

CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad 1 + t^2 &\leq 2 \\ \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad (1 + t^2)^n &\leq 2^n \\ \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1 + t^2)^n} &\geq \frac{1}{2^n} \\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt &\geq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

2.

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ t &\mapsto \frac{1}{(1 + t^2)^n} \end{aligned}$$

est continue par morceaux, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$$

$t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ étant intégrable en $+\infty$ car $2n > 1$, f est intégrable et K_n est bien définie.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt &= [\arctan t]_0^x \\ &= \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{2}$$

3.

On utilise l'inégalité de convexité:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 + t^2 \geq 2t$$

Soit $x \geq 1$, $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &\leq \int_1^x \frac{1}{2^n t^n} dt \\ &= \frac{1}{2^n} \left[-\frac{1}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{2^n} \left(-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \right) \\ &\leq \frac{1}{(n-1)2^n} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\ &\leq \frac{1}{(n-1)2^n} \end{aligned}$$

montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

4.

On a:

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\ &= I_n + O\left(\frac{1}{n2^n}\right) \end{aligned}$$

puis d'après 1,

$$K_n = I_n + \underbrace{O\left(\frac{I_n}{n}\right)}_{o(I_n)}$$

i.e.

$$K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$$

5.

Soit $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int_0^x \frac{(1+t^2) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right) \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$K_n = 2n(K_n - K_{n+1})$$

6.

On réécrit la récurrence précédente

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$$

D'où il vient facilement que

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \times 2} K_1 \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On applique la formule de Stirling

$$(2n-2)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2(n-1)}{e}\right)^{2(n-1)} \sqrt{4\pi(n-1)}$$

et

$$(n-1)!^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{2(n-1)} 2\pi(n-1)$$

Après simplification on obtient

$$K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

7.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}t = \phi(t)$. On a $\phi'(t) = \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} \frac{1}{\sqrt{n}} du \\ \Rightarrow \sqrt{n}I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} du \end{aligned}$$

8.

On pose:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ u &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} & \text{si } u \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } u \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

Les f_n sont continues par morceaux. La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ étant convexe sur \mathbb{R}^+ , on a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{u^2}{n} = 1 + u^2$$

donc en posant $\phi(u) = \frac{1}{1+u^2}$,

i $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(u)| \leq \phi(u)$, intégrable en $+\infty$.

ii la suite de fonction (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\sqrt{n}I_n$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

9.

D'après la question 6,

$$\sqrt{n}I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Le changement de variable $\phi(u) = \sqrt{2}u$ nous donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

puis par parité,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

10.

On voit que $t \mapsto t\varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$ est sommable en $+\infty$, donc pour $X > x$,

$$\begin{aligned} \forall t \geq x, \quad \varphi(t) &\leq \frac{t}{x} \varphi(t) \\ \Rightarrow \int_x^X \varphi(t) dt &\leq \frac{1}{x} \int_x^X t\varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_x^X \\ &= \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] \end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$ donne:

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt &\leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{\varphi(x)}{x} \end{aligned}$$

11.

En suivant le fil de la question précédente, l'idée est de trouver une fonction qui minore $t \mapsto \varphi(t)$ et dont une primitive est $-\frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$. Le calcul montre que, en utilisant le fait que $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$,

$$\begin{aligned} \forall t \in [x, +\infty[, \quad \left(-\frac{t}{t^2+1}\varphi(t)\right)' &= \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t) \\ &= \frac{t^4+2t^2-1}{t^4+2t^2+1}\varphi(t) \\ &\leq \varphi(t) \end{aligned}$$

Soit alors $X > x$.

$$\begin{aligned} \int_x^X \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t) dt &\leq \int_x^X \varphi(t) dt \\ \Leftrightarrow -\frac{X}{X^2+1}\varphi(X) + \frac{x}{x^2+1}\varphi(x) &\leq \int_x^X \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$ donne:

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

12.

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$$

on a:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &= \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x} \end{aligned}$$

d'après les deux questions précédentes.

13.

$$A = \bigcup_{p=1}^n A_p$$

De plus, les évènements A_p sont clairement incompatibles deux à deux.

14.

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap (\{R_n \geq x\} \cup \{R_n < x\})) \\
&= P((A \cap \{R_n \geq x\}) \cup (A \cap \{R_n < x\})) \\
&= P(A \cap \{R_n \geq x\}) + P(A \cap \{R_n < x\}) \quad (\text{les événements } \{R_n \geq x\} \text{ et } \{R_n < x\} \text{ sont incompatibles}) \\
&= P(A \cap \{R_n \geq x\}) + P\left(\bigcup_{p=1}^n A_p \cap \{R_n < x\}\right) \\
&= P(A \cap \{R_n \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p \cap \{R_n < x\}) \quad (\text{les événements } A_p \text{ sont incompatibles}) \\
&\leq P(\{R_n \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p \cap \{R_n < x\}) \quad (A \cap \{R_n \geq x\} \subset \{R_n \geq x\})
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
A_p \cap \{|R_n| < x\} &= A_p \cap \{|R_n| < x\} \cap \{|R_p| \geq 3x\} \\
&\subset A_p \cap \{|R_p - R_n| \geq 2x\}
\end{aligned}$$

puisque $|R_n - R_p| \geq |R_p| - |R_n|$.

16.

On a

$$R_n - R_p = Z_{p+1} + \dots + Z_n$$

Comme A_p est décrit en termes des VA Z_1, \dots, Z_p , les événements A_p et $\{|R_p - R_n| \geq 2x\}$ sont indépendants puisque les Z_i le sont.

On en déduit:

$$\begin{aligned}
P(A) &\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p \cap \{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \\
&= P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p) P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \\
&\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p) \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \\
&= P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \sum_{p=1}^n P(A_p) \\
&= P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) P(A) \\
&\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \tag{1}
\end{aligned}$$

17.

L'idée est la suivante: si $|R_p - R_n| \geq 2x$, alors $|R_n| \geq x$ ou $|R_p| \geq x$. Autrement dit,

$$|R_p - R_n| \geq 2x \subset \{|R_p| \geq x\} \cup \{|R_n| \geq x\}$$

On passe aux probabilités:

$$\begin{aligned} P(|R_p - R_n| \geq 2x) &\leq P(\{|R_p| \geq x\} \cup \{|R_n| \geq x\}) \\ &\leq P(\{|R_p| \geq x\}) + P(\{|R_n| \geq x\}) \\ &\leq 2 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_i| \geq x\}) \end{aligned}$$

Cela étant valable pour tout p .

$$\max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(|R_p - R_n| \geq 2x) \leq 2 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_i| \geq x\})$$

L'inégalité 1 donne alors bien ce qu'on voulait démontrer, à savoir:

$$P(A) \leq 3 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_i| \geq x\})$$

18.

$$\begin{aligned} x_{n, n-k} &= -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}} \\ &= -\sqrt{n} + 2\sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} \\ &= -x_{n, k} \end{aligned}$$

Les x_{nk} partitionnent en fait l'intervalle $[-\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ en $n+1$ intervalles de même longueur.

19.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions B_n et φ sont bornées sur \mathbb{R} ,

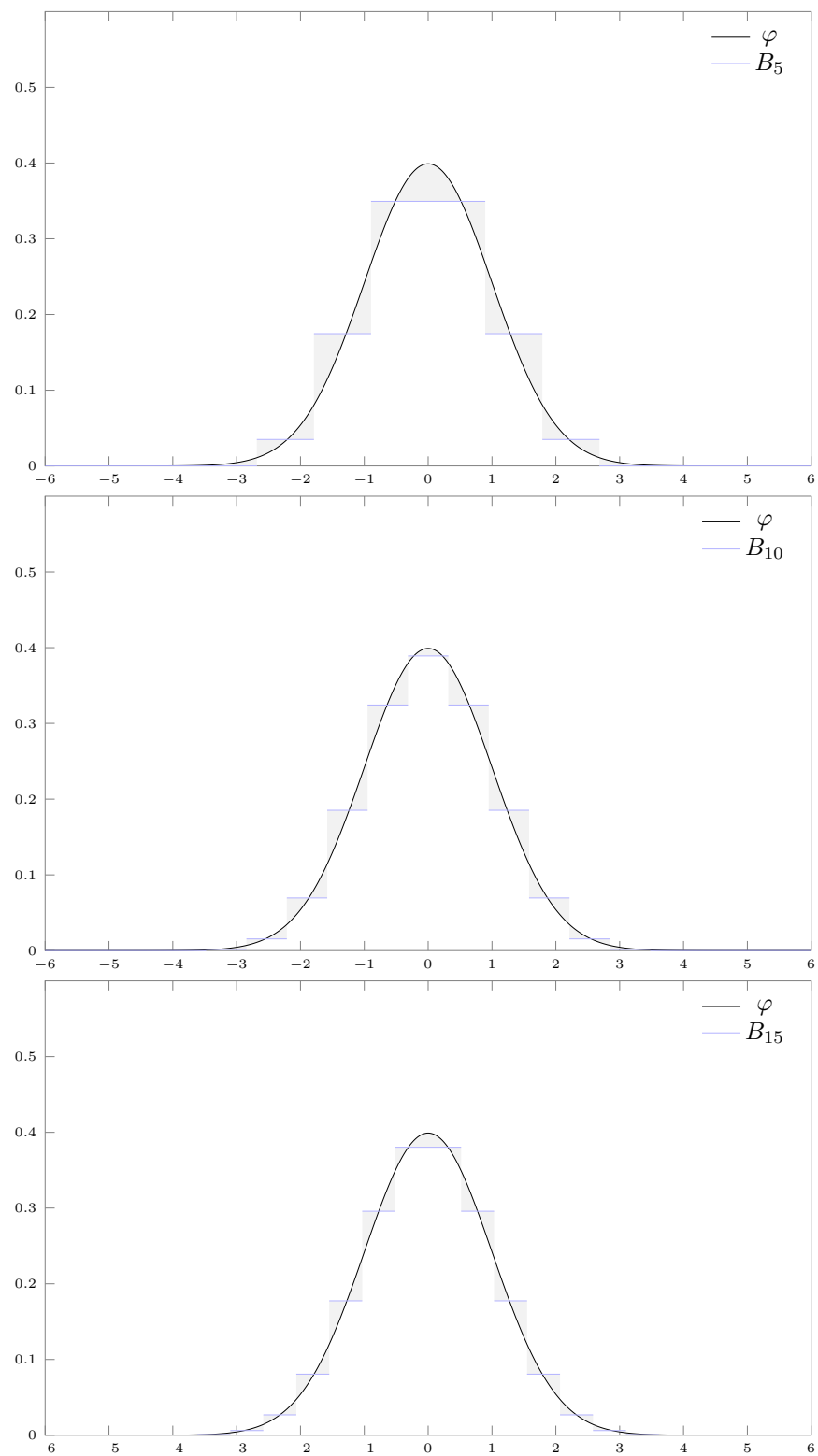
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |B_n(x) - \varphi(x)| &\leq |B_n(x)| + |\varphi(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x)| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

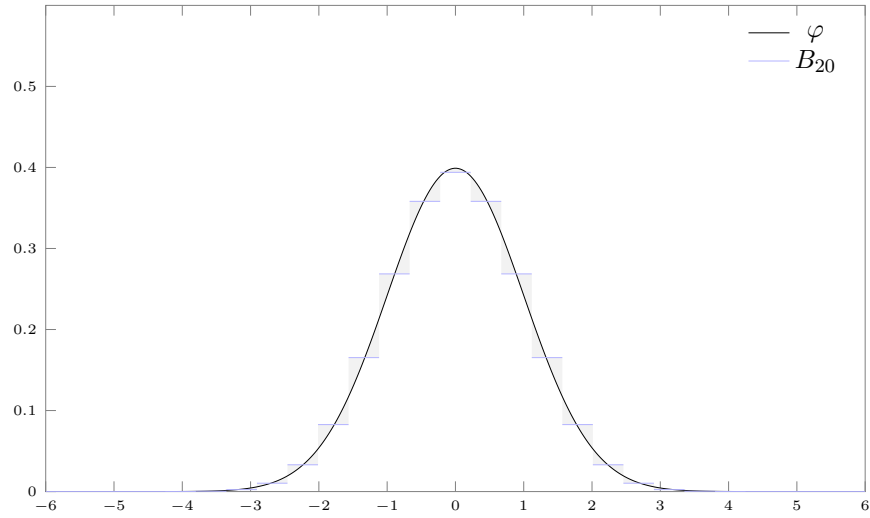
Donc la borne supérieure $\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|$ est bien finie.

20.

Un peu d'observation montre que la fonction $B_n - \varphi$ est paire ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$). En découle directement que

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |B_n(x) - \varphi(x)|$$



FIGURE 0. Représentation de φ , B_5 , B_{10} , B_{15} , B_{20} **21.**

Il suffit de se souvenir du triangle de Pascal, on a:

$$\sup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{p} = \binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si } n = 2p \text{ pair} \\ \binom{n}{p} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{p+1} & \text{si } n = 2p + 1 \text{ impair} \end{cases}$$

De plus $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ pour $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$ pour $k \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Tout cela vient immédiatement par récurrence en utilisant $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

On a donc B_n décroissante sur \mathbb{R}^+ .

22.

Déjà il faut s'intéresser au comportement de k quand n tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} k \in I_n &\Rightarrow x_{n,k} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow k \geq \frac{n}{2} \\ &\Rightarrow k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{aligned}$$

Cela montre que k tend vers l'infini et que $\frac{1}{k} = O(\frac{1}{n})$

On a aussi:

$$\begin{aligned} k \in I_n &\Rightarrow x_{n,k} \leq l + 1 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \leq l + 1 \\ &\Leftrightarrow k \leq \frac{(l+1)\sqrt{n} + n}{2} \\ &\Rightarrow n - k \geq n \frac{1 - (l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}}{2} \end{aligned}$$

$\frac{1-(l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}}{2}$ tend vers $\frac{1}{2} > 0$ donc est borné et > 0 pour n suffisamment grand et on peut écrire:

$$\frac{1}{n-k} \leq \frac{1}{n} \frac{2}{1-(l+1)\frac{\sqrt{n}}{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a ainsi, quand n tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} k!(n-k)! &= \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n-k}\right)\right) \\ &= 2\pi e^{-n} k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n-k}\right)\right) \\ &= 2\pi e^{-n} k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

23.

On a:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi e^{-n} k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

On sait que $\frac{1}{1+O(\frac{1}{n})} = 1 + O(\frac{1}{n})$, d'où

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{k^{k+\frac{1}{2}} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}}$$

puis

$$\begin{aligned} B_n(x_{nk}) &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{(2k)^{k+\frac{1}{2}} (2n-2k)^{n-k+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

24.

On a

$$\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} = -1 + \frac{2k}{n}$$

On peut donc réécrire le résultat de la question précédente:

$$\begin{aligned} B_n(x_{nk}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n} + \frac{n+1}{2}} \left(1 - \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n} + \frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{nk}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}} \end{aligned} \tag{2}$$

Comme $x_{nk} \in [0, l]$ est une suite bornée, $\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1 + \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}} &= (1 + \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}} \\
 &= \exp(-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n} \ln(1 + \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})) \\
 &= \exp(-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}(\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}} + O(\frac{x_{nk}^2}{n}))) \\
 &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2} + O(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\
 &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2}) \exp(O(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\
 &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}})) \\
 &= \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))
 \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{1}{(1 - \frac{x_{nk}}{\sqrt{n}})^{-\frac{x_{nk}}{2}\sqrt{n}}} = \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

$$\begin{aligned}
 (1 - \frac{x_{nk}^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} &= \exp(-\frac{n+1}{2} \ln(1 - \frac{x_{nk}^2}{n})) \\
 &= \exp(-\frac{n+1}{2}(-\frac{x_{nk}^2}{n} + O(\frac{x_{nk}^4}{n^2}))) \\
 &= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2} + \frac{x_{nk}^2}{2n} + O(\frac{x_{nk}^4}{n^2})) \\
 &= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2}) \exp(\frac{x_{nk}^2}{2n} + O(\frac{x_{nk}^4}{n^2})) \\
 &= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2}) \exp(O(\frac{1}{n})) \\
 &= \exp(\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{1}{n}))
 \end{aligned}$$

On peut donc écrire le développement asymptotique 2:

$$B_n(x_{nk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x_{nk}^2}{2})(1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))$$

$$\text{car } (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}))(1 + O(\frac{1}{n})) = (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})).$$

25.

On a

$$[0, l] \subset \bigcup_{k \in I_n} [x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}[$$

Ainsi

$$\sup_{x \in [0, l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \max_{k \in I_n} \sup_{[x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}]} |B_n(x) - \varphi(x)| \quad (3)$$

Or $\forall x \in [x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}]$,

$$\begin{aligned} |B_n(x) - \varphi(x)| &= \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) - \varphi(x) \right| \\ &\leq \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) - \varphi(x) \right| \\ &= \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) \right| + |\varphi(x_{nk}) - \varphi(x)| \\ &\leq \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) \right| + \sup_{[0, l]} |\varphi'| |x_{nk} - x| \\ &\leq \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) \right| + \sup_{[0, l]} |\varphi'| \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à φ de classe C^1 .

On peut repartir de 3 pour obtenir:

$$\sup_{x \in [0, l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \max_{k \in I_n} \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) \right| + \sup_{[0, l]} |\varphi'| \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On définit une suite $k_n \in I_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| B_n(x_{n, k_n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n, k_n}^2}{2}\right) \right| = \max_{k \in I_n} \left| B_n(x_{nk}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{nk}^2}{2}\right) \right|$$

de manière à ce que

$$\sup_{x \in [0, l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \left| B_n(x_{n, k_n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n, k_n}^2}{2}\right) \right| + \sup_{[0, l]} |\varphi'| \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La question précédente appliquée à la suite $(k_n) \in I_n$ donne

$$|B_n(x_{n, k_n}) - \varphi(x_{n, k_n})| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit $\epsilon > 0$. On conclut que

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_1 \Rightarrow \sup_{x \in [0, l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

26.

La question précédente vient de montrer que $\sup_{x \in [0, l]} |B_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $B_n(l) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(l)$ et donc comme $\varphi(l) > 0$,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow B_n(l) \leq 2\varphi(l)$$

27.

Par décroissance de B_n et φ ,

$$\forall x \in [l, +\infty[, \quad (B_n(x), \varphi(x)) \in [0, \max\{B_n(l), \varphi(l)\}]^2 \Rightarrow |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \max\{B_n(l), \varphi(l)\} \leq 2\varphi(l) \leq \epsilon$$

Ainsi

$$\sup_{x \in [l, +\infty[} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$$

Pour $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$\Delta_n = \max\left\{ \sup_{x \in [0, l]} |B_n(x) - \varphi(x)|, \sup_{x \in [l, +\infty[} |B_n(x) - \varphi(x)| \right\} \leq \epsilon$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0$$

28.

On pose:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in [u_n, v_n] \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus [u_n, v_n] \end{cases} \end{aligned}$$

Les \tilde{f}_n sont continues par morceaux. La suite de fonctions f_n convergeant uniformément vers f , on

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_1 \Rightarrow \forall x \in I, \quad |f_n(x)| - |f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq 1$$

donc en posant $\phi = |f| + 1$,

i $\forall n \geq n_1, \quad \forall x \in [u, v], \quad |\tilde{f}_n(x)| \leq \phi(u)$, intégrable sur le segment $[u, v]$.

ii la suite de fonction (\tilde{f}_n) converge simplement sur $[u, v]$ vers la fonction f .

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\int_u^v \tilde{f}_n$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(x) dx = \int_u^v f(x) dx$$

29.

On a $Y_n \in \{0, 1\}$ et T_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ puisque les Y_i son indépendantes.

$$\begin{aligned} \int_{x_{nk} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{nk} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x) dx &= \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \\ &= P(T_n = k) \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}
u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v &\Leftrightarrow u \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \leq v \\
&\Leftrightarrow u\sqrt{n} \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq v\sqrt{n} \\
&\Leftrightarrow u\sqrt{n} + n \leq \sum_{i=1}^n X_i + n \leq v\sqrt{n} + n \\
&\Leftrightarrow u\sqrt{n} + n \leq \sum_{i=1}^n (X_i + 1) \leq v\sqrt{n} + n \\
&\Leftrightarrow \frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2} \leq \frac{v\sqrt{n} + n}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leq T_n \leq \frac{v\sqrt{n} + n}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
P(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v) &= P(\frac{u\sqrt{n} + n}{2} \leq T_n \leq \frac{v\sqrt{n} + n}{2}) \\
&= P(T_n \in J_n) \\
&= \sum_{j \in J_n} P(T_n = j)
\end{aligned}$$

31.

Il est clair que J_n est un intervalle, posons $J_n = \llbracket a_n, b_n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J_n} P(T_n = j) &= \sum_{j \in J_n} \int_{x_{nj} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{nj} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x) dx \\
&= \int_{x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x) dx
\end{aligned}$$

Or

$$x_{n,a_n} = -\sqrt{n} + \frac{2a_n}{\sqrt{n}}$$

Par définition de a_n , on a $\frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leq a_n < \frac{n+u\sqrt{n}}{2} + 1$, i.e $a_n = \lceil \frac{n+u\sqrt{n}}{2} \rceil$. Ou encore

$$u - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}} < u$$

ce qui montre que

$$x_{n,a_n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$$

De même, par définition de b_n , on a $\frac{n+v\sqrt{n}}{2} - 1 < b_n \leq \frac{n+v\sqrt{n}}{2}$, i.e $b_n = \lfloor \frac{n+v\sqrt{n}}{2} \rfloor$. Ou encore

$$v < x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq v + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui montre que

$$x_{n,b_n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v$$

La question 27 a montré la convergence uniforme des B_n vers φ . On applique la question 28 qui montre directement que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in J_n} \mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \int_u^v \varphi(x) dx \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puis, comme les X_i sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \sigma^2(\frac{S_n}{\sqrt{n}}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| \geq v\right) \leq \frac{1}{v^2}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $v_1 > u$ tel que

$$\forall v \geq v_1, \quad \int_u^v \varphi(x) dx \geq \int_u^{+\infty} \varphi(x) dx - \epsilon$$

Soit $v > v_1$ tel que $\frac{1}{v^2} \leq \epsilon$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(v \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) &\leq \mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) = \mathbb{P}(v \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) + \mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > v) \\ &\leq \mathbb{P}(v \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) + \mathbb{P}(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq v) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(v \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) &\leq \mathbb{P}(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) \leq \mathbb{P}(v \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) + \epsilon \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_1 \Rightarrow \left| \mathbb{P}(v \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u) - \int_u^v \varphi(x) dx \right| \leq \epsilon$$

Alors, $\forall n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} \int_u^v \varphi(x) \, dx - \epsilon &\leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u\right) \leq \int_u^v \varphi(x) \, dx + 2\epsilon \\ \Rightarrow \int_u^{+\infty} \varphi(x) \, dx - 2\epsilon &\leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u\right) \leq \int_u^{+\infty} \varphi(x) \, dx + 2\epsilon \end{aligned}$$

On a montré que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{v}} \geq u\right)$ converge, et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{v}} \geq u\right) &= \int_u^{+\infty} \varphi(x) \, dx \\ &= 1 - \Phi(u) \end{aligned}$$