问题求解 (一) 期末试卷

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2018 年 03 月 05 日

试卷批改基本原则

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因，选派要求如下:

(1) 若赵去，钱也去;
(2) 李、吴两人中必有一人去;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;
(4) 孙、李两人同去或同不去;
(5) 若吴去，则赵、钱也去;
(6) 只有孙去，赵才会去。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因，选派要求如下:

(1) 若赵去，钱也去;

(2) 李、吴两人中必有一人去;

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;

(4) 孙、李两人同去或同不去;

(5) 若吴去，则赵、钱也去;

(6) 只有孙去，赵才会去。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

$$Z,\ Q,\ S,\ L,\ W \text{ vs. } P,\ Q,\ R,\ S,\ T$$

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;	(1) $Z \to Q$;
(2) 李、吴两人中必有一人去;	(2) $L \lor W$;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;	(3) $(Q \land \neg S) \lor (S \land \neg Q)$;
(4) 孙、李两人同去或同不去;	(4) $(S \land L) \lor (\neg S \land \neg L)$;
(5) 若吴去, 则赵、钱也去;	(5) $W \to Z \land Q$;
(6) 只有孙去, 赵才会去。	(6) $Z \to S$。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

$Z,\ Q,\ S,\ L,\ W$ vs. $P,\ Q,\ R,\ S,\ T$

$$
\begin{aligned}
& (1) \land (2) \land (3) \land (4) \land (5) \land (6) \\
= & \cdots \\
= & \text{ONE PAGE HERE } \cdots \\
= & \neg Z \land \neg Q \land S \land L \land \neg W
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (6) \\
= & \cdots \\
= & \text{ONE PAGE HERE } \cdots \\
= & \neg Z \wedge \neg Q \wedge S \wedge L \wedge \neg W
\end{aligned}
$$

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”, 请判断 “结论” 是否有效, 并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;

(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧。

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”，请判断 “结论” 是否有效，并说明理由。
前提如下：

(1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者)；

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；

(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论：有的人不喜欢抗日神剧。

x: Human

$$A(x), \quad K(x), \quad J(x)$$

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”, 请判断 “结论” 是否有效, 并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
$\forall x : A(x) \vee K(x)$

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;
$\forall x : J(x) \to \neg A(x)$

(3) 有的人不喜欢韩剧。
$\exists x : \neg K(x)$

结论: 有的人不喜欢抗日神剧。 $\exists x : \neg J(x)$

x: Human

$$A(x), \quad K(x), \quad J(x)$$

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”，请判断 “结论” 是否有效，并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
$\forall x : A(x) \lor K(x)$

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧;
$\forall x : J(x) \to \neg A(x)$

(3) 有的人不喜欢韩剧。
$\exists x : \neg K(x)$

结论: 有的人不喜欢抗日神剧。 $\exists x : \neg J(x)$

x: Human $\quad Q : H(x)?$

$$A(x), \quad K(x), \quad J(x)$$

$$A, \quad K, \quad J$$

$$\forall x : A \lor K$$

$$\forall x : J \to \neg A$$

$$\exists x : \neg K$$

$$\exists x : \neg J$$

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^{+})$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^{+})$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\{1,2,3\}, \quad \{4,5,6\}, \quad \cdots, \quad \{3n-2, 3n-1, 3n\}$$

$\square$

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1,2,3,\cdots,3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\{1,2,3\}, \quad \{4,5,6\}, \quad \cdots, \quad \{3n-2, 3n-1, 3n\}$$

$\square$

Proof by contradiction:

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \cdots, \quad \{3n-2, 3n-1, 3n\}$$

□

Proof by contradiction:

$$1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 3n+1$$

□

常用证明方法

令 $S \subseteq \{x \mid 1 \le x \le 50, x \in \mathbb{N}\}$ 且 $|S| = 10$。
证明: 存在两个大小均为 4 的不同集合 $A, B \subseteq S$ $(A, B$ 可相交$)$, 它们的元素之和相等。

常用证明方法

令 $S \subseteq \{x \mid 1 \le x \le 50, x \in \mathbb{N}\}$ 且 $|S| = 10$。
证明: 存在两个大小均为 4 的不同集合 $A, B \subseteq S$ $(A, B$ 可相交$)$, 它们的元素之和相等。

Proof by the pigeonhole principle:

常用证明方法

令 $S \subseteq \{x \mid 1 \le x \le 50, x \in \mathbb{N}\}$ 且 $|S| = 10$。

证明：存在两个大小均为 4 的不同集合 $A, B \subseteq S$ (A, B 可相交)，它们的元素之和相等。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\binom{10}{4} = 210$$

vs.

$$\Big| \{1 + 2 + 3 + 4 = 10 \le x \le 47 + 48 + 49 + 50 = 194\} \Big|$$

$\square$

3. 集合的势 (Cardinality)

A 是由所有半径为有理数、圆心在 x 轴 (实数轴) 上的圆组成的集合。请问 A 的势是什么, 并给出证明。

3. 集合的势 (Cardinality)

A 是由所有半径为有理数、圆心在 x 轴 (实数轴) 上的圆组成的集合。请问 A 的势是什么, 并给出证明。

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \leq |Y| \land |Y| \leq |X| \implies |X| = |Y|$$

Definition ($|A| \leq |B|$)

$|A| \leq |B|$ if there exists an *one-to-one* function f from A into B.

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \leq |Y| \land |Y| \leq |X| \implies |X| = |Y|$$

Definition ($|A| \le |B|$)

$|A| \le |B|$ if there exists an *one-to-one* function f from A into B.

Q : Is "$\le$" a partial order?

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \le |Y| \land |Y| \le |X| \implies |X| = |Y|$$

Definition ($|A| \le |B|$)

$|A| \le |B|$ if there exists an *one-to-one* function f from A into B.

Q : Is "$\le$" a partial order?

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \le |Y| \land |Y| \le |X| \implies |X| = |Y|$$

$$\exists\, f : A \xrightarrow{1-1} B \land g : B \xrightarrow{1-1} A \implies \exists\, h : A \xleftrightarrow[onto]{1-1} B$$

By Julius König (1906).

$$A \uplus B$$

By Julius König (1906).

$$A \uplus B$$

$$a \in A : \cdots \to f^{-1}(g^{-1}(a)) \to g^{-1}(a) \to a \to f(a) \to g(f(a)) \to \cdots$$

By Julius König (1906).

$$A \uplus B$$

$$a \in A : \cdots \to f^{-1}(g^{-1}(a)) \to g^{-1}(a) \to a \to f(a) \to g(f(a)) \to \cdots$$

(i) $\cdots \rightsquigarrow \cdots$
(ii) $a \in A \rightsquigarrow \cdots$
(iii) $b \in B \rightsquigarrow \cdots$
(iv) $\cdots \rightsquigarrow a \in A$
(v) $\cdots \rightsquigarrow b \in B$

By Julius König (1906).

$$A \uplus B$$

$$a \in A : \cdots \to f^{-1}(g^{-1}(a)) \to g^{-1}(a) \to a \to f(a) \to g(f(a)) \to \cdots$$

(i) $\cdots \rightsquigarrow \cdots$

(ii) $a \in A \rightsquigarrow \cdots$

(iii) $b \in B \rightsquigarrow \cdots$

(iv) $\cdots \rightsquigarrow a \in A$

(v) $\cdots \rightsquigarrow b \in B$

Partition of $A \uplus B$

$\square$

5. 格 (Lattice)

假设 $(L, \leq)$ 是格。
如果以下模律 (modular law) 成立，则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

5. 格 (Lattice)

假设 $(L, \leq)$ 是格。
如果以下模律 (modular law) 成立，则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

$$\textit{vs.}\quad a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge (a \vee b)$$

5. 格 (Lattice)

假设 $(L, \leq)$ 是格。
如果以下模律 (modular law) 成立，则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

$$\textit{vs.} \quad a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge (a \vee b)$$

The stronger distributivity property is *not* available.

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) **请证明模律与以下条件等价**:

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) **请证明模律与以下条件等价:**

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\begin{gathered} \forall x \in L : a \le b \\ \implies \\ \Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b) \\ \iff \\ (a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b) \Big). \end{gathered}$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) 请证明模律与以下条件等价:

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\forall x \in L : a \le b$$
$$\implies$$
$$\Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b)$$
$$\iff$$
$$(a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b)\Big).$$

$$a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \vee x) \wedge b$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) 请证明模律与以下条件等价:

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\forall x \in L : a \le b$$
$$\implies$$
$$\Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b)$$
$$\iff$$
$$(a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b)\Big).$$

$$a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \vee x) \wedge b$$

$$a \le a \vee x, a \le b \implies a \le (a \vee x) \wedge b$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) 请证明模律与以下条件等价:

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\forall x \in L : a \le b$$
$$\implies$$
$$\Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b)$$
$$\iff$$
$$(a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b) \Big).$$

$$a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \vee x) \wedge b$$

$$a \le a \vee x, a \le b \implies a \le (a \vee x) \wedge b$$

$$x \wedge b \le (a \vee x) \wedge b$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(2) **请证明**: $\forall a, b, c \in L$,
如果 $c \le a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ **成立**, **则** $a = c$.

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(2) **请证明**: $\forall a, b, c \in L$,
如果 $c \le a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ **成立**, **则** $a = c$.

$$[a \leftarrow c] \quad [b \leftarrow a]$$

$$\forall x \in L : c \le a \implies c \vee (x \wedge a) = (c \vee x) \wedge a.$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(2) **请证明**: $\forall a, b, c \in L$,
如果 $c \le a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ **成立**, **则** $a = c$.

$$[a \leftarrow c] \quad [b \leftarrow a]$$

$$\forall x \in L : c \le a \implies c \vee (x \wedge a) = (c \vee x) \wedge a.$$

$$[x := b]$$

$$c \le a \implies c \vee (b \wedge a) = (c \vee b) \wedge a.$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(3) **给定任意元素** $s, t \in L$, **且** $s \leq t$, **构造集合 (称为区间** (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \leq x \leq t\}.$$

请证明 $([s, t], \leq)$ **是** L **的子格** (sublattice)。

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(3) 给定任意元素 $s, t \in L$, 且 $s \le t$, 构造集合 (称为区间 (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \le x \le t\}.$$

请证明 $([s, t], \le)$ 是 L 的子格 (sublattice)。

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(3) **给定任意元素** $s, t \in L$, **且** $s \le t$, **构造集合 (称为区间** (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \le x \le t\}.$$

请证明 $([s, t], \le)$ **是** L **的子格** (sublattice)。

$$a, b \in [s, t] \implies a \vee b, a \wedge b \in [s, t]$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(4) 给定任意元素 $a, b \in L$, 定义函数

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

请证明 φ (类似地, ψ) 是从 $[a \wedge b, b]$ 到 $[a, a \vee b]$ 的同构。

Definition (Lattice Isomorphism)

$$(L, \vee_L, \wedge_L) \qquad (M, \vee_M, \wedge_M)$$

A *lattice isomorphism* from L to M is a bijection

$$f : L \xleftrightarrow[onto]{1-1} M$$

such that $\forall a, b \in L$:

$$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_M f(b)$$
$$f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_M f(b)$$

Definition (Lattice Isomorphism)

$$(L, \vee_L, \wedge_L) \qquad (M, \vee_M, \wedge_M)$$

A *lattice isomorphism* from L to M is a bijection

$$f : L \xleftrightarrow[onto]{1-1} M$$

such that $\forall a, b \in L$:

$$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_M f(b)$$
$$f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_M f(b)$$

f preserving $\vee$ and $\wedge$.

φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$

φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee a$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) &= (x_1 \vee a) \wedge (x_2 \vee a) \\
&= (a \vee x_1) \wedge (x_2 \vee a) \\
&=_{\text{modular law}} a \vee (x_1 \wedge (x_2 \vee a)) \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

φ is bijective.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

φ is bijective.

Theorem (UD Theorem 15.8 (iii))

$$f : A \to B$$

$$\exists g : B \to A \left(g \circ f = i_A \land f \circ g = i_B \right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$f : A \to B \textit{ is bijective} \land g = f^{-1}$$

$$\psi \circ \varphi = id_{[a, a \vee b]} \qquad \varphi \circ \psi = id_{[a \wedge b, b]}$$

$$\psi \circ \varphi = id_{[a, a \vee b]} \qquad \varphi \circ \psi = id_{[a \wedge b, b]}$$

$$(\psi \circ \varphi)(y) = \psi(\varphi(y)) = (y \wedge b) \vee a = a \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge y = y$$

$$\psi \circ \varphi = id_{[a, a \vee b]} \qquad \varphi \circ \psi = id_{[a \wedge b, b]}$$

$$(\psi \circ \varphi)(y) = \psi(\varphi(y)) = (y \wedge b) \vee a = a \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge y = y$$

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = (x \vee a) \wedge b = x \vee (b \wedge a) = x$$

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

ψ preserving $\wedge$:

$$\psi(y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2 \wedge b = (y_1 \wedge b) \wedge (y_2 \wedge b) = \psi(y_1) \wedge \psi(y_2)$$

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

ψ preserving $\wedge$:

$$\psi(y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2 \wedge b = (y_1 \wedge b) \wedge (y_2 \wedge b) = \psi(y_1) \wedge \psi(y_2)$$

$$\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1)) \wedge \psi(\varphi(x_2)) = x_1 \wedge x_2$$

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

ψ preserving $\wedge$:

$$\psi(y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2 \wedge b = (y_1 \wedge b) \wedge (y_2 \wedge b) = \psi(y_1) \wedge \psi(y_2)$$

$$\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1)) \wedge \psi(\varphi(x_2)) = x_1 \wedge x_2$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi\Big(\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2))\Big) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(1) 如果定义 X 上的关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \triangleq x \leq y \land y \leq x,$$

则 $\sim$ 是 X 上的等价关系 (equivalence relation)。

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序，请证明:

(1) 如果定义 X 上的关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \triangleq x \leq y \wedge y \leq x,$$

则 $\sim$ 是 X 上的等价关系 (equivalence relation)。

reflexive + symmetric + transitive

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(2) 如果定义商集 (quotient set) $X/\sim$ 上的关系 $\preceq$ 为

$$[x]_{\sim} \preceq [y]_{\sim} \triangleq x \leq y,$$

则 $\preceq$ 是偏序关系 (partial order)。

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(2) 如果定义商集 (quotient set) $X/\sim$ 上的关系 $\preceq$ 为

$$[x]_\sim \preceq [y]_\sim \triangleq x \leq y,$$

则 $\preceq$ 是偏序关系 (partial order)。

reflexive + antisymmetric + transitive

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(2) 如果定义商集 (quotient set) $X/\sim$ 上的关系 $\preceq$ 为

$$[x]_\sim \preceq [y]_\sim \triangleq x \leq y,$$

则 $\preceq$ 是偏序关系 (partial order)。

reflexive + antisymmetric + transitive

Well-definedness!!!

Well-definedness: Independence of Representative

Well-definedness: Independence of Representative

$$[x_1] = [x_2] \land [y_1] = [y_2]$$

$$\Longrightarrow$$

$$[x_1] \preceq [y_1] \iff [x_2] \preceq [y_2]$$

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$$

$$[a]_n \times [b]_n = [ab]_n$$

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$$

$$[a]_n \times [b]_n = [ab]_n$$

$$Q : [a]_n^{[b]_n} = [a^b]_n$$

$\leq$: ??? relationship in a directed graph

$\leq$: Reachability relationship in a directed graph

$\leq$: Reachability relationship in a directed graph

$\sim, [x]_\sim$:

$\leq$: Reachability relationship in a directed graph

$\sim, [x]_\sim$: Strongly Connected Component (SCC)

$\leq$: Reachability relationship in a directed graph

$\sim, [x]_{\sim}$: Strongly Connected Component (SCC)

$\preceq$:

$\leq$: Reachability relationship in a directed graph

$\sim, [x]_{\sim}$: Strongly Connected Component (SCC)

$\preceq$: Reachability relationship in a condensed directed acyclic graph

5. 格 (Lattice)

假设 $(L, \leq)$ 是格。

如果以下模律 (modular law) 成立，则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

5. 格 (Lattice)

假设 $(L, \leq)$ 是格。
如果以下模律 (modular law) 成立，则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

vs. $a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge (a \vee b)$

5. 格 (Lattice)

假设 $(L, \leq)$ 是格。
如果以下模律 (modular law) 成立，则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

$$\textit{vs.} \quad a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge (a \vee b)$$

The stronger distributivity property is *not* available.

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) **请证明模律与以下条件等价:**

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \geq (a \vee x) \wedge b.$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) **请证明模律与以下条件等价**:

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\begin{gathered}\forall x \in L : {\color{blue} a \le b} \\ \implies \\ \Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b) \\ \iff \\ (a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b) \Big).\end{gathered}$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) **请证明模律与以下条件等价:**

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\forall x \in L : a \le b$$
$$\implies$$
$$\Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b)$$
$$\iff$$
$$(a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b) \Big).$$

$$a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \vee x) \wedge b$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) **请证明模律与以下条件等价:**

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\forall x \in L : a \le b$$
$$\implies$$
$$\Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b)$$
$$\iff$$
$$(a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b)\Big).$$

$$a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \vee x) \wedge b$$

$$a \le a \vee x, a \le b \implies a \le (a \vee x) \wedge b$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) 请证明模律与以下条件等价:

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b.$$

$$\forall x \in L : a \le b$$

$$\implies$$

$$\Big((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b)$$

$$\iff$$

$$(a \vee (x \wedge b) \ge (a \vee x) \wedge b)\Big).$$

$$a \le b \implies a \vee (x \wedge b) \le (a \vee x) \wedge b$$

$$a \le a \vee x, a \le b \implies a \le (a \vee x) \wedge b$$

$$x \wedge b \le (a \vee x) \wedge b$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(2) **请证明**: $\forall a, b, c \in L$,
如果 $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ **成立**, **则** $a = c$.

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(2) 请证明: $\forall a, b, c \in L$,
如果 $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ 成立, 则 $a = c$.

$$[a \leftarrow c] \quad [b \leftarrow a]$$

$$\forall x \in L : c \leq a \implies c \vee (x \wedge a) = (c \vee x) \wedge a.$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(2) **请证明**: $\forall a, b, c \in L$,
如果 $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ **成立**, **则** $a = c$.

$$[a \leftarrow c] \quad [b \leftarrow a]$$

$$\forall x \in L : c \leq a \implies c \vee (x \wedge a) = (c \vee x) \wedge a.$$

$$[x := b]$$

$$c \leq a \implies c \vee (b \wedge a) = (c \vee b) \wedge a.$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(3) 给定任意元素 $s, t \in L$, 且 $s \leq t$, 构造集合 (称为区间 (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \leq x \leq t\}.$$

请证明 $([s, t], \leq)$ 是 L 的子格 (sublattice)。

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(3) 给定任意元素 $s, t \in L$, 且 $s \le t$, 构造集合 (称为区间 (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \le x \le t\}.$$

请证明 $([s, t], \le)$ 是 L 的子格 (sublattice)。

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(3) **给定任意元素** $s, t \in L$, **且** $s \leq t$, **构造集合 (称为区间** (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \leq x \leq t\}.$$

请证明 $([s, t], \leq)$ **是** L **的子格** (sublattice)。

$$a, b \in [s, t] \implies a \vee b, a \wedge b \in [s, t]$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \le b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(4) 给定任意元素 $a, b \in L$, 定义函数

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

请证明 φ (类似地, ψ) 是从 $[a \wedge b, b]$ 到 $[a, a \vee b]$ 的同构。

Definition (Lattice Isomorphism)

$$(L, \vee_L, \wedge_L) \qquad (M, \vee_M, \wedge_M)$$

A *lattice isomorphism* from L to M is a bijection

$$f : L \xleftrightarrow[onto]{1-1} M$$

such that $\forall a, b \in L$:

$$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_M f(b)$$
$$f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_M f(b)$$

Definition (Lattice Isomorphism)

$$(L, \vee_L, \wedge_L) \qquad (M, \vee_M, \wedge_M)$$

A *lattice isomorphism* from L to M is a bijection

$$f : L \xleftrightarrow[onto]{1-1} M$$

such that $\forall a, b \in L$:

$$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_M f(b)$$
$$f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_M f(b)$$

f preserving $\vee$ and $\wedge$.

φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$

φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee a$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) &= (x_1 \vee a) \wedge (x_2 \vee a) \\
&= (a \vee x_1) \wedge (x_2 \vee a) \\
&=_{\text{modular law}} a \vee (x_1 \wedge (x_2 \vee a)) \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

φ is bijective.

$$\varphi : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

φ is bijective.

Theorem (UD Theorem 15.8 (iii))

$$f : A \to B$$

$$\exists g : B \to A \left(g \circ f = i_A \land f \circ g = i_B \right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$f : A \to B \textit{ is bijective} \land g = f^{-1}$$

$$\psi \circ \varphi = id_{[a, a \vee b]} \qquad \varphi \circ \psi = id_{[a \wedge b, b]}$$

$$\psi \circ \varphi = id_{[a,a \vee b]} \qquad \varphi \circ \psi = id_{[a \wedge b, b]}$$

$$(\psi \circ \varphi)(y) = \psi(\varphi(y)) = (y \wedge b) \vee a = a \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge y = y$$

$$\psi \circ \varphi = id_{[a, a \vee b]} \qquad \varphi \circ \psi = id_{[a \wedge b, b]}$$

$$(\psi \circ \varphi)(y) = \psi(\varphi(y)) = (y \wedge b) \vee a = a \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge y = y$$

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = (x \vee a) \wedge b = x \vee (b \wedge a) = x$$

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

ψ preserving $\wedge$:

$$\psi(y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2 \wedge b = (y_1 \wedge b) \wedge (y_2 \wedge b) = \psi(y_1) \wedge \psi(y_2)$$

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

ψ preserving $\wedge$:

$$\psi(y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2 \wedge b = (y_1 \wedge b) \wedge (y_2 \wedge b) = \psi(y_1) \wedge \psi(y_2)$$

$$\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1)) \wedge \psi(\varphi(x_2)) = x_1 \wedge x_2$$

Back to φ preserving $\vee$ and $\wedge$.

ψ preserving $\wedge$:

$$\psi(y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2 \wedge b = (y_1 \wedge b) \wedge (y_2 \wedge b) = \psi(y_1) \wedge \psi(y_2)$$

$$\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1)) \wedge \psi(\varphi(x_2)) = x_1 \wedge x_2$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi\Big(\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2))\Big) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$