

10. 图论: 树 (10-trees)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 05 月 13 日发布作业

2021 年 06 月 12 日发布答案

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] **)

设 T 是树且每个顶点的度数要么为 1, 要么为 k 。请证明 ① ②:

$$n(T) = \ell(k-1) + 2, \quad \text{for some } \ell \in \mathbb{N}.$$

① 我们经常使用 $n(G)$ 表示 G 的顶点数, 很多时候也简写为 n 。

② 提示: 关于顶点度数, 我们有什么定理可用?

证明:

设度数为 k 的顶点数为 m , 则

$$mk + (n - m) = 2n - 2.$$

化简得,

$$n = m(k-1) + 2.$$

得证。 □

题目 2 ([4 分] ***)

给定无向图 G 。请证明: G 是树当且仅当 G 没有 loop 且 G 有唯一的生成树。

证明:

分两个方向证明。

- \implies : 假设 G 是树。显然, G 没有 loop。反设 G 有两个不同的生成树 T_1, T_2 。 T_2 中至少存在一条不在 T_1 中的边, 记为 e 。因此, G 包含 T_1 与 e 。故 G 包含圈。与 G 是树矛盾。
- \impliedby : 假设 G 没有 loop 且有唯一的生成树。下证
 - G 是连通的。因为 G 有生成树, 故 G 是连通的。

- G 是无圈的。反设 G 中有圈, 记为 C 。设 T 是 G 的唯一的生成树。 C 中必存在一条不在 T 中的边, 记为 e 。将 e 加入 T 中, 必形成圈, 记为 C' 。从 C' 中删掉一条边 $e' \neq e$, 得到 G 的一个生成树 $T' = T + e - e'$ 。 $T' \neq T$, 与 T 的唯一性矛盾。□

题目 3 ([4 分] ★★★)

给定无向连通图 G 与 G 中的某条边 e 。请证明: e 是桥 (bridge^③) 当且仅当 e 属于 G 的每个生成树。

证明:

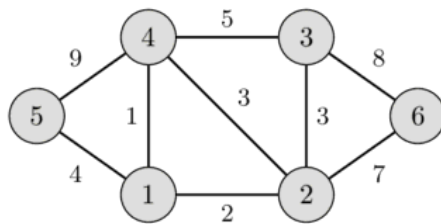
分两个方向证明。

- \Rightarrow : 假设 e 是桥。反设 e 不属于 G 的某个生成树 T 。将 e 加入 T 中, 则形成一个包含 e 的圈。所以, e 不是桥。矛盾。
- \Leftarrow : 假设 e 属于 G 的每个生成树。反设 e 不是桥, 则 e 在某个圈中。因此, 存在某个生成树不包含 e (否则, 使用类似 Cycle Property 的证明, 可以构造出不包含 e 的生成树)。矛盾。□

题目 4 ([4 = 2 + 2 分] ★★)

请分别使用 Kruskal 算法与 Prim 算法 (从顶点 1 开始) 给出下图的最小生成树^④。要求给出边添加的顺序 (在有多种选择时, 优先选择编号较小的顶点)。

^④ 以后你会明白, Kruskal 算法与 Prim 算法的难度不在算法本身, 而在于搞清楚哪个是哪个。



证明:

- Kruskal 算法: 加边顺序为

$\{1, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}$.

- Prim 算法: 加边顺序为^⑤

^⑤ 我没注意到会是一样的

$\{1, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}$.

□

题目 5 ([4 分] ★★★)

设 G 是无向连通带权图, T 是 G 的一个最小生成树。

请证明: T 是 G 的唯一最小生成树当且仅当对于不在 T 中的每一条边 e , e 的权重大于 $T + e$ 所产生的圈中其它每条边的权重。

证明:

分两个方向证明。

- \Rightarrow : 假设 T 是 G 的唯一最小生成树。反设存在一条不在 T 中的边 e , $w(e)$ 不大于 $T + e$ 所产生的圈中其它某条边 e' 的权重。则 $T' = T + e - e'$ 是一个权重不大于 $w(T)$ 的生成树。与 T 的唯一性矛盾。
- \Leftarrow : 反设 G 还有一棵最小生成树 $T' \neq T$ 。 T' 中至少存在一条不在 T 中的边, 记为 e 。将 e 加入 T 中, 形成一个圈 C 。根据前提条件, e 是 C 中权重最大的唯一一条边。根据 Cycle Property, e 不在任何最小生成树中。这与 $e \in T'$ 矛盾。 \square

题目 6 ([-10 分])



解答:

不看的后果会很严重: 省下不少时间。

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...