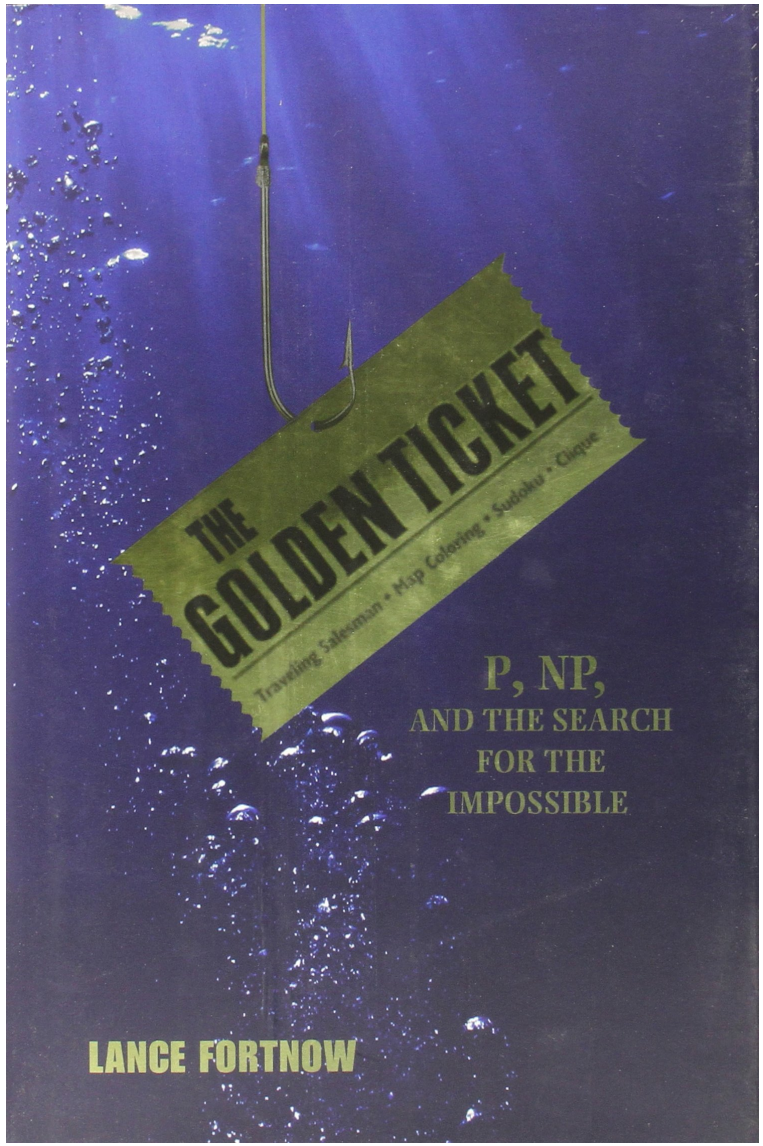
4-11 P and NP (II)

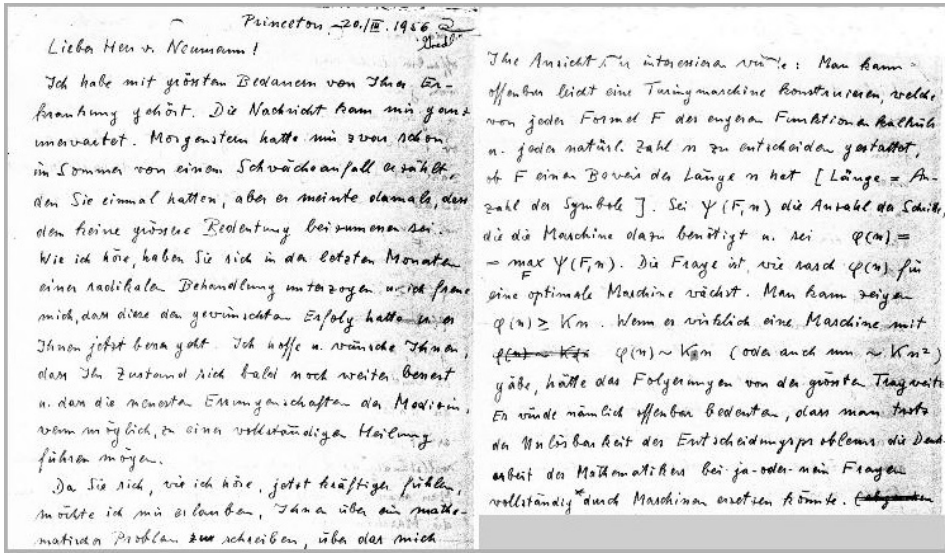
(NP $\neq$ No Problem)

