14. 群论: 子群 (14-subgroup)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 06 月 11 日发布作业
2021 年 06 月 23 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆)
设 $H \le G$。请证明,

$$aH = H \iff a \in H \iff aH \le G$$

证明:
(1) 先证明 $aH = H \iff a \in H$。

- 先证明 $aH = H \implies a \in H$。
  假设 $aH = H$。
  $$a = ae \in aH = H.$$
- 再证明 $a \in H \implies aH = H$。
  假设 $a \in H$。首先, 由于 $H \le G$ 满足封闭性, 所以 $aH \subseteq H$。其次, 对于任意 $h \in H$, 由于 $H \le G$ 满足封闭性, 所以 $a^{-1}h \in H$ 且
  $$h = a(a^{-1}h) \in aH.$$
  因此, $H \subseteq aH$。

(2) 再证明 $a \in H \iff aH \le G$。

- 先证明 $a \in H \implies aH \le G$。
  根据 (1),
  $$a \in H \implies aH = H \implies aH \le G.$$
- 再证明 $aH \le G \implies a \in H$。
  $$aH \le G \implies e \in aH \implies a^{-1} \in H \implies a \in H.$$ □

题目 2 ([5 = 2 + 3 分] ⋆⋆⋆)
设 ϕ 是从群 G 到 G' 的同态映射。请证明,

(1)

$$H \le G \implies \phi(H) \le G'.$$

(2)

$$H \triangleleft G \implies \phi(H) \triangleleft \phi(G).$$

证明:

(1) 记 G' 的单位元为 e'。$e' \in \phi(H)$, 所以 $\phi(H) \neq \emptyset$。因为 $H \le G$, 所以对任意的 $h_1, h_2 \in H$, 有

$$h_1 h_2^{-1} \in H.$$

因此,

$$\phi(h_1)(\phi(h_2)^{-1}) = \phi(h_1)\phi(h_2^{-1}) = \phi(h_1 h_2^{-1}) \in \phi(H).$$

所以, $\phi(H) \le G'$。

(2) 由 (1) 知,

$$H \subseteq G \wedge \phi(H) \le G'.$$

故,

$$\phi(H) \le \phi(G).$$

对任意 $g \in G$, $h \in H$, 因为 $H \triangleleft G$,

$$ghg^{-1} \in H.$$

因此,

$$\phi(g)\phi(h)(\phi(g))^{-1} = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(ghg^{-1}) \in \phi(H).$$

所以, $\phi(H) \triangleleft \phi(G)$。 □

题目 3 ([3 分] ⋆⋆)
请计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

并将结果写成 (不相交) 轮换的乘积。

解答:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3\ 5)$$

题目 4 ([3 分] ⋆⋆⋆)
考虑如下定义。

定义 1 (元素的阶)
设 G 是有限群, e 为 G 的单位元, $a \in G$。使 $a^r = e$ 成立的最小正整数称为 a 的阶 (order) [1], 记作 $\text{ord}\, a = r$。

[1] 注意, 群的阶指的是集合 G 的大小, 即 $|G|$。

设 G 是有限群。请证明,

$$\forall a \in G.\ (\text{ord } a)\big||G|.$$

证明:
令 $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^r = e\}$。易知, $\langle a \rangle \le G$。又有 $|\langle a \rangle| = \text{ord } a$。根据 Lagrange's Theorem,

$$(\text{ord } a)\big||G|. \qquad \square$$

题目 5 ([5 = 2 + 1 + 2 分] ⋆⋆⋆)
考虑从乘法群 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 到乘法群 $\mathbb{R}^+$ 的函数 $f : x \mapsto |x|$。

(1) 请证明, f 是从 $\mathbb{R}^*$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的同态。

(2) 求 Ker ϕ。

(3) 套用群同态基本定理, 给出相应结论, 并用一两句话解释该结论。

证明:
(1)

$$f(xy) = |xy| = |x||y| = f(x)f(y),$$

因此 f 是从 $\mathbb{R}^*$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的同态。

(2)

$$\text{Ker } \phi = \{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) = 1\} = \{1, -1\}.$$

(3) $\phi(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^+$。根据群同态基本定理,

$$\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^+.$$

对于任意 $x > 0$, 陪集 $\{x, -x\}$ 被 ϕ 映射到 x。这说明在只考虑绝对值的情况下, x 与 $-x$ 是一样的。 $\square$

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$