(二) 一阶谓词逻辑

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2021 年 03 月 18 日

语法与语义是 “对立统一” 的

Definition (命题逻辑的语言)

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

- 逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
- 量词符号: $\forall$ (全称量词), $\exists$ (存在量词)
- 变元符号: $x, y, z, \ldots$
- 左右括号: (,)
- 常数符号: 零个或多个常数符号
- 函数符号: n-元函数符号 ($n \in \mathbb{N}^{+}$)
- 谓词符号: n-元谓词符号 ($n \in \mathbb{N}^{+}$)

Definition (命题逻辑的语言)

一阶谓词逻辑的语言包括以下 7 部分:

- 逻辑联词: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$
- 量词符号: $\forall$ (全称量词), $\exists$ (存在量词)
- 变元符号: $x, y, z, \ldots$
- 左右括号: (,)
- 常数符号: 零个或多个常数符号
- 函数符号: n-元函数符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)
- 谓词符号: n-元谓词符号 ($n \in \mathbb{N}^+$)

Q : 为什么没有命题符号 $P, Q, \ldots$?

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

Definition (项 (Item))

(1) 每个变元 $x, y, z, \ldots$ 都是一个项;

(2) 每个常数符号都是一个项;

(3) 如果 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项, 且 f 为一个 n 元函数符号, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;

(4) 除此之外, 别无其它。

$$x$$

$$\mathbf{0}$$

$$S\mathbf{0} \qquad +(x, SSS0) \qquad \times(+(x, SSS0), y)$$

Definition (公式 (Formula))

(1) 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项, 且 P 是一个 n 元谓词符号,
则 $P(t_1, \ldots, t_n)$ 为公式, 称为**原子公式**;

(2) 如果 α 与 β 都是公式, 则 $(\neg\alpha)$ 与 $(\alpha * \beta)$ 都是公式;

(3) 如果 α 是公式, 则 $\forall x.\ \alpha$ 与 $\exists x.\ \alpha$ 也是公式;

(4) 除此之外, 别无其它。

约定:

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg (Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y.\ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

初等数论的语言 $L = \{\mathbf{0}, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y.\ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数
($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \wedge \forall y, z.\ (y < x \wedge z < x) \to \neg(y \times z = x)$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg (Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y.\ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数
($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \land \forall y, z.\ (y < x \land z < x) \to \neg (y \times z = x)$$

(4) 给定任何性质 (谓词) $P(x)$, 自然数上的数学归纳原理

$$(P(0) \land \forall x.\ (P(x) \to P(Sx))) \to (\forall x.\ P(x))$$

初等数论的语言 $L = \{0, S, +, \times, <, =\}$

(1) 0 不是任何自然数的后继

$$\forall x. \neg(Sx = 0)$$

(2) 两个自然数相等当且进当它们的后继相等

$$\forall x, y.\ (x = y \leftrightarrow Sx = Sy)$$

(3) x 是素数
($x > 1$ 且 x 没有除自身和 1 之外的因子)

$$S0 < x \wedge \forall y, z.\ (y < x \wedge z < x) \rightarrow \neg(y \times z = x)$$

(4) 给定任何性质 (谓词) $P(x)$, 自然数上的数学归纳原理

$$(P(0) \wedge \forall x.\ (P(x) \rightarrow P(Sx))) \rightarrow (\forall x.\ P(x))$$

(5) 哥德巴赫猜想 (任一大于 2 的偶数, 都可表示成两个素数之和)

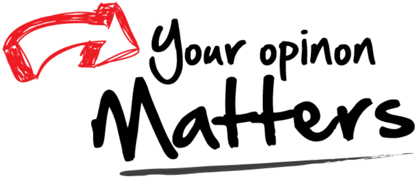
$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ . \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ . \ \forall x \in \mathbb{R}^+ . \ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon)$$

A function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is called

- pointwise continuous if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- uniformly continuous if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Thank You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn