

(一) 命题逻辑

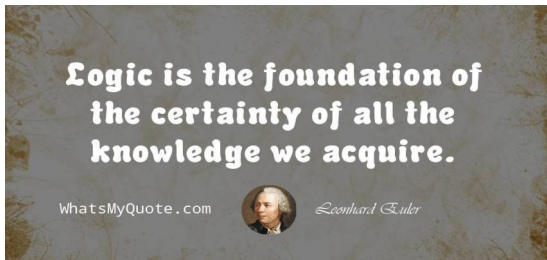
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 11 日



逻辑是研究**推理/证明** (Inference/Proof) 的一门学科。



基本问题：什么样的推理是正确/合法 (Valid) 的？

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} \models \tau$$

正确性: 如果**前提** $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 都为真, 那么**结论** τ 也为真。

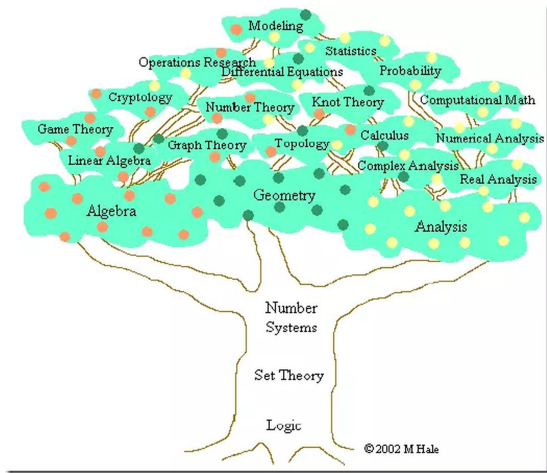
证明就是一系列根据**推理规则**将公式不断变形的步骤。

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} \vdash \tau$$

$$\frac{\alpha \quad \beta \quad \gamma}{\tau}$$

每一步推理都必须是正确的

什么样的推理是正确/合法 (Valid) 的?



逻辑要研究的是**不依赖于具体领域知识**的推理

$$\frac{P \text{ 是真的} \quad Q \text{ 是真的}}{P \text{ 与 } Q \text{ 都是真的}}$$

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

$$\frac{\text{如果 } P \text{ 是真的, 则 } Q \text{ 是真的} \quad P \text{ 是真的}}{Q \text{ 是真的}}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad P}{Q}$$

$$\frac{\text{如果 } P \text{ 是真的, 则 } Q \text{ 是真的} \quad Q \text{ 是假的}}{P \text{ 是假的}}$$

$$\frac{P \rightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P}$$

这些都是人类最基本的思维规律



逻辑就是**用数学的方法**研究**人类基本思维规律**的一门学科



Syntax

Semantics

语法与语义是“对立统一”的

Definition (命题 (Proposition))

命题是可以判定真假的陈述句 (不可既真又假)。

以下哪些是命题?

1. $1 + 1 = 2$
2. $X + 6 = 0$
3. 中国是一个伟大的国家
4. 你饿了吗?
5. 你要好好休息
6. 哥德巴赫猜想
7. 今天是雨天
8. 明天是周五
9. 这句话是假话

忘掉“命题”!!!

逻辑不关心单个命题的真假, 而关心命题之间的关系

Definition (命题逻辑的语言)

命题逻辑的语言包括以下 3 部分:

- (1) 任意多个**命题符号**: A_0, A_1, P, Q, \dots ;
- (2) 5 个**逻辑联词 (Connective)**:

| 符号 | 名称 | 英文读法 | 中文读法 | L ^A T _E X |
|-------------------|---------------------|----------------------|----------------|---------------------------------|
| \neg | negation (否定) | not | 非 | <code>\lnot</code> |
| \wedge | conjunction (合取) | and | 与 | <code>\land</code> |
| \vee | disjunction (析取) | or | 或 | <code>\lor</code> |
| \rightarrow | conditional | implies (if then) | 蕴含 (如果, 那么) | <code>\to</code> |
| \leftrightarrow | biconditional | if and only if | 当且仅当 | <code>\leftrightarrow</code> |

