

**CONCOURS X 2023**  
**MATHÉMATIQUES B - MP**

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

**1.**

Tout découle directement du fait qu'une somme de 2 fonctions DSE est DSE.

Soit  $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$ .  $f + g$  est DSE sur  $U_\rho$  et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f + g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)t^n$$

Soit  $(P, Q) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])^2$ .  $P + Q$  est DSE sur  $U_\rho$  et

$$\begin{aligned} \forall a \in U_\rho, \quad (P + Q)|_{t=a} &= P|_{t=a} + Q|_{t=a} \\ &= f_0(a) + f_1(a)X + \dots + f_n(a)X^n + g_0(a) + g_1(a)X + \dots + g_n(a)X^n \\ &= f_0(a) + g_0(a) + (f_1(a) + g_1(a))X + \dots + (f_n(a) + g_n(a))X^n \\ &= (f_0 + g_0)(a) + (f_1 + g_1)(a)X + \dots + (f_n + g_n)(a)X^n \end{aligned}$$

Soit  $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(M_{n,m}(\mathbb{R}))^2$ .  $f + g$  est DSE sur  $U_\rho$  et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f + g)(t) = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11})(t) & (a_{12} + b_{12})(t) & \dots & (a_{1m} + b_{1m})(t) \\ (a_{21} + b_{21})(t) & (a_{22} + b_{22})(t) & \dots & (a_{2m} + b_{2m})(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + b_{n1})(t) & (a_{n2} + b_{n2})(t) & \dots & (a_{nm} + b_{nm})(t) \end{bmatrix}$$

**2.**

Un produit de deux fonctions DSE est DSE et: Soit  $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$ .  $fg$  est DSE sur  $U_\rho$  et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) t^n$$

A cela on ajoute le fait qu'une somme de  $n$  fonctions DSE est encore DSE donc: Soit  $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(M_n(\mathbb{R}))^2$ .  $fg$  est DSE sur  $U_\rho$  et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (a_{1i} b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{1i} b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{1i} b_{in})(t) \\ \sum_{i=1}^n (a_{2i} b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{2i} b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{2i} b_{in})(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n (a_{ni} b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{ni} b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{ni} b_{in})(t) \end{bmatrix}$$

**3.**

Les coefficients d'un DSE sont déterminés de manière unique par  $f$  à travers la formule:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$$

Si le DSE sur  $U_r, r \leq \rho$  est nul, la restriction de  $f$  à  $U_r$  est nulle, et donc les coefficients de son DSE sur  $U_\rho$  sont tous nuls, et  $f$  est nulle sur  $U_\rho$ . Cela montre l'injectivité du morphisme d'anneaux:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f|_{U_r} \end{aligned}$$

**4.**

Soit  $r \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $r < \rho$ . L'application:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_r : \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \end{aligned}$$

est bien définie.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| r^n \\ &= |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \\ &= |\lambda| \|f\|_r \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|f\|_r = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0 \quad (\text{car } r > 0) \\ &\Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| r^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \\ &= \|f\|_r + \|g\|_r \end{aligned}$$

ce qui finit de montrer que  $\|\cdot\|_r$  est une norme sur  $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ ; de plus elle est sous-multiplicative car

$$\begin{aligned}\|fg\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n |a_k| r^k |b_{n-k}| r^{n-k} \\ &= \|f\|_r \|g\|_r\end{aligned}$$

5.

On a :

$$\begin{aligned}\forall t \in U_r, \quad |f_n(t)| &= \left| \sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}| |t|^p \\ &\leq \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}| r^n \\ &= \|f_n\|_r\end{aligned}$$

qui est par hypothèse le terme d'une série numérique convergente. Donc  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement vers  $f$  telle que

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p$$

A  $t$  fixé dans  $U_r$ ,  $n \in \mathbb{N}$  fixé,  $\sum_{p \geq 0} a_{np} t^p$  converge absolument et la somme est majorée par  $\|f_n\|_r$ , qui est le terme d'une série convergente. On peut inverser les sommations dans la série numérique double ci-dessus et

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{np} \right) t^p \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\|f - \sum_{n=0}^N f_n\|_r &= \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \right\|_r \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_r \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

car c'est le reste d'une série numérique convergente.

6.

a. Quitte à diviser  $f$  par  $f(0) \neq 0$ , on peut maintenant supposer  $f(0) = 1$  car

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

b.  $fg \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$  et sa somme et le produit de cauchy de  $f(t)$  et  $g(t)$ :

$$(fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k} t^n$$

donc par unicité du DSE,

$$\begin{aligned} \forall t \in U_r, f(t)g(t) = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0 & \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = - \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} & \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

c. La définition du rayon de convergence d'une série entière est

$$R = \sup\{r \geq 0, |a_n| r^n \text{ est bornée}\}$$

donc comme  $R_f \geq \rho > s > 0$ ,

$$\begin{aligned} (a_n s^n) \text{ bornée} &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| s^n \leq M \\ &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M \frac{1}{s^n} \leq \underbrace{\left(\frac{\max\{1, M\}}{s}\right)^n}_{=c} \end{aligned}$$

d. On a  $|b_0| = 1 \leq (2c)^0$ , puis supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang  $n-1 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |bn| &= \left| \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n c^k (2c)^{n-k} \\ &= c^n \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \\ &= c^n \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \\ &\leq c^n 2^n \end{aligned}$$

e. On a montré que

$$|b_n| \frac{1}{(2c)^n} \leq 1$$

donc le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$  vérifie  $R_g \geq \frac{1}{2c} > 0$  et donc  $g$  est bien définie sur un intervalle de longueur non nulle et

$$\forall t \in U_{\min\{R_g, \rho\}}, f(t)g(t) = 1$$

7.

On a  $0, 1 \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ , qui est de plus stable par opposé, somme, produit. De plus, si  $f, g \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$ , avec  $f \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} fg = 0 &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad f(t)g(t) = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho, R(\frac{1}{f})\}} (\neq \emptyset), \quad \frac{1}{f(t)} f(t)g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho, R(\frac{1}{f})\}}, \quad g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad g(t) = 0 \quad (\text{d'après le raisonnement déjà fait en 3}) \\ &\Leftrightarrow g = 0_{\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$  est bien un anneau intègre.

8.

a. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X]) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ P = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n &\mapsto \sum_{i=0}^n \|f_i\|_r s^i \end{aligned}$$

est bien définie car  $r < \rho$ .

$$\begin{aligned} \|\lambda P\|_{rs} &= \sum_{i=0}^n \|\lambda f_i\|_r s^i \\ &= |\lambda| \sum_{i=0}^n \|f_i\|_r s^i \\ &= |\lambda| \|P\|_{rs} \\ \|P + Q\|_{rs} &= \sum_{i=0}^n \|f_i + g_i\|_r s^i \\ &\leq \sum_{i=0}^n (\|f_i\|_r + \|g_i\|_r) s^i \\ &= \|P\|_{rs} + \|Q\|_{rs} \\ \|P\|_{rs} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \|f_i\|_r s^i = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [0, n], \quad \|f_i\|_r = 0 \quad (s > 0) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [0, n], \quad f_i = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\|\cdot\|_{rs}$  est bien une norme.

b.

$$\begin{aligned}
PQ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_i g_j X^{i+j} \\
&= \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l f_j g_{l-j} X^l
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|PQ\|_{rs} &= \left\| \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l f_j g_{l-j} X^l \right\|_{rs} \\
&= \sum_{l=0}^{n+m} \left\| \sum_{j=0}^l f_j g_{l-j} \right\|_{rs} s^l \\
&\leq \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l \|f_j g_{l-j}\|_{rs} s^l \\
&\leq \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l \|f_j\|_r \|g_{l-j}\|_r s^l \quad (\text{cf. 4}) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \|f_i\|_r \|g_j\|_r s^{i+j} \\
&= \|P\|_{rs} \|Q\|_{rs}
\end{aligned}$$

9.

a. A  $t$  fixé, on fait la division euclidienne du polynôme  $A(t)$  par  $B(t) \neq 0$ , ce qui donne un unique couple  $(Q(t), R(t)) \in (\mathbb{R}_{n-d}[X] \times \mathbb{R}_{d-1}[X])$ . On définit ainsi implicitement, de manière unique, une fonction

$$\begin{aligned}
U_\rho &\rightarrow \mathbb{R}_{n-d}[X] \times \mathbb{R}_{d-1}[X] \\
t &\mapsto (Q(t), R(t))
\end{aligned}$$

Reste à montrer que les fonctions  $Q, R$  sont dans  $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$  et  $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ , respectivement. Cela vient du fait que  $B$  est unitaire car alors, en notant respectivement  $a, b, q, r$  les fonctions composantes de  $A, B, Q, R$  respectivement, on obtient par identification des coefficients pour tout  $t$ :

$$\begin{aligned}
q_{n-d} \times 1 &= a_n \\
q_{n-d-1} \times 1 &= a_{n-1} - q_{n-d} b_{d-1} \\
&\vdots \\
q_0 \times 1 &= a_d - \sum_{p=1}^{\min\{d, n-d\}} q_p b_{d-p}
\end{aligned} \tag{1}$$

et

$$R(t) = A(t) - B(t)Q(t)$$

montre, par une récurrence immédiate, puisque  $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$  est un anneau, que  $Q$  puis  $R$  sont dans  $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$  et  $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ , respectivement.

**b.** On multiplie les équations 1 par une puissance de  $X$  adéquate pour reconstruire la fin de la fonction  $A$ :

$$\begin{aligned} q_{n-d}X^n &= a_nX^n \\ q_{n-d-1}X^{n-1} &= a_{n-1}X^{n-1} - q_{n-d}X^{n-d}b_{d-1}X^{d-1} \\ &\vdots \\ q_0X^d &= a_dX^d - \sum_{p=1}^{\min\{d,n-d\}} q_pX^p b_{d-p}X^{d-p} \end{aligned}$$

En ajoutant on obtient:

$$\begin{aligned} X^dQ &= \sum_{i=d}^n a_iX^i - \sum_{i=d}^{n-1} \underbrace{\sum_{k+l=i} q_kX^k b_lX^l}_{\text{coeff. } i \text{ du produit } Q(B - X^d)} \\ \Leftrightarrow X^dQ + \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_kX^k b_lX^l &= \sum_{i=d}^n a_iX^i \end{aligned} \quad (2)$$

On remarque que:

$$\begin{aligned} \|X^dQ + \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_kX^k b_lX^l\|_{rs} &\geq \|X^dQ\|_{rs} - \left\| \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_kX^k b_lX^l \right\|_{rs} \\ &= s^d\|Q\|_{rs} - \left\| \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_kX^k b_lX^l \right\|_{rs} \\ &\geq s^d\|Q\|_{rs} - \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_kX^k b_lX^l \right\|_{rs} \\ &= s^d\|Q\|_{rs} - \|Q(B - X^d)\|_{rs} \\ &\geq s^d\|Q\|_{rs} - \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \quad (\text{cf. 8.b}) \end{aligned}$$

On prend maintenant la  $\|\cdot\|_{rs}$  de l'équation 2 pour avoir:

$$\begin{aligned} \|Q\|_{rs}(s^d - \|B - X^d\|_{rs}) &\leq \left\| \sum_{i=d}^n a_iX^i \right\|_{rs} \\ &\leq \|A\|_{rs} \end{aligned}$$

on obtient la majoration voulue si  $s^d - \|B - X^d\|_{rs} \geq 0$

$$\|Q\|_{rs} \leq \frac{\|A\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}}$$

De plus on a:

$$A = \underbrace{QX^d}_{\text{valuation} \geq d} + Q(B - X^d) + R$$

donc  $\forall i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ ,

$$\text{coeff. } i \text{ de } Q(B - X^d) \times X^i + r_iX^i = a_iX^i$$

En sommant puis en prenant la norme  $\|\cdot\|_{rs}$ ,

$$\begin{aligned}
& \|R\|_{rs} - \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \leq \|A\|_{rs} \\
\Rightarrow & \|R\|_{rs} \leq \|A\|_{rs} + \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \\
\Rightarrow & \|R\|_{rs} \leq \|A\|_{rs} + \frac{\|A\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}} \\
\Leftrightarrow & \|R\|_{rs} \leq \frac{s^d\|A\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}}
\end{aligned}$$

10.

$R$  étant de degré  $\leq d - 1$  et  $F$  unitaire,  $F + R$  est unitaire de degré  $d$ . De plus la division euclidienne:

$$\begin{aligned}
P|_{t=0} &= Q|_{t=0}F|_{t=0} + R|_{t=0} \\
&= Q|_{t=0}X^d + R|_{t=0}
\end{aligned}$$

et le fait que  $P|_{t=0}$  est de valuation  $d$ , montre par identification des coefficients de  $X^j, j \leq d$  montre que  $R|_{t=0} = 0$ .

On voit aussi que  $q_0(t = 0) = 1$ , où  $q_0 \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$  est le coefficient constant de  $Q$ .

11.

Ecrivons:

$$Q_0 = q_{0,0} + q_{0,1}X + \cdots + q_{0,n-d-1}X^{n-1} + X^{n-d}$$

de sorte que

$$\|Q_0 - 1\|_{ss} = \|q_{0,0} - 1\|_s + \|q_{0,1}\|_s s + \cdots + \|q_{0,n-d-1}\|_s s^{n-d-1} + s^{n-d}$$

Il faut remarquer que du fait de la continuité en 0 d'une somme de série entière,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|f\|_r = |f(0)|$$

Ainsi on a:

$$\forall j \in \llbracket 1, n - d - 1 \rrbracket, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \|q_{0,j}\|_s s^j = 0$$

et aussi

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|q_{0,0} - 1\|_s = 0$$

puisque  $q(0,0)(t = 0) = 1$ , d'après la remarque à la fin de la question 10. Ainsi,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|Q_0 - 1\|_{ss} = 0$$

On fixe  $s \in ]0, \rho[$  tel que

$$\forall r \leq s, \quad \|Q_0 - 1\|_{ss} \leq \frac{1}{6}$$



par croissance de  $r \mapsto \|f\|_r$ , on a même:

$$\forall r \leq s, \quad \|Q_0 - 1\|_{rs} \leq \|Q_0 - 1\|_{ss} \leq \frac{1}{6}$$

Ensuite,

$$s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{rs} = \|f_0\|_r s^{-d} + \|f_1\|_r s^{-d+1} + \dots + \|f_{d-1}\|_r s^{-1}$$

Comme on a

$$\forall j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, \quad f_j(0) = 0$$

d'après ce qui précède

$$\lim_{r \rightarrow 0} s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{rs} = 0$$

De la même manière,

$$\lim_{r \rightarrow 0} s^{-d}\|R_0\|_{rs} = 0$$

On fixe  $r < s$  tel que:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{rs} \leq \frac{1}{6} \\ \epsilon_0 &= s^{-d}\|R_0\|_{rs} \leq \frac{1}{12} \end{aligned}$$

On a aussi:

$$\beta_0 = \|Q_0 - 1\|_{rs} \leq \frac{1}{6}$$

Pour ce  $r$  et ce  $s$  on a bien  $\alpha_0 + 2\epsilon_0 \leq \frac{1}{3}$  et  $\beta_0 + \epsilon_0 \leq \frac{1}{3}$ .

**12.**

On a:

$$\begin{aligned} Q_{i+1}F_{i+1} + R_{i+1} &= P \\ &= Q_i F_i + R_i \\ &= Q_i(F_{i+1} - R_i) + R_i \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$(1 - Q_i)R_i = (Q_{i+1} - Q_i)F_{i+1} + R_{i+1}$$

**13.**

On a :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i+1} &= s^{-d} \|F_{i+1} - X^d\|_{rs} \\
 &= s^{-d} \|F_i - X^d + R_i\|_{rs} \\
 &\leq s^{-d} \|F_i - X^d\|_{rs} + s^{-d} \|R_i\|_{rs} \\
 &= \alpha_i + \epsilon_i
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (1 - Q_i)R_i &= (Q_{i+1} - Q_i)F_{i+1} + R_{i+1} \\
 &= R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d + (Q_{i+1} - Q_i)(F_{i+1} - X^d) \\
 \Rightarrow \|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} &\geq \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)(F_{i+1} - X^d)\|_{rs} \\
 &\geq \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs} \|F_{i+1} - X^d\|_{rs} \\
 &= \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs} s^d \alpha_{i+1}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Or on remarque que comme  $R_{i+1}$  est de degré  $< d$ , on a (on perd des termes positifs)

$$\begin{aligned}
 \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} &\geq \|(Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} \\
 &= \|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs} s^d
 \end{aligned}$$

Reprenons en 3:

$$\begin{aligned}
 \|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} &\geq s^d \|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs} s^d \alpha_{i+1} \\
 &= s^d \|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs} (1 - \alpha_{i+1}) \\
 &= s^d \|Q_{i+1} - 1 + 1 - Q_i\|_{rs} (1 - \alpha_{i+1}) \\
 &\geq s^d (\beta_{i+1} - \beta_i) (1 - \alpha_{i+1})
 \end{aligned}$$

Puisque  $\|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} \leq \|1 - Q_i\|_{rs} \|R_i\|_{rs} = s^d \beta_i \epsilon_i$  on a bien

$$\beta_{i+1} - \beta_i \leq \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}$$

enfin on repart de 3 pour obtenir:

$$\begin{aligned}
 \|R_{i+1}\|_{rs} &\leq \|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs} s^d \alpha_{i+1} + s^d \beta_i \epsilon_i \\
 &\leq \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}} s^d \alpha_{i+1} + s^d \beta_i \epsilon_i \\
 &= \frac{\beta_i \epsilon_i s^d}{1 - \alpha_{i+1}}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\epsilon_{i+1} \leq \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}$$

14.

On fait une récurrence sur  $i \in \mathbb{N}$  sur les 3 inégalités en même temps car elles semblent difficiles à découpler. La propriété est triviale pour  $i = 0$ . Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier  $i \geq 0$ .

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &\leq \alpha_i + \epsilon_i \\ &\leq \alpha_0 + 2(1 - 2^{-i})\epsilon_0 + 2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \alpha_0 + 2(1 - 2^{-i-1})\epsilon_0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_{i+1} &\leq \beta_i + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}} \\ &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_0 - 2(1 - 2^{-i-1})\epsilon_0} \\ &= \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_0 - 2\epsilon_0 + 2^{-i}\epsilon_0} \\ &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_0 - 2\epsilon_0} \\ &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{3}{2}\beta_i \epsilon_i\end{aligned}\tag{4}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\beta_i \epsilon_i &\leq 2^{-i}\beta_0 \epsilon_0 + (1 - 2^{-i})2^{-i}\epsilon_0^2 \\ &\leq 2^{-i}\beta_0 \epsilon_0 + (1 - 2^{-i})2^{-i}\left(\frac{1}{3} - \beta_0\right)\epsilon_0 \\ &= 2^{-2i}\beta_0 \epsilon_0 - \frac{1}{3}2^{-2i}\epsilon_0 + \frac{1}{3}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \underbrace{\left(\beta_0 - \frac{1}{3}\right)}_{\leq 0}2^{-2i}\epsilon_0 + \frac{1}{3}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \frac{1}{3}2^{-i}\epsilon_0\end{aligned}$$

En reprenant en 4, on obtient:

$$\begin{aligned}\beta_{i+1} &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{1}{2}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \beta_0 + (1 - 2^{-i-1})\epsilon_0\end{aligned}$$

Enfin on réutilise pour la dernière inégalité les calculs que l'on vient de faire:

$$\begin{aligned}\epsilon_{i+1} &\leq \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}} \\ &\leq \frac{1}{2}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= 2^{-i-1}\epsilon_0\end{aligned}$$

15.

a. On a

$$s^{-d} \|R_i\|_{rs} = s^{-d} \|F_{i+1} - F_i\|_{rs} = \epsilon_i \leq 2^{-i} \epsilon_0$$

cela montre, en notant  $r_{i,j}, j \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$  les fonctions coefficients de  $R_i$ , que

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, \quad s^j \|r_{i,j}\|_r &\leq \|R_i\|_{rs} \\ &\leq 2^{-i} \epsilon_0 s^d \\ \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|r_{i,j}\|_r &\leq 2^{-i} \epsilon_0 s^{d-j} \end{aligned}$$

c'est le terme d'une série numérique convergente; d'après la question 5,  $\sum_{i \geq 0} r_{i,j}$  converge vers  $g_j \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ . Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n r_{i,j} &= \sum_{i=0}^n f_{i+1,j} - f_{i,j} \\ &= f_{n+1,j} - f_j \end{aligned}$$

montre que la fonction composante  $f_{i,j}$  converge vers une fonction de  $g_j + f_j \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ , et ce pour tout  $j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ . Mais alors, comme

$$F_i = f_{i,0} + f_{i,1}X + \cdots + f_{i,d-1}X^{d-1} + X^d$$

$$\|F_i - (\sum_{j=0}^{d-1} (f_j + g_j)X^j + X^d)\|_{rs} = \sum_{j=0}^{d-1} \|f_{i,j} - f_j - g_j\|_r s^j \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$$

montre que  $F_i$  converge vers

$$\sum_{j=0}^{d-1} (f_j + g_j)X^j + X^d \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$$

b. De la division euclidienne  $P = Q_i F_i + R_i$ , on déduit des équations similaires aux équations 1, qui montrent, dans cet ordre, que les fonctions composantes  $q_{i,n-d}, q_{i,n-d-1}, \dots, q_{i,0}$  de  $Q_i$  convergent pour la norme  $\|\cdot\|_r$  dans  $\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ . Ainsi la suite  $Q$  converge pour  $\|\cdot\|_{rs}$  vers un certain  $G \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ .

Par passage à la limite on obtient :

$$P = FG$$

16.

On a montré le théorème dans le cas  $\lambda = 0$ ,  $P$  unitaire et  $\frac{P|_{t=0}}{X^d}(0) = f_d(0) = 1$ . En fait, quitte à remplacer  $\beta_i = \|Q_i - 1\|_{rs}$  par  $\beta_i = \|Q_i - f_d(0)\|_{rs}$  on peut obtenir le résultat à la seule condition que  $f_d(0) \neq 0$  (hypothèse utilisée dans la question 10); il faut alors partir de  $F_0 = X^d$  par ailleurs pour s'assurer  $(F_i)|_{t=0} = X^d$  et  $F_i$  unitaire<sup>1</sup>. Ainsi, dans le cas général, posons  $\frac{P|_{t=0}}{(X-\lambda)^d}(\lambda) = \gamma \neq 0$ ,

<sup>1</sup>On n'utilise pas le fait que  $P$  est unitaire, mais on n'utilise pas non plus, sauf erreur de ma part, l'hypothèse de l'énoncé " $f_d$  est la fonction constante égale à 1" (à part pour s'assurer que  $F_0$  est unitaire). Toutefois pour se ramener à ce cas, on pourrait alors penser à multiplier  $P$  par  $\frac{1}{f(d)}$  en utilisant la question 6, mais dans ce cas  $P$  n'est plus unitaire. Erreur d'énoncé ?

en remarquant que

$$\begin{aligned} & P \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X]) \text{ unitaire, avec } \lambda \text{ racine de } P_{|t=0} \text{ de multiplicité } d \\ \Leftrightarrow & P(X + \lambda) \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X]) \text{ unitaire, avec } 0 \text{ racine de } P_{|t=0} \text{ de multiplicité } d \end{aligned}$$

On trouve ainsi  $F \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$  et  $G \in \mathcal{D}_{n-d}(\mathbb{R}_d[X])$  tel que  $P(X + \lambda) = FG$  et  $F_{|t=0} = X^d$ . Mais alors on a

$$P = F(X - \lambda)G(X - \lambda)$$

avec  $F(X - \lambda)_{|t=0} = (X - \lambda)^d$  ce qui démontre le théorème.

**17.**

On applique le théorème précédent à  $X^2 - f \in \mathcal{D}_\rho(R_2[X])$ , qui nous fournit  $F, G \in \mathcal{D}_\rho(R_1[X])$  tel que  $P = FG$  et  $F_{|t=0} = X - \sqrt{f(0)}$ . Posons  $F = X - g_1$  et  $G = X - g_2$ , on a:

$$X^2 - f = X^2 - (g_1 + g_2)X + g_1g_2$$

Cela montre que  $g_1 = -g_2$  et  $g_1^2 = f$  sur  $U_\rho$ .

De plus  $f$  est continue en 0, donc il existe  $\rho_f \leq \rho$  tel que  $\forall t \in U_{\rho_f}, \quad f(t) > 0$ . Sur cet intervalle on peut donc écrire  $g_1 = \sqrt{f}$ .

**18.**

$M_{|t=0}$  est une matrice symétrique réelle, son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**19.**

On a

$$\chi = FG$$

avec  $\chi, F \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X])$ , unitaires donc  $G = 1$  et  $\chi = F$ .

$M_{|t=0}$  est diagonalisable car symétrique réelle, et comme elle possède une unique valeur propre  $\lambda$  de multiplicité  $n$ ,  $M_{|t=0} = \lambda I_n$ .  $M - \lambda I_n$  est donc une matrice symétrique dont les coefficients sont des sommes de séries entières nulles en 0, donc de la forme  $t \sum_{p=0}^{+\infty} a_n t^n$ . Autrement dit,  $\exists M_0 \in \mathcal{D}_\rho(S_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{D}_{\rho_1}(S_n(\mathbb{R}))$  tel que

$$M = \lambda I_n + M_0$$

**20.**

On a:

$$\begin{aligned} \chi_{|t=0} &= F_{|t=0}G_{|t=0} \\ &= (X - \lambda)^d G_{|t=0} \end{aligned}$$

et de plus  $G|_{t=0}(\lambda) \neq 0$ . On diagonalise maintenant  $M|_{t=0}$ :

$$M|_{t=0} = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_{n-d} \end{bmatrix} P^T \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{taille } d \\ \text{taille } n-d \end{array} \right\} \right\} \end{array} \right.$$

avec  $P \in O_n(\mathbb{R})$ . On peut vérifier facilement qu'on a alors:

$$\begin{aligned} B_0 &= G|_{t=0}(M|_{t=0}) \\ &= P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & G(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & G(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & G(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix} P^T \\ &= P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} P^T \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} A_0 &= G|_{t=0}(M|_{t=0}) \\ &= P \begin{bmatrix} F(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & F(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix} P^T \end{aligned}$$

$$= P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix} P^T$$

On pose alors

$$U = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$V = P \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Si on pose

$$P = \left[ P_1 \middle| P_2 \middle| \dots \middle| P_n \right]$$

Il est clair que  $\text{Im}(A_0V) = \text{Im } A_0 = \text{vect}(P_{d+1}, P_{d+2}, \dots, P_n)$  et  $\text{Im}(B_0U) = \text{Im } B_0 = \text{vect}(P_1, P_2, \dots, P_d)$  et

$$\left[ B_0U \middle| A_0V \right] = P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix}$$

est inversible.

**21.**

L'application

$$\begin{aligned}\varphi : U_{\rho_1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det Q = \det \left[ BU \middle| AV \right]\end{aligned}$$

est continue et  $\varphi(0) \neq 0$ . Donc il existe  $\rho'_2 \leq \rho_1$  sur lequel  $\det Q > 0$ , i.e.  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ . De plus, en notant  $C$  la matrice des cofacteurs de  $Q$ , on a :

$$\forall t \in U_{\rho'_2}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} C^T$$

Comme  $\mathcal{D}_{\rho'_2}(M_n(\mathbb{R}))$  est un anneau, il est clair que l'application  $t \mapsto C^T \in \mathcal{D}_{\rho'_2}(M_n(\mathbb{R}))$ . De même,  $\varphi \in \mathcal{D}_{\rho'_2}(\mathbb{R})$ , D'après le résultat de la question 6, on peut trouver  $\rho_2 \leq \rho'_2$  et  $g \in \mathcal{D}_{\rho_1}(\mathbb{R})$ , tel que

$$\forall t \in U_{\rho_2}, \quad g(t) = \frac{1}{\det Q}$$

Ce la montre que

$$\begin{aligned}U_{\rho_2} &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto Q^{-1} = g(t)C^T\end{aligned}$$

est dans  $\mathcal{D}_{\rho_2}(M_n(\mathbb{R}))$ , ou encore  $Q \in GL_n(\mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R}))$ .

**22.**

**a.** On a

$$\left[ B_a U \middle| A_a V \right] \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Im}(B_a U) + \text{Im}(A_a V) = \mathbb{R}^n$$

De plus  $\dim(B_a U) \leq d$  et  $\dim(A_a V) \leq n - d$ , donc la seule possibilité est que

$$\text{Im}(B_a U) + \text{Im}(A_a V) = \text{Im}(B_a U) \oplus (\text{Im } A_a V) = \mathbb{R}^n$$

**b.** Il est direct que

$$\begin{aligned}\text{Im}(B_a U) &\subset \text{Im}(B_a) \\ \text{Im}(A_a V) &\subset \text{Im}(A_a)\end{aligned}$$

De plus comme  $\left[ B_a U \middle| A_a V \right] \in GL_n(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned}\text{rang}(B_a U) &= d \\ \text{rang}(A_a V) &= n - d\end{aligned}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\begin{aligned}0 &= \chi_{|t=a}(M_a) = F_{|t=a}(M_a)G_{|t=a}(M_a) \\ &= A_a B_a \\ &= B_a A_a\end{aligned}$$



montre les inclusions

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(A_a) &\subset \ker B_a \\ \operatorname{Im}(B_a) &\subset \ker A_a\end{aligned}$$

Enfin le théorème du rang donne les relations:

$$\begin{aligned}\dim(\ker B_a) &= n - \operatorname{rang}(B_a) \leq n - d \\ \dim(\ker A_a) &= n - \operatorname{rang}(A_a) \leq d\end{aligned}$$

qui permettent de conclure

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(B_a U) &= \operatorname{Im}(B_a) = \ker A_a \\ \operatorname{Im}(A_a V) &= \operatorname{Im}(A_a) = \ker B_a\end{aligned}$$

**23.**

On fait un calcul par blocs:

$$\begin{aligned}MQ &= M \left[ BU \middle| AV \right] \\ &= \left[ MBU \middle| MAV \right] \\ &= \left[ BMU \middle| AMV \right]\end{aligned}$$

car  $B = F(M)$  et  $A = G(M)$  commutent avec  $M$ .

On pose

$$MP = \left[ \underbrace{M'_1}_d \middle| \underbrace{M'_2}_{n-d} \right]$$

de sorte que

$$MQ = \left[ BM'_1 \middle| AM'_2 \right]$$

On peut appliquer  $\operatorname{Im}(BU) = \operatorname{Im}(B)$  successivement à toutes les colonnes de  $M'_1$  pour construire une matrice  $M_1 \in M_d(\mathbb{R})$  tel que:

$$BM'_1 = BUM_1$$

De même comme  $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(AV)$ , il existe  $M_2 \in M_{n-d}(\mathbb{R})$  tel que

$$AM'_2 = AVM_2$$

Mais alors on a :

$$\begin{aligned} MQ &= \left[ BU M_1 \middle| AV M_2 \right] \\ &= \left[ BU \middle| AV \right] \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme les 3 matrices  $Q^{-1}, Q, M \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_n(\mathbb{R}))$ , on a  $M_1 \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_d(\mathbb{R}))$  et  $M_2 \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_{n-d}(\mathbb{R}))$ .

**24.**

Soit  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ . On fixe  $a \in U_{\rho_2}$ .

$$(B_a U X)^T A_a V Y = X^T U^T B_a^T A_a V Y$$

Mais  $B_a = F|_{t=a}(M_a)$  est symétrique, donc

$$\begin{aligned} (B_a U X)^T A_a V Y &= X^T U^T \underbrace{B_a A_a}_{=0} V Y \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $\text{Im}(A_a) \subset \ker B_a$ .

**25.**

On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt séparément aux colonnes de  $BU$  puis aux colonnes de  $AV$ . Etant donné que  $\text{Im}(BU)$  et  $\text{Im}(AV)$  sont orthogonaux, on obtiendra une base de  $\mathbb{R}^n$ .

On note

$$BU = \left[ e_1 \middle| e_2 \middle| \dots \middle| e_d \right]$$

On rappelle qu'on cherche le vecteur  $i$  de la base orthonormale sous la forme

$$\tilde{u}_i = e_i + \lambda_{i,i-1} u_{i-1} + \lambda_{i,i-2} u_{i-2} + \dots + \lambda_{i,1} u_1$$

on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, \quad u_i^T u_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_{i,k} = -e_i^T u_k$$

Les coefficient  $\lambda$  sont dans  $\mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$  par une récurrence immédiate, car  $\mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$  est un anneau. Ensuite on norme le vecteur obtenu :

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_i^T \tilde{u}_i}} \tilde{u}_i$$

Or on peut trouver  $\rho_3 \leq \rho_2$  d'après les questions 17 et 6 pour que tous les  $\frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_i^T \tilde{u}_i}}$  soient dans  $\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})$

On orthonormalise de la même manière les colonnes de  $AV$ . On a :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} u_1 & u_2 & \dots & u_d & v_1 & v_2 & \dots & v_{n-d} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} BU & AV \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccccccc} \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_1^T \tilde{u}_1}} & \lambda_{2,1} & \dots & \lambda_{d,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_2^T \tilde{u}_2}} & \dots & \lambda_{d,2} & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_d^T \tilde{u}_d}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_1^T \tilde{v}_1}} & \mu_{2,1} & \dots & \mu_{n-d,1} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_2^T \tilde{v}_2}} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_{n-d}^T \tilde{v}_{n-d}}} \end{array} \right]$$

où les  $\lambda$  et les  $\mu$  sont les coefficients après la normalisation. La matrice est bien diagonale par blocs ou les blocs sont dans  $GL_d(\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$  et  $GL_{n-d}(\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ , respectivement, puisque les matrices inverses sont aussi triangulaires et leurs coefficients sont dans  $\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})$ , suivant la même logique que celle décrite juste au dessus.

**26.**

On peut écrire

$$\begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 \\ 0 & R_2^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1} M Q \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} M_1 R_1 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} M_2 R_2 \end{bmatrix}$$

Cela montre que les matrices  $R_i^{-1} M_i R_i$  sont dans  $\mathcal{D}_{\rho_3}(S_d(\mathbb{R}))$  et  $\mathcal{D}_{\rho_3}(S_{n-d}(\mathbb{R}))$ . Une récurrence sur la dimension permet de conclure puisque si on a deux matrices orthogonales appartenant à  $\mathcal{D}_r(M_d(\mathbb{R}))$  et  $\mathcal{D}_r(M_{n-d}(\mathbb{R}))$  qui diagonalisent les  $R_i^{-1} M_i R_i$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 \\ 0 & R_2^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1} M Q \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_1 D_1 P_1^T & 0 \\ 0 & P_2 D_2 P_2^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T & 0 \\ 0 & P_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice orthogonale

$$Q \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

prouve le théorème car elle appartient à  $\mathcal{D}_{\min\{\rho_3, r\}}(M_n(\mathbb{R}))$ .