3. 数学归纳法 (3-induction)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 03 月 25 日发布习题
2021 年 04 月 09 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

总而言之, 这次作业下手确实有点重了 . . .

1 作业（必做部分）

题目 1 (相识关系 [4 分] ⋆⋆)
假设有 $2n+1$ 个人。对于任意 n 个人构成的一个小组, 都存在一个人 (不属于这个小组) 与这 n 个人都相识 (假设 "相识" 是相互的)。
请证明, 存在一个人, 他/她认识其它所有 $2n$ 个人。

证明:
先引入如下定义:

定义
如果某组中的人相互都认识, 则称该组是 "好" 的。

引理
存在大小为 $n+1$ 的 "好" 小组。

证明:
首先, 一定存在大小为 2 的 "好" 小组, 这保证了 "好" 小组的存在性。任取一个**极大的**"好" 小组, 记为 G。如果 $|G| \le n$, 则根据题意, 存在一个不在 G 中的人, 记为 p, p 认识 G 中的每一个人。将 p 加入 G, 则得到一个比 G 更大的 "好" 小组。这与 G 的选取 (极大性) 相矛盾。故, 得证。 □

根据引理, 存在大小为 $n+1$ 的 "好" 小组, 记为 M。根据题意, 对于剩下的 n 个人, 存在一个在 M 中的人, 记为 q, q 认识这 n 个人。因此, q 认识其它所有 $2n$ 个人。□

- **问:** 为什么这道题才两星？我感觉我的智商受到了碾压。
- **答:** 这是一个技术性失误。在众多题目中, 我一眼就看上了它的简洁优雅, 简单推理后, 便给了它两星。待我回头再思考时, 我意识到我低估了它——它比我想象中更优雅, 当然也更难了。
- **问:** 数学归纳法呢?
- **答:** 这也是一个技术性失误。不过, 这已经不重要了。看看这个解答 . . .

题目 2 (邮资问题 [6 分] ⋆⋆)
请证明, 只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。
(或者: 每个不小于 12 的整数都可以写成若干个 4 或 5 的和。)

证明:
对邮资面额 n 作归纳。

基础步骤: $n = 12$ 时, 可由三张 4 分邮票组成。

归纳假设: 假设邮资为任意 $n \le k$ 的邮票都可以由 4 分与 5 分邮票组成。

归纳步骤: 考虑 $n = k + 1$ 分的邮资。以下分两种情况讨论:

- 假设 k 分邮资的某个组合中含有 4 分的邮票, 则将该组合中某张 4 分的邮票换成 5 分的邮票, 即可组成 $k + 1$ 分邮资。
- 假设 k 分邮资的任何组合中仅包含 5 分的邮票。因为 $n \ge 12$, 所以组合中至少包含 3 张 5 分的邮票。只需将这 3 张 5 分的邮票换成 4 张 4 分的邮票, 即可组成 $k + 1$ 分邮资。 □

题目 3 (结合律 [4 分] ⋆⋆)
设 $*$ 是一个满足结合律的二元运算符, 即

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

请证明, $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ $(n \ge 3)$ 的值与括号的使用方式无关。

证明:
我们证明以下引理 ①:

① 首先要明确什么叫 "与括号的使用方式无关"?

引理
对于任何包含 $n \ge 3$ 个操作数的式子

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_n,$$

不论以何种方式加括号, 它的值都等于 ②

② 这就是 "与括号的使用方式无关" 的含义。

$$(((a_1 * a_2) * a_3) \cdots * a_{n-1}) * a_n.$$

对操作数的个数 $n \ge 3$ 作强数学归纳。

基础步骤: $n = 3$。由于 $*$ 满足结合律:

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3),$$

$a_1 * a_2 * a_3$ 的值与括号使用方式无关。

归纳假设: 假设对于任何包含 $n \le k$ 个操作数的式子, 引理都成立。

归纳步骤: 考虑包含 $n = k + 1$ 个操作数的式子 ③

③ em, 这题还是有些难度的 . . .

$$A = a_1 * a_2 * \cdots * a_{n+1}.$$

考虑最后一次 $*$ 的位置, 它将式子分成两部分:

$$A = (a_1 * \cdots * a_i) * (a_{i+1} * \cdots * a_{n+1}).$$

其中, $i \le n$。根据归纳假设,

$$A = (a_1 * \cdots * a_i) * (\boxed{(((a_{i+1} * a_{i+2}) * \ldots) * a_n)} * a_{n+1}).$$

将 $((a_{i+1} * a_{i+2}) * \ldots)$ 看作一个整体, 则根据 $*$ 的结合性,

$$A = (a_1 * \cdots * a_i * \boxed{(((a_{i+1} * a_{i+2}) * \ldots) * a_n)}) * a_{n+1}.$$

再次根据归纳假设 ④,

④ 对 $(\ldots) * a_{n+1}$ 的 $(\ldots)$ 部分使用归纳假设

$$A = ((a_1 * a_2) * \ldots) * a_{n+1}. \qquad \square$$

题目 4 (数数 [6 分] ⋆⋆⋆)
令 T_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数的个数, E_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数偶数的个数, O_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数奇数的个数。
规定: 以上所有的 n 位数仅考虑不以 0 开头的数字。例如, $E_1 = 4$。
请给出 T_n, E_n, O_n 的计算公式。

解答:
(1) 因为不允许以 0 开头, 且相邻位数字不同, 所以

$$T_n = 9^n.$$

(2) 对位数 n 作归纳。

基础步骤: $n = 1$ 时, $E_1 = 4$, $O_1 = 5$。

归纳步骤: 考虑 $n \ge 2$ 的情况。计算 E_n。考虑两种情况: 如果第 $(n-1)$ 位为偶数, 则第 n 位有 4 种情况; 如果第 $(n-1)$ 位为奇数, 则第 n 位有 5 种情况。因此,

$$E_n = 4E_{n-1} + 5O_{n-1}.$$

由于 $E_{n-1} + O_{n-1} = T_{n-1} = 9^{n-1}$, 故有

$$E_n = 4E_{n-1} + 5(9^{n-1} - E_{n-1}).$$

解方程得, ⑤

⑤ 展开, 看符号变化, 便知要分奇偶。

$$E_n = \frac{9^n + (-1)^n}{2}.$$

因此, ⑥

⑥ $|E_n - O_n| = 1$

$$O_n = \frac{9^n - (-1)^n}{2}.$$

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$