

12. 图论: 匹配与网络流 (12-matching-flow)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 5 月 28 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([5 = 2 + 3 分] **)

设 $G = (X, Y, E)$ 是一个 k -正则 ($k > 0$) 二部图。请证明:

- (1) $|X| = |Y|$;
- (2) G 有一个 X -完美匹配。

证明:

题目 2 ([5 分] ***)

设 $G = (V, E)$ 是含有 $2n$ 个顶点的简单图, 且 $\delta(G) \geq n + 1$ 。

请证明: G 有完美匹配^①。(提示: 考虑使用图论第一讲中的定理。)

^① 对于任意图, 完美匹配是 cover 了所有顶点的匹配。

证明:

题目 3 ([5 分] ***)

请证明: 每个二部图 G 都有一个大小 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 的匹配^②。(提示: 使用 König-Egerváry 定理。)

^② $e(G)$ 表示 G 的边数。

证明:

题目 4 ([5 分] **)

设 Y 为集合, $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为包含 m 个集合的集合, 其中 $A_i \subseteq Y$ (对 $1 \leq i \leq m$)。 \mathcal{A} 的相异代表系 (System of Distinct Representatives; SDR) 是 Y 中 m 个不同元素 a_1, \dots, a_m 构成的集合, 其中 $a_i \in A_i$ (对 $1 \leq i \leq m$)。

请证明: \mathcal{A} 有 SDR 当且仅当

$$\forall S \subseteq \{1, \dots, m\}. \left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S|.$$

证明:

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...