13. 群论: 基本概念 (13-group)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

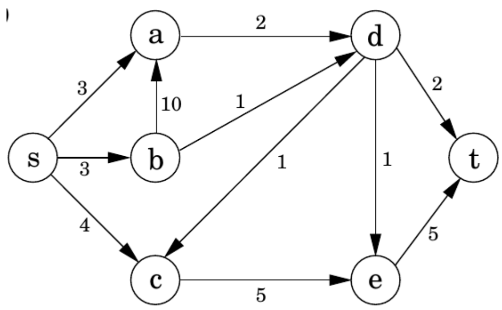
评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 06 月 04 日发布作业
2021 年 06 月 23 日发布答案

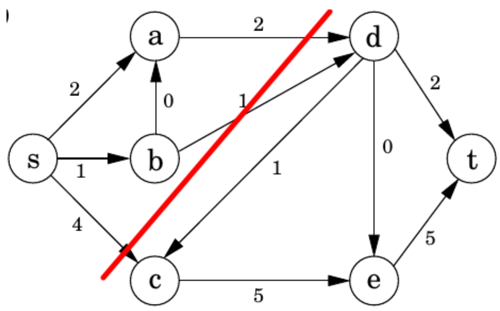
请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆)
请给出以下网络的一个最大流与一个最小割。要求给出 Ford-Fulkerson Method 运行过程。



证明:
最大流如下图所示, 值为 7; 最小割为 $(\{s, a, b\}, \{c, d, e, t\})$, 容量为 7。



Ford-Fulkerson Method 一种可能的运行过程如下:

- 初始化 $\forall e \in E.\ f(e) = 0$。

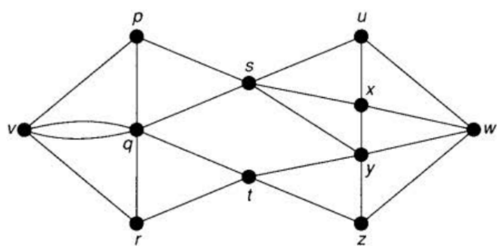
- 找到 f-增广路径: $s \to a \to d \to t$, 允许的最大增量为 2。
- 将 f 增广为 f_1, 其中 $f_1(s \to a) = f_1(a \to d) = f_1(d \to t) = 2$。
- 找到 f_1-增广路径: $s \to c \to e \to t$, 允许的最大增量为 4。
- 将 f_1 增广为 f_2, 其中 $f_2(s \to c) = f_2(c \to e) = f_2(e \to t) = 4$。
- 找到 f_2-增广路径: $s \to b \to d \to c \to e \to t$, 允许的最大增量为 1。
- 将 f_2 增广为 f_3, 其中 $f_3(s \to b) = f_3(b \to d) = f_3(d \to c) = 1$, $f_3(c \to e) = f_3(e \to t) = 5$。
- 找不到 f_3-增广路径。因此, f_3 为最大流。同时找到最小割 $(\{s, a, b\}, \{c, d, e, t\})$。□

题目 2 ([5 = 1 + 1 + 3 分] ⋆⋆⋆⋆)
考虑下面的定理:

定理 1 (不能告诉你名字的某个著名定理)
设 $G = (V, E)$ 是无向连通图, $v, w \in V$ 是不同的两个顶点。则 v, w 之间的边不相交的 (edge-disjoint) ① 路径的最大条数等于最小 vw-边割集 ② 的大小。

① 设 P_1, P_2 是两条 v、w 间的路径。如果 P_1 与 P_2 没有公共边, 则 P_1、P_2 是 v, w 之间的边不相交的路径。

② 设 $F \subseteq E$ 为集。如果 G 删除 F 后, v 与 w 不再连通, 则称 F 是 vw-边割集。



(1) 考虑图中的 v, w 顶点。请给出 v、w 间的一个最大边不相交的路径集合。

(2) 考虑图中的 v, w 顶点。请给出一个最小的 vw-边割集。

(3) 请使用最大流-最小割定理证明上述定理 ③ 。

③ 恭喜! 你刚刚证明了图论中的一个著名定理。
这就是 Menger's theorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Menger%27s_theorem。如果直接证明该定理, 还是比较复杂的。使用最大流-最小割定理则容易很多。不过, 还是有些技术细节需要谨慎处理。

证明:

(1) 最大边不相交的路径集合为

$$\{v - p - s - u - w, v - q - s - x - w, v - q - t - y - w, v - r - t - z - w\}.$$

注意, $v - q$ 有两条重边。

(2) 最小的 vw-边割集为

$$\{ps, qs, qt, rt\}.$$

(3) 首先将无向图 G 转化成有向图 G': 将每条无向边 uv 转化成两条有向边 $u \to v$ 与 $v \to u$。然后将每条有向边的容量设置为 1。

考虑任意两个顶点 v, w。将最大边不相交的 vw-路径的条数记为 $\lambda'(v, w)$, 将最小 vw-边割集的大小记为 $\kappa'(v, w)$ ④ 。由于任何一个 vw-边割集都要包含边不相交的每条 vw-路径中的至少一条边, 所以

④ 这是标准记法。

$$\kappa'(v, w) \geq \lambda'(v, w).$$

下面我们利用最大流-最小割定理证明 (记最大流为 f, 最小割为 (S,T))

$$\lambda'(v,w) \geq \max \mathrm{val}(f) = \min \mathrm{cap}(S,T) \geq \kappa'(v,w).$$

经过上述转化, 可将图 G' 视为源点为 v, 汇点为 w 的网络。根据 Integrity Theorem ⑤ , G' 存在每条边的流量均为整数的最大网络流, 设为 f。如果存在某条无向边 xy, $f(x \to y) = f(y \to x) = 1$, 则可以调整 f, 使得 $f(x \to y) = f(y \to x) = 0$。该调整不改变 $\mathrm{val}(f)$。因此, 我们可以假设最大流 f 中每条无向边 xy 最多使用一次 (即 $f(x \to y)$ 与 $f(y \to x)$ 不同时为 1)。所以, 该最大流 f 包含了 $\mathrm{val}(f)$ 条 (两两) 边不相交的 vw 路径。这证明了

⑤ 我们在课上没有讲过这个定理, 也不会列入考点。不过该定理很直观: 如果网络中每条边的容量都是整数, 那么该网络存在每条边的流量都是整数的最大网络流。它的证明也很简单, 因为 Ford-Fulkerson Method 就可以保证这一点。

$$\lambda'(v,w) \geq \max \mathrm{val}(f).$$

对于任意割 (S,T), 每条无向边 xy 有且只有一个方向的有向边算作割的容量。因此,

$$\mathrm{cap}(S,T) = |[S,T]|.$$

其中 $[S,T]$ 表示从 S 到 T 的有向边的集合。因为 $[S,T]$ 是一个边割集, 所以

$$\min \mathrm{cap}(S,T) \geq \kappa'(v,w).$$

根据最大流-最小割定理,

$$\lambda'(v,w) \geq \max \mathrm{val}(f) = \min \mathrm{cap}(S,T) \geq \kappa'(v,w). \qquad \square$$

题目 3 ([3 分] ⋆⋆)
在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 规定运算 $\oplus$ 如下:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}, a \oplus b = a + b - 2.$$

请证明: $(\mathbb{Z}, \oplus)$ 构成群。

证明:
只需验证:

封闭性*:* 显然 $a \oplus b \in \mathbb{Z}$。

结合性*:*

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 2) \oplus c \\ &= a + b - 2 + c - 2 \\ &= a + (b + c - 2) - 2 \\ &= a \oplus (b \oplus c)\end{aligned}$$

单位元*:* 单位元为 2。

$$a \oplus 2 = a + 2 - 2 = a = 2 \oplus a.$$

逆元*:* a 的逆元是 $4 - a$。

$$a \oplus (4 - a) = a + (4 - a) - 2 = 2 = (4 - a) \oplus a. \qquad \square$$

题目 4 ([5 分] ⋆⋆⋆)
设 G 是群。请证明: 如果 $\forall x \in G.\ x^2 = e$, 则 G 是交换群。

证明：
对于任意 $a, b \in G$,

$$\begin{aligned} a^2 = e &\implies a = a^{-1}, \\ b^2 = e &\implies b = b^{-1}, \\ (ab)^2 = e &\implies ab = (ab)^{-1}. \end{aligned}$$

因此,

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

因此, G 是交换群。 □

题目 5 ([3 分] ⋆⋆)
请求出 3^{83} 的最后两位数 [6] 。要求给出计算过程。

[6] https://www.wolframalpha.com/input/?i=3%5E83

证明：
首先 $(3, 100) = 1$, $\phi(100) = \phi(2^2 5^2) = 100(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 40$。根据 Euler's Theorem,

$$3^{40} = 1 \mod 100.$$

其次,

$$3^{83} = 3^{2\times 40+3} = (3^{40})^2 \cdot 3^3.$$

因此,

$$3^{83} \mod 100 = 27 \mod 100.$$

即 3^{83} 的最后两位数是 27。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$