

CONCOURS MINES-PONTS 2023  
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Supposons  $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ . On rappelle que les valeurs propres d'une matrice  $S \in S_n^+(\mathbb{R})$  sont réelles; soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $S$ , et  $X (\neq 0)$  un vecteur propre associé

$$\begin{aligned}\langle SX, X \rangle &= (SX)^T X \\ &= \lambda X^T X \\ &= \lambda \|X\|^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda = \frac{\langle SX, X \rangle}{\|X\|^2} \geq 0$$

Cela montre que  $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$ .

Réciproquement, supposons  $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$ . On peut diagonaliser en base orthonormale

$$\begin{aligned}S &= Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} Q^T \\ &= Q D Q^T\end{aligned}$$

avec  $Q$  orthogonale et  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ .

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle SX, X \rangle &= X^T S X \\ &= X^T Q D Q^T X \\ &= (Q^T X)^T D Q^T X \\ &= Q^T X^T D Q^T X \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \geq 0\end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

On a bien  $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

**2.**

Soit  $(S_1, S_2) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$ . Soit  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle ((1-t)S_1 + tS_2)X, X \rangle &= X^T S X \\ &= (1-t) \underbrace{\langle S_1 X, X \rangle}_{\geq 0} + t \underbrace{\langle S_2 X, X \rangle}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est positive par convexité de l'ensemble  $\mathbb{R}^+$ . Donc  $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$  et  $S_n^+(\mathbb{R})$  est convexe.

Similairement, soit  $(S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$ . Soit  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle ((1-t)S_1 + tS_2)X, X \rangle &= X^T S X \\ &= (1-t) \underbrace{\langle S_1 X, X \rangle}_{> 0} + t \underbrace{\langle S_2 X, X \rangle}_{> 0} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement positive par convexité de l'ensemble  $\mathbb{R}^{+*}$ . Donc  $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  est convexe.

Ces ensembles ne sont pas des espaces vectoriels puisqu'ils contiennent  $I_n$  mais pas  $-I_n$ .

**3.**

Soit  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned} A &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= S^2 \end{aligned}$$

avec  $U$  orthogonale et  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ . La matrice

$$\begin{aligned} S &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^{-1} \end{aligned}$$

est une matrice symétrique réelle vérifiant  $Sp(S) = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$  et donc  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**4.**

La propriété est triviale pour  $p = 1$  et correspond à la définition de la convexité d'une fonction pour  $p = 2$ . Soit maintenant  $p > 2$ . si  $\lambda_p = 1$  on est ramené au cas trivial  $p = 1$  donc on peut

supposer  $\lambda_p < 1$ . On peut ainsi écrire:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j = (1 - \lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \underbrace{\frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p}}_{\lambda'_j} x_j + \lambda_p x_p$$

En appliquant une première fois la propriété avec  $p = 2$  on obtient:

$$f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\right) \leq (1 - \lambda_p) f\left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p} x_j\right) + \lambda_p f(x_p)$$

En appliquant une deuxième fois la propriété (hypothèse de récurrence) puisqu'on remarque que  $\sum_{j=1}^{p-1} \lambda'_j = 1$ ,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\right) &\leq (1 - \lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p} f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^p \lambda_j f(x_j) \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang  $p$  et on peut conclure.

**5.**

La fonction  $f : x \mapsto -\ln x$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$$

ce qui montre que la fonction est convexe sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$  les valeurs propres de  $M$  répétées avec leur ordre de multiplicité. On a

$$\begin{aligned} \text{Tr } M &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \det M &= \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

Si  $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ , la propriété est triviale. On peut maintenant supposer que  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ . On applique alors le résultat de la question précédente à la fonction  $f$

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} f(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow -\ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq -\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow -\ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \ln\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j^{\frac{1}{n}}\right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j &\geq \left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right)^{\frac{1}{n}} \\
 \Leftrightarrow \frac{\text{Tr } M}{n} &\geq (\det M)^{\frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

**6.**

Soit  $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ . La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 M &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\
 &= U D U^T
 \end{aligned}$$

avec  $U$  orthogonale et  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } M^T M &= \text{Tr } U D \underbrace{U^T U}_{=I_n} D U^T \\
 &= \text{Tr } U D^2 U^T \\
 &= \text{Tr } D^2 U^T U \\
 &= \text{Tr } D^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

7.

On peut noter que le résultat précédent est valable pour les matrices de  $S_n(\mathbb{R})$ . Ensuite, en notant  $\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$ , on a

$$\begin{aligned}\|M\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \\ &\geq \sqrt{\rho(M)^2} \\ &= \rho(M)\end{aligned}$$

De plus, la diagonalisation de la matrice  $M - \det^{\frac{1}{n}}(M)I_n$  s'obtient facilement à l'aide de celle de  $M$ :

$$\begin{aligned}M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \det^{\frac{1}{n}}(M) \end{bmatrix} U^T \\ &= U(D - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n)U^T\end{aligned}$$

ce qui permet en particulier de déterminer son spectre. On peut maintenant appliquer directement la formule de l'énoncé aux valeurs propres de  $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ :

$$2\rho(M)\left(\frac{\text{Tr } M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}}\right) \geq \frac{1}{n} \left\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\right\|^2$$

Comme  $\rho(M) > 0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\text{Tr } M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}} &\geq \frac{\left\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\right\|^2}{2n\rho(M)} \\ &\geq \frac{\left\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\right\|^2}{2n\|M\|}\end{aligned}$$

8.

On commence par suivre l'indication de l'énoncé en utilisant le résultat de la question 3:

$$\begin{aligned}A &= S^2 \\ &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= UD_1 D_1 U^T \\ &= (UD_1)(UD_1)^T\end{aligned}$$

On est alors tenté de choisir  $Q' = UD_1$  pour répondre à la question posée; toutefois il n'y a peu de chance que ce choix fournisse la forme souhaitée pour la matrice  $B$  car on ne l'a pas fait encore

intervenir dans le raisonnement. Essayons:

$$\begin{aligned} Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1} &= (UD_1)^{-1}B((UD_1)^T)^{-1} \\ &= D_1^{-1}U^{-1}B((U^T)^{-1}((D_1^T)^{-1}) \\ &= D_1^{-1}U^T B U D_1^{-1} \\ &= B' \end{aligned}$$

Cette matrice  $B'$  n'est a priori pas diagonale, par contre elle est symétrique et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale  $D$ :

$$\exists V \in O_n(\mathbb{R}), \quad B' = V D V^T$$

On peut alors voir que

$$\begin{aligned} \forall W \in O_n(\mathbb{R}), \quad A &= U D_1 \underbrace{W W^T}_{=I_n} D_1 U^T \\ &= (U D_1 W)(U D_1 W)^T \end{aligned}$$

Le choix qui s'impose est donc  $W = V$ , soit  $Q = Q'V = U D_1 V \in GL_n(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} Q^{-1}B(Q^T)^{-1} &= V^T Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1}V \\ &= V^T B' V \\ &= D \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T B X > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T Q D Q^T X > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad (Q^T X)^T D (Q^T X) > 0 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Comme  $Q^T \in GL_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} Q^T M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} &= \{QX, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\} \\ &= M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T D X > 0 \\ &\Leftrightarrow D \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow Sp(D) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

10.

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$  les valeurs propres de  $D$  répétées avec leur ordre de multiplicité. La décomposition précédente permet d'écrire

$$\begin{aligned} A + B &= QQ^T + QDQ^T \\ &= Q(I_n + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix})Q^T \\ &= Q \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n \end{bmatrix} Q^T \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \det(A + B) &= QQ^T + QDQ^T \\ &= \det Q \det \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n \end{bmatrix} \det Q^T \\ &= \det Q^2 \left( \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right) \end{aligned}$$

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} = \det Q^{\frac{2}{n}} \left( 1 + \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

Donc:

$$\begin{aligned} (\det(A + B))^{\frac{1}{n}} &\geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \det Q^{\frac{2}{n}} \left( \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \det Q^{\frac{2}{n}} \left( 1 + \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\ &\Leftrightarrow \left( \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left( 1 + \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) \quad (> 0) \\ &\Leftrightarrow \ln \left( \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \ln \left( 1 + \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq \ln \left( 1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda_i) \geq \ln \left( 1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{\ln \lambda_i}) \geq \ln \left( 1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i} \right) \end{aligned}$$

Un peu d'observation convainc que la dernière inégalité est la traduction (en utilisant le résultat de 4 avec  $x_i = \ln \lambda_i$ ) de la convexité de la fonction  $g : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ , démontrée dans la question 9.

**11.**

On applique la question précédente qui nous donne l'inégalité

$$\begin{aligned} (\det((1-t)A + tB))^{\frac{1}{n}} &\geq (\det(1-t)A)^{\frac{1}{n}} + (\det tB)^{\frac{1}{n}} \\ &= (1-t)(\det A)^{\frac{1}{n}} + t(\det B)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la multilinéarité du déterminant.

Vu l'allure du résultat avec les  $t$  en exposant et le produit des déterminants, il semble naturel à ce stade d'essayer de prendre le  $\ln$  de l'inégalité:

$$\frac{1}{n} \ln \det((1-t)A + tB) \geq \ln[(1-t)(\det A)^{\frac{1}{n}} + t(\det B)^{\frac{1}{n}}] \quad \textcircled{2}$$

La fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , donc

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\geq (1-t) \ln((\det A)^{\frac{1}{n}}) + t \ln((\det B)^{\frac{1}{n}}) \\ &= \frac{1}{n} [(1-t) \ln(\det A) + t \ln(\det B)] \\ &= \frac{1}{n} [\ln((\det A)^{(1-t)}) + \ln((\det B)^t)] \\ &= \frac{1}{n} \ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^t) \end{aligned}$$

On a donc montré

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{n} \ln \det((1-t)A + tB) &\geq \frac{1}{n} \ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \ln \det((1-t)A + tB) &\geq \ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \det((1-t)A + tB) &\geq (\det A)^{(1-t)}(\det B)^t \end{aligned}$$

A noter que le sens qu'il faut donner à l'expression  $\det A^{(1-t)} \det B^t$  de l'énoncé n'est pas très clair pour  $t \notin \mathbb{Z}$ .

**12.**

La démonstration dans la question précédente a montré que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall (A, B) \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2, \quad \ln \det((1-t)A + tB) \geq (1-t) \ln(\det A) + t \ln(\det B)$$

i.e. la fonction  $\ln \circ \det$  est concave sur  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ .