离散数学 (0-Overview)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 03 月 04 日发布习题
2021 年 04 月 18 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

- 若有疑问, 可在 https://github.com/courses-at-nju-by-hfwei/discrete-math-problem-sets/discussions/new 中讨论。

1　作业（必做部分）

题目 1 (防疫工作, 不能大意 [4 分])
近期突发一种流感，症状极其严重，受感染的学生会无可遏制地进行编程与刷题等危险行为。假设 n^2 位学生坐在座位按 $n \times n$ 网格状排列的教室里。感染正在迅速扩散:

- 如果某学生已被感染，那么他/她就不可能痊愈了;
- 如果某学生至少与 2 个已经感染的学生座位相邻 (前、后、左、右；不包括对角)，那么该学生也会被感染。

请证明: 如果初始状态有 $< n$ 个学生感染了流感，那么至少有一个学生永远不会被感染。

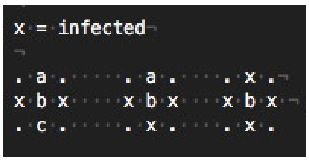
证明:
将相邻受感染的区域看作一个整体, 考虑受感染区域的边界长度 [1] 。

假设初始状态有 $< n$ 个学生感染, 则受感染区域的边界长度 $\leq 4(n-1)$。如果所有学生都被感染, 则受感染区域的边界长度为 $4n$。下面我们证明, 在不断感染的过程中, 受感染区域的边界长度不会增加。因为 $4(n-1) < 4n$, 所以至少有一个学生不会被感染。

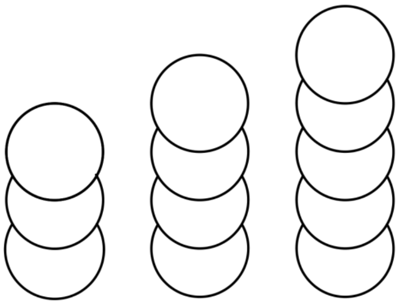
[1] https://math.stackexchange.com/a/1829606

引理
在不断感染的过程中, 受感染区域的边界长度不会增加。

根据被感染的条件, 右图中的 b 周围至少有两个感染源 (用 $\times$ 表示)。因此, b 被感染共有三种情况。对这三种情况分别分析, 即知引理成立。 □



题目 2 (Nim Game [6 = 1 + 2 + 2 + 1 分])
Nim 是一个双人游戏 (你可以在课堂上分享的 Ludii Player 里找到它)。游戏开始时，两人面前放着几堆石头，两个玩家轮流操作，每次选择从某个石堆里拿走一块或多块石头。最后没有石头可拿的那个玩家输掉比赛。



本题将引导大家寻找该游戏的必胜策略。

考虑对石头堆里的石头个数 (二进制表示下的; 不足时高位补 0) 做异或操作 ($\oplus$), 结果称为 Nim 和。

(1) 请证明: 若 Nim 和为 0, 则任意一次移动都会导致 Nim 和不为 0。

(2) 请证明: 若 Nim 和不为 0，则必然存在一个石头堆，它的石头数大于其它所有石头堆的 Nim 和。(统一在二进制或十进制下进行大小比较)

(3) 请证明: 若游戏开始时, Nim 和不为 0，则先手有必胜策略。

(4) 在只有两堆石头的情况下，请给出某玩家有必胜策略的充要条件与他/她的必胜策略。

证明:

(1) 假设移动了第 i 堆石头, 则第 i 堆石头数 n_i 的二进制表示至少有一位发生了变化。所以, Nim 和不再为 0。

(2) 假设 Nim 和不为 0, 则 Nim 和中至少有一位为 1。设 Nim 和共 n 位, 且最高位的 1 在第 i 位 (从左向右计数), 则 Nim 和可表示为

$$\underbrace{0\ldots0}_{n-i}1\underbrace{\ldots}_{i-1}$$

由于 Nim 和的第 i 位为 1, 则至少存在一堆石头 (任取一个这样的石头堆, 记为 S), 它的石头数的二进制表示的第 i 位为 1。下面说明 S 的石头数 (记其二进制表示为 n_S) 大于其它所有石头堆的 Nim 和 (记为 $n_{\overline{S}}$), 理由如下:

- 由于 Nim 和的前 $n-i$ 位为 0, 所以 n_S 的前 $n-i$ 位与 $n_{\overline{S}}$ 的前 $n-i$ 位相同;
- 由于 Nim 和的第 i 位为 1, n_S 的第 i 位为 1, 而 $n_{\overline{S}}$ 的第 i 位为 0。

(3) 先手的必胜策略是: 每次都选择满足 (2) 中条件的石头堆, 移动若干石头, 使得 Nim 和为 0。

(4) 如果初始时两堆石头的数目不同, 则先手有必胜策略: 每次均移动数目较多的那堆石头, 使得两堆石头数目相等。相应地, 如果初始时两堆石头的数目相等, 则后手有必胜策略。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见

- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

离散数学 (1-prop-logic)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 3 月 11 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (命题逻辑公式上的数学归纳法 [2 ($\star\star$) 分])
假设公式 α 中不含 "$\neg$" 符号。请证明, α 中超过四分之一的符号是命题符号。

解答:
我们证明如下引理:

引理 1
长度为 $4k+1$ 的不含 $\neg$ 符号的公式中含有 $k+1$ 个命题符号。

证明:
对公式 α 的结构作归纳 ①。

基础步骤*:* α 是一个命题符号。公式长度 $|\alpha| = 1 = 4 \times 0 + 1$, 命题符号个数为 $1 = 0 + 1$。引理成立。

归纳假设*:* 长度为 $4k+1$ 的不含 $\neg$ 符号的公式中含有 $k+1$ 个命题符号。

归纳步骤*:* 因为 α 中不含 $\neg$ 联词, 所以 α 呈型 $\beta \oplus \gamma$, 其中 $\oplus$ 表示 $\land, \lor, \to$ 或 $\leftrightarrow$ 二元逻辑联词。根据归纳假设, 对于子公式 β 与 γ (β_P 表示 β 中命题符号的个数),

$$|\beta| = 4k_1 + 1, \qquad |\beta_P| = k_1 + 1,$$

$$|\gamma| = 4k_2 + 1, \qquad |\gamma_P| = k_2 + 1.$$

所以 ②,

$$\begin{aligned} |\alpha| &= |\beta| + |\gamma| + 3 \\ &= (4k_1 + 1) + (4k_2 + 1) + 3 \\ &= 4(k_1 + k_2 + 1) + 1 \end{aligned}$$

① 对公式使用数学归纳法时, 通常都是这样的做法, 请注意以下的书写规范。其中, "归纳假设" 有时可以省略。

② +3: 左括号、右括号、逻辑联词。本解答将括号也计算在内。

$$
\begin{aligned}
|\alpha_P| &= |\beta_P| + |\gamma_P| \\
&= (k_1 + 1) + (k_2 + 1) \\
&= (k_1 + k_2 + 1) + 1
\end{aligned}
$$

得证。 □

题目 2 (合取范式与析取范式 [3 (⋆) 分])
我们先引入一个定义。

定义 1 (合取范式 (Conjunctive Normal Form; CNF))
我们称公式 α 是**合取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或是命题符号的否定。

例如, 下面的公式就是一个合取范式。

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

将定义 1 中的所有 $\wedge$ 换成 $\vee$, 所有 $\vee$ 换成 $\wedge$, 其余不变, 就变成了析取范式 (Disjunctive Normal Form; DNF) 的定义。本题以 CNF 为例。

将任意公式转化成 CNF 或 DNF 的方法如下:

(1) 先将公式中的联词化归成 $\neg$, $\wedge$ 与 $\vee$;

(2) 再使用 De Morgan 律将 $\neg$ 移到各个命题变元之前 (“否定深入”);

(3) 最后使用结合律、分配律将公式化归成合取范式或析取范式。

请将

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

化为合取范式。

解答:

注意: 使用重言式进行公式变换, 要使用 ‘≡’, 不能使用 ‘=’。

$$
\begin{aligned}
(P \wedge (Q \to R)) \to S &\equiv (P \wedge (\neg Q \vee R)) \to S \\
&\equiv \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S \\
&\equiv (\neg P) \vee (\neg(\neg Q \vee R)) \vee S \\
&\equiv (\neg P) \vee (Q \wedge \neg R) \vee S \\
&\equiv (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R) \\
&\equiv (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)
\end{aligned}
$$

See CNF&wolframalpha

题目 3 (重言蕴含与推理规则 [5 = 3 + 2 (⋆ ⋆ ⋆) 分])
(1) 请使用真值表方法证明

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \models S \vee R.$$

(2) 请使用重言式所代表的推理规则 (可以任意使用规则, 也可以使用你认为显然成立但课堂上没有列出来的规则, 但需要指明每一步使用了哪条规则) 证明

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \vdash S \vee R.$$

提示: 你可能需要使用

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$$
$$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

解答:

(1) 见下表。从表中可以看出, 使得 $P \vee Q$, $P \to R$, $Q \to S$ 同时成立的真值指派 (蓝色) 都满足 $S \vee R$ (红色), 符合重言蕴含的定义 ③ 。

③ 需要给出完整的真值表, 并检查是否符合重言蕴含的定义

P	Q	R	S	$P \vee Q$	$P \to R$	$Q \to S$	$S \vee R$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	F

See also Truth Table@wolframalpha

(2) 第一种解法中将使用如下重言式作为推理规则:

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \tag{a}$$
$$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma) \tag{b}$$
$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha) \tag{c}$$

$$
\begin{aligned}
& P \vee Q && (\text{前提}) && (1)\\
& P \to R && (\text{前提}) && (2)\\
& Q \to S && (\text{前提}) && (3)\\
& \neg P \to Q && (1, a) && (4)\\
& \neg P \to S && (4, 3, b) && (5)\\
& \neg S \to P && (5, c) && (6)\\
& \neg S \to R && (6, 2, b) && (7)\\
& S \vee R && (7, a) && (8)
\end{aligned}
$$

- 问: 考试时是否需要使用这样的书写格式?
- 答: 不一定。但是要尽量给公式编号, 并且写明每一步推理的所依赖的之前的公式的编号。对于不那么显然的推理步骤, 最好还要附带理由, 比如使用了什么推理规则。

第二种解法使用 (后面介绍的) $\vee$-推理规则:

$$
\begin{aligned}
& P \vee Q && (\text{前提}) && (1)\\
& P \to R && (\text{前提}) && (2)\\
& Q \to S && (\text{前提}) && (3)\\
& P \to (S \vee R) && (2) && (4)\\
& Q \to (S \vee R) && (3) && (5)\\
& S \vee R && (1, 4, 5, \vee\text{-elim; case analysis}) && (6)
\end{aligned}
$$

- 问: 考试时是否只能使用纯符号进行推理?
- 答: 不一定。可以夹杂文字描述。只要推理过程清晰即可。

其中, (4) 的详细推理过程如下 ((5) 的推理过程类似):

$$
\begin{aligned}
P \to R \quad & \text{(前提)} && \text{(4-1)}\\
[P] \quad & \text{(引入假设)} && \text{(4-2)}\\
R \quad & (4-1, 4-2, \to\text{-elim}) && \text{(4-3)}\\
S \lor R \quad & (4-3, \lor\text{-intro}) && \text{(4-4)}\\
P \to (S \lor R) \quad & (4-2, 4-3, 4-4, \to\text{-intro}) && \text{(4-5)}
\end{aligned}
$$

- 问: 考试的时候是否需要写出这些详细的推理过程?
- 答: 不一定。只要每一步推理都是较为显然的, 就不需要写出它的细节。

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

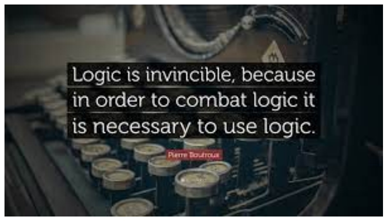
2. 一阶谓词逻辑 (2-predicate-logic)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 03 月 18 日发布习题
2021 年 04 月 02 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。



1 作业 (必做部分)

题目 1 (命题逻辑: 形式化描述与推理 [3 分] ⋆⋆)
张三说李四在说谎, 李四说王五在说谎, 王五说张三、李四都在说谎。请问, 这三人到底谁在说真话, 谁在说谎? (要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

解答:
我们使用 Z、L、W 分别表示 “张三在说真话”、“李四在说真话” 与 “王五在说真话”。题目中的三个论断可以形式化为 [1]:

[1] 注意: 这里是 $\leftrightarrow$, 不止是 $\rightarrow$。

$$Z \leftrightarrow \neg L \tag{1}$$
$$L \leftrightarrow \neg W \tag{2}$$
$$W \leftrightarrow \neg Z \land \neg L \tag{3}$$

在如下推理中, 我们分别考虑 Z、L、W 成立的情况。如果某种情况可以推出矛盾 ($\bot$), 则说明相应情况不成立。

- Case I: 引入假设 $[Z]$, 可推出矛盾, 故 $\neg Z$。

$$[Z] \quad \text{(引入假设)} \tag{4}$$
$$\neg L \quad ((1), (4)) \tag{5}$$
$$W \quad ((2), (5)) \tag{6}$$
$$\neg Z \land \neg L \quad ((3), (6)) \tag{7}$$
$$\neg Z \quad (\land\text{-elim}, (7)) \tag{8}$$
$$\bot \quad ((4), (8)) \tag{9}$$

- Case II: 类似于 Case I, 引入假设 $[W]$, 同样可推出矛盾, 故 $\neg W$。

- CASE III: 引入假设 L, 无矛盾, 得出 $\neg Z \land \neg W \land L$。

$$
\begin{aligned}
&[L] && \text{(引入假设)} && (4)\\
&\neg Z && ((1),(4)) && (5)\\
&\neg W && ((2),(4)) && (6)\\
&\neg(\neg Z \land \neg L) && ((3),(6)) && (7)\\
&Z \lor L && ((7)) && (8)\\
& && && (9)
\end{aligned}
$$

综上, 有 $\neg Z$, $\neg W$, L。

题目 2 (一阶谓词逻辑: 形式化描述与推理 [3 分] ⋆⋆)
给定如下 "前提", 请判断 "结论" 是否有效, 并说明理由。请使用一阶谓词逻辑的知识解答。(要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

前提:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;

(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧 (幸亏如此)。

解答:
定义谓词:

- $A(x)$: x 喜欢美剧;
- $K(x)$: x 喜欢韩剧;
- $J(x)$: x 喜欢抗日神剧。

题目中的三个论断可以形式化为:

- $\forall x.\ A(x) \lor K(x)$;
- $\forall x.\ J(x) \to \neg A(x)$;
- $\exists x.\ \neg K(x)$

先示范纯形式化推理:

$$\forall x.\ A(x) \vee K(x) \quad \text{(前提)} \tag{1}$$

$$\forall x.\ J(x) \to \neg A(x) \quad \text{(前提)} \tag{2}$$

$$\exists x.\ \neg K(x) \quad \text{(前提)} \tag{3}$$

$$[x_0] \quad [\neg K(x_0)] \quad \text{(引入变量与假设)} \tag{4}$$

$$A(x_0) \vee K(x_0) \quad (\forall\text{-elim}, (1), (4)) \tag{5}$$

$$A(x_0) \quad ((4), (5)) \tag{6}$$

$$J(x_0) \to \neg A(x_0) \quad (\forall\text{-elim}, (2), (4)) \tag{7}$$

$$\neg J(x_0) \quad ((6), (7)) \tag{8}$$

$$\exists x.\ \neg J(x) \quad (\exists\text{-intro}, (8)) \tag{9}$$

$$\exists x.\ \neg J(x) \quad (\exists\text{-elim}, (3) - (8)) \tag{10}$$

在作业与考试时, 只要推理清晰, 不一定要严格遵守纯形式推理的要求。以下也是可以接受的书写过程 ②:

根据 (3), 不妨设 $\neg K(x)$ 对 x_0 成立:

$$\neg K(x_0) \tag{4}$$

根据 (1), 有

$$A(x_0) \vee K(x_0) \tag{5}$$

根据 (4) 与 (5), 有

$$A(x_0) \tag{6}$$

根据 (2), 有

$$J(x_0) \to \neg A(x_0) \tag{7}$$

根据 (6) 与 (7), 有

$$\neg J(x_0) \tag{8}$$

因此, $\exists x.\ \neg J(x)$ 成立。

作为对比, 我们再给出一种无法接受的解答:

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum. 因此, 易见 $\exists x.\ \neg J(x)$ 成立。

问: 第 (4) 步中的 $\neg K(x_0)$ 为什么是个假设, 而不是根据第 (3) 步推导出来的一个命题?

答: 当前提中有 $\exists x.\ P(x)$ 时, 我们通常会在证明中这样做: 假设 $P(x)$ 对 x_0 成立, 然后基于此进行推导。第 (4) 步正是在做这件事。

问: 当前提中有 $\forall x.\ P(x)$ 时, 我们通常会引入变量 $[x_0]$, 并得出 $P(x_0)$。这里, $P(x_0)$ 为什么不是一个假设?

答: 当前提中有 $\forall x.\ P(x)$ 时, 我们通常会在证明中这样做: 任取 变量 x_0, 则有 $P(x)$ 对 x_0 成立, 然后基于此进行推导。这里, $P(x_0)$ 并非假设。

问: 第 (9) 步已经得到了 $\exists x.\ \neg J(x)$, 为什么不 “见好就收” 呢?

答: 第 (9) 步是在第 (4) 步中引入的假设 $[\neg K(x_0)]$ 的基础上得到的, 此时该假设还没有释放。到第 (9) 步, 我们完成了 ∃-elim 规则的横线上方的部分, 第 (10) 步便可以运用 ∃-elim 规则得到横线下方的结论, 这样假设也被释放了。(在平时作业与考试中, 我们也可以不用这么严格, 参见下面一种书写格式。)

② 公式编号与每条公式的推理依据要写清楚

题目 3 (一阶谓词逻辑: 形式化描述与推理 [4 分] ⋆⋆)
请使用一阶谓词逻辑公式描述以下两个定义，并从逻辑推理的角度说明这两种定义之间是否有强弱之分。(要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

A function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is called

(1) *pointwise continuous* (连续的) if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(2) *uniformly continuous* (一致连续的) if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x-y| < \delta$, we have that $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.

解答:
形式化表示如下:

(1)

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+.\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon. \qquad (1)$$

(2)

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+.\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+.\ \forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon. \qquad (2)$$

为了简便，也可以统一将论域限制在实数集 $\mathbb{R}$ 上。这样就可以将公式写成

$$\forall x.\ \forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ \forall y.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

问: $\forall \epsilon \in \mathbb{R} \land \epsilon > 0.\ (\ldots)$ 是否符合语法?

答: 我也不能确定。一般来说，这种简记法要尽可能简短。可以写成 $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$。

"$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in \mathbb{R}.$" 也可以简写成 "$\forall x, y \in \mathbb{R}.$"。注意，必须是一样的量词符号才可以这样简写。

下面从逻辑的角度讨论 (1) 与 (2) 的强弱关系。

首先，根据重言式

$$\forall x.\ \forall y.\ \alpha \leftrightarrow \forall y.\ \forall x.\ \alpha,$$

(1) 等价于

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+.\ \forall x \in \mathbb{R}.\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

其次，根据重言式

$$\exists x.\ \forall y.\ \alpha \to \forall y.\ \exists x.\ \alpha,$$

可知 (2) 不弱于 (1)。

最后，由于 ③

$$\forall y.\ \exists x.\ \alpha \nvdash \exists x.\ \forall y.\ \alpha,$$

可知 (2) (严格) 强于 (1)。

作为例子，$f(x) = x^2$ 是连续函数，但不是一致连续函数。

③ 思考: 为什么? 举例说明。

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ⋯

3. 数学归纳法 (3-induction)

姓名: 魏恒峰 **学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______ **评阅:** ______

2021 年 03 月 25 日发布习题
2021 年 04 月 09 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助，请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

总而言之，这次作业下手确实有点重了 ...

1 作业 (必做部分)

题目 1 (相识关系 [4 分] ⋆⋆)
假设有 $2n+1$ 个人。对于任意 n 个人构成的一个小组，都存在一个人 (不属于这个小组) 与这 n 个人都相识 (假设 "相识" 是相互的)。
请证明，存在一个人，他/她认识其它所有 $2n$ 个人。

- **问:** 为什么这道题才两星？我感觉我的智商受到了碾压。
- **答:** 这是一个技术性失误。在众多题目中，我一眼就看上了它的简洁优雅，简单推理后，便给了它两星。待我回头再思考时，我意识到我低估了它——它比我想象中更优雅，当然也更难了。
- **问:** 数学归纳法呢？
- **答:** 这也是一个技术性失误。不过，这已经不重要了。看看这个解答 ...

证明:
先引入如下定义:

定义
如果某组中的人相互都认识，则称该组是 "好" 的。

引理
存在大小为 $n+1$ 的 "好" 小组。

证明:
首先，一定存在大小为 2 的 "好" 小组，这保证了 "好" 小组的存在性。任取一个**极大的**"好" 小组，记为 G。如果 $|G| \leq n$，则根据题意，存在一个不在 G 中的人，记为 p，p 认识 G 中的每一个人。将 p 加入 G，则得到一个比 G 更大的 "好" 小组。这与 G 的选取 (极大性) 相矛盾。故，得证。 □

根据引理，存在大小为 $n+1$ 的 "好" 小组，记为 M。根据题意，对于剩下的 n 个人，存在一个在 M 中的人，记为 q，q 认识这 n 个人。因此，q 认识其它所有 $2n$ 个人。 □

题目 2 (邮资问题 [6 分] ⋆⋆)
请证明, 只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。
(或者: 每个不小于 12 的整数都可以写成若干个 4 或 5 的和。)

证明:
对邮资面额 n 作归纳。

基础步骤: $n = 12$ 时, 可由三张 4 分邮票组成。

归纳假设: 假设邮资为任意 $n = k$ 的邮票都可以由 4 分与 5 分邮票组成。

归纳步骤: 考虑 $n = k + 1$ 分的邮资。以下分两种情况讨论:

- 假设 k 分邮资的某个组合中含有 4 分的邮票, 则将该组合中某张 4 分的邮票换成 5 分的邮票, 即可组成 $k + 1$ 分邮资。
- 假设 k 分邮资的任何组合中仅包含 5 分的邮票。因为 $n \geq 12$, 所以组合中至少包含 3 张 5 分的邮票。只需将这 3 张 5 分的邮票换成 4 张 4 分的邮票, 即可组成 $k + 1$ 分邮资。 □

题目 3 (结合律 [4 分] ⋆⋆)
设 $*$ 是一个满足结合律的二元运算符, 即

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

请证明, $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ $(n \geq 3)$ 的值与括号的使用方式无关。

证明:
我们证明以下引理 ① :

① 首先要明确什么叫 "与括号的使用方式无关"?

引理
对于任何包含 $n \geq 3$ 个操作数的式子

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_n,$$

不论以何种方式加括号, 它的值都等于 ②

② 这就是 "与括号的使用方式无关" 的含义。

$$(((a_1 * a_2) * a_3) \cdots * a_{n-1}) * a_n.$$

对操作数的个数 $n \geq 3$ 作强数学归纳。

基础步骤: $n = 3$。由于 $*$ 满足结合律:

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3),$$

$a_1 * a_2 * a_3$ 的值与括号使用方式无关。

归纳假设: 假设对于任何包含 $n \leq k$ 个操作数的式子, 引理都成立。

归纳步骤: 考虑包含 $n = k + 1$ 个操作数的式子 ③

③ em, 这题还是有些难度的 ...

$$A = a_1 * a_2 * \cdots * a_{n+1}.$$

考虑最后一次 $*$ 的位置, 它将式子分成两部分:

$$A = (a_1 * \cdots * a_i) * (a_{i+1} * \cdots * a_{n+1}).$$

其中, $i \le n$。根据归纳假设,

$$A = (a_1 * \cdots * a_i) * (\boxed{(((a_{i+1} * a_{i+2}) * \ldots) * a_n)} * a_{n+1}).$$

将 $\boxed{(((a_{i+1} * a_{i+2}) * \ldots) * a_n)}$ 看作一个整体, 则根据 $*$ 的结合性,

$$A = (a_1 * \cdots * a_i * \boxed{(((a_{i+1} * a_{i+2}) * \ldots) * a_n)}) * a_{n+1}.$$

再次根据归纳假设 ④,

④ 对 $(\ldots) * a_{n+1}$ 的 $(\ldots)$ 部分使用归纳假设

$$A = ((a_1 * a_2) * \ldots) * a_{n+1}. \qquad \square$$

题目 4 (数数 [6 分] ⋆⋆⋆)
令 T_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数的个数, E_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数偶数的个数, O_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数奇数的个数。
规定: 以上所有的 n 位数仅考虑不以 0 开头的数字。例如, $E_1 = 4$。
请给出 T_n, E_n, O_n 的计算公式。

解答:
(1) 因为不允许以 0 开头, 且相邻位数字不同, 所以

$$T_n = 9^n.$$

(2) 对位数 n 作归纳。

基础步骤: $n = 1$ 时, $E_1 = 4$, $O_1 = 5$。

归纳步骤: 考虑 $n \ge 2$ 的情况。计算 E_n。考虑两种情况: 如果第 $(n-1)$ 位为偶数, 则第 n 位有 4 种情况; 如果第 $(n-1)$ 位为奇数, 则第 n 位有 5 种情况。因此,

$$E_n = 4E_{n-1} + 5O_{n-1}.$$

由于 $E_{n-1} + O_{n-1} = T_{n-1} = 9^{n-1}$, 故有

$$E_n = 4E_{n-1} + 5(9^{n-1} - E_{n-1}).$$

解方程得, ⑤

⑤ 展开, 看符号变化, 便知要分奇偶。

$$E_n = \frac{9^n + (-1)^n}{2}.$$

因此, ⑥

⑥ $|E_n - O_n| = 1$

$$O_n = \frac{9^n - (-1)^n}{2}.$$

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ⋯

4. 集合: 基本概念与运算 (4-set)

姓名: 魏恒峰 **学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______ **评阅:** ______

2021 年 04 月 01 日发布习题
2021 年 04 月 18 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (相对补与绝对补 [5 分] ⋆⋆)
请证明,

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

证明:

$$
\begin{aligned}
& A \cap (B \setminus C) && (1)\\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) && (2)\\
&= (A \cap B) \cap \overline{C} && (3)\\
&= (A \cap B) \setminus C && (4)
\end{aligned}
$$

尽量不要使用 "对任意 x, ..." 这样 "元素级别" 的证明。直接对集合进行 "高层次" 操作, 往往更为简洁。

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) \setminus (A \cap C) && (5)\\
&= (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} && (6)\\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) && (7)\\
&= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) && (8)\\
&= \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) && (9)\\
&= (A \cap B) \setminus C && (10)
\end{aligned}
$$

□

题目 2 (对称差 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

证明:

$$
\begin{aligned}
& (A\cap B)\oplus(A\cap C) && (1)\\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) && (2)\\
&= (A\cap(B\cup C))\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}) && (3)\\
&= (A\cap(B\cup C)\cap\overline{A})\cup(A\cap(B\cup C)\cap(\overline{B}\cup\overline{C})) && (4)\\
&= \emptyset\cup(A\cap((B\cup C)\cap(\overline{B}\cup\overline{C}))) && (5)\\
&= A\cap(B\oplus C) && (6)
\end{aligned}
$$

其中, (2) 与 (6) 使用了等式:

$$X\oplus Y=(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)=(X\cup Y)\cap(\overline{X}\cup\overline{Y}).$$ □

题目 3 (广义并、广义交 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset\implies\bigcap\mathcal{F}\cap\bigcap\mathcal{G}\subseteq\bigcap(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}).$$

并举例说明, $\subseteq$ 不能换成 $=$。

证明:
对任意 x,

$$
\begin{aligned}
& x\in\bigcap\mathcal{F}\cap\bigcap\mathcal{G} && (1)\\
\iff & x\in\bigcap\mathcal{F}\land x\in\bigcap\mathcal{G} && (2)\\
\iff & (\forall F\in\mathcal{F}.\ x\in F)\land(\forall G\in\mathcal{G}.\ x\in G) && (3)\\
\iff & \forall F\in\mathcal{F}.\ \forall G\in\mathcal{G}.\ x\in F\land x\in G && (4)\\
\iff & \forall F\in\mathcal{F}.\ \forall G\in\mathcal{G}.\ x\in F\cap G && (5)\\
\implies & \forall X\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}.\ x\in X && (6)\\
\iff & x\in\bigcap(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}). && (7)
\end{aligned}
$$

下面给出第 (6) 步的证明过程 [1]:

$$
\begin{aligned}
\forall F\in\mathcal{F}.\ \forall G\in\mathcal{G}.\ x\in F\cap G &\quad (\text{前提}) && (5)\\
[X] &\quad (\text{引入变量}) && (5.1)\\
[X\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}] &\quad (\text{引入假设}) && (5.2)\\
X\in\mathcal{F}\land X\in\mathcal{G} &\quad ((5.2)) && (5.3)\\
x\in X\cap X &\quad (\forall\text{-elim}, (5.3), (5)) && (5.4)\\
x\in X &\quad ((5.4)) && (5.5)\\
X\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\to x\in X &\quad (\to\text{-intro}, (5.2)-(5.5)) && (5.6)\\
\forall X\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}.\ x\in X &\quad (\forall\text{-intro}, (5.1)-(5.6)) && (6)
\end{aligned}
$$

[1] 对此, 不作要求; 只要求能从直觉上 "感受" 到 (5) $\implies$ (6) (或 (3) $\implies$ (6)) 的正确性。

例子: 取

$$\mathcal{F}=\{\{1,2\},\{2,3\}\}\qquad\mathcal{G}=\{\{2,3\},\{2,3,4\}\}.$$

则有,

$$\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} = \{2\} \cap \{2,3\} = \{2\},$$
$$\bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \bigcap \{\{2,3\}\} = \{2,3\}. \qquad \square$$

题目 4 (德摩根律 [3 分] ⋆⋆⋆)
请化简集合 A:

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\})$$

解答:
记

$$X_n \triangleq \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}.$$

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus X_n) &(1)\\
&= \mathbb{R} \setminus \Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} X_n\Big) &(2)\\
&= \mathbb{R} \setminus \Big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\Big) &(3)\\
&= \mathbb{Z} &(4)
\end{aligned}$$

题目 5 (幂集 [4 分] ⋆⋆⋆)
请证明, [2]

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B.$$

[2] 不, 我有 "幂集" 恐惧症。

解答:
先证

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B.$$

假设 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$。

$$\begin{aligned}
&A \in \mathcal{P}(A)\\
\implies &A \in \mathcal{P}(B)\\
\implies &A \subseteq B
\end{aligned}$$

同理可证 $B \subseteq A$。因此, $A = B$。
再证

$$A = B \implies \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B).$$

假设 $A = B$。对于任意 x,

$$\begin{aligned}
&x \in \mathcal{P}(A)\\
\implies &x \subseteq A\\
\implies &x \subseteq B\\
\implies &x \in \mathcal{P}(B)
\end{aligned}$$

因此, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$。同理可证 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$。因此, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$。

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

5. 集合: 关系 (5-relation)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 04 月 08 日发布作业
2021 年 04 月 25 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

若有疑问, 可到 https://github.com/courses-at-nju-by-hfwei/discrete-math-problem-sets/discussions 讨论。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (笛卡尔积 [3 分] ⋆⋆)
设 $C \neq \emptyset$, 请证明

$$A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C.$$

证明:
先证

$$A \subseteq B \implies A \times C \subseteq B \times C.$$

假设 $A \subseteq B$。对任意有序对 (a, c),

$$(a, c) \in A \times C \tag{1}$$
$$\iff a \in A \land c \in C \tag{2}$$
$$\implies a \in B \land c \in C \qquad (\because A \subseteq B) \tag{3}$$
$$\iff (a, c) \in B \times C \tag{4}$$

再证

$$A \times C \subseteq B \times C \implies A \subseteq B.$$

因为 $C \neq \emptyset$, 不妨设 $c \in C$。假设 $A \times C \subseteq B \times C$。任取 $a \in A$,

$$a \in A \tag{1}$$
$$\implies (a, c) \in A \times C \tag{2}$$
$$\implies (a, c) \in B \times C \qquad (\because A \times C \subseteq B \times C) \tag{3}$$
$$\implies a \in B \land c \in C \tag{4}$$
$$\implies a \in B \tag{5}$$

□

题目 2 (关系的运算 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2].$$

请举例说明 $\supseteq$ 不能替换成 $=$。

证明:
任取 y,

$$
\begin{aligned}
& y \in R[X_1] \setminus R[X_2] && (1)\\
\iff & y \in R[X_1] \land y \notin R[X_2] && (2)\\
\iff & (\exists x_1 \in X_1.\ (x_1, y) \in R) \land (\forall x_2 \in X_2.\ (x_2, y) \notin R) && (3)\\
\implies & \exists x \in X_1 \setminus X_2.\ (x, y) \in R. && (4)\\
\iff & y \in R[X_1 \setminus X_2] && (5)
\end{aligned}
$$

其中, 在第 (5) 步可取使得 (3) 中第一个合取子句成立的某个 $x \in X_1$。根据 (5) 中第二个合取子句, $x \notin X_2$。因此, $x \in X_1 \setminus X_2$。

举例:

$$R = \{(x_1, y), (x_2, y)\} \qquad X_1 = \{x_1\} \qquad X_2 = \{x_2\}$$

$$R[X_1 \setminus X_2] = R[\{x_1\}] = \{y\} \qquad R[X_1] \setminus R[X_2] = \{y\} \setminus \{y\} = \emptyset$$

$$R[X_1 \setminus X_2] \supset R[X_1] \setminus R[X_2]$$

□

题目 3 (关系的运算 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$(X \cap Y) \circ Z \subseteq (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

请举例说明, $\subseteq$ 不能换成 $=$。

证明:
任取 (a, c),

$$
\begin{aligned}
& (a, c) \in (X \cap Y) \circ Z && (1)\\
\iff & \exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in X \cap Y && (2)\\
\iff & \exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in X \land (b, c) \in Y && (3)\\
\implies & (\exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in X) \land (\exists b.\ (a, b) \in Z \land (b, c) \in Y) && (4)\\
\iff & (a, c) \in X \circ Z \land (a, c) \in Y \circ Z && (5)\\
\iff & (a, c) \in (X \circ Z) \cap (Y \circ Z) && (6)
\end{aligned}
$$

举例:

$$X = \{(b_1, c)\} \qquad Y = \{(b_2, c)\} \qquad Z = \{(a, b_1), (a, b_2)\}$$

$$(X \cap Y) \circ Z = \emptyset \circ Z = \emptyset \qquad (X \circ Z) \cap (Y \circ Z) = \{(a, c)\} \cap \{(a, c)\} = \{(a, c)\}$$

$$(X \cap Y) \circ Z \subset (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

□

题目 4 (关系的性质 [4 分] ★★)
请证明,

$$R \text{ 是对称且传递的} \iff R = R^{-1} \circ R$$

证明:
先证

$$R \text{ 是对称且传递的} \implies R = R^{-1} \circ R.$$

假设 R 是对称且传递的。因为 R 是对称的, 所以

$$R = R^{-1}.$$

因为 R 是传递的, 所以

$$R \circ R \subseteq R.$$

故,

$$R^{-1} \circ R = R \circ R \subseteq R.$$

其次, 任取 $(a, b) \in R$ ① 。因为 R 是对称的, 所以 $(b, a) \in R$。又因为 R 是传递的, 所以 $(b, b) \in R$ 且 $(b, b) \in R^{-1}$。因此, $(a, b) \in R^{-1} \circ R$。故, $R \subseteq R^{-1} \circ R$。

① 这一步如何用 “关系代数” 进行运算? 你如果有更简洁的方法, 请告诉我。

对于其它步骤, 你当然也可以以 “对任意 . . . ”, 然后一顿操作猛如虎。但是, 在更高的 “关系代数” 层面上进行运算, 往往举重若轻、事半功倍。

再证

$$R = R^{-1} \circ R \implies R \text{ 是对称且传递的}.$$

假设 $R = R^{-1} \circ R$。首先 ② ,

② 切记: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

$$R^{-1} = (R^{-1} \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ R = R.$$

所以, R 是对称的。其次 ③ ,

③ 这里用到了刚刚证明的 $R^{-1} = R$。

$$R = R^{-1} \circ R = R \circ R,$$

所以, R 是传递的。 □

题目 5 (等价关系 [5 分] ⋆ ⋆ ⋆)
一个自反且传递的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序。现令 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序。如下定义 X 上的关系 $\sim$:

$$x \sim y \iff x \preceq y \land y \preceq x,$$

请证明, $\sim$ 是 X 上的等价关系。

证明:
(1) $\sim$ 是自反的。
对于任意 $x \in X$, 因为 $\preceq$ 是自反的, 所以

$$x \in X \implies x \preceq x \implies x \preceq x \land x \preceq x \implies x \sim x.$$

(2) $\sim$ 是对称的。
对于任意 $(x, y) \in \sim$,

$$x \sim y \implies x \preceq y \land y \preceq x \implies y \preceq x \land x \preceq y \implies y \sim x.$$

(3) $\sim$ 是传递的。
对于任意 $(x,y) \in \sim$ 与 $(y,z) \in \sim$,

$$\begin{aligned}
& x \sim y \land y \sim z \\
\implies & (x \preceq y \land y \preceq x) \land (y \preceq z \land z \preceq y) \\
\implies & (x \preceq y \land y \preceq z) \land (z \preceq y \land y \preceq x) \\
\implies & x \preceq z \land z \preceq x \qquad (\because \preceq \text{ is transitive}) \\
\implies & x \sim z
\end{aligned}$$

□

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

6. 集合: 函数 (6-function)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 04 月 15 日发布作业
2021 年 05 月 01 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

若有疑问, 可到 https://github.com/courses-at-nju-by-hfwei/discrete-math-problem-sets/discussions 讨论。

1　作业（必做部分）

题目 1 (等价关系 [3 分] ⋆⋆)
设 R 是 X 上的等价关系。请证明,

$$\forall a, b \in X.\ ([a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb).$$

证明:

- 先证 $[a]_R = [b]_R \implies aRb$:
  假设 $[a]_R = [b]_R$。首先, $b \in [b]_R$, 因此 $b \in [a]_R = [b]_R$, 故 aRb。
- 再证 $aRb \implies [a]_R = [b]_R$:
  假设 aRb。任取 x,

$$x \in [a]_R \tag{1}$$
$$\iff aRx \tag{2}$$
$$\iff bRx \qquad (\because aRb) \tag{3}$$
$$\iff x \in [b]_R \tag{4}$$

因此, $[a]_R = [b]_R$。 □

题目 2 (函数与等价关系 [7 = 3 + 4 分] ⋆⋆⋆)
设 $f : X \to Y$ 是满射。定义 X 上的二元关系 R 为 $(x, y) \in R$ 当且仅当 $f(x) = f(y)$。请证明,

(1) R 是 X 上的等价关系。

(2) 定义 $h \subseteq (X/R) \times Y$ 为 $h([x]_R) = f(x)$。请证明, h 是从商集 X/R 到 Y 的函数, 且是满射。

证明:

