

CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $X \neq 0$, soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k > 0$.

$$\begin{aligned}(AX)_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ &\geq a_{ik}x_k > 0\end{aligned}$$

On a montré $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(AX)_i > 0$, c'est à dire $AX > 0$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}(|AB|)_{ij} &= \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &= (|A| |B|)_{ij}\end{aligned}$$

ainsi $|AB| \leq |A| |B|$.

2.

Soit $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est:

$$\begin{aligned}|\langle X | Y \rangle| &\leq \|X\| \|Y\| \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On peut l'appliquer directement à $(Z, W) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, définis par:

$$Z = \begin{bmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_k| \\ \vdots \\ |z_n| \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} |w_1| \\ \vdots \\ |w_k| \\ \vdots \\ |w_n| \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left| \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| \right| = \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.

En posant $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 & |1 + z|^2 = (1 + |z|)^2 \\
 \Leftrightarrow & 1 + a^2 + 2a + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \\
 \Leftrightarrow & a = \sqrt{a^2 + b^2} \\
 \Leftrightarrow & a \geq 0 \cap a^2 = a^2 + b^2 \\
 \Leftrightarrow & a \geq 0 \cap b = 0 \\
 \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

Soit maintenant $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 & |z + z'| = |z| + |z'| \\
 \Leftrightarrow & |z| \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = |z| \left(1 + \left| \frac{z'}{z} \right| \right) \\
 \Leftrightarrow & \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = 1 + \left| \frac{z'}{z} \right| \\
 \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{z'}{z} = \alpha
 \end{aligned}$$

4.

Comme les z_i sont non tous nuls, quitte à renuméroter on peut supposer $z_1 \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
 & |z_1| + \left| \sum_{k=2}^n z_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \\
 \Leftrightarrow & \left| \sum_{k=2}^n z_k \right| \geq \sum_{k=2}^n |z_k|
 \end{aligned}$$

5.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr } AX + \det A$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \text{Tr}^2 A - 4 \det A \\
 &= (a + d)^2 A - 4(ad - bc) \\
 &= (a + d)^2 A - 4(ad - bc) \\
 &= (a - d)^2 + 4bc > 0
 \end{aligned}$$

6.

Comme $\Delta > 0$, χ_A a deux racines réelles distinctes que l'on note $\lambda < \mu$. χ_A est scindé sur \mathbb{R} à racines simples donc A est diagonalisable et, quitte à permuter les colonnes de P ,

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = P \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1}$$

7.

On a

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= \text{Tr } A \\ &= a + d\end{aligned}$$

Si $\lambda \geq 0$, $|\lambda| = \lambda < \mu$. Sinon,

$$\begin{aligned}-|\lambda| + \mu &= a + d > 0 \\ \Rightarrow \quad |\lambda| &< \mu\end{aligned}$$