**CONCOURS MINES-PONTS 2023**
**MATHÉMATIQUES 1 - MP**

Pierre-Paul TACHER


## 1.

On a l'égalité des ensembles:

$$\begin{aligned}\{\frac{u(x)}{\|x\|}, \quad x \in E \setminus \{0\}\} &= \{u(\frac{x}{\|x\|}), \quad x \in E \setminus \{0\}\} \\ &= \{u(x), \quad x \in E \wedge \|x\| = 1\}\end{aligned}$$

L'ensemble des vecteurs de $E$ de norme 1 est borné, et fermé car l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par la fonction continue $\|.\|$. C'est un compact puisqu'on est en dimension finie.
La fonction linéraire continue $u$ y est donc bornée et atteind ses bornes.

## 2.

$|||.|||$ a bien un sens comme application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}^+$ d'après ce qui précède.

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad |||\lambda u||| &= \sup\{\|(\lambda u)(x)\|, x \in E \wedge \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| \|u(x)\|, x \in E \wedge \|x\| = 1\} \\ &= |\lambda| \sup\{\|u(x)\|, x \in E \wedge \|x\| = 1\} \\ &= |\lambda| \, |||u|||\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}|||u||| = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow u = 0\end{aligned}$$

Enfin:

$$\begin{aligned}\forall x \in E \quad \|x\| = 1, \quad \|(u+v)(x)\| &= \|u(x) + v(x)\| \\ &\leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\| \\ &\leqslant |||u||| + |||v|||\end{aligned}$$

Le passage au sup donne bien l'inégalité triangulaire $|||u + v||| \leqslant |||u||| + |||v|||$.

**3.**

Si $v = 0$, le résultat est trivial. Supposons $v \neq 0$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \|uv(x)\| &= \|u(v(x))\| \\ &\leqslant |||u||| \|v(x)\| \\ &\leqslant |||u||| |||v||| \|x\| \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \frac{\|uv(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u||| |||v||| \\ \Rightarrow \quad &|||uv||| = \sup_{x \neq 0} \frac{|||uv(x)|||}{\|x\|} \leqslant |||u||| |||v||| \end{aligned}$$

Ce qui donne en particulier $|||u^k||| \leqslant |||u|||^k$.

**4.**

Soit $\chi$ le polynôme caractéristique de $a$. Il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. On pose

$$\chi = \prod_{i=1}^{r} (-1)^n (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts.

Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\chi(a) = 0$ ce qui revient à dire $\ker \chi(a) = E$.

D'autre part, le théorème de décomposition des noyaux permet d'affirmer que, les polynômes $(X - \lambda_i)^{m_i}$ étant premiers deux à deux,

$$\ker \chi(a) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(a - \lambda_i id)^{m_i}$$

On peut donc conclure:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(a - \lambda_i id)^{m_i}$$

**5.**

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. soit $x \in \mathbb{C}^n$. On a[1]

$$\begin{aligned} \|q_i u p_i(x)\| &= \|q_i(u p_i(x))\| \\ &= \|u p_i(x)\| \\ &= \|u(p_i(x))\| \\ &\leqslant |||u|||_i \|p_i(x)\| \end{aligned}$$

Or $p_i$ est une application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie, elle est continue. On sait alors qu'il existe $C_i \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|p_i(x)\| \leqslant C_i \|x\|$. De plus $C_i \neq 0$ car $p_i \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|q_i u p_i(x)\| &\leqslant |||u|||_i \|p_i(x)\| \\ &\leqslant |||u|||_i C_i \|x\| \\ \Rightarrow \quad |||q_i u p_i||| &\leqslant C_i |||u|||_i \end{aligned}$$

[1] J'abrège le $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ en $|||.|||$.

**6.**

Les endomorphismes $a$ et $(a-\lambda_i id)^{m_i}$ commutent donc

$$\begin{aligned}\forall x \in E_i, \quad (a-\lambda_i id)^{m_i}(a(x)) &= ((a-\lambda_i id)^{m_i} a)(x)\\ &= (a(a-\lambda_i id)^{m_i})(x)\\ &= a((a-\lambda_i id)^{m_i}(x))\\ &= a(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

i.e. $a(x) \in E_i$.

**7.**

Soit $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$. On a $p_i q_j \in \mathcal{L}(E_j, E_i)$. Soit $x \in E_j$.

$$p_i q_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ x & \text{sinon}\end{cases}$$

donc on peut écrire

$$p_i q_j = \delta_{ij} id_{E_j}$$

Ensuite, $q_i p_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Soit $x = x_1 + \cdots + x_r \in \mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker(a-\lambda_i id)^{m_i}$.

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^r q_i p_i)(x) &= \sum_{i=1}^r q_i p_i(x_i)\\ &= \sum_{i=1}^r q_i(x_i)\\ &= \sum_{i=1}^r x_i\\ &= x\end{aligned}$$

donc $\sum_{i=1}^r q_i p_i = id_{\mathbb{C}^n}$.

**8.**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r q_i a_i p_i &= \sum_{i=1}^r q_i p_i a q_i p_i\\ &= \sum_{i=1}^r q_i a q_i p_i \qquad E_i \text{ est stable par } a\\ &= \sum_{i=1}^r a q_i p_i\\ &= a \underbrace{\sum_{i=1}^r q_i p_i}_{=id_{\mathbb{C}^n}}\\ &= a\end{aligned}$$

**9.**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} a^k &= (\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i)^k \\ &= \sum_{i=1}^{r} (q_i a_i p_i)^k \qquad p_i q_j = 0 \text{ si } i \neq j \\ &= \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k p_i \qquad p_i q_i = id_{E_i} \end{aligned}$$

On sait que $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ muni de la norme $|||.|||$ est un $\mathbb{C}$ espace de Banach. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} f^k$ converge et sa somme est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ noté $e^f$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{ta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^n p_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} q_i a_i^n p_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} q_i \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a_i^n \right) p_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} q_i e^{t a_i} p_i \end{aligned}$$

On a utilisé pour le passage de la 3ème à la 4ème ligne la continuité de l'application linéaire:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E_i) &\to \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \\ f &\mapsto q_i f p_i \end{aligned}$$

**10.**

On remarque que

$$\begin{aligned} e^{ta_i} &= e^{t(a_i - \lambda_i id) + t\lambda_i id} \\ &= e^{t(a_i - \lambda_i id)} e^{t\lambda_i id} \qquad (a_i - \lambda_i id) \text{ et } \lambda_i id \text{ commutent )} \\ &= e^{t\lambda_i id} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (a_i - \lambda_i id)^k \\ &= e^{t\lambda_i id} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!} (a_i - \lambda_i id)^k \qquad (a_i - \lambda_i id)^m = 0 \\ &= e^{t\lambda_i id} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!} (a_i - \lambda_i id)^k \end{aligned}$$

On en déduit en utilisant l'inégalité triangulaire et la sous-multiplicité de la norme:

$$\begin{aligned}
\left\|\left\|e^{ta_i}\right\|\right\|_i &\leqslant \left\|\left\|e^{t\lambda_i id}\right\|\right\|_i \left\|\left\|\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!}(a_i-\lambda_i id)^k\right\|\right\|_i \\
&\leqslant \left\|\left\|e^{t\lambda_i id}\right\|\right\|_i \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i-\lambda_i id|||_i^k \\
&= \left\|\left\|e^{t\lambda_i} id\right\|\right\|_i \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i-\lambda_i id|||_i^k \\
&= \left|e^{t\lambda_i}\right| \underbrace{|||id|||_i}_{=1} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i-\lambda_i id|||_i^k \\
&= \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i-\lambda_i id|||_i^k
\end{aligned}$$

**11.**

On a $\left|e^{t\lambda_i}\right| = e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_i}$. puis

$$\begin{aligned}
\left\|\left\|e^{ta}\right\|\right\| &\leqslant \sum_{i=1}^{r} \left\|\left\|q_i e^{ta_i} p_i\right\|\right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i \left\|\left\|e^{ta_i}\right\|\right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i-\lambda_i id|||_i^k
\end{aligned}$$

Posons:

$$\begin{aligned}
C &= \max_{i\in[\![1,r]\!]} C_i \\
N &= \max_{i\in[\![1,r]\!]} |||a_i-\lambda_i id|||_i \\
m &= \max_{i\in[\![1,r]\!]} m_i
\end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
\left\|\left\|e^{ta}\right\|\right\| &\leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_i} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i-\lambda_i id|||_i^k \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_i} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|t|^k}{k!} N^k \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} C e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_i} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|t|^k}{k!} N^k \\
&= \underbrace{(C \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|t|^k}{k!} N^k)}_{P(|t|)} \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_i}
\end{aligned}$$

