第10卷 第3期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 3
1960年12月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Dec., 1960

奇偶点图上作业法*

管梅谷
(山东师范学院)

§1. 問題的提出

在邮局搞綫性規划时,发現了下述問題:"一个投递員每次上班,要走遍他負責送信的段[1)],然后回到邮局. 問应該怎样走才能使所走的路程最短."

这个問題可以归結为

"在平面上給出一个連通的綫性图[2)],要求将这个綫性图从某一点开始一笔画出(允許重复),并且最后仍回到起点,問怎样画才能使重复路綫最短."

我們把关于一笔画的一些巳知的結果和物資調拨中的图上作业法[1]的基本思想結合起来,得到了解决上述問題的一种方法,即奇偶点图上作业法.

§2. 一些基本概念

为了以下叙述的方便,先把有关綫性图的一些概念以及对本文有用的有关一笔画的巳知結果[2]列举如下:

1. 我們把綫性图理解成平面上滿足下面四个条件的有限个点 $P=\{P_1, P_2, \cdots, P_r\}$ 与有限条弧 $L=\{l_1, l_2, \cdots, l_s\}$ 所成的集合:

(1) 任意弧 $l_k \in L$ 有二个不同的端点,且属于 P;

(2) 任意 $P_i \in P$ 都至少是 L 中一条弧的端点;

(3) 任意 P_i 不能是任意 l_k 的內点;

(4) L 的任意二条弧不能有公共的內点.

若 P_i 是 l_k 的一个端点,我們也說 l_k 是由 P_i 出发的弧.

此外,我們还假定每条弧都有一个"长度",即都对应一个确定的正实数.

2. 称弧 $l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_t}$ 組成一条鏈,若它們的端点 $(P'_{i_1}, P''_{i_1}), (P'_{i_2}, P''_{i_2}), \cdots, (P'_{i_t}, P''_{i_t})$ 滿足 $P''_{i_1}=P'_{i_2}, P''_{i_2}=P'_{i_3}, \cdots, P''_{i_{t-1}}=P'_{i_t}$; 但 $P'_{i_1} \neq P''_{i_t}$, 这时称 P'_{i_1} 与 P''_{i_t} 为这条鏈的端点,我們也說这条鏈把 P'_{i_1} 与 P''_{i_t} 連起来了.

3. 称一个綫性图为連通的,若对于它的任意二个不同的点,存在一条鏈把它們連起来.

4. 若一組弧 $l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_t}$ 的端点 $(P'_{i_1}, P''_{i_1}), (P'_{i_2}, P''_{i_2}), \cdots, (P'_{i_t}, P''_{i_t})$ 滿足 $P''_{i_1}=P'_{i_2}, P''_{i_2}=P'_{i_3}, \cdots, P''_{i_{t-1}}=P'_{i_t}, P''_{i_t}=P'_{i_1}$, 且 $P'_{i_1}, P'_{i_2}, \cdots, P'_{i_t}$ 互不相同, 則

* 1960年10月7日收到.

1) 邮局里通常把每个投递員送信的范围称为一个段.

2) 每个段通常总是連通的.

称 $l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_t}$ 为一个圈.

5. 綫性图中的一个点,若从它出发的弧数为奇(偶)数,則称为奇(偶)点.

6. 任何綫性图中奇点的个数为偶数.

7. 一个連通綫性图能够不重复地一笔画出的充要条件是奇点的个数为 0 或 2.

8. 假使要求一笔画从綫性图的某一点开始,最后仍旧回到这个点,那末一个連通綫性图能够不重复地一笔画出的充要条件是沒有奇点. 在这个条件满足时,可以从这个綫性图的任意一点开始不重复地一笔画出这个綫性图.

§3. 如何使一笔画中重复路綫最短

一个綫性图若有奇点,則要求从綫性图中某一个点开始,一笔画完这个綫性图,最后回到起点是必須有重复的. 現在来研究怎样使重复路綫最短,例如图 1 中的綫性图有四个奇点 C, D, E, F,若要求从 A 开始将这个图形一笔画出,最后仍回到 A,則必須有重复. 若将某一种画法的重复路綫也添在图上,則所有点一定都变成偶点了. 反之,若能先在綫性图上添一些弧,使得添弧后的綫性图中所有点都是偶点,那么添弧后的綫性图就能够不重复地一笔画出,而所添的弧就是重复路綫. 如可以在图 1 中的 CD 与 EF 間各添一条弧,使图形中的点都变成偶点(見图 2),从 A 点开始,将图 2 中的图形不重复地一笔画出就得到图 3.

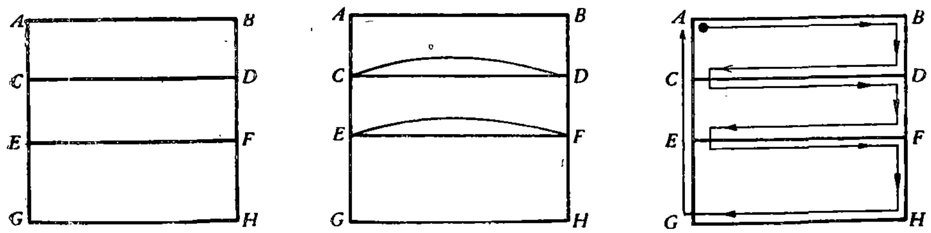

图 1　　　　图 2　　　　图 3

因此,重复路綫的长度就是添弧的长度,而使一笔画中重复路綫最短的問題就归結成以下的数学問題:

"設一个連通的綫性图有 $2n$ 个奇点,而其余的点都是偶点. 現在要在一些弧上添一些'重复弧'(一条弧上可以添一条或几条,并設每条重复弧与原来的弧有相同的长度,今后簡称添重复弧为添弧),使得添弧后的綫性图沒有奇点(即从奇点出发的添弧必須是奇数条,从偶点出发的添弧必須是偶数条),并且使得添弧的总长度为最小."

为了以下証明基本定理的方便,我們把这个問題提成更一般些的形式:

"設在一个連通綫性图上指定了 $2n$ 个点,現在要在图上添一些重复弧,使得从这 $2n$ 个点中任意一个点出发的添弧数是奇数,而从其他点出发的添弧数是偶数,而且要使添弧的总长度最小."

为了方便,我們把指定的 $2n$ 个点都称为奇点,而把其余点称为偶点.

我們称一組有限个添弧的集合为可行解,若从指定的 $2n$ 个点出发的添弧都是奇数条,而从其他点出发的添弧都是偶数条.

不难看出,可行解永远可以看成是 n 条把所有奇点一对一对分別連起来的鏈,反之,

任意 n 条这样的鏈一定是可行解. 由此可以看出可行解一定是存在的，并且要具体找一組可行解也是很容易的. 可行解中总长度达到最小的称为最优解.

§4. 基本定理

定理. 可行解为最优解的充要条件是下述二个条件都满足：

（1）不重迭.

（2）每个圈上添弧的长度和不超过圈长的一半.

条件(1)中的重迭是指在一条弧上有二个或更多的添弧.

証. 必要性的証明：

若一組可行解不满足(1)，則显然去掉重迭的二条添弧后，余下的添弧仍組成可行解，但总长度却比原来的小，故原可行解不是最优解.

若一組可行解不满足(2)，卽存在一个圈，圈上添弧长超过了圈长的一半. 这时，圈上沒有添弧的弧长之和小于圈长的一半，現在将这个圈中原来有添弧处都減去一条添弧，而原来沒有添弧处都添上弧. 則显然添弧的总长度減小了，而且不难看出，变化后的添弧組仍是可行解，故原可行解不是最优解.

充分性的証明：

先証明下述引理：

引理 1. 設有二組可行解都满足条件(1)与(2)，那末它們的添弧的总长度一定相等.

証. 設 M 与 N 是二組满足(1)与(2)的可行解. 若 M 与 N 在同一条弧上都有添弧，这条弧的端点設为 P_i 与 P_j.

現在我們考虑另外一个問題，它是由原問題将点 P_i 与 P_j 的奇偶性对换而得来的(卽将 P_i 与 P_j 由"是指定的点"与"不是指定的点"对換而得来的). 另外再考虑新問題的二組可行解 M' 与 N'，M' 与 N' 分别为由 M 与 N 除去 P_i 与 P_j 間共有的添弧而得的. 易見 M' 与 N' 的确是新問題的可行解，并且仍旧都满足(1)与(2). 这样一来，要証明 M 与 N 的添弧总长度相等就归結为証明 M' 与 N' 的添弧总长度相等了.

若 M' 与 N' 仍在同一条弧上都有添弧，則可用上述办法再去掉，因此，我們可以不妨假設 M 与 N 原来就不在任何同一条弧上都有添弧.

若 M 与 N 都是空集，則它們的总长度当然相等. 今設 M 不是空集. 前面已經說过，可行解可以看成是一些把奇点一对一对地連起来的鏈的集合. 我們从 M 中任取这样的一鏈 C_0，它的端点設为 P_{i_0} 与 P_{i_1}，由于 P_{i_1} 是奇点，故必存在 N 中的一鏈 C_1，端点为 P_{i_1} 与 P_{i_2}，再取 M 的一个以 P_{i_2} 为一端点的鏈 $C_2, \cdots$，由于奇点有限，因此，这样取下去，一定会得到一条鏈 C_k，它的端点为 P_{i_k} 与 $P_{i_{k+1}}$，但 $P_{i_{k+1}} = P_{i_j}$，$0 \leqslant j \leqslant k-1$，这时，由 M 与 N 沒有在同一弧上公共添弧的假定，不难看出，在鏈組

$$C_j,\ C_{j+1},\ \cdots,\ C_k$$

中必包含一个圈(若这些鏈"自身不相交"，則这个圈就由这些鏈組成)，并且这个圈的每段弧上都有 M 或 N 的添弧.

在上述圈上，M 的添弧长加 N 的添弧长等于圈长，但 M 与 N 都满足(2)，因此这个圈上 M 与 N 的添弧长都等于圈长的一半.

我們現在又可以考虑一个新問題，它是将上述圈上M的添弧的端点的奇偶性交换而得来的．若一个点是M的二个添弧的端点，則交换二次(即不变)．

然后考虑新問題的二組可行解 M'' 与 N''，它們是由M与N中去掉上述圈上所有添弧而得来的．易見 M'' 与 N'' 的确是新問題的可行解，且滿足(1)与(2)，而且要証明M与N的添弧总长度相等可以归結为証明 M'' 与 N'' 的添弧总长度相等．

若 M'' 或 N'' 仍不是空集，则可再归結成另一問題，……．由于每次由一对可行解归結成另一对可行解时，添弧的条数都减小，故最后一定会得到一对可行解都是空集，而这就証明了M与N原来的添弧总长度互相相等． 引理 1 証完．

引理 2. 最优解必存在．

証．不难看出，对任意一組不滿足 (1) 的可行解而言，一定可以在去掉重迭后得到一組添弧总长度比它小的滿足(1)的可行解．此外又易見，滿足(1)的可行解是有限的．因此，有限个滿足(1)的可行解中添弧总长度最小的一定是最优解． 引理 2 証完．

利用引理 1 与 2 就很容易得出充分性的証明了．事实上，最优解必存在，且必須滿足(1)与(2)．但是滿足(1)与(2)的可行解的添弧总长度都一样，因此滿足(1)与(2)的可行解都是最优解． 定理証完．

有了上述定理就可以具体把最优解找出来了．我們可以先任取一組可行解，若它不滿足(1) 或 (2)，就可以象証明上述定理的必要性那样进行調整，由于滿足(1)的可行解有限，且每次調整添弧的总长度都减小，因此經过有限步調整后一定可以得到最优解．

§5. 找最好投递路綫的工作步驟

把前面所講的总結起来，可得寻找最好投递路綫的具体工作步驟如下：

1. 画段道图：即将所要走的段的图形画出．有时有些寬馬路两边要分开送信，应該画成二条弧．
2. 找出段道图上的所有奇点．
3. 利用上节所講的方法找出一組最优解，幷将最优解中的添弧画在图上．
4. 不重复地一笔将添弧后的图形画出．

例．图 4 中×代表邮局，各条弧长假定与图中画的成比例．有○处为奇点，虛綫为最优解中的添弧．将图 4 中添了弧后的图形不重复地一笔画出即得图 5 中的最好投递路綫．

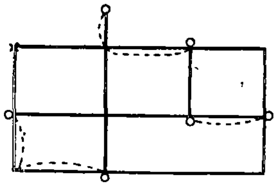

图 4

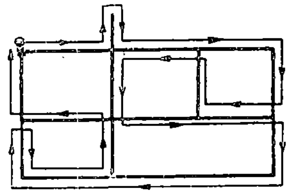

图 5

参 考 文 献

[1] 物資調运工作中的先进方法——图上作业法，数学通报，1958，11 期．
[2] 孙泽瀛，数学方法趣引，科学技术出版社，1956．