CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Le rayon de convergence est $R = 1$ et

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-x}$$

2.

On sait que la somme précédente est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[, \quad f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}\end{aligned}$$

Donc le rayon de $\sum_{n \geqslant 0} n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= x f'(x) \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\,|x|^n \geqslant |x|^n \geqslant 0 \Rightarrow R \leqslant 1$$

Donc $R = 1$.

3.

On réitère; on sait que la f est de classe C^k sur $]-1,1[$, et

$$\begin{aligned}\forall x\in\,]-1,1[,\quad f^{(k)}(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}(x^n)^{(k)}\\&=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}\\&=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\\&=k!\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}\\&=k!\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}\qquad\left(n<k\Rightarrow\binom{n}{k}=0\right)\end{aligned}$$

Par le même raisonnement que la question précédente, on déduit que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ est 1 et

$$\begin{aligned}\forall x\in\,]-1,1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n&=\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(x)\\&=\frac{x^k}{k!}\frac{(k!)}{(1-x)^{k+1}}\\&=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\end{aligned}$$

4.

Soit $k\in\mathbb{N}$, fixé. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a $0\leqslant n^k|x|^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\underbrace{n(n-1)\dots(n-(k-1))}_{k\text{ factors}}|x|^n=\frac{n!}{k!}|x|^n$, ce qui montre que le rayon de convergence de la série qui définit f_k est le même que celui de la série $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$, soit $R=1$; la fonction f_k est bien définie sur $]-1,1[$.

5.

On voit que $\deg(H_j)=j$. $(H_0,H_1,\dots,H_k)$ est une famille de $k+1=\dim(\mathbb{R}_k[X])$ polynômes de degrés échelonnés, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Par définition d'une base,

$$\exists!(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k})\in\mathbb{R}^{k+1},\quad X^k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j\qquad ①$$

6.

On remarque que

$$\forall j\in[\![1,k]\!],\quad H_j(0)=0$$

donc

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X^k)(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si k=0} \\ 0 & \text{si k>0} \end{cases} \\ &= \delta_{k,0} \\ &= \alpha_{k,0} H_0(0) \\ &= \alpha_{k,0}\end{aligned}$$

D'autre part, le coefficient de X^k dans H_k est $\frac{1}{k!}$, par identification on a donc:

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{k,k}\frac{1}{k!} &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \alpha_{k,k} &= k!\end{aligned}$$

7.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé. On remarque que:

$$\forall i \geqslant j+1, \quad H_i(j) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![0, j]\!], \quad H_i(j) &= \frac{1}{i!} j(j-1)\dots(j-i+1) \\ &= \frac{1}{i!}\frac{j!}{(j-i)!} \\ &= \binom{j}{i}\end{aligned}$$

On peut unifier les deux cas:

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad H_i(j) = \binom{j}{i}$$

On évalue l'égalité ① en $j \in [\![1, k]\!]$:

$$\begin{aligned}j^k &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i}\binom{j}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i}\binom{j}{i} + \alpha_{k,j}\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

8.

```
import numpy as np
from math import factorial

def binom(n,k):
        if k>n:
                return 0
        else:
                return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))

def alpha(k,j):
        res = np.zeros(j+1)
        if k == 0:
                res[0] = 1
        for i in range(1,j+1):
                sum = 0;
                for l in range(i):
                        sum += binom(i,l)*res[l]
                res[i] = i**k-sum
        return res[j]
```

References

[1] Gourdon, Xavier: *Algèbre, 2è édition*, Ellipses (2009)