CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 1 - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

Il est clair que E_a est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$, donc c'est un endomorphisme. De plus $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ montre que E_a es bijectif et $(E_a)^{-1} = E_{-a}$.

2.

J est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$. On peut expliciter J. Soit $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, $a_n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
Jp &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}\left[(X+1)^{i+1} - X^{i+1}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}\left[(X+1-X)(\sum_{j=0}^{i}(X+1)^j X^{i-j})\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(\sum_{j=0}^{i}(X+1)^j X^{i-j})
\end{aligned}$$

On a $\deg(X+1)^j X^{i-j} = i$, de coefficient dominant 1, donc Jp est de degré n, de coefficient dominant $a_n \frac{n+1}{n+1} = a_n$

3.

Puisque J conserve le degré, $(JX^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de degrés echelonnés, donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Ce la montre que J est bijectif.

4.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\
t &\mapsto e^{-t}t^k
\end{aligned}$$

est C^0 par morceaux et $e^{-t}t^k \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ montre que la fonction est intégrable en $+\infty$.

Soit $X > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^X e^{-t}t^k \,\mathrm{d}t &= \left[e^{-t}\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^X + \int_0^X e^{-t}\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{e^{-X}\frac{X^{k+1}}{k+1}}_{\underset{X\to+\infty}{\to} 0} + \int_0^X e^{-t}\frac{t^{k+1}}{k+1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En faisant tendre $X \to +\infty$, on a

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} I_{k+1}$$

montre par une récurrence immédiate que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k \,\mathrm{d}t = k!$$

5.

On peut expliciter l'action de L sur la base cannonique

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{K}, \quad LX^n(x) &= -n \int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^{n-1} \,\mathrm{d}t \\
&= -n \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i x^{n-1-i}) \,\mathrm{d}t \\
&= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^i \,\mathrm{d}t \\
&= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} i! \\
&= -n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!} x^{n-1-i} \\
&= -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} \qquad (1)
\end{aligned}$$

montre que $LX^n = -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} X^i$[1] puis par linéarité

$$Lp = \sum_{i=0}^{n} a_i LX^i \in \mathbb{K}[X]$$

est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. L n'est pas inversible puisque $\mathbb{K} \subset \ker L$ ($\mathbb{K}$ désignant l'espace vectoriel des polynômes constants).

6.

$$\begin{aligned}
(I \circ E_a)(P) &= I(P(X+a)) \\
&= P(X+a) \\
&= E_a(P) \\
&= E_a(I(P)) \\
&= (E_a \circ I)(P)
\end{aligned}$$

[1] L'expression a bien un sens pour $n = 0$ en prenant la convention qu'une somme sans termes vaut 0.

$$\begin{aligned}(D\circ E_a)(P) &= D(P(X+a))\\ &= 1\times P'(X+a)\\ &= P'(X+a)\\ &= E_a(P')\\ &= E_a(D(P))\\ &= (E_a\circ D)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_b\circ E_a)(P) &= E_b(P(X+a))\\ &= P((X+b)+a)\\ &= P(X+a+b)\\ &= P((X+a)+b)\\ &= E_a(P(X+b))\\ &= E_a(E_b(P))\\ &= (E_a\circ E_b)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_b\circ E_a)(P) &= E_b(P(X+a))\\ &= P((X+b)+a)\\ &= P(X+a+b)\\ &= P((X+a)+b)\\ &= E_a(P(X+b))\\ &= E_a(E_b(P))\\ &= (E_a\circ E_b)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad (E_a\circ J)P(x) &= E_a(JP)(x)\\ &= \int_{x+a}^{x+a+1} p(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{x}^{x+1} p(u+a)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } u=t-a)\\ &= J(P(X+a))(x)\\ &= (J\circ E_a)P(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_a\circ L)X^n &= E_a(-n!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X^i}{i!})\\ &= -n!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(X+a)^i}{i!}\\ &= -n!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X^i}{i!}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{(n-j)!}a^{n-j}\\ &= -n!\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!}a^{n-j}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{X^i}{i!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}(-j!) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X^i}{i!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (LX^j) a^{n-j} \\
&= L(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j a^{n-j}) \\
&= L(X+a)^n \\
&= L(E_a X^n)
\end{aligned}$$

I, J, E_a conserve le degré donc ne sont pas delta. Par contre L et D öe sont puisque $LX = -1$ et $DX = 1$.

7.

On a I est shift invariant. Soit T_1, T_2 shift invariants, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
E_a \circ (\lambda T_1 + T_2) &= \lambda E_a \circ T_1 + E_a \circ T_2) \\
&= \lambda T_1 \circ E_a + T_2 \circ E_a) \\
&= (\lambda T_1 + T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

donc $\lambda T_1 + T_2$ est shift invariant.Puis:

$$\begin{aligned}
E_a \circ (T_1 \circ T_2) &= (E_a \circ T_1) \circ T_2 \\
&= (T_1 \circ E_a) \circ T_2 \\
&= T_1 \circ (E_a \circ T_2) \\
&= T_1 \circ (T_2 \circ E_a) \\
&= (T_1 \circ T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

et $T_1 \circ T_2$ est shift invariant. Les endomorphismes shift invariants constituent bien une sous algèbre.

Par contre les endomorphismes delta ne sont stables ni par addition, ni par composition comme le montre

$$LDX = L1 = 0$$

et

$$(L + D)X = 0$$

8.

Soit $\deg p = d \in [\![-1, +\infty[\![$. On a $\forall k \geqslant d+1, \quad D^k p = 0$, de sorte que la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p$$

a bien un sens et définit bien un polynôme en tant que somme (finie) de polynômes.

9.

Les endomorphismes shift invariants formant une algèbre, et D étant shift invariant, il est direct que

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad (E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k)p &= (E_a \circ \sum_{k=0}^{d} a_k D^k)p \\ &= (\sum_{k=0}^{d} a_k D^k \circ E_a)p\end{aligned}$$

Donc $E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \circ E_a$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est shift invariant.

10.

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}k!a_k &= (\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k)X^k(0) \\ &= (\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k)X^k(0) \\ &= k!b_k\end{aligned}$$

11.

On remarque que

$$\begin{aligned}D^k q_j(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{jk}\end{aligned}$$

Posons $\tilde{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0)D^k$. On voit déjà que

$$\begin{aligned}\tilde{T}q_k(0) &= (\sum_{j=0}^{k} Tq_j(0)D^j q_k)(0) \\ &= Tq_k(0)D^k q_k(0) \\ &= Tq_k(0)\end{aligned}$$

Les polynômes Tq_k et $\tilde{T}q_k$ coincident en 0.

De plus les q_k forment une base de $\mathbb{K}[X]$; tout polynômes $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit

$$p = \sum_{k=0}^{d} p^{(k)}(0)q_k$$

Cela montre que Tp et $\tilde{T}p$ coincident en 0.

Supposons T shift invariant. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
Tq_k(x) &= E_x(Tq_k)(0) \\
&= ((E_x \circ T)q_k)(0) \\
&= ((T \circ E_x)q_k)(0) \\
&= T(E_x q_k)(0) \\
&= \tilde{T}(E_x q_k)(0) \\
&= ((\tilde{T} \circ E_x)q_k)(0) \\
&= ((E_x \circ \tilde{T})q_k)(0) \qquad (\tilde{T} \text{ est shift invariant}) \\
&= E_x(\tilde{T}q_k)(0) \\
&= \tilde{T}q_k(x)
\end{aligned}$$

Cela montre que Tq_k et $\tilde{T}q_k$ coincident, puis par linéarité, $Tp = \tilde{T}p, \quad \forall p \in \mathbb{K}[X]$, i.e. $T = \tilde{T}$.

Réciproquement, si $T = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0)D^k$, T est shift invariant d'après la question 9.

12.

soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré d. soit T_1, T_2 deux endomorphismes shift invariants.

$$\begin{aligned}
(T_1 \circ T_2)p &= (\sum_{i=0}^{d} T_1 q_i(0) D^i \circ \sum_{j=0}^{d} T_2 q_j(0) D^j)p \\
&= (\sum_{j=0}^{d} T_2 q_j(0) D^j \circ \sum_{i=0}^{d} T_1 q_i(0) D^i)p \\
(T_2 \circ T_1)p
\end{aligned}$$

car deux polynômes de l'endomorphisme D commutent.

13.

E_a est shift invariant, on peut écrire d'après 11:

$$\begin{aligned}
E_a &= \sum_{k=0}^{+\infty} E_a q_k(0) D^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(X+a)^k(0) D^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k
\end{aligned}$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad p(X+a) &= E_a p \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k p \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{a^k}{k!} D^k p \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}
\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Taylor.

14.

soit q un polynôme obtenu par intégration à partir de p:

$$q = \sum_{i=0}^{d} \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$$

On a

$$\begin{aligned} Jp &= E_1 q - q \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k q \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^{k-1} D q \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^{k-1} p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} D^k p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)} \end{aligned}$$

15.

On peut s'inspirer de $(1-x)(1+x++x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$, pour $x \in \mathbb{C}$. soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré d.

$$\begin{aligned} (D-I) \circ (\sum_{k=0}^{+\infty} D^k) p &= (\sum_{k=0}^{+\infty} D^k) \circ (D-I) p \\ &= (\sum_{k=0}^{+\infty} D^k)(p' - p) \\ &= (\sum_{k=0}^{d-1} D^k) p' - (\sum_{k=0}^{d} D^k) p \\ &= -p \end{aligned}$$

ce qui montre que $D - I$ est inversible et

$$(D-I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} D^k$$

L'égalité 1 s'écrit

$$\begin{aligned} Lq_n &= -\sum_{i=0}^{n-1} q_i \\ \Rightarrow Lq_n(0) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$L = -\sum_{k=1}^{+\infty} D^k$$

Et on a

$$(D-I)^{-1} = -D + L$$

16.

D'après 11, posons $T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$

$$\begin{aligned} Tp &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k p^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k p^{(k)} \end{aligned}$$

Comme $T \neq 0$, posons $n(T) = min\{k \in \mathbb{N}, \quad a_k \neq 0\}$. On a alors:

$$Tp = \sum_{k=n(T)}^{d} a_k p^{(k)}$$

Cela montre que le degré de Tp est celui de $p^{(n(T))}$, i.e.:

$$\deg Tp = \begin{cases} -1 & \text{si } p^{(n(T))} = 0 \\ d - n(T) & \text{si } p^{(n(T))} \neq 0 \Leftrightarrow d \geqslant n(T) \end{cases}$$

Autrement dit

$$\deg Tp = \max\{-1, \deg p - n(T)\}$$

17.

On a donc:

$$\begin{aligned} Tp = 0 &\Leftrightarrow \deg Tp = -1 \\ &\Leftrightarrow \deg p < n(T) \\ &\Leftrightarrow p \in \mathbb{K}_{\max\{n(T)-1,0\}}[X] \end{aligned}$$

18.

(1) $\Rightarrow$ (2) est immédiat.

Supposons $T1 \neq 0$. $T1 = Tq_o$, ce qui montre que $n(T) = \min\{k \in \mathbb{N}, \quad Tq_k(0) \neq 0\} = 0$. Ainsi $\det Tp = \max\{-1, \deg p\} = \deg p$ et on a (2) $\Rightarrow$ (3).

Si $\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad \deg Tp = \deg p$, alors $(T(q_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de degrés echelonnés de $\mathbb{K}[X]$, donc une base et T inversible.(3) $\Rightarrow$ (1).

19.

$$\begin{aligned} E_a \circ T = T \circ E_a &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T = T^{-1} \circ T \circ E_a \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T = E_a \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T \circ T^{-1} = E_a \circ T^{-1} \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a = E_a \circ T^{-1} \end{aligned}$$

20.

T est shift invariant donc $\exists(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad T = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k D^k$. Ainsi $TX = \alpha_0 X + \alpha_1$ et comme c'est une constante non nulle, on a bien $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

21.

$$\begin{aligned} T = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k &= D \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^{k-1} \\ &= D \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+1} D^k}_{=U} \end{aligned}$$

or U est shift invariant d'après 11, et inversible d'après 18 car $T1 = \alpha_1 \neq 0$. Ce qui démontre l'existence.

Si $\tilde{U} = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{\alpha}_k D^k$ vérifie $T = D \circ \tilde{U}$, alors nécessairement $\tilde{\alpha}_k = \alpha_{k+1}$ vu l'unicité de l'écriture de la question 11. L'unicité est prouvée.

Dans le cas $T = D$, $U = I$ et dans le cas $T = L$, $U = (D - I)^{-1}$.

22.

d'après 16 et 20, $n(T) = 1$ et $\deg Tp = \deg p - 1$ si $p \neq 0$.

$$\begin{aligned} p \in \ker T &\Leftrightarrow \deg Tp = -1 \\ &\Leftrightarrow p \in \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K} \end{aligned}$$

Si $p \neq 0$, l'égalité $Tp = \lambda p$ n'est possible pour des raisons de degré que si $\lambda = 0$. donc $\mathrm{sp}(T) = \{0\}$.

23.

T_n est une application linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X]$, donc il s'agit bien d'un endomorphisme.

T n'est pas nul si $n \geqslant 1$ car $TX \neq 0$, donc n'est pas diagonalisable car le seul endomorphisme diagonalisable dont la seule valeur propre est 0 est l'endomorphisme nul.

Par ailleurs la restriction de T à $\mathbb{K}_0[X]$ et nulle, donc diagonalisable.

24.

Si $n \geqslant 1$, on sait déjà que $\mathrm{Im}(T_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Puis comme $\dim(\ker T_n) = \dim \mathbb{K}_0[X] = 1$, le théorème du rang nous dit que $\dim(\mathrm{Im}(T_n)) = \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(\ker T_n) = n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$ et donc on a l'égalité $\mathrm{Im}(T_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(T_n) \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{K}_{n-1}[X] \\
&= \mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

et T est surjective.

25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'existence et l'unicité de $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

Q étant surjective, d'après 24, il existe $q_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Qq_n = q_{n-1}$. De plus d'après 22, $\deg q_n = \deg q_{n-1} + 1 = n - 1 + 1 = n$. On peut choisir le coeffcient constant de q_n nul, quitte à remplacer q_n par $q_n - q_n(0)$, car $\ker Q = \mathbb{K}$.

Soit maintenant $\tilde{q}_n$ un autre polynôme de degré n, de coefficient constant nul, vérifiant $Q\tilde{q}_n = q_{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
Q(q_n - \tilde{q}_n) = 0 &\Leftrightarrow q_n - \tilde{q}_n \in \ker Q \\
&\Leftrightarrow q_n - \tilde{q}_n \in \mathbb{K}_0[X] \\
&\Leftrightarrow q_n = \tilde{q}_n \qquad (\text{car } q_n(0) = \tilde{q}_n(0) = 0)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre l'unicité.

On a bien démontré par récurrence l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant:

i $q_0 = 1$
ii $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n(0) = 0$
iii $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg q_n = n$
iv $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Qq_n = q_{n-1}$