

9. 图论: 路径与圈 (9-paths-cycles)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 5 月 6 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([3 分] ★★★)

设 $G = (V, E)$ 是无向图 (不一定是简单无向图), 其中 $|E| = m$ 。请证明^①,

^① 这也说明了, G 中度数为奇数的顶点数目为偶数。

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

证明:

题目 2 ([4 分] ★★★)

请证明: 每个长度为奇数的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle) ^②。

^② “长度” 就是所含边的条数。

(提示: 可用数学归纳法。如果你使用数学归纳法, 请注意数学归纳法的书写规范。)

证明:

题目 3 ([4 = 2 + 2 分] ★★★)

设 G 是一个简单无向图 (undirected simple graph) 且满足

$$\delta(G) \geq k,$$

其中 $k \in \mathbb{N}^+$ 为常数。请证明:

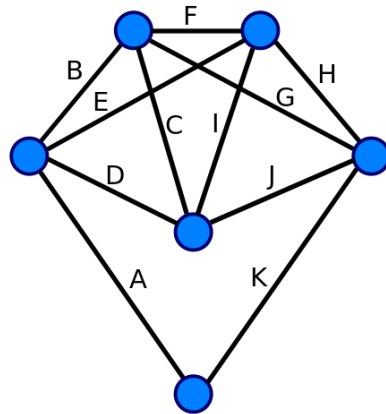
- (1) G 包含长度 $\geq k$ 的路径;
- (2) 如果 $k \geq 2$, 则 G 包含长度 $\geq k + 1$ 的圈。

(提示: 想想我们在课上使用了两次的那个证明技巧。)

证明:

题目 4 ([4 = 1 + 2 + 1 分] **)

考虑下图, 记为 G 。



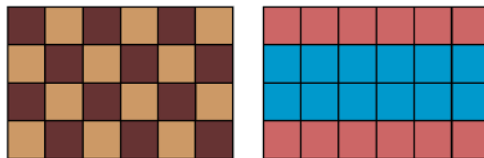
- (1) G 是否是欧拉图? 请说明理由。
- (2) 如果是欧拉图, 请将其分解为若干圈的组合, 并给出一个欧拉回路^③; 如果不是欧拉图, 至少需要添加几条边才能使得它成为欧拉图? (可以自行为顶点编号, 也可以使用图上边的编号描述回路。)
- (3) (本小题与 G 无关) 假设某图不是欧拉图, 但含有欧拉迹, 请用一两句话说明如何找出图中的欧拉迹。

^③ 注意: 在课上, 我们用了英文术语 “Eulerian Cycle”。有的教材上使用 “Eulerian Circuit”。后者更严谨一些, 因为它可能包含重复的顶点。

证明:

题目 5 ([5 分] ***)

请证明: 对于 $4 \times n$ 的棋盘, 不存在一种走法, 使得 “馬” 可以踏遍每个格子一次并回到出发点。



证明:

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...