

14. 群论: 子群 (14-subgroup)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 06 月 11 日发布作业

2021 年 06 月 23 日发布答案

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ★★)

设 $H \leq G$ 。请证明,

$$aH = H \iff a \in H \iff aH \leq G$$

证明:

(1) 先证明 $aH = H \iff a \in H$ 。

- 先证明 $aH = H \implies a \in H$ 。

假设 $aH = H$ 。

$$a = ae \in aH = H.$$

- 再证明 $a \in H \implies aH = H$ 。

假设 $a \in H$ 。首先, 由于 $H \leq G$ 满足封闭性, 所以 $aH \subseteq H$ 。其次, 对于任意 $h \in H$, 由于 $H \leq G$ 满足封闭性, 所以 $a^{-1}h \in H$ 且

$$h = a(a^{-1}h) \in aH.$$

因此, $H \subseteq aH$ 。

(2) 再证明 $a \in H \iff aH \leq G$ 。

- 先证明 $a \in H \implies aH \leq G$ 。

根据 (1),

$$a \in H \implies aH = H \implies aH \leq G.$$

- 再证明 $aH \leq G \implies a \in H$ 。

$$aH \leq G \implies e \in aH \implies a^{-1} \in H \implies a \in H.$$

□

题目 2 ([5 = 2 + 3 分] ★★★)

设 ϕ 是从群 G 到 G' 的同态映射。请证明,

(1)

$$H \leq G \implies \phi(H) \leq G'.$$

(2)

$$H \triangleleft G \implies \phi(H) \triangleleft G'.$$

证明:

题目 3 ([3 分] ★★)

请计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

并将结果写成 (不相交) 轮换的乘积。

解答:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3\ 5)$$

题目 4 ([3 分] ★★★)

考虑如下定义。

定义 1 (元素的阶)

设 G 是有限群, e 为 G 的单位元, $a \in G$ 。使 $a^r = e$ 成立的最小正整数称为 a 的阶 (order) ^①, 记作 $\text{ord } a = r$ 。

^① 注意, 群的阶指的是集合 G 的大小, 即 $|G|$ 。

设 G 是有限群。请证明,

$$\forall a \in G. (\text{ord } a) \mid |G|.$$

证明:

题目 5 ([5 = 2 + 1 + 2 分] ★★★)

考虑从乘法群 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 到乘法群 \mathbb{R}^+ 的函数 $f: x \mapsto |x|$ 。

(1) 请证明, f 是从 \mathbb{R}^* 到 \mathbb{R}^+ 的同态。

(2) 求 $\text{Ker } \phi$ 。

(3) 套用群同态基本定理, 给出相应结论, 并用一两句话解释该结论。

证明:

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...