CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023 MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license. © ① ⑤ ③

1.

$$\forall t \in [0, 1], \quad 1 + t^2 \leqslant 2$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad (1 + t^2)^n \leqslant 2^n$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1 + t^2)^n} \geqslant \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^n} \, \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2^n}$$

2.

La fonction

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$$
$$t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

est continue par morceaux, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{t^{2n}}$$

 $t\mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ étant intégrable en $+\infty$ car $2n>1,\ f$ est intégrable et K_n est bien définie. Soit x>0.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan t\right]_0^x$$
$$= \arctan x \underset{x \to +\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{2}$$

3.

On utilise l'inégalité de convexité:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 + t^2 \geqslant 2t$$

Soit $x \geqslant 1$, $n \geqslant 2$.

$$\begin{split} \int_{1}^{x} \frac{1}{(1+t^{2})^{n}} \, \mathrm{d}t &\leqslant \int_{1}^{x} \frac{1}{2^{n}t^{n}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^{n}} \left[-\frac{1}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} \right]_{1}^{x} \\ &= \frac{1}{2^{n}} (-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}) \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)2^{n}} \end{split}$$

Donc:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^{2})^{n}} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \frac{1}{(1+t^{2})^{n}} dt$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)2^{n}}$$

montre que

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \, \mathrm{d}t = \mathcal{O}(\frac{1}{n2^n})$$

4.

On a:

$$K_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$
$$= I_n + O(\frac{1}{n2^n})$$

puis d'après 1,

$$K_n = I_n + \underbrace{O(\frac{I_n}{n})}_{o(I_n)}$$

i.e.

$$K_n \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n$$

5.

Soit x > 0, $n \in \mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties:

$$\begin{split} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \, \mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int_0^x \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \, \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \right) \end{split}$$

En passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient:

$$K_n = 2n(K_n - K_{n+1})$$

6.

On réécrit la récurrence précédente

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}K_n$$

D'où il vient facilement que

$$K_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \times 2} K_1$$

$$= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!^2} \frac{\pi}{2}$$

On applique la formule de Stirling

$$(2n-2)! \underset{n \to +\infty}{\sim} (\frac{2(n-1)}{e})^{2(n-1)} \sqrt{4\pi(n-1)}$$

 et

$$(n-1)!^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} (\frac{n-1}{e})^{2(n-1)} 2\pi(n-1)$$

Après simplification on obtient

$$K_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

7.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{nt} = \phi(t)$. On a $\phi'(t) = \sqrt{n}$,

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} \frac{1}{\sqrt{n}} du$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} du$$

8.

On pose:

$$f_n: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$$

$$u \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} & \text{si } u \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } u \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}$$

Les f_n sont continues par morceaux. La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ étant convexe sur \mathbb{R}^+ , on a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad (1 + \frac{u^2}{n})^n \geqslant 1 + n\frac{u^2}{n}$$
$$= 1 + u^2$$

donc en posant $\phi(u) = \frac{1}{1+u^2}$,

i $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(u)| \leq \phi(u), \text{ intégrable en } +\infty.$

ii la suite de fonction (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\sqrt{n}I_n$ converge et que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$$

9.

D'après la question 6,

$$\sqrt{n}I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Le changement de variable $\phi(u) = \sqrt{2}u$ nous donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

puis par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
$$= \sqrt{2\pi}$$

10.

On voit que $t\mapsto t\varphi(t)=\mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ est sommable en $+\infty$, donc pour X>x,

$$\forall t \geqslant x, \quad \varphi(t) \leqslant \frac{t}{x} \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \int_{x}^{X} \varphi(t) \, dt \leqslant \frac{1}{x} \int_{x}^{X} t \varphi(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^{2}}{2}} \right]_{x}^{X}$$

$$= \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^{2}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^{2}}{2}} \right]$$

Le passage à la limite quand $X \to +\infty$ donne:

$$\int_{x}^{+\infty} \varphi(t) dt \leqslant \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^{2}}{2}}$$
$$= \frac{\varphi(x)}{x}$$

11.

En suivant le fil de la question précédente, l'idée est de trouver une fonction qui minore $t \mapsto \varphi(t)$ et dont une primitive est $-\frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$. Le calcul montre que, en utilisant le fait que $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$,

$$\forall t \in [x, +\infty[, \quad (-\frac{t}{t^2 + 1}\varphi(t))' = \frac{t^4 + 2t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2}\varphi(t)$$
$$= \frac{t^4 + 2t^2 - 1}{t^4 + 2t^2 + 1}\varphi(t)$$
$$\leqslant \varphi(t)$$

Soit alors X > x.

$$\int_{x}^{X} \frac{t^4 + 2t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2} \varphi(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_{x}^{X} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow -\frac{X}{X^2 + 1} \varphi(X) + \frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x) \leqslant \int_{x}^{X} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$$

Le passage à la limite quand $X \to +\infty$ donne:

$$\frac{x}{x^2 + 1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$$

12.

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \, \mathrm{d}t = 1$$

on a:

$$1 - \Phi(x) = \int_{x}^{+\infty} \varphi(t) dt$$

$$\underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

d'après les deux questions précédentes.

13.

$$A = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$$

De plus, les évènements A_p sont clairement incompatibles deux à deux.

$$\begin{split} & \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap \Omega) \\ & = \mathrm{P}(A \cap (\{R_n \geqslant x\} \cup \{R_n < x\})) \\ & = \mathrm{P}((A \cap \{R_n \geqslant x\}) \cup (A \cap \{R_n < x\})) \\ & = \mathrm{P}(A \cap \{R_n \geqslant x\}) + \mathrm{P}(A \cap \{R_n < x\}) \qquad \text{(les \'ev\`enements } \{R_n \geqslant x\} \text{ et } \{R_n \geqslant x\} \text{ sont incompatibles)} \\ & = \mathrm{P}(A \cap \{R_n \geqslant x\}) + \mathrm{P}(\bigcup_{p=1}^n A_p \cap \{R_n < x\}) \\ & = \mathrm{P}(A \cap \{R_n \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^n \mathrm{P}(A_p \cap \{R_n < x\}) \qquad \text{(les \'ev\`enements } A_p \text{ sont incompatibles)} \\ & \leq \mathrm{P}(\{R_n \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^n \mathrm{P}(A_p \cap \{R_n < x\}) \qquad (A \cap \{R_n \geqslant x\}) \subset \{R_n \geqslant x\}) \end{split}$$

15.

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} = A_p \cap \{|R_n| < x\} \cap \{|R_p| \geqslant 3x\}$$
$$\subset A_p \cap \{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}$$

puisque $|R_n - R_p| \geqslant |R_p| - |R_n|$.

16.

On a

$$R_n - R_p = Z_{p+1} + \dots + Z_n$$

Comme A_p est décrit en termes des VA Z_1, \ldots, Z_p , les évènements A_p et $\{|R_p - R_n| \ge 2x\}$ sont indépendants puisque les Z_i le sont.

On en déduis:

$$P(A) \leqslant P(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} P(A_p \cap \{|R_p - R_n| \geqslant 2x\})$$

$$= P(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} P(A_p) P(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\})$$

$$\leqslant P(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} P(A_p) \max_{p \in [\![1,n]\!]} P(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\})$$

$$= P(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{p \in [\![1,n]\!]} P(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) \sum_{p=1}^{n} P(A_p)$$

$$= P(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{p \in [\![1,n]\!]} P(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) P(A)$$

$$\leqslant P(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{p \in [\![1,n]\!]} P(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) P(A)$$

$$\leqslant P(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{p \in [\![1,n]\!]} P(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) P(A)$$

$$(1)$$

L'idée est la suivante: si $|R_p - R_n| \ge 2x$, alors $|R_n| \ge x$ ou $|R_p| \ge x$. Autrement dit,

$$|R_p - R_n| \geqslant 2x \subset \{|R_p| \geqslant x\} \cup \{|R_n| \geqslant x\}$$

On passe aux probabilités:

$$P(|R_p - R_n| \geqslant 2x) \leqslant P(\{|R_p| \geqslant x\} \cup \{|R_n| \geqslant x\})$$

$$\leqslant P(\{|R_p| \geqslant x\}) + P(\{|R_n| \geqslant x\})$$

$$\leqslant 2 \max_{i \in [\![1,n]\!]} P(\{|R_i| \geqslant x\})$$

Cela étant valable pour tout p.

$$\max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(|R_p - R_n| \geqslant 2x) \leqslant 2 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_i| \geqslant x\})$$

L'inégalité 1 donne alors bien ce qu'on voulait démontrer, à savoir:

$$P(A) \leqslant 3 \max_{i \in [1,n]} P(\{|R_i| \geqslant x\})$$

18.

$$x_{n,n-k} = -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}}$$

$$= -\sqrt{n} + 2\sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}}$$

$$= -x_{n,k}$$

Les x_{nk} partitionnent en fait l'intervalle $\left[-\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}},\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ en n+1 intervalles de même longueur.

19.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions B_n et φ sont bornées sur \mathbb{R} ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |B_n(x) - \varphi(x)| \leq |B_n(x)| + |\varphi(x)|$$
$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Donc la borne supérieure $\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|$ est bien finie.

20.

Un peu d'observation montre que la fonction $B_n - \varphi$ est paire $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En découle directement que

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

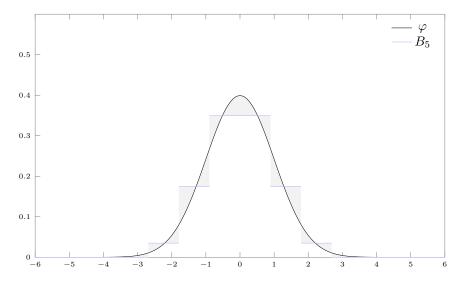


FIGURE 1. Représentation de φ et B_5

Il suffit de se souvenir du triangle de Pascal, on a:

$$\sup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{p} = \binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si } n = 2p \text{ pair} \\ \binom{n}{p} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{p+1} & \text{si } n = 2p+1 \text{ impair} \end{cases}$$

De plus $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ pour $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$ pour $k \geqslant \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Tout cela vient immédiatement par récurrence en utilisant $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. On a donc B_n décroissante sur \mathbb{R}^+ .

22.

Déjà il faut s'intéresser au comportement de k quand n tend vers l'infini.

$$k \in I_n \Rightarrow x_{n,k} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow k \geqslant \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow k \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Cela montre que k tend vers l'infini et que $\frac{1}{k} = O(\frac{1}{n})$ On a aussi:

$$k \in I_n \Rightarrow x_{n,k} \leqslant l+1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \leqslant l+1$$

$$\Leftrightarrow k \leqslant \frac{(l+1)\sqrt{n} + n}{2}$$

$$\Rightarrow n-k \geqslant n \frac{1 - (l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}}{2}$$

 $\frac{1-(l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}}{2}$ tend vers $\frac{1}{2}>0$ donc est borné et >0 pour n suffisamment grand et on peut écrire:

$$\frac{1}{n-k} \le \frac{1}{n} \frac{2}{1 - (l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}} = O(\frac{1}{n})$$

On a ainsi, quand n tend vers l'infini:

$$k!(n-k)! = (\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi k} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})) (\frac{n-k}{e})^{n-k} \sqrt{2\pi (n-k)} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n-k}))$$

$$= 2\pi e^{-n} k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k})) (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n-k}))$$

$$= 2\pi e^{-n} k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n}))$$

23.

On a:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n}))}{2\pi e^{-n} k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n}))}$$

On sait que $\frac{1}{1+\mathcal{O}(\frac{1}{n})}=1+\mathcal{O}(\frac{1}{n})$, d'où

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}(1+O(\frac{1}{n}))}{k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}}$$

puis

$$B_n(x_{nk}) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \binom{n}{k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+1} (1 + O(\frac{1}{n}))}{(2k)^{k+\frac{1}{2}} (2n - 2k)^{n-k+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O(\frac{1}{n})}{(\frac{2k}{n})^{k+\frac{1}{2}} (2 - \frac{2k}{n})^{n-k+\frac{1}{2}}}$$

24.

On a

$$\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} = -1 + \frac{2k}{n}$$

On peut donc réécrire le résultat de la question précédente:

$$B_{n}(x_{nk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O(\frac{1}{n})}{(1 + \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{\frac{x_{nk}}{2}} \sqrt{n} + \frac{n+1}{2}} (1 - \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}} \sqrt{n} + \frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O(\frac{1}{n})}{(1 - \frac{x_{nk}}{n})^{\frac{n+1}{2}} (1 + \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{\frac{x_{nk}}{2}} \sqrt{n}} (1 - \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}} \sqrt{n}}$$
(2)

Comme $x_{nk} \in [0, l]$ est une suite bornée, $\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et on peut écrire:

$$\begin{split} \frac{1}{(1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}} &= (1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}} \\ &= \exp(-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}\ln(1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})) \\ &= \exp(-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}(\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}}+O(\frac{x_{nk}^2}{n})) \\ &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2}+O(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\ &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\exp(O(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\ &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1+O(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\ &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1+O(\frac{1}{\sqrt{n}})) \end{split}$$

De même,

$$\frac{1}{(1 - \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}}\sqrt{n}} = \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

$$(1 - \frac{x_{nk}^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} = \exp(-\frac{n+1}{2}\ln(1 - \frac{x_{nk}^2}{n}))$$

$$= \exp(-\frac{n+1}{2}(-\frac{x_{nk}^2}{n} + O(\frac{x_{nk}^4}{n^2})))$$

$$= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2} + \frac{x_{nk}^2}{2n} + O(\frac{x_{nk}^4}{n^2}))$$

$$= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2}) \exp(\frac{x_{nk}^2}{2n} + O(\frac{x_{nk}^4}{n^2}))$$

$$= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2}) \exp(O(\frac{1}{n}))$$

$$= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{1}{n}))$$

On peut donc écrire le développement asymptotique 2:

$$B_n(x_{nk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

car
$$(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))(1 + O(\frac{1}{n})) = (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})).$$

25.

On a

$$[0,l] \subset \bigcup_{k \in I_n} [x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

Ainsi

$$\sup_{x \in [0,l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \max_{k \in I_n} \sup_{[x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}]} |B_n(x) - \varphi(x)| \tag{3}$$

Or $\forall x \in [x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}],$

$$|B_{n}(x) - \varphi(x)| = \left| B_{n}(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^{2}}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^{2}}{2}) - \varphi(x) \right|$$

$$\leq \left| B_{n}(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^{2}}{2}) \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^{2}}{2}) - \varphi(x) \right|$$

$$= \left| B_{n}(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^{2}}{2}) \right| + |\varphi(x_{nk}) - \varphi(x)|$$

$$\leq \left| B_{n}(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^{2}}{2}) \right| + \sup_{[0,l]} |\varphi'| |x_{nk} - x|$$

$$\leq \left| B_{n}(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^{2}}{2}) \right| + \sup_{[0,l]} |\varphi'| \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à φ de classe C^1

On peut repartir de 3 pour obtenir:

$$\sup_{x \in [0,l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \max_{k \in I_n} \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^2}{2}) \right| + \sup_{[0,l]} |\varphi'| \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On définit une suite $k_n \in I_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| B_n(x_{n,k_n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{n,k_n}^2}{2}) \right| = \max_{k \in I_n} \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{nk}^2}{2}) \right|$$

de manière à ce que

$$\sup_{x \in [0,l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \left| B_n(x_{n,k_n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_{n,k_n}^2}{2}) \right| + \sup_{[0,l]} |\varphi'| \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La question précédente appliquée à la suite $(k_n) \in I_n$ donne

$$|B_n(x_{n,k_n}) - \varphi(x_{n,k_n})| = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit $\epsilon > 0$. On conclut que

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_1 \Rightarrow \sup_{x \in [0,l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$$

26.

La question précédente vient de montrer que $\sup_{x \in [0,l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Donc $B_n(l) \underset{n \to +\infty}{\to} \varphi(l)$ et donc comme $\varphi(l) > 0$,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_2 \Rightarrow B_n(l) \leqslant 2\varphi(l)$$

Par décroissance de B_n et φ ,

$$\forall x \in [l, +\infty[, \quad (B_n(x), \varphi(x)) \in [0, \max\{B_n(l), \varphi(l)\}]^2 \Rightarrow |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \max\{B_n(l), \varphi(l)\} \leqslant 2\varphi(l) \leqslant \epsilon$$

Ainsi

$$\sup_{x \in [l, +\infty[} |B_n(x) - \varphi(x)| \le \epsilon$$

Pour $n \ge \max\{n_1, n_2\}$,

$$\Delta_n = \max\{\sup_{x \in [0,l]} |B_n(x) - \varphi(x)|, \sup_{x \in [l,+\infty[} |B_n(x) - \varphi(x)|\} \leqslant \epsilon$$

i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0$$

28.

On pose:

$$\tilde{f}_n: I \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in [u_n, v_n] \\ 0 & \text{si } u \in I \setminus [u_n, v_n] \end{cases}$$

Les \tilde{f}_n sont continues par morceaux. La suite de fonctions f_n convergeant uniformément vers f, on

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_1 \Rightarrow \forall x \in I, \quad |f_n(x)| - |f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$$

donc en posant $\phi = |f| + 1$,

i $\forall n \ge n_1$, $\forall x \in [u, v]$, $\left| \tilde{f}_n(x) \right| \le \phi(u)$, intégrable sur le segment [u,v].

ii la suite de fonction (\tilde{f}_n) converge simplement sur [u,v] vers la fonction f.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\int_u^v \tilde{f}_n$ converge et que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_u^v f(x) \, \mathrm{d}x$$

29.

On a $Y_n \in \{0,1\}$ et T_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$ puisque les Y_i son indépendantes.

$$\int_{x_{nk}-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{nk}+\frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x) dx = \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$$
$$= \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$$
$$= P(T_n = k)$$

$$u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \Leftrightarrow u \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \leqslant v$$

$$\Leftrightarrow u\sqrt{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant v\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow u\sqrt{n} + n \leqslant \sum_{i=1}^{n} X_i + n \leqslant v\sqrt{n} + n$$

$$\Leftrightarrow u\sqrt{n} + n \leqslant \sum_{i=1}^{n} (X_i + 1) \leqslant v\sqrt{n} + n$$

$$\Leftrightarrow \frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2} \leqslant \frac{v\sqrt{n} + n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leqslant T_n \leqslant \frac{v\sqrt{n} + n}{2}$$

donc

$$P(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v) = P(\frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leqslant T_n \leqslant \frac{v\sqrt{n} + n}{2})$$
$$= P(T_n \in J_n)$$
$$= \sum_{j \in J_n} P(T_n = j)$$

31.

Il est clair que J_n est un intervalle, posons $J_n = [a_n, b_n]$.

$$\sum_{j \in J_n} P(T_n = j) = \sum_{j \in J_n} \int_{x_{nj} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{nj} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x) dx$$
$$= \int_{x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x) dx$$

Or

$$x_{n,a_n} = -\sqrt{n} + \frac{2a_n}{\sqrt{n}}$$

Par définition de a_n , on a $\frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant a_n < \frac{n+u\sqrt{n}}{2} + 1$, i.e $a_n = \lceil \frac{n+u\sqrt{n}}{2} \rceil$. Ou encore $u - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}} < u$

ce qui montre que

$$x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\to} u$$

De même, par définition de b_n , on a $\frac{n+v\sqrt{n}}{2}-1 < b_n \leqslant \frac{n+v\sqrt{n}}{2}$, i.e $b_n = \lfloor \frac{n+v\sqrt{n}}{2} \rfloor$. Ou encore

$$v < x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui montre que

$$x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v$$

La question 27 a montré la convergence uniforme des B_n vers φ . On applique la question 28 qui montre directement que

$$\lim_{n \to +\infty} P(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j \in J_n} P(T_n = j)$$
$$= \int_u^v \varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

On remarque que

$$E(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$
$$= 0$$

Puis, comme les X_i sont indépendantes,

$$\sigma^{2}(\frac{S_{n}}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^{2}(X_{i})$$
$$= 1$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \geqslant v) \leqslant \frac{1}{v^2}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $v_1 > u$ tel que

$$\forall v \geqslant v_1, \quad \int_u^v \varphi(x) \, \mathrm{d}x \geqslant \int_u^{+\infty} \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \epsilon$$

Soit $v_2 > v_1$ tel que $\frac{1}{v^2} \leqslant \epsilon$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) = P(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) + P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > v)$$

$$\leqslant P(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) + P(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geqslant v)$$

$$P(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant P(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) + \epsilon$$

Ensuite,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_1 \Rightarrow \left| P(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) - \int_u^v \varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \epsilon$$

Alors, $\forall n \geqslant n_1$,

$$\int_{u}^{v} \varphi(x) dx - \epsilon \leqslant P(\frac{S_{n}}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant \int_{u}^{v} \varphi(x) dx + 2\epsilon$$

$$\Rightarrow \int_{u}^{+\infty} \varphi(x) dx - 2\epsilon \leqslant P(\frac{S_{n}}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant \int_{u}^{+\infty} \varphi(x) dx + 2\epsilon$$

On a montré que $\operatorname{P}(\frac{S_n}{\sqrt{v}}\geqslant u)$ converge, et

$$\lim_{n \to +\infty} P(\frac{S_n}{\sqrt{v}} \geqslant u) = \int_u^{+\infty} \varphi(x) dx$$
$$= 1 - \Phi(u)$$