(1) 只需证

- R 是自反的。
  任取 $x \in X$,
  $$f(x) = f(x) \implies (x, x) \in R.$$
- R 是对称的。
  任取 $x_1, x_2 \in X$,
  $$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \in R \\ \implies & f(x_1) = f(x_2) \\ \implies & f(x_2) = f(x_1) \\ \implies & (x_2, x_1) \in R. \end{aligned}$$
- R 是传递的。
  任取 $x_1, x_2, x_3 \in X$,
  $$\begin{aligned} & (x_1, x_2) \in R \land (x_2, x_3) \in R \\ \implies & f(x_1) = f(x_2) \land f(x_2) = f(x_3) \\ \implies & f(x_1) = f(x_3) \\ \implies & (x_1, x_3) \in R. \end{aligned}$$

(2) 要证 h 是函数, 只需证

- $\forall S \in X/R.\ \exists y \in Y.\ h(S) = y$。
  设 $X/R = [x]_R$。取 $y = f(x)$ 即可。
- $\forall S \in X/R.\ \exists y_1, y_2 \in Y.\ ((h(S) = y_1 \land h(S) = y_2) \implies y_1 = y_2)$。
  根据 h 的定义,
  $$\exists x_1 \in X.\ ([x_1]_R = S \land f(x_1) = y_1),$$
  $$\exists x_2 \in X.\ ([x_2]_R = S \land f(x_2) = y_2).$$

  因此,
  $$\begin{aligned} & [x_1]_R = [x_2]_R \\ \implies & (x_1, x_2) \in R \\ \implies & f(x_1) = f(x_2) \qquad (\because \text{第一题结论}) \\ \implies & y_1 = y_2 \end{aligned}$$

要证 h 是满射, 只需证 $\forall y \in Y.\ \exists S \in X/R.\ h(S) = y$。
因为 f 是满射, 对于任意 $y \in Y$, 存在 x_0, 使得 $f(x_0) = y$。故, 取 $S = [x_0]_R$ 即可。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

7. 集合: 函数与序关系 (7-function-ordering)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 04 月 22 日发布作业
2021 年 06 月 05 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([7 = 2 + 2 + 3 分] ⋆⋆)
设　$f : A \to B$ 是函数。请证明:

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(3) $B_0 \supseteq f(f^{-1}(B_0))$

证明:
(1) 对于任意 $b \in B$,

$$\begin{aligned} & b \in f(A_1 \cup A_2) && (1) \\ \iff & \exists a \in A_1 \cup A_2 .\ f(a) = b && (2) \\ \iff & (\exists a \in A_1 .\ f(a) = b) \lor (\exists a \in A_2 .\ f(a) = b) && (3) \\ \iff & b \in f(A_1) \lor b \in f(A_2) && (4) \\ \iff & b \in f(A_1) \cup f(A_2) && (5) \end{aligned}$$

(2) 对于任意 $a \in A$,

$$\begin{aligned} & a \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) && (1) \\ \iff & f(a) \in B_1 \setminus B_2 && (2) \\ \iff & f(a) \in B_1 \land f(a) \notin B_2 && (3) \\ \iff & a \in f^{-1}(B_1) \land \neg(a \in f^{-1}(B_2)) && (4) \\ \iff & a \in f^{-1}(B_1) \land a \notin f^{-1}(B_2) && (5) \\ \iff & a \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) && (6) \end{aligned}$$

(3) 对于任意 $b \in B$,

$$\begin{aligned} & b \in f(f^{-1}(B_0)) && (1) \\ \iff & \exists a \in f^{-1}(B_0).\ b = f(a) && (2) \\ \iff & \exists a \in A.\ f(a) \in B_0 \land b = f(a) && (3) \\ \implies & b \in B_0 && (4) \end{aligned}$$

□

题目 2 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆)
设 $f : A \to B$ 与 $g : B \to C$ 是函数。请证明,

(1) 如果 f 与 g 是满射, 则 $g \circ f$ 是满射。

(2) 如果 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射。

证明:
(1) 任取 $c \in C$。由于 g 是满射,

$$\exists b \in B.\ g(b) = c.$$

任取 b_0 满足 $g(b_0) = c$。由于 f 是满射,

$$\exists a \in A.\ f(a) = b_0.$$

任取 a_0 满足 $f(a_0) = b_0$。则有

$$(g \circ f)(a_0) = c.$$

(2) 任取 $a_1, a_2 \in A$。假设 $f(a_1) = f(a_2)$, 则

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)),$$

即

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2).$$

由于 $g \circ f$ 是单射,

$$a_1 = a_2.$$

□

题目 3 ([5 分] ⋆⋆⋆)
设 $f : A \to B$ 与 $g : B \to A$ 是函数。请证明,

$$(f \circ g = I_B \land g \circ f = I_A) \to g = f^{-1}.$$

证明:
首先, $f \circ g = I_B$ 是满射, 因此 f 是满射。
其次, $g \circ f = I_A$ 是单射, 因此 f 是单射。
所以, f 是双射。
又由于 $f \circ g = I_B$, 因此 $g = f^{-1}$。 □

该证明用到了课件中的两个定理, 请自行找出来。

题目 4 ([4 = 0 + 4 分] ⋆⋆⋆)
一个自反且传递的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序。现令 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序。

(1) 如下定义 X 上的关系 $\sim$:

$$x \sim y \triangleq x \preceq y \wedge y \preceq x.$$

请证明 [1], $\sim$ 是 X 上的等价关系。

(2) 如下定义商集 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$:

$$[x]_\sim \leq [y]_\sim \triangleq x \preceq y.$$

请证明, $\leq$ 是偏序关系。

[1] 你在 *hw5-relation* 中已经做过这个证明了, 不必重做。可以直接在第二问中使用该结论。

证明:

(2) 只需验证

$\leq$ 是自反的: 任取 $Y \in X/\sim$。设 $Y = [y]_\sim$。由于 $\preceq$ 是自反的,

$$y \preceq y.$$

根据 $\leq$ 的定义,

$$[y]_\sim \leq [y]_\sim.$$

即

$$Y \leq Y.$$

$\leq$ 是反对称的: 任取 $Y \in X/\sim$, $Z \in X/\sim$。设 $Y = [y]_\sim$, $Z = [z]_\sim$。

$$\begin{aligned} & Y \leq Z \wedge Z \leq Y \\ \implies & y \preceq z \wedge z \preceq y \\ \implies & y \sim z \\ \implies & [y]_\sim = [z]_\sim \\ \implies & Y = Z. \end{aligned}$$

$\leq$ 是传递的: 任取 $W \in X/\sim, Y \in X/\sim$, $Z \in X/\sim$。设 $W = [w]_\sim, Y = [y]_\sim$, $Z = [z]_\sim$。

$$\begin{aligned} & W \leq Y \wedge Y \leq Z \\ \implies & w \preceq y \wedge y \preceq z \\ \implies & w \preceq z \\ \implies & [w]_\sim \leq [z]_\sim \\ \implies & W \leq Z. \end{aligned}$$

□

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

8. 集合: 无穷 (8-infinity)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 04 月 29 日发布作业
2021 年 06 月 06 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业（必做部分）

题目 1 ([3 分] ⋆⋆⋆)
考虑由所有 0, 1 串构成的集合 ($\{0, 1, 111, 01010101010, 101010101, \dots\}$)。请问, 该集合是否是可数集合, 请给出理由。

证明:
由 Cantor 的对角线论证法易知该集合是不可数的 ① 。 □

① 有同学认为该集合是可数的, 理由是可以将 0,1 串解释为二进制表示的自然数。这种映射的问题在于, 有的 0,1 串, 比如 $11111\dots$, 是发散的, 对应于 ∞, 而 ∞ 不是自然数。

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
考虑如下命题:
"存在可数无穷多个两两不相交的非空集合, 它们的并是有穷集合。"
请问, 该命题是否正确。如果正确, 请给出例子。如果不正确, 请给出 (反面的) 证明。

证明:
该命题不正确。反设它们的并是有穷集合, 记为 A。设 $|A| = n$, 则 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$。因此不可能存在 A 的可数无穷多个两两不相交的非空集合。矛盾。 □

题目 3 ([3 分] ⋆⋆⋆⋆)
请自行查找并阅读 Cantor-Schröder–Bernstein 定理的某个证明, 理解它, 放下你手头的资料 ② , 然后尝试自己写出这个证明 ③ 。

以下证明供参考 ④ : Schröder–Bernstein theorem @ wiki

② 不要偷看哦
③ 是不是又偷看了 (为什么明明懂了, 但就是表达不出来?)
④ pdf 版本见 "*8-infinity.zip*" 压缩包

证明:
略。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

9. 图论: 路径与圈 (9-paths-cycles)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 05 月 06 日发布作业
2021 年 06 月 12 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([3 分] ⋆⋆⋆)
设 $G = (V, E)$ 是无向图 (不一定是简单无向图), 其中 $|E| = m$。请证明[1]，

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

[1] 这也说明了, G 中度数为奇数的顶点数目为偶数。

证明:
每条边贡献了 2 度。所以 [2]，

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

□

[2] 这也被称为 "握手定理"。

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
请证明: 每个长度为奇数的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle) [3] 。

[3] "长度" 就是所含边的条数。

(提示: 可用数学归纳法。如果你使用数学归纳法, 请注意数学归纳法的书写规范。)

证明:
对闭道路的长度 l 作强数学归纳。

基础步骤: $l = 1$。长度为 1 的闭道路即是长度为 1 的圈。显然成立。

归纳假设: 假设每个长度为奇数 $1 \le l < k$ (k 为奇数) 的闭道路都包含一个长度为奇数的圈。

归纳步骤: 考虑长度为奇数 $k > 1$ 的闭道路 W。分两种情况讨论:

- 如果 W 中不包含重复顶点 (除了起点与终点), 则 W 即为长度为奇数的圈。

- 不妨设 W 中包含重复顶点 (除了起点与终点) v. W 可看作两条起点、终点均为 v 的闭道路。其中必有一条的长度为奇数，记该闭道路为 U，长度为 u，有 $1 \le u < k$。根据归纳假设，U 中包含一个长度为奇数的圈。 □

题目 3 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆⋆)
设 G 是一个简单无向图 (undirected simple graph) 且满足

$$\delta(G) \ge k,$$

其中 $k \in \mathbb{N}^+$ 为常数。请证明:

(1) G 包含长度 $\ge k$ 的路径;

(2) 如果 $k \ge 2$, 则 G 包含长度 $\ge k+1$ 的圈。

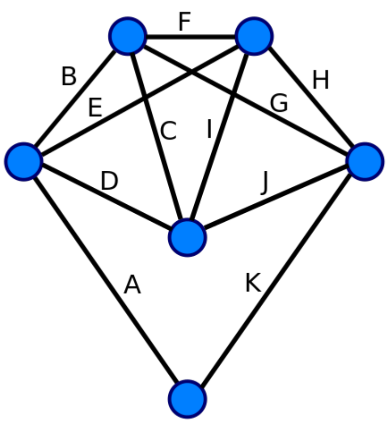
(提示: 想想我们在课上使用了两次的那个证明技巧。)

证明:

(1) 考虑 G 中的一条极大路径 P。设 u 是 P 的一个端点。因为 P 是极大路径, u 的所有邻居顶点都在 P 上。因为 $\deg(u) \ge \delta(G) \ge k$ 且 G 是简单图, 所以除了端点 u, P 至少还包含 k 个顶点。故, P 的长度 $\ge k$。

(2) 假设 $k \ge 2$。设 v 是 u 的邻居顶点中距离 u 最远 (在顺着路径 P 的意义下) 的顶点。则边 $\{u, v\}$ 以及路径 P 中从 u 到 v 的一段子路径构成了长度 $\ge k+1$ 的圈。
□

题目 4 ([4 = 1 + 2 + 1 分] ⋆⋆)
考虑下图, 记为 G。



(1) G 是否是欧拉图? 请说明理由。

(2) 如果是欧拉图, 请将其分解为若干圈的组合, 并给出一个欧拉回路 [4]; 如果不是欧拉图, 至少需要添加几条边才能使得它成为欧拉图? (可以自行为顶点编号, 也可以使用图上边的编号描述回路。)

(3) (本小题与 G 无关) 假设某图不是欧拉图, 但含有欧拉迹, 请用一两句话说明如何找出图中的欧拉迹。

[4] 注意: 在课上, 我们用了英文术语 "Eulerian Cycle"。有的教材上使用 "Eulerian Circuit"。 后者更严谨一些, 因为它可能包含重复的顶点。

证明:

(1) G 是欧拉图。因为 G 中每个顶点的度数都是偶数。

(2) 可将 G 分解成如下三个圈的组合:

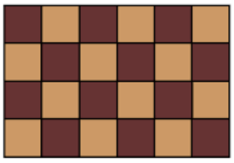
- $A-B-F-H-K$
- $C-G-J$
- $D-E-I$

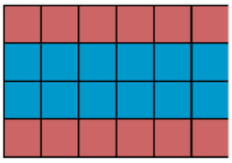
一个欧拉回路: $A-B-C-D-E-F-G-H-I-J-K$ ⑤ 。

⑤ 嗯, 一定是这样

(3) 该图, 记为 G, 有且仅有两个奇度顶点, 记为 u, v。连接 u, v, 得到欧拉图 G'。求 G' 的一条欧拉回路, 删除边 $\{u,v\}$, 即得原图 G 的一条欧拉迹。 □

题目 5 ([5 分] ⋆⋆⋆⋆)
请证明: 对于 $4\times n$ 的棋盘, 不存在一种走法, 使得 “馬” 可以踏遍每个格子一次并回到出发点。





证明:
考虑左图。删除中间两行中的 n 个深色格子, 则上下两行中的 n 个浅色格子成为孤立点, 而剩下的 $2n$ 个格子至少包含一个连通分支。因此, 该图不存在哈密顿回路。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ···

10. 图论: 树 (10-trees)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 05 月 13 日发布作业
2021 年 06 月 12 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆)
设 T 是树且每个顶点的度数要么为 1, 要么为 k。请证明 ① ② :

$$n(T) = \ell(k-1) + 2, \quad \text{for some } \ell \in \mathbb{N}.$$

① 我们经常使用 $n(G)$ 表示 G 的顶点数, 很多时候也简写为 n。
② 提示: 关于顶点度数, 我们有什么定理可用?

证明:
设度数为 k 的顶点数为 m, 则

$$mk + (n-m) = 2n - 2.$$

化简得,

$$n = m(k-1) + 2.$$

得证。 □

题目 2 ([4 分] ⋆ ⋆ ⋆)
给定无向图 G。请证明: G 是树当且仅当 G 没有 loop 且 G 有唯一的生成树。

证明:
分两个方向证明。

- $\implies$: 假设 G 是树。显然, G 没有 loop。反设 G 有两个不同的生成树 T_1, T_2。T_2 中至少存在一条不在 T_1 中的边, 记为 e。因此, G 包含 T_1 与 e。故 G 包含圈。与 G 是树矛盾。
- $\impliedby$: 假设 G 没有 loop 且有唯一的生成树。下证
  - G 是连通的。因为 G 有生成树, 故 G 是连通的。

- G 是无圈的。反设 G 中有圈, 记为 C。设 T 是 G 的唯一的生成树。C 中必存在一条不在 T 中的边, 记为 e。将 e 加入 T 中, 必形成圈, 记为 C'。从 C' 中删掉一条边 $e' \neq e$, 得到 G 的一个生成树 $T' = T + e - e'$。$T' \neq T$, 与 T 的唯一性矛盾。 □

题目 3 ([4 分] ⋆⋆⋆)
给定无向连通图 G 与 G 中的某条边 e。请证明: e 是桥 (bridge [3]) 当且仅当 e 属于 G 的每个生成树。

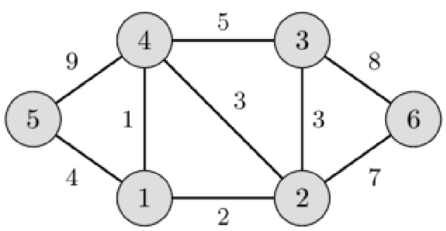
[3] bridge 也称为 cut-edge (割边)。

证明:
分两个方向证明。

- $\Longrightarrow$: 假设 e 是桥。反设 e 不属于 G 的某个生成树 T。将 e 加入 T 中, 则形成一个包含 e 的圈。所以, e 不是桥。矛盾。
- $\Longleftarrow$: 假设 e 属于 G 的每个生成树。反设 e 不是桥, 则 e 在某个圈中。因此, 存在某个生成树不包含 e (否则, 使用类似 Cycle Property 的证明, 可以构造出不包含 e 的生成树)。矛盾。 □

题目 4 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆)
请分别使用 Kruskal 算法与 Prim 算法 (从顶点 1 开始) 给出下图的最小生成树 [4] 要求给出边添加的顺序 (在有多种选择时, 优先选择编号较小的顶点)。

[4] 以后你会明白, Kruskal 算法与 Prim 算法的难度不在算法本身, 而在于搞清楚哪个是哪个。



证明:

- Kruskal 算法: 加边顺序为

$$\{1,4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,5\}, \{2,6\}.$$

- Prim 算法: 加边顺序为 [5]

$$\{1,4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,5\}, \{2,6\}.$$

□

[5] 我没注意到会是一样的

题目 5 ([4 分] ⋆⋆⋆⋆)
设 G 是无向连通带权图, T 是 G 的一个最小生成树。
请证明: T 是 G 的唯一最小生成树当且仅当对于不在 T 中的每一条边 e, e 的权重大于 $T + e$ 所产生的圈中其它每条边的权重。

证明:
分两个方向证明。

- $\Longrightarrow$: 假设 T 是 G 的唯一最小生成树。反设存在一条不在 T 中的边 e, $w(e)$ 不大于 $T+e$ 所产生的圈中其它某条边 e' 的权重。则 $T' = T + e - e'$ 是一个权重不大于 $w(T)$ 的生成树。与 T 的唯一性矛盾。
- $\Longleftarrow$: 反设 G 还有一棵最小生成树 $T' \neq T$。T' 中至少存在一条不在 T 中的边，记为 e。将 e 加入 T 中，形成一个圈 C。根据前提条件，e 是 C 中权重最大的唯一一条边。根据 Cycle Property, e 不在任何最小生成树中。这与 $e \in T'$ 矛盾。 $\square$

题目 6 ([−10 分])

解答：
不看的后果会很严重：省下不少时间。

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

11. 图论: 平面图与图着色 (11-planarity-coloring)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 05 月 21 日发布作业
2021 年 06 月 14 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆⋆)
假设 G 是顶点数 ≥ 11 的简单图, $\overline{G}$ 是 G 的补图 [1]。请证明, G 和 $\overline{G}$ 不同为平面图。

[1] 补图: 顶点集相同, 但是 e 是 G 的边当且仅当 e 不是 $\overline{G}$ 的边。

证明:
反设 G 和 $\overline{G}$ 都是平面图。因此,

$$m \leq 3n - 6 \tag{1}$$
$$\overline{m} \leq 3n - 6 \tag{2}$$
$$m + \overline{m} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{3}$$

解得 [2],

$$\frac{13 - \sqrt{73}}{2} \leq n \leq \frac{13 + \sqrt{73}}{2}.$$

[2] https://www.wolframalpha.com/input/?i=n%5E2+-+13n+%2B+24+%3C%3D+0

其整数解为

$$n \in \mathbb{Z} \wedge 3 \leq n \leq 10.$$

与 $n \geq 11$ 矛盾。 □

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
假设 G 是包含 n 个顶点的 d-正则简单图。请证明

