2019-1 Review

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2019 年 12 月 26 日


Are You Ready ?

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;

(2) 李、吴两人中必有一人去;

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;

(4) 孙、李两人同去或同不去;

(5) 若吴去, 则赵、钱也去;

(6) 只有孙去, 赵才会去。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

(1) 若赵去, 钱也去;

(2) 李、吴两人中必有一人去;

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;

(4) 孙、李两人同去或同不去;

(5) 若吴去, 则赵、钱也去;

(6) 只有孙去, 赵才会去。

请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

$$Z,\ Q,\ S,\ L,\ W$$

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(1) 某公司要从赵、钱、孙、李、吴 5 名员工中选派某些人出国考察。由于某些不可描述的原因, 选派要求如下:

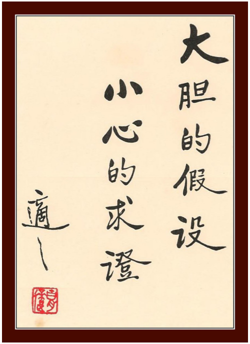
(1) 若赵去, 钱也去;	(1) $Z \to Q$;
(2) 李、吴两人中必有一人去;	(2) $L \vee W$;
(3) 钱、孙两人中去且仅去一人;	(3) $(Q \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg Q)$;
(4) 孙、李两人同去或同不去;	(4) $(S \wedge L) \vee (\neg S \wedge \neg L)$;
(5) 若吴去, 则赵、钱也去;	(5) $W \to Z \wedge Q$;
(6) 只有孙去, 赵才会去。	(6) $Z \to S$。

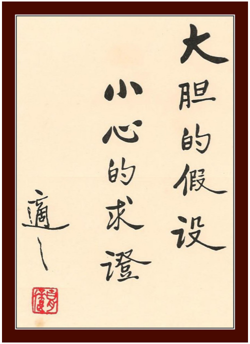
请使用形式化推理的方法帮该公司判断应选哪些人出国考察。

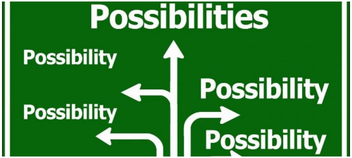
$Z,\ Q,\ S,\ L,\ W$

$$
\begin{aligned}
& (1) \land (2) \land (3) \land (4) \land (5) \land (6) \\
= & \cdots \\
= & \text{ONE PAGE HERE } \cdots \\
= & \neg Z \land \neg Q \land S \land L \land \neg W
\end{aligned}
$$

$$(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (6)$$
$$= \cdots$$
$$= \text{ONE PAGE HERE } \cdots$$
$$= \neg Z \wedge \neg Q \wedge S \wedge L \wedge \neg W$$


大胆的假设
小心的求證
適之


大胆的假设
小心的求證
適之


Possibilities
Possibility
Possibility
Possibility
Possibility

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”, 请判断 “结论” 是否有效, 并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;
(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧。

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”, 请判断 “结论” 是否有效, 并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;

(3) 有的人不喜欢韩剧。

结论: 有的人不喜欢抗日神剧。

$$x\text{: Human}$$

$$A(x), \quad K(x), \quad J(x)$$

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”, 请判断 “结论” 是否有效, 并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
$\forall x : A(x) \lor K(x)$

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;
$\forall x : J(x) \to \neg A(x)$

(3) 有的人不喜欢韩剧。
$\exists x : \neg K(x)$

结论: 有的人不喜欢抗日神剧。 $\exists x : \neg J(x)$

x: Human

$$A(x), \quad K(x), \quad J(x)$$

1. “算一算” (Let us Calculate!)

(2) 给定如下 “前提”, 请判断 “结论” 是否有效, 并说明理由。
前提如下:

(1) 每个人或者喜欢美剧, 或者喜欢韩剧 (可以同时喜欢二者);
$\forall x : A(x) \lor K(x)$

(2) 任何人如果他喜欢抗日神剧, 他就不喜欢美剧;
$\forall x : J(x) \to \neg A(x)$

(3) 有的人不喜欢韩剧。
$\exists x : \neg K(x)$

结论: 有的人不喜欢抗日神剧。 $\exists x : \neg J(x)$

x: Human $\quad Q : H(x)?$

$$A(x), \quad K(x), \quad J(x)$$

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n + 1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \cdots, \quad \{3n - 2, 3n - 1, 3n\}$$

□

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \cdots, \quad \{3n-2, 3n-1, 3n\}$$

$\square$

Proof by contradiction:

2. 常用证明方法

证明: 从 $\{1, 2, 3, \cdots, 3n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 中任选 $n+1$ 个数, 则总存在两个数, 它们的差不超过 2。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \cdots, \quad \{3n-2, 3n-1, 3n\}$$

□

Proof by contradiction:

$$1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 3n+1$$

□

常用证明方法

令 $S \subseteq \{x \mid 1 \le x \le 50, x \in \mathbb{N}\}$ 且 $|S| = 10$。
证明: 存在两个大小均为 4 的不同集合 $A, B \subseteq S$ $(A, B$ 可相交), 它们的元素之和相等。

常用证明方法

令 $S \subseteq \{x \mid 1 \le x \le 50, x \in \mathbb{N}\}$ 且 $|S| = 10$。
证明: 存在两个大小均为 4 的不同集合 $A, B \subseteq S$ (A, B 可相交), 它们的元素之和相等。

Proof by the pigeonhole principle:

常用证明方法

令 $S \subseteq \{x \mid 1 \le x \le 50, x \in \mathbb{N}\}$ 且 $|S| = 10$。
证明: 存在两个大小均为 4 的不同集合 $A, B \subseteq S$ (A, B 可相交), 它们的元素之和相等。

Proof by the pigeonhole principle:

$$\binom{10}{4} = 210$$

$$vs.$$

$$\Big|\{1+2+3+4 = 10 \le x \le 47+48+49+50 = 194\}\Big|$$

$\square$

3. 集合的势 (Cardinality)

A 是由所有半径为有理数、圆心在 x 轴 (实数轴) 上的圆组成的集合。请问 A 的势是什么, 并给出证明。

3. 集合的势 (Cardinality)

A 是由所有半径为有理数、圆心在 x 轴 (实数轴) 上的圆组成的集合。请问 A 的势是什么, 并给出证明。

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \le |Y| \land |Y| \le |X| \implies |X| = |Y|$$

Definition ($|A| \le |B|$)

$|A| \le |B|$ if there exists an *one-to-one* function f from A into B.

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \le |Y| \land |Y| \le |X| \implies |X| = |Y|$$

Definition ($|A| \leq |B|$)

$|A| \leq |B|$ if there exists an *one-to-one* function f from A into B.

Q : Is "$\leq$" a partial order?

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \implies |X| = |Y|$$

Definition ($|A| \le |B|$)

$|A| \le |B|$ if there exists an *one-to-one* function f from A into B.

Q : Is "$\le$" a partial order?

Theorem (Cantor-(Dedekind)-Schröder–Bernstein (1887))

$$|X| \le |Y| \land |Y| \le |X| \implies |X| = |Y|$$

$$\exists\, f : A \xrightarrow{1-1} B \land g : B \xrightarrow{1-1} A \implies \exists\, h : A \xleftrightarrow[onto]{1-1} B$$

By Julius König (1906).

By Julius König (1906).

Suppose that A and B are disjoint.

$$A \uplus B$$

By Julius König (1906).

Suppose that A and B are disjoint.

$$A \uplus B$$

$$a \in A : \cdots \to f^{-1}(g^{-1}(a)) \to g^{-1}(a) \to a \to f(a) \to g(f(a)) \to \cdots$$

By Julius König (1906).

Suppose that A and B are disjoint.

$$A \uplus B$$

$$a \in A : \cdots \to f^{-1}(g^{-1}(a)) \to g^{-1}(a) \to a \to f(a) \to g(f(a)) \to \cdots$$

(i) $\cdots \rightsquigarrow \cdots$

(ii) $a \in A \rightsquigarrow \cdots$

(iii) $b \in B \rightsquigarrow \cdots$

(iv) $a \in A \rightsquigarrow a \in A$

By Julius König (1906).

Suppose that A and B are disjoint.

$$A \uplus B$$

$$a \in A : \cdots \to f^{-1}(g^{-1}(a)) \to g^{-1}(a) \to a \to f(a) \to g(f(a)) \to \cdots$$

(i) $\cdots \leadsto \cdots$

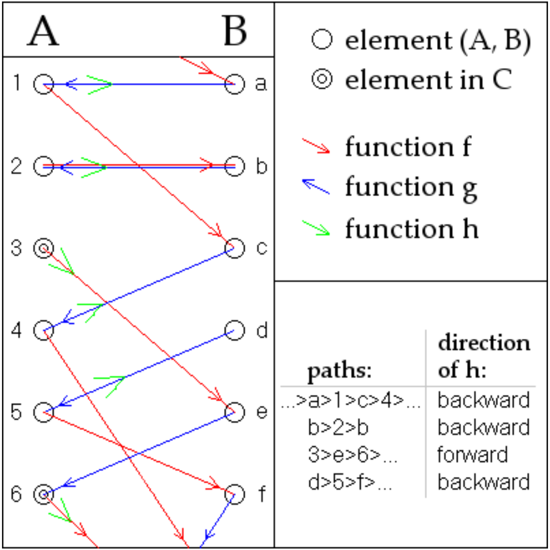
(ii) $a \in A \leadsto \cdots$

(iii) $b \in B \leadsto \cdots$

(iv) $a \in A \leadsto a \in A$

Partition of $A \uplus B$

$\square$


A
B
1
2
3
4
5
6
a
b
c
d
e
f
element (A, B)
element in C
function f
function g
function h
paths:
direction of h:
...>a>1>c>4>...
backward
b>2>b
backward
3>e>6>...
forward
d>5>f>...
backward

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(1) 如果定义 X 上的关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \triangleq x \leq y \land y \leq x,$$

则 $\sim$ 是 X 上的等价关系 (equivalence relation)。

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(1) 如果定义 X 上的关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \triangleq x \leq y \land y \leq x,$$

则 $\sim$ 是 X 上的等价关系 (equivalence relation)。

reflexive + symmetric + transitive

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(2) 如果定义商集 (quotient set) $X/\sim$ 上的关系 $\preceq$ 为

$$[x]_\sim \preceq [y]_\sim \triangleq x \leq y,$$

则 $\preceq$ 是偏序关系 (partial order)。

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(2) 如果定义商集 (quotient set) $X/\sim$ 上的关系 $\preceq$ 为

$$[x]_\sim \preceq [y]_\sim \triangleq x \leq y,$$

则 $\preceq$ 是偏序关系 (partial order)。

reflexive + antisymmetric + transitive

4. 关系与序 (Order)

一个自反 (reflexive) 且传递 (transitive) 的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序 (preorder/quasiorder)。

令 $\leq \subseteq X \times X$ 为拟序, 请证明:

(2) 如果定义商集 (quotient set) $X/\sim$ 上的关系 $\preceq$ 为

$$[x]_{\sim} \preceq [y]_{\sim} \triangleq x \leq y,$$

则 $\preceq$ 是偏序关系 (partial order)。

reflexive + antisymmetric + transitive

Well-definedness!!!

Well-definedness: Independence of Representative

Well-definedness: Independence of Representative

$$[x_1] = [x_2] \land [y_1] = [y_2]$$

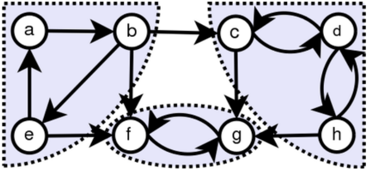
$$\Longrightarrow$$

$$[x_1] \preceq [y_1] \iff [x_2] \preceq [y_2]$$

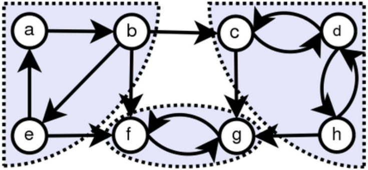
$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$

$$[a]_n \times [b]_n = [ab]_n$$

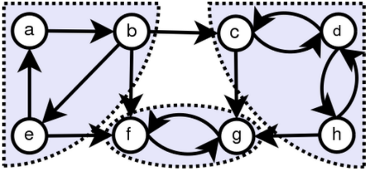
$\leq$: ??? relationship in a directed graph



$\leq$: Reachability relationship in a directed graph

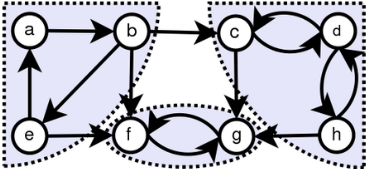


$\leq$: Reachability relationship in a directed graph



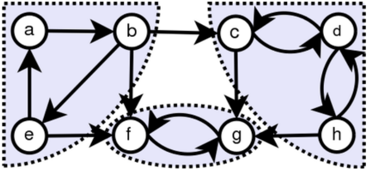
$\sim, [x]_{\sim}$:

$\leq$: Reachability relationship in a directed graph



$\sim, [x]_{\sim}$: Strongly Connected Component (SCC)

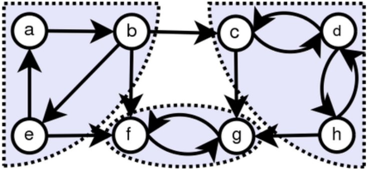
$\leq$: Reachability relationship in a directed graph



$\sim, [x]_\sim$: Strongly Connected Component (SCC)

$\preceq$:

$\leq$: Reachability relationship in a directed graph



$\sim, [x]_\sim$: Strongly Connected Component (SCC)

$\preceq$: Reachability relationship in a condensed directed acyclic graph

7. 算法设计与正确性证明

在 “掼蛋” 游戏中, 5 张大小连续的扑克牌构成一个顺子
(如 $A\ 2\ 3\ 4\ 5$ 和 $10\ J\ Q\ K\ A$ 都是顺子; 不考虑花色)。
任给 13 张从小到大的牌 (允许不同花色重复, 如
$A\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ J\ Q\ K$):

(1) 请设计算法，找到所有的顺子。

(2) 请使用 “循环不变式” (loop invariants) 证明你设计的算法的正确性。

(3) 数学归纳法的正确性也是需要证明的。请证明第一数学归纳法的正确性。(不允许使用第二数学归纳法证明。)

7. 算法设计与正确性证明

(1) 任给 13 张从小到大的牌，请设计算法，找到所有的顺子。

Preprocessing:

7. 算法设计与正确性证明

(1) 任给 13 张从小到大的牌, 请设计算法，找到所有的顺子。

Preprocessing:

$$A\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ J\ Q\ K$$

7. 算法设计与正确性证明

(1) 任给 13 张从小到大的牌, 请设计算法，找到所有的顺子。

Preprocessing:

$$A\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ J\ Q\ K$$

$$A\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K$$

7. 算法设计与正确性证明

(1) 任给 13 张从小到大的牌, 请设计算法，找到所有的顺子。

Preprocessing:

$$A\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ J\ Q\ K$$

$$A\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K$$

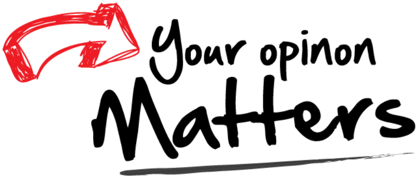
$$A\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ \color{red}{A}$$

“Sliding Window” Algorithm:

```
i ← 1 // starting index of the sliding window
cnt ← 1
while (i ≤ n − 4) // n: # of cards
  while (cnt ≠ 5)
    if (P[i + cnt] == P[i + cnt - 1] + 1)
      cnt++
    else  // fail: skip cnt
      i ← i + cnt
      cnt ← 1
      break
  if (cnt == 5)  // succeed: slid by one
    print P[i] ··· P[i + cnt - 1]
    i++
    cnt ← 4  // only need to check the new card
```


HAPPINESS IS
...an exam going well
after a night of studying.
HAP3622
facebook.com/itsthehappypage
(c) lastlemon.com 2014
HAPPINESS IS...
TM


Thank
You!



Office 302

Mailbox: H016

hfwei@nju.edu.cn