13. 群论: 基本概念 (13-group)

姓名: 魏恒峰　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

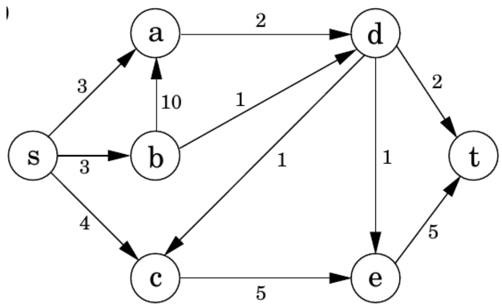
评分: ______　**评阅:** ______

2021 年 06 月 04 日发布作业
2021 年 06 月 23 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆)
请给出以下网络的一个最大流与一个最小割。要求给出 Ford-Fulkerson Method 运行过程。



证明:

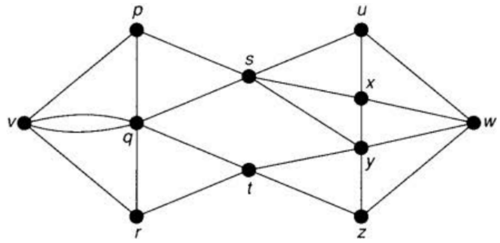
题目 2 ([5 = 1 + 1 + 3 分] ⋆ ⋆ ⋆⋆)
考虑下面的定理:

定理 1 (不能告诉你名字的某个著名定理)
设 $G = (V, E)$ 是无向连通图, $v, w \in V$ 是不同的两个顶点。则 v, w 之间的边不相交的 (edge-disjoint) ① 路径的最大条数等于最小 vw-边割集 ② 的大小。

① 设 P_1, P_2 是两条 v、w 间的路径。如果 P_1 与 P_2 没有公共边, 则 P_1、P_2 是 v, w 之间的边不相交的路径。
② 设 $F \subseteq E$ 为集。如果 G 删除 F 后, v 与 w 不再连通, 则称 F 是 vw-边割集。

(1) 考虑图中的 v, w 顶点。请给出 v、w 间的一个最大边不相交的路径集合。

(2) 考虑图中的 v, w 顶点。请给出一个最小的 vw-边割集。



(3) 请使用最大流-最小割定理证明上述定理 ③ 。

③ 恭喜! 你刚刚证明了图论中的一个著名定理。

证明:

题目 3 ([3 分] ⋆⋆)
在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 规定运算 $\oplus$ 如下:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \oplus b = a + b - 2.$$

请证明: $(\mathbb{Z}, \oplus)$ 构成群。

证明:
只需验证:

封闭性*:* 显然 $a \oplus b \in \mathbb{Z}$。

结合性*:*

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + b - 2) \oplus c \\ &= a + b - 2 + c - 2 \\ &= a + (b + c - 2) - 2 \\ &= a \oplus (b \oplus c)\end{aligned}$$

单位元*:* 单位元为 2。

$$a \oplus 2 = a + 2 - 2 = a = 2 \oplus a.$$

逆元*:* a 的逆元是 $4 - a$。

$$a \oplus (4 - a) = a + (4 - a) - 2 = 2 = (4 - a) \oplus a.$$

□

题目 4 ([5 分] ⋆⋆⋆)
设 G 是群。请证明: 如果 $\forall x \in G.\ x^2 = e$, 则 G 是交换群。

证明:
对于任意 $a, b \in G$,

$$\begin{aligned}a^2 = e &\implies a = a^{-1}, \\ b^2 = e &\implies b = b^{-1}, \\ (ab)^2 = e &\implies ab = (ab)^{-1}.\end{aligned}$$

因此,

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

因此, G 是交换群。 □

题目 5 ([3 分] ⋆⋆)
请求出 3^{83} 的最后两位数 ④ 。要求给出计算过程。

④ https://www.wolframalpha.com/input/?i=3%5E83

证明:
首先 $(3,100)=1$, $\phi(100)=\phi(2^2 5^2)=100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=40$。根据 Euler's Theorem,

$$3^{40}=1 \mod 100.$$

其次,

$$3^{83}=3^{2\times 40+3}=(3^{40})^2\cdot 3^3.$$

因此,

$$3^{83} \mod 100 = 27 \mod 100.$$ □

即 3^{83} 的最后两位数是 27。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ···