CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

$$\begin{aligned}
&\forall t \in [0,1], \quad 1+t^2 \leqslant 2\\
\Rightarrow &\forall t \in [0,1], \quad (1+t^2)^n \leqslant 2^n\\
\Rightarrow &\forall t \in [0,1], \quad \frac{1}{(1+t^2)^n} \geqslant \frac{1}{2^n}\\
\Rightarrow &\qquad \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

2.

La fonction

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^{+*}\\
t &\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}
\end{aligned}$$

est continue par morceaux, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{t^{2n}}$$

$t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ étant intégrable en $+\infty$ car $2n > 1$, f est intégrable et K_n est bien définie.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= [\arctan t]_0^x\\
&= \arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{2}$$

3.

On utilise l'inégalité de convexité:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1+t^2 \geqslant 2t$$

Soit $x \geqslant 1$, $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_1^x \frac{1}{2^n t^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^n}\left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{2^n}(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}) \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)2^n}\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)2^n}\end{aligned}$$

montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}(\frac{1}{n2^n})$$

4.

On a:

$$\begin{aligned}K_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= I_n + O(\frac{1}{n2^n})\end{aligned}$$

puis d'après 1,

$$K_n = I_n + \underbrace{O(\frac{I_n}{n})}_{\mathrm{o}\,(I_n)}$$

i.e.

$$K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$$

5.

Soit $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t)\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient:

$$K_n = 2n(K_n - K_{n+1})$$

6.

On réécrit la récurrence précédente

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$$

D'où il vient facilement que

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \times 2} K_1 \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On applique la formule de Stirling

$$(2n-2)! \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{2(n-1)}{e})^{2(n-1)} \sqrt{4\pi(n-1)}$$

et

$$(n-1)!^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (\frac{n-1}{e})^{2(n-1)} 2\pi(n-1)$$

Après simplification on obtient

$$K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

7.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}t = \phi(t)$. On a $\phi'(t) = \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^n} \frac{1}{\sqrt{n}} \,\mathrm{d}u \\ \Rightarrow \sqrt{n} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^n} \,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

8.

On pose:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^{+*} \\ u &\mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(1+\frac{u^2}{n})^n} & \text{si } u \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } u \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

Les f_n sont continues par morceaux. La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ étant convexe sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathbb{R}, \quad (1+\frac{u^2}{n})^n &\geqslant 1 + n\frac{u^2}{n} \\ &= 1+u^2\end{aligned}$$

donc en posant $\phi(u) = \frac{1}{1+u^2}$,

i $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(u)| \leqslant \phi(u)$, intégrable en $+\infty$.

ii la suite de fonction (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\sqrt{n}I_n$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u$$

9.

D'après la question 6,

$$\sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Le changement de variable $\phi(u) = \sqrt{2}u$ nous donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

puis par parité,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

10.

On voit que $t \mapsto t\varphi(t) = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ est sommable en $+\infty$, donc pour $X > x$,

$$\begin{aligned} & \forall t \geqslant x, \quad \varphi(t) \leqslant \frac{t}{x}\varphi(t) \\ \Rightarrow \quad & \int_x^X \varphi(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_x^X t\varphi(t)\, \mathrm{d}t \\ & \qquad = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_x^X \\ & \qquad = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \to +\infty$ donne:

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{\varphi(x)}{x}\end{aligned}$$

11.

En suivant le fil de la question précédente, l'idée est de trouver une fonction qui minore $t \mapsto \varphi(t)$ et dont une primitive est $-\frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$. Le calcul montre que, en utilisant le fait que $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$,

$$\begin{aligned}\forall t \in [x, +\infty[, \quad (-\frac{t}{t^2+1}\varphi(t))' &= \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t) \\ &= \frac{t^4+2t^2-1}{t^4+2t^2+1}\varphi(t) \\ &\leqslant \varphi(t)\end{aligned}$$

Soit alors $X > x$.

$$\begin{aligned}&\int_x^X \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^X \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow& -\frac{X}{X^2+1}\varphi(X) + \frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^X \varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \to +\infty$ donne:

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

12.

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

on a:

$$\begin{aligned}1 - \Phi(x) \quad &= \quad \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}\end{aligned}$$

d'après les deux questions précédentes.

13.

$$A = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$$

De plus, les évènements A_p sont clairement incompatibles deux à deux.

14.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \cap \Omega) \\
&= \mathrm{P}(A \cap (\{R_n \geqslant x\} \cup \{R_n < x\})) \\
&= \mathrm{P}((A \cap \{R_n \geqslant x\}) \cup (A \cap \{R_n < x\})) \\
&= \mathrm{P}(A \cap \{R_n \geqslant x\}) + \mathrm{P}(A \cap \{R_n < x\}) \qquad \text{(les évènements } \{R_n \geqslant x\} \text{ et } \{R_n \geqslant x\} \text{ sont incompatibles)} \\
&= \mathrm{P}(A \cap \{R_n \geqslant x\}) + \mathrm{P}(\bigcup_{p=1}^{n} A_p \cap \{R_n < x\}) \\
&= \mathrm{P}(A \cap \{R_n \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(A_p \cap \{R_n < x\}) \qquad \text{(les évènements } A_p \text{ sont incompatibles)} \\
&\leqslant \mathrm{P}(\{R_n \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(A_p \cap \{R_n < x\}) \qquad (A \cap \{R_n \geqslant x\} \subset \{R_n \geqslant x\})
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
A_p \cap \{|R_n| < x\} &= A_p \cap \{|R_n| < x\} \cap \{|R_p| \geqslant 3x\} \\
&\subset A_p \cap \{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}
\end{aligned}$$

puisque $|R_n - R_p| \geqslant |R_p| - |R_n|$.

16.

On a

$$R_n - R_p = Z_{p+1} + \cdots + Z_n$$

Comme A_p est décrit en termes des VA $Z_1, \ldots, Z_p$, les évènements A_p et $\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}$ sont indépendants puisque les Z_i le sont.

On en déduis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &\leqslant \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(A_p \cap \{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) \\
&= \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(A_p)\,\mathrm{P}(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) \\
&\leqslant \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(A_p) \max_{p \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) \\
&= \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{p \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(A_p) \\
&= \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{p \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\})\,\mathrm{P}(A) \\
&\leqslant \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{p \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_p - R_n| \geqslant 2x\}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

17.

L'idée est la suivante: si $|R_p - R_n| \geqslant 2x$, alors $|R_n| \geqslant x$ ou $|R_p| \geqslant x$. Autrement dit,

$$|R_p - R_n| \geqslant 2x \subset \{|R_p| \geqslant x\} \cup \{|R_n| \geqslant x\}$$

On passe aux probabilités:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|R_p - R_n| \geqslant 2x) &\leqslant \mathrm{P}(\{|R_p| \geqslant x\} \cup \{|R_n| \geqslant x\}) \\ &\leqslant \mathrm{P}(\{|R_p| \geqslant x\}) + \mathrm{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) \\ &\leqslant 2 \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_i| \geqslant x\}) \end{aligned}$$

Cela étant valable pour tout p.

$$\max_{p \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(|R_p - R_n| \geqslant 2x) \leqslant 2 \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_i| \geqslant x\})$$

L'inégalité 1 donne alors bien ce qu'on voulait démontrer, à savoir:

$$\mathrm{P}(A) \leqslant 3 \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathrm{P}(\{|R_i| \geqslant x\})$$

18.

$$\begin{aligned} x_{n,n-k} &= -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}} \\ &= -\sqrt{n} + 2\sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} \\ &= -x_{n,k} \end{aligned}$$

Les x_{nk} partitionnent en fait l'intervalle $[-\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ en $n+1$ intervalles de même longueur.