

# 离散数学 (0-Overview)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 3 月 4 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 (防疫工作, 不能大意 [4 分])

近期突发一种流感, 症状极其严重, 受感染的学生会无可遏制地进行编程与刷题等危险行为。假设  $n^2$  位学生坐在座位按  $n \times n$  网格状排列的教室里。感染正在迅速扩散:

- 如果某学生已被感染, 那么他/她就不可能痊愈了;
- 如果某学生至少与 2 个已经感染的学生座位相邻 (前、后、左、右; 不包括对角), 那么该学生也会被感染。

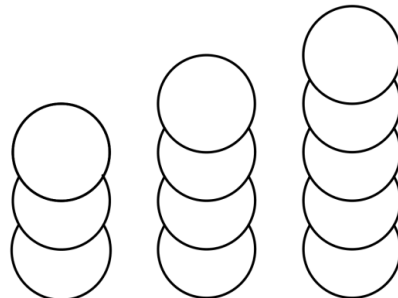
请证明: 如果初始状态有  $< n$  个学生感染了流感, 那么至少有一个学生永远不会被感染。

解答:

---

### 题目 2 (Nim Game [6 = 1 + 2 + 2 + 1 分])

Nim 是一个双人游戏 (你可以在课堂上分享的 Ludii Player 里找到它)。游戏开始时, 两人面前放着几堆石头, 两个玩家轮流操作, 每次选择从某个石堆里拿走一块或多块石头。最后没有石头可拿的那个玩家输掉比赛。



本题将引导大家寻找该游戏的必胜策略。

考虑对石头堆里的石头个数 (二进制表示下的; 不足时高位补 0) 做异或操作 ( $\oplus$ ), 结果称为 Nim 和。

- (1) 请证明: 若 Nim 和为 0, 则任意一次移动都会导致 Nim 和不为 0。
- (2) 请证明: 若 Nim 和不为 0, 则必然存在一个石头堆, 它的石头数大于其它所有石头堆的 Nim 和。(统一在二进制或十进制下进行大小比较)
- (3) 请证明: 若游戏开始时, Nim 和不为 0, 则先手有必胜策略。
- (4) 在只有两堆石头的情况下, 请给出某玩家有必胜策略的充要条件与他/她的必胜策略。

解答:

---

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

# 离散数学 (1-prop-logic)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 3 月 11 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 (命题逻辑公式上的数学归纳法 [2 (★★) 分])

假设公式  $\alpha$  中不含 “ $\neg$ ” 符号。请证明,  $\alpha$  中超过四分之一的符号是命题符号。

证明:

对公式的结构作归纳。

...

□

---

### 题目 2 (合取范式与析取范式 [3 (★) 分])

我们先引入一个定义。

#### 定义 1 (合取范式 (Conjunctive Normal Form; CNF))

我们称公式  $\alpha$  是**合取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个  $\beta_i$  都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且  $\beta_{ij}$  或是一个命题符号, 或是命题符号的否定。

例如, 下面的公式就是一个合取范式。

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

将定义 1 中的所有  $\wedge$  换成  $\vee$ , 所有  $\vee$  换成  $\wedge$ , 其余不变, 就变成了析取范式 (Disjunctive Normal Form; DNF) 的定义。本题以 CNF 为例。

将任意公式转化成 CNF 或 DNF 的方法如下:

- (1) 先将公式中的联词化归成  $\neg$ ,  $\wedge$  与  $\vee$ ;
- (2) 再使用 De Morgan 律将  $\neg$  移到各个命题变元之前 (“否定深入”);