**12.**

On a l'inclusion d'ensembles suivante, valable $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\{\left\|e^{tu_A}(x)\right\|, \quad x \in \mathbb{R}^n \wedge \|x\| = 1\} = \{\left\|e^{tv_A}(x)\right\|, \quad x \in \mathbb{R}^n \wedge \|x\| = 1\} \subset \{\left\|e^{tv_A}(x)\right\|, \quad x \in \mathbb{C}^n \wedge \|x\| = 1\}$$

Le passage au sup donne:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\left|\left|e^{tu_a}\right|\right|\right|_r \leqslant \left|\left|\left|e^{tv_a}\right|\right|\right|_c$$

**13.**

La solution de l'équation différentielle linéaire

$$\begin{cases} y' = u(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

est

$$g_{x_0}(t) = e^{tu}(x_0)$$

Supposons $\exists \lambda = \alpha + i\beta \in \mathrm{Sp}(A), \quad \alpha \geqslant 0$. Soit $x \in M_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre. $\bar{x}$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\bar{\lambda}$ car $A$ est réelle. On a $x_0 = x + \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et

$$\begin{aligned} g_{x_0}(t) &= e^{tu} x_0 \\ &= e^{tu} x + e^{tu} \bar{x} \\ &= e^{t\lambda} x + e^{t\bar{\lambda}} \bar{x} \\ &= 2 \operatorname{Re} e^{t\lambda} x \\ &= 2e^{t\alpha} \operatorname{Re} e^{it\beta} x \end{aligned}$$

Cela montre que $g_{x_0}$ ne peut pas tendre vers 0 car $x \neq 0$ et $\alpha \geqslant 0$.

On a montré

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \Rightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{-*} + i\mathbb{R}$$

Réciproquemment, supposons que toutes las valeurs propres de $A$ ont une partie réelle strictement négative. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. D'après la question 11,

$$\begin{aligned} \|g_{x_0}(t)\| &= \left\|e^{ut} x_0\right\| \\ &\leqslant \left|\left|\left|e^{ut}\right|\right|\right|_c \|x_0\| \\ &\leqslant \|x_0\| P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t \operatorname{Re} \lambda_i} \end{aligned}$$

Les théorèmes sur les puissances comparées donnent

$$\lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$$

On a montré

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{-*} + i\mathbb{R}$$

**14.**

Soit $\alpha = \min_{i\in[\![1,r]\!]}\{-\operatorname{Re}\lambda_i\} > 0$. Soit $\beta \in ]0,\alpha[$. D'après la question 11,

$$\begin{aligned}|||e^{tu}|||_r &\leqslant P(|t|)\sum_{i=1}^{r} e^{t\operatorname{Re}\lambda_i}\\ &= e^{-t\beta}P(|t|)\sum_{i=1}^{r} e^{t(\underbrace{\operatorname{Re}\lambda_i+\beta}_{<0})}\end{aligned}$$

La fonction $P(|t|)\sum_{i=1}^{r} e^{t(\operatorname{Re}\lambda_i+\beta)}$ tend vers 0 quand $t\to+\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit $C_2 > 0$ un majorant de cette fonction, on obtient

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\quad |||e^{tu}|||_r \leqslant C_2e^{-\beta t}$$

puis

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\quad \|g_{x_0}(t)\| \leqslant C_2e^{-\beta t}\|x_0\|$$

**15.**

Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$, fixé. La fonction

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ \varphi :\ &t\mapsto\langle e^{ta}(x)\mid e^{ta}(y)\rangle\end{aligned}$$

est de classe $C^{+\infty}$, en particulier $C^0$ sur $\mathbb{R}^+$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}\left|\langle e^{ta}(x)\mid e^{ta}(y)\rangle\right| &\leqslant \left\|e^{ta}(x)\right\|\left\|e^{ta}(y)\right\|\\ &\leqslant C_2^2\|x\|\|y\|e^{-2\alpha t} = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})\end{aligned}$$

où la dernière majoration provient du résultat de la question 14. Cela montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\langle e^{ta}(x)\mid e^{ta}(y)\rangle\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

On vérifie que $b$ est une forme bilinéaire symétrique positive. Puis

$$\begin{aligned}b(x,x) &= \int_0^{+\infty}\langle e^{ta}(x)\mid e^{ta}(x)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\left\|e^{ta}(x)\right\|^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

implique par continuité de $\varphi$:

$$\begin{aligned}b(x,x)=0 &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}^+,\quad e^{ta}(x)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \qquad (e^{ta}\text{ est inversible, d'inverse } e^{-ta}).\end{aligned}$$

$b$ est donc définie positive; c'est un produit scalaire.

**16.**

Posons $e^{tA} = \left[C_1(t)\middle|C_2(t)\middle|\dots\middle|C_n(t)\right]$, où $A\in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice de $a$ dans la base canonique.

On note $(X,Y)\in(M_n(\mathbb{R}))^2$ les vecteurs colonnes de composantes de $x,y$ dans la base canonique.

On a $\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(y)\rangle = X^T(e^{tA})^T e^{tA}Y$, puis

$$\begin{aligned} b(x,y) &= X^T(\int_0^{+\infty}(e^{tA})^T e^{tA}\,\mathrm{d}t)Y \\ &= \sum_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} b_{ij}x_iy_j \end{aligned}$$

où $b_{ij} = \int_0^{+\infty}\langle C_i(t) \mid C_j(t)\rangle\,\mathrm{d}t$.

Il vient directement que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q_x &= 2\left[\sum_{j=1}^n b_{1j}x_j \quad \sum_{j=1}^n b_{2j}x_j \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n b_{nj}x_j\right] \\ &= 2b(.,x) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} b(.,x) : \mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \\ y &\mapsto b(y,x) \end{aligned}$$

Alternativement, on peut voir la forme quadratique $q$ comme une composition:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R}^{2n} & \to \mathbb{R} \\ x \mapsto & (id_{\mathbb{R}^n}(x), id_{\mathbb{R}^n}(x)) & \\ & (x,y) & \mapsto b(x,y) \end{array}$$

Puis comme $b(.,x)$ est linéaire, sa différentielle est constante égale à elle-même, de même que pour $id_{\mathbb{R}^n}$, ainsi:

$$\mathrm{d}b_{(x,y)}(u,v) = b(u,y) + b(x,v)$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q_x &= b(.,x)\circ id_{\mathbb{R}^n} + b(x,.)\circ id_{\mathbb{R}^n} \\ &= 2b(.,x) \end{aligned}$$

On pourrait aussi revenir à la définition de la différentielle.

Maintenant, en notant ' la dérivation par rapport à $t$:

$$\begin{aligned} (e^{tA}X)' &= Ae^{tA}X \\ &= e^{tA}AX \end{aligned}$$

ou encore

$$2\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(a(x))\rangle = (\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(x)\rangle)'$$

Soit $t_1 > 0$.

$$\begin{aligned} 2\int_0^{t_1}\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(a(x))\,\mathrm{d}t &= [(\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(x)\rangle)]_0^{t_1} \\ &= \langle e^{t_1a}(x) \mid e^{t_1a}(x)\rangle - \langle x,x\rangle \end{aligned}$$

Or $\left|\langle e^{t_1 a}(x) \mid e^{t_1 a}(x)\rangle\right| \leqslant C_2^2 \|x\|^2 e^{-2\alpha t_1} \underset{t_1 \to +\infty}{\to} 0$, donc le passage à la limite dans l'égalité précédente donne:

$$2b(a(x), x) = 2\int_0^{+\infty} \langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(a(x))\,\mathrm{d}t = -\|x\|^2$$

**17.**

Par composition, $q \circ f_{x_0}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad q(f_{x_0})'(t) &= \mathrm{d}q_{f_{x_0}(t)}(f'_{x_0}(t)) \\ &= \mathrm{d}q_{f_{x_0}(t)}(\varphi(f_{x_0}(t))) \\ &= \mathrm{d}q_{f_{x_0}(t)}(\epsilon(f_{x_0})(t) + a(f_{x_0}(t)) \\ &= 2b(f_{x_0}(t), \epsilon(f_{x_0})(t)) + 2b(f_{x_0}(t), a(f_{x_0}(t))) \\ &= 2b(f_{x_0}(t), \epsilon(f_{x_0})(t)) - \|f_{x_0}(t)\|^2 \end{aligned}$$

**18.**

On a

$$\varphi(h) \underset{\|h\| \to 0}{=} \underbrace{\varphi(0)}_{=0} + \mathrm{d}\varphi_0(h) + \mathrm{o}(\|h\|)$$

On applique Cauchy-Schwartz au produit scalaire $b$ :

$$\begin{array}{rcl} |b(f_{x_0}(t), \epsilon(f_{x_0})(t))| & \leqslant & \|f_{x_0}(t)\| \|\varphi(f_{x_0}(t)) - \mathrm{d}\varphi_0(f_{x_0}(t))\| \\ & = & \|f_{x_0}(t)\| \mathrm{o}(\|f_{x_0}(t)\|) \\ & \underset{\|f_{x_0}(t)\| \to 0}{=} & \mathrm{o}(\|f_{x_0}(t)\|^2) \end{array}$$

soit alors $\tilde{\alpha} > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|f_{x_0}(t)\| \leqslant \tilde{\alpha} \Rightarrow 2\,|b(f_{x_0}(t), \epsilon(f_{x_0})(t))| \leqslant \frac{1}{2}\|f_{x_0}(t)\|^2$$

Alors,

$$\|f_{x_0}(t)\| \leqslant \tilde{\alpha} \Rightarrow 2b(f_{x_0}(t), \epsilon(f_{x_0})(t)) - \|f_{x_0}(t)\|^2 \leqslant -\frac{1}{2}\|f_{x_0}(t)\|^2$$

On sait que $\sqrt{q(.)}$ est une norme, et elle est équivalente à $\|.\|$ puisqu'on est en dimension finie. Soit alors $(\alpha_1, \beta_1) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_1 \|x\|^2 \leqslant q(x) \leqslant \beta_1 \|x\|^2$$

On a:

$$q(f_{x_0}(t)) \leqslant \underbrace{\alpha_1 \tilde{\alpha}^2}_{\alpha} \Rightarrow 2b(f_{x_0}(t), \epsilon(f_{x_0})(t)) - \|f_{x_0}(t)\|^2 \leqslant -\underbrace{\frac{1}{2\beta_1}}_{\beta} q(f_{x_0}(t))$$

**19.**

Supposons $\{t \in \mathbb{R}^+, q(f_{x_0}(t)) = \alpha\} \neq \varnothing$. Soit alors
$$t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}^+, q(f_{x_0}(t)) = \alpha\}$$

on a $t_0 > 0$ car $t \mapsto q(f_{x_0}(t))$ est continue et $q(f_{x_0}(0)) = q(x_0) < \alpha$. Toujours par continuité, $q(f_{x_0}(t_0)) = \alpha$ et
$$\begin{aligned} 0 < \alpha - q(x_0) = q(f_{x_0}(t_0)) - q(x_0) &= \int_0^{t_0} q(f_{x_0})'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant -\beta \int_0^{t_0} q(f_{x_0})(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \end{aligned}$$

Contradiction. On en conclut en utilisant la continuité que
$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha \\ \Rightarrow & \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad q(f_{x_0})'(t) + \beta q(f_{x_0})(t) \leqslant 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (e^{\beta t} q(f_{x_0}))'(t) \leqslant 0 \\ \Rightarrow & \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e^{\beta t} q(f_{x_0})(t) \leqslant q(x_0) \\ \Leftrightarrow & \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad q(f_{x_0})(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

**20.**

On sait que $\sqrt{q(.)}$ est une norme, et elle est équivalente à $\|.\|$ puisqu'on est en dimension finie. Soit alors $(\alpha_1, \beta_1) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_1 \|x\|^2 \leqslant q(x) \leqslant \beta_1 \|x\|^2$$

La proposition 1 implique
$$\begin{aligned} & \forall x_0 \in B(0, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta_1}}), \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|f_{x_0}(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_1} e^{-\beta t} \beta_1 \|x_0\|^2 \\ \Leftrightarrow \ & \forall x_0 \in B(0, \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta_1}}}_{\tilde{\alpha}}), \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|f_{x_0}(t)\| \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}}_{C} e^{-\beta \frac{t}{2}} \|x_0\| \end{aligned}$$