

5. 集合: 关系 (5-relation)

姓名: 魏恒峰 学号: hfwei@nju.edu.cn

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 04 月 08 日发布作业

2021 年 04 月 2x 日发布答案

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

若有疑问, 可到 <https://github.com/courses-at-nju-by-hfwei/discrete-math-problem-sets/discussions> 讨论。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (笛卡尔积 [3 分] **)

设 $C \neq \emptyset$, 请证明

$$A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C.$$

证明:

先证

$$A \subseteq B \implies A \times C \subseteq B \times C.$$

假设 $A \subseteq B$ 。对任意有序对 (a, c) ,

$$(a, c) \in A \times C \tag{1}$$

$$\iff a \in A \wedge c \in C \tag{2}$$

$$\implies a \in B \wedge c \in C \quad (\because A \subseteq B) \tag{3}$$

$$\iff (a, c) \in B \times C \tag{4}$$

再证

$$A \times C \subseteq B \times C \implies A \subseteq B.$$

因为 $C \neq \emptyset$, 不妨设 $c \in C$ 。假设 $A \times C \subseteq B \times C$ 。任取 $a \in A$,

$$a \in A \tag{1}$$

$$\implies (a, c) \in A \times C \tag{2}$$

$$\implies (a, c) \in B \times C \quad (\because A \times C \subseteq B \times C) \tag{3}$$

$$\implies a \in B \wedge c \in C \tag{4}$$

$$\implies a \in B \tag{5}$$

□

题目 2 (关系的运算 [4 分] **)

请证明,

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2].$$

请举例说明 \supseteq 不能替换成 $=$ 。

证明:

任取 y ,

$$y \in R[X_1] \setminus R[X_2] \quad (1)$$

$$\iff y \in R[X_1] \wedge y \notin R[X_2] \quad (2)$$

$$\iff (\exists x_1 \in X_1. (x_1, y) \in R) \wedge (\forall x_2 \in X_2. (x_2, y) \notin R) \quad (3)$$

$$\implies \exists x \in X_1 \setminus X_2. (x, y) \in R. \quad (4)$$

$$\iff y \in R[X_1 \setminus X_2] \quad (5)$$

其中, 在第 (5) 步可取使得 (3) 中第一个合取子句成立的某个 $x \in X_1$ 。根据 (5) 中第二个合取子句, $x \notin X_2$ 。因此, $x \in X_1 \setminus X_2$ 。

TODO: example

□

题目 3 (关系的运算 [4 分] **)

请证明,

$$(X \cap Y) \circ Z \subseteq (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

请举例说明, \subseteq 不能换成 $=$ 。

证明:

任取 (a, c) ,

$$(a, c) \in (X \cap Y) \circ Z \quad (1)$$

$$\iff \exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in X \cap Y \quad (2)$$

$$\iff \exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in X \wedge (b, c) \in Y \quad (3)$$

$$\implies (\exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in X) \wedge (\exists b. (a, b) \in Z \wedge (b, c) \in Y) \quad (4)$$

$$\iff (a, c) \in X \circ Z \wedge (a, c) \in Y \circ Z \quad (5)$$

$$\iff (a, c) \in (X \circ Z) \cap (Y \circ Z) \quad (6)$$

TODO: example

□

题目 4 (关系的性质 [4 分] **)

请证明,

$$R \text{ 是对称且传递的} \iff R = R^{-1} \circ R$$

证明:

先证

$$R \text{ 是对称且传递的} \implies R = R^{-1} \circ R.$$

假设 R 是对称且传递的。因为 R 是对称的, 所以

$$R = R^{-1}.$$

因为 R 是传递的, 所以

$$R \circ R \subseteq R.$$

故,

$$R^{-1} \circ R = R \circ R \subseteq R.$$

其次, 任取 $(a, b) \in R$ ①。因为 R 是对称的, 所以 $(b, a) \in R$ 。又因为 R 是传递的, 所以 $(b, b) \in R$ 且 $(b, b) \in R^{-1}$ 。因此, $(a, b) \in R^{-1} \circ R$ 。故, $R \subseteq R^{-1} \circ R$ 。

再证

$$R = R^{-1} \circ R \implies R \text{ 是对称且传递的.}$$

假设 $R = R^{-1} \circ R$ 。首先 ②,

$$R^{-1} = (R^{-1} \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ R = R.$$

所以, R 是对称的。其次 ③,

$$R = R^{-1} \circ R = R \circ R,$$

□

所以, R 是传递的。

① 这一步如何用“关系代数”进行运算? 你如果有更简洁的方法, 请告诉我。

对于其它步骤, 你当然也可以“对任意...”, 然后一顿操作猛如虎。但是, 在更高的“关系代数”层面上进行运算, 往往举重若轻、事半功倍。

② 切记: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

③ 这里用到了刚刚证明的 $R^{-1} = R$ 。

题目 5 (等价关系 [5 分] ★★★)

一个自反且传递的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序。现今 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序。如下定义 X 上的关系 \sim :

$$x \sim y \iff x \preceq y \wedge y \preceq x,$$

请证明, \sim 是 X 上的等价关系。

证明:

(1) \sim 是自反的。

对于任意 $x \in X$, 因为 \preceq 是自反的, 所以

$$x \in X \implies x \preceq x \implies x \preceq x \wedge x \preceq x \implies x \sim x.$$

(2) \sim 是对称的。

对于任意 $(x, y) \in \sim$,

$$x \sim y \implies x \preceq y \wedge y \preceq x \implies y \preceq x \wedge x \preceq y \implies y \sim x.$$

(3) \sim 是传递的。

对于任意 $(x, y) \in \sim$ 与 $(y, z) \in \sim$,

$$\begin{aligned} & x \sim y \wedge y \sim z \\ \implies & (x \preceq y \wedge y \preceq x) \wedge (y \preceq z \wedge z \preceq y) \\ \implies & (x \preceq y \wedge y \preceq z) \wedge (z \preceq y \wedge y \preceq x) \\ \implies & x \preceq z \wedge z \preceq x \quad (\because \preceq \text{ is transitive}) \\ \implies & x \sim z \end{aligned}$$

□

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- ...