CONCOURS X 2023
MATHÉMATIQUES B - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

Tout découle directement du fait qu'une somme de 2 fonctions DSE est DSE.
Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$. $f+g$ est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f+g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)t^n$$

Soit $(P,Q) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])^2$. $P+Q$ est DSE sur U_ρ et

$$\begin{aligned}\forall a \in U_\rho, \quad (P+Q)_{|t=a} &= P_{|t=a} + Q_{|t=a} \\ &= f_0(a) + f_1(a)X + \cdots + f_n(a)X^n + g_0(a) + g_1(a)X + \cdots + g_n(a)X^n \\ &= f_0(a) + g_0(a) + (f_1(a)+g_1(a))X + \cdots + (f_n(a)+g_n(a))X^n \\ &= (f_0+g_0)(a) + (f_1+g_1)(a)X + \cdots + (f_n+g_n)(a)X^n\end{aligned}$$

Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(M_{n,m}(\mathbb{R}))^2$. $f+g$ est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f+g)(t) = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})(t) & (a_{12}+b_{12})(t) & \dots & (a_{1m}+b_{1m})(t) \\ (a_{21}+b_{21})(t) & (a_{22}+b_{22})(t) & \dots & (a_{2m}+b_{2m})(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1})(t) & (a_{n2}+b_{n2})(t) & \dots & (a_{nm}+b_{nm})(t) \end{bmatrix}$$

2.

Un produit de deux fonctions DSE est DSE et: Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$. fg est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})t^n$$

A cela on ajoute le fait qu'une somme de n fonctions DSE est encore DSE donc: Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(M_n(\mathbb{R}))^2$. fg est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (a_{1i}b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{1i}b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{1i}b_{in})(t) \\ \sum_{i=1}^n (a_{2i}b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{2i}b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{2i}b_{in})(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n (a_{ni}b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{ni}b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{ni}b_{in})(t) \end{bmatrix}$$

3.

Les coefficients d'un DSE sont déterminés de manière unique par f à travers la formule:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$$

Si le DSE sur $U_r, r \leqslant \rho$ est nul, la restriction de f à U_r est nulle, et donc les coefficients de son DSE sur U_ρ sont tous nuls, et f est nulle sur U_ρ. Cela montre l'injectivité du morphisme d'anneaux:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\to \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f|_{U_r} \end{aligned}$$

4.

Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}, \quad r < \rho$. L'application:

$$\begin{aligned} \|\|_r : \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n \end{aligned}$$

est bien définie.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| \, r^n \\ &= |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n \\ &= |\lambda| \, \|f\|_r \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|f\|_r = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0 \qquad (\text{car } r > 0) \\ &\Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \, r^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \\ &= \|f\|_r + \|g\|_r \end{aligned}$$

ce qui finit de montrer que $\|.\|_r$ est une norme sur $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$; de plus elle est sous-multiplicative car

$$\begin{aligned}
\|fg\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_k|\, r^k\, |b_{n-k}|\, r^{n-k} \\
&= \|f\|_r \|g\|_r
\end{aligned}$$

5.

On a:

$$\begin{aligned}
\forall t \in U_r, \quad |f_n(t)| &= \left|\sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p\right| \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}|\,|t|^n \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}|\, r^n \\
&= \|f_n\|_r
\end{aligned}$$

qui est par hypothèse le terme d'une série numérique convergente. Donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement vers f telle que

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p$$

A t fixé dans U_r, $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum_{p\geqslant 0} a_{np} t^p$ converge absolument et la somme est majorée par $\|f_n\|_r$, qui est le terme d'une série convergente. On peut inverser les sommations dans la série numérique double ci-dessus et

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{np}) t^p \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\|f - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_r &= \|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n\|_r \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_r \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

car c'est le reste d'une série numérique convergente.

6.

a. Quitte à diviser f par $f(0) \neq 0$, on peut maintenant supposer $f(0) = 1$ car

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

b. $fg \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ et sa somme et le produit de cauchy de $f(t)$ et $g(t)$:

$$(fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k} t^n$$

donc par unicité du DSE,

$$\begin{aligned} \forall t \in U_r, f(t)g(t) = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \quad \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

c. La définition du rayon de convergence d'une série entière est

$$R = \sup\{r \geqslant 0, |a_n|\, r^n \text{ est bornée}\}$$

donc comme $R_f \geqslant \rho > s > 0$,

$$\begin{aligned} (a_n s^n) \text{ bornée} &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n|\, s^n \leqslant M \\ &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant M \frac{1}{s^n} \leqslant (\underbrace{\frac{\max\{1, M\}}{s}}_{=c})^n \end{aligned}$$

d. On a $|b_0| = 1 \leqslant (2c)^0$, puis supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n-1 \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} |bn| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|\, |b_{n-k}| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} c^k (2c)^{n-k} \\ &= c^n \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \\ &= c^n \frac{1-2^n}{1-2} \\ &\leqslant c^n 2^n \end{aligned}$$

e. On a montré que

$$|b_n| \frac{1}{(2c)^n} \leqslant 1$$

donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ vérifie $R_g \geqslant \frac{1}{2c} > 0$ et donc g est bien définie sur un intervalle de longueur non nulle et

$$\forall t \in U_{\min\{R_g,\rho\}}, f(t)g(t) = 1$$

7.

On a $0, 1 \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$, qui est de plus stable par opposé, somme, produit. De plus, si $f, g \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$, avec $f \neq 0$, on peut poser $f(t) = t^p \tilde{f}(t)$ avec $\tilde{f}(0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} fg = 0 &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad f(t)g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad \tilde{f}(t)g(t) = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho, R(\frac{1}{\tilde{f}})\}} (\neq \varnothing), \quad \frac{1}{\tilde{f}(t)}\tilde{f}(t)g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho, R(\frac{1}{\tilde{f}})\}}, \quad g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad g(t) = 0 \qquad \text{(d'après le raisonnement déjà fait en 3)} \\ &\Leftrightarrow g = 0_{\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est bien un anneau intègre.

8.

a. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X]) &\to \mathbb{R}^+ \\ P = f_0 + f_1 X + \cdots + f_n X^n &\mapsto \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_r s^i \end{aligned}$$

est bien définie car $r < \rho$.

$$\begin{aligned} \|\lambda P\|_{rs} &= \sum_{i=0}^{n} \|\lambda f_i\|_r s^i \\ &= |\lambda| \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_r s^i \\ &= |\lambda| \, \|P\|_{rs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P + Q\|_{rs} &= \sum_{i=0}^{n} \|f_i + g_i\|_r s^i \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} (\|f_i\|_r + \|g_i\|_r) s^i \\ &= \|P\|_{rs} + \|Q\|_{rs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|P\|_{rs}=0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}\|f_i\|_r s^i=0\\ &\Leftrightarrow \forall i\in[\![0,n]\!],\quad \|f_i\|_r=0 \qquad (s>0)\\ &\Leftrightarrow \forall i\in[\![0,n]\!],\quad f_i=0\\ &\Leftrightarrow P=0\end{aligned}$$

Donc $\|.\|_{rs}$ est bien une norme.

b.

$$\begin{aligned}PQ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f_i g_j X^{i+j}\\ &= \sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l} f_j g_{l-j} X^l\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|PQ\|_{rs} &= \|\sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l} f_j g_{l-j} X^l\|_{rs}\\ &= \sum_{l=0}^{n+m}\|\sum_{j=0}^{l} f_j g_{l-j}\|_r s^l\\ &\leqslant \sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l}\|f_j g_{l-j}\|_r s^l\\ &\leqslant \sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l}\|f_j\|_r\|g_{l-j}\|_r s^l \qquad (\mathrm{c}f.\ 4)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\|f_i\|_r\|g_j\|_r s^{i+j}\\ &= \|P\|_{rs}\|Q\|_{rs}\end{aligned}$$

9.

a. A t fixé, on fait la division euclidienne du polynôme $A(t)$ par $B(t)\neq 0$, ce qui donne un unique couple$(Q(t),R(t))\in(\mathbb{R}_{n-d}[X]\times\mathbb{R}_{d-1}[X])$. On définit ainsi implicitement, de manière unique, une fonction

$$\begin{aligned}U_\rho &\to \mathbb{R}_{n-d}[X]\times\mathbb{R}_{d-1}[X]\\ t &\mapsto (Q(t),R(t))\end{aligned}$$

Reste à montrer que les fonctions Q,R sont dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ et $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$, respectivement. Cela vient du fait que B est unitaire car alors, en notant respectivement a,b,q,r les fonctions composantes de A,B,Q,R respectivement, on obtient par identification des coefficients pour tout

t:

$$\begin{aligned} q_{n-d} \times 1 &= a_n \\ q_{n-d-1} \times 1 &= a_{n-1} - q_{n-d} b_{d-1} \\ &\vdots \\ q_0 \times 1 &= a_d - \sum_{p=1}^{\min\{d,n-d\}} q_p b_{d-p} \end{aligned} \tag{1}$$

et

$$R(t) = A(t) - B(t)Q(t)$$

montre, par une récurrence immédiate, puisque $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$ est un anneau, que Q puis R sont dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ et $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$, respectivement.

b. On multiplie les équations 1 par une puissance de X adéquate pour reconstruire la fin de la fonction A:

$$\begin{aligned} q_{n-d} X^n &= a_n X^n \\ q_{n-d-1} X^{n-1} &= a_{n-1} X^{n-1} - q_{n-d} X^{n-d} b_{d-1} X^{d-1} \\ &\vdots \\ q_0 X^d &= a_d X^d - \sum_{p=1}^{\min\{d,n-d\}} q_p X^p b_{d-p} X^{d-p} \end{aligned}$$

En ajoutant on obtient:

$$\begin{aligned} X^d Q &= \sum_{i=d}^{n} a_i X^i - \sum_{i=d}^{n-1} \underbrace{\sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l}_{\text{coeff. } i \text{ du produit } Q(B-X^d)} \\ \Leftrightarrow X^d Q + \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l &= \sum_{i=d}^{n} a_i X^i \end{aligned} \tag{2}$$

On remarque que:

$$\begin{aligned} \|X^d Q + \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l\|_{rs} &\geqslant \|X^d Q\|_{rs} - \|\sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l\|_{rs} \\ &= s^d \|Q\|_{rs} - \|\sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l\|_{rs} \\ &\geqslant s^d \|Q\|_{rs} - \|\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l\|_{rs} \\ &= s^d \|Q\|_{rs} - \|Q(B - X^d)\|_{rs} \\ &\geqslant s^d \|Q\|_{rs} - \|Q\|_{rs} \|B - X^d\|_{rs} \qquad \text{(cf. 8.b)} \end{aligned}$$

On prend maintenant la $\|.\|_{rs}$ de l'équation 2 pour avoir:

$$\begin{aligned}\|Q\|_{rs}(s^d - \|B - X^d\|_{rs}) &\leqslant \|\sum_{i=d}^{n} a_i X^i\|_{rs} \\ &\leqslant \|A\|_{rs}\end{aligned}$$

on obtient la majoration voulue si $s^d - \|B - X^d\| \geqslant 0$

$$\|Q\|_{rs} \leqslant \frac{\|A\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}}$$

De plus on a:

$$A = \underbrace{QX^d}_{\text{valuation}\geqslant d} + Q(B - X^d) + R$$

donc $\forall i \in [\![0, d-1]\!]$,

$$\text{coeff. } i \text{ de } Q(B - X^d) \times X^i + r_i X^i = a_i X^i$$

En sommant puis en prenant la norme $\|.\|_{rs}$,

$$\begin{aligned} & \|R\|_{rs} - \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \leqslant \|A\|_{rs} \\ \Rightarrow \quad & \|R\|_{rs} \leqslant \|A\|_{rs} + \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \\ \Rightarrow \quad & \|R\|_{rs} \leqslant \|A\|_{rs} + \frac{\|A\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}} \\ \Leftrightarrow \quad & \|R\|_{rs} \leqslant \frac{s^d\|A\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}} \end{aligned}$$

10.

R étant de degré $\leqslant d-1$ et F unitaire, $F + R$ est unitaire de degré d. De plus la division euclidienne:

$$\begin{aligned} P_{|t=0} &= Q_{|t=0}F_{|t=0} + R_{|t=0} \\ &= Q_{|t=0}X^d + R_{|t=0} \end{aligned}$$

et le fait que $P_{|t=0}$ est de valuation d, montre par identification des coefficients de $X^j, j \leqslant d$ montre que $R_{|t=0} = 0$.

On voit aussi que $q_0(t=0) = 1$, où $q_0 \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est le coefficient constant de Q.

11.

Ecrivons:

$$Q_0 = q_{0,0} + q_{0,1}X + \cdots + q_{0,n-d-1}X^{n-1} + X^{n-d}$$

de sorte que

$$\|Q_0 - 1\|_{ss} = \|q_{0,0} - 1\|_s + \|q_{0,1}\|_s s + \cdots + \|q_{0,n-d-1}\|_s s^{n-d-1} + s^{n-d}$$

Il faut remarquer que du fait de la continuité en 0 d'une somme de série entière,

$$\lim_{r\to 0}\|f\|_r = |f(0)|$$

Ainsi on a:

$$\forall j \in [\![1, n-d-1]\!], \quad \lim_{s\to 0}\|q_{0,j}\|_s s^j = 0$$

et aussi

$$\lim_{s\to 0}\|q_{0,0} - 1\|_s = 0$$

puisque $q(0,0)(t=0) = 1$, d'après la remarque à la fin de la question 10. Ainsi,

$$\lim_{s\to 0}\|Q_0 - 1\|_{ss} = 0$$

On fixe $s \in]0, \rho[$ tel que

$$\forall r \leqslant s, \quad \|Q_0 - 1\|_{ss} \leqslant \frac{1}{6}$$

par croissance de $r \mapsto \|f\|_r$, on a même:

$$\forall r \leqslant s, \quad \|Q_0 - 1\|_{rs} \leqslant \|Q_0 - 1\|_{ss} \leqslant \frac{1}{6}$$

Ensuite,

$$s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{rs} = \|f_0\|_r s^{-d} + \|f_1\|_r s^{-d+1} + \cdots + \|f_{d-1}\|_r s^{-1}$$

Comme on a

$$\forall j \in [\![0, d-1]\!], \quad f_j(0) = 0$$

d'après ce qui précède

$$\lim_{r\to 0} s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{rs} = 0$$

De la même manière,

$$\lim_{r\to 0} s^{-d}\|R_0\|_{rs} = 0$$

On fixe $r < s$ tel que:

$$\alpha_0 = s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{rs} \leqslant \frac{1}{6}$$
$$\epsilon_0 = s^{-d}\|R_0\|_{rs} \leqslant \frac{1}{12}$$

On a aussi:

$$\beta_0 = \|Q_0 - 1\|_{rs} \leqslant \frac{1}{6}$$

Pour ce r et ce s on a bien $\alpha_0 + 2\epsilon_0 \leqslant \frac{1}{3}$ et $\beta_0 + \epsilon_0 \leqslant \frac{1}{3}$.

12.

On a:

$$\begin{aligned} Q_{i+1}F_{i+1} + R_{i+1} &= P \\ &= Q_iF_i + R_i \\ &= Q_i(F_{i+1} - R_i) + R_i \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$(1 - Q_i)R_i = (Q_{i+1} - Q_i)F_{i+1} + R_{i+1}$$

13.

On a:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= s^{-d}\|F_{i+1} - X^d\|_{rs} \\ &= s^{-d}\|F_i - X^d + R_i\|_{rs} \\ &\leqslant s^{-d}\|F_i - X^d\|_{rs} + s^{-d}\|R_i\|_{rs} \\ &= \alpha_i + \epsilon_i \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (1 - Q_i)R_i &= (Q_{i+1} - Q_i)F_{i+1} + R_{i+1} \\ &= R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d + (Q_{i+1} - Q_i)(F_{i+1} - X^d) \\ \Rightarrow \|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} &\geqslant \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)(F_{i+1} - X^d)\|_{rs} \\ &\geqslant \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs}\|(F_{i+1} - X^d)\|_{rs} \\ &= \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs}s^d\alpha_{i+1} \end{aligned} \tag{3}$$

Or on remarque que comme R_{i+1} est de degré $< d$, on a (on perd des termes positifs)

$$\begin{aligned} \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} &\geqslant \|(Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} \\ &= \|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs}s^d \end{aligned}$$

Reprenons en 3:

$$\begin{aligned} \|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} &\geqslant s^d\|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs}s^d\alpha_{i+1} \\ &= s^d\|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs}(1 - \alpha_{i+1}) \\ &= s^d\|Q_{i+1} - 1 + 1 - Q_i\|_{rs}(1 - \alpha_{i+1}) \\ &\geqslant s^d(\beta_{i+1} - \beta_i)(1 - \alpha_{i+1}) \end{aligned}$$

Puisque $\|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} \leqslant \|1 - Q_i\|_{rs}\|R_i\|_{rs} = s^d\beta_i\epsilon_i$ on a bien

$$\beta_{i+1} - \beta_i \leqslant \frac{\beta_i\epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}$$

enfin on repart de 3 pour obtenir:

$$\begin{aligned}\|R_{i+1}\|_{rs} &\leqslant \|Q_{i+1}-Q_i\|_{rs} s^d \alpha_{i+1} + s^d \beta_i \epsilon_i \\ &\leqslant \frac{\beta_i\epsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} s^d \alpha_{i+1} + s^d \beta_i\epsilon_i \\ &= \frac{\beta_i\epsilon_i s^d}{1-\alpha_{i+1}}\end{aligned}$$

d'où

$$\epsilon_{i+1} \leqslant \frac{\beta_i\epsilon_i}{1-\alpha_{i+1}}$$

14.

On fait une récurrence sur $i \in \mathbb{N}$ sur les 3 inégalités en même temps car elles semblent difficiles à découpler. La propriété est triviale pour $i = 0$. Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $i \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &\leqslant \alpha_i + \epsilon_i \\ &\leqslant \alpha_0 + 2(1-2^{-i})\epsilon_0 + 2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \alpha_0 + 2(1-2^{-i-1})\epsilon_0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_{i+1} &\leqslant \beta_i + \frac{\beta_i\epsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \\ &\leqslant \beta_0 + (1-2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i\epsilon_i}{1-\alpha_0-2(1-2^{-i-1})\epsilon_0} \\ &= \beta_0 + (1-2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i\epsilon_i}{1-\alpha_0-2\epsilon_0+2^{-i}\epsilon_0} \\ &\leqslant \beta_0 + (1-2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i\epsilon_i}{1-\alpha_0-2\epsilon_0} \\ &\leqslant \beta_0 + (1-2^{-i})\epsilon_0 + \frac{3}{2}\beta_i\epsilon_i \qquad (4)\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\beta_i\epsilon_i &\leqslant 2^{-i}\beta_0\epsilon_0 + (1-2^{-i})2^{-i}\epsilon_0^2 \\ &\leqslant 2^{-i}\beta_0\epsilon_0 + (1-2^{-i})2^{-i}(\frac{1}{3}-\beta_0)\epsilon_0 \\ &= 2^{-2i}\beta_0\epsilon_0 - \frac{1}{3}2^{-2i}\epsilon_0 + \frac{1}{3}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \underbrace{(\beta_0-\frac{1}{3})}_{\leqslant 0}2^{-2i}\epsilon_0 + \frac{1}{3}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \frac{1}{3}2^{-i}\epsilon_0\end{aligned}$$

En reprenant en 4, on obtient:

$$\begin{aligned}\beta_{i+1} &\leqslant \beta_0 + (1-2^{-i})\epsilon_0 + \frac{1}{2}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \beta_0 + (1-2^{-i-1})\epsilon_0\end{aligned}$$

Enfin on réutilise pour la dernière inégalité les calculs que l'on vient de faire:

$$\begin{aligned}\epsilon_{i+1} &\leqslant \frac{\beta_i\epsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= 2^{-i-1}\epsilon_0\end{aligned}$$

15.

a. On a

$$\begin{aligned}s^{-d}\|R_i\|_{rs} = s^{-d}\|F_{i+1} - F_i\|_{rs} &= \epsilon_i \\ &\leqslant 2^{-i}\epsilon_0\end{aligned}$$

cela montre, en notant $r_{i,j}, j \in [\![1, d-1]\!]$ les fonctions coefficients de R_i, que

$$\begin{aligned}&\forall i \in \mathbb{N}, \quad s^j\|r_{i,j}\|_r \leqslant \|R_i\|_{rs} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant 2^{-i}\epsilon_0 s^d \\ \Leftrightarrow \quad &\forall i \in \mathbb{N}, \quad \|r_{i,j}\|_r \leqslant 2^{-i}\epsilon_0 s^{d-j}\end{aligned}$$

c'est le terme d'une série numérique convergente; d'après la question 5, $\sum_{i\geqslant 0} r_{i,j}$ converge vers $g_j \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$. Or

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} r_{i,j} &= \sum_{i=0}^{n} f_{i+1,j} - f_{i,j} \\ &= f_{n+1,j} - f_j\end{aligned}$$

montre que la fonction composante $f_{i,j}$ converge vers une fonction de $g_j + f_j \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$, et ce pour tout $j \in [\![0, d-1]\!]$. Mais alors, comme

$$F_i = f_{i,0} + f_{i,1}X + \cdots + f_{i,d-1}X^{d-1} + X^d$$

$$\|F_i - (\sum_{j=0}^{d-1}(f_j+g_j)X^j + X^d)\|_{rs} = \sum_{j=0}^{d-1}\|f_{i,j} - f_j - g_j\|_r s^j \underset{i\to+\infty}{\to} 0$$

montre que F_i converge vers

$$\sum_{j=0}^{d-1}(f_j+g_j)X^j + X^d \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$$

b. De la division euclidienne $P = Q_iF_i + R_i$, on déduis des équations similaires aux équations 1, qui montrent , dans cet ordre, que les fonctions composantes $q_{i,n-d}, q_{i,n-d-1}, \dots, q_{i,0}$ de Q_i convergent pour la norme $\|.\|_r$ dans $\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$. Ainsi la suite Q converge pour $\|.\|_{rs}$ vers un certain $G \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_{n-d}[X])$.

Par passage à la limite on obtient :

$$P = FG$$

16.

On a montré le théorème dans le cas $\lambda = 0$, P unitaire et $\frac{P_{|t=0}}{X^d}(0) = f_d(0) = 1$. En fait, quitte à remplacer $\beta_i = \|Q_i - 1\|_{rs}$ par $\beta_i = \|Q_i - f_d(0)\|_{rs}$ on peut obtenir le résultat à la seule condition que $f_d(0) \neq 0$(hypothèse utilisée dans la question 10); il faut alors partir de $F_0 = X^d$ par ailleurs pour s'assurer $(F_i)_{|t=0} = X^d$ et F_i unitaire[1]. Ainsi, dans le cas général, posons $\frac{P_{|t=0}}{(X-\lambda)^d}(\lambda) = \gamma \neq 0$, en remarquant que

$$\begin{aligned} &P \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X]) \text{ unitaire, avec } \lambda \text{ racine de } P_{|t=0} \text{ de multiplicité } d \\ \Leftrightarrow\ &P(X+\lambda) \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X]) \text{ unitaire, avec } 0 \text{ racine de } P_{|t=0} \text{ de multiplicité } d \end{aligned}$$

On trouve ainsi $F \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$ et $G \in \mathcal{D}_{n-d}(\mathbb{R}_d[X])$ tel que $P(X+\lambda) = FG$ et $F_{|t=0} = X^d$. Mais alors on a

$$P = F(X-\lambda)G(X-\lambda)$$

avec $F(X-\lambda)_{|t=0} = (X-\lambda)^d$ ce qui démontre le théorème.

17.

On applique le théorème précédent à $X^2 - f \in \mathcal{D}_\rho(R_2[X])$, qui nous fournit $F, G \in \mathcal{D}_\rho(R_1[X])$ tel que $P = FG$ et $F_{t=0} = X - \sqrt{f(0)}$. Posons $F = X - g_1$ et $G = X - g_2$, on a:

$$X^2 - f = X^2 - (g_1 + g_2)X + g_1g_2$$

Cela montre que $g_1 = -g_2$ et $g_1^2 = f$ sur U_ρ.

De plus f est continue en 0, donc il existe $\rho_f \leqslant \rho$ tel que $\forall t \in U_{\rho_f}, \quad f(t) > 0$. Sur cet intervalle on peut donc écrire $g_1 = \sqrt{f}$.

18.

$M_{|t=0}$ est une matrice symétrique réelle, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

19.

On A

$$\chi = FG$$

avec $\chi, F \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X])$, unitaires donc $G = 1$ et $\chi = F$.

$M_{|t=0}$ est diagonalisable car symétrique réelle, et comme elle possède une unique valeur propre λ de multiplicité n, $M_{|t=0} = \lambda I_n$. $M - \lambda I_n$ est donc une matrice symétrique dont les coefficients

[1] On n'utilise pas le fait que P est unitaire, mais on n'utilise pas non plus, sauf erreur de ma part, l'hypothèse de l'énoncé "f_d est la fonction constante égale à 1" (à part pour s'assurer que F_0 est unitaire). Toutefois pour se rammener à ce cas, on pourrait alors penser à multiplier P par $\frac{1}{f(d)}$ en utilisant la question 6, mais dans ce cas P n'est plus unitaire. Erreur d'énoncé ?

sont des sommes de séries entières nulles en 0, donc de la forme $t\sum_{p=0}^{+\infty} a_n t^n$. Autrement dit, $\exists M_0 \in \mathcal{D}_\rho(S_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{D}_{\rho_1}(S_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$M = \lambda I_n + M_0$$

20.

On a:

$$\begin{aligned}\chi_{|t=0} &= F_{|t=0} G_{|t=0} \\ &= (X-\lambda)^d G_{|t=0}\end{aligned}$$

et de plus $G_{|t=0}(\lambda) \neq 0$. On diagonalise maintenant $M_{|t=0}$:

$$M_{|t=0} = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_{n-d} \end{bmatrix} P^T \quad \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{taille } d \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{taille } n-d \end{array}$$

avec $P \in O_n(\mathbb{R})$. On peut vérifier facilement qu'on a alors:

$$\begin{aligned} B_0 &= G_{|t=0}(M_{|t=0}) \\ &= P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & G(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & G(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & G(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix} P^T \\ &= P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} P^T \end{aligned}$$

puis

$$
\begin{aligned}
A_0 &= G_{|t=0}(M_{|t=0}) \\
&= P \begin{bmatrix}
F(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & F(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & F(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d})
\end{bmatrix} P^T \\
&= P \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d})
\end{bmatrix} P^T
\end{aligned}
$$

On pose alors

$$
U = P \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0
\end{bmatrix}
$$

et

$$
V = P \begin{bmatrix}
0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1
\end{bmatrix}
$$

Si on pose

$$
P = \left[P_1 \middle| P_2 \middle| \dots \middle| P_n \right]
$$

Il est clair que $\operatorname{Im}(A_0V) = \operatorname{Im} A_0 = \operatorname{vect}(P_{d+1}, P_{d+2}, \dots, P_n)$ et $\operatorname{Im}(B_0U) = \operatorname{Im} B_0 = \operatorname{vect}(P_1, P_2, \dots, P_d)$ et

$$\left[B_0U \middle| A_0V \right] = P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix}$$

est inversible.

21.

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : U_{\rho_1} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det Q = \det \left[BU \middle| AV \right] \end{aligned}$$

est continue et $\varphi(0) \neq 0$. Donc il existe $\rho_2' \leqslant \rho_1$ sur lequel $\det Q > 0$, i.e. $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. De plus, en notant C la matrice des cofacteurs de Q, on a:

$$\forall t \in U_{\rho_2'}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} C^T$$

Comme $\mathcal{D}_{\rho_2'}(M_n(\mathbb{R}))$ est un anneau, il est clair que l'application $t \mapsto C^T \in \mathcal{D}_{\rho_2'}(M_n(\mathbb{R}))$. De même, $\varphi \in \mathcal{D}_{\rho_2'}(\mathbb{R})$, D'après le résultat de la question 6, on peut trouver $\rho_2 \leqslant \rho_2'$ et $g \in \mathcal{D}_{\rho_1}(\mathbb{R})$, tel que

$$\forall t \in U_{\rho_2}, \quad g(t) = \frac{1}{\det Q}$$

Ce la montre que

$$\begin{aligned} U_{\rho_2} &\to M_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto Q^{-1} = g(t) C^T \end{aligned}$$

est dans $\mathcal{D}_{\rho_2}(M_n(\mathbb{R}))$, ou encore $Q \in GL_n(\mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R}))$.

22.

a. On a

$$\left[B_aU \middle| A_aV \right] \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{Im}(B_aU) + \operatorname{Im}(A_aV) = \mathbb{R}^n$$

De plus $\dim(B_aU) \leqslant d$ et $\dim(A_aV) \leqslant n - d$, donc la seule possibilité est que

$$\operatorname{Im}(B_aU) + \operatorname{Im}(A_aV) = \operatorname{Im}(B_aU) \oplus (\operatorname{Im} A_aV) = \mathbb{R}^n$$

b. Il est direct que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(B_aU) &\subset \mathrm{Im}(B_a)\\ \mathrm{Im}(A_aV) &\subset \mathrm{Im}(A_a)\end{aligned}$$

De plus comme $\left[B_aU \middle| A_aV\right] \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathrm{rang}(B_aU) &= d\\ \mathrm{rang}(A_aV) &= n-d\end{aligned}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\begin{aligned}0 = \chi_{|t=a}(M_a) &= F_{|t=a}(M_a)G_{|t=a}(M_a)\\ &= A_aB_a\\ &= B_aA_a\end{aligned}$$

montre les inclusions

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(A_a) &\subset \ker B_a\\ \mathrm{Im}(B_a) &\subset \ker A_a\end{aligned}$$

Enfin le théorème du rang donne les relations:

$$\begin{aligned}\dim(\ker B_a) &= n - \mathrm{rang}(B_a) \leqslant n-d\\ \dim(\ker A_a) &= n - \mathrm{rang}(A_a) \leqslant d\end{aligned}$$

qui permettent de conclure

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(B_aU) = \mathrm{Im}(B_a) &= \ker A_a\\ \mathrm{Im}(A_aV) = \mathrm{Im}(A_a) &= \ker B_a\end{aligned}$$

23.

On fait un calcul par blocs:

$$\begin{aligned}MQ &= M\left[BU \middle| AV\right]\\ &= \left[MBU \middle| MAV\right]\\ &= \left[BMU \middle| AMV\right]\end{aligned}$$

car $B = F(M)$ et $A = G(M)$ commutent avec M.

On pose

$$MP = \underbrace{\left[M_1'\right.}_{d}\underbrace{\left|M_2'\right]}_{n-d}$$

de sorte que

$$MQ = \left[BM_1' \middle| AM_2' \right]$$

On peut appliquer $\mathrm{Im}(BU) = \mathrm{Im}(B)$ successivement à toutes les colonnnes de M_1' pour construire une matrice $M_1 \in M_d(\mathbb{R})$ tel que:

$$BM_1' = BUM_1$$

De même comme $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AV)$, il existe $M_2 \in M_{n-d}(\mathbb{R})$ tel que

$$AM_2' = AVM_2$$

Mais alors on a:

$$\begin{aligned} MQ &= \left[BUM_1 \middle| AVM_2 \right] \\ &= \left[BU \middle| AV \right] \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme les 3 matrices $Q^{-1}, Q, M \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_n(\mathbb{R}))$, on a $M_1 \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_d(\mathbb{R}))$ et $M_2 \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_{n-d}(\mathbb{R}))$.

24.

Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On fixe $a \in U_{\rho_2}$.

$$(B_a UX)^T A_a VY = X^T U^T B_a^T A_a VY$$

Mais $B_a = F_{|t=a}(M_a)$ est symétrique, donc

$$\begin{aligned} (B_a UX)^T A_a VY &= X^T U^T \underbrace{B_a A_a}_{=0} VY \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\mathrm{Im}(A_a) \subset \ker B_a$.

25.

On applique le procédé d'orthornormalisation de Schmidt séparément aux colonnes de BU puis aux colonnes de AV. Etant donné que $\mathrm{Im}(BU)$ et $\mathrm{Im}(Av)$ sont orthogonaux, on obtiendra une base de $\mathbb{R}^n$.

On note

$$BU = \left[e_1 \middle| e_2 \middle| \ldots \middle| e_d \right]$$

On rappelle qu'on cherche le vecteur i de la base orthonormale sous la forme

$$\tilde{u}_i = e_i + \lambda_{i,i-1} u_{i-1} + \lambda_{i,i-2} u_{i-2} + \ldots \lambda_{i,1} u_1$$

on a:

$$\forall k \in [\![1, i-1]\!], \quad u_i^T u_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_{i,k} = -e_i^T u_k$$

Les coefficient λ sont dans $\mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$ par une récurrence immédiate, car $\mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$ est un anneau. Ensuite on norme le vecteur obtenu:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_i^T \tilde{u}_i}} \tilde{u}_i$$

Or on peut trouver $\rho_3 \leqslant \rho_2$ d'après les questions 17 et 6 pour que tous les $\frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_i^T \tilde{u}_i}}$ soient dans $\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})$

On orthonormalise de la même manière les colonnes de AV. On a:

$$\left[u_1 \middle| u_2 \middle| \dots \middle| u_d \middle| v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_{n-d} \right] =$$

$$\left[BU \middle| AV \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_1^T \tilde{u}_1}} & \lambda_{2,1} & \cdots & \lambda_{d,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_2^T \tilde{u}_2}} & \cdots & \lambda_{d,2} & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{u}_d^T \tilde{u}_d}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_1^T \tilde{v}_1}} & \mu_{2,1} & \cdots & \mu_{n-d,1} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_2^T \tilde{v}_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_{n-d}^T \tilde{v}_{n-d}}} \end{bmatrix}$$

où les λ et les μ sont les coefficients après la normalisation. La matrice est bien diagonale par blocs ou les blocs sont dans $GL_d(\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ et $GL_{n-d}(\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$, respectivement, puisque les matrices inverses sont aussi triangulaires et leurs coefficients sont dans $\mathcal{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})$, suivant la même logique que celle décrite juste au dessus.

26.

On peut écrire

$$\begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 \\ 0 & R_2^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1} M Q \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} M_1 R_1 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} M_2 R_2 \end{bmatrix}$$

Cela montre que les matrices $R_i^{-1} M_i R_i$ sont dans $\mathcal{D}_{\rho_3}(S_d(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{D}_{\rho_3}(S_{n-d}(\mathbb{R}))$. Une récurrence sur la dimension permet de conclure puisque si on a deux matrices ortogonales appartenant à $\mathcal{D}_r(M_d(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{D}_r(M_{n-d}(\mathbb{R}))$ qui diagonalisent les $R_i^{-1} M_i R_i$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 \\ 0 & R_2^{-1} \end{bmatrix} Q^{-1} M Q \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_1 D_1 P_1^T & 0 \\ 0 & P_2 D_2 P_2^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T & 0 \\ 0 & P_2^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice orthogonale

$$Q \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

prouve le théorème car elle appartient à $\mathcal{D}_{\min\{\rho_3,r\}}(M_n(\mathbb{R}))$.