

问题求解 (一) 期末试卷

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2018 年 03 月 05 日

一分也是爱



试卷批改基本原则

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

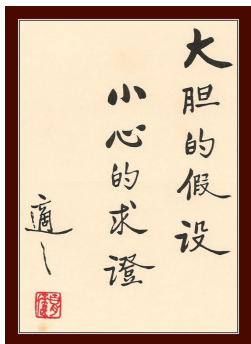
- | | |
|-------------------|--|
| (1) 若赵去, 钱也去; | (1) $Z \rightarrow Q$; |
| (2) 李、吴两人中必有一人去; | (2) $L \vee W$; |
| (3) 钱、孙两人中去且仅去一人; | (3) $(Q \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg Q)$; |
| (4) 孙、李两人同去或同不去; | (4) $(S \wedge L) \vee (\neg S \wedge \neg L)$; |
| (5) 若吴去, 则赵、钱也去; | (5) $W \rightarrow Z \wedge Q$; |
| (6) 只有孙去, 赵才会去。 | (6) $Z \rightarrow S$ 。 |

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

Z, Q, S, L, W vs. P, Q, R, S, T

$$\begin{aligned} & (1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (6) \\ & = \dots \\ & = \text{ONE PAGE HERE} \dots \\ & = \neg Z \wedge \neg Q \wedge S \wedge L \wedge \neg W \end{aligned}$$





1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下“前提”，请判断“结论”是否有效，并说明理由。
前提如下：

(1) 每个人或者喜欢美剧，或者喜欢韩剧（可以同时喜欢二者）；
 $\forall x : A(x) \vee K(x)$

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧，他就不喜欢美剧；
 $\forall x : J(x) \rightarrow \neg A(x)$

(3) 有的人不喜欢韩剧。
 $\exists x : \neg K(x)$

结论：有的人不喜欢抗日神剧。 $\exists x : \neg J(x)$

x : Human $Q : H(x)?$

$A(x), \quad K(x), \quad J(x)$

$$A, \quad K, \quad J$$

$$\forall x : A \vee K$$

$$\forall x : J \rightarrow \neg A$$

$$\exists x : \neg K$$

$$\exists x : \neg J$$

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \dots, \quad \{3n-2, 3n-1, 3n\}$$



Proof by contradiction:

$$1, 4, 7, \dots, 3n+1$$



常用证明方法

令 $S \subseteq \{x \mid 1 \leq x \leq 50, x \in \mathbb{N}\}$ 且 $|S| = 10$ 。

证明: 存在两个大小均为 4 的不同集合 $A, B \subseteq S$ (A, B 可相交), 它们的元素之和相等。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\binom{10}{4} = 210$$

VS.

$$\left| \{1 + 2 + 3 + 4 = 10 \leq x \leq 47 + 48 + 49 + 50 = 194\} \right|$$



3. 集合的势 (Cardinality)

A 是由所有半径为有理数、圆心在 x 轴 (实数轴) 上的圆组成的集合。
请问 A 的势是什么, 并给出证明。

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

Definition ($|A| \leq |B|$)

$|A| \leq |B|$ if there exists an *one-to-one* function f from A into B .

Q : Is " \leq " a partial order?

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder-Bernstein (1887))

$$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \implies |X| = |Y|$$

$$\exists f : A \xrightarrow{1-1} B \wedge g : B \xrightarrow{1-1} A \implies \exists h : A \xleftrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$$

By Julius König (1906).

$$A \uplus B$$

$$a \in A : \cdots \rightarrow f^{-1}(g^{-1}(a) \rightarrow g^{-1}(a) \rightarrow \textcolor{red}{a} \rightarrow f(a) \rightarrow g(f(a)) \rightarrow \cdots$$

- (i) $\cdots \rightsquigarrow \cdots$
- (ii) $a \in A \rightsquigarrow \cdots$
- (iii) $b \in B \rightsquigarrow \cdots$
- (iv) $\cdots \rightsquigarrow a \in A$
- (v) $\cdots \rightsquigarrow b \in B$

Partition of $A \uplus B$



4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(1) 如果定义 X 上的关系 \sim 为

$$x \sim y \triangleq x \leq y \wedge y \leq x,$$

则 \sim 是 X 上的等价关系 (equivalence relation)。

reflexive + symmetric + transitive

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(2) 如果定义商集 (quotient set) X/\sim 上的关系 \preceq 为

$$[x]_{\sim} \preceq [y]_{\sim} \triangleq x \leq y,$$

则 \preceq 是偏序关系 (partial order)。

reflexive + antisymmetric + transitive

Well-definedness!!!

Well-definedness: Independence of Representative

$$[x_1] = [x_2] \wedge [y_1] = [y_2]$$



$$[x_1] \preceq [y_1] \iff [x_2] \preceq [y_2]$$

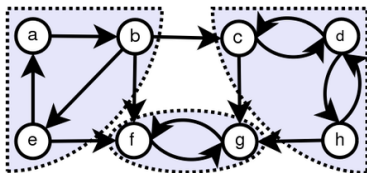
$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$

$$[a]_n \times [b]_n = [ab]_n$$

$$Q : [a]_n^{[b]_n} = [a^b]_n$$



\leq : ??? Reachability relationship in a directed graph



$\sim, [x]_{\sim}$: Strongly Connected Component (SCC)

\preceq : Reachability relationship in a condensed directed acyclic graph

5. 格 (Lattice)

假设 (L, \leq) 是格。

如果以下模律 (modular law) 成立, 则称 L 是模格 (modular lattice):

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

以下均假设 L 是模格。

$$\text{vs. } a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge (a \vee b)$$

The stronger distributivity property is *not* available.

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(1) 请证明模律与以下条件等价:

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \geq (a \vee x) \wedge b.$$

$$\forall x \in L : a \leq b$$

$$\implies$$

$$\left((a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b) \right.$$

$$\iff$$

$$\left. (a \vee (x \wedge b) \geq (a \vee x) \wedge b) \right).$$

$$a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) \leq (a \vee x) \wedge b$$

$$a \leq a \vee x, a \leq b \implies a \leq (a \vee x) \wedge b$$

$$x \wedge b \leq (a \vee x) \wedge b$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(2) 请证明: $\forall a, b, c \in L$,

如果 $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ 成立, 则 $a = c$.

$$[a \leftarrow c] \quad [b \leftarrow a]$$

$$\forall x \in L : c \leq a \implies c \vee (x \wedge a) = (c \vee x) \wedge a.$$

$$[x := b]$$

$$c \leq a \implies c \vee (b \wedge a) = (c \vee b) \wedge a.$$

5. 格 (Lattice)

$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(3) 给定任意元素 $s, t \in L$, 且 $s \leq t$, 构造集合 (称为区间 (interval)):

$$[s, t] \triangleq \{x \in L \mid s \leq x \leq t\}.$$

请证明 $([s, t], \leq)$ 是 L 的子格 (sublattice)。



$$a, b \in [s, t] \implies a \vee b, a \wedge b \in [s, t]$$

5. 格 (Lattice)

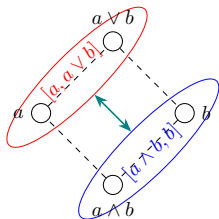
$$\forall x \in L : a \leq b \implies a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b.$$

(4) 给定任意元素 $a, b \in L$, 定义函数

$$\varphi : [a \wedge b, b] \rightarrow [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \rightarrow [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

请证明 φ (类似地, ψ) 是从 $[a \wedge b, b]$ 到 $[a, a \vee b]$ 的同构。



Definition (Lattice Isomorphism)

$$(L, \vee_L, \wedge_L) \quad (M, \vee_M, \wedge_M)$$

A *lattice isomorphism* from L to M is a bijection

$$f : L \xleftrightarrow[\text{onto}]{1-1} M$$

such that $\forall a, b \in L$:

$$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_M f(b)$$

$$f(a \wedge_L b) = f(a) \wedge_M f(b)$$

f preserving \vee and \wedge .

φ preserving \vee and \wedge .

$$\varphi : [a \wedge b, b] \rightarrow [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee a$$

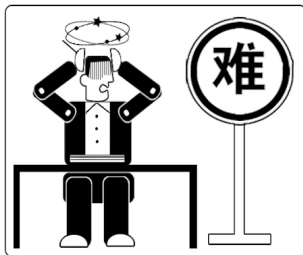
$$\begin{aligned} \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) &= (x_1 \vee a) \wedge (x_2 \vee a) \\ &= (a \vee x_1) \wedge (x_2 \vee a) \\ &=_{\text{modular law}} a \vee (x_1 \wedge (x_2 \vee a)) \\ &= \dots \end{aligned}$$



$$\varphi : [a \wedge b, b] \rightarrow [a, a \vee b] \quad \varphi(x) = x \vee a$$

$$\psi : [a, a \vee b] \rightarrow [a \wedge b, b] \quad \psi(y) = y \wedge b$$

φ is bijective.



Theorem (UD Theorem 15.8 (iii))

$$f : A \rightarrow B$$

$$\exists g : B \rightarrow A \left(g \circ f = i_A \wedge f \circ g = i_B \right)$$

$$\implies$$

$$f : A \rightarrow B \text{ is bijective} \wedge g = f^{-1}$$

$$\psi \circ \varphi = id_{[a, a \vee b]} \quad \varphi \circ \psi = id_{[a \wedge b, b]}$$

$$(\psi \circ \varphi)(y) = \psi(\varphi(y)) = (y \wedge b) \vee a = a \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge y = y$$

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = (x \vee a) \wedge b = x \vee (b \wedge a) = x$$

Back to φ preserving \vee and \wedge .

ψ preserving \wedge :

$$\psi(y_1 \wedge y_2) = y_1 \wedge y_2 \wedge b = (y_1 \wedge b) \wedge (y_2 \wedge b) = \psi(y_1) \wedge \psi(y_2)$$

$$\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1)) \wedge \psi(\varphi(x_2)) = x_1 \wedge x_2$$

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) = \varphi(\psi(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2))) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)$$

6. 布尔代数 (Boolean Algebra)

给定某布尔表达式 $E = xy' + xyz' + x'y z'$, 请证明:

(1) $xz' + E = E$

(2) $x + E \neq E$



$$E = xy'z + xy'z' + xyz' + x'y z'$$

$$xz' = xyz' + xy'z'$$

$$x = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

7. 算法设计与正确性证明

在“掼蛋”游戏中, 5 张大小连续的扑克牌构成一个顺子 (如 $A\ 2\ 3\ 4\ 5$ 和 $10\ J\ Q\ K\ A$ 都是顺子; 不考虑花色)。

任给 13 张从小到大的牌 (允许不同花色重复, 如 $A\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ J\ Q\ K$):

- (1) 请设计算法, 找到所有的顺子。
- (2) 请使用“循环不变式” (loop invariants) 证明你设计的算法的正确性。
- (3) 数学归纳法的正确性也是需要证明的。请证明第一数学归纳法的正确性。(不允许使用第二数学归纳法证明。)

7. 算法设计与正确性证明

(1) 任给 13 张从小到大的牌, 请设计算法, 找到所有的顺子。

Preprocessing:

$A\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ J\ Q\ K$

$A\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K$

$A\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ A$

“Sliding Window” Algorithm:

```
i ← 1 // starting index of the sliding window
cnt ← 1
while (i ≤ n - 4) // n: # of cards
    while (cnt ≠ 5)
        if (P[i + cnt] == P[i + cnt - 1] + 1)
            cnt++
        else // fail: skip cnt
            i ← i + cnt
            cnt ← 1
            break
    if (cnt == 5) // succeed: slid by one
        print P[i] ... P[i + cnt - 1]
        i++
        cnt ← 4 // only need to check the new card
```



7. 算法设计与正确性证明

(2) 请使用“循环不变式” (loop invariants) 证明你设计的算法的正确性。



`while` ($i \leq n - 4$) : the `straight` starting at $P[k]$ ($k < i$) has been found

`OR` does not exist

7. 算法设计与正确性证明

- (3) 数学归纳法的正确性也是需要证明的。请证明第一数学归纳法的正确性。(不允许使用第二数学归纳法证明。)

Well-ordering Principle \implies Principle of Mathematical Induction

Definition (Well-ordering Principle)

Every non-empty subset of \mathbb{N} contains a least element.

Definition (Principle of Mathematical Induction)

$$\left[P(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}^+ (P(n) \rightarrow P(n+1)) \right] \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ P(n).$$

WOP \implies PMI.

By contradiction.

$$Q = \{k \in \mathbb{N} \mid \neg P(k)\} \neq \emptyset$$

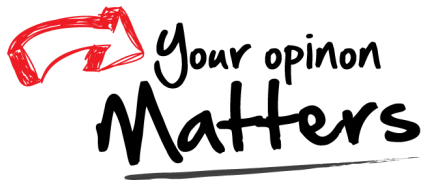
$$k = \min Q$$

$$k \neq 1 \implies k > 1$$

$$k - 1 \notin Q \implies P(k - 1) \implies P(k)$$



Thank
You!



Office 302

Mailbox: H016

hfwei@nju.edu.cn