CONCOURS MINES-PONTS 2023
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Supposons $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.On rappelle que les valeurs propres d'une matrices $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ sont réelles; soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S, et X $(\neq 0)$ un vecteur propre associé

$$\begin{aligned}\langle SX, X\rangle &= (SX)^T X\\ &= \lambda X^T X\\ &= \lambda \|X\|^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda = \frac{\langle SX, X\rangle}{\|X\|^2} \geqslant 0$$

Cela montre que $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, supposons $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$. On peut diagonaliser en base orthonormale

$$\begin{aligned}S &= Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda 2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}Q^T\\ &= QDQ^T\end{aligned}$$

avec Q orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle SX, X\rangle &= X^T SX\\ &= X^T QDQ^T X\\ &= (Q^T X)^T DQ^T X\\ &= Q^T X^T DQ^T X\\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_i y_i^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

On a bien $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2.

Soit $(S_1, S_2) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$.Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle((1-t)S_1 + tS_2)X, X\rangle &= X^T S X \\ &= (1-t)\underbrace{\langle S_1X, X\rangle}_{\geqslant 0} + t\underbrace{\langle S_2X, X\rangle}_{\geqslant 0} \geqslant 0\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est positive par convexité de l'ensemble $\mathbb{R}^+$. Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.

Similairement, soit $(S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$.Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle((1-t)S_1 + tS_2)X, X\rangle &= X^T S X \\ &= (1-t)\underbrace{\langle S_1X, X\rangle}_{>0} + t\underbrace{\langle S_2X, X\rangle}_{>0} > 0\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement positive par convexité de l'ensemble $\mathbb{R}^{+*}$. Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

Ces ensembles ne sont pas des espaces vectoriels puisqu'ils contiennent I_n mais pas $-I_n$.

3.

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned}A &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= S^2\end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. La matrice

$$\begin{aligned}S &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^{-1}\end{aligned}$$

est une matrice symétrique réelle vérifiant $Sp(S) = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ et donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4.

La propriété est triviale pour $p = 1$ et correspond à la définition de la convexité d'une fonction pour $p = 2$. Soit maintenant $p > 2$. si $\lambda_p = 1$ on est ramené au cas trivial $p = 1$ donc on peut supposer $\lambda_p < 1$. On peut ainsi écrire:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j = (1-\lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \underbrace{\frac{\lambda_j}{1-\lambda_p}}_{\lambda'_j} x_j + \lambda_p x_p$$

En appliquant une premiére fois la propriété avec $p = 2$ on obtient:

$$f(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j) \leqslant (1-\lambda_p) f(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_p} x_j) + \lambda_p f(x_p)$$

En appliquant une deuxième fois la propriété (hypothèse de récurrence) puisqu'on remarque que $\sum_{j=1}^{p-1} \lambda'_j = 1$,

$$\begin{aligned} f(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j) &\leqslant (1-\lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_p} f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(x_j) \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang p et on peut conclure.

5.

La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} \geqslant 0$$

ce qui montre que la fonction est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ les valeurs propres de M répétées avec leur ordre de multiplicité. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} M &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \det M &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

Si $\exists i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda_i = 0$, la propriété est triviale. On peut maintenant supposer que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. On applique alors le résultat de la question précédente à la fonction f

$$\begin{aligned}
& f(\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{n}\lambda_j) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{n} f(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & - \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \leqslant - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & - \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \leqslant - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & \quad \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(\lambda_j) \\
\Leftrightarrow & \quad \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \geqslant \frac{1}{n} \ln(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j) \\
\Leftrightarrow & \quad \ln(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_j) \geqslant \ln(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\frac{1}{n}}) \\
\Leftrightarrow & \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geqslant (\prod_{j=1}^{n} \lambda_j)^{\frac{1}{n}} \\
\Leftrightarrow & \quad \frac{\operatorname{Tr} M}{n} \geqslant (\det M)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

6.

Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned}
M &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\
&= UDU^T
\end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} M^T M &= \operatorname{Tr} UD \underbrace{U^T U}_{=I_n} DU^T \\
&= \operatorname{Tr} UD^2U^T \\
&= \operatorname{Tr} D^2U^TU \\
&= \operatorname{Tr} D^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

7.

On peut noter que le résultat précédent est valable pour les matrices de $S_n(\mathbb{R})$. Ensuite, en notant $\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$, on a

$$\begin{aligned}\|M\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \\ &\geqslant \sqrt{\rho(M)^2} \\ &= \rho(M)\end{aligned}$$

De plus, la diagonalisation de la matrice $M - \det^{\frac{1}{n}}(M) I_n$ s'obtient facilement à l'aide de celle de M:

$$\begin{aligned}M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \det^{\frac{1}{n}}(M) \end{bmatrix} U^T \\ &= U(D - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n) U^T\end{aligned}$$

ce qui permet en particulier de déterminer son spectre. On peut maintenant appliquer directement la formule de l'énoncé aux valeurs propres de $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$:

$$2\rho(M)(\frac{\operatorname{Tr} M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}}) \geqslant \frac{1}{n} \|M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n\|^2$$

Comme $\rho(M) > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Tr} M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}} &\geqslant \frac{\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n\|^2}{2n\rho(M)} \\ &\geqslant \frac{\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}} I_n\|^2}{2n\|M\|}\end{aligned}$$

8.

On commence par suivre l'indication de l'énoncé en utilisant le résultat de la question 3:

$$\begin{aligned}A &= S^2 \\ &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{= I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U D_1 D_1 U^T \\ &= (U D_1)(U D_1)^T\end{aligned}$$

On est alors tenté de choisir $Q' = UD_1$ pour répondre à la question posée; toutefois il n'y a peu de chance que ce choix fournisse la forme souhaitée pour la matrice B car on ne l'a pas fait encore intervenir dans le raisonnement. Essayons:

$$\begin{aligned} Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1} &= (UD_1)^{-1}B((UD_1)^T)^{-1} \\ &= D_1^{-1}U^{-1}B((U^T)^{-1}((D_1^T)^{-1} \\ &= D_1^{-1}U^TBUD_1^{-1} \\ &= B' \end{aligned}$$

Cette matrice B' n'est a priori pas diagonale, par contre elle est symétrique et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale D:

$$\exists V \in O_n(\mathbb{R}), \quad B' = VDV^T$$

On peut alors voir que

$$\begin{aligned} \forall W \in O_n(\mathbb{R}), \quad A &= UD_1\underbrace{WW^T}_{=I_n}D_1U^T \\ &= (UD_1W)(UD_1W)^T \end{aligned}$$

Le choix qui s'impose est donc $W = V$, soit $Q = Q'V = UD_1V \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} Q^{-1}B(Q^T)^{-1} &= V^TQ'^{-1}B(Q'^T)^{-1}V \\ &= V^TB'V \\ &= D \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^TBX > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^TQDQ^TX > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad (Q^TX)^TD(Q^TX) > 0 \qquad ① \end{aligned}$$

Comme $Q^T \in GL_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} Q^TM_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} &= \{QX, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\} \\ &= M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ① &\Leftrightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^TDX > 0 \\ &\Leftrightarrow D \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow Sp(D) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

9.

10.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ les valeurs propres de D répétées avec leur ordre de multiplicité. La décomposition précédente permet d'écrire

$$\begin{aligned}
A+B &= QQ^T + QDQ^T \\
&= Q(I_n + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix})Q^T \\
&= Q \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_n \end{bmatrix} Q^T
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= QQ^T + QDQ^T \\
&= \det Q \det \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_n \end{bmatrix} \det Q^T \\
&= \det Q^2 (\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i))
\end{aligned}$$

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} = \det Q^{\frac{2}{n}} (1 + (\prod_{i=1}^n \lambda_i)^{\frac{1}{n}})$$

Donc:

$$\begin{aligned}
(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow \det Q^{\frac{2}{n}} (\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i))^{\frac{1}{n}} \geqslant \det Q^{\frac{2}{n}} (1 + (\prod_{i=1}^n \lambda_i)^{\frac{1}{n}}) \\
&\Leftrightarrow \quad (\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i))^{\frac{1}{n}} \geqslant (1 + (\prod_{i=1}^n \lambda_i)^{\frac{1}{n}}) \qquad (>0) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i))^{\frac{1}{n}} \geqslant \ln(1 + (\prod_{i=1}^n \lambda_i)^{\frac{1}{n}}) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) \geqslant \ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln \lambda_i}) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1+\lambda_i) \geqslant \ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln \lambda_i}) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1+e^{\ln \lambda_i}) \geqslant \ln(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln \lambda_i})
\end{aligned}$$

Un peu d'observation convainc que le dernière inégalité est la traduction (en utilisant le résultat de 4 avec $x_i = \ln \lambda_i$) de la convexité de la fonction $g : x \mapsto \ln(1+e^x)$, démontrée dans la question 9.

11.

On applique la question précédente qui nous donne l'inégalité

$$\begin{aligned}(\det((1-t)A+tB))^{\frac{1}{n}} &\geqslant (\det(1-t)A)^{\frac{1}{n}} + (\det tB)^{\frac{1}{n}} \\ &= (1-t)(\det A)^{\frac{1}{n}} + t(\det B)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la multilinéarité du déterminant.

Vu l'allure du résultat avec les t en exposant et le produit des déterminants, il semble naturel à ce stade d'essayer de prendre le ln de l'inégalité:

$$\frac{1}{n}\ln\det((1-t)A+tB) \geqslant \ln\left[(1-t)(\det A)^{\frac{1}{n}} + t(\det B)^{\frac{1}{n}}\right] \qquad ②$$

La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc

$$\begin{aligned}② &\geqslant (1-t)\ln((\det A)^{\frac{1}{n}}) + t\ln((\det B)^{\frac{1}{n}}) \\ &= \frac{1}{n}[(1-t)\ln(\det A) + t\ln(\det B)] \\ &= \frac{1}{n}[\ln((\det A)^{(1-t))} + \ln((\det B)^{t})] \\ &= \frac{1}{n}\ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^{t})\end{aligned}$$

On a donc montré

$$\begin{aligned}&\forall t\in[0,1],\quad \frac{1}{n}\ln\det((1-t)A+tB) \geqslant \frac{1}{n}\ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^{t}) \\ \Leftrightarrow\quad &\forall t\in[0,1],\quad \ln\det((1-t)A+tB) \geqslant \ln((\det A)^{(1-t)}(\det B)^{t}) \\ \Leftrightarrow\quad &\forall t\in[0,1],\quad \det((1-t)A+tB) \geqslant (\det A)^{(1-t)}(\det B)^{t}\end{aligned}$$

A noter que le sens qu'il faut donner à l'expression $\det A^{(1-t)}\det B^{t}$ de l'énoncé n'est pas trés clair pour $t\notin\mathbb{Z}$.

12.

La démonstration dans la question précédente a montré que

$$\forall t\in[0,1]\quad \forall (A,B)\in(S_n^{++}(\mathbb{R}))^2,\quad \ln\det((1-t)A+tB) \geqslant (1-t)\ln(\det A) + t\ln(\det B)$$

i.e. la fonction $\ln\circ\det$ est concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

13.

On rappelle que le polynôme caractéristique de la matrice A est:

$$\begin{aligned}P_A(t) &= \det(A-tI_n) \\ &= (-1)^n\prod_{i=1}^{n}(t-\lambda_i)\end{aligned}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A. Donc,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t) &= \prod_{i=1}^{n} t(\frac{1}{t}+\lambda_i t) \\
&= (-1)^n t^n \prod_{i=1}^{n}(-\frac{1}{t}-\lambda_i t) \\
&= (-1)^n t^n (-1)^n P_A(-\frac{1}{t}) \\
&= t^n \det(A+\frac{1}{t}I_n) \\
&= t^n \det(A+\frac{1}{t}I_n) \\
&= t^n (\frac{1}{t})^n \det(tA+I_n) \qquad ③ \\
&= g(t)
\end{aligned}$$

On a utilisé la multilinéarité du déterminant(ou linéarité par rapport aux colonnes) en ③. L'égalité est bien sur toujours vraie pour $t=0$. g est donc une fonction polynôme, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

14.

Puisque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda_i > 0$. Donc, $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (1+\lambda_i t) > 0$ et $g(t) > 0$ et:

$$\begin{aligned}
\ln g(t) &= \ln \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\lambda_i t) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t \qquad\qquad (\ln(1+x) \leqslant x)④ \\
&= t\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\
&= t \operatorname{Tr} A
\end{aligned}$$

On a utilisé une inégalité (de convexité) bien connue en ④.

15.

On pose $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.Il suffit de revenir à la formule de Leibniz du déterminant

$$f_A(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n}(a_{i,\sigma(i)} + t m_{i,\sigma(i)})$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$ et $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1,1\}$ la signature de σ, pour voir que la fonction f_A est une fonction polynôme; elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned}
f_A(t) = \det(A+tM) &= \det(A(I_n + tA^{-1}M)) \\
&= \det(A)\det(I_n + tA^{-1}M))
\end{aligned}$$

et utiliser la question 13.

16.

On peut déjà noter que si $M = 0$, c'est évident donc on suppose dans la suite de la question que $M \neq 0$.

Puisque A et M sont symétriques, $A + tM$ l'est aussi. De plus si on reprend la décomposition et les notations de la question 8 avec $B = M \in S_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} A + tM &= QQ^T + tQDQ^T \\ &= Q \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_n t \end{bmatrix} Q^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle (A+tM)X, X \rangle &= X^T(A+tM)X \\ &= X^T Q \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_n t \end{bmatrix} Q^T X \\ &= \sum_{j=1}^{n} (1+\lambda_i t) y_i^2 \end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La quantité $\sum_{j=1}^{n}(1+\lambda_i t)y_i^2$ est strictement positive si on s'arrange pour que $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad 1+\lambda_i t > 0$ et $\exists i \in [\![1,n]\!]^2, \quad yi \neq 0$. La deuxiéme condition est vérifiée si $X \neq 0$ car $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour la première, il suffit de se restreindre à des petites valeurs de t, précisément

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad 1+\lambda_i t > 0 \Leftarrow |t| < \min_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \lambda_i \neq 0}} \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{\max_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \lambda_i \neq 0}} |\lambda_i|} = \frac{1}{\rho(D)} = \epsilon_0 > 0$$

où $\rho(D)$ est le rayon spectral défini en 7.

On a donc démontré:

$$\forall t \in \,]-\epsilon_0, \epsilon_0[\quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle (A+tM)X, X \rangle = \sum_{j=1}^{n} (1+\lambda_i t) y_i^2 > 0$$

i.e.

$$\forall t \in \,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad A + tM \in S_n^{++}$$

17.

$$A + tM = A(I_n + A^{-1}M)$$

donc

$$\begin{aligned} f_A(t) = \det(A+tM) &= \det(A(I_n + tA^{-1}M)) \\ &= \det(A)\det(I_n + tA^{-1}M)) \end{aligned}$$

En notant $A^{-1}M = (c_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$,

$$I_n + tA^{-1}M = \begin{bmatrix} 1+c_{11}t & c_{12}t & \dots & c_{nn}t \\ c_{21}t & 1+c_{22}t & \dots & c_{2n}t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}t & c_{n2}t & \dots & 1+c_{nn}t \end{bmatrix}$$

Quand on calcule le déterminant de cette matrice en utilisant la formule de Leibniz, les seuls termes de degré 1 en t sont obtenus en restant sur la diagonale (terme correspondant à $\sigma = \mathrm{id}$ dans la formule), on choisit une et une seule fois un $c_{ii}t$ que l'on multiplie par les seuls termes constants restants à savoir les 1 (les seuls éléments constants dans la matrice sont les 1 de la diagonale et éventuellement des 0). Dans la fonction polynomiale $\det(I_n + A^{-1}Mt)$, le terme de degré 1 en t est donc

$$\begin{aligned} c_{11}t \times \underbrace{1 \times \cdots \times 1}_{n-1 \text{ fois}} + 1 \times c_{22}t \times 1 \times \cdots \times 1 + \cdots + 1 \times \cdots \times 1 \times c_{nn}t &= t\sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\ &= \mathrm{Tr}(A^{-1}M))t \end{aligned}$$

Il est clair que le terme constant dans $\det(I_n + A^{-1}Mt)$ s'obtient d'une seule manière et vaut 1 (c'est $\det I_n$).

Alternativement on pouvait se servir de la formule de la question 13.

On a donc

$$\det(I_n + tA^{-1}M) = 1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + \alpha t^2 + \cdots + \beta t^n$$

puis,

$$\begin{aligned} f_A(t) = \det A \det(I_n + tA^{-1}M) &= \det A + \det A\,\mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + \det A\alpha t^2 + \cdots + \det A\beta t^n \\ &\underset{t\to 0}{=} \det A + \det A\,\mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + \mathrm{o}\,(t) \end{aligned}$$

18.

Le développement limité d'ordre 1 en 0 que l'on vient d'obtenir montre que la fonction f_A est dérivable en 0, et que $f'_A(0) = \det A\,\mathrm{Tr}(A^{-1}M)$.

Soit $t_0 \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[$, fixé.L'idée est d'utliser le fait que $A + t_0M \in S_n^{++}$ pour décaler l'origine des t puisque l'on sait dériver en 0:

$$\begin{aligned} f_A(t) = \det(A+tM) &= \det(\underbrace{A + t_0M}_{\in S_n^{++}} + (t-t_0)M) \\ &= f_{A+t_0M}(t-t_0) \end{aligned}$$

D'aprés la question prédente (en remplaçant A par $A + t_0M$), on sait que la fonction f_{A+t_0M} est dérivable en 0 et que $f'_{A+t_0M}(0) = \det(A+t_0M)\,\mathrm{Tr}((A+t_0M)^{-1}M)$.

Par composition, la fonction f_A est dérivable en t_0 et $f'_A(t_0) = \det(A+t_0M)\,\mathrm{Tr}((A+t_0M)^{-1}M)$

$$\forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad f'_A(t) = \det(A+tM)\,\mathrm{Tr}((A+tM)^{-1}M)$$

19.

On sait que

$$\forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\det(A+tM)}C^T$$

où $C = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la matrice des cofacteurs, Δ_{ij} est le déterminant de la matrice $A + tM$ privé de la ligne i et de la colonne j. Cette expression montre que Φ est une fonction rationelle, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\epsilon_0, \epsilon_0[$. Φ est donc de classe C^∞ sur $]-\epsilon_0, \epsilon_0[$ (cette justification n'était pas demandée).

Φ admet donc un développement limité d'ordre 1 en 0:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\underset{t\to 0}{=} \Phi(0) + \Phi'(0)t + \mathrm{o}\,(t) \\ \Phi(t) &\underset{t\to 0}{=} A^{-1} + \Phi'(0)t + \mathrm{o}\,(t) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times (A + tM) = I_n \\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A = I_n - t\Phi(t) \times M \\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A = I_n - t\Phi(t) \times M \\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A = I_n - t(A^{-1} + \Phi'(0)t + \mathrm{o}\,(t))M \\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A = I_n - tA^{-1}M - t^2\Phi'(0)M + t\,\mathrm{o}\,(t) \times M \\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A = I_n - tA^{-1}M - \underbrace{t^2\Phi'(0)M + \mathrm{o}\,(t^2)}_{\mathrm{o}\,(t)} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) \times A = I_n - tA^{-1}M + \mathrm{o}\,(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \Phi(t) = A^{-1} - tA^{-1}MA^{-1} + \mathrm{o}\,(t)
\end{aligned}$$

Ce développement limité en 0 montre en passant que $\Phi'(0) = -A^{-1}MA^{-1}$.

20.

Soit

$$\begin{aligned} h_\alpha : \mathbb{R}^{+*} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\alpha}x^{-\alpha} \end{aligned}$$

h_α est de classe C^∞. Comme $\varphi_\alpha = h_\alpha \circ f_A$, et $f_A(]-\epsilon_0, \epsilon_0[) \subset \mathbb{R}^{+*}$, φ_α est bien définie et dérivable sur $]-\epsilon_0, \epsilon_0[$ d'après ce qui précède et

$$\begin{aligned} \forall t \in\,]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \varphi_\alpha'(t) &= f_A'(t)h_\alpha'(f_A(t)) \\ &= -\det(A+tM)\operatorname{Tr}((A+tM)^{-1}M)(\det(A+tM))^{-\alpha-1} \\ &= -\operatorname{Tr}((A+tM)^{-1}M)(\det(A+tM))^{-\alpha} \end{aligned}$$

21.

Notons $\Phi(t)M = (A+tM)^{-1}M = \Gamma(t) = (\gamma_{ij}(t))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ On sait d'après 19 que $\Gamma = \Phi M$ est dérivable en 0 et

$$\begin{aligned} \Gamma'(0) &= \Phi'(0)M \\ &= -A^{-1}MA^{-1}M \\ &= -(A^{-1}M)^2 \end{aligned}$$

D'après la question 20,

$$\begin{aligned}\forall t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \quad \varphi'_\alpha(t) &= -\operatorname{Tr}(\Gamma(t))(\det(A+tM))^{-\alpha}\\ &= -(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}(t))(\det(A+tM))^{-\alpha}\\ &= -\alpha(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}(t))\varphi_\alpha(t)\end{aligned}$$

Comme les $\gamma_i i$ sont les composantes d'une fonction dérivable, cela montre que φ_α est deux fois dérivable en 0 et

$$\begin{aligned}\varphi''_\alpha(0) &= -\alpha(\sum_{i=1}^{n} \gamma'_{ii}(0))\varphi_\alpha(0) - \alpha(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}(0))\varphi'_\alpha(0)\\ &= -(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \gamma'_{ii}(0)}_{\operatorname{Tr}\Gamma'(0)})(\det A))^{-\alpha} - \alpha(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}(0)}_{\operatorname{Tr}\Gamma(0)})(-\operatorname{Tr}(A^{-1}M)(\det A)^{-\alpha})\\ &= (\det A)^{-\alpha}(\operatorname{Tr}((A^{-1}M)^2) + \alpha(\operatorname{Tr}(A^{-1}M))^2)\end{aligned}$$