

8. 集合: 无穷 (8-infinity)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 04 月 29 日发布作业

2021 年 06 月 06 日发布答案

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([3 分] ★★★)

考虑由所有 0, 1 串构成的集合 $(\{0, 1, 111, 01010101010, 101010101, \dots\})$ 。请问, 该集合是否是可数集合, 请给出理由。

证明:

由 Cantor 的对角线论证法易知该集合是不可数的 ^①。

□

^① 有同学认为该集合是可数的, 理由是可以将 0,1 串解释为二进制表示的自然数。这种映射的问题在于, 有的 0,1 串, 比如 11111..., 是发散的, 对应于 ∞ , 而 ∞ 不是自然数。

题目 2 ([4 分] ★★★)

考虑如下命题:

“存在可数无穷多个两两不相交的非空集合, 它们的并是有穷集合。”

请问, 该命题是否正确。如果正确, 请给出例子。如果不正确, 请给出 (反面的) 证明。

证明:

该命题不正确。反设它们的并是有穷集合, 记为 A 。设 $|A| = n$, 则 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ 。因此不可能存在 A 的可数无穷多个两两不相交的非空集合。矛盾。

□

题目 3 ([3 分] ★★★)

请自行查找并阅读 Cantor-Schröder-Bernstein 定理的某个证明, 理解它, 放下你手头的资料 ^②, 然后尝试自己写出这个证明 ^③。

以下证明供参考 ^④: [Schröder-Bernstein theorem @ wiki](#)

^② 不要偷看哦

^③ 是不是又偷看了 (为什么明明懂了, 但就是表达不出来?)

^④ pdf 版本见 “8-infinity.zip” 压缩包

证明:

略。

□

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...