4. 集合: 基本概念与运算 (4-set)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 04 月 01 日发布习题
2021 年 04 月发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 (相对补与绝对补 [5 分] ⋆⋆)
请证明,

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

证明：

$$\begin{aligned}
& A \cap (B \setminus C) && (1)\\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) && (2)\\
&= (A \cap B) \cap \overline{C} && (3)\\
&= (A \cap B) \setminus C && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A \cap B) \setminus (A \cap C) && (5)\\
&= (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} && (6)\\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) && (7)\\
&= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) && (8)\\
&= \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) && (9)\\
&= (A \cap B) \setminus C && (10)
\end{aligned}$$

□

题目 2 (对称差 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

证明:

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B) \oplus (A \cap C) && (1)\\
&= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) && (2)\\
&= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) && (3)\\
&= (A \cap (B \cup C) \cap \overline{A}) \cup (A \cap (B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) && (4)\\
&= \emptyset \cup (A \cap ((B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}))) && (5)\\
&= A \cap (B \oplus C) && (6)
\end{aligned}
$$

其中, (2) 与 (6) 使用了等式:

$$X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y}).$$

□

题目 3 (广义并、广义交 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \implies \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

并举例说明, $\subseteq$ 不能换成 $=$。

证明:
对任意 x,

$$
\begin{aligned}
&x \in \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} && (7)\\
&\implies x \in \bigcap \mathcal{F} \land x \in \bigcap \mathcal{G} && (8)\\
&\implies (\forall F \in \mathcal{F}.\ x \in F) \land (\forall G \in \mathcal{G}.\ x \in G) && (9)\\
&\implies \ldots && (10)\\
&\implies \forall X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.\ x \in X && (11)\\
&\implies x \in \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}). && (12)
\end{aligned}
$$

□

题目 4 (德摩根律 [3 分] ⋆⋆⋆)
请化简集合 A:

$$A = R \setminus \bigcap_{n \in Z^+} (R \setminus \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\})$$

解答:
记

$$X_n \triangleq \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}.$$

$$
\begin{aligned}
A &= \mathcal{R} \setminus \bigcap_{n \in Z^+} (R \setminus X_n) && (1)\\
&= \mathcal{R} \setminus \Big(R \setminus \bigcup_{n \in Z^+} X_n\Big) && (2)\\
&= \mathcal{R} \setminus \Big(R \setminus Z\Big) && (3)\\
&= \mathcal{Z} && (4)
\end{aligned}
$$

题目 5 (幂集 [4 分] ⋆⋆⋆)
请证明，[1]

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B.$$

解答：
先证

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B.$$

假设 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$。

$$\begin{aligned} & A \in \mathcal{P}(A) \\ \implies & A \in \mathcal{P}(B) \\ \implies & A \subseteq B \end{aligned}$$

同理可证 $B \subseteq A$。因此，$A = B$。
再证

$$A = B \implies \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B).$$

假设 $A = B$。对于任意 x，

$$\begin{aligned} & x \in \mathcal{P}(A) \\ \implies & x \subseteq A \\ \implies & x \subseteq B \\ \implies & x \in \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

因此，$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$。同理可证 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$。因此，$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$。

[1] 不，我有 “幂集” 恐惧症。

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ⋯