5. 集合: 关系 (5-relation)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 04 月 08 日发布作业
2021 年 04 月 25 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

若有疑问, 可到 https://github.com/courses-at-nju-by-hfwei/discrete-math-problem-sets/discussions 讨论。

1 作业（必做部分）

题目 1 (笛卡尔积 [3 分] ★★)
设 $C \neq \emptyset$, 请证明

$$A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C.$$

证明:
先证

$$A \subseteq B \implies A \times C \subseteq B \times C.$$

假设 $A \subseteq B$。对任意有序对 (a, c),

$$\begin{align} & (a, c) \in A \times C \tag{1} \\ \iff & a \in A \land c \in C \tag{2} \\ \implies & a \in B \land c \in C \qquad (\because A \subseteq B) \tag{3} \\ \iff & (a, c) \in B \times C \tag{4} \end{align}$$

再证

$$A \times C \subseteq B \times C \implies A \subseteq B.$$

因为 $C \neq \emptyset$, 不妨设 $c \in C$。假设 $A \times C \subseteq B \times C$。任取 $a \in A$,

$$\begin{align} & a \in A \tag{1} \\ \implies & (a, c) \in A \times C \tag{2} \\ \implies & (a, c) \in B \times C \qquad (\because A \times C \subseteq B \times C) \tag{3} \\ \implies & a \in B \land c \in C \tag{4} \\ \implies & a \in B \tag{5} \end{align}$$

□

题目 2 (关系的运算 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2].$$

请举例说明 $\supseteq$ 不能替换成 $=$。

证明:
任取 y,

$$\begin{aligned} & y \in R[X_1] \setminus R[X_2] && (1)\\ \iff & y \in R[X_1] \land y \notin R[X_2] && (2)\\ \iff & (\exists x_1 \in X_1.\ (x_1, y) \in R) \land (\forall x_2 \in X_2.\ (x_2, y) \notin R) && (3)\\ \implies & \exists x \in X_1 \setminus X_2.\ (x, y) \in R. && (4)\\ \iff & y \in R[X_1 \setminus X_2] && (5) \end{aligned}$$

其中, 在第 (5) 步可取使得 (3) 中第一个合取子句成立的某个 $x \in X_1$。根据 (5) 中第二个合取子句, $x \notin X_2$。因此, $x \in X_1 \setminus X_2$。

举例:

$$R = \{(x_1, y), (x_2, y)\} \qquad X_1 = \{x_1\} \qquad X_2 = \{x_2\}$$

$$R[X_1 \setminus X_2] = R[\{x_1\}] = \{y\} \qquad R[X_1] \setminus R[X_2] = \{y\} \setminus \{y\} = \emptyset$$

$$R[X_1 \setminus X_2] \supset R[X_1] \setminus R[X_2]$$

□

题目 3 (关系的运算 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$(X \cap Y) \circ Z \subseteq (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

请举例说明, $\subseteq$ 不能换成 $=$。

证明:
任取 (a, c),

$$\begin{aligned} & (a, c) \in (X \cap Y) \circ Z && (1)\\ \iff & \exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in X \cap Y && (2)\\ \iff & \exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in X \land (b, c) \in Y && (3)\\ \implies & (\exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in X) \land (\exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in Y) && (4)\\ \iff & (a, c) \in X \circ Z \land (a, c) \in Y \circ Z && (5)\\ \iff & (a, c) \in (X \circ Z) \cap (Y \circ Z) && (6) \end{aligned}$$

举例:

$$X = \{(b_1, c)\} \qquad Y = \{(b_2, c)\} \qquad Z = \{(a, b_1), (a, b_2)\}$$

$$(X \cap Y) \circ Z = \emptyset \circ Z = \emptyset \qquad (X \circ Z) \cap (Y \circ Z) = \{(a, c)\} \cap \{(a, c)\} = \{(a, c)\}$$

$$(X \cap Y) \circ Z \subset (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

□

题目 4 (关系的性质 [4 分] ★★)
请证明,

$$R \text{ 是对称且传递的} \iff R = R^{-1} \circ R$$

证明:
先证

$$R \text{ 是对称且传递的} \implies R = R^{-1} \circ R.$$

假设 R 是对称且传递的。因为 R 是对称的, 所以

$$R = R^{-1}.$$

因为 R 是传递的, 所以

$$R \circ R \subseteq R.$$

故,

$$R^{-1} \circ R = R \circ R \subseteq R.$$

其次, 任取 $(a, b) \in R$ ① 。因为 R 是对称的, 所以 $(b, a) \in R$。又因为 R 是传递的, 所以 $(b, b) \in R$ 且 $(b, b) \in R^{-1}$。因此, $(a, b) \in R^{-1} \circ R$。故, $R \subseteq R^{-1} \circ R$。

① 这一步如何用 "关系代数" 进行运算? 你如果有更简洁的方法, 请告诉我。

对于其它步骤, 你当然也可以 "对任意 ...", 然后一顿操作猛如虎。但是, 在更高的 "关系代数" 层面上进行运算, 往往举重若轻、事半功倍。

再证

$$R = R^{-1} \circ R \implies R \text{ 是对称且传递的}.$$

假设 $R = R^{-1} \circ R$。首先 ② ,

② 切记: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

$$R^{-1} = (R^{-1} \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ R = R.$$

所以, R 是对称的。其次 ③ ,

③ 这里用到了刚刚证明的 $R^{-1} = R$。

$$R = R^{-1} \circ R = R \circ R, \qquad \square$$

所以, R 是传递的。

题目 5 (等价关系 [5 分] ⋆⋆⋆)
一个自反且传递的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序。现令 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序。如下定义 X 上的关系 $\sim$:

$$x \sim y \iff x \preceq y \land y \preceq x,$$

请证明, $\sim$ 是 X 上的等价关系。

证明:

(1) $\sim$ 是自反的。
对于任意 $x \in X$, 因为 $\preceq$ 是自反的, 所以

$$x \in X \implies x \preceq x \implies x \preceq x \land x \preceq x \implies x \sim x.$$

(2) $\sim$ 是对称的。
对于任意 $(x, y) \in \sim$,

$$x \sim y \implies x \preceq y \land y \preceq x \implies y \preceq x \land x \preceq y \implies y \sim x.$$

(3) $\sim$ 是传递的。
对于任意 $(x, y) \in \sim$ 与 $(y, z) \in \sim$,

$$\begin{aligned} & x \sim y \wedge y \sim z \\ \implies & (x \preceq y \wedge y \preceq x) \wedge (y \preceq z \wedge z \preceq y) \\ \implies & (x \preceq y \wedge y \preceq z) \wedge (z \preceq y \wedge y \preceq x) \\ \implies & x \preceq z \wedge z \preceq x \qquad (\because \preceq \text{ is transitive}) \\ \implies & x \sim z \end{aligned}$$ □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$