(七) 集合: 序关系 (Ordering Relations)

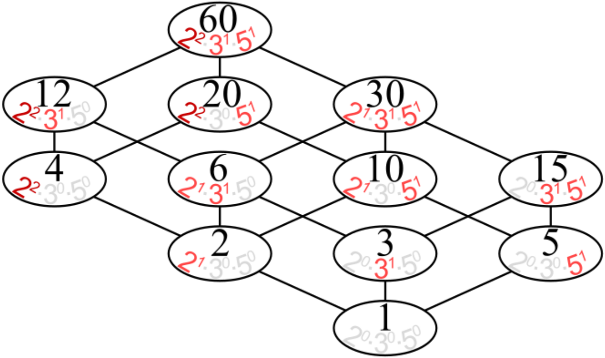
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 04 月 22 日

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

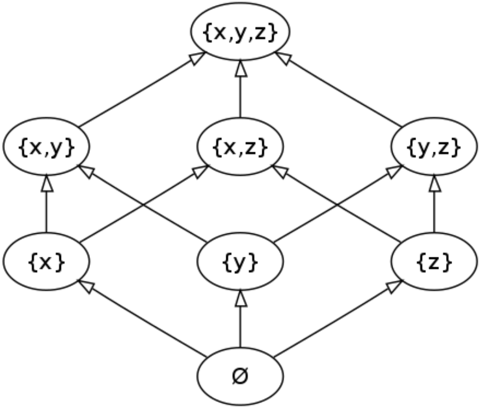
X 上的整除关系



自反 + 反对称 + 传递

$$S = \{x, y, z\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 上的包含 $\subseteq$关系



自反 + 反对称 + 传递

Definition (偏序关系 (Partial Order))

令 $\preceq\ \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 $\preceq$ 满足以下条件, 则称 $\preceq$ 是 X 上的偏序关系,

并称 $(\preceq, X)$ 为偏序集 (poset; Partially Ordered Set):

(1) $\preceq$ 是自反 (irreflexive)的。

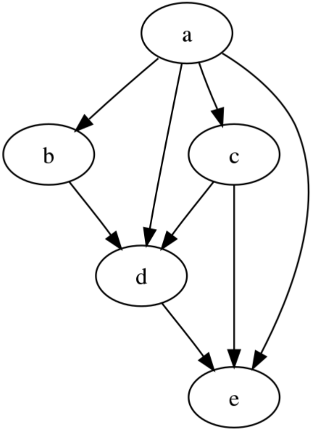
$$\forall x \in X.\ x \preceq x.$$

(2) $\preceq$ 是反对称 (antisymmetric)的。

$$\forall x, y \in X.\ x \preceq y \wedge y \preceq x \rightarrow x = y.$$

(3) $\preceq$ 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X.\ x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z.$$



有向无环图 (DAG; Directed Acyclic Graph) 上的

可达 (reachability) 关系

Definition

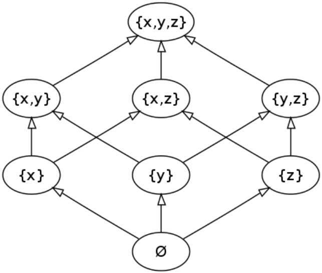
设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。对任意 $a, b \in X$,

严格小于 (strictly less than):

$$a \prec b \triangleq a \preceq b \land a \neq b$$

被覆盖 (covered by):

$$ab \triangleq a \prec b \land (\forall c \in X.\ (c \neq a \land c \neq b) \to \neg(a \preceq c \preceq b))$$



Definition

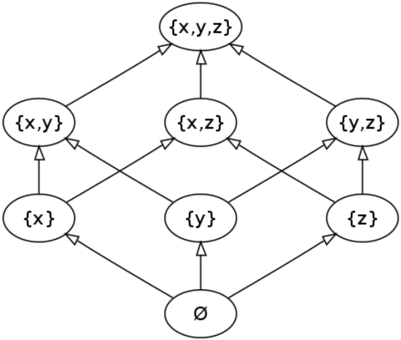
设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。对 $a, b \in X$,

可比的 (Comparable):

$$a \preceq b \lor b \preceq a$$

不可比的 (Incomparable):

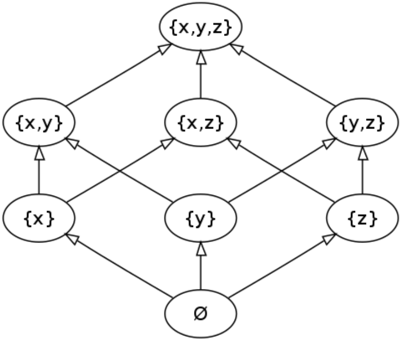
$$\neg(a \preceq b \lor b \preceq a)$$



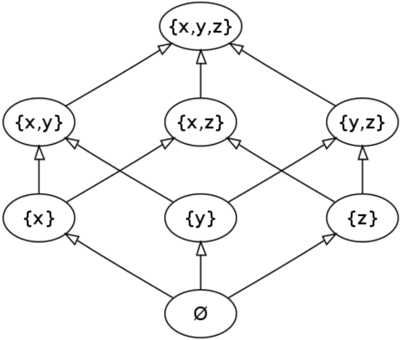
Definition (链与反链 (Chain; Antichain))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集。

