

## 5. 集合: 关系 (5-relation)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 4 月 08 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 (笛卡尔积 [3 分] \*\*)

设  $C \neq \emptyset$ , 请证明

$$A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C.$$

证明:

先证

$$A \subseteq B \implies A \times C \subseteq B \times C.$$

假设  $A \subseteq B$ 。对任意有序对  $(a, c)$ ,

$$(a, c) \in A \times C \tag{1}$$

$$\iff a \in A \wedge c \in C \tag{2}$$

$$\implies a \in B \wedge c \in C \quad (\because A \subseteq B) \tag{3}$$

$$\iff (a, c) \in B \times C \tag{4}$$

再证

$$A \times C \subseteq B \times C \implies A \subseteq B.$$

因为  $C \neq \emptyset$ , 不妨设  $c \in C$ 。假设  $A \times C \subseteq B \times C$ 。任取  $a \in A$ ,

$$a \in A \tag{1}$$

$$\implies (a, c) \in A \times C \tag{2}$$

$$\implies (a, c) \in B \times C \quad (\because A \times C \subseteq B \times C) \tag{3}$$

$$\implies a \in B \wedge c \in C \tag{4}$$

$$\implies a \in B \tag{5}$$

□

**题目 2 (关系的运算 [4 分] \*\*)**

请证明,

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2].$$

请举例说明  $\supseteq$  不能替换成  $=$ 。

**证明:**

任取  $y$ ,

$$y \in R[X_1] \setminus R[X_2] \quad (1)$$

$$\iff y \in R[X_1] \wedge y \notin R[X_2] \quad (2)$$

$$\iff (\exists x_1 \in X_1. (x_1, y) \in R) \wedge (\forall x_2 \in X_2. (x_2, y) \notin R) \quad (3)$$

$$\implies \exists x \in X_1 \setminus X_2. (x, y) \in R. \quad (4)$$

$$\iff y \in R[X_1 \setminus X_2] \quad (5)$$

其中, 在第 (5) 步可取使得 (3) 中第一个合取子句成立的某个  $x \in X_1$ 。根据 (5) 中第二个合取子句,  $x \notin X_2$ 。因此,  $x \in X_1 \setminus X_2$ 。

TODO: example

□

**题目 3 (关系的运算 [4 分] \*\*)**

请证明,

$$(X \cap Y) \circ Z \subseteq (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

请举例说明,  $\subseteq$  不能换成  $=$ 。

**证明:**

任取  $(a, c)$ ,

$$(a, c) \in (X \cap Y) \circ Z \quad (1)$$

$$\iff \exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in X \cap Y \quad (2)$$

$$\iff \exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in X \wedge (b, c) \in Y \quad (3)$$

$$\implies (\exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in X) \wedge (\exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in Y) \quad (4)$$

$$\iff (a, c) \in X \circ Z \wedge (a, c) \in Y \circ Z \quad (5)$$

$$\iff (a, c) \in (X \circ Z) \cap (Y \circ Z) \quad (6)$$

□

TODO: example

□

**题目 4 (关系的性质 [4 分] \*\*)**

请证明,

$$R \text{ 是对称且传递的} \iff R = R^{-1} \circ R$$

**证明:**

**题目 5 (等价关系 [5 分] ★★★)**

一个自反且传递的二元关系  $R \subseteq X \times X$  称为  $X$  上的拟序。现今  $\preceq \subseteq X \times X$  为拟序。如下定义  $X$  上的关系  $\sim$ :

$$x \sim y \iff x \preceq y \wedge y \preceq x,$$

请证明,  $\sim$  是  $X$  上的等价关系。

解答:

---

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...