Hengfeng Wei

hfwei@nju.edu.cn

May 27, 2019


THE GOLDEN TICKET
Traveling Salesman • Map Coloring • Sudoku • Clique
P, NP,
AND THE SEARCH
FOR THE
IMPOSSIBLE
LANCE FORTNOW

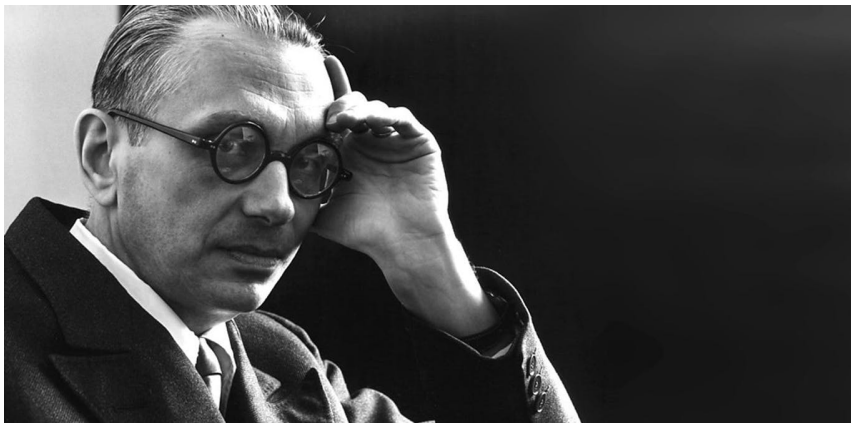


Princeton, 20/III. 1956

Lieber Herr v. Neumann!

Ich habe mit größtem Bedauern von Ihrer Erkrankung gehört. Die Nachricht kam mir ganz unerwartet. Morgenstern hatte mir zwar schon im Sommer von einem Schwächeanfall erzählt, den Sie einmal hatten, aber er meinte damals, dass dem keine größere Bedeutung beizumessen sei. Wie ich höre, haben Sie sich in den letzten Monaten einer radikalen Behandlung unterzogen und ich freue mich, dass diese den gewünschten Erfolg hatte und es Ihnen jetzt besser geht. Ich hoffe und wünsche Ihnen, dass Ihr Zustand sich bald noch weiter bessert und dass die monatelangen Erholungsschaften der Medizin, wenn möglich, zu einer vollständigen Heilung führen mögen.

Da Sie sich, wie ich höre, jetzt häufiger frühen, möchte ich mir erlauben, Ihnen über ein mathematisches Problem zu schreiben, über das mich Ihre Ansicht sehr interessieren würde: Man kann offenbar leicht eine Turingmaschine konstruieren, welche von jeder Formel F des engeren Funktionalkalküls und jeder natürl. Zahl n zu entscheiden gestattet, ob F einen Beweis der Länge n hat [Länge = Anzahl der Symbole]. Sei $\psi(F,n)$ die Anzahl der Schritte, die die Maschine dazu benötigt und sei $\varphi(n) = \max_F \psi(F,n)$. Die Frage ist wie rasch $\varphi(n)$ für eine optimale Maschine wächst. Man kann zeigen $\varphi(n) \geq Kn$. Wenn es wirklich eine Maschine mit ~~$\varphi(n) \sim Kn$~~ $\varphi(n) \sim Kn$ (oder auch nur $\sim Kn^2$) gäbe, hätte das Folgerungen von der größten Tragweite. Es würde nämlich offenbar bedeuten, dass man trotz der Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems die Denkarbeit der Mathematiker bei ja-oder-nein Fragen vollständig durch Maschinen ersetzen könnte. ~~Ich nehme~~



