

# CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023

## MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $X \neq 0$ , soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k > 0$ .

$$\begin{aligned}(AX)_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ &\geq a_{ik}x_k > 0\end{aligned}$$

On a montré  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(AX)_i > 0$ , c'est à dire  $AX > 0$ .

Ensuite,

$$\begin{aligned}(|AB|)_{ij} &= \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &= (|A| |B|)_{ij}\end{aligned}$$

ainsi  $|AB| \leq |A| |B|$ .

2.

Soit  $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz est:

$$\begin{aligned}|\langle X | Y \rangle| &\leq \|X\| \|Y\| \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| &\leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On peut l'appliquer directement à  $(Z, W) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ , définis par:

$$Z = \begin{bmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_k| \\ \vdots \\ |z_n| \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} |w_1| \\ \vdots \\ |w_k| \\ \vdots \\ |w_n| \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left| \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| \right| = \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.

En posant  $z = a + ib$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned}
 & |1 + z|^2 = (1 + |z|)^2 \\
 \Leftrightarrow & 1 + a^2 + 2a + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \\
 \Leftrightarrow & a = \sqrt{a^2 + b^2} \\
 \Leftrightarrow & a \geq 0 \wedge a^2 = a^2 + b^2 \\
 \Leftrightarrow & a \geq 0 \wedge b = 0 \\
 \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

Soit maintenant  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ ,  $z \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 & |z + z'| = |z| + |z'| \\
 \Leftrightarrow & |z| \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = |z| \left( 1 + \left| \frac{z'}{z} \right| \right) \\
 \Leftrightarrow & \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = 1 + \left| \frac{z'}{z} \right| \\
 \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{z'}{z} = \alpha
 \end{aligned}$$

4.

Comme les  $z_i$  sont non tous nuls, quitte à renuméroter on peut supposer  $z_1 \neq 0$ . On a:

$$\begin{aligned}
 & |z_n| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \\
 \Leftrightarrow & \left| \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| \left( \geq \left| \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right| \right)
 \end{aligned}$$

Cela montre que l'égalité est réalisée dans la dernière inégalité. En réitérant, on a:

$$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{k=1}^m z_k \right| = \sum_{k=1}^m |z_k|$$

Posons, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $z_k = e^{i\theta_k} |z_k|$  avec  $\theta_k \in \mathbb{R}$ . L'égalité précédente pour  $m = 2$  donne

$$\begin{aligned}
 & \frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \in \mathbb{R}^+ \\
 \Leftrightarrow & z_2 = 0 \vee \theta_2 = \theta_1 \pmod{2\pi} \\
 \Leftrightarrow & z_2 = e^{i\theta_1} |z_2|
 \end{aligned}$$

Mais en renumérotant les  $z_i$ ,  $i \geq 2$ , on remarque que le raisonnement précédent donne aussi

$$\begin{aligned}
 & \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad |z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k| \\
 \Leftrightarrow & \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad z_k = e^{i\theta_1} |z_k|
 \end{aligned}$$

5.

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr } AX + \det A$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta &= \text{Tr}^2 A - 4 \det A \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad-bc) \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad-bc) \\ &= (a-d)^2 + 4bc > 0\end{aligned}$$

6.

Comme  $\Delta > 0$ ,  $\chi_A$  a deux racines réelles distinctes que l'on note  $\lambda < \mu$ .  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples donc  $A$  est diagonalisable et, quitte à permuter les colonnes de  $P$ ,

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = P \underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_D P^{-1}$$

7.

On a

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= \text{Tr } A \\ &= a + d\end{aligned}$$

Si  $\lambda \geq 0$ ,  $|\lambda| = \lambda < \mu$ . Sinon,

$$\begin{aligned}-|\lambda| + \mu &= a + d > 0 \\ \Rightarrow |\lambda| &< \mu\end{aligned}$$

8.

Comme on a

$$\begin{aligned}A^k &= P \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^k P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \mu^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} P^{-1}\end{aligned}$$

il est clair que

$$\begin{aligned}(A^k) \text{ CV} &\Leftrightarrow (D^k) \text{ CV} \\ &\Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in ]-1, 1]^2\end{aligned}$$

Comme  $|\lambda| < \mu \leq 1$ , si de plus  $(-1 <) \mu < 1$ , alors  $(A^k)$  converge vers la matrice nulle. Si  $\mu = 1$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

qui est un projecteur de rang 1.

9.

On remarque que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de  $B$ , associé à la valeur propre  $1 - \alpha - \beta$ .

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de  $B$ , associé à la valeur propre  $1 \neq 1 - \alpha - \beta$ . On a donc automatiquement  $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_{1-\alpha-\beta}$  et  $B$  diagonalisable:

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

10.

On a  $1 - \alpha - \beta \in ]-1, 1[$ , ainsi  $(D^k)$  converge, puis  $(B^k)$  converge et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \Lambda$$

11.

$N$  est une application de  $M_n(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Il n'y pas de difficulté à montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda A\|_\infty = |\lambda| \|A\|_\infty$$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \|A\|_\infty \geq 0$$

avec

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= 0 \end{aligned}$$

soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |(A+B)_{ij}| &= \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \\ &= \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \\ &\leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui montre l'inégalité triangulaire  $\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$ .

Soit  $C = AB$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n |c_{ij}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\
 &= \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \left( \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\|_{\infty} \\
 &= \|B\|_{\infty} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \\
 &\leq \|B\|_{\infty} \|A\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit en prenant le max sur  $i$ .

**12.**

Soit  $C = AB$ .

$$\begin{aligned}
 \|C\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \right)^2 \quad (\text{Inégalité triangulaire pour le module complexe}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\
 &= \|A\|_2^2 \|B\|_2^2
 \end{aligned}$$

**13.**

Il n'y a pas de difficultés à montrer que  $\nu$  est une norme en utilisant les propriétés de  $N$ . Puis,

$$\begin{aligned}
 \nu(AB) &= N(S^{-1}ABS) \\
 &= N(S^{-1}A \underbrace{SS^{-1}}_{=I_n} BS) \\
 &\leq N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) \\
 &= \nu(A)\nu(B)
 \end{aligned}$$

14.

Deux matrices semblables ont les mêmes polynômes caractéristiques, donc le même spectre et le même rayon spectral:

$$\begin{aligned}
 \chi_{S^{-1}AS}(X) &= \det(S^{-1}AS - XI_n) \\
 &= \det(S^{-1}AS - XS^{-1}S) \\
 &= \det(S^{-1}(A - XI_n)S) \\
 &= \det(S^{-1}) \det(A - XI_n) \det(S) \\
 &= \frac{1}{\det(S)} \det(A - XI_n) \det(S) \\
 &= \det(A - XI_n) \\
 &= \chi_A(X)
 \end{aligned}$$

$$\rho(S^{-1}AS) = \rho(A)$$

15.

$A \in M_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable car tout polynôme est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ .

$$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}), \quad A = Q \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) &= \det \begin{bmatrix} a_{11}-x & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-x & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}-x \end{bmatrix} Q \\
 &= \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)
 \end{aligned}$$

montre que  $\text{sp}(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$  puis  $\text{sp}(A^k) = \{a_{11}^k, \dots, a_{nn}^k\}$ . On en déduit que

$$\rho(A^k) = \rho(A)^k$$

$$\text{et } \text{sp}(\alpha A) = \{\alpha a_{11}, \dots, \alpha a_{nn}\}$$

$$\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$$

16.

Soit  $\lambda \in \text{sp}(A)$  tel que  $\rho(A) = |\lambda|$ . Soit  $U$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ . Soit  $H \in GL_n(\mathbb{C})$  définie par:

$$H = \begin{bmatrix} | & U & | & & | \\ U & & & \dots & \\ | & & & & | \end{bmatrix}$$

la matrice dont les colonnes sont toutes identiques, égales à  $U$ . On a  $AH = \lambda H$  donc

$$\begin{aligned}\rho(A)N(H) &= N(\lambda H) \\ &= N(AH) \\ &\leq N(A)N(H)\end{aligned}$$

et on peut conclure  $\rho(A) \leq N(A)$  car  $N(H) > 0$

**17.**

Il ne faut surtout pas ici revenir à la formule du produit mais plutôt manipuler les opérations élémentaires sur une matrice: soit

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{ligne } i$$

(i) Multiplier à droite par  $E_i$  sélectionne la colonne  $i$ :  $AE_i = C_i$ .

(ii) Multiplier à gauche par  $E_i^T$  sélectionne la ligne  $i$ :  $E_i^T A = L_i$ .

Multiplier la matrice  $T$  par la matrice diagonale  $D$  à droite revient ainsi à multiplier la colonne  $C_j$  par  $\tau^{j-1}$ . Ensuite multiplier le résultat par  $D^{-1}$  à gauche revient à multiplier la ligne  $i$  par  $\tau^{1-i}$ . on en déduit le résultat:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (D_\tau^{-1} T D_\tau)_{ij} = \tau^{j-i} t_{ij}$$

**18.**

soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . soit  $\tau \in ]0, 1[$ . Soit  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1} T D_\tau)_{ij}| &= \sum_{j=1}^n \tau^{j-i} |t_{ij}| \\ &= \sum_{j=i}^n \tau^{j-i} |t_{ij}| \\ &= |t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i} |t_{ij}| \\ &= |t_{ii}| + \sum_{j=1}^{n-i} \tau^j |t_{i,i+j}|\end{aligned}$$

soit  $M = \max_{k>l} \{|t_{kl}|\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{ij}| &\leq |t_{ii}| + M \sum_{j=1}^{n-i} \tau^j \\
&\leq |t_{ii}| + M \sum_{j=1}^{n-1} \tau^j \\
&\leq |t_{ii}| + M \underbrace{\frac{\tau}{1-\tau}}_{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0}
\end{aligned}$$

Si  $M = 0$ , la matrice  $T$  est diagonale et

$$\forall \tau \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty = \rho(T)$$

Sinon, soit  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M} > 0$ .

$$\exists \eta > 0, \quad \forall \tau \in ]0, 1[, \quad |\tau| < \eta \Rightarrow \frac{\tau}{1-\tau} < \epsilon'$$

Mais alors:

$$\begin{aligned}
\forall \tau \in ]0, \eta[, \quad \sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{ij}| &\leq |t_{ii}| + M \frac{\epsilon}{M} \\
&\leq \rho(T) + \epsilon
\end{aligned}$$

L'inégalité précédente étant valable pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient le résultat en prenant le max:

$$\forall \tau \in ]0, \eta[, \quad \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \epsilon$$

## 19.

Soit  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = QTQ^{-1}$ . Soit  $\tau \in ]0, \eta[$ , fixé (en fonction de  $T$  et  $\epsilon$ ) d'après ce qui précède. La norme sous-multiplicative  $\nu(\cdot) = \|D_\tau^{-1}Q^{-1} \cdot QD_\tau\|_\infty$  vérifie:

$$\rho(A) \leq \nu(A) = \|D_\tau^{-1}Q^{-1}AQD_\tau\|_\infty = \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \epsilon = \rho(A) + \epsilon$$

## 20.

Si  $\rho(A) < 1$ , on fixe  $\epsilon = \frac{1-\rho(A)}{2} > 0$  de telle sorte que l'on aie:  $\rho(A) < \rho(A) + \epsilon < 1$ . En utilisant la norme construite d'après ce qui précède (toutes les normes étant équivalentes en dimension finie),

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \nu(A^k) &\leq (\nu(A))^k \\
&\leq (\rho(A) + \epsilon)^k
\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite  $(A^k)$  converge vers la matrice nulle.



Réciproquement, si  $\rho(A) \geq 1$ ,

$$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}), \quad A = Q \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = Q \begin{bmatrix} a_{11}^k & \square & \dots & \dots & \square \\ 0 & a_{22}^k & \dots & \dots & \square \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^k \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Cette écriture montre que la suite  $(T^k)$ , et donc aussi la suite  $(A^k)$ , ne peut pas tendre vers la matrice nulle car un des éléments diagonaux ne tend pas vers 0.

**21.**

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, en base orthonormale, et les espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

$$\begin{aligned} \exists Q \in O_n(\mathbb{R}) \quad \exists D \in M_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale}, \quad A &= Q D Q^T \\ &= Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} Q^T \end{aligned}$$

**22.**

Si  $r$  était nul, cela voudrait dire que toutes les valeurs propres de  $A$  sont nulles, ou encore que  $A = 0$  car  $A$  est diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. Donc  $r > 0$ .

**23.**

$$\begin{aligned} X^T A X &= X^T Q D Q^T X \\ &= (Q^T X)^T D Q^T X \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \\ &\leq \mu \sum_{j=1}^n y_j^2 \\ &= \mu (Q^T X)^T (Q^T X) \\ &= \mu X^T \underbrace{Q Q^T}_{=I_n} X \\ &= \mu X^T X \\ &= \mu \end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

**24.**

En reprenant le raisonnement et les notations de la question précédente,  $X$  unitaire,

$$\begin{aligned} X^T A X = \mu &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i y_i^2 = \mu y_i^2 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = 0 \vee \lambda_i = \mu \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \neq \mu \Rightarrow y_i = 0) \end{aligned}$$

Or  $Q^T X$  correspond aux coordonnées de  $X$  dans la base orthonormale de vecteurs propres de  $A$   $e_1, e_2, \dots, e_n$  et  $\lambda_i$  est la valeur propre associée à  $e_i$ . On a donc bien

$$\begin{aligned} X^T A X = \mu &\Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \neq \mu \Rightarrow y_i = 0) \\ &\Leftrightarrow X \in E_\mu = \ker(A - \mu I_n) \\ &\Leftrightarrow X \in E_\mu = \ker(A - \mu I_n) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

la dernière équivalence venant du fait que  $X$  est unitaire.

**25.**

$$\begin{aligned} |X^T A X| &= \left| \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \right| \\ &\leq \sum_{i,j} a_{ij} |x_i| |x_j| \quad (a_{ij} \geq 0) \\ &= |X|^T A |X| \\ &\leq \mu \end{aligned}$$

la dernière inégalité venant de ce qui précède car  $|X|$  est aussi unitaire.

**26.**

On applique le résultat précédent à  $X$  unitaire vecteur propre associé à  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} |X^T A X| \leq \mu &\Leftrightarrow |\lambda| X^T X \leq \mu \\ &\Leftrightarrow |\lambda| \leq \mu \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\rho(A) = \mu > 0$ .

**27.**

D'après les résultats des questions 24 et 26, on a  $X^T A X = \mu$ , et on a l'égalité dans la question 25 i.e.  $|X|^T A |X| = \mu$ .

L'équivalence de 24, prise dans l'autre sens cette fois, nous permet d'en déduire que le vecteur unitaire  $|X|$  est un vecteur propre associé à  $\mu$ .

Supposons  $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i = 0$ . Alors:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} |x_k| &= \mu |x_i| = 0 \\ \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_k &= 0 \quad (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{ik} > 0) \end{aligned}$$

ce qui n'est pas. Donc  $|X| > 0$ .

**28.**

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} |x_k| &= \mu |x_i| \\ &= |\mu x_i| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \end{aligned}$$

La question 4 nous permet de dire que les complexes non nuls  $a_{ik}x_k$  ont tous même argument, ce qui revient à dire que les réels  $x_k$  sont tous de même signe. Donc

$$(|X| = X) \vee (|X| = -X)$$

**29.**

Soit  $X, Y$  deux vecteurs propres orthogonaux associés à  $\lambda$ , unitaires.  $|X|, |Y|$  sont strictement positifs et aussi,

$$|X|^T |Y| = \pm X^T Y = 0$$

D'après la question précédente. Or,

$$|X|^T |Y| = \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| > 0$$

Il y a contradiction.

On en déduit que  $\dim(\ker(A - rI_n)) = 1$ .

**30.**

Comme  $A$  est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de  $r$  en tant que racine du polynôme caractéristique est égal à la dimension du sous espace propre, soit 1.

supposons que  $-r$  est valeur propre de  $A$ , et soit  $Y$  unitaire un vecteur propre associé à  $-r$ . On a:

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad -ry_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad \textcircled{1} \\ \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad r |y_i| &\leq \sum_{j=1}^n a_{ij} |y_j| \end{aligned}$$

On a  $|Y|$  unitaire, et

$$\begin{aligned} |Y|^T A |Y| &= \sum_{i,j} a_{ij} |y_i| |y_j| \\ &= \sum_{i=1}^n |y_i| \sum_{j=1}^n a_{ij} |y_j| \\ &\geq r \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \\ &= r \end{aligned}$$

Mais d'après 23, on a aussi  $|Y|^T A |Y| \leq \mu$ , donc  $|Y|^T A |Y| = \mu$  et d'après 24,  $|Y|$  est un vecteur propre unitaire associé à  $r$ .

Mais alors, si on réécrit l'égalité ①:

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad -ry_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \\ \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| &= r |y_i| \\ \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| &= \sum_{k=1}^n a_{ik} |y_k| \end{aligned}$$

Mais encore d'après 4, cette dernière égalité implique que tous les  $y_k$  sont de même signe, donc  $Y \pm |Y|$ , ce qui est impossible car  $Y \notin \ker(A - rI_n)$ <sup>1</sup>.

**31.**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A$  est symétrique, positive (mais non strictement positive),  $\text{sp}(A) = \{-1, 1\}$ .

**32.**

On rappelle que  $\rho(A^p) = \rho(A)^p = r^p$ , puis d'après la question 29 appliquée à  $A^p$ ,  $\dim(\ker(A^p - r^p I_n)) = 1$ . Comme  $\ker(A - rI_n) \subset \ker(A^p - r^p I_n)$ , on a aussi  $\dim(\ker(A - rI_n)) = 1$ , car  $r$  est valeur propre de  $A$  et donc  $\ker(A - rI_n) = \ker(A^p - r^p I_n)$ . La question 27 fournit un vecteur strictement positif  $X$  comme base.

**33.**

Si  $p$  impair,  $-r$  ne peut pas être valeur propre de  $A$  car sinon  $(-r)^p = -r^p$  serait une valeur propre de  $A^p$ , ce qui n'est pas d'après 29.

Si  $p$  pair, soit  $Y$  un vecteur propre associé de  $A$  à  $-r$ . On a  $X \perp Y$  et  $\text{vect}(X, Y) \subset \ker(A^p - r^p I_n)$ , impossible pour des raisons de dimensions.

---

<sup>1</sup>cette solution ne semble pas être celle attendue par l'énoncé, qui suggère de déduire le résultat de l'ordre de multiplicité de  $r$  comme racine du polynôme caractéristique. C'est la seule solution que j'ai trouvée pour l'instant.

34.

soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$ , et  $X$  un vecteur propre associé. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|x_i| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j| > 0$ .

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda I_n)X = 0 &\Rightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}x_k + (a_{ii} - \lambda)x_{ii} = 0 \\
 &\Rightarrow (a_{ii} - \lambda)x_{ii} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}x_k \\
 &\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| |x_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| |x_k| \\
 &\Leftrightarrow |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| \underbrace{\frac{|x_k|}{|x_{ii}|}}_{\leq 1} \\
 &\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|
 \end{aligned}$$

35.

Comme dans la question 17, on a

$$(D^{-1}AD)_{ij} = \frac{x_j}{x_i} a_{ij}$$

On applique la question précédente à la matrice  $C = D^{-1}AD$ . Il suffit de remarquer que:

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |c_{ik}| &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left| \frac{x_k}{x_i} \right| |a_{ik}| \\
 &\leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left| \frac{x_k}{x_i} \right| b_{ik} \\
 &= \frac{1}{x_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k b_{ik} \\
 &= \frac{1}{x_i} (\rho(B)x_i - b_{ii}x_i) \\
 &= \rho(B) - b_{ii}
 \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que  $c_{ii} = a_{ii}$  et que  $\text{sp}(C) = \text{sp}(A)$  pour conclure.