

## 10. 图论: 树 (10-trees)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 5 月 13 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 ([4 分] \*\*)

设  $T$  是树且每个顶点的度数要么为 1, 要么为  $k$ 。请证明 ① ②:

$$n(T) = \ell(k-1) + 2, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

① 我们经常使用  $n(G)$  表示  $G$  的顶点数。

② 提示: 关于顶点度数, 我们有什么定理可用?

证明:

---

### 题目 2 ([4 分] \*\*\*)

给定无向图  $G$ 。请证明:  $G$  是树当且仅当  $G$  没有 loop 且  $G$  有唯一的生成树。

证明:

---

### 题目 3 ([4 分] \*\*\*)

给定无向连通图  $G$  与  $G$  中的某条边  $e$ 。请证明:  $e$  是桥 (bridge ③) 当且仅当  $e$  属于  $G$  的每个生成树。

③ bridge 也称为 cut-edge (割边)。

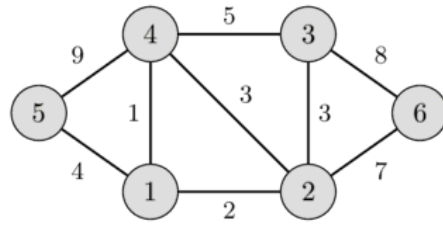
证明:

---

### 题目 4 ([4 = 2 + 2 分] \*\*)

请分别使用 Kruskal 算法与 Prim 算法 (从顶点 1 开始) 给出下图的最小生成树 ④。要求给出顶点添加的顺序 (在有多种选择时, 优先选择编号较小的顶点)。

④ 以后你会明白, Kruskal 算法与 Prim 算法的难度不在算法本身, 而在于搞清楚哪个是哪个。



证明:

#### 题目 5 ([4 分] ★★★)

设  $G$  是无向连通带权图,  $T$  是  $G$  的一个最小生成树。

请证明:  $T$  是  $G$  的唯一最小生成树当且仅当对于不在  $T$  中的每一条边  $e$ ,  $e$  的权重大于  $T + e$  所产生的圈中其它每条边的权重。

证明:

#### 题目 6 ([−10 分])



## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...