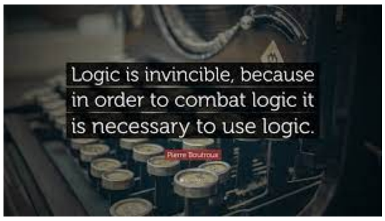
2. 一阶谓词逻辑 (2-predicate-logic)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 03 月 18 日发布习题
2021 年 04 月 02 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。



1　作业 (必做部分)

题目 1 (命题逻辑: 形式化描述与推理 [3 分] ⋆⋆)
张三说李四在说谎, 李四说王五在说谎, 王五说张三、李四都在说谎。请问, 这三人到底谁在说真话, 谁在说谎? (要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

解答:
我们使用 Z、L、W 分别表示 “张三在说真话”、“李四在说真话” 与 “王五在说真话”。题目中的三个论断可以形式化为 [1]：

[1] 注意: 这里是 $\leftrightarrow$, 不止是 $\rightarrow$。

$$Z \leftrightarrow \neg L \tag{1}$$
$$L \leftrightarrow \neg W \tag{2}$$
$$W \leftrightarrow \neg Z \land \neg L \tag{3}$$

在如下推理中, 我们分别考虑 Z、L、W 成立的情况。如果某种情况可以推出矛盾 ($\bot$), 则说明相应情况不成立。

- Case I: 引入假设 $[Z]$, 可推出矛盾, 故 $\neg Z$。

$$[Z] \quad (\text{引入假设}) \tag{4}$$
$$\neg L \quad ((1), (4)) \tag{5}$$
$$W \quad ((2), (5)) \tag{6}$$
$$\neg Z \land \neg L \quad ((3), (6)) \tag{7}$$
$$\neg Z \quad (\land\text{-elim}, (7)) \tag{8}$$
$$\bot \quad ((4), (8)) \tag{9}$$

- Case II: 类似于 Case I, 引入假设 $[W]$, 同样可推出矛盾, 故 $\neg W$。

- CASE III: 引入假设 L, 无矛盾, 得出 $\neg Z \wedge \neg W \wedge L$。

$$
\begin{aligned}
&[L] && (\text{引入假设}) && (4)\\
&\neg Z && ((1),(4)) && (5)\\
&\neg W && ((2),(4)) && (6)\\
&\neg(\neg Z \wedge \neg L) && ((3),(6)) && (7)\\
&Z \vee L && ((7)) && (8)\\
& && && (9)
\end{aligned}
$$

综上, 有 $\neg Z$, $\neg W$, L。

题目 2 (一阶谓词逻辑: 形式化描述与推理 [3 分] ⋆⋆)
给定如下“前提”, 请判断“结论”是否有效, 并说明理由。请使用一阶谓词逻辑的知识解答。(要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

前提:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;

(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧 (幸亏如此)。

解答:
定义谓词:

- $A(x)$: x 喜欢美剧;
- $K(x)$: x 喜欢韩剧;
- $J(x)$: x 喜欢抗日神剧。

题目中的三个论断可以形式化为:

- $\forall x.\ A(x) \vee K(x)$;
- $\forall x.\ J(x) \to \neg A(x)$;
- $\exists x.\ \neg K(x)$

先示范纯形式化推理:

$$\forall x.\ A(x) \vee K(x) \quad \text{(前提)} \tag{1}$$

$$\forall x.\ J(x) \to \neg A(x) \quad \text{(前提)} \tag{2}$$

$$\exists x.\ \neg K(x) \quad \text{(前提)} \tag{3}$$

$$[x_0] \quad [\neg K(x_0)] \quad \text{(引入变量与假设)} \tag{4}$$

$$A(x_0) \vee K(x_0) \quad (\forall\text{-elim}, (1), (4)) \tag{5}$$

$$A(x_0) \quad ((4), (5)) \tag{6}$$

$$J(x_0) \to \neg A(x_0) \quad (\forall\text{-elim}, (2), (4)) \tag{7}$$

$$\neg J(x_0) \quad ((6), (7)) \tag{8}$$

$$\exists x.\ \neg J(x) \quad (\exists\text{-intro}, (8)) \tag{9}$$

$$\exists x.\ \neg J(x) \quad (\exists\text{-elim}, (3) - (8)) \tag{10}$$

在作业与考试时，只要推理清晰，不一定要严格遵守纯形式推理的要求。以下也是可以接受的书写过程 ②：
根据 (3)，不妨设 $\neg K(x)$ 对 x_0 成立:

$$\neg K(x_0) \tag{4}$$

根据 (1)，有

$$A(x_0) \vee K(x_0) \tag{5}$$

根据 (4) 与 (5)，有

$$A(x_0) \tag{6}$$

根据 (2)，有

$$J(x_0) \to \neg A(x_0) \tag{7}$$

根据 (6) 与 (7)，有

$$\neg J(x_0) \tag{8}$$

因此，$\exists x.\ \neg J(x)$ 成立。

作为对比，我们再给出一种无法接受的解答:
Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum. 因此，易见 $\exists x.\ \neg J(x)$ 成立。

问：第 (4) 步中的 $\neg K(x_0)$ 为什么是个假设，而不是根据第 (3) 步推导出来的一个命题？

答：当前提中有 $\exists x.\ P(x)$ 时，我们通常会在证明中这样做：假设 $P(x)$ 对 x_0 成立，然后基于此进行推导。第 (4) 步正是在做这件事。

问：当前提中有 $\forall x.\ P(x)$ 时，我们通常会引入变量 $[x_0]$，并得出 $P(x_0)$。这里，$P(x_0)$ 为什么不是一个假设？

答：当前提中有 $\forall x.\ P(x)$ 时，我们通常会在证明中这样做：任取 变量 x_0，则有 $P(x)$ 对 x_0 成立，然后基于此进行推导。这里，$P(x_0)$ 并非假设。

问：第 (9) 步已经得到了 $\exists x.\ \neg J(x)$，为什么不“见好就收”呢？

答：第 (9) 步是在第 (4) 步中引入的假设 $[\neg K(x_0)]$ 的基础上得到的，此时该假设还没有释放。到第 (9) 步，我们完成了 $\exists$-elim 规则的横线上方的部分，第 (10) 步便可以运用 $\exists$-elim 规则得到横线下方的结论，这样假设也被释放了。(在平时作业与考试中，我们也可以不用这么严格，参见下面一种书写格式。)

② 公式编号与每条公式的推理依据要写清楚

题目 3 (一阶谓词逻辑: 形式化描述与推理 [4 分] ⋆⋆)
请使用一阶谓词逻辑公式描述以下两个定义, 并从逻辑推理的角度说明这两种定义之间是否有强弱之分。(要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

A function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is called

(1) *pointwise continuous* (连续的) if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(2) *uniformly continuous* (一致连续的) if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x-y| < \delta$, we have that $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.

解答:
形式化表示如下:

(1)

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+.\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon. \qquad (1)$$

(2)

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+.\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+.\ \forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon. \qquad (2)$$

为了简便, 也可以统一将论域限制在实数集 $\mathbb{R}$ 上。这样就可以将公式写成

$$\forall x.\ \forall \epsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ \forall y.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

问: $\forall \epsilon \in \mathbb{R} \land \epsilon > 0.\ (\dots)$ 是否符合语法?

答: 我也不能确定。一般来说, 这种简记法要尽可能简短。可以写成 $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$。

"$\forall x \in \mathbb{R}.\ \forall y \in \mathbb{R}.$" 也可以简写成 "$\forall x, y \in \mathbb{R}.$"。注意, 必须是一样的量词符号才可以这样简写。

下面从逻辑的角度讨论 (1) 与 (2) 的强弱关系。

首先, 根据重言式

$$\forall x.\ \forall y.\ \alpha \leftrightarrow \forall y.\ \forall x.\ \alpha,$$

(1) 等价于

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+.\ \forall x \in \mathbb{R}.\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+.\ \forall y \in \mathbb{R}.\ |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

其次, 根据重言式

$$\exists x.\ \forall y.\ \alpha \to \forall y.\ \exists x.\ \alpha,$$

可知 (2) 不弱于 (1)。

最后, 由于 ③

$$\forall y.\ \exists x.\ \alpha \nvdash \exists x.\ \forall y.\ \alpha,$$

可知 (2) (严格) 强于 (1)。

作为例子, $f(x) = x^2$ 是连续函数, 但不是一致连续函数。

③ 思考: 为什么? 举例说明。

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ⋯