11. 图论: 平面图与图着色 (11-planarity-coloring)

姓名: 魏恒峰 **学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______ **评阅:** ______

2021 年 05 月 21 日发布作业
2021 年 06 月 14 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] ⋆⋆⋆)
假设 G 是顶点数 ≥ 11 的简单图, $\overline{G}$ 是 G 的补图 [1] 。请证明, G 和 $\overline{G}$ 不同为平面图。

[1] 补图: 顶点集相同, 但是 e 是 G 的边当且仅当 e 不是 $\overline{G}$ 的边。

证明:
反设 G 和 $\overline{G}$ 都是平面图。因此,

$$m \leq 3n - 6 \tag{1}$$
$$\overline{m} \leq 3n - 6 \tag{2}$$
$$m + \overline{m} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{3}$$

解得 [2] ,

$$\frac{13 - \sqrt{73}}{2} \leq n \leq \frac{13 + \sqrt{73}}{2}.$$

[2] https://www.wolframalpha.com/input/?i=n%5E2+-+13n+%2B+24+%3C%3D+0

其整数解为

$$n \in \mathbb{Z} \land 3 \leq n \leq 10.$$

与 $n \geq 11$ 矛盾。 □

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
假设 G 是包含 n 个顶点的 d-正则简单图。请证明

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-d}.$$

证明:
反设

$$\chi(G) < \frac{n}{n-d}.$$

因此, 将 G 中顶点按照颜色归类, 可以将 G 划分成 $< \frac{n}{n-d}$ 组, 每组内的顶点两两不相邻 ③ 。根据鸽笼原理, 至少存在一组含有 $> \frac{n}{\frac{n}{n-d}} = n-d$ 个顶点。由于 G 是 d-正则简单图, 该组中必有两顶点相邻。矛盾。 □

③ 注, 这种组被称为 "独立集"

题目 3 ([4 分] ⋆⋆⋆)
假设 G 是不包含三角形 △ 的简单平面图。

(1) 请使用 Euler 公式证明 G 含有度数 ≤ 3 的顶点。

(2) 请使用数学归纳法证明 G 是 4-可着色的。

证明:

(1) 反设 $\delta(G) \geq 4$。因此,

$$\sum_v \deg(v) \geq 4n.$$

由于 G 是不包含 △ 的简单平面图,

$$m \leq 2n - 4.$$

根据握手定理,

$$\sum_v \deg(v) = 2m \leq 4n - 8.$$

矛盾。

(2) 对 G 中顶点数 n 作归纳。

基础步骤: $n = 1$。G 显然是 4-可着色的。

归纳假设: 假设命题对包含 $1 \leq k = n-1$ 个顶点的任意符合要求的图均成立。

归纳步骤: 考虑包含 n 个顶点的图 G。根据 (1), G 中包含度数 ≤ 3 的顶点, 记为 v。从 G 中删除 v, 得到图 G'。G' 包含 $n-1$ 个顶点, 且是不包含 △ 的简单平面图。根据归纳假设, G' 是 4-可着色的。考虑 G' 的任意一种 4-着色方案, 将 v (及删除的边) 加入 G', 重新得到图 G。因为 $\deg(v) \leq 3$, 所以 G 是 4-可着色的。 □

题目 4 ([4 分] ⋆⋆)
假设图 G_1 与 G_2 是 homeomorphic 的。请证明 ④ :

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

④ m, n 分别表示边数与点数。

证明:
分别考虑 "插入" 与 "收缩"2 度顶点的操作:

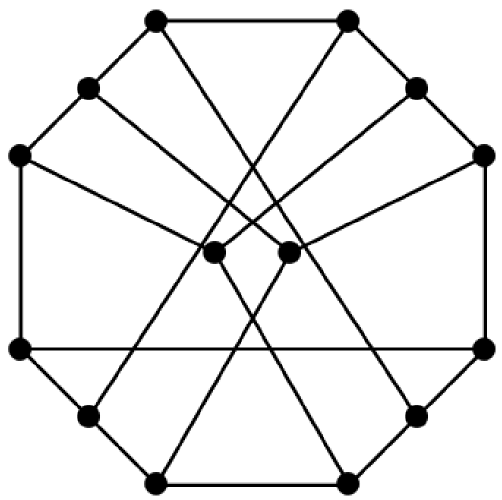
- 对于 "插入" 一个 2 度顶点, 顶点数 n 加一, 边数 m 加一, 所以 $m-n$ 保持不变。
- 对于 "收缩" 一个 2 度顶点, 顶点数 n 减一, 边数 m 减一, 所以 $m-n$ 保持不变。

对从 G_1 转化到 G_2 的 "插入/收缩" 操作序列的长度作归纳, 即得证。 □

题目 5 ([4 分] ⋆⋆)
请使用 Kuratowski 定理说明下图不是平面图 ⑤ :

⑤ 你不需要制作.gif。

证明:
先去掉图内部中间的两个点, 然后收缩剩下的所有 2 度顶点, 得到一个 $K_{3,3}$。根据 Kuratowski 定理, 该图不是平面图。 □



2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 "教学立方")

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ···