (\wedge\text{-intro})$$

$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad (\wedge\text{-elim-left})$$

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \quad (\wedge\text{-elim-right})$$

$$\frac{P}{P \lor Q} \quad (\lor\text{-intro-left})$$

$$\frac{Q}{P \lor Q} \quad (\lor\text{-intro-right})$$

$$\frac{P \lor Q \qquad P \to R \qquad Q \to R}{R} \quad (\lor\text{-elim})$$

$$\frac{P \to \bot}{\neg P} \quad (\neg\text{-intro})$$

$$\frac{\neg P}{P \to \bot} \quad (\neg\text{-elim})$$

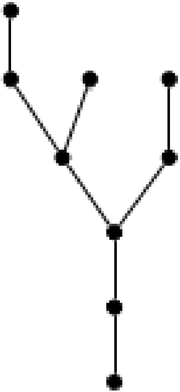
$$\dfrac{\begin{array}{c}[x : \neg P] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{P} \quad \text{(RAA}/x\text{, reductio ad absurdum)}$$

$$\dfrac{\bot}{P} \quad \text{(EFQ, ex falso quodlibet)}$$

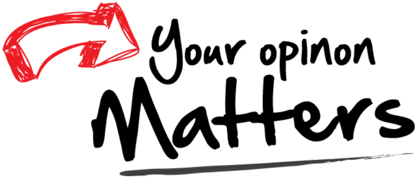
$$(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[y : A \wedge B]}\,(\mathrm{A})}{A}\,(\wedge\mathrm{E}) \quad \dfrac{}{[x : A \Rightarrow B \Rightarrow C]}\,(\mathrm{A})}{B \Rightarrow C}\,(\Rightarrow\mathrm{E}) \quad \dfrac{\dfrac{}{[y : A \wedge B]}\,(\mathrm{A})}{B}\,(\wedge\mathrm{E})}{C}\,(\Rightarrow\mathrm{E})}{A \wedge B \Rightarrow C}\,(\Rightarrow\mathrm{I,y})}{(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)}\,(\Rightarrow\mathrm{I,x})
$$




Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn