Tarea 3 – Procesamiento Digital de Señales

Daniel Rojas Marín 2016089821

1. El principio fundamental del dispositivo es retrasar una señal $x(t-n)$ y obtener una salida $y(t-D)$ donde D es un retraso o *Delay*.
   a. El sistema es discreto, por lo tanto utilizaremos por ahora un D_n para describir el retraso discreto. El diagrama de bloques corresponde a:

   $$x(n) \longrightarrow \boxed{z^{-D_n}} \longrightarrow y(n) = x(n - D_n)$$

   La función de transferencia corresponde a:

   $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-D_n}$$

   La ecuación de diferencias es:

   $$y(n) = x(n - D_n)$$

   La respuesta al impulso es:

   $$h(n) = \delta(n - D_n)$$

   b. Para calcular el D_n debemos conocer la frecuencia de muestreo. Con la frecuencia podemos calcular el periodo fundamental T_s y determinar cuántas muestras toma cumplir cierto lapso.
   El cálculo corresponde a:

   $$D_n = Df_s = \frac{D}{T_s}$$

   Es posible que no obtengamos un número entero, por lo que sería necesario agregar un redondeo al valor entero más cercano:

   $$D_n = Round\left(\frac{D}{T_s}\right)$$

   c. Se adjunta el código. La biblioteca sounddevice permite capturar muestras del micrófono y reproducirlas en el computador desde python, sin guardar como un archivo de audio.

d. El valor que más pareció interrumpirme se ubica entre 300 ms y 500 ms. más de un segundo permite hablar pausadamente y menos de 300 ms permite más usar el audio como monitor.
e. Solo se puede usar con audífonos pues de lo contrario se entraría en un lazo de retroalimentación positiva entre la entrada y la salida.

2. Los 80 polos distribuidos equidistantemente se produjeron en GNU/Octave y se adjunta el código correspondiente.

   Para obtener 80 polos en el círculo unitario se necesitan 80 soluciones complejas para un mismo polinomio en el denominador $z^M - a^M$ con $M = 80$ y $a = 1$ y ningún cero en el numerador de la función de transferencia. Despreciamos la ganancia.

   El polinomio del denominador debe ser: $z^{80} - 1$ con soluciones en $e^{jk\pi/40}$ con $k = 0...79$. Por lo tanto, la función de transferencia corresponde a:

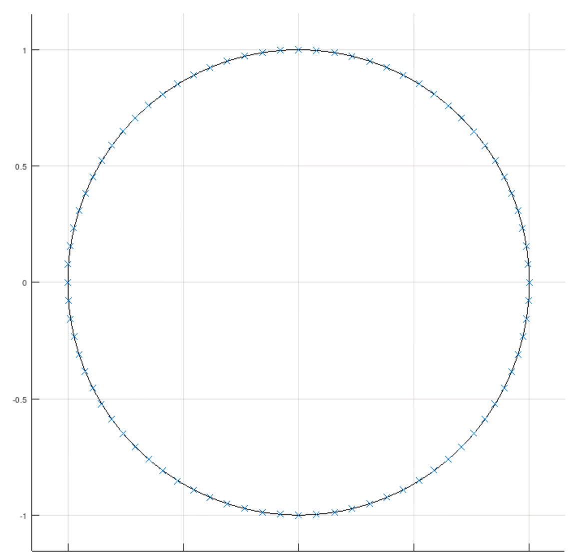
$$H(z) = \frac{1}{z^{80} - 1} = \frac{z^{-80}}{1 - z^{-80}}$$

   La ecuación de diferencias se obtiene mediante:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-80}}{1 - z^{-80}} \rightarrow (1 - z^{-80})Y(z) = z^{-80}X(z)$$

$$Y(z) - z^{-80}Y(z) = z^{-80}X(z) \rightarrow y(n) - y(n-80) = x(n-80)$$

   El diagrama de polos luce así:



Generalizando, para N polos la función de transferencia corresponde a:

$$H(z) = \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}}$$

La distancia se calcula variando a. Al inicio del ejercicio se estableció como 1 y se ha venido despreciando, por lo que una versión generalizada que incluya a corresponde a:

$$H(z) = \frac{z^{-N}}{1 - a^N z^{-N}}$$

El valor de a respecto a d donde d es la distancia al círculo unitario se puede obtener como:

$$d = 1 - \sqrt[N]{a} \rightarrow (1-d)^N = a$$

El sistema depende de la N-sima salida anterior para calcular la salida actual, por lo tanto tiene comportamiento de IIR y es causal al no depender de valores futuros.

Respecto a la estabilidad, es sistema es estable para todo d tal que los polos estén dentro del círculo unitario. Es decir $1 < d < 2$ pues para d mayores a 2, los puntos salen del círculo unitario.

3. Para el sistema cuya salida es $y(n) = r^n sin(\omega_0 n)u(n)x(n)$ se tiene:

   Se tiene una función de transferencia (mediante tabla) igual a:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{rz^{-1}sin(\omega_0)}{1 - 2rz^{-1}cos(\omega_0) + r^2 z^{-2}}$$

   La ecuación de diferencias se obtiene mediante:

$$H(z) = \frac{rz^{-1}sin(\omega_0)}{1 - 2rz^{-1}cos(\omega_0) + r^2 z^{-2}}$$

$$Y(z)(1 - 2rz^{-1}cos(\omega_0) + r^2 z^{-2}) = rz^{-1}sin(\omega_0)X(z)$$

$$Y(z) - Y(z)2rz^{-1}cos(\omega_0) + Y(z)r^2 z^{-2} = rz^{-1}sin(\omega_0)X(z)$$

$$y(n) - 2rcos(\omega_0)y(n-1) + r^2 y(n-2) = rsin(\omega_0)x(n-1)$$

$$y(n) = rsin(\omega_0)x(n-1) + 2rcos(\omega_0)y(n-1) - r^2 y(n-2)$$

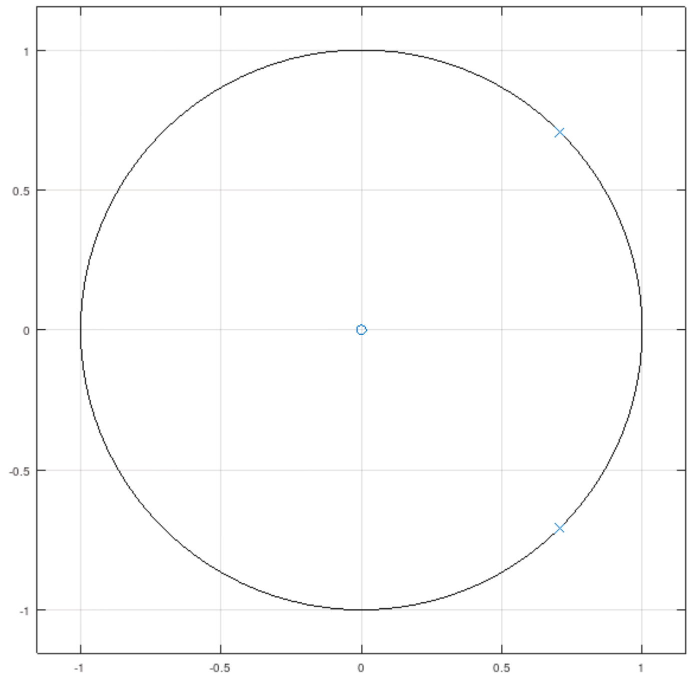
   Para obtener los polos se toma la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{rzsin(\omega_0)}{z^2 - 2rzcos(\omega_0) + r^2}$$

$$H(z) = \frac{rzsin(\omega_0)}{z^2 - rz(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) + r^2}$$

$$H(z) = \frac{rzsin(\omega_0)}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})}$$

Polos en $re^{j\omega_0}$ y $re^{-j\omega_0}$ y un cero en el origen.



El sistema es causal al no depender de valores futuros, además es IIR al ser un sistema recursivo.

Para estabilidad en sistemas de segundo grado se debe cumplir que $a_2 < 1$ donde $a_2 = p_1 p_2 = r^2$, es decir que los valores positivos de r tal que $r^2 < 1$ garantizan estabilidad.

Se deduce que la entrada debe ser un pulso unitario pues de lo contrario se introducirán polos o ceros que desestabilizan la oscilación del resonador.

Para una oscilación teórica constante, el valor r debe ser 1 tal que los polos conjugados que ubiquen en el círculo unitario.

El riesgo de esta técnica recae en la tolerancia al error numérico, una pequeña diferencia en los valores puede hacer que el sistema tienda a 0 o se desestabilice pues los polos deben mantenerse en el círculo unitario en todo momento.

El código del oscilador se encuentra en el repositorio como *oscillator.py*.

4. Transformada Z o transformada inversa Z de:

a. $x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, \underset{\uparrow}{6}, 1, 4\}$

$$x(n) = 3\delta(n+5) + 6\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2)$$

$$X(z) = 3z^5 + 6 + z^{-1} + 4z^{-2}$$

b. $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ si } n \geq 5 \\ 0 \text{ si } n \leq 4 \end{cases}$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-5)$$

Cambiando la variable n

$$x(n_1+5) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1+5} u(n_1) = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} u(n_1)$$

$$X(z)z^{-5} = \frac{1}{32}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{16(2z-1)}$$

$$X(z) = \frac{1}{16z^4(2z-1)}$$

c. $X(z) = \dfrac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

$$A = \left.\frac{z^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$B = \left.\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+1)}\right]\right|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

$$C = \left.\frac{z^2}{(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{1}{4(z+1)} + \frac{3}{4(z-1)} + \frac{1}{2(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{z}{4(z+1)} + \frac{3z}{4(z-1)} + \frac{z}{2(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{1}{4(1-(-1)z^{-1})} + \frac{3}{4(1-z^{-1})} + \frac{z^{-1}}{2(1-z^{-1})^2}$$

$$x(n) = \frac{(-1)^n}{4}u(n) + \frac{3}{4}u(n) + \frac{n}{2}u(n)$$

d. $x(n) = r^n sin(\omega_0 n)u(n)$

Se puede hacer por tabla o descomponiendo $r^n sin(\omega_0 n)$ en $\frac{(re^{j\omega_0})^n - (re^{-j\omega_0})^n}{j2}$

$$x(n) = \frac{(re^{j\omega_0})^n - (re^{-j\omega_0})^n}{j2}u(n)$$

$$X(z) = \frac{z}{j2(z-(re^{j\omega_0}))} - \frac{z}{j2(z-(re^{-j\omega_0}))}$$

$$X(z) = \frac{z}{j2}\frac{(z-re^{-j\omega_0})-(z-re^{j\omega_0})}{z^2 - zre^{-j\omega_0} - zre^{j\omega_0} + r^2}$$

$$X(z) = \frac{rzsin(\omega_0)}{z^2 - 2rzcos(\omega_0) + r^2}$$

$$X(z) = \frac{rz^{-1}sin(\omega_0)}{1 - 2rz^{-1}cos(\omega_0) + r^2z^{-2}}$$