

# CONCOURS MINES-PONTS 2023

## MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ <sup>1</sup>.

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow AU = U \end{aligned}$$

Soit  $A, B$  deux noyaux de Markov. Alors,

$$\begin{aligned} (AB)U &= A(BU) \\ &= AU \\ &= U \end{aligned}$$

ce qui montre que  $AB$  est un noyau de Markov.

2.

Immédiat d'après la question précédente.

3.

Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $(i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)$ . Comme  $K^n$  est un noyau de Markov,  $K_{ij}^n \in [0, 1]$  donc

$$\left| \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} \right| \leq \frac{t^n}{n!}$$

cette expression étant le terme général de la série convergente  $e^t$ , on en déduit que la série proposée converge absolument, donc converge.

---

<sup>1</sup>Dans tout ce qui suit, on utilisera, quand c'est lisible, pour les matrices des notations plus couramment utilisées que celles suggérées par l'énoncé, par exemple:

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La ligne  $i$  du produit matriciel  $HU$  vaut:

$$\sum_{j=1}^n H_t[i, j] u_j = \sum_{j=1}^n \left( e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \right) \times 1$$

Bien sur la série  $\sum_{p \geq 0} (e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!})$  converge car c'est une somme (finie) de  $n$  séries convergentes, et la limite de la série vaut

$$\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} = \sum_{j=1}^n \left( e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n H_t[i, j] u_j &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \frac{t^p}{p!} \underbrace{\sum_{j=1}^n K_{ij}^p}_{=1} \\ &= e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \\ &= e^{-t} e^t \\ &= 1 \\ &= u_i \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la matrice  $K^p$  est un noyau de Markov.

On a montré que  $H_t U = U$ . On conclut que  $H_t$  est un noyau de Markov.

5.

Soit  $(t, s) \in (\mathbb{R}^+)^2$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Le coefficient  $(i, j)$  du produit matriciel  $H_t H_s$  vaut

$$\begin{aligned} (H_t H_s)_{ij} &= \sum_{k=1}^n H_t[i, k] H_s[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^n \left( e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} e^{-s} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( e^{-(s+t)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} \right) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a vu dans la question 3 que les séries  $\sum_{p \geq 0} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!}$  et  $\sum_{l \geq 0} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!}$  sont absolument convergentes. On sait que leur produit de Cauchy  $\sum_{m \geq 0} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \frac{s^{m-p} K_{kj}^{m-p}}{(m-p)!} \right) = \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$  converge absolument et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$$

On reprend en ①:

$$\begin{aligned} (H_t H_s)_{ij} &= \sum_{k=0}^n (e^{-(s+t)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!}) \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right) \end{aligned}$$

En ayant conscience qu'ici  $n$  est un entier fixé, il n'y a pas de difficultés à intervertir les deux premiers symboles  $\Sigma$ : on ne fait qu'utiliser les théorèmes généraux sur la limite d'une somme (finie) de  $n$  séries convergentes:

$$(H_t H_s)_{ij} = e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$$

L'addition étant commutative,

$$\begin{aligned} (H_t H_s)_{ij} &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^m \left( \sum_{k=0}^n \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right) \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p}}{p!(m-p)!} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n K_{ik}^p K_{kj}^{m-p} \right)}_{K_{ij}^m} \end{aligned}$$

On reconnait le coefficient  $(i, j)$  du produit matriciel  $K^p K^{m-p} = K^m$

$$\begin{aligned} &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p}}{p!(m-p)!} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m t^p s^{m-p} \frac{m!}{p!(m-p)!} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m t^p s^{m-p} \binom{m}{p} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} (s+t)^m \\ &= e^{-(s+t)} e^{s+t} H_{s+t}[i, j] \\ (H_t H_s)_{ij} &= H_{s+t}[i, j] \end{aligned}$$

On peut conclure

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad H_t H_s = H_{t+s}$$

6.

soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . soit  $k \in \mathbb{N}^{*(?)2}$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N K_{ij} &= \sum_{j=1}^N p_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^n P(Z_{k+1} = j \mid Z_k = i) \\
 &= P(Z_{k+1} \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid Z_k = i) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

7.

On a déjà

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Z_0 = j) &= \delta_{1j} \\
 &= I_{1j} \\
 &= K_{1j}^0
 \end{aligned}$$

Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$ . Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 P(Z_{n+1} = i) &= \sum_{j=1}^N P(Z_{n+1} = i \cap Z_n = j) \\
 &= \sum_{j=1}^N P(Z_{n+1} = i \mid Z_n = j) P(Z_n = j) \\
 &= \sum_{j=1}^N p_{ji} K_{1j}^n \\
 &= \sum_{j=1}^N K_{ji} K_{1j}^n \\
 &= \sum_{j=1}^n K_{1j}^n K_{ji} \\
 &= (K^n K)_{1i} \\
 &= K_{1i}^{n+1}
 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$$

---

<sup>2</sup>Il y a une ambiguïté dans la définition des nombres  $p_{ij}$ : que se passe-t-il si pour un certain  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_k = i) = 0$ ?

8.

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ , Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 P(A_{t,j}) &= P(A_{t,j} \cap \Omega) \\
 &= P(A_{t,j} \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} Y_t = n) \\
 &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_{t,j} \cap Y_t = n)\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \cap Y_t = n) \quad (\text{les évènements } Y_t = n \text{ sont deux à deux incompatibles.}) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \mid Y_t = n) P(Y_t = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z_n = j) e^{-t} \frac{t^n}{n!} \\
 &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} K_{1j}^n \frac{t^n}{n!} \\
 &= H_t[1, j]
 \end{aligned}$$

9.

un endomorphisme autoadjoint d'un espace Euclidien est diagonalisable en base orthonormale; soit  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base orthonormale constituée de vecteurs propres de  $u$ , et  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  la valeur propre associée au vecteur  $e_i$ .

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle u(e_i) \mid e_i \rangle &= \langle \lambda_i e_i \mid e_i \rangle \\
 &= \lambda_i \underbrace{\langle e_i \mid e_i \rangle}_{=1} \\
 &= \lambda_i
 \end{aligned}$$

montre que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \geq 0$ .

10.

Quitte à renuméroter, on peut supposer  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ . On a :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x_1 e_1 \\
 x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
 u(x - p(x)) &= u\left(\sum_{i=2}^n x_i e_i\right) \\
 &= \sum_{i=2}^n u(x_i e_i) \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i u(e_i) \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i
 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x_1 e_1 \\
 x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
 \langle u(x - p(x)) \mid x \rangle &= \left\langle \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{\langle e_i \mid e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_i \\
 &\geq \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_2 \\
 &= \lambda_2 \sum_{i=2}^n x_i^2 \\
 &= \lambda_2 \|x - p(x)\|^2
 \end{aligned}$$

**11.**

Soit  $i \in \llbracket 1.N \rrbracket$ . La colonne  $i$  du produit  $\pi K$  vaut:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \pi(j) K_{ji} &= \sum_{j=1}^N \pi(i) K_{ij} \\ &= \pi(i) \underbrace{\sum_{j=1}^N K_{ij}}_{=1} \\ &= \pi(i)\end{aligned}$$

car  $K$  est un noyau de Markov. On a donc bien:

$$\pi K = \pi$$