(3) 最后使用结合律、分配律将公式化归成合取范式或析取范式。

请将

$$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$$

化为合取范式。

解答：

**题目 3 (重言蕴含与推理规则 [5 = 3 + 2 (★★) 分])**

(1) 请使用真值表方法证明

$$\{P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\} \models S \vee R.$$

(2) 请使用重言式所代表的推理规则 (可以任意使用规则, 也可以使用你认为显然成立但课堂上没有列出来的规则, 但需要指明每一步使用了哪条规则) 证明

$$\{P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\} \vdash S \vee R.$$

提示: 你可能需要使用

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg \alpha \vee \beta)$$

$$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

解答：

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 2. 一阶谓词逻辑 (2-predicate-logic)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 3 月 18 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 (命题逻辑: 形式化描述与推理 [3 分] \*\*)

张三说李四在说谎, 李四说王五在说谎, 王五说张三、李四都在说谎。请问, 这三个人到底谁在说真话, 谁在说谎? (要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

解答:

---

### 题目 2 (一阶谓词逻辑: 形式化描述与推理 [3 分] \*\*)

给定如下“前提”, 请判断“结论”是否有效, 并说明理由。请使用一阶谓词逻辑的知识解答。(要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

**前提:**

- (1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
- (2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;
- (3) 有的人不喜欢韩剧。

**结论:** 有的人不喜欢抗日神剧 (幸亏如此)。

解答:

---

### 题目 3 (一阶谓词逻辑: 形式化描述与推理 [4 分] \*\*)

请使用一阶谓词逻辑公式描述以下两个定义, 并从逻辑推理的角度说明这两种定义之间是否有强弱之分。(要求: 需给出关键的推理步骤或理由)

A function  $f$  from  $\mathbb{R}$  to  $\mathbb{R}$  is called

- (1) *pointwise continuous* (连续的) if for every  $x \in \mathbb{R}$  and every real number  $\epsilon > 0$ , there exists real  $\delta > 0$  such that for every  $y \in \mathbb{R}$  with  $|x - y| < \delta$ , we have that  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .
- (2) *uniformly continuous* (一致连续的) if for every real number  $\epsilon > 0$ , there exists real  $\delta > 0$  such that for every  $x, y \in \mathbb{R}$  with  $|x - y| < \delta$ , we have that  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

解答:

---

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

### 3. 数学归纳法 (3-induction)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 3 月 25 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

#### 题目 1 (相识关系 [4 分] \*\*)

假设有  $2n + 1$  个人。对于任意  $n$  个人构成的一个小组, 都存在一个人 (不属于这个小组) 与这  $n$  个人都相识 (假设“相识”是相互的)。

请证明, 存在一个人, 他/她认识其它所有  $2n$  个人。

证明:

---

#### 题目 2 (邮资问题 [6 分] \*\*)

请证明, 只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。  
(或者: 每个不小于 12 的整数都可以写成若干个 4 或 5 的和。)

证明:

---

#### 题目 3 (结合律 [4 分] \*\*)

设  $*$  是一个满足结合律的二元运算符, 即

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

请证明,  $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$  ( $n \geq 3$ ) 的值与括号的使用方式无关。

证明:

---

**题目 4 (数数 [6 分] ★★★)**

令  $T_n$  表示相邻位数字不相同的  $n$  位数的个数,  $E_n$  表示相邻位数字不相同的  $n$  位数偶数的个数,  $O_n$  表示相邻位数字不相同的  $n$  位数奇数的个数。

规定: 以上所有的  $n$  位数仅考虑不以 0 开头的数字。例如,  $E_1 = 4$ 。

请给出  $T_n, E_n, O_n$  的计算公式。

解答:

---

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...



#### 4. 集合: 基本概念与运算 (4-set)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 4 月 01 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

题目 1 (相对补与绝对补 [5 分] \*\*)

请证明,

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

证明:

---

题目 2 (对称差 [4 分] \*\*)

请证明,

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

证明:

---

题目 3 (广义并、广义交 [4 分] \*\*)

请证明,

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \implies \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

并举例说明,  $\subseteq$  不能换成  $=$ 。

证明:

---

题目 4 (广义并、广义交、德摩根律 [3 分] \*\*\*)

请化简集合  $A$ :

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus \{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\})$$

解答:

---

题目 5 (幂集 [4 分] ★★)

请证明, <sup>①</sup>

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B.$$

<sup>①</sup> 不, 我有“幂集”恐惧症。

解答:

---

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 5. 集合: 关系 (5-relation)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 4 月 08 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

题目 1 (笛卡尔积 [3 分] \*\*)

设  $C \neq \emptyset$ , 请证明

$$A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C.$$

证明:

---

题目 2 (关系的运算 [4 分] \*\*)

请证明,

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2].$$

请举例说明  $\supseteq$  不能替换成  $=$ 。

证明:

---

题目 3 (关系的运算 [4 分] \*\*)

请证明,

$$(X \cap Y) \circ Z \subseteq (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

请举例说明,  $\subseteq$  不能换成  $=$ 。

证明:

---

**题目 4 (关系的性质 [4 分] \*\*)**

请证明,

$$R \text{ 是对称且传递的} \iff R = R^{-1} \circ R$$

**证明:**

**题目 5 (等价关系 [5 分] \*\*\*)**

一个自反且传递的二元关系  $R \subseteq X \times X$  称为  $X$  上的拟序。现今  $\preceq \subseteq X \times X$  为拟序。如下定义  $X$  上的关系  $\sim$ :

$$x \sim y \iff x \preceq y \wedge y \preceq x,$$

请证明,  $\sim$  是  $X$  上的等价关系。

**解答:**

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 6. 集合: 函数 (6-function)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 4 月 15 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 (等价关系 [3 分] \*\*)

设  $R$  是  $X$  上的等价关系。请证明,

$$\forall a, b \in X. ([a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb).$$

证明:

---

### 题目 2 (函数与等价关系 [7 = 3 + 4 分] \*\*\*)

设  $f: X \rightarrow Y$  是满射。定义  $X$  上的二元关系  $R$  为  $(x, y) \in R$  当且仅当  $f(x) = f(y)$ 。  
请证明,

- (1)  $R$  是  $X$  上的等价关系。
- (2) 定义  $h \subseteq (X/R) \times Y$  为  $h([x]_R) = f(x)$ 。请证明,  $h$  是从商集  $X/R$  到  $Y$  的函数, 且是满射。

证明:

---

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见

- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 7. 集合: 函数与偏序 (7-function-partial-order)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 4 月 22 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

题目 1 ([7 = 2 + 2 + 3 分] \*\*)

设  $f: A \rightarrow B$  是函数。请证明:

- (1)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- (2)  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
- (3)  $B_0 \supseteq f(f^{-1}(B_0))$

证明:

---

题目 2 ([4 = 2 + 2 分] \*\*)

设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow C$  是函数。请证明,

- (1) 如果  $f$  与  $g$  是满射, 则  $g \circ f$  是满射。
- (2) 如果  $g \circ f$  是单射, 则  $f$  是单射。

证明:

---

题目 3 ([5 分] \*\*\*)

设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow A$  是函数。请证明,

$$(f \circ g = I_B \wedge g \circ f = I_A) \rightarrow g = f^{-1}.$$

证明:

**题目 4 ([4 = 0 + 4 分] ★★)**

一个自反且传递的二元关系  $R \subseteq X \times X$  称为  $X$  上的拟序。现令  $\preceq \subseteq X \times X$  为拟序。

(1) 如下定义  $X$  上的关系  $\sim$ :

$$x \sim y \triangleq x \preceq y \wedge y \preceq x.$$

请证明 <sup>①</sup>,  $\sim$  是  $X$  上的等价关系。

(2) 如下定义商集  $X/\sim$  上的关系  $\leq$ :

$$[x]_{\sim} \leq [y]_{\sim} \triangleq x \preceq y.$$

请证明,  $\leq$  是偏序关系。

<sup>①</sup> 你在 *hw5-relation* 中已经做过这个证明了, 不必重做。可以直接在第二问中使用该结论。

证明:

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...



## 8. 集合: 无穷 (8-infinity)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 4 月 29 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 ([3 分] ★★★)

考虑由所有 0, 1 串构成的集合  $(\{0, 1, 111, 01010101010, 101010101, \dots\})$ 。请问, 该集合是否是可数集合, 请给出理由。

证明:

---

### 题目 2 ([4 分] ★★★)

考虑如下命题:

“存在可数无穷多个两两不相交的非空集合, 它们的并是有穷集合。”

请问, 该命题是否正确。如果正确, 请给出例子。如果不正确, 请给出 (反面的) 证明。

证明:

---

### 题目 3 ([3 分] ★★★)

请自行查找并阅读 Cantor-Schröder-Bernstein 定理的某个证明, 理解它, 放下你手头的资料<sup>①</sup>, 然后尝试自己写出这个证明<sup>②</sup>。

以下证明供参考<sup>③</sup>: [Schröder-Bernstein theorem @ wiki](#)

证明:

---

① 不要偷看哦

② 是不是又偷看了 (为什么明明懂了, 但就是表达不出来?)

③ pdf 版本见 “8-infinity.zip” 压缩包

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 9. 图论: 路径与圈 (9-paths-cycles)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 5 月 6 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 ([3 分] ★★★)

设  $G = (V, E)$  是无向图 (不一定是简单无向图), 其中  $|E| = m$ 。请证明<sup>①</sup>,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

<sup>①</sup> 这也说明了,  $G$  中度数为奇数的顶点数目为偶数。

证明:

---

### 题目 2 ([4 分] ★★★)

请证明: 每个长度为奇数的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle) <sup>②</sup>。

<sup>②</sup> “长度” 就是所含边的条数。

(提示: 可用数学归纳法。如果你使用数学归纳法, 请注意数学归纳法的书写规范。)

证明:

---

### 题目 3 ([4 = 2 + 2 分] ★★★)

设  $G$  是一个简单无向图 (undirected simple graph) 且满足

$$\delta(G) \geq k,$$

其中  $k \in \mathbb{N}^+$  为常数。请证明:

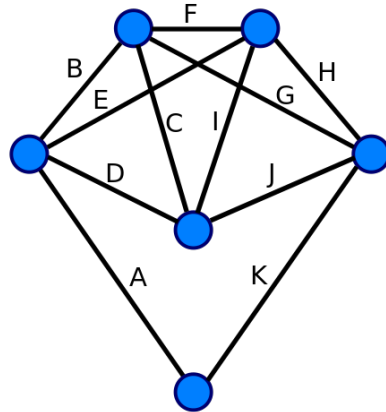
- (1)  $G$  包含长度  $\geq k$  的路径;
- (2) 如果  $k \geq 2$ , 则  $G$  包含长度  $\geq k + 1$  的圈。

(提示: 想想我们在课上使用了两次的那个证明技巧。)

证明:

**题目 4** ([4 = 1 + 2 + 1 分] \*\*)

考虑下图, 记为  $G$ 。



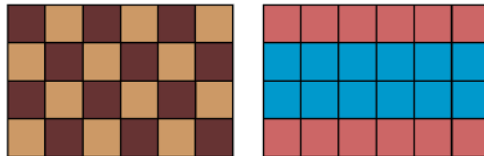
- (1)  $G$  是否是欧拉图? 请说明理由。
- (2) 如果是欧拉图, 请将其分解为若干圈的组合, 并给出一个欧拉回路<sup>③</sup>; 如果不是欧拉图, 至少需要添加几条边才能使得它成为欧拉图? (可以自行为顶点编号, 也可以使用图上边的编号描述回路。)
- (3) (本小题与  $G$  无关) 假设某图不是欧拉图, 但含有欧拉迹, 请用一两句话说明如何找出图中的欧拉迹。

<sup>③</sup> 注意: 在课上, 我们用了英文术语 “Eulerian Cycle”。有的教材上使用 “Eulerian Circuit”。后者更严谨一些, 因为它可能包含重复的顶点。

证明:

**题目 5** ([5 分] \*\*\*)

请证明: 对于  $4 \times n$  的棋盘, 不存在一种走法, 使得 “馬” 可以踏遍每个格子一次并回到出发点。



证明:

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 10. 图论: 树 (10-trees)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 5 月 13 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 ([4 分] \*\*)

设  $T$  是树且每个顶点的度数要么为 1, 要么为  $k$ 。请证明 ① ②:

$$n(T) = \ell(k-1) + 2, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

① 我们经常使用  $n(G)$  表示  $G$  的顶点数。

② 提示: 关于顶点度数, 我们有什么定理可用?

证明:

---

### 题目 2 ([4 分] \*\*\*)

给定无向图  $G$ 。请证明:  $G$  是树当且仅当  $G$  没有 loop 且  $G$  有唯一的生成树。

证明:

---

### 题目 3 ([4 分] \*\*\*)

给定无向连通图  $G$  与  $G$  中的某条边  $e$ 。请证明:  $e$  是桥 (bridge ③) 当且仅当  $e$  属于  $G$  的每个生成树。

③ bridge 也称为 cut-edge (割边)。

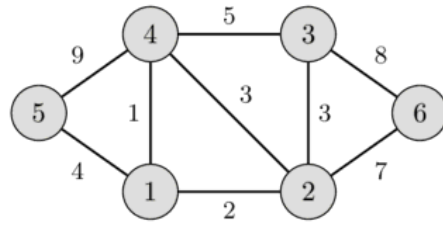
证明:

---

### 题目 4 ([4 = 2 + 2 分] \*\*)

请分别使用 Kruskal 算法与 Prim 算法 (从顶点 1 开始) 给出下图的最小生成树 ④ 要求给出边添加的顺序 (在有多种选择时, 优先选择编号较小的顶点)。

④ 以后你会明白, Kruskal 算法与 Prim 算法的难度不在算法本身, 而在于搞清楚哪个是哪个。



证明:

#### 题目 5 ([4 分] ★★★)

设  $G$  是无向连通带权图,  $T$  是  $G$  的一个最小生成树。

请证明:  $T$  是  $G$  的唯一最小生成树当且仅当对于不在  $T$  中的每一条边  $e$ ,  $e$  的权重大于  $T + e$  所产生的圈中其它每条边的权重。

证明:

#### 题目 6 ([-10 分])



## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 11. 图论: 平面图与图着色 (11-planarity-coloring)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 5 月 21 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 ([4 分] ★★★)

假设  $G$  是顶点数  $\geq 11$  的简单图,  $\overline{G}$  是  $G$  的补图<sup>①</sup>。请证明,  $G$  和  $\overline{G}$  不同为平面图。

<sup>①</sup> 补图: 顶点集相同, 但是  $e$  是  $G$  的边当且仅当  $e$  不是  $\overline{G}$  的边。

证明:

---

### 题目 2 ([4 分] ★★★)

假设  $G$  是包含  $n$  个顶点的  $d$ -正则简单图。请证明

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-d}.$$

证明:

---

### 题目 3 ([4 分] ★★★)

假设  $G$  是不包含三角形  $\triangle$  的简单平面图。

- (1) 请使用 Euler 公式证明  $G$  含有度数  $\leq 3$  的顶点。
- (2) 请使用数学归纳法证明  $G$  是 4-可着色的。

证明:

---



**题目 4 ([4 分] \*\*)**

假设图  $G_1$  与  $G_2$  是 homeomorphic 的。请证明 ②：

②  $m, n$  分别表示边数与点数。

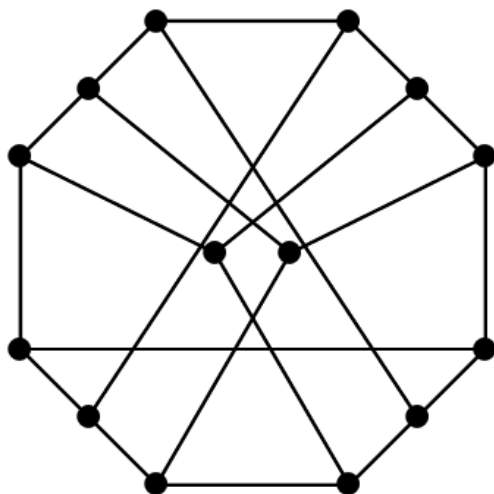
$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

证明：

**题目 5 ([4 分] \*\*)**

请使用 Kuratowski 定理说明下图不是平面图 ③：

③ 你不需要制作.gif。



证明：

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 12. 图论: 匹配与网络流 (12-matching-flow)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 5 月 28 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

### 1 作业 (必做部分)

题目 1 ([5 = 2 + 3 分] \*\*)

设  $G = (X, Y, E)$  是一个  $k$ -正则 ( $k > 0$ ) 二部图。请证明:

- (1)  $|X| = |Y|$ ;
- (2)  $G$  有一个  $X$ -完美匹配。

证明:

---

题目 2 ([5 分] \*\*\*)

设  $G = (V, E)$  是含有  $2n$  个顶点的简单图, 且  $\delta(G) \geq n + 1$ 。

请证明:  $G$  有完美匹配<sup>①</sup>。(提示: 考虑使用图论第一讲中的定理。)

① 对于任意图, 完美匹配是 cover 了所有顶点的匹配。

证明:

---

题目 3 ([5 分] \*\*\*)

请证明: 每个二部图  $G$  都有一个大小  $\geq e(G)/\Delta(G)$  的匹配<sup>②</sup>。(提示: 使用 König-Egerváry 定理。)

②  $e(G)$  表示  $G$  的边数。

证明:

---

**题目 4 ([5 分] \*\*)**

设  $Y$  为集合,  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  为包含  $m$  个集合的集合, 其中  $A_i \subseteq Y$  (对  $1 \leq i \leq m$ )。  $\mathcal{A}$  的相异代表系 (System of Distinct Representatives; SDR) 是  $Y$  中  $m$  个不同元素  $a_1, \dots, a_m$  构成的集合, 其中  $a_i \in A_i$  (对  $1 \leq i \leq m$ )。

请证明:  $\mathcal{A}$  有 SDR 当且仅当

$$\forall S \subseteq \{1, \dots, m\}. \left| \bigcup_{i \in S} A_i \right| \geq |S|.$$

证明:

---

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

### 13. 群论: 基本概念 (13-group)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

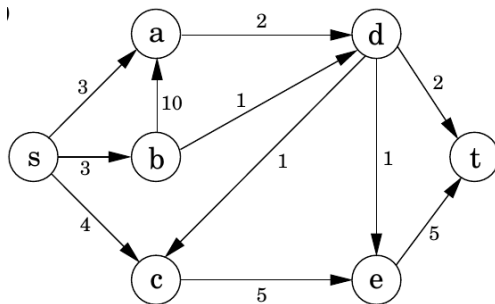
2021 年 6 月 4 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

## 1 作业 (必做部分)

#### 题目 1 ([4 分] \*\*)

请给出以下网络的一个最大流与一个最小割。要求给出 Ford-Fulkerson Method 运行过程。



证明:

#### 题目 2 ([5 = 1 + 1 + 3 分] \*\*\*)

考虑下面的定理:

