

### 3. 数学归纳法 (3-induction)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 03 月 25 日发布习题

2021 年 04 月发布答案

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

#### 题目 1 (相识关系 [4 分] \*\*)

假设有  $2n + 1$  个人。对于任意  $n$  个人构成的一个小组, 都存在一个人 (不属于这个小组) 与这  $n$  个人都相识 (假设“相识”是相互的)。

请证明, 存在一个人, 他/她认识其它所有  $2n$  个人。

证明:

这题只有两星? 我感到我的智商遭到了碾压。

---

#### 题目 2 (邮资问题 [6 分] \*\*)

请证明, 只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。  
(或者: 每个不小于 12 的整数都可以写成若干个 4 或 5 的和。)

证明:

对邮资面额  $n$  作归纳。

**基础步骤:**  $n = 12$  时, 可由三张 4 分邮票组成。

**归纳假设:** 假设邮资为任意  $n \leq k$  的邮票都可以由 4 分与 5 分邮票组成。

**归纳步骤:** 考虑  $n = k + 1$  分的邮资。以下分两种情况讨论:

- 假设  $k$  分邮资的某个组合中含有 4 分的邮票, 则将该组合中某张 4 分的邮票换成 5 分的邮票, 即可组成  $k + 1$  分邮资。
  - 假设  $k$  分邮资的任何组合中仅包含 5 分的邮票。因为  $n \geq 12$ , 所以组合中至少包含 3 张 5 分的邮票。只需将这 3 张 5 分的邮票换成 4 张 4 分的邮票, 即可组成  $k + 1$  分邮资。  $\square$
-

**题目 3 (结合律 [4 分] \*\*)**

设  $*$  是一个满足结合律的二元运算符, 即

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

请证明,  $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$  ( $n \geq 3$ ) 的值与括号的使用方式无关。

**证明:**

我们证明以下引理 <sup>①</sup>:

<sup>①</sup> 首先要明确什么叫“与括号的使用方式无关”?

**引理 1**

对于任何包含  $n \geq 3$  个操作数的式子

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_n,$$

不论以何种方式加括号, 它的值都等于 <sup>②</sup>

<sup>②</sup> 这就是“与括号的使用方式无关”的含义。

$$(((a_1 * a_2) * a_3) \cdots * a_{n-1}) * a_n.$$

对操作数的个数  $n \geq 3$  作强数学归纳。

**基础步骤:**  $n = 3$ 。由于  $*$  满足结合律:

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3),$$

$a_1 * a_2 * a_3$  的值与括号使用方式无关。

**归纳假设:** 假设对于任何包含  $n \leq k$  个操作数的式子, 引理都成立。

**归纳步骤:** 考虑包含  $n = k + 1$  个操作数的式子

$$A = a_1 * a_2 * \cdots * a_{n+1}.$$

考虑最后一次  $*$  的位置, 它将式子分成两部分:

$$A = (a_1 * \cdots * a_i) * (a_{i+1} * \cdots * a_{n+1}).$$

其中,  $i \leq n$ 。根据归纳假设,

$$A = (a_1 * \cdots * a_i) * \left( (((a_{i+1} * a_{i+2}) * \cdots) * a_n) * a_{n+1} \right).$$

将  $((a_{i+1} * a_{i+2}) * \cdots)$  看作一个整体, 则根据  $*$  的结合性,

$$A = (a_1 * \cdots * a_i * \left( (((a_{i+1} * a_{i+2}) * \cdots) * a_n) \right)) * a_{n+1}.$$

再次根据归纳假设 <sup>③</sup>,

<sup>③</sup> 对  $(\cdots) * a_{n+1}$  的  $(\cdots)$  部分使用归纳假设

$$A = ((a_1 * a_2) * \cdots) * a_{n+1}.$$

□

**题目 4 (数数 [6 分] \*\*\*)**

令  $T_n$  表示相邻位数字不相同的  $n$  位数的个数,  $E_n$  表示相邻位数字不相同的  $n$  位数偶数的个数,  $O_n$  表示相邻位数字不相同的  $n$  位数奇数的个数。

规定: 以上所有的  $n$  位数仅考虑不以 0 开头的数字。例如,  $E_1 = 4$ 。

请给出  $T_n, E_n, O_n$  的计算公式。

**解答:**

(1) 因为不允许以 0 开头, 且相邻位数字不同, 所以

$$T_n = 9^n.$$

(2) 对位数  $n$  作归纳。

**基础步骤:**  $n = 1$  时,  $E_1 = 4, O_1 = 5$ 。

**归纳步骤:** 考虑  $n \geq 2$  的情况。计算  $E_n$ 。考虑两种情况: 如果第  $(n-1)$  位为偶数, 则第  $n$  位有 4 种情况; 如果第  $(n-1)$  位为奇数, 则第  $n$  位有 5 种情况。因此,

$$E_n = 4E_{n-1} + 5O_{n-1}.$$

由于  $E_{n-1} + O_{n-1} = T_{n-1} = 9^{n-1}$ , 故有

$$E_n = 4E_{n-1} + 5(9^{n-1} - E_{n-1}).$$

解方程得, <sup>④</sup>

$$E_n = \frac{9^n + (-1)^n}{2}.$$

<sup>④</sup> 展开, 看符号变化, 便知要分奇偶。

因此, <sup>⑤</sup>

$$O_n = \frac{9^n - (-1)^n}{2}.$$

<sup>⑤</sup>  $|E_n - O_n| = 1$

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...