

离散数学 (0-Overview)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 03 月 04 日发布习题

2021 年 04 月 18 日发布答案

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

- 若有疑问, 可在 <https://github.com/courses-at-nju-by-hfwei/discrete-math-problem-sets/discussions/new> 中讨论。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (防疫工作, 不能大意 [4 分])

近期突发一种流感, 症状极其严重, 受感染的学生会无可遏制地进行编程与刷题等危险行为。假设 n^2 位学生坐在座位按 $n \times n$ 网格状排列的教室里。感染正在迅速扩散:

- 如果某学生已被感染, 那么他/她就不可能痊愈了;
- 如果某学生至少与 2 个已经感染的学生座位相邻 (前、后、左、右; 不包括对角), 那么该学生也会被感染。

请证明: 如果初始状态有 $< n$ 个学生感染了流感, 那么至少有一个学生永远不会被感染。

证明:

将相邻受感染的区域看作一个整体, 考虑受感染区域的边界长度^①。

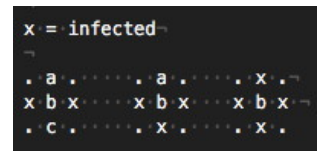
假设初始状态有 $< n$ 个学生感染, 则受感染区域的边界长度 $\leq 4(n-1)$ 。如果所有学生都被感染, 则受感染区域的边界长度为 $4n$ 。下面我们证明, 在不断感染的过程中, 受感染区域的边界长度不会增加。因为 $4(n-1) < 4n$, 所以至少有一个学生不会被感染。

^① <https://math.stackexchange.com/a/1829606>

引理

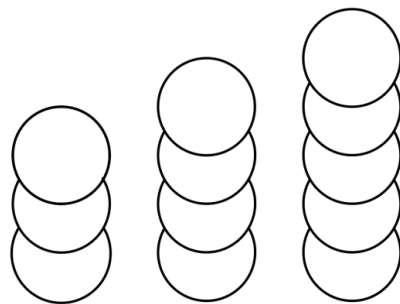
在不断感染的过程中, 受感染区域的边界长度不会增加。

根据被感染的条件, 右图中的 b 周围至少有两个感染源 (用 \times 表示)。因此, b 被感染共有三种情况。对这三种情况分别分析, 即知引理成立。 \square



题目 2 (Nim Game [6 = 1 + 2 + 2 + 1 分])

Nim 是一个双人游戏 (你可以在课堂上分享的 Ludii Player 里找到它)。游戏开始时, 两人面前放着几堆石头, 两个玩家轮流操作, 每次选择从某个石堆里拿走一块或多块石头。最后没有石头可拿的那个玩家输掉比赛。



本题将引导大家寻找该游戏的必胜策略。

考虑对石头堆里的石头个数 (二进制表示下的; 不足时高位补 0) 做异或操作 (\oplus), 结果称为 Nim 和。

- (1) 请证明: 若 Nim 和为 0, 则任意一次移动都会导致 Nim 和不为 0。
- (2) 请证明: 若 Nim 和不为 0, 则必然存在一个石头堆, 它的石头数大于其它所有石头堆的 Nim 和。(统一在二进制或十进制下进行大小比较)
- (3) 请证明: 若游戏开始时, Nim 和不为 0, 则先手有必胜策略。
- (4) 在只有两堆石头的情况下, 请给出某玩家有必胜策略的充要条件与他/她的必胜策略。

证明:

- (1) 假设移动了第 i 堆石头, 则第 i 堆石头数 n_i 的二进制表示至少有一位发生了变化。所以, Nim 和不再为 0。
- (2) 假设 Nim 和不为 0, 则 Nim 和中至少有一位为 1。设 Nim 和共 n 位, 且最高位的 1 在第 i 位 (从左向右计数), 则 Nim 和可表示为

$$\underbrace{0 \dots 0}_{n-i} 1 \underbrace{\dots}_{i-1}$$

由于 Nim 和的第 i 位为 1, 则至少存在一堆石头 (任取一个这样的石头堆, 记为 S), 它的石头数的二进制表示的第 i 位为 1。下面说明 S 的石头数 (记其二进制表示为 n_S) 大于其它所有石头堆的 Nim 和 (记为 $n_{\bar{S}}$), 理由如下:

- 由于 Nim 和的前 $n-i$ 位为 0, 所以 n_S 的前 $n-i$ 位与 $n_{\bar{S}}$ 的前 $n-i$ 位相同;
 - 由于 Nim 和的第 i 位为 1, n_S 的第 i 位为 1, 而 $n_{\bar{S}}$ 的第 i 位为 0。
- (3) 先手的必胜策略是: 每次都选择满足 (2) 中条件的石头堆, 移动若干石头, 使得 Nim 和为 0。
 - (4) 如果初始时两堆石头的数目不同, 则先手有必胜策略: 每次均移动数目较多的那堆石头, 使得两堆石头数目相等。相应地, 如果初始时两堆石头的数目相等, 则后手有必胜策略。□

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见

- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...