9. 图论: 路径与圈 (9-paths-cycles)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 05 月 06 日发布作业
2021 年 06 月 12 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([3 分] ⋆⋆⋆)
设 $G = (V, E)$ 是无向图 (不一定是简单无向图), 其中 $|E| = m$。请证明[1]，

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

[1] 这也说明了, G 中度数为奇数的顶点数目为偶数。

证明:
每条边贡献了 2 度。所以 [2]，

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

□

[2] 这也被称为 "握手定理"。

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
请证明: 每个长度为奇数的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle) [3] 。

[3] "长度" 就是所含边的条数。

(提示: 可用数学归纳法。如果你使用数学归纳法, 请注意数学归纳法的书写规范。)

证明:
对闭道路的长度 l 作强数学归纳。

基础步骤: $l = 1$。长度为 1 的闭道路即是长度为 1 的圈。显然成立。

归纳假设: 假设每个长度为奇数 $1 \le l < k$ (k 为奇数) 的闭道路都包含一个长度为奇数的圈。

归纳步骤: 考虑长度为奇数 $k > 1$ 的闭道路 W。分两种情况讨论:

- 如果 W 中不包含重复顶点 (除了起点与终点), 则 W 即为长度为奇数的圈。

- 不妨设 W 中包含重复顶点 (除了起点与终点) v. W 可看作两条起点、终点均为 v 的闭道路。其中必有一条的长度为奇数, 记该闭道路为 U, 长度为 u, 有 $1 \le u < k$。根据归纳假设, U 中包含一个长度为奇数的圈。 □

题目 3 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆⋆)
设 G 是一个简单无向图 (undirected simple graph) 且满足

$$\delta(G) \ge k,$$

其中 $k \in \mathbb{N}^+$ 为常数。请证明:

(1) G 包含长度 $\ge k$ 的路径;

(2) 如果 $k \ge 2$, 则 G 包含长度 $\ge k+1$ 的圈。

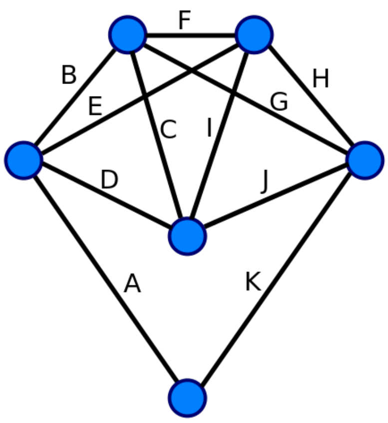
(提示: 想想我们在课上使用了两次的那个证明技巧。)

证明:

(1) 考虑 G 中的一条极大路径 P。设 u 是 P 的一个端点。因为 P 是极大路径, u 的所有邻居顶点都在 P 上。因为 $\deg(u) \ge \delta(G) \ge k$ 且 G 是简单图, 所以除了端点 u, P 至少还包含 k 个顶点。故, P 的长度 $\ge k$。

(2) 假设 $k \ge 2$。设 v 是 u 的邻居顶点中距离 u 最远 (在顺着路径 P 的意义下) 的顶点。则边 $\{u, v\}$ 以及路径 P 中从 u 到 v 的一段子路径构成了长度 $\ge k+1$ 的圈。
□

题目 4 ([4 = 1 + 2 + 1 分] ⋆⋆)
考虑下图, 记为 G。



(1) G 是否是欧拉图? 请说明理由。

(2) 如果是欧拉图, 请将其分解为若干圈的组合, 并给出一个欧拉回路 [4]; 如果不是欧拉图, 至少需要添加几条边才能使得它成为欧拉图? (可以自行为顶点编号, 也可以使用图上边的编号描述回路。)

(3) (本小题与 G 无关) 假设某图不是欧拉图, 但含有欧拉迹, 请用一两句话说明如何找出图中的欧拉迹。

[4] 注意: 在课上, 我们用了英文术语 "Eulerian Cycle"。有的教材上使用 "Eulerian Circuit"。 后者更严谨一些, 因为它可能包含重复的顶点。

证明:

(1) G 是欧拉图。因为 G 中每个顶点的度数都是偶数。

(2) 可将 G 分解成如下三个圈的组合：

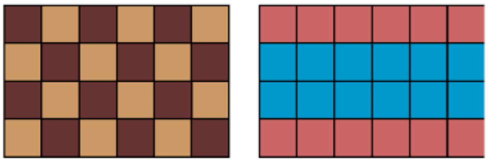
- $A-B-F-H-K$
- $C-G-J$
- $D-E-I$

一个欧拉回路：$A-B-C-D-E-F-G-H-I-J-K$ [5]。

[5] 嗯，一定是这样

(3) 该图，记为 G，有且仅有两个奇度顶点，记为 u，v。连接 u，v，得到欧拉图 G'。求 G' 的一条欧拉回路，删除边 $\{u,v\}$，即得原图 G 的一条欧拉迹。 □

题目 5 ([5 分] ★★★★)
请证明：对于 $4\times n$ 的棋盘，不存在一种走法，使得“馬”可以踏遍每个格子一次并回到出发点。



证明：
考虑左图。删除中间两行中的 n 个深色格子，则上下两行中的 n 个浅色格子成为孤立点，而剩下的 $2n$ 个格子至少包含一个连通分支。因此，该图不存在哈密顿回路。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写（也可以发邮件或者使用“教学立方”）

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$