

CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Le rayon de convergence est $R = 1$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-x}$$

2.

On sait que la somme précédente est de classe C^∞ sur $] - 1, 1[$, et

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \end{aligned}$$

Donc le rayon de $\sum_{n \geq 0} nx^n$ vérifie $R \geq 1$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n &= x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= x f'(x) \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n |x|^n \geq |x|^n \geq 0 \Rightarrow R \leq 1$$

Donc $R = 1$.

3.

On réitère; on sait que la f est de classe C^k sur $] - 1, 1[$, et

$$\begin{aligned}
 \forall x \in] - 1, 1[, \quad f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)^{(k)} \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\
 &= k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \\
 &= k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \quad (n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0)
 \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que la question précédente, on déduit que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n$ est 1 et

$$\begin{aligned}
 \forall x \in] - 1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n &= \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) \\
 &= \frac{x^k}{k!} \frac{(k!)}{(1-x)^{k+1}} \\
 &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}
 \end{aligned}$$

4.

On a

$$0 \leq \frac{(n+1)^k}{n^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

ce qui montre que le rayon de convergence est $R = 1$.

5.

On voit que $\deg(H_j) = j$. (H_0, H_1, \dots, H_k) est une famille de $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$ polynômes de degrés échelonnés, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Par définition d'une base,

$$\exists! (\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad X^k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j \quad \textcircled{1}$$

6.

On remarque que

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad H_j(0) = 0$$

donc

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X^k)(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k>0 \end{cases} \\ &= \delta_{k,0} \\ &= \alpha_{k,0} H_0(0) \\ &= \alpha_{k,0}\end{aligned}$$

D'autre part, le coefficient de X^k dans H_k est $\frac{1}{k!}$, par identification on a donc:

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{k,k} \frac{1}{k!} &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad \alpha_{k,k} &= k!\end{aligned}$$

7.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé. On remarque que:

$$\forall i \geq j+1, \quad H_i(j) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\forall i \in \llbracket 0, j \rrbracket, \quad H_i(j) &= \frac{1}{i!} j(j-1) \dots (j-i+1) \\ &= \frac{1}{i!} \frac{j!}{(j-i)!} \\ &= \binom{j}{i}\end{aligned}$$

On peut unifier les deux cas:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad H_i(j) = \binom{j}{i}$$

On évalue l'égalité ① en $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

$$\begin{aligned}j^k &= \sum_{i=0}^k \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^j \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^j \alpha_{k,i} \binom{j}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i} \binom{j}{i} + \alpha_{k,j}\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

8.

```

import numpy as np
from math import factorial

def binom(n,k):
    if k>n:
        return 0
    else:
        return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))

def alpha(k,j):
    res = np.zeros(j+1, dtype=int)
    if k == 0:
        res[0] = 1
    for i in range(1,j+1):
        sum = 0;
        for l in range(i):
            sum += binom(i,l)*res[l]
        res[i] = i**k-sum
    return res[j]

```

9.

On évalue la relation ① en $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 n^k &= \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j(n) \\
 &= \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j(n) \\
 &= \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \binom{n}{j}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]-1, 1[, \quad f_k(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \binom{n}{j} \right) x^n \\
 &= \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n \right) \\
 &= \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} \\
 &= \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \frac{x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}} \\
 f_k(x) &= \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}}
 \end{aligned}$$

$$f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \quad \textcircled{2}$$

ce qui montre l'existence du polynôme P_k .

Soit maintenant Q_k un polynôme tel que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f_k(x) = \frac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

alors:

$$\begin{aligned} & \forall x \in]-1, 1[, \quad Q_k(x) = f_k(x)(1-x)^{k+1} \\ \Leftrightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad Q_k(x) = P_k(x) \\ \Leftrightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad Q_k(x) - P_k(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que le polynôme $Q_k - P_k$ a une infinité de racines, donc $Q_k = P_k$ et l'unicité est prouvée.

