离散数学 (1-prop-logic)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 3 月 11 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 (命题逻辑公式上的数学归纳法 [2 ($\star\star$) 分])
假设公式 α 中不含 "$\neg$" 符号。请证明, α 中超过四分之一的符号是命题符号。

解答:
我们证明如下引理:

引理 1
长度为 $4k+1$ 的不含 $\neg$ 符号的公式中含有 $k+1$ 个命题符号。

证明:
对公式 α 的结构作归纳 ①。

基础步骤: α 是一个命题符号。公式长度 $|\alpha| = 1 = 4 \times 0 + 1$, 命题符号个数为 $1 = 0 + 1$。引理成立。

归纳假设: 长度为 $4k+1$ 的不含 $\neg$ 符号的公式中含有 $k+1$ 个命题符号。

归纳步骤: 因为 α 中不含 $\neg$ 联词, 所以 α 呈型 $\beta \oplus \gamma$, 其中 $\oplus$ 表示 $\wedge, \vee, \to$ 或 $\leftrightarrow$ 二元逻辑联词。根据归纳假设, 对于子公式 β 与 γ (β_P 表示 β 中命题符号的个数),

$$|\beta| = 4k_1 + 1, \qquad |\beta_P| = k_1 + 1,$$

$$|\gamma| = 4k_2 + 1, \qquad |\gamma_P| = k_2 + 1.$$

所以 ②,

$$\begin{aligned} |\alpha| &= |\beta| + |\gamma| + 3 \\ &= (4k_1 + 1) + (4k_2 + 1) + 3 \\ &= 4(k_1 + k_2 + 1) + 1 \end{aligned}$$

① 对公式使用数学归纳法时, 通常都是这样的做法, 请注意以下的书写规范。其中, "归纳假设" 有时可以省略。

② +3: 左括号、右括号、逻辑联词。本解答将括号也计算在内。

$$
\begin{aligned}
|\alpha_P| &= |\beta_P| + |\gamma_P| \\
&= (k_1 + 1) + (k_2 + 1) \\
&= (k_1 + k_2 + 1) + 1
\end{aligned}
$$

得证。 □

题目 2 (合取范式与析取范式 [3 (⋆) 分])
我们先引入一个定义。

定义 1 (合取范式 (Conjunctive Normal Form; CNF))
我们称公式 α 是**合取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个 β_i 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且 β_{ij} 或是一个命题符号, 或是命题符号的否定。

例如, 下面的公式就是一个合取范式。

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

将定义 1 中的所有 $\wedge$ 换成 $\vee$, 所有 $\vee$ 换成 $\wedge$, 其余不变, 就变成了析取范式 (Disjunctive Normal Form; DNF) 的定义。本题以 CNF 为例。

将任意公式转化成 CNF 或 DNF 的方法如下:

(1) 先将公式中的联词化归成 $\neg$, $\wedge$ 与 $\vee$;

(2) 再使用 De Morgan 律将 $\neg$ 移到各个命题变元之前 (“否定深入”);

(3) 最后使用结合律、分配律将公式化归成合取范式或析取范式。

请将

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

化为合取范式。

解答:

注意: 使用重言式进行公式变换, 要使用 ‘≡’, 不能使用 ‘=’。

$$
\begin{aligned}
(P \wedge (Q \to R)) \to S &\equiv (P \wedge (\neg Q \vee R)) \to S \\
&\equiv \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S \\
&\equiv (\neg P) \vee (\neg(\neg Q \vee R)) \vee S \\
&\equiv (\neg P) \vee (Q \wedge \neg R) \vee S \\
&\equiv (\neg P \vee S) \vee (Q \wedge \neg R) \\
&\equiv (\neg P \vee S \vee Q) \wedge (\neg P \vee S \vee \neg R)
\end{aligned}
$$

See CNF&wolframalpha

题目 3 (重言蕴含与推理规则 [5 = 3 + 2 (⋆⋆⋆) 分])

(1) 请使用真值表方法证明

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \models S \vee R.$$

(2) 请使用重言式所代表的推理规则 (可以任意使用规则, 也可以使用你认为显然成立但课堂上没有列出来的规则, 但需要指明每一步使用了哪条规则) 证明

$$\{P \lor Q, P \to R, Q \to S\} \vdash S \lor R.$$

提示: 你可能需要使用

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \lor \beta)$$
$$((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

解答:

(1) 见下表。从表中可以看出, 使得 $P \lor Q$, $P \to R$, $Q \to S$ 同时成立的真值指派 (蓝色) 都满足 $S \lor R$ (红色), 符合重言蕴含的定义 ③ 。

③ 需要给出完整的真值表, 并检查是否符合重言蕴含的定义

P	Q	R	S	$P \lor Q$	$P \to R$	$Q \to S$	$S \lor R$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	F

See also Truth Table@wolframalpha

(2) 第一种解法中将使用如下重言式作为推理规则:

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \lor \beta) \quad \text{(a)}$$
$$((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma) \quad \text{(b)}$$
$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha) \quad \text{(c)}$$

- 问: 考试时是否需要使用这样的书写格式?
- 答: 不一定。但是要尽量给公式编号, 并且写明每一步推理的所依赖的之前的公式的编号。对于不那么显然的推理步骤, 最好还要附带理由, 比如使用了什么推理规则。

$P \lor Q$	(前提)	(1)
$P \to R$	(前提)	(2)
$Q \to S$	(前提)	(3)
$\neg P \to Q$	$(1, a)$	(4)
$\neg P \to S$	$(4, 3, b)$	(5)
$\neg S \to P$	$(5, c)$	(6)
$\neg S \to R$	$(6, 2, b)$	(7)
$S \lor R$	$(7, a)$	(8)

- 问: 考试时是否只能使用纯符号进行推理?
- 答: 不一定。可以夹杂文字描述。只要推理过程清晰即可。

第二种解法使用 (后面介绍的) $\lor$-推理规则:

$P \lor Q$	(前提)	(1)
$P \to R$	(前提)	(2)
$Q \to S$	(前提)	(3)
$P \to (S \lor R)$	(2)	(4)
$Q \to (S \lor R)$	(3)	(5)
$S \lor R$	(1, 4, 5, $\lor$-elim; case analysis)	(6)

其中, (4) 的详细推理过程如下 ((5) 的推理过程类似):

$$
\begin{aligned}
P \to R \quad & (\text{前提}) && \text{(4-1)} \\
[P] \quad & (\text{引入假设}) && \text{(4-2)} \\
R \quad & (4-1, 4-2, \to\text{-elim}) && \text{(4-3)} \\
S \lor R \quad & (4-3, \lor\text{-intro}) && \text{(4-4)} \\
P \to (S \lor R) \quad & (4-2, 4-3, 4-4, \to\text{-intro}) && \text{(4-5)}
\end{aligned}
$$

- 问：考试的时候是否需要写出这些详细的推理过程?
- 答：不一定。只要每一步推理都是较为显然的，就不需要写出它的细节。

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$