##### 定理 1 (不能告诉你名字的某个著名定理)

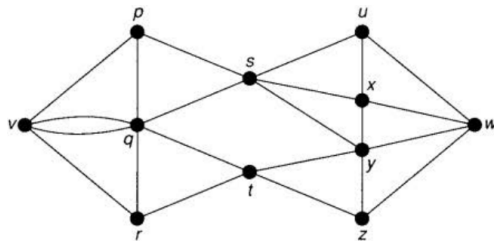
设  $G = (V, E)$  是无向连通图,  $v, w \in V$  是不同的两个顶点。则  $v, w$  之间的边不相交的 (edge-disjoint) ① 路径的最大条数等于最小  $vw$ -边割集 ② 的大小。

- (1) 考虑图中的  $v, w$  顶点。请给出  $v, w$  间的一个最大边不相交的路径集合。
- (2) 考虑图中的  $v, w$  顶点。请给出一个最小的  $vw$ -边割集。
- (3) 请使用最大流-最小割定理证明上述定理 ③。

① 设  $P_1, P_2$  是两条  $v, w$  间的路径。如果  $P_1$  与  $P_2$  没有公共边, 则  $P_1, P_2$  是  $v, w$  之间的边不相交的路径。

② 设  $F \subseteq E$  为集。如果  $G$  删除  $F$  后,  $v$  与  $w$  不再连通, 则称  $F$  是  $vw$ -边割集。

③ 恭喜! 你刚刚证明了图论中的一个著名定理。



证明：

### 题目 3 ([3 分] \*\*)

在整数集  $\mathbb{Z}$  中, 规定运算  $\oplus$  如下:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \oplus b = a + b - 2.$$

请证明:  $(\mathbb{Z}, \oplus)$  构成群。

证明：

### 题目 4 ([5 分] \*\*\*)

设  $G$  是群。请证明: 如果  $\forall x \in G. x^2 = e$ , 则  $G$  是交换群。

证明：

### 题目 5 ([3 分] \*\*)

请求出  $3^{83}$  的最后两位数<sup>④</sup>。要求给出计算过程。

<sup>④</sup> <https://www.wolframalpha.com/input/?i=3%5E83>

证明：

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...

## 14. 群论: 子群 (14-subgroup)

姓名: 魏恒峰      学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: \_\_\_\_\_ 评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 6 月 11 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

题目 1 ([4 分] \*\*)

设  $H \leq G$ 。请证明,

$$aH = H \iff a \in H \iff aH \leq G$$

证明:

---

题目 2 ([5 = 2 + 3 分] \*\*\*)

设  $\phi$  是从群  $G$  到  $G'$  的同态映射。请证明,

(1)

$$H \leq G \implies \phi(H) \leq G'.$$

(2)

$$H \triangleleft G \implies \phi(H) \triangleleft G'.$$

证明:

---

题目 3 ([3 分] \*\*)

请计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

并将结果写成 (不相交) 轮换的乘积。

解答:

#### 题目 4 ([3 分] ★★★)

考虑如下定义。

##### 定义 1 (元素的阶)

设  $G$  是有限群,  $e$  为  $G$  的单位元,  $a \in G$ 。使  $a^r = e$  成立的最小正整数称为  $a$  的阶 (order) <sup>①</sup>, 记作  $\text{ord } a = r$ 。

<sup>①</sup> 注意, 群的阶指的是集合  $G$  的大小, 即  $|G|$ 。

设  $G$  是有限群。请证明,

$$\forall a \in G. (\text{ord } a) \mid |G|.$$

证明:

#### 题目 5 ([5 = 2 + 1 + 2 分] ★★★)

考虑从乘法群  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  到乘法群  $\mathbb{R}^+$  的函数  $f: x \mapsto |x|$ 。

- (1) 请证明,  $f$  是从  $\mathbb{R}^*$  到  $\mathbb{R}^+$  的同态。
- (2) 求  $\text{Ker } \phi$ 。
- (3) 套用群同态基本定理, 给出相应结论, 并用一两句话解释该结论。

证明:

## 2 订正

## 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...