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-d}.$$

证明:
反设

$$\chi(G) < \frac{n}{n-d}.$$

因此, 将 G 中顶点按照颜色归类, 可以将 G 划分成 $< \frac{n}{n-d}$ 组, 每组内的顶点两两不相邻 ③ 。根据鸽笼原理, 至少存在一组含有 $> \frac{n}{\frac{n}{n-d}} = n-d$ 个顶点。由于 G 是 d-正则简单图, 该组中必有两顶点相邻。矛盾。 □

③ 注, 这种组被称为 "独立集"

题目 3 ([4 分] ⋆⋆⋆)
假设 G 是不包含三角形 △ 的简单平面图。

(1) 请使用 Euler 公式证明 G 含有度数 ≤ 3 的顶点。

(2) 请使用数学归纳法证明 G 是 4-可着色的。

证明:

(1) 反设 $\delta(G) \geq 4$。因此,

$$\sum_{v} \deg(v) \geq 4n.$$

由于 G 是不包含 △ 的简单平面图,

$$m \leq 2n - 4.$$

根据握手定理,

$$\sum_{v} \deg(v) = 2m \leq 4n - 8.$$

矛盾。

(2) 对 G 中顶点数 n 作归纳。

基础步骤: $n = 1$。G 显然是 4-可着色的。

归纳假设: 假设命题对包含 $1 \leq k = n-1$ 个顶点的任意符合要求的图均成立。

归纳步骤: 考虑包含 n 个顶点的图 G。根据 (1), G 中包含度数 ≤ 3 的顶点, 记为 v。从 G 中删除 v, 得到图 G'。G' 包含 $n-1$ 个顶点, 且是不包含 △ 的简单平面图。根据归纳假设, G' 是 4-可着色的。考虑 G' 的任意一种 4-着色方案, 将 v (及删除的边) 加入 G', 重新得到图 G。因为 $\deg(v) \leq 3$, 所以 G 是 4-可着色的。 □

题目 4 ([4 分] ⋆⋆)
假设图 G_1 与 G_2 是 homeomorphic 的。请证明 ④ :

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

④ m, n 分别表示边数与点数。

证明:
分别考虑 "插入" 与 "收缩" 2 度顶点的操作:

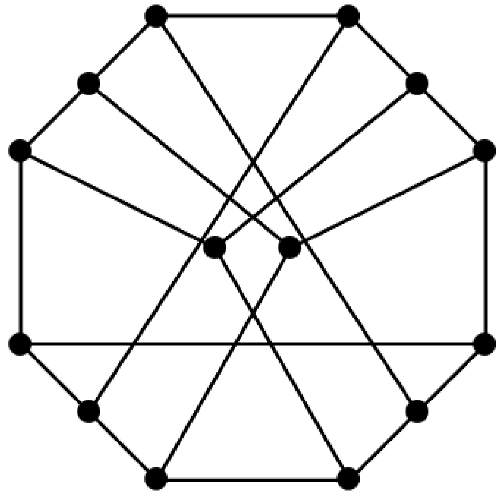
- 对于 "插入" 一个 2 度顶点, 顶点数 n 加一, 边数 m 加一, 所以 $m - n$ 保持不变。
- 对于 "收缩" 一个 2 度顶点, 顶点数 n 减一, 边数 m 减一, 所以 $m - n$ 保持不变。

对从 G_1 转化到 G_2 的 "插入/收缩" 操作序列的长度作归纳, 即得证。 □

题目 5 ([4 分] ⋆⋆)
请使用 Kuratowski 定理说明下图不是平面图 ⑤ :

⑤ 你不需要制作.gif。

证明:
先去掉图内部中间的两个点, 然后收缩剩下的所有 2 度顶点, 得到一个 $K_{3,3}$。根据 Kuratowski 定理, 该图不是平面图。 □



2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ···

12. 图论: 匹配与网络流 (12-matching-flow)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 05 月 28 日发布作业
2021 年 06 月 22 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([5 = 2 + 3 分] ⋆⋆)
设 $G = (X, Y, E)$ 是一个 k-正则 $(k > 0)$ 二部图。请证明:

(1) $|X| = |Y|$;

(2) G 存在 X-完美匹配。

证明:

(1) 因为 G 是 k-正则二部图, 所以 $k|X| = k|Y|$, 故有 $|X| = |Y|$。

(2) 对于 X 的任何子集 S, 从 S 到 $N(S)$ 的边共有 $k|N|$ 条。这 $k|N|$ 条边均与 $N(S)$ 中的顶点相连, 所以 $k|N| \le k|N(S)|$, 即有 $|N(S)| \ge |S|$. 根据 Hall 定理, G 存在 X-完美匹配。 □

题目 2 ([5 分] ⋆ ⋆ ⋆)
设 $G = (V, E)$ 是含有 $2n$ 个顶点的简单图，且 $\delta(G) \ge n + 1$。
请证明: G 有完美匹配 ①。(提示: 考虑使用图论第一讲中的定理。)

① 对于任意图, 完美匹配是 cover 了所有顶点的匹配。

证明:
因为 $\delta(G) \ge n + 1$, 根据 Dirac 定理, G 中存在 Hamiltonian 回路。该回路是包含 $2n$ 个顶点的圈, 取该圈的不相邻的 n 条边, 即为图 G 的一个完美匹配。 □

题目 3 ([5 分] ⋆ ⋆ ⋆⋆)
请证明: 每个二部图 G 都有一个大小 $\ge e(G)/\Delta(G)$ 的匹配 ②。(提示: 使用 König-Egerváry 定理。)

② $e(G)$ 表示 G 的边数。

证明:
每个顶点最多覆盖 (cover) $\Delta(G)$ 条边。因此, G 的最小点覆盖中包含 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 个顶点。根据 König-Egerváry 定理, G 的最大匹配包含 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 条边。 □

题目 4 ([5 分] ★★)
设 Y 为集合, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为包含 m 个集合的集合, 其中 $A_i \subseteq Y$ (对 $1 \leq i \leq m$)。$\mathcal{A}$ 的相异代表系 (System of Distinct Representatives; SDR) 是 Y 中 m 个不同元素 $a_1, \ldots, a_m$ 构成的集合, 其中 $a_i \in A_i$ (对 $1 \leq i \leq m$)。
请证明: $\mathcal{A}$ 有 SDR 当且仅当

$$\forall S \subseteq \{1, \ldots, m\}. \left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S|.$$

证明:
构造二部图 $G = (X, Y, E)$: 其中, $X = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $Y = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (设 $|Y| = n$), 并添加边 $\{A_i, a_j\} \in E$ 当且仅当 $a_j \in A_i$。因此, $\mathcal{A}$ 有 SDR 当且仅当 G 有 X-完美匹配。

已知

$$\forall S \subseteq \{1, \ldots, m\}. \left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S|,$$

即 Hall 条件成立。因此, 根据 Hall 定理, G 有 X-完美匹配。故, $\mathcal{A}$ 有 SDR。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$

13. 群论: 基本概念 (13-group)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

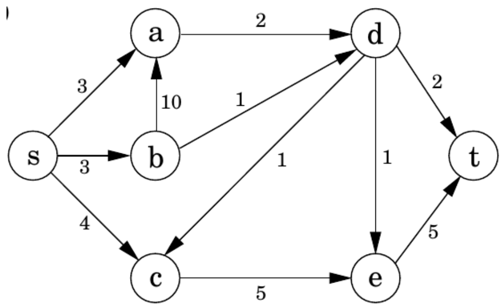
评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 06 月 04 日发布作业
2021 年 06 月 23 日发布答案

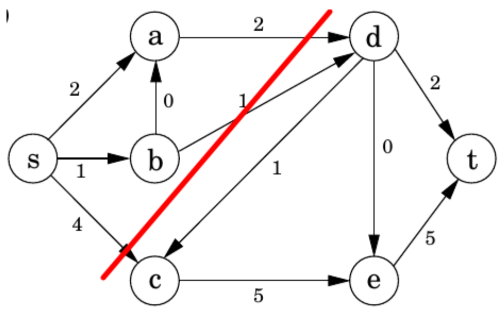
请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆)
请给出以下网络的一个最大流与一个最小割。要求给出 Ford-Fulkerson Method 运行过程。



证明:
最大流如下图所示, 值为 7; 最小割为 $(\{s, a, b\}, \{c, d, e, t\})$, 容量为 7。



Ford-Fulkerson Method 一种可能的运行过程如下:

- 初始化 $\forall e \in E.\ f(e) = 0$。

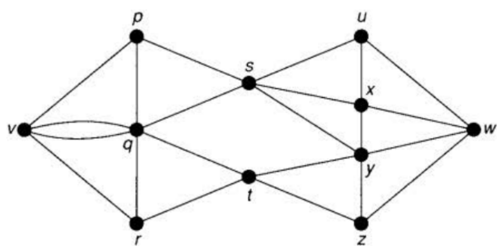
- 找到 f-增广路径：$s \to a \to d \to t$，允许的最大增量为 2。
- 将 f 增广为 f_1，其中 $f_1(s \to a) = f_1(a \to d) = f_1(d \to t) = 2$。
- 找到 f_1-增广路径：$s \to c \to e \to t$，允许的最大增量为 4。
- 将 f_1 增广为 f_2，其中 $f_2(s \to c) = f_2(c \to e) = f_2(e \to t) = 4$。
- 找到 f_2-增广路径：$s \to b \to d \to c \to e \to t$，允许的最大增量为 1。
- 将 f_2 增广为 f_3，其中 $f_3(s \to b) = f_3(b \to d) = f_3(d \to c) = 1$，$f_3(c \to e) = f_3(e \to t) = 5$。
- 找不到 f_3-增广路径。因此，f_3 为最大流。同时找到最小割 $(\{s,a,b\},\{c,d,e,t\})$。□

题目 2 ([5 = 1 + 1 + 3 分] ⋆⋆⋆⋆)
考虑下面的定理:

定理 1 (不能告诉你名字的某个著名定理)
设 $G = (V, E)$ 是无向连通图，$v, w \in V$ 是不同的两个顶点。则 v, w 之间的边不相交的 (edge-disjoint) ① 路径的最大条数等于最小 vw-边割集 ② 的大小。