MATICAL INSIGHT TO STUDENTS, VON NEUMANN FILLS BLACKBOARD WITH SYMBOLS AS HE OUTLINES

Kurt Gödel (1906 ∼ 1978)

John von Neumann (1903 ∼ 1957)

$\vdash F$: F is provable

$\vdash^n F$: F has a first-order proof of $\leq n$ symbols

$$\text{THEOREM} = \left\{ (F, 1^n) : \vdash^n F \right\}$$

"If there really were a machine with
$\varphi(n) \sim k \cdot n$ *(or even* $\sim k \cdot n^2$*),*
this would have consequences of the greatest importance."

$$\text{THEOREM} = \left\{ (F, 1^n) : \vdash^n F \right\}$$

$$\text{THEOREM} \in \text{NP}$$

THEOREM is NP-complete.

Definition (NP)

$$L \in \text{NP}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists$ poly. time *verifier* $V(x, c)$ such that

$$\forall x \in \{0,1\}^* : x \in L \iff \exists c \text{ with } |c| = O(|x|^k), V(x, c) = 1.$$

NP-problems has short certificates that are easy to verify.

Theorem

$$P \subseteq NP \subseteq EXP$$

$$\mathrm{P} = \left\{ L : L \text{ is decided by a poly. time } (O(n^k)) \text{ algorithm } A \right\}$$

$$\mathrm{EXP} = \left\{ L : L \text{ is decided by an exp. time } (O(2^{n^k})) \text{ algorithm } A \right\}$$

Proof.

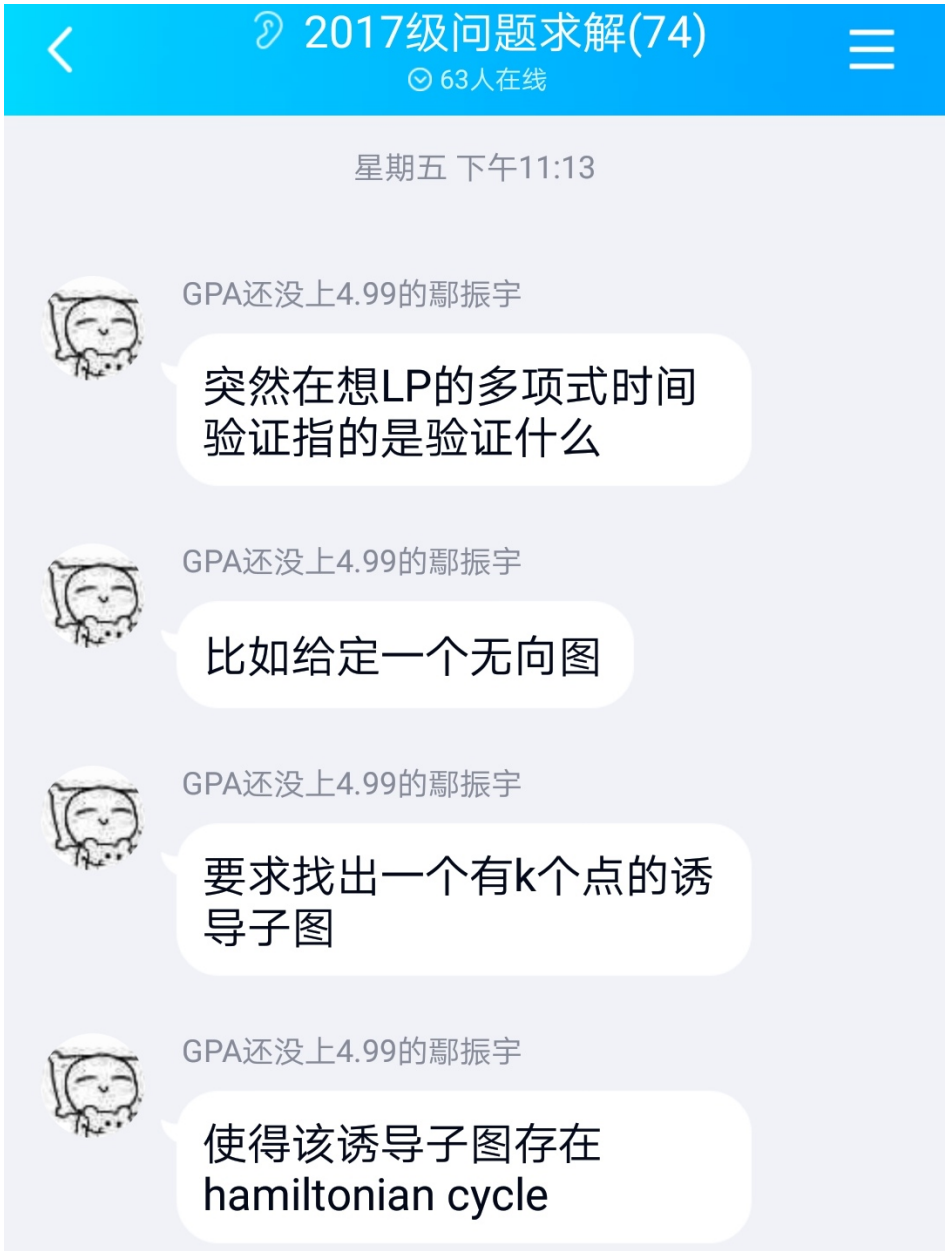
$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$

$V \leftarrow A$

$c \leftarrow \epsilon$

$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{EXP}$

Enumerate all possible c's
$(\# = 2^{O(|x|^k)})$


2017级问题求解(74)
63人在线
星期五 下午11:13
GPA还没上4.99的鄢振宇
突然在想LP的多项式时间验证指的是验证什么
GPA还没上4.99的鄢振宇
比如给定一个无向图
GPA还没上4.99的鄢振宇
要求找出一个有k个点的诱导子图
GPA还没上4.99的鄢振宇
使得该诱导子图存在hamiltonian cycle

Definition (HC-SUBGRAPH)

INSTANCE: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

QUESTION: Is there a V'-induced subgraph $G[V']$ of G with $|V'| \geq k$ which is Hamiltonian?

Q : HC-SUBGRAPH $\in$ NP?

c : V' in HC order

Q : HC-SUBGRAPH $\in$ NP-complete?

HAM-CYCLE $\leq_p$ HC-SUBGRAPH

Closure of NP (CLRS 34.2-4)

NP is closed under $\cup, \cap, \cdot, \star$.

$$L_1 \in \text{NP}, L_2 \in \text{NP} \implies L = L_1 \circ L_2 \in \text{NP}$$

$$L_1 \in \text{NP}, L_2 \in \text{NP} \implies L = L_1 \cup L_2 \in \text{NP}$$

```
1: procedure V(x, c)
2:     if c ≠ c_1#c_2 then
3:         return 0
4:     return V(x, c_1) ∨ V(x, c_2)
```

$$x \in L_1 \cup L_2 \iff \exists c, V(x, c) = 1$$

$$L_1 \in \text{NP}, L_2 \in \text{NP} \implies L = L_1 \cap L_2 \in \text{NP}$$

```
1: procedure V(x, c)
2:     if c ≠ c_1#c_2 then
3:         return 0
4:     return V(x, c_1) ∧ V(x, c_2)
```

$$x \in L_1 \cap L_2 \iff \exists c, V(x, c) = 1$$

$$L_1 \in \text{NP}, L_2 \in \text{NP} \implies L = L_1 \cdot L_2 \in \text{NP}$$