- (3) 左括号、右括号

Definition (公式 (Formula))

- (1) 每个命题符号都是公式;
- (2) 如果 α 和 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ 和 $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是公式;
- (3) 除此之外, 别无其它。

Lemma (公式的括号匹配性质)

每个公式中左右括号的数目相同。

数学归纳法

对公式的**结构**作归纳

Theorem (归纳原理)

令 $P(\alpha)$ 为一个关于公式的性质。假设

- (1) 对所有的命题符号 A_i , 性质 $P(A_i)$ 成立; 并且
- (2) 对所有的公式 α 和 β , 如果 $P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 成立, 则 $P((\neg\alpha))$, $P((\alpha * \beta))$ 也成立,

那么 $P(\alpha)$ 对所有的公式 α 都成立。

Definition (公式的长度)

公式 α 的长度 $|\alpha|$ 定义如下:

- (1) 如果 α 是命题符号, 则 $|\alpha| = 1$;
- (2) 如果 $\alpha = (\neg\beta)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta|$;
- (3) 如果 $\alpha = (\beta * \gamma)$, 则 $|\alpha| = 1 + |\beta| + |\gamma|$.

作业题

假设公式 α 中不含 “ \neg ” 符号。

请证明, α 中超过四分之一的符号是命题符号。

关于“公式”的约定

- ▶ 最外层的括号可以省略
- ▶ 优先级: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- ▶ 结合性: 右结合 ($\alpha \wedge \beta \wedge \gamma, \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$)

不要过分依赖这些约定; 尽情地使用括号吧

$$\cancel{P} \wedge \cancel{Q} \wedge \cancel{R}$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

用命题逻辑公式表示下列命题

- (1) 或者你没有给我写信, 或者它在途中丢失了
- (2) 我们不能既写作业又打游戏
- (3) 如果中国足球队夺冠, 我就好好学习
- (4) 如果张三和李四都不去, 王五就去
- (5) 如果周六不下雨, 我就去看电影, 否则就去图书馆
- (6) 我今天进城, 除非下雨
- (7) 如果你来了, 那么他是否唱歌将取决于你是否伴奏

Syntax

Semantics

命题逻辑的语义

命题逻辑公式的**语义**就是该公式的“真 ($T/1/\top$)”、“假 ($F/0/\perp$)”值。

$$\alpha = (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

某个公式 α 的真假值取决于

- (1) α 中所含命题符号的真假值; 与
- (2) 逻辑联词的语义

Definition (真值指派 (v))

令 S 为一个命题符号的集合。 S 上的一个**真值指派** v 是一个从 S 到真假值的映射

$$v : S \rightarrow \{T, F\}.$$

$$\alpha = (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

使用真值表定义逻辑联词的语义

Definition (真值表 (Truth Table))

| α | β | $\neg\alpha$ | $\alpha \wedge \beta$ | $\alpha \vee \beta$ | $\alpha \rightarrow \beta$ | $\alpha \leftrightarrow \beta$ |
|----------|---------|--------------|-----------------------|---------------------|----------------------------|--------------------------------|
| T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T | F |
| F | F | T | F | F | T | T |

“如果中国足球队夺冠, 我就好好学习”

$$\alpha = (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

α 的真值为 T

Definition (真值指派的扩张 (\bar{v}))

令 S 为一个命题符号的集合。令 \bar{S} 为只含有 S 中命题符号的公式集。 S 上的**真值指派 v 的扩张**是一个从 \bar{S} 到真假值的映射

$$\bar{v} : \bar{S} \rightarrow \{T, F\}.$$

$$\alpha : (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\boxed{\bar{v}(\alpha) = T}$$

课堂练习: 构造下列公式的真值表

$$\neg P \vee Q$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(P \wedge Q) \wedge \neg P$$

$$(((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

Definition (满足 (Satisfy))

如果 $\bar{v}(\alpha) = T$, 则称真值指派 v **满足** 公式 α 。

$$\alpha = (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

$$v(A) = v(B) = T, \quad v(C) = F$$

$$\boxed{\bar{v}(\alpha) = T}$$

真值指派 v 满足 α

Definition (可满足的 (Satisfiable))

如果存在某个真值指派满足公式 α , 则 α 是可满足的。

$\neg P \vee Q$ 是可满足的

$\alpha = (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$ 是可满足的

$(P \wedge Q) \wedge \neg P$ 是不可满足的 (unsatisfiable)

Definition (命题逻辑公式的可满足性问题 (Satisfiability; **SAT**))

任给一个命题逻辑公式 α , α 是可满足的吗?



Definition (重言蕴含 (Tautologically Implies))

设 Σ 为一个公式集。

Σ **重言蕴含** 公式 α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的真值指派都满足 α 。

$$\{\alpha\} \models \beta \rightarrow \alpha$$

$$\{\alpha \wedge \beta\} \models \alpha$$

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models \beta$$

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \models \beta$$

Theorem

请证明: $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ 当且仅当 $\Sigma \models (\alpha \rightarrow \beta)$ 。

v_Σ : 满足 Σ 中所有公式的任一真值指派

$v_{\Sigma \cup \{\alpha\}}$: 满足 $\Sigma \cup \{\alpha\}$ 中所有公式的任一真值指派

Lemma

如果 $\overline{v_{\Sigma \cup \{\alpha\}}}(\beta) = T$, 则 $\overline{v_\Sigma}(\alpha \rightarrow \beta) = T$ 。

Lemma

如果 $\overline{v_\Sigma}(\alpha \rightarrow \beta) = T$, 则 $\overline{v_{\Sigma \cup \{\alpha\}}}(\beta) = T$ 。

$$\Sigma = \emptyset$$

$$\emptyset \models \alpha \text{ 简记为 } \models \alpha$$

$\Sigma = \{\alpha\}$ 只含有一个公式

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

Definition (重言式/永真式 (Tautology))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 为**重言式**, 记为 $\models \alpha$ 。

重言式在所有真值指派下均为真。

$$\alpha = (((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

Definition (矛盾式/永假式 (Contradiction))

若公式 α 在所有真值指派下均为假, 则称 α 为**矛盾式**。

$(P \wedge Q) \wedge \neg P$ 是**不可满足的**

Definition (重言等价 (Tautologically Equivalent))

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β **重言等价**, 记为 $\alpha \equiv \beta$ 。

$$(B \rightarrow (A \rightarrow C)) \equiv (B \wedge A) \rightarrow C$$

$$(((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \wedge A) \rightarrow C)))$$

交换律:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$$

结合律:

$$((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

分配律:

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

德摩根 (De Morgan) 律:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

双重否定律:

$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

排中律:

$$A \vee (\neg A)$$

矛盾律:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

逆否命题:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

(1)

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

(2)

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \vee \beta)$$

(3)

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$$

(4)

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

请证明以下公式是重言式

$$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$$

$$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$$

命题逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

从上往下看: 展示证明过程

$$\frac{\alpha \quad \beta \quad \dots \text{ (前提)}}{\gamma \text{ (结论)}} \quad \text{(规则名称)}$$

$$\{\alpha, \beta, \dots\} \vdash \gamma$$

从下往上看: 提供证明思路

$$\frac{}{[x : P]} \quad (\text{assum})$$

所有引入的假设最终必须被“**释放**”(discharged)

\wedge

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \quad (\wedge\text{-intro})$$

$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad (\wedge\text{-elim-left})$$

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \quad (\wedge\text{-elim-right})$$

“ \wedge ”推理规则的应用

$$\{p \wedge q, r\} \vdash q \wedge r$$

Proof.

