2019-1 Final Exam

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2020 年 02 月 18 日

Problem 1: Mathematical Logic

请判断以下推理是否正确，请给出证明或者指出错误之处。要求给出严格的符号化推理过程。

前提:

(1) 如果一个人害怕挑战，那么他就不会获得成功。

(2) 每个人或者获得过成功，或者失败过。

(3) 王二未曾失败过。

结论: 王二不害怕挑战。

$$x \in Human \qquad w \in Human : \text{王二}$$

$$C(x) : x \text{ 害怕挑战}$$

$$W(x) : x \text{ 成功过}$$

$$L(x) : x \text{ 失败过}$$

(1) 如果一个人害怕挑战，那么他就不会获得成功。

(2) 每个人或者获得过成功，或者失败过。

(3) 王二未曾失败过。

$$\forall x : C(x) \implies \neg W(x) \tag{1}$$

$$\forall x : W(x) \lor L(x) \tag{2}$$

$$\neg L(w) \tag{3}$$

$$\neg C(w)$$

$$\forall x : C(x) \implies \neg W(x) \tag{4}$$

$$\forall x : W(x) \lor L(x) \tag{5}$$

$$\neg L(w) \tag{6}$$

$$\neg C(w)$$

$$\forall x : C \implies W$$

$$C(x) \implies W(x)$$

$$\forall x : C(x) \implies \neg W(x) \tag{7}$$

$$\forall x : W(x) \lor L(x) \tag{8}$$

$$\neg L(w) \tag{9}$$

$$\neg C(w)$$

$$C(w) \implies \neg W(w) \tag{10}$$

$$W(w) \lor L(w) \tag{11}$$

$$\neg L(w) \tag{12}$$

$$W(w) \quad (5) + (6) \tag{13}$$

$$\neg C(w) \quad (4) + (7) \tag{14}$$

Problem 2: Mathematical Induction

令 $n, k \in \mathbb{N}^{+}$, 且 $n \geq k$。请使用数学归纳法证明

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

是整数。

Problem 2: Mathematical Induction (Original Version)

令 $n, k \in \mathbb{N}^+$, 且 $n \geq k$。请证明

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

是整数。

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinatorial Interpretation

# of ways to choose a k-element subset from an n-element set

Problem 2: Mathematical Induction

令 $n, k \in \mathbb{N}^+$, 且 $n \geq k$。请使用数学归纳法证明

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

是整数。

$\boxed{\text{By induction on } \ldots}$

Base Case

Induction Hypothesis

Induction Step

$\boxed{n \textit{ vs. } k}$

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

By induction on n.

$$P(n) \triangleq \forall k \le n : \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^{+} : P(n)$$

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$$

$$P(n) \triangleq \forall k \le n : \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

By induction on n.

Base Case: $P(1)$

$$\binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

Induction Hypothesis: Suppose that

$$P(n) \triangleq \forall k \le n : \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Induction Step: Consider $P(n+1)$.

$$P(n+1) \triangleq \forall k \le n+1 : \binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$$

$$\forall k \le n+1 : \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Case I

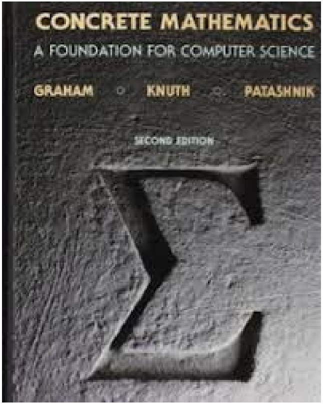
$$k = n+1$$

$$\binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$$

Case II

$$k \le n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$$


CONCRETE MATHEMATICS
A FOUNDATION FOR COMPUTER SCIENCE
GRAHAM KNUTH PATASHNIK
SECOND EDITION

Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B。

(1) 请证明 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$。当 f 满足什么条件时，“$=$” 成立?

(2) 请证明 $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$。

$$\boxed{y \in f(X) \iff \exists x \in X : y = f(x)}$$

$$\boxed{x \in f^{-1}(Y) \iff f(x) \in Y}$$

Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B。

(1) 请证明 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$。当 f 满足什么条件时，“=” 成立?

$$\boxed{\forall y : y \in f(A) \setminus f(B) \implies y \in f(A \setminus B)}$$

$$\begin{aligned}
& y \in f(A) \setminus f(B) \\
\iff\ & y \in f(A) \land y \notin f(B) \\
\iff\ & (\exists x \in A : f(x) = y) \land \neg(\exists x \in B : f(x) = y) \\
\iff\ & (\exists x \in A : f(x) = y) \land (\forall x \in B : f(x) \neq y) \\
\implies\ & \exists x \in A \setminus B : f(x) = y \ (\text{take } t \in A : f(t) = y) \\
\iff\ & y \in f(A \setminus B)
\end{aligned}$$

$$y \in f(A \setminus B) \iff \exists x \in A \setminus B : f(x) = y$$

$$\boxed{\text{Take } t \in A : f(t) = y}$$

Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B。

(1) 请证明 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$。当 f 满足什么条件时，“$=$” 成立?

$$
\begin{aligned}
& (\exists x \in A : f(x) = y) \land (\forall x \in B : f(x) \neq y) \\
\Longrightarrow\ & \exists x \in A \setminus B : f(x) = y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \exists x \in A \setminus B : f(x) = y \\
\Longrightarrow\ & (\exists x \in A : f(x) = y) \land (\forall x \in B : f(x) \neq y)
\end{aligned}
$$

f is injective.

Problem 5: Function

对任意函数 f 和集合 A, B。

(2) 请证明 $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$。

$$\boxed{\forall x : x \in f^{-1}(A \setminus B) \iff x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)}$$

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(A \setminus B) \\ \iff & f(x) \in A \setminus B \\ \iff & f(x) = A \wedge f(x) \notin B \\ \iff & x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \\ \iff & x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Theorem (Properties of f and f^{-1} (UD Theorem 17.7))

$$f : A \to B \qquad A_1, A_2 \subseteq A,\ B_1, B_2 \subseteq B$$

(i) *f preserves only $\subseteq$ and $\cup$:*

(1) $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(4) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$

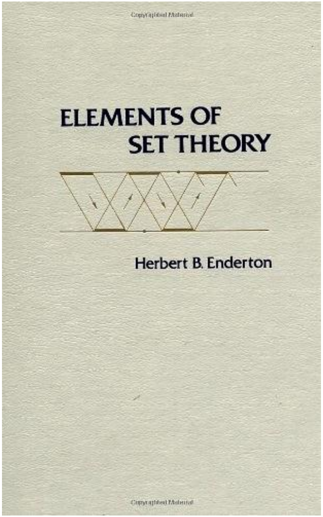
(ii) *f^{-1} preserves $\subseteq, \cup, \cap,$ and $\setminus$:*

(5) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(8) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$


ELEMENTS OF
SET THEORY
Herbert B. Enderton

Problem 6: Infinity

请证明: $\mathbb{N}$ 的所有有限子集所组成的集合是可数的。

$$X \triangleq \Big\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} : |A| = n\Big\}$$

$$\boxed{f : X \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}} \qquad f : A \mapsto ?$$

$$A = \{0, 2, 1, 7\} \qquad a = 111000010000 0\cdots$$

$$a = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} \qquad a_k = \begin{cases} 1, & k \in A \\ 0, & k \notin A \end{cases}$$

$$\boxed{f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k \in \mathbb{N}}$$

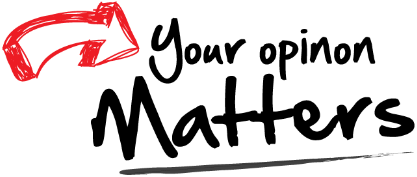
Problem 6: Infinity

$\mathbb{N}$ 的所有子集所组成的集合是不可数的。

$$|2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$$

$$\boxed{f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k} \text{ may } \notin \mathbb{N}$$


Thank You!



Office 302

Mailbox: H016

hfwei@nju.edu.cn