1: **procedure** V(x, c)
2: **if** $c \neq c_1 \# c_2 \& m$ **then**
3: **return** 0
4: **return** $V(x_{1...m}, c_1) \wedge V(x_{m+1...|x|}, c_2)$

$$x \in L_1 \cdot L_2 \iff \exists c, V(x, c) = 1$$

$$L \in \mathrm{NP} \implies L^\star \in \mathrm{NP}$$

1: **procedure** $\mathrm{V}(x, c)$
2: **for** $k \leftarrow 1$ **to** $|x|$ **do**
3: $m_0 \leftarrow 0, m_k \leftarrow |x|$
4: **if** $c = c_1 \# c_2 \# \cdots \# c_k \& m_1 \& m_2 \& \cdots \& m_{k-1}$ **then**
5: **return** $\bigwedge_{i=1}^{i=k} V(x_{m_{i-1}+1 \ldots m_i}, c_i)$

$$x \in L^\star \iff \exists c, A(x, c) = 1$$

$$\text{coNP} = \left\{ L : \overline{L} \in \text{NP} \right\}$$

$$\text{UNSAT} = \left\{ \varphi : \varphi \text{ is unsatisfiable.} \right\}$$

Definition (coNP)

$$L \in \text{coNP}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists$ poly. time *verifier* $V(x, c)$ such that

$$\forall x \in \{0,1\}^* : x \notin L \iff \exists c \text{ with } |c| = O(|x|^k), V(x, c) = 1.$$

coNP-problems has short counterexamples that are easy to verify.

$$\text{PM} = \Big\{G : G \text{ is bipartite } (V = X \uplus Y) \text{ and has a perfect matching}\Big\}$$

$$\text{PM} \in \text{NP}$$

$$\text{PM} \in \text{coNP}$$

$$\forall A \subseteq X : \Big|N(A)\Big| \geq |A| \quad \text{(Hall's Condition)}$$

$$\text{coNP} \neq \{0,1\}^* \setminus \text{NP}$$

$$\text{P} \subseteq \text{NP} \cap \text{coNP}$$

$$\text{P} = \text{NP} \implies \text{NP} = \text{coNP}$$

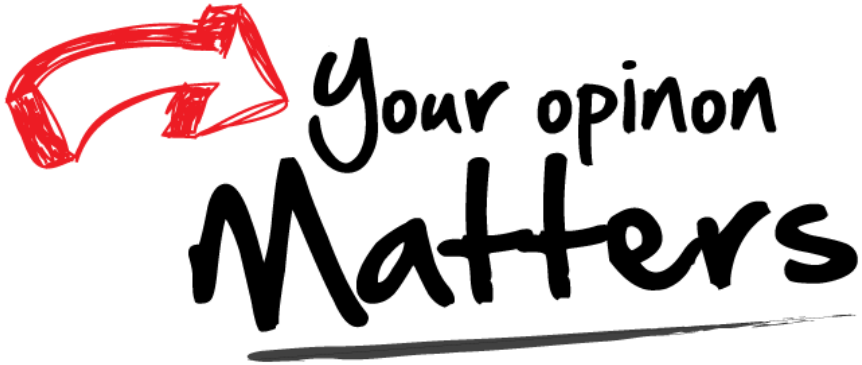
Unsolved problem in computer science:

? $\text{NP} \stackrel{?}{=} \text{co-NP}$

(more unsolved problems in computer science)

$$\text{NP} \neq \text{coNP} \stackrel{?}{\implies} \text{P} \neq \text{NP}$$


THANK YOU



Office 302

Mailbox: H016

hfwei@nju.edu.cn