12. 图论: 匹配与网络流 (12-matching-flow)

姓名: 魏恒峰　　**学号:** hfwei@nju.edu.cn

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 05 月 28 日发布作业
2021 年 06 月 22 日发布答案

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 ([5 = 2 + 3 分] ⋆⋆)
设 $G = (X, Y, E)$ 是一个 k-正则 $(k > 0)$ 二部图。请证明:

(1) $|X| = |Y|$;

(2) G 存在 X-完美匹配。

证明:

(1) 因为 G 是 k-正则二部图, 所以 $k|X| = k|Y|$, 故有 $|X| = |Y|$。

(2) 对于 X 的任何子集 S, 从 S 到 $N(S)$ 的边共有 $k|N|$ 条。这 $k|N|$ 条边均与 $N(S)$ 中的顶点相连, 所以 $k|N| \leq k|N(S)|$, 即有 $|N(S)| \geq |S|$. 根据 Hall 定理, G 存在 X-完美匹配。 □

题目 2 ([5 分] ⋆ ⋆ ⋆)
设 $G = (V, E)$ 是含有 $2n$ 个顶点的简单图，且 $\delta(G) \geq n + 1$。
请证明: G 有完美匹配 ①。(提示: 考虑使用图论第一讲中的定理。)

① 对于任意图, 完美匹配是 cover 了所有顶点的匹配。

证明:
因为 $\delta(G) \geq n + 1$, 根据 Dirac 定理, G 中存在 Hamiltonian 回路。该回路是包含 $2n$ 个顶点的圈, 取该圈的不相邻的 n 条边, 即为图 G 的一个完美匹配。 □

题目 3 ([5 分] ⋆ ⋆ ⋆⋆)
请证明: 每个二部图 G 都有一个大小 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 的匹配 ②。(提示: 使用 König-Egerváry 定理。)

② $e(G)$ 表示 G 的边数。

证明:
每个顶点最多覆盖 (cover) $\Delta(G)$ 条边。因此, G 的最小点覆盖中包含 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 个顶点。根据 König-Egerváry 定理, G 的最大匹配包含 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 条边。 □

题目 4 ([5 分] ⋆⋆)
设 Y 为集合, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为包含 m 个集合的集合, 其中 $A_i \subseteq Y$ (对 $1 \leq i \leq m$)。$\mathcal{A}$ 的相异代表系 (System of Distinct Representatives; SDR) 是 Y 中 m 个不同元素 $a_1, \ldots, a_m$ 构成的集合, 其中 $a_i \in A_i$ (对 $1 \leq i \leq m$)。
请证明: $\mathcal{A}$ 有 SDR 当且仅当

$$\forall S \subseteq \{1, \ldots, m\}. \, \Big|\bigcup_{i \in S} A_i\Big| \geq |S|.$$

证明:
构造二部图 $G = (X, Y, E)$: 其中, $X = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $Y = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (设 $|Y| = n$), 并添加边 $\{A_i, a_j\} \in E$ 当且仅当 $a_j \in A_i$。因此, $\mathcal{A}$ 有 SDR 当且仅当 G 有 X-完美匹配。

已知

$$\forall S \subseteq \{1, \ldots, m\}. \, \Big|\bigcup_{i \in S} A_i\Big| \geq |S|,$$

即 Hall 条件成立。因此, 根据 Hall 定理, G 有 X-完美匹配。故, $\mathcal{A}$ 有 SDR。 □

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$