

6. 集合: 函数 (6-function)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 04 月 15 日发布作业

2021 年 05 月 01 日发布答案

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

若有疑问, 可到 <https://github.com/courses-at-nju-by-hfwei/discrete-math-problem-sets/discussions> 讨论。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (等价关系 [3 分] ★★)

设 R 是 X 上的等价关系。请证明,

$$\forall a, b \in X. ([a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb).$$

证明:

- 先证 $[a]_R = [b]_R \implies aRb$:
假设 $[a]_R = [b]_R$ 。首先, $b \in [b]_R$, 因此 $b \in [a]_R = [b]_R$, 故 aRb 。
- 再证 $aRb \implies [a]_R = [b]_R$:
假设 aRb 。任取 x ,

$$x \in [a]_R \tag{1}$$

$$\iff aRx \tag{2}$$

$$\iff bRx \quad (\because aRb) \tag{3}$$

$$\iff x \in [b]_R \tag{4}$$

因此, $[a]_R = [b]_R$ 。 □

题目 2 (函数与等价关系 [7 = 3 + 4 分] ★★★)

设 $f: X \rightarrow Y$ 是满射。定义 X 上的二元关系 R 为 $(x, y) \in R$ 当且仅当 $f(x) = f(y)$ 。请证明,

- R 是 X 上的等价关系。
- 定义 $h \subseteq (X/R) \times Y$ 为 $h([x]_R) = f(x)$ 。请证明, h 是从商集 X/R 到 Y 的函数, 且是满射。

证明:

(1) 只需证

- R 是自反的。

任取 $x \in X$,

$$f(x) = f(x) \implies (x, x) \in R.$$

- R 是对称的。

任取 $x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\in R \\ \implies f(x_1) &= f(x_2) \\ \implies f(x_2) &= f(x_1) \\ \implies (x_2, x_1) &\in R. \end{aligned}$$

- R 是传递的。

任取 $x_1, x_2, x_3 \in X$,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\in R \wedge (x_2, x_3) \in R \\ \implies f(x_1) &= f(x_2) \wedge f(x_2) = f(x_3) \\ \implies f(x_1) &= f(x_3) \\ \implies (x_1, x_3) &\in R. \end{aligned}$$

(2) 要证 h 是函数, 只需证

- $\forall S \in X/R. \exists y \in Y. h(S) = y$ 。

设 $X/R = [x]_R$ 。取 $y = f(x)$ 即可。

- $\forall S \in X/R. \exists y_1, y_2 \in Y. ((h(S) = y_1 \wedge h(S) = y_2) \implies y_1 = y_2)$ 。

根据 h 的定义,

$$\begin{aligned} \exists x_1 \in X. ([x_1]_R = S \wedge f(x_1) = y_1), \\ \exists x_2 \in X. ([x_2]_R = S \wedge f(x_2) = y_2). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} [x_1]_R &= [x_2]_R \\ \implies (x_1, x_2) &\in R \\ \implies f(x_1) &= f(x_2) \quad (\because \text{第一题结论}) \\ \implies y_1 &= y_2 \end{aligned}$$

要证 h 是满射, 只需证 $\forall y \in Y. \exists S \in X/R. h(S) = y$ 。

因为 f 是满射, 对于任意 $y \in Y$, 存在 x_0 , 使得 $f(x_0) = y$ 。故, 取 $S = [x_0]_R$ 即可。 \square

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...