| | | |
|--------------|--------------------------|-----|
| $p \wedge q$ | 前提 | (1) |
| r | 前提 | (2) |
| q | \wedge -elim-right (1) | (3) |
| $q \wedge r$ | \wedge -intro (3), (2) | (4) |





$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha} \quad (\neg\neg\text{-intro})$$

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \quad (\neg\neg\text{-elem})$$

“ $\neg\neg$ ”推理规则的应用

$$\{p, \neg\neg(q \wedge r)\} \vdash \neg\neg p \wedge r$$



$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} \quad (\rightarrow\text{-elim (modus ponens)})$$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha} \quad (\text{modus tollens})$$

“ \rightarrow ”推理规则的应用

$$\{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r\} \vdash \neg q$$



$$\frac{\begin{array}{c} [x : \alpha] \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta} \quad (\rightarrow\text{-intro}/x)$$

Assumption x is discharged

“ \rightarrow ”推理规则的应用

$$\vdash p \rightarrow p$$

“ \rightarrow ”推理规则的应用

$$\{\neg q \rightarrow \neg p\} \vdash p \rightarrow \neg\neg q$$

“ \rightarrow ”推理规则的应用

$$\{p \wedge q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad (\vee\text{-intro-left})$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \quad (\vee\text{-intro-right})$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \alpha \rightarrow \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma}{\gamma} \quad (\vee\text{-elim; (分情况分析)})$$

“ \vee ” 推理规则的应用

$$p \vee q \vdash q \vee p$$

$$\frac{p \vee q \quad p \rightarrow q \vee p \quad q \rightarrow q \vee p}{q \vee p}$$

“ \vee ”推理规则的应用

$$q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$$

推理规则的应用

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

推理规则的应用

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$$

\perp

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\perp} \quad (\perp\text{-intro})$$

$$\frac{\perp}{\alpha} \quad (\perp\text{-elim; EFQ, ex falso quodlibet (Principle of Explosion)})$$

“ \perp ”推理规则的应用

$$\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$$

“ \perp ”推理规则的应用

$$p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$$



$$\frac{\alpha \rightarrow \perp}{\neg \alpha} \quad (\neg\text{-intro})$$

$$\frac{\neg \alpha}{\alpha \rightarrow \perp} \quad (\neg\text{-elim})$$

“ \neg ”推理规则的应用

$$\{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q\} \vdash \neg p$$

“ \neg ”推理规则的应用

$$\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p\} \vdash q$$

(提示: $\neg\neg q \vdash q$)

“ \neg ”推理规则的应用

$$\frac{\neg p \rightarrow \perp}{p} \quad (\text{RAA}/x, \text{reductio ad absurdum (反证法)})$$

“ \neg ”推理规则的应用

$$\vdash p \vee \neg p \quad (\text{排中律; Law of the Excluded Middle (LEM)})$$

连这些推理规则也一并忘却吧!!!



使用命题逻辑进行推理

某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

- | | |
|-------------------|--|
| (1) 若赵去, 钱也去; | (1) $Z \rightarrow Q$; |
| (2) 李、吴两人中必有一人去; | (2) $L \vee W$; |
| (3) 钱、孙两人中去且仅去一人; | (3) $(Q \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg Q)$; |
| (4) 孙、李两人同去或同不去; | (4) $(S \wedge L) \vee (\neg S \wedge \neg L)$; |
| (5) 若吴去, 则赵、钱也去; | (5) $W \rightarrow Z \wedge Q$; |
| (6) 只有孙去, 赵才会去。 | (6) $Z \rightarrow S$ 。 |

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

Theorem (命题逻辑的可靠性 (Soundness))

如果 $\Sigma \vdash \alpha$, 则 $\Sigma \models \alpha$ 。

Theorem (命题逻辑的完备性 (Completeness))

如果 $\Sigma \models \alpha$, 则 $\Sigma \vdash \alpha$ 。

Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn