7. 集合: 函数与序关系 (7-function-ordering)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 04 月 22 日发布作业
2021 年 06 月 05 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([7 = 2 + 2 + 3 分] ⋆⋆)
设 $f : A \to B$ 是函数。请证明:

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(3) $B_0 \supseteq f(f^{-1}(B_0))$

证明:
(1) 对于任意 $b \in B$,

$$
\begin{align}
& b \in f(A_1 \cup A_2) \tag{1} \\
\iff & \exists a \in A_1 \cup A_2.\ f(a) = b \tag{2} \\
\iff & (\exists a \in A_1.\ f(a) = b) \lor (\exists a \in A_2.\ f(a) = b) \tag{3} \\
\iff & b \in f(A_1) \lor b \in f(A_2) \tag{4} \\
\iff & b \in f(A_1) \cup f(A_2) \tag{5}
\end{align}
$$

(2) 对于任意 $a \in A$,

$$
\begin{align}
& a \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \tag{1} \\
\iff & f(a) \in B_1 \setminus B_2 \tag{2} \\
\iff & f(a) \in B_1 \land f(a) \notin B_2 \tag{3} \\
\iff & a \in f^{-1}(B_1) \land \neg(a \in f^{-1}(B_2)) \tag{4} \\
\iff & a \in f^{-1}(B_1) \land a \notin f^{-1}(B_2) \tag{5} \\
\iff & a \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \tag{6}
\end{align}
$$

(3) 对于任意 $b \in B$,

$$\begin{aligned} & b \in f(f^{-1}(B_0)) && (1) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists a \in f^{-1}(B_0).\ b = f(a) && (2) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists a \in A.\ f(a) \in B_0 \land b = f(a) && (3) \\ \Longrightarrow\ & b \in B_0 && (4) \end{aligned}$$

□

题目 2 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆)
设 $f : A \to B$ 与 $g : B \to C$ 是函数。请证明,

(1) 如果 f 与 g 是满射, 则 $g \circ f$ 是满射。

(2) 如果 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射。

证明:
(1) 任取 $c \in C$。由于 g 是满射,

$$\exists b \in B.\ g(b) = c.$$

任取 b_0 满足 $g(b_0) = c$。由于 f 是满射,

$$\exists a \in A.\ f(a) = b_0.$$

任取 a_0 满足 $f(a_0) = b_0$。则有

$$(g \circ f)(a_0) = c.$$

(2) 任取 $a_1, a_2 \in A$。假设 $f(a_1) = f(a_2)$, 则

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)),$$

即

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2).$$

由于 $g \circ f$ 是单射,

$$a_1 = a_2.$$

□

题目 3 ([5 分] ⋆⋆⋆)
设 $f : A \to B$ 与 $g : B \to A$ 是函数。请证明,

$$(f \circ g = I_B \land g \circ f = I_A) \to g = f^{-1}.$$

证明:
首先, $f \circ g = I_B$ 是满射, 因此 f 是满射。
其次, $g \circ f = I_A$ 是单射, 因此 f 是单射。
所以, f 是双射。
又由于 $f \circ g = I_B$, 因此 $g = f^{-1}$。 □

该证明用到了课件中的两个定理, 请自行找出来。

题目 4 ([4 = 0 + 4 分] ⋆⋆⋆)
一个自反且传递的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序。现令 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序。

(1) 如下定义 X 上的关系 $\sim$:

$$x \sim y \triangleq x \preceq y \wedge y \preceq x.$$

请证明 [1], $\sim$ 是 X 上的等价关系。

[1] 你在 *hw5-relation* 中已经做过这个证明了, 不必重做。可以直接在第二问中使用该结论。

(2) 如下定义商集 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$:

$$[x]_\sim \leq [y]_\sim \triangleq x \preceq y.$$

请证明, $\leq$ 是偏序关系。

证明:

(2) 只需验证

$\leq$ 是自反的*:* 任取 $Y \in X/\sim$。设 $Y = [y]_\sim$。由于 $\preceq$ 是自反的,

$$y \preceq y.$$

根据 $\leq$ 的定义,

$$[y]_\sim \leq [y]_\sim.$$

即

$$Y \leq Y.$$

$\leq$ 是反对称的*:* 任取 $Y \in X/\sim$, $Z \in X/\sim$。设 $Y = [y]_\sim$, $Z = [z]_\sim$。

$$\begin{aligned} & Y \leq Z \wedge Z \leq Y \\ \implies & y \preceq z \wedge z \preceq y \\ \implies & y \sim z \\ \implies & [y]_\sim = [z]_\sim \\ \implies & Y = Z. \end{aligned}$$

$\leq$ 是传递的*:* 任取 $W \in X/\sim$,$Y \in X/\sim$, $Z \in X/\sim$。设 $W = [w]_\sim$,$Y = [y]_\sim$, $Z = [z]_\sim$。

$$\begin{aligned} & W \leq Y \wedge Y \leq Z \\ \implies & w \preceq y \wedge y \preceq z \\ \implies & w \preceq z \\ \implies & [w]_\sim \leq [z]_\sim \\ \implies & W \leq Z. \end{aligned}$$

□

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$