

离散数学 (0-Overview)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 3 月 4 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (防疫工作, 不能大意 [4 分])

近期突发一种流感, 症状极其严重, 受感染的学生会无可遏制地进行编程与刷题等危险行为。假设 n^2 位学生坐在座位按 $n \times n$ 网格状排列的教室里。感染正在迅速扩散:

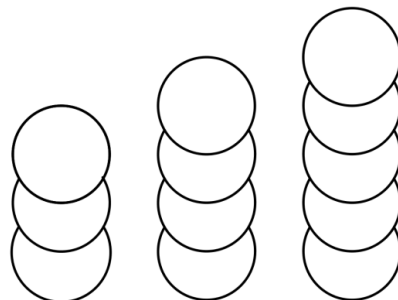
- 如果某学生已被感染, 那么他/她就不可能痊愈了;
- 如果某学生至少与 2 个已经感染的学生座位相邻 (前、后、左、右; 不包括对角), 那么该学生也会被感染。

请证明: 如果初始状态有 $< n$ 个学生感染了流感, 那么至少有一个学生永远不会被感染。

解答:

题目 2 (Nim Game [6 = 1 + 2 + 2 + 1 分])

Nim 是一个双人游戏 (你可以在课堂上分享的 Ludii Player 里找到它)。游戏开始时, 两人面前放着几堆石头, 两个玩家轮流操作, 每次选择从某个石堆里拿走一块或多块石头。最后没有石头可拿的那个玩家输掉比赛。



本题将引导大家寻找该游戏的必胜策略。

考虑对石头堆里的石头个数 (二进制表示下的; 不足时高位补 0) 做异或操作 (\oplus), 结果称为 Nim 和。

- (1) 请证明: 若 Nim 和为 0, 则任意一次移动都会导致 Nim 和不为 0。
- (2) 请证明: 若 Nim 和不为 0, 则必然存在一个石头堆, 它的石头数大于其它所有石头堆的 Nim 和。(统一在二进制或十进制下进行大小比较)
- (3) 请证明: 若游戏开始时, Nim 和不为 0, 则先手有必胜策略。
- (4) 在只有两堆石头的情况下, 请给出某玩家有必胜策略的充要条件与他/她的必胜策略。

解答:

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...