CONCOURS MINES-PONTS 2023
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Supposons $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.On rappelle que les valeurs propres d'une matrices $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ sont réelles; soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S, et X ($\neq 0$) un vecteur propre associé

$$\begin{aligned}\langle SX, X\rangle &= (SX)^T X \\ &= \lambda X^T X \\ &= \lambda \|X\|^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda = \frac{\langle SX, X\rangle}{\|X\|^2} \geqslant 0$$

Cela montre que $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, supposons $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$. On peut diagonaliser en base orthonormale

$$\begin{aligned}S &= Q \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} Q^T \\ &= QDQ^T\end{aligned}$$

avec Q orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle SX, X\rangle &= X^T S X \\ &= X^T Q D Q^T X \\ &= (Q^T X)^T D Q^T X \\ &= Q^T X^T D Q^T X \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

On a bien $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2.

Soit $(S_1, S_2) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$.Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle((1-t)S_1 + tS_2)X, X\rangle &= X^T S X \\ &= (1-t)\underbrace{\langle S_1X, X\rangle}_{\geqslant 0} + t\underbrace{\langle S_2X, X\rangle}_{\geqslant 0}\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est positive par convexité de l'ensemble $\mathbb{R}^+$. Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.

Similairement, soit $(S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$.Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle((1-t)S_1 + tS_2)X, X\rangle &= X^T S X \\ &= (1-t)\underbrace{\langle S_1X, X\rangle}_{>0} + t\underbrace{\langle S_2X, X\rangle}_{>0}\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement positive par convexité de l'ensemble $\mathbb{R}^{+*}$. Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

Ces ensembles ne sont pas des espaces vectoriels puisqu'ils contiennent I_n mais pas $-I_n$.

3.

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned}A &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= S^2\end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. La matrice

$$\begin{aligned}S &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^{-1}\end{aligned}$$

est une matrice symétrique réelle vérifiant $Sp(S) = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ et donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4.

La propriété est triviale pour $p = 1$ et correspond à la définition de la convexité d'une fonction pour $p = 2$. Soit maintenant $p > 2$. si $\lambda_p = 1$ on est ramené au cas trivial $p = 1$ donc on peut supposer $\lambda_p < 1$. On peut ainsi écrire:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j = (1-\lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \underbrace{\frac{\lambda_j}{1-\lambda_p}}_{\lambda'_j} x_j + \lambda_p x_p$$

En appliquant une premiére fois la propriété avec $p = 2$ on obtient:

$$f(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j) \leqslant (1-\lambda_p) f(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_p} x_j) + \lambda_p f(x_p)$$

En appliquant une deuxième fois la propriété (hypothèse de récurrence) puisqu'on remarque que $\sum_{j=1}^{p-1} \lambda'_j = 1$,

$$\begin{aligned} f(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j) &\leqslant (1-\lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_p} f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(x_j) \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang p et on peut conclure.

5.

La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} \geqslant 0$$

ce qui montre que la fonction est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ les valeurs propres de M répétées avec leur ordre de multiplicité. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} M &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \det M &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

Si $\exists i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0$, la propriété est triviale. On peut maintenant supposer que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. On applique alors le résultat de la question précédente à la fonction f

$$\begin{aligned}
& f(\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{n}\lambda_j) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{n} f(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & -\ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \leqslant -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & -\ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \leqslant -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & \quad \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & \quad \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \geqslant \frac{1}{n} \ln(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j) \\
\Leftrightarrow & \quad \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \geqslant \ln(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\frac{1}{n}}) \\
\Leftrightarrow & \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geqslant (\prod_{j=1}^{n} \lambda_j)^{\frac{1}{n}} \\
\Leftrightarrow & \quad \frac{\operatorname{Tr} M}{n} \geqslant (\det M)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

6.

Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned}
M &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\
&= UDU^T
\end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} M^T M &= \operatorname{Tr} UD \underbrace{U^T U}_{=I_n} DU^T \\
&= \operatorname{Tr} UD^2U^T \\
&= \operatorname{Tr} D^2U^TU \\
&= \operatorname{Tr} D^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

7.

On peut noter que le résultat précédent est valable pour les matrices de $S_n(\mathbb{R})$. Ensuite, en notant $\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$, on a

$$\begin{aligned} \|M\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \\ &\geqslant \sqrt{\rho(M)^2} \\ &= \rho(M) \end{aligned}$$

De plus, la diagonalisation de la matrice $M - \det^{\frac{1}{n}}(M) I_n$ s'obtient facilement à l'aide de celle de M:

$$\begin{aligned} M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n - \det^{\frac{1}{n}}(M) \end{bmatrix} U^T \\ &= U(D - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n) U^T \end{aligned}$$

ce qui permet en particulier de déterminer son spectre. On peut maintenant appliquer directement la formule de l'énoncé aux valeurs propres de $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$:

$$2\rho(M)\left(\frac{\operatorname{Tr} M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant \frac{1}{n} \left\| M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n \right\|^2$$

Comme $\rho(M) > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Tr} M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}} &\geqslant \frac{\left\| M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n \right\|^2}{2n\rho(M)} \\ &\geqslant \frac{\left\| M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n \right\|^2}{2n\, \|M\|} \end{aligned}$$

8.

On commence par suivre l'indication de l'énoncé en utilisant le résultat de la question 3:

$$\begin{aligned} A &= S^2 \\ &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U D_1 D_1 U^T \\ &= (U D_1)(U D_1)^T \end{aligned}$$

On est alors tenté de choisir $Q' = UD_1$ pour répondre à la question posée; toutefois il n'y a peu de chance que ce choix fournisse la forme souhaitée pour la matrice B car on ne l'a pas fait encore intervenir dans le raisonnement. Essayons:

$$\begin{aligned} Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1} &= (UD_1)^{-1}B((UD_1)^T)^{-1} \\ &= D_1^{-1}U^{-1}B((U^T)^{-1}((D_1^T)^{-1} \\ &= D_1^{-1}U^TBUD_1^{-1} \\ &= B' \end{aligned}$$

Cette matrice B' n'est a priori pas diagonale, par contre elle est symétrique et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale D:

$$\exists V \in O_n(\mathbb{R}), \quad B' = VDV^T$$

On peut alors voir que

$$\begin{aligned} \forall W \in O_n(\mathbb{R}), \quad A &= UD_1 \underbrace{WW^T}_{=I_n} D_1U^T \\ &= (UD_1W)(UD_1W)^T \end{aligned}$$

Le choix qui s'impose est donc $W = V$, soit $Q = Q'V = UD_1V \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} Q^{-1}B(Q^T)^{-1} &= V^TQ'^{-1}B(Q'^T)^{-1}V \\ &= V^TB'V \\ &= D \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^TBX > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^TQDQ^TX > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad (Q^TX)^TD(Q^TX) > 0 \qquad ① \end{aligned}$$

Comme $Q^T \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} Q^TM_{n,1}(\mathbb{R}) &= \{QX, X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\} \\ &= M_{n,1}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ① &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^TDX > 0 \\ &\Leftrightarrow D \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow Sp(D) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

9.

10.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ les valeurs propres de D répétées avec leur ordre de multiplicité. La décomposition précédente permet d'écrire

$$\begin{aligned}
A + B &= QQ^T + QDQ^T \\
&= Q(I_n + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix})Q^T \\
&= QDQ^T \\
&= Q \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_n \end{bmatrix} Q^T
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= QQ^T + QDQ^T \\
&= \det Q \det \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_n \end{bmatrix} \det Q^T \\
&= \det Q^2 (\prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i))
\end{aligned}$$

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} = \det Q^{\frac{2}{n}} (1 + (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)^{\frac{1}{n}})$$

Donc:

$$\begin{aligned}
(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow \det Q^{\frac{2}{n}} (\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i))^{\frac{1}{n}} \geqslant \det Q^{\frac{2}{n}} (1 + (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)^{\frac{1}{n}}) \\
&\Leftrightarrow \quad (\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i))^{\frac{1}{n}} \geqslant (1 + (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)^{\frac{1}{n}}) \qquad (>0) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i))^{\frac{1}{n}} \geqslant \ln(1 + (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)^{\frac{1}{n}}) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geqslant \ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i}) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\lambda_i) \geqslant \ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i}) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(1+e^{\ln \lambda_i}) \geqslant \ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i})
\end{aligned}$$

Un peu d'observation convainc que le dernière inégalité est la traduction (en utilisant le résultat de 4 avec $x_i = \ln \lambda_i$) de la convexité de la fonction $g : x \mapsto \ln(1+e^x)$, démontrée dans la question 9.