4. 集合: 基本概念与运算 (4-set)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 04 月 01 日发布习题
2021 年 04 月 18 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (相对补与绝对补 [5 分] ⋆⋆)
请证明,

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

证明：

$$\begin{aligned}
& A \cap (B \setminus C) & (1)\\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) & (2)\\
&= (A \cap B) \cap \overline{C} & (3)\\
&= (A \cap B) \setminus C & (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A \cap B) \setminus (A \cap C) & (5)\\
&= (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} & (6)\\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) & (7)\\
&= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) & (8)\\
&= \emptyset \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) & (9)\\
&= (A \cap B) \setminus C & (10)
\end{aligned}$$

□

尽量不要使用 “对任意 $x, \ldots$” 这样 “元素级别” 的证明。直接对集合进行 “高层次” 操作, 往往更为简洁。

题目 2 (对称差 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

证明:

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) \oplus (A \cap C) && (1)\\
&= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) && (2)\\
&= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) && (3)\\
&= (A \cap (B \cup C) \cap \overline{A}) \cup (A \cap (B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) && (4)\\
&= \emptyset \cup (A \cap ((B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}))) && (5)\\
&= A \cap (B \oplus C) && (6)
\end{aligned}
$$

其中, (2) 与 (6) 使用了等式:

$$X \oplus Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y}). \qquad \square$$

题目 3 (广义并、广义交 [4 分] ⋆⋆)
请证明,

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \implies \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

并举例说明, $\subseteq$ 不能换成 $=$。

证明:
对任意 x,

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} && (1)\\
\iff & x \in \bigcap \mathcal{F} \land x \in \bigcap \mathcal{G} && (2)\\
\iff & (\forall F \in \mathcal{F}.\, x \in F) \land (\forall G \in \mathcal{G}.\, x \in G) && (3)\\
\iff & \forall F \in \mathcal{F}.\, \forall G \in \mathcal{G}.\, x \in F \land x \in G && (4)\\
\iff & \forall F \in \mathcal{F}.\, \forall G \in \mathcal{G}.\, x \in F \cap G && (5)\\
\implies & \forall X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.\, x \in X && (6)\\
\iff & x \in \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}). && (7)
\end{aligned}
$$

下面给出第 (6) 步的证明过程 [1]:

$$
\begin{aligned}
\forall F \in \mathcal{F}.\, \forall G \in \mathcal{G}.\, x \in F \cap G \quad & (\text{前提}) && (5)\\
[X] \quad & (\text{引入变量}) && (5.1)\\
[X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}] \quad & (\text{引入假设}) && (5.2)\\
X \in \mathcal{F} \land X \in \mathcal{G} \quad & ((5.2)) && (5.3)\\
x \in X \cap X \quad & (\forall\text{-elim}, (5.3), (5)) && (5.4)\\
x \in X \quad & ((5.4)) && (5.5)\\
X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \to x \in X \quad & (\to\text{-intro}, (5.2) - (5.5)) && (5.6)\\
\forall X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}.\, x \in X \quad & (\forall\text{-intro}, (5.1) - (5.6)) && (6)
\end{aligned}
$$

[1] 对此, 不作要求; 只要求能从直觉上 “感受” 到 (5) $\implies$ (6) (或 (3) $\implies$ (6)) 的正确性。

例子: 取

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \qquad \mathcal{G} = \{\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

则有,

$$\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} = \{2\} \cap \{2,3\} = \{2\},$$
$$\bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \bigcap \{\{2,3\}\} = \{2,3\}. \qquad \square$$

题目 4 (德摩根律 [3 分] ⋆⋆⋆)
请化简集合 A:

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\})$$

解答:
记

$$X_n \triangleq \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}.$$

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus X_n) &(1)\\
&= \mathbb{R} \setminus \Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} X_n\Big) &(2)\\
&= \mathbb{R} \setminus \Big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\Big) &(3)\\
&= \mathbb{Z} &(4)
\end{aligned}$$

题目 5 (幂集 [4 分] ⋆⋆⋆)
请证明, [2]

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B.$$

[2] 不, 我有 "幂集" 恐惧症。

解答:
先证

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B.$$

假设 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$。

$$\begin{aligned}
&A \in \mathcal{P}(A)\\
\implies &A \in \mathcal{P}(B)\\
\implies &A \subseteq B
\end{aligned}$$

同理可证 $B \subseteq A$。因此, $A = B$。
再证

$$A = B \implies \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B).$$

假设 $A = B$。对于任意 x,

$$\begin{aligned}
&x \in \mathcal{P}(A)\\
\implies &x \subseteq A\\
\implies &x \subseteq B\\
\implies &x \in \mathcal{P}(B)
\end{aligned}$$

因此, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$。同理可证 $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$。因此, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$。

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$