① 设 P_1, P_2 是两条 v、w 间的路径。如果 P_1 与 P_2 没有公共边，则 P_1、P_2 是 v, w 之间的边不相交的路径。

② 设 $F \subseteq E$ 为集。如果 G 删除 F 后，v 与 w 不再连通，则称 F 是 vw-边割集。



(1) 考虑图中的 v, w 顶点。请给出 v、w 间的一个最大边不相交的路径集合。

(2) 考虑图中的 v, w 顶点。请给出一个最小的 vw-边割集。

(3) 请使用最大流-最小割定理证明上述定理 ③ 。

③ 恭喜！你刚刚证明了图论中的一个著名定理。这就是 Menger's theorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Menger%27s_theorem。如果直接证明该定理，还是比较复杂的。使用最大流-最小割定理则容易很多。不过，还是有些技术细节需要谨慎处理。

证明:
(1) 最大边不相交的路径集合为

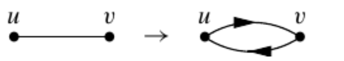
$$\{v-p-s-u-w, v-q-s-x-w, v-q-t-y-w, v-r-t-z-w\}.$$

注意，$v - q$ 有两条重边。

(2) 最小的 vw-边割集为

$$\{ps, qs, qt, rt\}.$$

(3) 首先将无向图 G 转化成有向图 G'：将每条无向边 uv 转化成两条有向边 $u \to v$ 与 $v \to u$。然后将每条有向边的容量设置为 1。



考虑任意两个顶点 v, w。将最大边不相交的 vw-路径的条数记为 $\lambda'(v, w)$，将最小 vw-边割集的大小记为 $\kappa'(v, w)$ ④ 。由于任何一个 vw-边割集都要包含边不相交的每条 vw-路径中的至少一条边，所以

④ 这是标准记法。

$$\kappa'(v, w) \geq \lambda'(v, w).$$

下面我们利用最大流-最小割定理证明 (记最大流为 f, 最小割为 (S,T))

$$\lambda'(v,w) \geq \max \mathrm{val}(f) = \min \mathrm{cap}(S,T) \geq \kappa'(v,w).$$

经过上述转化, 可将图 G' 视为源点为 v, 汇点为 w 的网络。根据 Integrity Theorem [5], G' 存在每条边的流量均为整数的最大网络流, 设为 f。如果存在某条无向边 xy, $f(x \to y) = f(y \to x) = 1$, 则可以调整 f, 使得 $f(x \to y) = f(y \to x) = 0$。该调整不改变 $\mathrm{val}(f)$。因此, 我们可以假设最大流 f 中每条无向边 xy 最多使用一次 (即 $f(x \to y)$ 与 $f(y \to x)$ 不同时为 1)。所以, 该最大流 f 包含了 $\mathrm{val}(f)$ 条 (两两) 边不相交的 vw 路径。这证明了

$$\lambda'(v,w) \geq \max \mathrm{val}(f).$$

对于任意割 (S,T), 每条无向边 xy 有且只有一个方向的有向边算作割的容量。因此,

$$\mathrm{cap}(S,T) = |[S,T]|.$$

其中 $[S,T]$ 表示从 S 到 T 的有向边的集合。因为 $[S,T]$ 是一个边割集, 所以

$$\min \mathrm{cap}(S,T) \geq \kappa'(v,w).$$

根据最大流-最小割定理,

$$\lambda'(v,w) \geq \max \mathrm{val}(f) = \min \mathrm{cap}(S,T) \geq \kappa'(v,w). \qquad \square$$

[5] 我们在课上没有讲过这个定理, 也不会列入考点。不过该定理很直观: 如果网络中每条边的容量都是整数, 那么该网络存在每条边的流量都是整数的最大网络流。它的证明也很简单, 因为 Ford-Fulkerson Method 就可以保证这一点。

题目 3 ([3 分] ⋆⋆)
在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 规定运算 $\oplus$ 如下:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}, a \oplus b = a + b - 2.$$

请证明: $(\mathbb{Z}, \oplus)$ 构成群。

证明:
只需验证:

封闭性*:* 显然 $a \oplus b \in \mathbb{Z}$。

结合性*:*

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 2) \oplus c \\ &= a + b - 2 + c - 2 \\ &= a + (b + c - 2) - 2 \\ &= a \oplus (b \oplus c)\end{aligned}$$

单位元*:* 单位元为 2。

$$a \oplus 2 = a + 2 - 2 = a = 2 \oplus a.$$

逆元*:* a 的逆元是 $4 - a$。

$$a \oplus (4 - a) = a + (4 - a) - 2 = 2 = (4 - a) \oplus a. \qquad \square$$

题目 4 ([5 分] ⋆⋆⋆)
设 G 是群。请证明: 如果 $\forall x \in G.\ x^2 = e$, 则 G 是交换群。

证明：
对于任意 $a, b \in G$,

$$\begin{aligned} a^2 = e &\implies a = a^{-1}, \\ b^2 = e &\implies b = b^{-1}, \\ (ab)^2 = e &\implies ab = (ab)^{-1}. \end{aligned}$$

因此,

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

因此, G 是交换群。 □

题目 5 ([3 分] ⋆⋆)
请求出 3^{83} 的最后两位数 [6] 。要求给出计算过程。

[6] https://www.wolframalpha.com/input/?i=3%5E83

证明：
首先 $(3, 100) = 1$, $\phi(100) = \phi(2^2 5^2) = 100(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 40$。根据 Euler's Theorem,

$$3^{40} = 1 \mod 100.$$

其次,

$$3^{83} = 3^{2\times 40+3} = (3^{40})^2 \cdot 3^3.$$

因此,

$$3^{83} \mod 100 = 27 \mod 100.$$

即 3^{83} 的最后两位数是 27。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ⋯

14. 群论: 子群 (14-subgroup)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 06 月 11 日发布作业
2021 年 06 月 23 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆)
设 $H \le G$。请证明,

$$aH = H \iff a \in H \iff aH \le G$$

证明:
(1) 先证明 $aH = H \iff a \in H$。

- 先证明 $aH = H \implies a \in H$。
  假设 $aH = H$。
  $$a = ae \in aH = H.$$
- 再证明 $a \in H \implies aH = H$。
  假设 $a \in H$。首先, 由于 $H \le G$ 满足封闭性, 所以 $aH \subseteq H$。其次, 对于任意 $h \in H$, 由于 $H \le G$ 满足封闭性, 所以 $a^{-1}h \in H$ 且
  $$h = a(a^{-1}h) \in aH.$$
  因此, $H \subseteq aH$。

(2) 再证明 $a \in H \iff aH \le G$。

- 先证明 $a \in H \implies aH \le G$。
  根据 (1),
  $$a \in H \implies aH = H \implies aH \le G.$$
- 再证明 $aH \le G \implies a \in H$。
  $$aH \le G \implies e \in aH \implies a^{-1} \in H \implies a \in H.$$ □

题目 2 ([5 = 2 + 3 分] ⋆⋆⋆)
设 ϕ 是从群 G 到 G' 的同态映射。请证明,

(1)

$$H \le G \implies \phi(H) \le G'.$$

(2)

$$H \lhd G \implies \phi(H) \lhd \phi(G).$$

证明：

(1) 记 G' 的单位元为 e'。$e' \in \phi(H)$, 所以 $\phi(H) \neq \emptyset$。因为 $H \le G$, 所以对任意的 $h_1, h_2 \in H$, 有

$$h_1 h_2^{-1} \in H.$$

因此,

$$\phi(h_1)(\phi(h_2)^{-1}) = \phi(h_1)\phi(h_2^{-1}) = \phi(h_1 h_2^{-1}) \in \phi(H).$$

所以, $\phi(H) \le G'$。

(2) 由 (1) 知,

$$H \subseteq G \wedge \phi(H) \le G'.$$

故,

$$\phi(H) \le \phi(G).$$

对任意 $g \in G$, $h \in H$, 因为 $H \lhd G$,

$$ghg^{-1} \in H.$$

因此,

$$\phi(g)\phi(h)(\phi(g))^{-1} = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(ghg^{-1}) \in \phi(H).$$

所以, $\phi(H) \lhd \phi(G)$。 □

题目 3 ([3 分] ⋆⋆)
请计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

并将结果写成 (不相交) 轮换的乘积。

解答：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3\ 5)$$

题目 4 ([3 分] ⋆⋆⋆)
考虑如下定义。

定义 1 (元素的阶)
设 G 是有限群, e 为 G 的单位元, $a \in G$。使 $a^r = e$ 成立的最小正整数称为 a 的阶 (order) [1], 记作 $\mathrm{ord}\, a = r$。

[1] 注意, 群的阶指的是集合 G 的大小, 即 $|G|$。

设 G 是有限群。请证明,

$$\forall a \in G. \text{ (ord } a) \big| |G|.$$

证明:
令 $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots, a^r = e\}$。易知, $\langle a \rangle \leq G$。又有 $|\langle a \rangle| = \text{ord } a$。根据 Lagrange's Theorem,

$$(\text{ord } a) \big| |G|.$$ □

题目 5 ([5 = 2 + 1 + 2 分] ⋆⋆⋆)
考虑从乘法群 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 到乘法群 $\mathbb{R}^+$ 的函数 $f : x \mapsto |x|$。

(1) 请证明, f 是从 $\mathbb{R}^*$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的同态。

(2) 求 Ker ϕ。

(3) 套用群同态基本定理, 给出相应结论, 并用一两句话解释该结论。

证明:
(1)

$$f(xy) = |xy| = |x||y| = f(x)f(y),$$

因此 f 是从 $\mathbb{R}^*$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的同态。

(2)

$$\text{Ker } \phi = \{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) = 1\} = \{1, -1\}.$$

(3) $\phi(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^+$。根据群同态基本定理,

$$\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^+.$$

对于任意 $x > 0$, 陪集 $\{x, -x\}$ 被 ϕ 映射到 x。这说明在只考虑绝对值的情况下, x 与 $-x$ 是一样的。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ···