

(二) 一阶谓词逻辑

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 18 日



如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

每个人都是要死的 苏格拉底是人

苏格拉底是要死的

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

每个人都是要死的 苏格拉底是人

苏格拉底是要死的

$$\frac{P \quad Q}{R}$$

如何使用命题逻辑表达下列命题与推理

亚里士多德的“三段论”

| | |
|----------|--------|
| 每个人都是要死的 | 苏格拉底是人 |
| <hr/> | |
| 苏格拉底是要死的 | |

$$\frac{P \quad Q}{R}$$

命题逻辑无法表达：个体、全体以及它们之间的关系

我们需要使用表达能力更强的一阶谓词逻辑

例子: 谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

例子: 谓词 (Predicate)

(1) 张三是个法外狂徒

(2) 李四与张三是好朋友

例子: 谓词 (Predicate)

- (1) 张三是个法外狂徒
- (2) 李四与张三是好朋友
- (3) 李四也是一个法外狂徒

例子: 谓词 (Predicate)

- (1) 张三是个法外狂徒
- (2) 李四与张三是好朋友
- (3) 李四也是一个法外狂徒
- (4) 王五站在张三与李四中间 (害怕极了)

例子: 谓词 (Predicate)

- (1) 张三是个法外狂徒
- (2) 李四与张三是好朋友
- (3) 李四也是一个法外狂徒
- (4) 王五站在张三与李四中间 (害怕极了)
- (5) 王五长得比张三与李四都高

例子: 谓词 (Predicate)

- (1) 张三是个法外狂徒
- (2) 李四与张三是好朋友
- (3) 李四也是一个法外狂徒
- (4) 王五站在张三与李四中间 (害怕极了)
- (5) 王五长得比张三与李四都高

一元谓词表达了个体的性质

多元谓词表达了个体之间的关系

零元谓词即命题逻辑中的命题符号

一阶谓词逻辑的语法



Definition (一阶谓词逻辑的语言 (Language))

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词符号: \forall (forall; 全称量词), \exists (exists; 存在量词)

变元符号: x, y, z, \dots

左右括号: $(,)$

Definition (一阶谓词逻辑的语言 (Language))

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词符号: \forall (forall; 全称量词), \exists (exists; 存在量词)

变元符号: x, y, z, \dots

左右括号: $(,)$

常数符号: 零个或多个常数符号 a, b, c, \dots , 表达特殊的个体

函数符号: n -元函数符号 f, g, h, \dots ($n \in \mathbb{N}^+$), 表达个体上的运算

谓词符号: n -元谓词符号 P, Q, R, \dots ($n \in \mathbb{N}$), 表达个体的性质与关系

Definition (一阶谓词逻辑的语言 (Language))

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词符号: \forall (forall; 全称量词), \exists (exists; 存在量词)

变元符号: x, y, z, \dots

左右括号: $(,)$

常数符号: 零个或多个常数符号 a, b, c, \dots , 表达特殊的个体

函数符号: n -元函数符号 f, g, h, \dots ($n \in \mathbb{N}^+$), 表达个体上的运算

谓词符号: n -元谓词符号 P, Q, R, \dots ($n \in \mathbb{N}$), 表达个体的性质与关系

初等数论的语言: $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

“项”是一阶谓词逻辑要讨论的个体对象, 它本身无所谓真假

Definition (项 (Term))

- (1) 每个变元 x, y, z, \dots 都是一个项;
- (2) 每个常数符号都是一个项;
- (3) 如果 t_1, t_2, \dots, t_n 是项, 且 f 为一个 n -元函数符号, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 也是项;
- (4) 除此之外, 别无其它。

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

x

0

$$S0 \quad x + SSS0 \quad (x + SSS0) \times y$$

公式刻画了个体的性质或者个体之间的关系, 它的语义就是它的真假值

Definition (公式 (Formula))

- (1) 如果 t_1, \dots, t_n 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 为公式, 称为原子公式;
- (2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;
- (3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x. \alpha$ 与 $\exists x. \alpha$ 也是公式;
- (4) 除此之外, 别无其它。

公式刻画了**个体的性质**或者**个体之间的关系**, 它的语义就是它的真假值

Definition (公式 (Formula))

- (1) 如果 t_1, \dots, t_n 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 为公式, 称为**原子公式**;
- (2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;
- (3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x. \alpha$ 与 $\exists x. \alpha$ 也是公式;
- (4) 除此之外, 别无其它。

约定: 量词符号 \forall 与 \exists 的管辖范围尽可能短

$\forall x. \alpha \rightarrow \beta$: 表示 $(\forall x. \alpha) \rightarrow \beta$ 不表示 $\forall x. (\alpha \rightarrow \beta)$

每个人都是要死的 苏格拉底是人

苏格拉底是要死的

每个人都是要死的 苏格拉底是人

苏格拉底是要死的

$$\frac{\forall x. (H(x) \rightarrow M(x)) \quad H(s)}{M(s)}$$

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

- (1) 0 不是任何自然数的后继
- (2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

- (1) 0 不是任何自然数的后继
- (2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等
- (3) x 是素数 ($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$L = \{0, S, +, \times, <, =\}$$

- (1) 0 不是任何自然数的后继
- (2) 两个自然数相等当且仅当它们的后继相等
- (3) x 是素数 ($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)
- (4) 哥德巴赫猜想 (任一大于 2 的偶数, 都可表示成两个素数之和)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

对于任意的正实数 ϵ , 存在一个正实数 δ ,
使得对于任意的 x , 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - b| < \epsilon$ 成立。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

对于任意的正实数 ϵ , 存在一个正实数 δ ,
使得对于任意的 x , 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - b| < \epsilon$ 成立。

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+. \exists \delta \in \mathbb{R}^+. \forall x \in \mathbb{R}^+. (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

$\forall x \in A. \alpha$ 实际上是 $\forall x. (x \in A \rightarrow \alpha)$ 的简记

$\exists x \in A. \alpha$ 实际上是 $\exists x. (x \in A \wedge \alpha)$ 的简记

以下概念与程序设计语言中相应概念类似, 此处举例说明, 不作正式定义

Definition (作用域 (Scope)、约束变元 (Bind)、自由变元 (Free))

$$(1) \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(2) (\forall x. P(x)) \rightarrow Q(x)$$

$$(3) \forall x. (P(x) \rightarrow (\exists y. R(x, y)))$$

$$(4) (\forall x. \forall y. (P(x, y) \wedge Q(y, z))) \wedge \exists x. P(x, y)$$

以下概念与程序设计语言中相应概念类似, 此处举例说明, 不作正式定义

Definition (作用域 (Scope)、约束变元 (Bind)、自由变元 (Free))

$$(1) \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$(2) (\forall x. P(x)) \rightarrow Q(x)$$

$$(3) \forall x. (P(x) \rightarrow (\exists y. R(x, y)))$$

$$(4) (\forall x. \forall y. (P(x, y) \wedge Q(y, z))) \wedge \exists x. P(x, y)$$

Definition (改名 (Rename))

为尽量避免重名, 可将约束变元或自由变元**改名**为**新鲜 (fresh)**变元

$$(\forall x. \forall y. (P(x, y) \wedge Q(y, z))) \wedge \exists t. P(t, v)$$

一阶谓词逻辑的语义



一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真假”值

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真假”值

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式的真假值取决于

- (1) 对量词论域 (universe) 的解释, 限定个体范围
- (2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释
- (3) 对**自由**变元的解释 (赋值函数 s)

一阶谓词逻辑公式的**语义**就是该公式的“真假”值

$$\forall x. Sx > 0$$

$$\forall x. \exists y. (y < x)$$

$$x > 0$$

一阶谓词逻辑公式的真假值取决于

- (1) 对量词论域 (universe) 的解释, 限定个体范围
- (2) 对常数符号、函数符号、谓词符号的解释
- (3) 对自由变元的解释 (赋值函数 s)

这种“**解释**”将公式映射到一个**数学结构** \mathcal{U} 上, 决定了该公式的语义

Definition $((\mathcal{U}, s) \models \alpha)$

\mathcal{U} 与 s 满足公式 α :

$$(\mathcal{U}, s) \models \alpha$$

- ▶ 将 α 中的常数符号、函数符号、谓词符号按照结构 \mathcal{U} 进行解释,
- ▶ 将量词的论域限制在集合 $|\mathcal{U}|$ 上,
- ▶ 将自由变元 x 解释为 $s(x)$,
- ▶ 这样就将公式 α 翻译成了某个数学领域中的命题,
- ▶ 然后, 使用数学领域知识我们知道该命题成立

$$\alpha : \forall x. (x \times x \neq 1 + 1)$$

$$\alpha : \forall x. (x \times x \neq 1 + 1)$$

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{Q}$ 中为真

α 在数学结构 $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ 中为假

Definition (语义蕴含 (Logically Imply))

令 Σ 为一个公式集, α 为一个公式。

Σ **语义蕴含** α , 记为 $\Sigma \models \alpha$,

如果**每个**满足 Σ 中**所有**公式的**结构** \mathcal{U} 与**赋值** s 都满足 α 。

$$\{\forall x. P(x)\} \models P(y)$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$$

$$\beta : \forall x \forall y ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\{\alpha, \beta\} \models \gamma ?$$

$$\alpha : \forall x \forall y \forall z ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z))$$

$$\beta : \forall x \forall y ((P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow x = y)$$

$$\gamma : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\{\alpha, \beta\} \models \gamma ?$$

$$\mathcal{U} = \mathbb{N} \quad P(x, y) : x \leq y$$

$\{\alpha\} \models \beta$ 简记为 $\alpha \models \beta$

$$\{\alpha\} \models \beta \text{ 简记为 } \alpha \models \beta$$

Definition (语义等价 (Logically Equivalent))

如果 $\alpha \models \beta$ 且 $\beta \models \alpha$, 则称 α 与 β **语义等价**, 记为 $\alpha \equiv \beta$ 。

$$\neg(\forall x. \alpha) \equiv \exists x. \neg\alpha$$

相当于命题逻辑中的“重言式”，可用于公式推导

Definition (普遍有效的 (Valid))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 是**普遍有效的**, 记为 $\models \alpha$ 。

相当于命题逻辑中的“重言式”，可用于公式推导

Definition (普遍有效的 (Valid))

如果 $\emptyset \models \alpha$, 则称 α 是**普遍有效的**, 记为 $\models \alpha$ 。

普遍有效的公式在**所有可能的结构 \mathcal{U}** 与**所有可能的赋值 s** 下均为真。

$(\forall x. P(x)) \rightarrow P(y)$ 是普遍有效的

$$\forall x. P(x) \models P(y)$$

$$\neg \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha$$

$$\neg(\forall x \in A. \alpha) \leftrightarrow \exists x \in A. \neg \alpha$$

$$\forall x \forall y \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \leftrightarrow \exists y \exists x \alpha$$

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$$

$$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$$

$$\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$$

$$\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$$

$$\forall x\alpha \vee \forall x\beta \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$$

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$$

要求: β 中不含 x

$$\forall x. (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\forall x. \alpha) \vee \beta$$

$$\forall x. (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\forall x. \alpha) \wedge \beta$$

要求: β 中不含 x

$$\forall x. (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\forall x. \alpha) \vee \beta$$

$$\forall x. (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\forall x. \alpha) \wedge \beta$$

$$\exists x. (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\exists x. \alpha) \vee \beta$$

$$\exists x. (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\exists x. \alpha) \wedge \beta$$

一阶谓词逻辑的自然推理 (演绎; 推演) 系统

(简化版本)

$$\frac{\forall x. \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\frac{\forall x. \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\forall x. P(x) \vdash P(c)$$

$$\frac{\forall x. \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\forall x. P(x) \vdash P(c)$$

$$\forall x. \exists y. (x < y) \vdash \exists y. (c < y)$$

$$\frac{\forall x. \alpha}{\alpha[t/x]} \quad (\forall x\text{-elim})$$

where t is **free** for x in α

$$\forall x. P(x) \vdash P(c)$$

$$\forall x. \exists y. (x < y) \vdash \exists y. (c < y)$$

$$\forall x. \exists y. (x < y) \not\vdash \exists y. (y < y)$$

\forall -elim 推理规则的应用

每个人都是要死的 苏格拉底是人

苏格拉底是要死的

$\forall x. (H(x) \rightarrow M(x))$ $H(s)$

$M(s)$

$$\frac{\begin{array}{c} [t] \\ \vdots \\ \alpha[t/x] \end{array}}{\forall x. \alpha} \quad (\forall x\text{-intro})$$

where, t is a **fresh** variable

“任取 t , 如果能证明 α 对 t 成立, 则 α 对所有 x 成立”

\forall -推理规则的应用

$$\{P(t), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))\} \vdash \neg Q(t)$$

\forall -推理规则的应用

$$\{\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x. P(x)\} \vdash \forall x. Q(x)$$

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x. \alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$\frac{\alpha[t/x]}{\exists x. \alpha} \quad (\exists x\text{-intro})$$

where t is **free** for x in α

$$P(c) \vdash \exists x. P(x)$$

$$\frac{\exists x. \alpha}{\alpha[x_0/x]} \quad (\exists\text{-elim})$$

where x_0 is **free** for x in β

\exists -推理规则的应用

$$\forall x. P(x) \vdash \exists x. P(x)$$

\exists -推理规则的应用

$$\{\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x. P(x)\} \vdash \exists x. Q(x)$$

\forall, \exists -推理规则的应用

$$\left\{ \exists x. P(x), \forall x. \forall y. (P(x) \rightarrow Q(y)) \right\} \vdash \forall y. Q(y)$$

\forall, \exists -推理规则的应用

请使用一阶谓词逻辑公式表达下列命题与推理

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。

前提：

- (1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧（幸亏如此）。

\forall, \exists -推理规则的应用

请使用一阶谓词逻辑公式表达下列命题与推理

给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。

前提：

- (1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧（幸亏如此）。

$$\frac{\forall x. A(x) \vee K(x) \quad \forall x. J(x) \rightarrow \neg A(x) \quad \exists x. \neg K(x)}{\exists x. \neg J(x)}$$

Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn