

CONCOURS X 2023
MATHÉMATIQUES B - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Tout découle directement du fait qu'une somme de 2 fonctions DSE est DSE.

Soit $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$. $f + g$ est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f + g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)t^n$$

Soit $(P, Q) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])^2$. $P + Q$ est DSE sur U_ρ et

$$\begin{aligned} \forall a \in U_\rho, \quad (P + Q)|_{t=a} &= P|_{t=a} + Q|_{t=a} \\ &= f_0(a) + f_1(a)X + \dots + f_n(a)X^n + g_0(a) + g_1(a)X + \dots + g_n(a)X^n \\ &= f_0(a) + g_0(a) + (f_1(a) + g_1(a))X + \dots + (f_n(a) + g_n(a))X^n \\ &= (f_0 + g_0)(a) + (f_1 + g_1)(a)X + \dots + (f_n + g_n)(a)X^n \end{aligned}$$

Soit $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(M_{n,m}(\mathbb{R}))^2$. $f + g$ est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f + g)(t) = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11})(t) & (a_{12} + b_{12})(t) & \dots & (a_{1m} + b_{1m})(t) \\ (a_{21} + b_{21})(t) & (a_{22} + b_{22})(t) & \dots & (a_{2m} + b_{2m})(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} + b_{n1})(t) & (a_{n2} + b_{n2})(t) & \dots & (a_{nm} + b_{nm})(t) \end{bmatrix}$$

2.

Un produit de deux fonctions DSE est DSE et: Soit $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$. fg est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) t^n$$

A cela on ajoute le fait qu'une somme de n fonctions DSE est encore DSE donc: Soit $(f, g) \in \mathcal{D}_\rho(M_n(\mathbb{R}))^2$. fg est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (a_{1i} b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{1i} b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{1i} b_{in})(t) \\ \sum_{i=1}^n (a_{2i} b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{2i} b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{2i} b_{in})(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n (a_{ni} b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n (a_{ni} b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n (a_{ni} b_{in})(t) \end{bmatrix}$$

3.

Les coefficients d'un DSE sont déterminés de manière unique par f à travers la formule:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$$

Si le DSE sur $U_r, r \leq \rho$ est nul, la restriction de f à U_r est nulle, et donc les coefficients de son DSE sur U_ρ sont tous nuls, et f est nulle sur U_ρ . Cela montre l'injectivité du morphisme d'anneaux:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f|_{U_r} \end{aligned}$$

4.

Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $r < \rho$. L'application:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_r : \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \end{aligned}$$

est bien définie.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| r^n \\ &= |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \\ &= |\lambda| \|f\|_r \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|f\|_r = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0 \quad (\text{car } r > 0) \\ &\Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| r^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \\ &= \|f\|_r + \|g\|_r \end{aligned}$$

ce qui finit de montrer que $\|\cdot\|_r$ est une norme sur $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$; de plus elle est sous-multiplicative car

$$\begin{aligned} \|fg\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n |a_k| r^k |b_{n-k}| r^{n-k} \\ &= \|f\|_r \|g\|_r \end{aligned}$$

5.

On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in U_r, \quad |f_n(t)| &= \left| \sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}| |t|^p \\ &\leq \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}| r^n \\ &= \|f_n\|_r \end{aligned}$$

qui est par hypothèse le terme d'une série numérique convergente. Donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement vers f telle que

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p$$

A t fixé dans U_r , $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum_{p \geq 0} a_{np} t^p$ converge absolument et la somme est majorée par $\|f_n\|_r$, qui est le terme d'une série convergente. On peut inverser les sommations dans la série numérique double ci-dessus et

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{np} \right) t^p \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=0}^N f_n \right\|_r &= \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \right\|_r \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_r \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

car c'est le reste d'une série numérique convergente.

6.

a. Quitte à diviser f par $f(0) \neq 0$, on peut maintenant supposer $f(0) = 1$ car

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

b. $fg \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ et sa somme et le produit de cauchy de $f(t)$ et $g(t)$:

$$(fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k} t^n$$

donc par unicité du DSE,

$$\begin{aligned} \forall t \in U_r, f(t)g(t) = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0 & \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = - \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} & \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

c. La définition du rayon de convergence d'une série entière est

$$R = \sup\{r \geq 0, |a_n| r^n \text{ est bornée}\}$$

donc comme $R_f \geq \rho > s > 0$,

$$\begin{aligned} (a_n s^n) \text{ bornée} &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| s^n \leq M \\ &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M \frac{1}{s^n} \leq \underbrace{\left(\frac{\max\{1, M\}}{s}\right)^n}_{=c} \end{aligned}$$

d. On a $|b_0| = 1 \leq (2c)^0$, puis supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n-1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} |bn| &= \left| \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| |b_{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n c^k (2c)^{n-k} \\ &= c^n \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \\ &= c^n \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \\ &\leq c^n 2^n \end{aligned}$$

e. On a montré que

$$|b_n| \frac{1}{(2c)^n} \leq 1$$

donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n t^n$ vérifie $R_g \geq \frac{1}{2c} > 0$ et donc g est bien définie sur un intervalle de longueur non nulle et

$$\forall t \in U_{\min\{R_g, \rho\}}, f(t)g(t) = 1$$

7.

On a $0, 1 \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$, qui est de plus stable par opposé, somme, produit. De plus, si $f, g \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$, avec $f \neq 0$, on peut poser $f(t) = t^p \tilde{f}(t)$ avec $\tilde{f}(0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} fg = 0 &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad f(t)g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad \tilde{f}(t)g(t) = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho, R(\frac{1}{\tilde{f}})\}} (\neq \emptyset), \quad \frac{1}{\tilde{f}(t)} \tilde{f}(t)g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho, R(\frac{1}{\tilde{f}})\}}, \quad g(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad g(t) = 0 \quad (\text{d'après le raisonnement déjà fait en 3}) \\ &\Leftrightarrow g = 0_{\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est bien un anneau intègre.

8.

a. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X]) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ P = f_0 + f_1 X + \cdots + f_n X^n &\mapsto \sum_{i=0}^n \|f_i\|_r s^i \end{aligned}$$

est bien définie car $r < \rho$.

$$\begin{aligned} \|\lambda P\|_{rs} &= \sum_{i=0}^n \|\lambda f_i\|_r s^i \\ &= |\lambda| \sum_{i=0}^n \|f_i\|_r s^i \\ &= |\lambda| \|P\|_{rs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P + Q\|_{rs} &= \sum_{i=0}^n \|f_i + g_i\|_r s^i \\ &\leq \sum_{i=0}^n (\|f_i\|_r + \|g_i\|_r) s^i \\ &= \|P\|_{rs} + \|Q\|_{rs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|P\|_{rs} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \|f_i\|_r s^i = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \|f_i\|_r = 0 \quad (s > 0) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f_i = 0 \\
&\Leftrightarrow P = 0
\end{aligned}$$

Donc $\|\cdot\|_{rs}$ est bien une norme.

b.

$$\begin{aligned}
PQ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_i g_j X^{i+j} \\
&= \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l f_j g_{l-j} X^l
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|PQ\|_{rs} &= \left\| \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l f_j g_{l-j} X^l \right\|_{rs} \\
&= \sum_{l=0}^{n+m} \left\| \sum_{j=0}^l f_j g_{l-j} \right\|_r s^l \\
&\leq \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l \|f_j g_{l-j}\|_r s^l \\
&\leq \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{j=0}^l \|f_j\|_r \|g_{l-j}\|_r s^l \quad (\text{cf. 4}) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \|f_i\|_r \|g_j\|_r s^{i+j} \\
&= \|P\|_{rs} \|Q\|_{rs}
\end{aligned}$$

9.

a. À t fixé, on fait la division euclidienne du polynôme $A(t)$ par $B(t) \neq 0$, ce qui donne un unique couple $(Q(t), R(t)) \in (\mathbb{R}_{n-d}[X] \times \mathbb{R}_{d-1}[X])$. On définit ainsi implicitement, de manière unique, une fonction

$$\begin{aligned}
U_\rho &\rightarrow \mathbb{R}_{n-d}[X] \times \mathbb{R}_{d-1}[X] \\
t &\mapsto (Q(t), R(t))
\end{aligned}$$

Reste à montrer que les fonctions Q, R sont dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ et $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$, respectivement. Cela vient du fait que B est unitaire car alors, en notant respectivement a, b, q, r les fonctions composantes de A, B, Q, R respectivement, on obtient par identification des coefficients pour tout

t :

$$\begin{aligned}
 q_{n-d} \times 1 &= a_n \\
 q_{n-d-1} \times 1 &= a_{n-1} - q_{n-d} b_{d-1} \\
 &\vdots \\
 q_0 \times 1 &= a_d - \sum_{p=1}^{\min\{d, n-d\}} q_p b_{d-p}
 \end{aligned} \tag{1}$$

et

$$R(t) = A(t) - B(t)Q(t)$$

montre, par une récurrence immédiate, puisque $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$ est un anneau, que Q puis R sont dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ et $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$, respectivement.

b. On multiplie les équations 1 par une puissance de X adéquate pour reconstruire la fin de la fonction A :

$$\begin{aligned}
 q_{n-d} X^n &= a_n X^n \\
 q_{n-d-1} X^{n-1} &= a_{n-1} X^{n-1} - q_{n-d} X^{n-d} b_{d-1} X^{d-1} \\
 &\vdots \\
 q_0 X^d &= a_d X^d - \sum_{p=1}^{\min\{d, n-d\}} q_p X^p b_{d-p} X^{d-p}
 \end{aligned}$$

En ajoutant on obtient:

$$\begin{aligned}
 X^d Q &= \sum_{i=d}^n a_i X^i - \sum_{i=d}^{n-1} \underbrace{\sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l}_{\text{coeff. } i \text{ du produit } Q(B - X^d)} \\
 \Leftrightarrow X^d Q + \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l &= \sum_{i=d}^n a_i X^i
 \end{aligned} \tag{2}$$

On remarque que:

$$\begin{aligned}
 \|X^d Q + \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l\|_{rs} &\geq \|X^d Q\|_{rs} - \left\| \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l \right\|_{rs} \\
 &= s^d \|Q\|_{rs} - \left\| \sum_{i=d}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l \right\|_{rs} \\
 &\geq s^d \|Q\|_{rs} - \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k+l=i} q_k X^k b_l X^l \right\|_{rs} \\
 &= s^d \|Q\|_{rs} - \|Q(B - X^d)\|_{rs} \\
 &\geq s^d \|Q\|_{rs} - \|Q\|_{rs} \|B - X^d\|_{rs} \quad (\text{cf. 8.b})
 \end{aligned}$$

On prend maintenant la $\|\cdot\|_{rs}$ de l'équation 2 pour avoir:

$$\begin{aligned} \|Q\|_{rs}(s^d - \|B - X^d\|_{rs}) &\leq \left\| \sum_{i=d}^n a_i X^i \right\|_{rs} \\ &\leq \|A\|_{rs} \end{aligned}$$

on obtient la majoration voulue si $s^d - \|B - X^d\| \geq 0$

$$\|Q\|_{rs} \leq \frac{\|A\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}}$$

De plus on a:

$$A = \underbrace{QX^d}_{\text{valuation} \geq d} + Q(B - X^d) + R$$

donc $\forall i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$,

$$\text{coeff. } i \text{ de } Q(B - X^d) \times X^i + r_i X^i = a_i X^i$$

En sommant puis en prenant la norme $\|\cdot\|_{rs}$,

$$\begin{aligned} &\|R\|_{rs} - \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \leq \|A\|_{rs} \\ \Rightarrow &\|R\|_{rs} \leq \|A\|_{rs} + \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \\ \Rightarrow &\|R\|_{rs} \leq \|A\|_{rs} + \frac{\|A\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}} \\ \Leftrightarrow &\|R\|_{rs} \leq \frac{s^d \|A\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}} \end{aligned}$$

10.

R étant de degré $\leq d-1$ et F unitaire, $F + R$ est unitaire de degré d . De plus la division euclidienne:

$$\begin{aligned} P|_{t=0} &= Q|_{t=0}F|_{t=0} + R|_{t=0} \\ &= Q|_{t=0}X^d + R|_{t=0} \end{aligned}$$

et le fait que $P|_{t=0}$ est de valuation d , montre par identification des coefficients de $X^j, j \leq d$ montre que $R|_{t=0} = 0$.

On voit aussi que $q_0(t=0) = 1$, où $q_0 \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est le coefficient constant de Q .

11.

Ecrivons:

$$Q_0 = q_{0,0} + q_{0,1}X + \cdots + q_{0,n-d-1}X^{n-1} + X^{n-d}$$

de sorte que

$$\|Q_0 - 1\|_{ss} = \|q_{0,0} - 1\|_s + \|q_{0,1}\|_s s + \cdots + \|q_{0,n-d-1}\|_s s^{n-d-1} + s^{n-d}$$

Il faut remarquer que du fait de la continuité en 0 d'une somme de série entière,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|f\|_r = |f(0)|$$

Ainsi on a:

$$\forall j \in \llbracket 1, n-d-1 \rrbracket, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \|q_{0,j}\|_s s^j = 0$$

et aussi

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|q_{0,0} - 1\|_s = 0$$

puisque $q(0,0)(t=0) = 1$, d'après la remarque à la fin de la question 10. Ainsi,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|Q_0 - 1\|_{ss} = 0$$

On fixe $s \in]0, \rho[$ tel que

$$\forall r \leq s, \quad \|Q_0 - 1\|_{ss} \leq \frac{1}{6}$$

par croissance de $r \mapsto \|f\|_r$, on a même:

$$\forall r \leq s, \quad \|Q_0 - 1\|_{rs} \leq \|Q_0 - 1\|_{ss} \leq \frac{1}{6}$$

Ensuite,

$$s^{-d} \|F_0 - X^d\|_{rs} = \|f_0\|_r s^{-d} + \|f_1\|_r s^{-d+1} + \cdots + \|f_{d-1}\|_r s^{-1}$$

Comme on a

$$\forall j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, \quad f_j(0) = 0$$

d'après ce qui précède

$$\lim_{r \rightarrow 0} s^{-d} \|F_0 - X^d\|_{rs} = 0$$

De la même manière,

$$\lim_{r \rightarrow 0} s^{-d} \|R_0\|_{rs} = 0$$

On fixe $r < s$ tel que:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= s^{-d} \|F_0 - X^d\|_{rs} \leq \frac{1}{6} \\ \epsilon_0 &= s^{-d} \|R_0\|_{rs} \leq \frac{1}{12} \end{aligned}$$

On a aussi:

$$\beta_0 = \|Q_0 - 1\|_{rs} \leq \frac{1}{6}$$

Pour ce r et ce s on a bien $\alpha_0 + 2\epsilon_0 \leq \frac{1}{3}$ et $\beta_0 + \epsilon_0 \leq \frac{1}{3}$.

12.

On a:

$$\begin{aligned} Q_{i+1}F_{i+1} + R_{i+1} &= P \\ &= Q_iF_i + R_i \\ &= Q_i(F_{i+1} - R_i) + R_i \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$(1 - Q_i)R_i = (Q_{i+1} - Q_i)F_{i+1} + R_{i+1}$$

13.

On a:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= s^{-d}\|F_{i+1} - X^d\|_{rs} \\ &= s^{-d}\|F_i - X^d + R_i\|_{rs} \\ &\leq s^{-d}\|F_i - X^d\|_{rs} + s^{-d}\|R_i\|_{rs} \\ &= \alpha_i + \epsilon_i \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (1 - Q_i)R_i &= (Q_{i+1} - Q_i)F_{i+1} + R_{i+1} \\ &= R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d + (Q_{i+1} - Q_i)(F_{i+1} - X^d) \\ \Rightarrow \|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} &\geq \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)(F_{i+1} - X^d)\|_{rs} \\ &\geq \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs}\|(F_{i+1} - X^d)\|_{rs} \\ &= \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs}s^d\alpha_{i+1} \end{aligned} \tag{3}$$

Or on remarque que comme R_{i+1} est de degré $< d$, on a (on perd des termes positifs)

$$\begin{aligned} \|R_{i+1} + (Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} &\geq \|(Q_{i+1} - Q_i)X^d\|_{rs} \\ &= \|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs}s^d \end{aligned}$$

Reprenons en 3:

$$\begin{aligned} \|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} &\geq s^d\|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs} - \|(Q_{i+1} - Q_i)\|_{rs}s^d\alpha_{i+1} \\ &= s^d\|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs}(1 - \alpha_{i+1}) \\ &= s^d\|Q_{i+1} - 1 + 1 - Q_i\|_{rs}(1 - \alpha_{i+1}) \\ &\geq s^d(\beta_{i+1} - \beta_i)(1 - \alpha_{i+1}) \end{aligned}$$

Puisque $\|(1 - Q_i)R_i\|_{rs} \leq \|1 - Q_i\|_{rs}\|R_i\|_{rs} = s^d\beta_i\epsilon_i$ on a bien

$$\beta_{i+1} - \beta_i \leq \frac{\beta_i\epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}$$

enfin on repart de 3 pour obtenir:

$$\begin{aligned}
 \|R_{i+1}\|_{rs} &\leq \|Q_{i+1} - Q_i\|_{rs} s^d \alpha_{i+1} + s^d \beta_i \epsilon_i \\
 &\leq \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}} s^d \alpha_{i+1} + s^d \beta_i \epsilon_i \\
 &= \frac{\beta_i \epsilon_i s^d}{1 - \alpha_{i+1}}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\epsilon_{i+1} \leq \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}$$

14.

On fait une récurrence sur $i \in \mathbb{N}$ sur les 3 inégalités en même temps car elles semblent difficiles à découpler. La propriété est triviale pour $i = 0$. Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $i \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i+1} &\leq \alpha_i + \epsilon_i \\
 &\leq \alpha_0 + 2(1 - 2^{-i})\epsilon_0 + 2^{-i}\epsilon_0 \\
 &= \alpha_0 + 2(1 - 2^{-i-1})\epsilon_0
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \beta_{i+1} &\leq \beta_i + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}} \\
 &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_0 - 2(1 - 2^{-i-1})\epsilon_0} \\
 &= \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_0 - 2\epsilon_0 + 2^{-i}\epsilon_0} \\
 &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_0 - 2\epsilon_0} \\
 &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{3}{2}\beta_i \epsilon_i
 \end{aligned} \tag{4}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \beta_i \epsilon_i &\leq 2^{-i} \beta_0 \epsilon_0 + (1 - 2^{-i}) 2^{-i} \epsilon_0^2 \\
 &\leq 2^{-i} \beta_0 \epsilon_0 + (1 - 2^{-i}) 2^{-i} \left(\frac{1}{3} - \beta_0\right) \epsilon_0 \\
 &= 2^{-2i} \beta_0 \epsilon_0 - \frac{1}{3} 2^{-2i} \epsilon_0 + \frac{1}{3} 2^{-i} \epsilon_0 \\
 &= \underbrace{\left(\beta_0 - \frac{1}{3}\right) 2^{-2i} \epsilon_0}_{\leq 0} + \frac{1}{3} 2^{-i} \epsilon_0 \\
 &= \frac{1}{3} 2^{-i} \epsilon_0
 \end{aligned}$$

En reprenant en 4, on obtient:

$$\begin{aligned}\beta_{i+1} &\leq \beta_0 + (1 - 2^{-i})\epsilon_0 + \frac{1}{2}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= \beta_0 + (1 - 2^{-i-1})\epsilon_0\end{aligned}$$

Enfin on réutilise pour la dernière inégalité les calculs que l'on vient de faire:

$$\begin{aligned}\epsilon_{i+1} &\leq \frac{\beta_i \epsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}} \\ &\leq \frac{1}{2}2^{-i}\epsilon_0 \\ &= 2^{-i-1}\epsilon_0\end{aligned}$$

15.

a. On a

$$\begin{aligned}s^{-d}\|R_i\|_{rs} &= s^{-d}\|F_{i+1} - F_i\|_{rs} = \epsilon_i \\ &\leq 2^{-i}\epsilon_0\end{aligned}$$

cela montre, en notant $r_{i,j}, j \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$ les fonctions coefficients de R_i , que

$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N}, \quad s^j\|r_{i,j}\|_r &\leq \|R_i\|_{rs} \\ &\leq 2^{-i}\epsilon_0 s^d \\ \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}, \quad \|r_{i,j}\|_r &\leq 2^{-i}\epsilon_0 s^{d-j}\end{aligned}$$

c'est le terme d'une série numérique convergente; d'après la question 5, $\sum_{i \geq 0} r_{i,j}$ converge vers $g_j \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$. Or

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n r_{i,j} &= \sum_{i=0}^n f_{i+1,j} - f_{i,j} \\ &= f_{n+1,j} - f_j\end{aligned}$$

montre que la fonction composante $f_{i,j}$ converge vers une fonction de $g_j + f_j \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$, et ce pour tout $j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Mais alors, comme

$$F_i = f_{i,0} + f_{i,1}X + \cdots + f_{i,d-1}X^{d-1} + X^d$$

$$\|F_i - (\sum_{j=0}^{d-1} (f_j + g_j)X^j + X^d)\|_{rs} = \sum_{j=0}^{d-1} \|f_{i,j} - f_j - g_j\|_r s^j \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$$

montre que F_i converge vers

$$\sum_{j=0}^{d-1} (f_j + g_j)X^j + X^d \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$$

b. De la division euclidienne $P = Q_i F_i + R_i$, on déduit des équations similaires aux équations 1, qui montrent, dans cet ordre, que les fonctions composantes $q_{i,n-d}, q_{i,n-d-1}, \dots, q_{i,0}$ de Q_i convergent pour la norme $\|\cdot\|_r$ dans $\mathcal{D}_r(\mathbb{R})$. Ainsi la suite Q converge pour $\|\cdot\|_{rs}$ vers un certain $G \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_{n-d}[X])$.

Par passage à la limite on obtient :

$$P = FG$$

16.

On a montré le théorème dans le cas $\lambda = 0$, P unitaire et $\frac{P|_{t=0}}{X^d}(0) = f_d(0) = 1$. En fait, quitte à remplacer $\beta_i = \|Q_i - 1\|_{rs}$ par $\beta_i = \|Q_i - f_d(0)\|_{rs}$ on peut obtenir le résultat à la seule condition que $f_d(0) \neq 0$ (hypothèse utilisée dans la question 10); il faut alors partir de $F_0 = X^d$ par ailleurs pour s'assurer $(F_i)|_{t=0} = X^d$ et F_i unitaire¹. Ainsi, dans le cas général, posons $\frac{P|_{t=0}}{(X-\lambda)^d}(\lambda) = \gamma \neq 0$, en remarquant que

$$\begin{aligned} & P \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X]) \text{ unitaire, avec } \lambda \text{ racine de } P|_{t=0} \text{ de multiplicité } d \\ \Leftrightarrow & P(X + \lambda) \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X]) \text{ unitaire, avec } 0 \text{ racine de } P|_{t=0} \text{ de multiplicité } d \end{aligned}$$

On trouve ainsi $F \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$ et $G \in \mathcal{D}_{n-d}(\mathbb{R}_d[X])$ tel que $P(X + \lambda) = FG$ et $F|_{t=0} = X^d$. Mais alors on a

$$P = F(X - \lambda)G(X - \lambda)$$

avec $F(X - \lambda)|_{t=0} = (X - \lambda)^d$ ce qui démontre le théorème.

17.

On applique le théorème précédent à $X^2 - f \in \mathcal{D}_\rho(R_2[X])$, qui nous fournit $F, G \in \mathcal{D}_\rho(R_1[X])$ tel que $P = FG$ et $F|_{t=0} = X - \sqrt{f(0)}$. Posons $F = X - g_1$ et $G = X - g_2$, on a:

$$X^2 - f = X^2 - (g_1 + g_2)X + g_1g_2$$

Cela montre que $g_1 = -g_2$ et $g_1^2 = f$ sur U_ρ .

De plus f est continue en 0, donc il existe $\rho_f \leq \rho$ tel que $\forall t \in U_{\rho_f}, \quad f(t) > 0$. Sur cet intervalle on peut donc écrire $g_1 = \sqrt{f}$.

18.

$M|_{t=0}$ est une matrice symétrique réelle, son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} .

19.

On A

$$\chi = FG$$

avec $\chi, F \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}_n[X])$, unitaires donc $G = 1$ et $\chi = F$.

$M|_{t=0}$ est diagonalisable car symétrique réelle, et comme elle possède une unique valeur propre λ de multiplicité n , $M|_{t=0} = \lambda I_n$. $M - \lambda I_n$ est donc une matrice symétrique dont les coefficients

¹On n'utilise pas le fait que P est unitaire, mais on n'utilise pas non plus, sauf erreur de ma part, l'hypothèse de l'énoncé " f_d est la fonction constante égale à 1" (à part pour s'assurer que F_0 est unitaire). Toutefois pour se ramener à ce cas, on pourrait alors penser à multiplier P par $\frac{1}{f(d)}$ en utilisant la question 6, mais dans ce cas P n'est plus unitaire. Erreur d'énoncé ?

sont des sommes de séries entières nulles en 0, donc de la forme $t \sum_{p=0}^{+\infty} a_p t^p$. Autrement dit, $\exists M_0 \in \mathcal{D}_\rho(S_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{D}_{\rho_1}(S_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$M = \lambda I_n + M_0$$

20.

On a:

$$\begin{aligned} \chi|_{t=0} &= F|_{t=0} G|_{t=0} \\ &= (X - \lambda)^d G|_{t=0} \end{aligned}$$

et de plus $G|_{t=0}(\lambda) \neq 0$. On diagonalise maintenant $M|_{t=0}$:

$$M|_{t=0} = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_{n-d} \end{bmatrix} P^T \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{taille } d \\ \text{taille } n-d \end{array} \right\} \right\} \end{array} \right.$$

avec $P \in O_n(\mathbb{R})$. On peut vérifier facilement qu'on a alors:

$$\begin{aligned} B_0 &= G|_{t=0}(M|_{t=0}) \\ &= P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & G(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & G(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & G(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix} P^T \\ &= P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} P^T \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 A_0 &= G_{|t=0}(M_{|t=0}) \\
 &= P \begin{bmatrix} F(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & F(\lambda) & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix} P^T \\
 &= P \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & F(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix} P^T
 \end{aligned}$$

On pose alors

$$U = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$V = P \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Si on pose

$$P = \left[P_1 \middle| P_2 \middle| \dots \middle| P_n \right]$$

Il est clair que $\text{Im}(A_0V) = \text{Im } A_0 = \text{vect}(P_{d+1}, P_{d+2}, \dots, P_n)$ et $\text{Im}(B_0U) = \text{Im } B_0 = \text{vect}(P_1, P_2, \dots, P_d)$ et

$$\left[B_0U \middle| A_0V \right] = P \begin{bmatrix} G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & G(\lambda) & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & G(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & F(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & F(\lambda_2) & & \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & F(\lambda_{n-d}) \end{bmatrix}$$

est inversible.

21.

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : U_{\rho_1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det Q = \det \left[BU \middle| AV \right] \end{aligned}$$

est continue et $\varphi(0) \neq 0$. Donc il existe $\rho'_2 \leq \rho_1$ sur lequel $\det Q > 0$, i.e. $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. De plus, en notant C la matrice des cofacteurs de Q , on a :

$$\forall t \in U_{\rho'_2}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} C^T$$

Comme $\mathcal{D}_{\rho'_2}(M_n(\mathbb{R}))$ est un anneau, il est clair que l'application $t \mapsto C^T \in \mathcal{D}_{\rho'_2}(M_n(\mathbb{R}))$. De même, $\varphi \in \mathcal{D}_{\rho'_2}(\mathbb{R})$, D'après le résultat de la question 6, on peut trouver $\rho_2 \leq \rho'_2$ et $g \in \mathcal{D}_{\rho_1}(\mathbb{R})$, tel que

$$\forall t \in U_{\rho_2}, \quad g(t) = \frac{1}{\det Q}$$

Ce la montre que

$$\begin{aligned} U_{\rho_2} &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto Q^{-1} = g(t)C^T \end{aligned}$$

est dans $\mathcal{D}_{\rho_2}(M_n(\mathbb{R}))$, ou encore $Q \in GL_n(\mathcal{D}_{\rho_2}(\mathbb{R}))$.

22.

a. On a

$$\left[B_aU \middle| A_aV \right] \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Im}(B_aU) + \text{Im}(A_aV) = \mathbb{R}^n$$

De plus $\dim(B_aU) \leq d$ et $\dim(A_aV) \leq n - d$, donc la seule possibilité est que

$$\text{Im}(B_aU) + \text{Im}(A_aV) = \text{Im}(B_aU) \oplus (\text{Im } A_aV) = \mathbb{R}^n$$

b. Il est direct que

$$\text{Im}(B_a U) \subset \text{Im}(B_a)$$

$$\text{Im}(A_a V) \subset \text{Im}(A_a)$$

De plus comme $\left[B_a U \middle| A_a V \right] \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$\text{rang}(B_a U) = d$$

$$\text{rang}(A_a V) = n - d$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\begin{aligned} 0 &= \chi_{|t=a}(M_a) = F_{|t=a}(M_a)G_{|t=a}(M_a) \\ &= A_a B_a \\ &= B_a A_a \end{aligned}$$

montre les inclusions

$$\text{Im}(A_a) \subset \ker B_a$$

$$\text{Im}(B_a) \subset \ker A_a$$

Enfin le théorème du rang donne les relations:

$$\dim(\ker B_a) = n - \text{rang}(B_a) \leq n - d$$

$$\dim(\ker A_a) = n - \text{rang}(A_a) \leq d$$

qui permettent de conclure

$$\text{Im}(B_a U) = \text{Im}(B_a) = \ker A_a$$

$$\text{Im}(A_a V) = \text{Im}(A_a) = \ker B_a$$

23.

On fait un calcul par blocs:

$$\begin{aligned} MQ &= M \left[BU \middle| AV \right] \\ &= \left[MBU \middle| MAV \right] \\ &= \left[BMU \middle| AMV \right] \end{aligned}$$

car $B = F(M)$ et $A = G(M)$ commutent avec M .

On pose

$$MP = \underbrace{\left[M'_1 \right]}_d \underbrace{\left[M'_2 \right]}_{n-d}$$

de sorte que

$$MQ = \left[BM'_1 \middle| AM'_2 \right]$$

On peut appliquer $\text{Im}(BU) = \text{Im}(B)$ successivement à toutes les colonnes de M'_1 pour construire une matrice $M_1 \in M_d(\mathbb{R})$ tel que:

$$BM'_1 = BUM_1$$

De même comme $\text{Im}(A) = \text{Im}(AV)$, il existe $M_2 \in M_{n-d}(\mathbb{R})$ tel que

$$AM'_2 = AVM_2$$

Mais alors on a:

$$\begin{aligned} MQ &= \left[BUM_1 \middle| AVM_2 \right] \\ &= \left[BU \middle| AV \right] \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme les 3 matrices $Q^{-1}, Q, M \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_n(\mathbb{R}))$, on a $M_1 \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_d(\mathbb{R}))$ et $M_2 \in \mathcal{D}_{\rho_2}(M_{n-d}(\mathbb{R}))$.

24.

Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On fixe $a \in U_{\rho_2}$.

$$(B_a U X)^T A_a V Y = X^T U^T B_a^T A_a V Y$$

Mais $B_a = F|_{t=a}(M_a)$ est symétrique, donc

$$\begin{aligned} (B_a U X)^T A_a V Y &= X^T U^T \underbrace{B_a A_a}_{=0} V Y \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\text{Im}(A_a) \subset \ker B_a$.

25.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt séparément aux colonnes de BU puis aux colonnes de AV . Etant donné que $\text{Im}(BU)$ et $\text{Im}(AV)$ sont orthogonaux, on obtiendra une base de \mathbb{R}^n .

On note

$$BU = \left[e_1 \middle| e_2 \middle| \dots \middle| e_d \right]$$

On rappelle qu'on cherche le vecteur i de la base orthonormale sous la forme

$$\tilde{u}_i = e_i + \lambda_{i,i-1}u_{i-1} + \lambda_{i,i-2}u_{i-2} + \dots + \lambda_{i,1}u_1$$

prouve le théorème car elle appartient à $\mathcal{D}_{\min\{\rho_3, r\}}(M_n(\mathbb{R}))$.