

## 14. 群论: 子群 (14-subgroup)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 6 月 11 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] \*\*)

设  $H \leq G$ 。请证明,

$$aH = H \iff a \in H \iff aH \leq G$$

证明:

---

题目 2 ([5 = 2 + 3 分] \*\*\*)

设  $\phi$  是从群  $G$  到  $G'$  的同态映射。请证明,

(1)

$$H \leq G \implies \phi(H) \leq G'.$$

(2)

$$H \triangleleft G \implies \phi(H) \triangleleft G'.$$

证明:

---

题目 3 ([3 分] \*\*)

请计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

并将结果写成 (不相交) 轮换的乘积。

解答:

#### 题目 4 ([3 分] ★★★)

考虑如下定义。

##### 定义 1 (元素的阶)

设  $G$  是有限群,  $e$  为  $G$  的单位元,  $a \in G$ 。使  $a^r = e$  成立的最小正整数称为  $a$  的阶 (order) <sup>①</sup>, 记作  $\text{ord } a = r$ 。

<sup>①</sup> 注意, 群的阶指的是集合  $G$  的大小, 即  $|G|$ 。

设  $G$  是有限群。请证明,

$$\forall a \in G. (\text{ord } a) \mid |G|.$$

证明:

#### 题目 5 ([5 = 2 + 1 + 2 分] ★★★)

考虑从乘法群  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  到乘法群  $\mathbb{R}^+$  的函数  $f: x \mapsto |x|$ 。

- (1) 请证明,  $f$  是从  $\mathbb{R}^*$  到  $\mathbb{R}^+$  的同态。
- (2) 求  $\text{Ker } \phi$ 。
- (3) 套用群同态基本定理, 给出相应结论, 并用一两句话解释该结论。

证明:

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...