CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

$$\begin{aligned}
&\forall t \in [0,1], \quad 1+t^2 \leqslant 2 \\
\Rightarrow &\forall t \in [0,1], \quad (1+t^2)^n \leqslant 2^n \\
\Rightarrow &\forall t \in [0,1], \quad \frac{1}{(1+t^2)^n} \geqslant \frac{1}{2^n} \\
\Rightarrow & \qquad \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

2.

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^{+*} \\ t &\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \end{aligned}$$

est continue par morceaux, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{t^{2n}}$$

$t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ étant intégrable en $+\infty$ car $2n > 1$, f est intégrable et K_n est bien définie.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= [\arctan t]_0^x \\
&= \arctan x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{2}$$

3.

On utilise l'inégalité de convexité:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1+t^2 \geqslant 2t$$

Soit $x \geqslant 1$, $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_1^x \frac{1}{2^n t^n}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2^n}\left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\right]_1^x\\ &= \frac{1}{2^n}(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{n-1})\\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)2^n}\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)2^n}\end{aligned}$$

montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}(\frac{1}{n2^n})$$

4.

On a:

$$\begin{aligned}K_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t\\ &= I_n + O(\frac{1}{n2^n})\end{aligned}$$

puis d'après 1,

$$K_n = I_n + \underbrace{O(\frac{I_n}{n})}_{\mathrm{o}\,(I_n)}$$

i.e.

$$K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$$

5.

Soit $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t)\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient:

$$K_n = 2n(K_n - K_{n+1})$$

6.

On réécrit la récurrence précédente

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$$

D'où il vient facilement que

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \times 2} K_1 \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On applique la formule de Stirling

$$(2n-2)! \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{2(n-1)}{e})^{2(n-1)} \sqrt{4\pi(n-1)}$$

et

$$(n-1)!^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{n-1}{e})^{2(n-1)} 2\pi(n-1)$$

Après simplification on obtient

$$K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

7.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}t = \phi(t)$. On a $\phi'(t) = \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^n} \frac{1}{\sqrt{n}} \, \mathrm{d}u \\ \Rightarrow \sqrt{n} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^n} \, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

8.

On pose:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^{+*} \\ u &\mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^n} & \text{si } u \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } u \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

Les f_n sont continues par morceaux. La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ étant convexe sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathbb{R}, \quad (1+\frac{u^2}{n})^n &\geqslant 1 + n\frac{u^2}{n} \\ &= 1+u^2\end{aligned}$$

donc en posant $\phi(u) = \frac{1}{1+u^2}$,

i $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(u)| \leqslant \phi(u)$, intégrable en $+\infty$.

ii la suite de fonction (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\sqrt{n}I_n$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

9.

D'après la question 6,

$$\sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Le changement de variable $\phi(u) = \sqrt{2}u$ nous donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

puis par parité,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

10.

On voit que $t \mapsto t\varphi(t) = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ est sommable en $+\infty$, donc pour $X > x$,

$$\begin{aligned}&\forall t \geqslant x, \quad \varphi(t) \leqslant \frac{t}{x}\varphi(t) \\ \Rightarrow \quad &\int_x^X \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_x^X t\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_x^X \\ &= \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \to +\infty$ donne:

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\\ &= \frac{\varphi(x)}{x}\end{aligned}$$

11.

En suivant le fil de la question précédente, l'idée est de trouver une fonction qui minore $t \mapsto \varphi(t)$ et dont une primitive est $-\frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$. Le calcul montre que, en utilisant le fait que $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$,

$$\begin{aligned}\forall t \in [x, +\infty[, \quad (-\frac{t}{t^2+1}\varphi(t))' &= \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t)\\ &= \frac{t^4+2t^2-1}{t^4+2t^2+1}\varphi(t)\\ &\leqslant \varphi(t)\end{aligned}$$

Soit alors $X > x$.

$$\begin{aligned}&\int_x^X \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^X \varphi(t)\,\mathrm{d}t\\ \Leftrightarrow &-\frac{X}{X^2+1}\varphi(X) + \frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^X \varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \to +\infty$ donne:

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

12.

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

on a:

$$\begin{aligned}1 - \Phi(x) &= \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}\end{aligned}$$

d'après les deux questions précédentes.

13.

$$A = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$$

De plus, les évènements A_p sont clairement incompatibles deux à deux.

14.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A\cap\Omega)\\
&= \mathrm{P}(A\cap(\{R_n\geqslant x\}\cup\{R_n<x\}))\\
&= \mathrm{P}((A\cap\{R_n\geqslant x\})\cup(A\cap\{R_n<x\}))\\
&= \mathrm{P}(A\cap\{R_n\geqslant x\})+\mathrm{P}(A\cap\{R_n<x\}) \qquad \text{(les évènements } \{R_n\geqslant x\} \text{ et } \{R_n\geqslant x\} \text{ sont incompatibles)}\\
&= \mathrm{P}(A\cap\{R_n\geqslant x\})+\mathrm{P}(\bigcup_{p=1}^{n} A_p\cap\{R_n<x\})\\
&= \mathrm{P}(A\cap\{R_n\geqslant x\})+\sum_{p=1}^{n}\mathrm{P}(A_p\cap\{R_n<x\}) \qquad \text{(les évènements } A_p \text{ sont incompatibles)}\\
&\leqslant \mathrm{P}(\{R_n\geqslant x\})+\sum_{p=1}^{n}\mathrm{P}(A_p\cap\{R_n<x\}) \qquad (A\cap\{R_n\geqslant x\}\subset\{R_n\geqslant x\})
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
A_p\cap\{|R_n|<x\} &= A_p\cap\{|R_n|<x\}\cap\{|R_p|\geqslant 3x\}\\
&\subset A_p\cap\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\}
\end{aligned}$$

puisque $|R_n-R_p|\geqslant|R_p|-|R_n|$.

16.

On a

$$R_n-R_p=Z_{p+1}+\cdots+Z_n$$

Comme A_p est décrit en termes des VA $Z_1,\ldots,Z_p$, les évènements A_p et $\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\}$ sont indépendants puisque les Z_i le sont.

On en déduis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &\leqslant \mathrm{P}(\{|R_n|\geqslant x\})+\sum_{p=1}^{n}\mathrm{P}(A_p\cap\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\})\\
&= \mathrm{P}(\{|R_n|\geqslant x\})+\sum_{p=1}^{n}\mathrm{P}(A_p)\,\mathrm{P}(\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\})\\
&\leqslant \mathrm{P}(\{|R_n|\geqslant x\})+\sum_{p=1}^{n}\mathrm{P}(A_p)\max_{p\in[\![1,n]\!]}\mathrm{P}(\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\})\\
&= \mathrm{P}(\{|R_n|\geqslant x\})+\max_{p\in[\![1,n]\!]}\mathrm{P}(\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\})\sum_{p=1}^{n}\mathrm{P}(A_p)\\
&= \mathrm{P}(\{|R_n|\geqslant x\})+\max_{p\in[\![1,n]\!]}\mathrm{P}(\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\})\,\mathrm{P}(A)\\
&\leqslant \mathrm{P}(\{|R_n|\geqslant x\})+\max_{p\in[\![1,n]\!]}\mathrm{P}(\{|R_p-R_n|\geqslant 2x\}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

17.

L'idée est la suivante: si $|R_p - R_n| \geqslant 2x$, alors $|R_n| \geqslant x$ ou $|R_p| \geqslant x$. Autrement dit,

$$|R_p - R_n| \geqslant 2x \subset \{|R_p| \geqslant x\} \cup \{|R_n| \geqslant x\}$$

On passe aux probabilités:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|R_p - R_n| \geqslant 2x) &\leqslant \mathrm{P}(\{|R_p| \geqslant x\} \cup \{|R_n| \geqslant x\}) \\
&\leqslant \mathrm{P}(\{|R_p| \geqslant x\}) + \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) \\
&\leqslant 2 \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_i| \geqslant x\})
\end{aligned}$$

Cela étant valable pour tout p.

$$\max_{p \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(|R_p - R_n| \geqslant 2x) \leqslant 2 \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_i| \geqslant x\})$$

L'inégalité 1 donne alors bien ce qu'on voulait démontrer, à savoir:

$$\mathrm{P}(A) \leqslant 3 \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_i| \geqslant x\})$$

18.

$$\begin{aligned}
x_{n,n-k} &= -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}} \\
&= -\sqrt{n} + 2\sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} \\
&= \sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} \\
&= -x_{n,k}
\end{aligned}$$

Les x_{nk} partitionnent en fait l'intervalle $[-\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ en $n+1$ intervalles de même longueur.

19.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions B_n et φ sont bornées sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad |B_n(x) - \varphi(x)| &\leqslant |B_n(x)| + |\varphi(x)| \\
&\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Donc la borne supérieure $\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|$ est bien finie.

20.

Un peu d'observation montre que la fonction $B_n - \varphi$ est paire ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$). En découle directement que

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

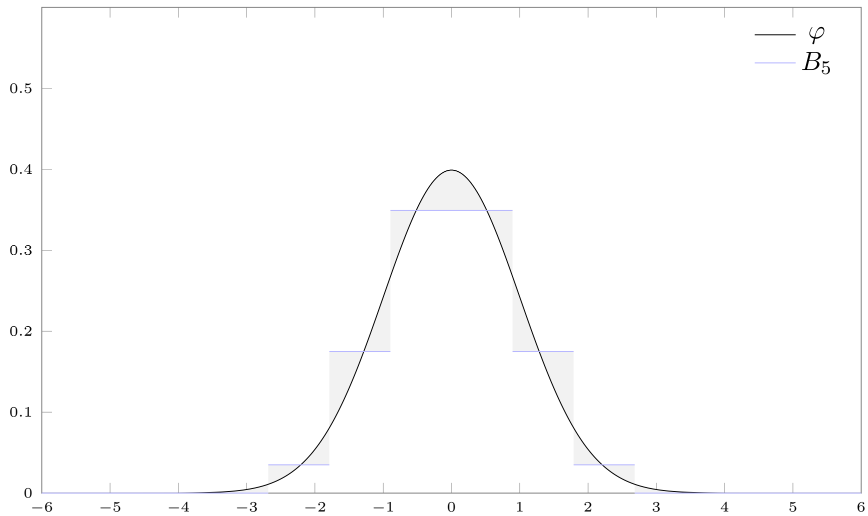

Figure 1. Représentation de φ et B_5

21.

Il suffit de se souvenir du triangle de Pascal, on a:

$$\sup_{k\in[\![0,n]\!]}\binom{n}{k}=\begin{cases}\binom{n}{p}=\binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si } n=2p \text{ pair}\\ \binom{n}{p}=\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{p+1} & \text{si } n=2p+1 \text{ impair}\end{cases}$$

De plus $\binom{n}{k}<\binom{n}{k+1}$ pour $k<\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ et $\binom{n}{k}>\binom{n}{k+1}$ pour $k\geqslant\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$. Tout cela vient immédiatement par récurrence en utilisant $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

On a donc B_n décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

22.

Déjà il faut s'intéresser au comportement de k quand n tend vers l'infini.

$$\begin{aligned}k\in I_n\Rightarrow & \quad x_{n,k}\geqslant 0\\ \Leftrightarrow & -\sqrt{n}+\frac{2k}{\sqrt{n}}\geqslant 0\\ \Leftrightarrow & \quad k\geqslant\frac{n}{2}\\ \Rightarrow & \quad k\geqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\end{aligned}$$

Cela montre que k tend vers l'infini et que $\frac{1}{k}=\mathrm{O}(\frac{1}{n})$

On a aussi:

$$\begin{aligned}k\in I_n\Rightarrow & \quad x_{n,k}\leqslant l+1\\ \Leftrightarrow & -\sqrt{n}+\frac{2k}{\sqrt{n}}\leqslant l+1\\ \Leftrightarrow & \quad k\leqslant\frac{(l+1)\sqrt{n}+n}{2}\\ \Rightarrow & \quad n-k\geqslant n\frac{1-(l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}}{2}\end{aligned}$$

$\frac{1-(l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}}{2}$ tend vers $\frac{1}{2} > 0$ donc est borné et > 0 pour n suffisamment grand et on peut écrire:

$$\frac{1}{n-k} \leqslant \frac{1}{n}\frac{2}{1-(l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}} = \mathrm{O}(\frac{1}{n})$$

On a ainsi, quand n tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} k!(n-k)! &= (\frac{k}{e})^k\sqrt{2\pi k}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{k}))(\frac{n-k}{e})^{n-k}\sqrt{2\pi(n-k)}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n-k})) \\ &= 2\pi e^{-n}k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{k}))(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n-k})) \\ &= 2\pi e^{-n}k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n})) \end{aligned}$$

23.

On a:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n}))}{2\pi e^{-n}k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n}))}$$

On sait que $\frac{1}{1+\mathrm{O}(\frac{1}{n})} = 1+\mathrm{O}(\frac{1}{n})$, d'où

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n}))}{k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}}$$

puis

$$\begin{aligned} B_n(x_{nk}) &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}\binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n^{n+1}(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n}))}{(2k)^{k+\frac{1}{2}}(2n-2k)^{n-k+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}(\frac{1}{n})}{(\frac{2k}{n})^{k+\frac{1}{2}}(2-\frac{2k}{n})^{n-k+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

24.

On a

$$\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} = -1+\frac{2k}{n}$$

On peut donc réécrire le résultat de la question précédente:

$$\begin{aligned} B_n(x_{nk}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}(\frac{1}{n})}{(1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}+\frac{n+1}{2}}(1-\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}+\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}(\frac{1}{n})}{(1-\frac{x_{nk}^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}(1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}(1-\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}} \qquad (2) \end{aligned}$$

Comme $x_{nk} \in [0, l]$ est une suite bornée, $\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}} &= (1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}} \\
&= \exp(-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}\ln(1+\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})) \\
&= \exp(-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}(\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}(\frac{x_{nk}^2}{n})) \\
&= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2} + \mathrm{O}(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\
&= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\exp(\mathrm{O}(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\
&= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1+\mathrm{O}(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\
&= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}))
\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{1}{(1-\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}} = \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

$$\begin{aligned}
(1-\frac{x_{nk}^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} &= \exp(-\frac{n+1}{2}\ln(1-\frac{x_{nk}^2}{n})) \\
&= \exp(-\frac{n+1}{2}(-\frac{x_{nk}^2}{n} + \mathrm{O}(\frac{x_{nk}^4}{n^2}))) \\
&= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2} + \frac{x_{nk}^2}{2n} + \mathrm{O}(\frac{x_{nk}^4}{n^2})) \\
&= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2})\exp(\frac{x_{nk}^2}{2n} + \mathrm{O}(\frac{x_{nk}^4}{n^2})) \\
&= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2})\exp(\mathrm{O}(\frac{1}{n})) \\
&= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2})(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n}))
\end{aligned}$$

On peut donc écrire le développement asymptotique 2:

$$B_n(x_{nk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

car $(1+\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}))(1+\mathrm{O}(\frac{1}{n})) = (1+\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}))$.

25.

On a

$$[0, l] \subset \bigcup_{k \in I_n} [x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}[$$

Ainsi

$$\sup_{x\in[0,l]} |B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \max_{k\in I_n} \sup_{[x_{nk}-\frac{1}{\sqrt{n}},x_{nk}+\frac{1}{\sqrt{n}}[} |B_n(x)-\varphi(x)| \tag{3}$$

Or $\forall x \in [x_{nk}-\frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk}+\frac{1}{\sqrt{n}}[$,

$$\begin{aligned}
|B_n(x)-\varphi(x)| &= \left|B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2}) - \varphi(x)\right| \\
&\leqslant \left|B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2}) - \varphi(x)\right| \\
&= \left|B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\right| + |\varphi(x_{nk})-\varphi(x)| \\
&\leqslant \left|B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\right| + \sup_{[0,l]}\left|\varphi'\right| |x_{nk}-x| \\
&\leqslant \left|B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\right| + \sup_{[0,l]}\left|\varphi'\right| \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à φ de classe C^1.

On peut repartir de 3 pour obtenir:

$$\sup_{x\in[0,l]} |B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \max_{k\in I_n} \left|B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\right| + \sup_{[0,l]}\left|\varphi'\right| \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On définit une suite $k_n \in I_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|B_n(x_{n,k_n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{n,k_n}^2}{2})\right| = \max_{k\in I_n}\left|B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})\right|$$

de manière à ce que

$$\sup_{x\in[0,l]} |B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \left|B_n(x_{n,k_n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x_{n,k_n}^2}{2})\right| + \sup_{[0,l]}\left|\varphi'\right| \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La question précédente appliquée à la suite $(k_n) \in I_n$ donne

$$|B_n(x_{n,k_n}) - \varphi(x_{n.k_n})| = \mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Soit $\epsilon > 0$. On conclut que

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_1 \Rightarrow \sup_{x\in[0,l]} |B_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \epsilon$$

26.

La question précédente vient de montrer que $\sup_{x\in[0,l]} |B_n(x)-\varphi(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc $B_n(l) \underset{n\to+\infty}{\to} \varphi(l)$ et donc comme $\varphi(l) > 0$,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_2 \Rightarrow B_n(l) \leqslant 2\varphi(l)$$

27.

Par décroissance de B_n et φ,

$\forall x \in [l, +\infty[, \quad (B_n(x), \varphi(x)) \in [0, \max\{B_n(l), \varphi(l)\}]^2 \Rightarrow |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \max\{B_n(l), \varphi(l)\} \leqslant 2\varphi(l) \leqslant \epsilon$

Ainsi

$$\sup_{x \in [l, +\infty[} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \epsilon$$

Pour $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$,

$$\Delta_n = \max\{\sup_{x \in [0,l]} |B_n(x) - \varphi(x)|, \sup_{x \in [l, +\infty[} |B_n(x) - \varphi(x)|\} \leqslant \epsilon$$

i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0$$

28.

On pose:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in [u_n, v_n] \\ 0 & \text{si } u \in I \setminus [u_n, v_n] \end{cases} \end{aligned}$$

Les $\tilde{f}_n$ sont continues par morceaux. La suite de fonctions f_n convergeant uniformément vers f, on

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_1 \Rightarrow \forall x \in I, \quad |f_n(x)| - |f(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$$

donc en posant $\phi = |f| + 1$,

i $\forall n \geqslant n_1, \quad \forall x \in [u, v], \quad \left|\tilde{f}_n(x)\right| \leqslant \phi(u)$, intégrable sur le segment [u,v].

ii la suite de fonction $(\tilde{f}_n)$ converge simplement sur $[u, v]$ vers la fonction f.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\int_u^v \tilde{f}_n$ converge et que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$$

29.

On a $Y_n \in \{0, 1\}$ et T_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ puisque les Y_i son indépendantes.

$$\begin{aligned} \int_{x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \\ &= \mathrm{P}(T_n = k) \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}
u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v &\Leftrightarrow u \leqslant \frac{\sum_i^n X_i}{\sqrt{n}} \leqslant v \\
&\Leftrightarrow u\sqrt{n} \leqslant \sum_i^n X_i \leqslant v\sqrt{n} \\
&\Leftrightarrow u\sqrt{n} + n \leqslant \sum_i^n X_i + n \leqslant v\sqrt{n} + n \\
&\Leftrightarrow u\sqrt{n} + n \leqslant \sum_i^n (X_i + 1) \leqslant v\sqrt{n} + n \\
&\Leftrightarrow \frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leqslant \sum_i^n \frac{X_i + 1}{2} \leqslant \frac{v\sqrt{n} + n}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leqslant T_n \leqslant \frac{v\sqrt{n} + n}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v) &= \mathrm{P}(\frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leqslant T_n \leqslant \frac{v\sqrt{n} + n}{2}) \\
&= \mathrm{P}(T_n \in J_n) \\
&= \sum_{j \in J_n} \mathrm{P}(T_n = j)
\end{aligned}$$

31.

Il est clair que J_n est un intervalle, posons $J_n = [\![a_n, b_n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J_n} \mathrm{P}(T_n = j) &= \sum_{j \in J_n} \int_{x_{nj} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{nj} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or

$$x_{n,a_n} = -\sqrt{n} + \frac{2a_n}{\sqrt{n}}$$

Par définition de a_n, on a $\frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant a_n < \frac{n+u\sqrt{n}}{2} + 1$, i.e $a_n = \lceil \frac{n+u\sqrt{n}}{2} \rceil$. Ou encore

$$u - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}} < u$$

ce qui montre que

$$x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u$$

De même, par définition de b_n, on a $\frac{n+v\sqrt{n}}{2} - 1 < b_n \leqslant \frac{n+v\sqrt{n}}{2}$, i.e $b_n = \lfloor \frac{n+v\sqrt{n}}{2} \rfloor$. Ou encore

$$v < x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui montre que

$$x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\to} v$$

La question 27 a montré la convergence uniforme des B_n vers φ. On applique la question 28 qui montre directement que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in J_n} \mathrm{P}(T_n = j) \\ &= \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(\mathrm{X_i}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Puis, comme les X_i sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\sigma^2(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i) \\ &= 1\end{aligned}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \geqslant v) \leqslant \frac{1}{v^2}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $v_1 > u$ tel que

$$\forall v \geqslant v_1, \quad \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon$$

Soit $v > v_1$ tel que $\frac{1}{v^2} \leqslant \epsilon$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant \mathrm{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) &= \mathrm{P}(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) + \mathrm{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > v) \\ &\leqslant \mathrm{P}(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) + \mathrm{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geqslant v) \\ \mathrm{P}(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant \mathrm{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) &\leqslant \mathrm{P}(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) + \epsilon\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\mathrm{P}(v \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) - \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \epsilon$$

Alors, $\forall n \geqslant n_1$,

$$\int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon \leqslant \mathrm{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x + 2\epsilon$$
$$\Rightarrow \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - 2\epsilon \leqslant \mathrm{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant u) \leqslant \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + 2\epsilon$$

On a montré que $\mathrm{P}(\frac{S_n}{\sqrt{v}} \geqslant u)$ converge, et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\frac{S_n}{\sqrt{v}} \geqslant u) &= \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \Phi(u)\end{aligned}$$