CONCOURS X 2023
MATHÉMATIQUES B - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

Tout découle directement du fait qu'une somme de 2 fonctions DSE est DSE.
Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$. $f+g$ est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f+g)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)t^n$$

Soit $(P,Q) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])^2$. $P+Q$ est DSE sur U_ρ et

$$\begin{aligned}\forall a \in U_\rho, \quad (P+Q)_{|t=a} &= P_{|t=a} + Q_{|t=a}\\ &= f_0(a) + f_1(a)X + \cdots + f_n(a)X^n + g_0(a) + g_1(a)X + \cdots + g_n(a)X^n\\ &= f_0(a) + g_0(a) + (f_1(a)+g_1(a))X + \cdots + (f_n(a)+g_n(a))X^n\\ &= (f_0+g_0)(a) + (f_1+g_1)(a)X + \cdots + (f_n+g_n)(a)X^n\end{aligned}$$

Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(M_{n,m}(\mathbb{R}))^2$. $f+g$ est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f+g)(t) = \begin{bmatrix}(a_{11}+b_{11})(t) & (a_{12}+b_{12})(t) & \dots & (a_{1m}+b_{1m})(t)\\ (a_{21}+b_{21})(t) & (a_{22}+b_{22})(t) & \dots & (a_{2m}+b_{2m})(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{n1}+b_{n1})(t) & (a_{n2}+b_{n2})(t) & \dots & (a_{nm}+b_{nm})(t)\end{bmatrix}$$

2.

Un produit de deux fonctions DSE est DSE et: Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$. fg est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})t^n$$

A cela on ajoute le fait qu'une somme de n fonctions DSE est encore DSE donc: Soit $(f,g) \in \mathcal{D}_\rho(M_n(\mathbb{R}))^2$. fg est DSE sur U_ρ et

$$\forall t \in U_\rho, \quad (fg)(t) = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n(a_{1i}b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n(a_{1i}b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n(a_{1i}b_{in})(t)\\ \sum_{i=1}^n(a_{2i}b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n(a_{2i}b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n(a_{2i}b_{in})(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{i=1}^n(a_{ni}b_{i1})(t) & \sum_{i=1}^n(a_{ni}b_{i2})(t) & \dots & \sum_{i=1}^n(a_{ni}b_{in})(t)\end{bmatrix}$$

3.

Les coefficients d'un DSE sont déterminés de manière unique par f à travers la formule:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$$

Si le DSE sur $U_r, r \leqslant \rho$ est nul, la restriction de f à U_r est nulle, et donc les coefficients de son DSE sur U_ρ sont tous nuls, et f est nulle sur U_ρ. Cela montre l'injectivité du morphisme d'anneaux:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\to \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f|_{U_r} \end{aligned}$$

4.

Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}, \quad r < \rho$. L'application:

$$\begin{aligned} \|\|_r : \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n \end{aligned}$$

est bien définie.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| \, r^n \\ &= |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n \\ &= |\lambda| \, \|f\|_r \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|f\|_r = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0 \qquad (\text{car } r > 0) \\ &\Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \, r^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n \\ &= \|f\|_r + \|g\|_r \end{aligned}$$

ce qui finit de montrer que $\|.\|_r$ est une norme sur $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$; de plus elle est sous-multiplicative car

$$\begin{aligned}
\|fg\|_r &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, r^k\, |b_{n-k}|\, r^{n-k} \\
&= \|f\|_r \|g\|_r
\end{aligned}$$

5.

On a:

$$\begin{aligned}
\forall t \in U_r, \quad |f_n(t)| &= \left|\sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p\right| \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}|\, |t|^n \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{np}|\, r^n \\
&= \|f_n\|_r
\end{aligned}$$

qui est par hypothèse le terme d'une série numérique convergente. Donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement vers f telle que

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{np} t^p$$

A t fixé dans U_r, $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\sum_{p\geqslant 0} a_{np} t^p$ converge absolument et la somme est majorée par $\|f_n\|_r$, qui est le terme d'une série convergente. On peut inverser les sommations dans la série numérique double ci-dessus et

$$\forall t \in U_r, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} a_{np}) t^p \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\|f - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_r &= \|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n\|_r \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_r \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

car c'est le reste d'une série numérique convergente.

6.

a. Quitte à diviser f par $f(0) \neq 0$, on peut maintenant supposer $f(0) = 1$ car

$$\frac{1}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f} \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$$

b. $fg \in \mathcal{D}_r(\mathbb{R})$ et sa somme et le produit de cauchy de $f(t)$ et $g(t)$:

$$(fg)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k} t^n$$

donc par unicité du DSE,

$$\begin{aligned}\forall t \in U_r, f(t)g(t) = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \quad \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{si } n > 0 \\ b_0 a_0 = b_0 = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

c. La définition du rayon de convergence d'une série entière est

$$R = \sup\{r \geqslant 0, |a_n|\, r^n \text{ est bornée}\}$$

donc comme $R_f \geqslant \rho > s > 0$,

$$\begin{aligned}(a_n s^n) \text{ bornée} &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n|\, s^n \leqslant M \\ &\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant M \frac{1}{s^n} \leqslant (\underbrace{\frac{\max\{1, M\}}{s}}_{=c})^n\end{aligned}$$

d. On a $|b_0| = 1 \leqslant (2c)^0$, puis supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n - 1 \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}|bn| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|\, |b_{n-k}| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} c^k (2c)^{n-k} \\ &= c^n \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \\ &= c^n \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \\ &\leqslant c^n 2^n\end{aligned}$$

e. On a montré que

$$|b_n|\frac{1}{(2c)^n}\leqslant 1$$

donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ vérifie $R_g \geqslant \frac{1}{2c} > 0$ et donc g est bien définie sur un intervalle de longueur non nulle et

$$\forall t \in U_{\min\{R_g,\rho\}}, f(t)g(t) = 1$$

7.

On a $0, 1 \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$, qui est de plus stable par opposé, somme, produit. De plus, si $f, g \in \mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})^2$, avec $f \neq 0$,

$$\begin{aligned}
fg = 0 &\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad f(t)g(t) = 0\\
&\Rightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho,R(\frac{1}{f})\}}(\neq \varnothing), \quad \frac{1}{f(t)}f(t)g(t) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall t \in U_{\min\{\rho,R(\frac{1}{f})\}}, \quad g(t) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall t \in U_\rho, \quad g(t) = 0 \qquad \text{(d'après le raisonnement déjà fait en 3)}\\
&\Leftrightarrow g = 0_{\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R})$ est bien un anneau intègre.

8.

a. L'application

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X]) &\to \mathbb{R}^+\\
P = f_0 + f_1X + \cdots + f_nX^n &\mapsto \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_r s^i
\end{aligned}$$

est bien définie car $r < \rho$.

$$\begin{aligned}
\|\lambda P\|_{rs} &= \sum_{i=0}^{n} \|\lambda f_i\|_r s^i\\
&= |\lambda| \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_r s^i\\
&= |\lambda|\, \|P\|_{rs}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|P + Q\|_{rs} &= \sum_{i=0}^{n} \|f_i + g_i\|_r s^i\\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n} (\|f_i\|_r + \|g_i\|_r)s^i\\
&= \|P\|_{rs} + \|Q\|_{rs}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|P\|_{rs} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_r s^i = 0\\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![0, n]\!], \quad \|f_i\|_r = 0 \qquad (s > 0)\\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![0, n]\!], \quad f_i = 0\\
&\Leftrightarrow P = 0
\end{aligned}$$

Donc $\|.\|_{rs}$ est bien une norme.

b.

$$\begin{aligned}PQ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f_i g_j X^{i+j}\\ &= \sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l} f_j g_{l-j} X^l\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|PQ\|_{rs} &= \|\sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l} f_j g_{l-j} X^l\|_{rs}\\ &= \sum_{l=0}^{n+m}\|\sum_{j=0}^{l} f_j g_{l-j}\|_r s^l\\ &\leqslant \sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l}\|f_j g_{l-j}\|_r s^l\\ &\leqslant \sum_{l=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{l}\|f_j\|_r\|g_{l-j}\|_r s^l \qquad (\text{cf. } 4)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\|f_i\|_r\|g_j\|_r s^{i+j}\\ &= \|P\|_{rs}\|Q\|_{rs}\end{aligned}$$

9.

a. A t fixé, on fait la division euclidienne du polynôme $A(t)$ par $B(t) \neq 0$, ce qui donne un unique couple$(Q(t), R(t)) \in (\mathbb{R}_{n-d}[X] \times \mathbb{R}_{d-1}[X])$. On définit ainsi implicitement, de manière unique, une fonction

$$\begin{aligned}U_\rho &\to \mathbb{R}_{n-d}[X] \times \mathbb{R}_{d-1}[X]\\ t &\mapsto (Q(t), R(t))\end{aligned}$$

Reste à montrer que les fonctions Q, R sont dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ et $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$, respectivement. Cela vient du fait que B est unitaire car alors, en notant respectivement a, b, q, r les fonctions composantes de A, B, Q, R respectivement, on obtient par identification des coefficients pour tout t:

$$\begin{aligned}q_{n-d} \times 1 &= a_n \qquad (1)\\ q_{n-d-1} \times 1 &= a_{n-1} - q_{n-d} b_{d-1}\\ &\vdots\\ q_0 \times 1 &= a_d - \sum_{p=1}^{\min\{d,n-d\}} q_p b_{d-p}\end{aligned}$$

et

$$R(t) = A(t) - B(t)Q(t)$$

montre, par une récurrence immédiate, puisque $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$ est un anneau, que Q puis R sont dans $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ et $\mathcal{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$, respectivement.

b. On multiplie les équations 1 par une puissance de X adéquate pour reconstruire la fin de la fonction A:

$$\begin{aligned} q_{n-d}X^n &= a_nX^n \\ q_{n-d-1}X^{n-1} &= a_{n-1}X^{n-1} - q_{n-d}X^{n-d}b_{d-1}X^{d-1} \\ &\vdots \\ q_0X^d &= a_dX^d - \sum_{p=1}^{\min\{d,n-d\}} q_pX^pb_{d-p}X^{d-p} \end{aligned}$$

En ajoutant on obtient:

$$X^dQ = \sum_{i=d}^{n} a_iX^i - \sum_{i=d}^{n-1} \underbrace{\sum_{k+l=i} q_kX^kb_lX^l}_{\text{coeff. } i \text{ du produit } Q(B-X^d)}$$

$$\Leftrightarrow X^dQ + \sum_{i=d}^{n-1}\sum_{k+l=i} q_kX^kb_lX^l = \sum_{i=d}^{n} a_iX^i \tag{2}$$

On remarque que:

$$\begin{aligned} \|X^dQ + \sum_{i=d}^{n-1}\sum_{k+l=i} q_kX^kb_lX^l\|_{rs} &\geqslant \|X^dQ\|_{rs} - \|\sum_{i=d}^{n-1}\sum_{k+l=i} q_kX^kb_lX^l\|_{rs} \\ &= s^d\|Q\|_{rs} - \|\sum_{i=d}^{n-1}\sum_{k+l=i} q_kX^kb_lX^l\|_{rs} \\ &\geqslant s^d\|Q\|_{rs} - \|\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k+l=i} q_kX^kb_lX^l\|_{rs} \\ &= s^d\|Q\|_{rs} - \|Q(B-X^d)\|_{rs} \\ &\geqslant s^d\|Q\|_{rs} - \|Q\|_{rs}\|B-X^d\|_{rs} \qquad \text{(cf. 8.b)} \end{aligned}$$

On prend maintenant la $\|.\|_{rs}$ de l'équation 2 pour avoir:

$$\begin{aligned} \|Q\|_{rs}(s^d - \|B-X^d\|_{rs}) &\leqslant \|\sum_{i=d}^{n} a_iX^i\|_{rs} \\ &\leqslant \|A\|_{rs} \end{aligned}$$

on obtient la majoration voulue si $s^d - \|B - X^d\| \geqslant 0$

$$\|Q\|_{rs} \leqslant \frac{\|A\|_{rs}}{s^d - \|B-X^d\|_{rs}}$$

De plus on a:

$$A = \underbrace{QX^d}_{\text{valuation}\geqslant d} + Q(B-X^d) + R$$

donc $\forall i \in [\![0, d-1]\!]$,

$$\text{coeff. } i \text{ de } Q(B-X^d) \times X^i + r_iX^i = a_iX^i$$

En sommant puis en prenant la norme $\|.\|_{rs}$,

$$\begin{aligned}
&\|R\|_{rs} - \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \leqslant \|A\|_{rs} \\
\Rightarrow \quad & \|R\|_{rs} \leqslant \|A\|_{rs} + \|Q\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs} \\
\Rightarrow \quad & \|R\|_{rs} \leqslant \|A\|_{rs} + \frac{\|A\|_{rs}\|B - X^d\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}} \\
\Leftrightarrow \quad & \|R\|_{rs} \leqslant \frac{s^d\|A\|_{rs}}{s^d - \|B - X^d\|_{rs}}
\end{aligned}$$