10.

Soit $l \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Le coefficient de X^l dans le polynôme $X^j(1-X)^{k-j}$ est:

$$\begin{aligned} a_{l,j,k} &= \begin{cases} 0 & \text{si } l < j \\ (-1)^{l-j} \binom{k-j}{l-j} & \text{si } l \geq j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } l < j \\ (-1)^{l-j} \binom{k-j}{k-l} & \text{si } l \geq j \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient de X^l dans $P_k = \sum_{j=0}^k \alpha_{kj} X^j (1-X)^{k-j}$ est

$$\begin{aligned} \beta_{l,k} &= \sum_{j=0}^k \alpha_{kj} a_{l,j,k} \\ &= \sum_{j=0}^l \alpha_{kj} a_{l,j,k} \\ &= \sum_{j=0}^l \alpha_{kj} (-1)^{l-j} \binom{k-j}{k-l} \end{aligned}$$

Il n'est vraiment pas judicieux de réutiliser la fonction `alpha` telle quelle, puisque celle-ci calcule tous les α_{ki} . $i \leq j$ pour retourner uniquement le coefficient α_{kj} . Cela veut dire que si on appelle k fois la fonction pour obtenir $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kk}$, on aura en fait calculé k fois α_{k1} , $k-1$ fois $\alpha_{k2}, \dots, 2$ fois $\alpha_{k,k-1}$ et 1 fois α_{kk} .

Il est préférable de la modifier pour qu'elle renvoie la liste de tout les α_{ki} . $i \leq j$; on appellera ainsi la fonction une seule fois. La fonction `beta` renvoie la liste des coefficients de P_k dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$:

```
import numpy as np
from math import factorial

def binom(n,k):
    if k>n:
```

```

        return 0
    else:
        return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))

def alpha(k,j):
    res = np.zeros(j+1, dtype=int)
    if k == 0:
        res[0] = 1
    for i in range(1,j+1):
        sum = 0;
        for l in range(i):
            sum += binom(i,l)*res[l]
        res[i] = i**k-sum
    return res

def beta(k):
    res = np.zeros(k+1, dtype=int)
    a = alpha(k,k)
    for i in range(k+1):
        sum = 0
        eps = (-1)**i
        for j in range(i+1):
            sum += eps*a[j]*binom(k-j,k-i)
            eps *= -1
        res[i] = sum
    return res

```

11.

On remarque d'abord que $xf_k' = f_{k+1}$, puis on dérive la relation ②:

$$\begin{aligned}
 & \forall x \in]-1, 1[, \quad f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \\
 \Rightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x)^{k+1} + (k+1)P_k(x)(1-x)^k}{((1-x)^{k+1})^2} \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x) + (k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
 \Rightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad xf_k'(x) = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad f_{k+1}(x) = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad P_{k+1}(x) = xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x) \\
 \Leftrightarrow & \quad P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k
 \end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant encore du fait que deux polynômes coïncidant sur un ensemble infini sont égaux.

12.

Comme $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$, on a $P_0 = 1$. Puis,

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 + XP_0 \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= X(1 - X) + 2X^2 \\ &= X^2 + X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= X(1 - X)(2X + 1) + 3X(X^2 + X) \\ &= X^3 + 4X^2 + X \end{aligned}$$

On peut vérifier avec le programme python:

```
>>> beta(2)
array([0, 1, 1])
>>> beta(3)
array([0, 1, 4, 1])
```

13.

On montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \deg(P_k) = k$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{dom}(P_k) = 1$$

Vrai pour $P_0 = 1$. Supposons la propriété vérifiée pour $k \in \mathbb{N}$.

$$P_{k+1} = X(1 - X)P'_k + (k + 1)XP_k$$

montre que $\deg(P_{k+1}) \leq k + 1$, et le coefficient de X^{k+1} vaut $-k\text{dom}(P_k) + (k + 1)\text{dom}(P_k) = 1$.

14.

On pose $\forall x \in]0, 1[, \quad Q_k(x) = x^{k+1}P_k(\frac{1}{x})$. On a:

$$\forall x \in]0, 1[, \quad Q'_k(x) = (k + 1)x^k P_k(\frac{1}{x}) - x^{k-1} P'_k(\frac{1}{x})$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad x(1 - x)Q'_k(x) &= (k + 1)x^{k+1}(1 - x)P_k(\frac{1}{x}) - x^k(1 - x)P'_k(\frac{1}{x}) \\ &= x^{k+2} \left[(k + 1)(\frac{1}{x} - 1)P_k(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - 1)P'_k(\frac{1}{x}) \right] \end{aligned}$$

On a déjà $Q_1 = X^2 P_1(\frac{1}{X}) = X = P_1$. supposons que pour un certain $k \geq 1$, $Q_k = P_k$. Alors,

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]0, 1[, \quad Q_{k+1}(x) &= x^{k+2} P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= x^{k+2} \left[\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) P'_k\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1) \frac{1}{x} P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\
 &= x^{k+2} \left[\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) P'_k\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1) \left(\frac{1}{x} - 1\right) P_k\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1) P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\
 &= x^{k+2} \left[\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) P'_k\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1) \left(\frac{1}{x} - 1\right) P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right] + (k+1) x^{k+2} P_k\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= x(1-x) Q'_k(x) + (k+1) x Q_k(x) \\
 &= x(1-x) P'_k(x) + (k+1) x P_k(x) \\
 &= P_{k+1}(x)
 \end{aligned}$$

On a montré:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]0, 1[, \quad x^{k+1} P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$$

15.

On identifie le coefficient de X^j dans l'égalité polynomiale qui précède:

$$\beta_{j,k} = \beta_{k+1-j,k}$$

valable $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ si on prend naturellement $\beta_{k+1,k} = 0$.

16.

On a

$$0 \leq \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4$$

ce qui montre que $R = \frac{1}{4}$.

On sait que la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est développable en série entière sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et que le coefficient de x^n est:

$$\begin{aligned}
 a_n &= 4^n (-1)^n \frac{1}{n!} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}_{n \text{ facteurs}} \\
 &= 4^n (-1)^n \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right) \\
 &= 4^n (-1)^n \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 2 \times 1}{2^n} \\
 &= 4^n \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{\underbrace{2n(2n-2)\dots 4 \times 2 \times 2^n}_{n \text{ facteurs}}} \\
 &= 4^n \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{2^n n! \times 2^n} \\
 &= \frac{(2n)!}{n!^2} \\
 &= \binom{2n}{n}
 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

17.

$$0 \leq \frac{\frac{1}{n+1} \binom{2(n+1)}{n+1}}{\frac{1}{n} \binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)n}{(n+1)^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4$$

montre que la série entière $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{4}$. La somme f est de classe C^1 sur $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \quad f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-4x}}
 \end{aligned}$$

La fonction

$$\begin{aligned}
 g :]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[&\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}
 \end{aligned}$$

est de classe C^1 et

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \quad g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \\
 &= f'(x)
 \end{aligned}$$

En intégrant et puisque $f(0) = g(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} \\ \Rightarrow \forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\setminus \{0\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$

18.

Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\setminus \{0\}$, fixé. Les séries numériques $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$ sont absolument convergentes. Leur produit de Cauchy a pour terme général

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} x^k \binom{2(n-k)}{n-k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} x^n$$

Le produit de Cauchy converge absolument et la somme vaut:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} x^n &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \\ &= \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right) \end{aligned}$$

19.

Comme le DSE de $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ a pour terme constant 1, $\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)$ est DSE sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. Le coefficient de x^n dans ce DSE est:

$$\frac{1}{2} \times \text{coeff. de } x^{n+1} \text{ dans le DSE de } \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2} \binom{2(n+1)}{n+1}$$

L'unicité du développement en série entière donne:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2(n+1)}{n+1}$$

20.

Soit $x \in]0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{k \geq 0} (x^n)^k$ converge et

$$\sum_{k \geq 0} (x^n)^k = \frac{1}{1-x^n}$$

on a donc:

$$\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$$

De plus,

$$0 \leq \frac{nx^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx^n$$

montre que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge.

21.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n \geq 1} n(x^{(1+k)})^n$ converge d'après 2, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n = \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}$$

d'après la question précédente et le théorème sur les familles de réels positifs sommables,

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} &= \sum_{k \geq 0} \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n \end{aligned}$$

est une série convergente et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \end{aligned}$$

22.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \frac{1}{k^3(k+1)} \leq \frac{1}{k^4}$$

qui est le terme d'une série convergente, donc $\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^3(k+1)}$ est convergente.
soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}$$

Montre que la série:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3(k+1)} \sum_{n=1}^k n = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k^2}$$

est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)} \sum_{n=1}^k n = \frac{\pi^2}{12}$$

En appliquant le théorème sur les familles doubles de réels positifs sommables à la famille:

$$a_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > k \\ \frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } n \leq k \end{cases}$$

on obtient que $\sum_{n \geq 1} u_n$ CV, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{12}$$

23.

Soit $i \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} &= -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} b_{ij} \\ &= -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} \\ &= -1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} = 0$$

24.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij} &= -1 + \sum_{i=0}^{j-1} b_{ij} \\ &= -1 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} \\ &= -1 + \frac{1}{2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^j}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= -1 + 1 - (\frac{1}{2})^j \\ &= -\frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij} &= -\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= -2 \end{aligned}$$

25.

On a

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} \neq \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij}$$

ce qui montre bien que l'hypothèse que les termes doivent être positifs est essentielle dans le théorème sur la sommation d'une famille double.

26.

Soit $i \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{ij} &= i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{3^{j-i}} \\ &= i - 2i \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= i - 2i \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{ij} = 0$$

27.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} c_{ij} &= j - 2 \sum_{i=0}^{j-1} i \frac{1}{3^{j-i}} \\ &= j - 2 \sum_{i=1}^{j-1} i \frac{1}{3^{j-i}} \\ &= j - 2 \left[\left(\frac{1}{3^{j-1}} + \frac{1}{3^{j-2}} + \cdots + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3^{j-2}} + \cdots + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3^{j-3}} + \frac{1}{3^{j-4}} + \cdots + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \right] \\ &= j - 2 \frac{1}{3} \frac{3}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3^{j-1}} \right) + \left(1 - \frac{1}{3^{j-2}} \right) + \left(1 - \frac{1}{3^{j-3}} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] \\ &= j - \left[j - 1 - \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^{j-1}}}{1 - \frac{1}{3}} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{j-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}} \end{aligned}$$

28.

$$\frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2}$$

donc la série $\sum_{j \geq 0} \sum_{i=0}^{+\infty} c_{ij}$ est divergente.

29.

$$\begin{aligned}
\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}((X, Y) = (n, k)) &= \mathbb{P}(X = n \cap Y = k) \\
&= \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \\
&= p(1-p)^{n-1} e^{-n} \frac{n^k}{k!}
\end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 0) &= \mathbb{P}(Y = 0 \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}(Y = 0 \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X = n) \\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y = 0 \cap X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = 0 \cap X = n) \quad (\text{Les évènements } X = n \text{ sont deux à deux incompatibles}) \\
&= p \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} e^{-n} \\
&= \frac{p}{1-p} \frac{1}{1 - \frac{1-p}{e}} \\
&= \frac{p}{1-p} f_0\left(\frac{1-p}{e}\right)
\end{aligned}$$

Plus généralement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y = k \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}(Y = k \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X = n) \\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y = k \cap X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \cap X = n) \quad (\text{Les évènements } X = n \text{ sont deux à deux incompatibles}) \\
&= p \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} e^{-n} \frac{n^k}{k!} \\
&= \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{1-p}{e}\right)^n \\
&= \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)
\end{aligned}$$

31.

soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{n^k}{k!}$ converge et:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n$$

La série $\sum_{n \geq 1} (\frac{1-p}{e})^n e^n = \sum_{n \geq 1} (1-p)^n$ converge, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n = \frac{1-p}{p}$$

Le théorème sur la sommabilité d'une famille double de réels positifs nous permet d'affirmer que

$$\sum_{k \geq 0} P(Y = k) = \sum_{k \geq 0} \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (\frac{1-p}{e})^n$$

est convergente et la somme est donnée par:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (\frac{1-p}{e})^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{1-p} (\frac{1-p}{e})^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)} (1-p)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

32.

soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. La série $\sum_{k \geq 1} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$ converge et:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} = e^n$$

La série $\sum_{n \geq 1} (\frac{1-p}{e})^n n e^n = \sum_{n \geq 1} n(1-p)^n$ converge, et:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n &= f_1(1-p) \\ &= \frac{1-p}{p^2} \quad (\text{cf. 2}) \end{aligned}$$

Le théorème sur la sommabilité d'une famille double de réels positifs nous permet d'affirmer que

$$\sum_{k \geq 1} k P(Y = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{p}{(1-p)(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (\frac{1-p}{e})^n$$

est convergente et la somme est donnée par:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{1-p}{e}\right)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{1-p} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{p}{(1-p)} \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

On a donc montré que Y admet une espérance et

$$E(Y) = \frac{1}{p}$$

33.

On remarque d'abord que

$$k^2 P(Y = k) = k(k-1) P(Y = k) + k P(Y = k)$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. La série $\sum_{k \geq 2} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!}$ converge et:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} = e^n$$

La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n n^2 e^n = \sum_{n \geq 1} n^2 (1-p)^n$ converge, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n = f_2(1-p)$$

D'après la question 9,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{P_2(x)}{(1-x)^3} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

donc:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}$$

Le théorème sur la sommabilité d'une famille double de réels positifs nous permet d'affirmer que

$$\sum_{k \geq 2} k(k-1) P(Y = k) = \sum_{k \geq 2} \frac{p}{(1-p)(k-2)!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{1-p}{e}\right)^n$$

est convergente et la somme est donnée par:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)(k-2)!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{1-p}{e}\right)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{1-p} \left(\frac{1-p}{e}\right)^n n^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \frac{p}{(1-p)} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1-p)^n \\ &= \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

On a donc montré que Y^2 admet une espérance et

$$E(Y^2) = \frac{2-p}{p^2} + \frac{1}{p}$$

On peut conclure que Y admet une variance et

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= \frac{2-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned} A_n &= (X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} + \dots + X_{2n} = n) \\ A_n &= (X_1 + \dots + X_n = n - (X_{n+1} + \dots + X_{2n})) \\ &= \bigcup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} (X_1 + \dots + X_n = k) \cap (X_{n+1} + \dots + X_{2n} = n - k) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P\left(\bigcup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} (X_1 + \dots + X_n = k) \cap (X_{n+1} + \dots + X_{2n} = n - k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n P((X_1 + \dots + X_n = k) \cap (X_{n+1} + \dots + X_{2n} = n - k)) \\ &\quad \text{(les évènements sont deux à deux incompatibles)} \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1 + \dots + X_n = k) P(X_{n+1} + \dots + X_{2n} = n - k) \\ &\quad \text{(les VA } X_1 + \dots + X_n \text{ et } X_{n+1} + \dots + X_{2n} \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1 + \dots + X_n = k) P(X_1 + \dots + X_n = n - k) \\ &\quad \text{(les VA } X_1 + \dots + X_n \text{ et } X_{n+1} + \dots + X_{2n} \text{ ont même loi)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k \\ &= p^n (1-p)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \end{aligned}$$

J'ai essayé ici de suivre l'indication de l'énoncé: "Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ ", ce qui est impossible; en fait je pense qu'il faut lire : "Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_{2n}$ ". Dans ce cas la réponse est directe puisque cette VA suit une loi binomiale:

$$A_n = (X_1 + \dots + X_{2n} = n)$$

et

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(X_1 + \dots + X_{2n} = n) \\ &= p^n (1-p)^n \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Au passage on a démontré en comparant les deux résultats l'égalité:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

35.

Soit $1 \leq n < m$. Si l'évènement B_m est réalisé, « à l'issue des $2m$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces », alors à l'issue des $2n$ premiers lancers, il ne peut y avoir autant de piles que de faces et B_n n'est pas réalisé. $B_n \cap B_m = \emptyset$.

36.

$$C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

est un évènement en tant que réunion dénombrable d'évènements, et

$$\begin{aligned} P(C) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \quad (\text{les évènements } B_n \text{ sont deux à deux incompatibles}) \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P\left(A_n \cap \bigcup_{k=1}^n B_k\right) \quad (A_n \subset \bigcup_{k=1}^n B_k) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^n A_n \cap B_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_n \cap B_k) \quad (\text{les } B_k \text{ sont deux à deux incompatibles}) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_n | B_k) P(B_k) \end{aligned}$$

Soit $k < n$. Sachant l'évènement B_k réalisé, « à l'issue des $2k$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces », dire que A_n est réalisé revient à dire qu'il y a autant de piles que de faces au cours des $2(n-k)$ lancers $2k+1, 2k+2, \dots, 2n$; or les VA X_{2k+1}, \dots, X_{2n} ayant même lois que $X_1, \dots, X_{2(n-k)}$, la probabilité est $P(A_n | B_k) = P(A_{n-k})$. Cela reste vrai pour $k = n$.

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_{n-k}) P(B_k)$$

38.

La formule est vraie pour $n = 1$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(B_k) = \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} p^k (1-p)^k$$

On a:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(B_{n+1}) + \sum_{k=1}^n P(B_k) P(A_{n+1-k}) \\ \Leftrightarrow p^{n+1} (1-p)^{n+1} \binom{2n+2}{n+1} &= P(B_{n+1}) + p^{n+1} (1-p)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} \binom{2n-2(k-1)}{n-(k-1)} \\ \Leftrightarrow p^{n+1} (1-p)^{n+1} \binom{2n+2}{n+1} &= P(B_{n+1}) + p^{n+1} (1-p)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \\ \Leftrightarrow p^{n+1} (1-p)^{n+1} \binom{2n+2}{n+1} &= P(B_{n+1}) + 2p^{n+1} (1-p)^{n+1} \left[\frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \right] \\ \Leftrightarrow P(B_{n+1}) &= p^{n+1} (1-p)^{n+1} \frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$ (on a utilisé la question 19 pour la troisième étape).

39.

$$\begin{aligned} P(C) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2(n-1)}{n-1} \frac{(p(1-p))^n}{n} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{(p(1-p))^{n+1}}{n+1} \\ &= 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)} \end{aligned}$$

On peut en effet utiliser la question 17 car $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

40.

On sait déjà que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$ converge (vers $\frac{P(C)}{2}$). Cela montre que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ converge normalement sur le segment $[0, \frac{1}{4}]$; en effet:

$$\sup_{x \in [0, \frac{1}{4}]} \left| \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \right| = \binom{2n}{n} \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$$

La série de fonctions converge donc aussi uniformément sur $[0, \frac{1}{4}]$, et la somme est continue sur ce segment, i.e. on peut intervertir les symboles \lim et Σ :

$$\begin{aligned} P(C) &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{(n+1)4^{n+1}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \\ &= 2 \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} 1 - \sqrt{1 - 4x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il est donc certain qu'à un moment ou à un autre, on aura obtenu autant de piles que de faces.