- 设 $S \subseteq X$ 且 S 中元素两两可比, 则称 S 是链。
- 设 $S \subseteq X$ 且 S 中元素两两不可比, 则称 S 是反链。



$$\{\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}, \{\{y\}, \{y, z\}\}, \{\{z\}, \{x, z\}\}\}$$



$$\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$$

Theorem (Dilworth's Theorem)

最大反链的大小 = 最小链分解中链的条数

Definition (严格偏序关系 (Strict Partial Order))

令 $\prec \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系。

如果 $\prec$ 满足以下条件, 则称 $\prec$ 是 X 上的严格偏序关系:

(1) $\prec$ 是反自反 (irreflexive)的。

$$\forall x \in X. \neg(x \prec x).$$

(2) $\prec$ 是非对称 (asymmetric)的。

$$\forall x, y \in X. x \prec y \to \neg(y \prec x).$$

(3) $\prec$ 是传递 (transitive)的。

$$\forall x, y, z \in X. x \prec y \land y \prec z \to x \prec z.$$

$$(\mathcal{P}(X), \subset)$$

$$(1) + (3) \implies (2)$$

Theorem

设 $\prec \subseteq X \times X$ 是 X 上的严格偏序关系。

对于任意 $x, y, z \in X$:

(1) $x \prec y$, $x = y$, $y \prec x$ 三者中至多有一个成立;

(2) $x \preceq y \preceq x \to x = y$。

$$(x \preceq y \triangleq x \prec y \lor x = y)$$

Definition (全序关系 (Total Order))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。

如果 $\preceq$ 满足以下连接性, 则称 $\preceq$ 是 X 上的全序关系:

$$\forall a, b \in X.\ a \preceq b \lor b \preceq a.$$

$$(\mathbb{R}, \leq) \qquad (\mathbb{R}, \geq)$$

Definition (严格全序关系 (Strict Total Order))

令 $\prec \subseteq X \times X$ 是 X 上的关系。

如果 $\prec$ 满足以下条件, 则称 $\prec$ 是 X 上的严格全序关系:

(1) 反自反 (Irreflexivity):

$$\forall x \in X.\ \neg(x \prec x)$$

(2) 传递性 (Transitive):

$$\forall x, y, z \in X.\ x \prec y \land y \prec z \to x \prec z$$

(3) 三歧性 (Trichotomous):

$$\forall x, y \in X.\ (\text{exactly one of } x \prec y, x = y, \text{ or } y \prec x \text{ holds})$$

$$(\mathbb{R}, <) \qquad (\mathbb{R}, >)$$

Definition (极大元与极小元 (Maximal/Minimal))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(a \prec x),$$

则称 a 是 X 的极大元。

如果

$$\forall x \in X.\ \neg(x \prec a),$$

则称 a 是 X 的极小元。

Q : 极大/极小元是否一定存在? 如果存在, 是否唯一?

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

无极大元、无极小元

$$(\mathbb{N}, \leq)$$

无极大元、有唯一极小元 0

$$(\{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$$

无极大元、有无穷多个极小元 (所有的素数)

Definition (最大元与最小元 (Maximum/Minimum; Greatest/Least; Largest/Smallest))

令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序。设 $a \in X$。

如果

$$\forall x \in X.\ x \preceq a,$$

则称 a 是 X 的最大元。

如果

$$\forall x \in X.\ a \preceq x,$$

则称 a 是 X 的最小元。

Q : 最大/最小元是否一定存在? 如果存在, 是否唯一?

Theorem

偏序集 $(X, \preceq)$ 如果有最大元或最小元，则它们是唯一的。

假设存在两个最大元 x 与 y。

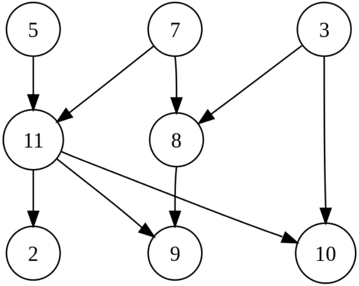
$$x \preceq y \land y \preceq x \implies x = y$$

Definition (线性拓展 (Linear Extension))

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $(X, \preceq')$ 是全序集。如果

$$\forall x, y \in X.\ x \preceq y \to x \preceq' y,$$

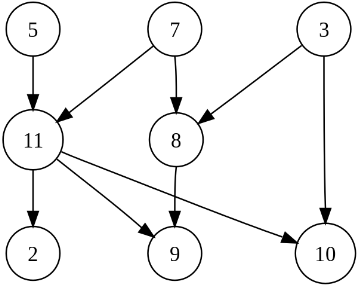
则称 $\preceq'$ 是 $\preceq$ 的线性拓展。



$5, 7, 3, 11, 8, 2, 9, 10 \qquad 3, 5, 7, 8, 11, 2, 9, 10$

Theorem

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集且 X 是有限集，则 $\preceq$ 的线性拓展必定存在。



Theorem

设 $(X, \preceq)$ 是偏序集且 X 是有限集，则极小元一定存在。

Definition (良序 (Well-Ordering))

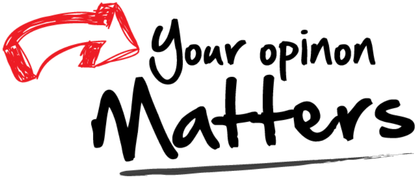
设 $(X, \preceq)$ 是全序集。

如果 X 的任意非空子集都有最小元，则称 $(X, \preceq)$ 为良序集。

$$(\mathbb{N}, \leq) \qquad \mathbb{Z}, \leq \qquad \mathbb{R}, \leq$$

数学归纳法　　良序集


Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn