

CONCOURS MINES-PONTS 2023

MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

On a :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 0 \leq \left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

qui est le terme d'une série convergente; cela montre que le rayon de convergence de cette série entière vérifie $R \geq 1$, et que σ est définie au moins sur $] -1, 1[$. De plus, $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ convergent, et pour $|x| > 1$, on a $\frac{x^k}{k^2} \rightarrow 0$. donc au final σ est définie sur $[-1, 1]$.

La série entière converge normalement sur $[-1, 1]$, donc la somme σ y est continue.

2.

On fait deux intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt &= \left[\frac{1}{n} \sin(nt) (\alpha t^2 + \beta t) \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi (2\alpha t + \beta) \sin(nt) dt \\ &= \left[\frac{1}{n} \sin(nt) (\alpha t^2 + \beta t) \right]_0^\pi + \frac{1}{n^2} [(2\alpha t + \beta) \cos(nt)]_0^\pi - \frac{2\alpha}{n^2} \underbrace{\int_0^\pi \cos(nt) dt}_{=0} \\ &= \frac{1}{n} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} (\alpha \pi^2 + \beta \pi) + \frac{1}{n^2} [(2\alpha \pi + \beta) \cos(n\pi) - \beta \cos(0)] \\ &= \frac{1}{n^2} [(2\alpha \pi + \beta)(-1)^n - \beta] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt &= \frac{1}{n^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha \pi + \beta = 0 \\ -\beta = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\pi} \\ \beta = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt) &= \sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2(k-1)+1)t}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2(1-1)+1)t}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt &= \frac{1}{x} [-\cos(xt)\varphi(t)]_0^\pi + \frac{1}{x} \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt \\ &= \frac{1}{x} (-\cos(x\pi)\varphi(\pi) + \varphi(0)) + \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt \end{aligned}$$

La fonction continue φ' est bornée sur le segment $[0, \pi]$, donc on peut écrire:

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{|x|} (|\varphi(\pi)| + |\varphi(0)| + \pi \sup_{[0, \pi]} |\varphi'|)$$

ce qui montre bien que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

Soit g la fonction continue sur $[0, \pi]$, définie par:

$$\begin{aligned} g_n : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \\ \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) g_n(t) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \left[\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right] dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \tag{1}$$

On pose:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} \frac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t > 0 \\ -2 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

φ admet un DL en 0 à l'ordre 1:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1}{2\pi}t^2 - t}{\frac{t}{2} + O(t^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{\pi}t - 2}{1 + O(t^2)} \\ &= \left(\frac{1}{\pi}t - 2\right)(1 + O(t^2)) \\ &= \frac{1}{\pi}t - 2 + O(t^2) \end{aligned}$$

Ce qui montre que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = \frac{1}{\pi}$. De plus d'après les théorèmes généraux φ est de classe C^1 sur $]0, \pi]$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, \pi], \quad \varphi'(t) &= \frac{(\frac{1}{\pi}t - 1)\sin(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2\pi}t^2 - t)\cos(\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{t^2}{4\pi} + o(t^2)}{\frac{t^2}{4} + o(t^2)} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\pi} + o(1) \end{aligned}$$

montre que φ est de classe C^1 .

On peut donc faire tendre $n \rightarrow +\infty$ dans l'équation 1 pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4.

La fonction $t \mapsto (\sin t)^x = e^{x \ln(\sin t)}$ est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} (\sin t)^x &= e^{x \ln(\sin t)} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} e^{x \ln(t + o(t^2))} \\ &= e^{x \ln t + \ln(1 + o(t))} \\ &= e^{x \ln t + o(t)} \\ (\sin t)^x &= t^x (1 + o(t)) \end{aligned}$$

On a donc:

$$0 \leq (\sin t)^x \underset[t > 0]{t \rightarrow 0} \sim t^x$$

et donc

$$\begin{aligned} (\sin t)^x \text{ sommable en } 0 &\Leftrightarrow -x < 1 \\ &\Leftrightarrow x > -1 \end{aligned}$$

La fonction f est définie sur $] -1, +\infty[= I$.

Soit $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+2} dt &= \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x (\sin t)^2 dt \\ &= \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x (1 - \cos^2 t) dt \\ &= \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt - \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \cos^2 t dt \end{aligned} \quad (2)$$

Une intégration par parties donne:

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \cos^2 t dt &= \frac{1}{x+1} [(\sin t)^{x+1} \cos t]_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{x+1} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+1} \sin t dt \\ &= -\frac{1}{x+1} \underbrace{(\sin \epsilon)^{x+1} \cos \epsilon}_{\xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0}} + \frac{1}{x+1} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+2} dt \end{aligned}$$

On reprend alors l'équation 2 et on fait tendre $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(x+2) &= f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2) \\ \Leftrightarrow (x+2)f(x+2) &= (x+1)f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

5.

On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral: On pose $I_{\alpha} = [\alpha, +\infty[$, pour $\alpha \in] -1, 0]$. puis:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha} :]0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ln(\sin t) \frac{1}{t^{-\alpha}} \end{aligned}$$

La fonction φ_{α} est C^0 par morceaux, intégrable (intégrale de Bertrand $-\alpha < 1$).

On pose:

$$\begin{aligned} g : I_{\alpha} \times]0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, t) &\mapsto (\sin t)^x \end{aligned}$$

- i $\forall x \in I_{\alpha}$, $g(x, \cdot) : t \mapsto (\sin t)^x$ est C^0 par morceaux et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
- ii $\forall x \in I_{\alpha}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \ln(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
- iii $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) : x \mapsto \ln(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 sur I_{α} ,
- iv $\forall x \in I_{\alpha}$, $|g(x, t)| \leq \varphi_{\alpha}(t)$

On peut conclure que f est de classe C^1 sur I_α , $\forall \alpha \in]-1, 0]$, et donc sur I et

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)(\sin t)^x dt \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha :]0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \ln^2(\sin t) \frac{1}{t-\alpha} \end{aligned}$$

La fonction ψ_α est C^0 par morceaux, intégrable (intégrale de Bertrand $-\alpha < 1$).

- i $\forall x \in I_\alpha$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \ln(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 par morceaux et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
- ii $\forall x \in I_\alpha$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \cdot) : t \mapsto \ln^2(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,
- iii $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\cdot, t) : x \mapsto \ln^2(\sin t)(\sin t)^x$ est C^0 sur I_α ,
- iv $\forall x \in I_\alpha$, $|g(x, t)| \leq \psi_\alpha(t)$

On peut conclure que f est de classe C^2 sur I_α , $\forall \alpha \in]-1, 0]$, et donc sur I et

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f''(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin t)(\sin t)^x dt \end{aligned}$$

De plus, $f' \leq 0$ et $f'' \geq 0$ montrent respectivement que f est décroissante et convexe sur I .

6.

L'équation 3 montre par continuité de f que

$$f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{f(1)}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

7.

On a $f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$, puis

$$f(n+1)f(n+2) = \frac{n+1}{n+2} f(n)f(n+1)$$

permet de conclure par récurrence.

Par décroissance de f :

$$f(\lfloor x \rfloor - 1)f(\lfloor x \rfloor) = \frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor} \leq f(x)^2 \leq f(\lfloor x \rfloor + 1)f(\lfloor x \rfloor + 2) = \frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 2)}$$

montre que

$$\begin{aligned} f^2(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \end{aligned}$$

ou encore

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

8.

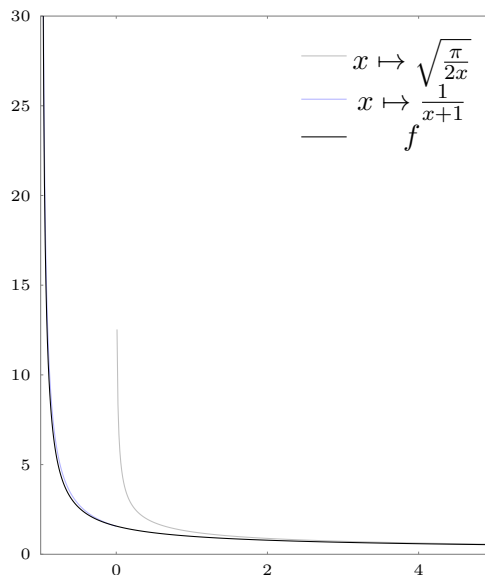


FIGURE 1. Représentation de f

9.

$t \mapsto \ln(\sin t)$ est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\begin{aligned} \ln(\sin t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(t + O(t^3)) \\ &= \ln t + \ln(1 + O(t^2)) \\ &= \ln t + O(t^2) \end{aligned}$$

montre que

$$0 \leq -(\ln(\sin t))^n \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -(\ln t)^n$$

qui est intégrable en 0 (intégrales de Bertrand $\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ avec $\alpha = 0 < 1$). Ainsi l'intégrale généralisée D_n est convergente.

Le changement de variable $\varphi(t) = -t + \frac{\pi}{2}$ montre que

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \, dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos t) \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) \, dt \end{aligned}$$

10.

D'après la question 5,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) + \ln(\sin t) \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t \sin t) \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2t\right) \, dt \\
&= -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t) \, dt \\
&= -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) \, du \quad (\text{changement de variable } \varphi(t) = 2t) \\
&= -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) \, du + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) \, du \\
&= -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} f'(0) + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u) \, du \quad (\text{changement de variable } \varphi(u) = u - \frac{\pi}{2}) \\
&= -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} f'(0) \\
\Rightarrow f'(0) &= -\frac{\pi}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

Soit $a > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_a^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \sin t \, dt &= [-\ln(\sin t) \cos t]_a^{\frac{\pi}{2}} + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} \, dt \\
&= \ln(\sin a) \cos a - \int_{\cos a}^0 \frac{u^2}{1-u^2} \, du \\
&= \ln(\sin a) \cos a - \int_{\cos a}^0 \frac{u^2 - 1 + 1}{1-u^2} \, du \\
&= \ln(\sin a) \cos a - \cos a - \int_{\cos a}^0 \frac{1}{1-u^2} \, du \\
&= \ln(\sin a) \cos a - \cos a - \frac{1}{2} \int_{\cos a}^0 \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \, du \\
&= \ln(\sin a) \cos a - \cos a - \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \right]_{\cos a}^0 \\
&= \ln(\sin a) \cos a - \cos a + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\cos a}{1-\cos a}\right) \\
&= -\cos a + \frac{1}{2} \ln(1+\cos a) + \ln(\sin a) \cos a - \frac{1}{2} \ln(1-\cos a) \\
&= -\cos a + \frac{1}{2} \ln(1+\cos a) + \ln(a + o(a)) \cos a - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a^2}{2} + o(a^2)\right) \\
&= -\cos a + \frac{1}{2} \ln(1+\cos a) + \ln a - \ln a + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1+o(1))
\end{aligned}$$

$$= \ln 2 - 1 + o(1)$$

montre que

$$f'(1) = \ln 2 - 1$$

11.

On fait le changement de variable $u = \varphi(t) = -\ln(\sin t)$, $\varphi'(t) = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\sqrt{1-e^{-2u}}}{e^{-u}} = -\sqrt{e^{2u}-1}$, pour obtenir:

$$D_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du$$

En suite on rappelle que

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n!$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^A u^{n+1} e^{-u} du = [-u^{n+1} e^{-u}]_0^A + (n+1) \int_0^A u^n e^{-u} du$$

Le passage à la limite quand $A \rightarrow +\infty$ donne:

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-u} du = (n+1) \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$$

puis une récurrence immédiate

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n!$$

Or, pour $u \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} - \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}}} = \frac{u^n(\sqrt{e^{2u}} - \sqrt{e^{2u}-1})}{\sqrt{e^{2u}-1}\sqrt{e^{2u}}} \\ &= \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}\sqrt{e^{2u}}(\sqrt{e^{2u}} + \sqrt{e^{2u}-1})} \\ &\leq \frac{u^n}{\sqrt{2u}\sqrt{e^{2u}}\sqrt{e^{2u}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-2u} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} u^n e^{-2u} \end{aligned}$$

On intègre cette relation:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (-1)^n D_n - \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-2u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} 2^n} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du \quad (\text{changement de variable } \varphi(u) = 2u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} 2^n} n! \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\begin{aligned} (-1)^n D_n &= \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du = n! + O\left(\frac{1}{2^n} n!\right) \\ &=_{n \rightarrow +\infty} n! + o(n!) \end{aligned}$$

12.

Soit $x \in]-1, 1[$, fixé.

$$\begin{aligned} (\sin t)^x &= e^{x \ln(\sin t)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (\ln(\sin t))^n}{n!} \end{aligned}$$

On pose

$$f_n(t) = \frac{x^n (\ln(\sin t))^n}{n!}$$

On observe que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| dt &= (-1)^n \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin t))^n dt \\ &= (-1)^n \frac{|x|^n}{n!} D_n \end{aligned}$$

est le terme d'une série convergente car $(-1)^n D_n \sim n!$ et $|x| < 1$.

- i $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est C^0 par morceaux sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, intégrable.
- ii La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ CV simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction C^0 par morceaux $t \mapsto (\sin t)^x$.
- iii La série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)| dt$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme nous permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin t)^n dt \end{aligned}$$

13.

Comme $a > 0$ et $b > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x > 0$, ce qui montre que ψ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{-2a^2 \sin x \cos x + 2b^2 \cos x \sin x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{(-a^2 + b^2) 2 \cos x \sin x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $|\rho e^{2ix}| = |\rho| < 1$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ixk} &= \rho e^{2ix} \frac{1}{1 - \rho e^{2ix}} \\ &= \rho e^{2ix} \frac{1 - \rho e^{-2ix}}{(1 - \rho \cos(2x))^2 + \rho^2 \sin^2(2x)} \\ &= \rho \frac{e^{2ix} - 1}{(1 - \rho \cos(2x))^2 + \rho^2 \sin^2(2x)} \\ &= \rho \frac{\cos(2x) - 1 + i \sin(2x)}{((1 - \rho \cos(2x))^2 + \rho^2 \sin^2(2x))} \end{aligned}$$

Puis:

$$\begin{aligned} (1 - \rho \cos(2x))^2 + \rho^2 \sin^2(2x) &= \rho^2 + 1 - 2\rho \cos(2x) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= (\rho^2 + 1)(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\rho(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= (\rho^2 + 1 - 2\rho) \cos^2 x + (\rho^2 + 1 + 2\rho) \sin^2 x \\ &= (\rho - 1)^2 \cos^2 x + (\rho + 1)^2 \sin^2 x \\ &= \frac{4}{(a+b)^2} (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ixk} \right) &= \frac{b-a}{b+a} (a+b)^2 \frac{\sin(2x)}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin(2x)(b^2 - a^2)}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \\ &= \psi'(x) \end{aligned}$$

On peut bien conclure que

$$\psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

14.

La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \rho^k \sin(2kx)$ converge normalement car

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\rho^k \sin(2kx)| = \rho^k$$

qui est le terme général d'une série convergente. On a en particulier convergence uniforme sur tout segment, donc on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \psi(x) - \underbrace{\psi(0)}_{=2\ln a} &= 4 \int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kt) \, dt = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \int_0^x \sin(2kt) \, dt \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \left(-\frac{\cos(2kx)}{2k} + \frac{1}{2k} \right) dt \\
 &= -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{1}{k} \\
 &= -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} - 2 \ln(1 - \rho) \\
 &= -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \frac{\cos(2kx)}{k} - 2 \ln 2 - 2 \ln a + 2 \ln(a + b)
 \end{aligned}$$

15.

On applique l'égalité de Parseval à la fonction π périodique ψ , puisque on vient d'obtenir son développement en séries trigonométriques:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi^2(t) \, dt &= 4 \left(\ln \frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} 4 \frac{\rho^{2k}}{k^2} \\
 &= 4 \left(\ln \frac{a+b}{2} \right)^2 + 2\sigma(\rho^2)
 \end{aligned}$$

Posons

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k \cos(2kt)$$

avec

$$a_k = \begin{cases} 2 \ln \frac{a+b}{2} & \text{si } k = 0 \\ -2 \frac{1}{k} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

On remarque déjà que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_k| \leq \underbrace{2 \max \left\{ \left| \ln \frac{a+b}{2} \right|, 1 \right\}}_{=M}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, fixé. La somme $\sum_{k \geq 0} a_k \cos(2kt)$ CV absolument, donc aussi son produit de cauchy avec elle-même et on a

$$\psi^2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \rho^n a_k a_{n-k} \cos(2kx) \cos(2(n-k)x)$$

La convergence de cette dernière série est normale, car

$$\left| \sum_{k=0}^n \rho^n a_k a_{n-k} \cos(2kx) \cos(2(n-k)x) \right| \leq \sum_{k=0}^n \rho^n |a_k| |a_{n-k}| \leq M^2(n+1)\rho^n$$

qui est le terme d'une série convergente.

On a donc convergence uniforme sur tout segment $[0, \pi]$ et on peut écrire

$$\int_0^\pi \psi^2(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \rho^n a_k a_{n-k} \int_0^\pi \cos(2kt) \cos(2(n-k)t) dt \quad (4)$$

Or la formule de linéarisation

$$\cos(2kt) \cos(2(n-k)t) = \frac{1}{2}(\cos(2nt) + \cos(2(n-2k)t))$$

montre que

$$\int_0^\pi \cos(2kt) \cos(2(n-k)t) dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = k = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n > 0 \wedge n - k = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, intégrer \cos sur un multiple entier non nul de périodes donne 0.

Simplifions l'égalité 4:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \psi^2(t) dt &= a_0^2 \pi + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{2n} a_n^2 \\ &= 4\pi \left(\ln \frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rho^{2n} \\ \int_0^\pi \psi^2(t) dt &= 4\pi \left(\ln \frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\pi \sigma(\rho^2) \end{aligned}$$

16.

La série de fonctions ψ_n converge simplement vers la fonction $t \mapsto 2 \ln(\sin t)$.

De plus on sait que

$$\psi'_n(t) = \frac{(b_n^2 - a_n^2) \sin 2t}{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}$$

Cela montre que ψ_n est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. On a $\psi_n(\frac{\pi}{2}) = 2 \ln b_n = 2 \ln \frac{n}{n+1} < 0$.

Par ailleurs, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \ln(a_n^2 + (b_n^2 - a_n^2) \sin^2 t) \\ &\geq \ln((b_n^2 - a_n^2) \sin^2 t) \\ &= \ln\left(\frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} \sin^2 t\right) \\ &\geq \ln\left(\frac{1}{2} \sin^2 t\right) \quad (\text{pour } n \geq 2) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, \pi], \quad -\ln 2 + 2 \ln(\sin t) &\leq \psi_n(t) \leq \ln \frac{n}{n+1} < 0 \\ \Rightarrow \forall t \in]0, \pi], \quad |\psi_n(t)| &\leq \ln 2 - 2 \ln(\sin t) \end{aligned}$$

On a maintenant tous les éléments pour appliquer le théorème de convergence dominée:

- i $\forall n \geq 2, \quad \forall t \in]0, \pi], \quad |\psi_n^2(t)| \leq (\ln 2 - 2 \ln(\sin t))^2$, intégrable sur $]0, \pi]$ d'après la question 9.
- ii la suite de fonction (ψ_n^2) converge simplement sur $]0, \pi]$ vers la fonction $t \mapsto 4(\ln(\sin t))^2$.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\int_0^\pi \psi_n^2(t) dt$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi_n^2(t) dt = 4 \int_0^\pi (\ln(\sin t))^2 dt \quad (5)$$

Mais d'après la question 15, on a

$$\int_0^\pi \psi_n^2(t) dt = 4\pi \left(\ln \frac{a_n + b_n}{2} \right)^2 + 2\pi \sigma(\rho_n^2) \quad (6)$$

On a la convergence normale de la série de fonction $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k^2}$ sur $[-1, 1]$ car $\sup_{[-1, 1]} \frac{|x^k|}{k^2} = \frac{1}{k^2}$ qui est le terme d'une série qui converge. Donc la somme σ est en particulier continue en 1 et si on fait tendre $n \rightarrow +\infty$ dans 6, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi_n^2(t) dt &= 4\pi (\ln 2)^2 + 2\pi \sigma(1) \\ &= 4\pi (\ln 2)^2 + \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

Mais comme le montre la question 5 ainsi que le changement de variable $\varphi(t) = t - \frac{\pi}{2}$, on a

$$4 \int_0^\pi (\ln(\sin t))^2 dt = 8f''(0)$$

L'égalité 5 permet de conclure:

$$f''(0) = \pi \frac{(\ln 2)^2}{2} + \frac{\pi^3}{24}$$

17.

Par composition $g = \ln \circ f$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} , et

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

puis

$$g''(t) = \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\begin{aligned} (f'(t))^2 &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) (\sin u)^t du \right)^2 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) \sqrt{(\sin u)^t} \sqrt{(\sin u)^t} du \right)^2 \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin u))^2 (\sin u)^t du \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^t du \\ &= f''(t) f(t) \end{aligned}$$

Donc $g'' \geq 0$ et f est ln-convexe.

18.

soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 5,

$$f(2(x+p+1)) = \frac{2x+2p+1}{2x+2p+2} f(2(x+p))$$

Puis par une récurrence immédiate,

$$f(2(x+p)) = \frac{(2x+2p-1)(2x+2p-3)\dots(2x+1)}{(2x+2p)(2x+2p-2)\dots(2x+2)} f(2x)$$

On prend le logarithme de cette égalité pour obtenir, avec la convention qu'une somme sans terme vaut 0:

$$\tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

19.

Une conséquence directe de la convexité de \tilde{f} est que $\forall y \in \mathbb{R}^+$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} [-y, +\infty[\setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\tilde{f}(y+x) - \tilde{f}(y)}{x} \end{aligned}$$

est croissante.

soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $x \in \mathbb{R}^+$, $x \leq p$. On a donc directement:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}(-1+n) - \tilde{f}(n)}{-1} &\leq \frac{\tilde{f}(x+n) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(p+n) - \tilde{f}(n)}{p} \\ \Leftrightarrow -\tilde{f}(-1+n) + \tilde{f}(n) &\leq \frac{\tilde{f}(x+n) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(p+n) - \tilde{f}(n)}{p} \end{aligned} \tag{7}$$

soit $m \in \llbracket -n, +\infty \rrbracket$, un entier fixé.

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(m+n) - \tilde{f}(n) &= \ln\left(\frac{f(2m+2n)}{f(2n)}\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4(m+n)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{4n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right) \\
 &= \ln\left(\sqrt{\frac{n}{m+n}}(1 + o(1))\right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{m+n}\right) + \ln(1 + o(1)) \\
 &= o(1)
 \end{aligned}$$

A noter pour la suite que la relation obtenue en 18 permet aussi facilement d'obtenir la même conclusion.

On applique à $m = -1$ et $m = p$ et on passe à la limite dans l'encadrement 7, pour avoir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x+n) - \tilde{f}(n) = 0$$

20.

Soit h une application de I dans \mathbb{R} ln-convexe, avec $h(0) = \frac{\pi}{2}$ et

$$\forall x \in I, \quad h(x+2) = \frac{x+1}{x+2} h(x)$$

on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(2(x+1)) = \frac{2x+1}{2x+2} h(2x)$$

puis d'après le raisonnement des questions 18 et 19, $\tilde{h}(n+x) - \tilde{h}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car la relation obtenue en 18 permet aussi de montrer facilement que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}(n+p) - \tilde{h}(n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{h}(n-1) - \tilde{h}(n) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \frac{h(2n+2x)}{h(2n)} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\
 \Leftrightarrow h(2n+2x) &\sim h(2n)
 \end{aligned}$$

On obtient le même résultat pour f . Mais alors

$$\begin{aligned}
 h(2n) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} h(0) \\
 &\sim \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} h(0) \\
 &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} f(0) \\
 &\sim f(2n+2x)
 \end{aligned}$$

On a montré

$$\begin{aligned} h(2n+2x) &\sim f(2n+x) \\ \Leftrightarrow \frac{(2x+2n-1)(2x+2n-3)\dots(2x+1)}{(2x+2n)(2x+2n-2)\dots(2x+2)} h(2x) &\sim \frac{(2x+2n-1)(2x+2n-3)\dots(2x+1)}{(2x+2n)(2x+2n-2)\dots(2x+2)} f(2x) \\ \Leftrightarrow h(2x) &= f(2x) \end{aligned}$$

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = f(x)$. Maintenant si $x \in]-1, 0]$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x+2}{x+1} h(\underbrace{x+2}_{\geq 0}) \\ &= \frac{x+2}{x+1} f(x+2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc $h = f$ et on a l'unicité.

Plus généralement, on a montré que les fonctions ln-convexe vérifiant l'équation fonctionnelle de f sont les fonctions

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ t &\mapsto \lambda f, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

21.

Les calculs seront exactement les mêmes que dans les questions 18, 19, 20, "en remplaçant 1 par T ", cela ne pose pas de difficultés supplémentaires de montrer que les fonctions de $] -T, +\infty[$ dans \mathbb{R}^{+*} , ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in] -T, +\infty[, \quad (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

sont les fonctions de la forme:

$$\begin{aligned}] -T, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ t &\mapsto \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{\frac{t}{T}} du, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

Il s'agit juste ici de faire une dilatation de l'axe des t d'un facteur T .

22.

L'égalité avec h ln-convexe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$$

est impossible pour des raisons de signe car $h > 0$ et pour $t \in] -2T, -T[$ on a $t+2T > 0$ et $t+T < 0$.