

3. 数学归纳法 (3-induction)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 3 月 25 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (相识关系 [4 分] **)

假设有 $2n + 1$ 个人。对于任意 n 个人构成的一个小组, 都存在一个人 (不属于这个小组) 与这 n 个人都相识 (假设“相识”是相互的)。

请证明, 存在一个人, 他/她认识其它所有 $2n$ 个人。

证明:

题目 2 (邮资问题 [6 分] **)

请证明, 只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。
(或者: 每个不小于 12 的整数都可以写成若干个 4 或 5 的和。)

证明:

题目 3 (结合律 [4 分] **)

设 $*$ 是一个满足结合律的二元运算符, 即

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

请证明, $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ ($n \geq 3$) 的值与括号的使用方式无关。

证明:

题目 4 (数数 [6 分] ★★★)

令 T_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数的个数, E_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数偶数的个数, O_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数奇数的个数。

规定: 以上所有的 n 位数仅考虑不以 0 开头的数字。例如, $E_1 = 4$ 。

请给出 T_n, E_n, O_n 的计算公式。

解答:

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...