

CONCOURS X ENS 2023
MATHÉMATIQUES A - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

a. $0 \in \mathbb{H}$, $E \in \mathbb{H}$, puis pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lambda Z + Z' &= \begin{bmatrix} \lambda z_1 + z'_1 & -\lambda \bar{z}_2 - \bar{z}'_2 \\ \lambda z_2 + z'_2 & \lambda \bar{z}_1 + \bar{z}'_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda z_1 + z'_1 & -(\lambda z_2 + z'_2) \\ \lambda z_2 + z'_2 & \lambda z_1 + z'_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}ZZ' &= \begin{bmatrix} z_1 z'_1 - \bar{z}_2 z'_2 & -z_1 \bar{z}'_2 - \bar{z}_2 z'_1 \\ z_2 z'_1 + \bar{z}_1 z'_2 & -z_2 \bar{z}'_2 + z_1 z'_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1 z'_1 - \bar{z}_2 z'_2 & -(z_2 z'_1 + \bar{z}_1 z'_2) \\ z_2 z'_1 + \bar{z}_1 z'_2 & -\bar{z}_2 z'_2 + z_1 z'_1 \end{bmatrix} \\ &= Z(z_1 z'_1 - \bar{z}_2 z'_2, z_2 z'_1 + \bar{z}_1 z'_2) \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

Enfin

$$Z(z_1, z_2)^* = Z(\bar{z}_1, -z_2) \in \mathbb{H}$$

On a montré que \mathbb{H} est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$, stable par $Z \mapsto Z^*$.

b.

$$\begin{aligned}ZZ^* &= Z(|z_1|^2 + |z_2|^2, 0) \\ &= \det(Z)E \\ &= N(Z)E\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}Z \in \mathbb{H}^\times &\Leftrightarrow N(Z) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow Z \neq 0\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
\forall Z' \in \mathbb{H}, \quad ZZ' = Z'Z &\Leftrightarrow \forall (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2 = z_1 z'_1 - \overline{z'_2} z_2 \\ z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2 = z'_2 z_1 + \overline{z'_1} z_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \forall (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} \overline{z_2} z'_2 = \overline{z'_2} z_2 \\ z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2 = z'_2 z_1 + \overline{z'_1} z_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \forall (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2 = z'_2 z_1 + \overline{z'_1} z_2 \end{cases} \quad (\Rightarrow: \text{prendre } z'_2 = z_2) \\
&\Leftrightarrow \forall (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} z_2 = 0 \\ \overline{z_1} z'_2 = z'_2 z_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 0 \\ \overline{z_1} = z_1 \end{cases} \quad (\Rightarrow: \text{prendre } z'_2 \neq 0) \\
&\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}
\end{aligned}$$

2.

a.

$$\begin{aligned}
N(ZZ') &= (z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2)(\overline{z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2}) + (z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2)(\overline{z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2}) \\
&= z_1 \overline{z_1} z'_1 \overline{z'_1} - z_1 z_2 z'_1 \overline{z'_2} - \overline{z_1} \overline{z_2} z'_1 \overline{z'_2} + z_2 \overline{z_2} z'_2 \overline{z'_2} \\
&\quad + z_2 \overline{z_2} z'_1 \overline{z'_1} + z_1 z_2 z'_1 \overline{z'_2} + \overline{z_1} \overline{z_2} z'_1 \overline{z'_2} + z_1 \overline{z_1} z'_2 \overline{z'_2} \\
&= (z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2})(z'_1 \overline{z'_1} + z'_2 \overline{z'_2}) \\
&= N(Z)N(Z')
\end{aligned}$$

b. Déjà on a $S \subset \mathbb{H}^\times$, $E \in S$, puis si $(Z, Z') \in S^2$,

$$\begin{aligned}
N(ZZ') &= N(Z)N(Z') \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(ZZ^{-1}) &= N(E) \\
&= 1 \\
\Rightarrow N(Z^{-1}) &= \frac{1}{N(Z)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

montre que $Z^{-1} \in S$ et $ZZ' \in S$. S est un sous groupe de \mathbb{H}^\times .

3.

a. On remarque que

$$xE + yI + zJ + tK = Z(x - iy, -z + it)$$

donc

$$\begin{aligned}
N(xE + yI + zJ + tK) &= |x - iy|^2 + |-z + it|^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + t^2
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
 U^2 &= x^2 I^2 + xyIJ + xzIK + xyJI + y^2 J^2 + yzJK + xzKI + yzKJ + z^2 K^2 \\
 &= -(x^2 + y^2 + z^2)E + xyK - xzJ - xyK + yzI + xzJ - yzI \\
 &= -N(U)E
 \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a déjà l'inclusion:

$$\mathbb{H}^{\text{im}} \subset \{U \in \mathbb{H}, \quad U^2 \in \mathbb{R}^- E\}$$

Réciproquement, on note que (E, I, J, K) est une base de \mathbb{H} en tant que \mathbb{R} algèbre, en posant $U = xE + yI + zJ + tK$ on a :

$$U^2 = -(-x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E + 2x(yI + zJ + tK)$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}
 U^2 \in -\mathbb{R}^- E &\Leftrightarrow x = 0 \vee ((y, z, t) = 0 \wedge x^2 \leq 0) \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \\
 &\Leftrightarrow U \in \mathbb{H}^{\text{im}}
 \end{aligned}$$

On peut conclure

$$\mathbb{H}^{\text{im}} = \{U \in \mathbb{H}, \quad U^2 \in \mathbb{R}^- E\}$$

4.

$S = N^{-1}(\{1\})$ est l'image réciproque d'un fermé par l'application continue $N(\cdot)$, donc est fermée. Soit l'application

$$\begin{aligned}
 \psi : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{H} \\
 (x, y, z, t) &\mapsto xE + yI + zJ + tK
 \end{aligned}$$

S est l'image par l'isométrie ψ de la sphère unité, qui est connexe par arcs; donc S est connexe par arcs. On peut expliciter:

Soit $(Z, Z') \in S$. On pose $\cos \theta = \langle Z, Z' \rangle = xx' + yy' + zz' + tt'$. Supposons $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. L'application

$$\begin{aligned}
 \gamma : [0, 1] &\rightarrow S \\
 t &\mapsto \cos(\theta t)Z + \sin(\theta t)(Z' - \cos \theta Z) \frac{1}{\sin \theta}
 \end{aligned}$$

est un arc inclus dans S qui relie continuellement Z et Z' .

Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, on a égalité dans Cauchy-Schwartz, Z, Z' est liée et pour des raisons de norme on a même $Z' = \pm Z$.

Si $Z' = -Z$, l'arc suivant convient:

$$\begin{aligned}
 \gamma : [0, 1] &\rightarrow S \\
 t &\mapsto \cos(\pi t)Z + \sin(\pi t)\tilde{Z}
 \end{aligned}$$

Où $\tilde{Z} \in (\mathbb{R}Z)^\perp$, unitaire.

5.

a. Vu la condition que l'on souhaite obtenir, on a envie de calculer:

$$\begin{aligned}(U + V)^2 &= U^2 + UV + VU + V^2 \\ (U + V)^2 &= -(N(U) + N(V))E + UV + VU\end{aligned}$$

Or il est clair que $U + V \in \mathbb{H}^{\text{im}}$, donc on a $(U + V)^2 = -N(U + V)E$ et

$$-N(U + V)E = -(N(U) + N(V))E + UV + VU$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}U \perp V &\Leftrightarrow N(U + V) = N(U) + N(V) \\ &\Leftrightarrow 0 = UV + VU\end{aligned}$$

En posant $U = yI + zJ + tK$ et $V = y'I + z'J + t'K$,

$$\begin{aligned}UV &= -(yy' + zz' + tt')E + (zt' - tz')I + (ty' - yt')J + (yz' - zy')K \\ UV &= -\langle U, V \rangle E + (zt' - tz')I + (ty' - yt')J + (yz' - zy')K \\ UV &= (zt' - tz')I + (ty' - yt')J + (yz' - zy')K \in \mathbb{H}^{\text{im}}\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\det_{(I, J, K)}(U, V, UV) &= \begin{vmatrix} y & y' & zt' - tz' \\ z & z' & ty' - yt' \\ t & t' & yz' - zy' \end{vmatrix} \\ &= (zt' - tz')^2 + (ty' - yt')^2 + (yz' - zy')^2 \geq 0\end{aligned}$$

b. En gardant les mêmes notation

$$\begin{aligned}(U, V) \text{ orthonormale dans } \mathbb{H}^{\text{im}} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \text{ orthonormale dans } \mathbb{R}^3 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \text{ est une base orthonormale directe dans } \mathbb{R}^3 \\ &\Leftrightarrow U, V, UV \text{ est une base orthonormale directe dans } \mathbb{H}^{\text{im}}\end{aligned}$$

puisque $\psi^{-1}(\mathbb{H}^{\text{im}}) \simeq \mathbb{R}^3$

6.

Soit $(u, v), (u', v') \in (S \times S)^2$.

$$\begin{aligned}\alpha((u, v) \times (u', v')) &= \alpha(uu', vv') \\ &= Z \mapsto (uu')Z(vv')^{-1} \\ &= Z \mapsto uu'Z(v')^{-1}v^{-1} \\ &= Z \mapsto u(u'Z(v')^{-1})v^{-1} \\ &= (u.v^{-1}) \circ (u'.(v')^{-1}) \\ &= \alpha(u, v)\alpha(u', v')\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\alpha(u, v) = \text{id} &\Leftrightarrow \forall Z \in \mathbb{H}, \quad uZv^{-1} = Z \\
&\Rightarrow v = u \wedge \forall Z \in \mathbb{H}, \quad uZu^{-1} = Z \quad (\text{prendre } Z = v) \\
&\Leftrightarrow v = u \wedge \forall Z \in \mathbb{H}, \quad uZ = Zu \\
&\Leftrightarrow v = u \wedge u \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \quad (\text{cf. 1}) \\
&\Leftrightarrow v = u = \pm E \quad (\text{car } u \in S)
\end{aligned}$$

On conclut

$$\ker \alpha = \{-(E, E), (E, E)\}$$

7.

On remarque que si $u \in S$, $u^{-1} = u^*$, ce qui montre la linéarité de

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow S \\
u &\mapsto u^{-1}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que α est une application bilinéaire, avec $\dim S \times S < +\infty$ donc α est continue.

$$\begin{aligned}
2\langle uZv^{-1}, Z' \rangle &= N(uZv^{-1} + Z') - N(uZv^{-1}) - N(Z') \\
&= N(u(Z + u^{-1}Z'v)v^{-1}) - N(uZv^{-1}) - N(Z') \\
&= N(u)N(Z + u^{-1}Z'v)N(v^{-1}) - N(u)N(Z)N(v^{-1}) - N(Z') \\
&= N(Z + u^{-1}Z'v) - N(Z) - N(Z') \\
&= N(Z + u^{-1}Z'v) - N(Z) - N(u^{-1})N(Z')N(v) \\
&= N(Z + u^{-1}Z'v) - N(Z) - N(u^{-1}Z'v) \\
&= 2\langle Z, u^{-1}Z'v \rangle
\end{aligned}$$

Montre que l'endomorphisme adjoint de $\alpha(u, v)$ est $Z \mapsto u^{-1}Z'v = \alpha(u, v)^{-1}$ et donc $\alpha(u, v) \in O(\mathbb{H})$. On a vu question 4 que S est connexe par arcs. Il vient directement que $S \times S$, puis $\alpha(S \times S)$ l'est aussi par continuité de α .

On a $\text{id} \in \alpha(S \times S) \cap SO(\mathbb{H})$. Supposons $\exists \beta \in \alpha(S \times S) \setminus SO(\mathbb{H})$. Il existe une fonction continue

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \alpha(S \times S)$$

telle que $\gamma(0) = \text{id}$ et $\gamma(1) = \beta$. Mais alors l'application

$$\det \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$$

est continue et vérifie $\det(\gamma(0)) = 1$ et $\det(\gamma(1)) = -1$; cela n'est pas possible et on peut conclure que

$$\alpha(S \times S) \subset SO(\mathbb{H})$$

8.

a. On vérifie facilement que $(\mathbb{R}E)^\perp = \mathbb{H}^{\text{im}}$.

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= \langle \cos \theta E, \cos \theta E \rangle - 2 \underbrace{\langle \cos \theta E, \sin \theta v \rangle}_{=0} + \langle \sin \theta v, \sin \theta v \rangle \\ &= \cos^2 \theta \langle E, E \rangle + \sin^2 \theta \langle v, v \rangle \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1\end{aligned}$$

prouve que $u \in S$.

$$\begin{aligned}u(\cos \theta E - \sin \theta v) &= \cos^2 \theta E - \sin \theta \cos \theta v + \sin \theta \cos \theta v - \sin^2 \theta \underbrace{v^2}_{=-N(v)E} \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)E \\ &= E\end{aligned}$$

montre que $(\cos \theta E + \sin \theta v)^{-1} = (\cos \theta E - \sin \theta v) = (\cos(-\theta)E + \sin(-\theta)v)$

b.

$$\begin{aligned}C_u(v) &= uvu^{-1} \\ &= (-\sin \theta E + \cos \theta v)u^{-1} \\ &= (-\sin \theta E + \cos \theta v)(\cos \theta E - \sin \theta v) \\ &= (-\sin \theta E + \cos \theta v)(\cos \theta E - \sin \theta v) \\ &= v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_u(vw) &= uvwu^{-1} \\ &= (-\sin \theta E + \cos \theta v)w(\cos \theta E - \sin \theta v) \\ &= -\sin \theta \cos \theta w + \sin^2 \theta vw + \cos^2 \theta vw - \sin \theta \cos \theta vw\end{aligned}$$

On a remarqué à la question 5 que le produit dans \mathbb{H}^{im} correspond au produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 , donc

$$\begin{aligned}wv &= -vw \\ v w v &= w\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}C_u(vw) &= -2 \sin \theta \cos \theta w + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)vw \\ &= -\sin 2\theta w + \cos 2\theta vw\end{aligned}$$

De plus on remarque que la restriction de C_u à $\text{vect}(w, vw)$ est une rotation de en dimension 2, ce qui permet de compléter ainsi la matrice de C_u dans la base orthonormale directe (v, w, vw) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

On reconnaît la rotation d'angle 2θ autour du vecteur v .

9.

L'application $u \mapsto C_u$ est bien une application de $S \mapsto SO(\mathbb{H}^{\text{im}})$, c'est un morphisme de groupes puisque c'est la restriction de α au sous-groupe $\{(u, u), u \in S\}$ de $S \times S$. D'autre part il est surjectif d'après ce qui précède puisque les endomorphismes orthogonaux directs en dimension 3 sont exactement les rotations.

De plus,

$$\begin{aligned} C_u = \text{id}_{\mathbb{H}^{\text{im}}} &\Leftrightarrow 2\theta \in 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow u = \pm E \end{aligned}$$

10.

a. On sait maintenant construire tout endomorphisme orthogonal direct qui laisse stable $\text{vect}(E)$, car sa restriction à \mathbb{H}^{im} est un endomorphisme orthogonal direct.

Soit $f \in SO(\mathbb{H})$. $N(f(E)) = f(E) = 1$, ainsi $f(E) \in S$ et

$$(\alpha(f(E)^{-1}, E)f)(E) = E$$

Or $\alpha(f(E)^{-1}, E)f \in SO(\mathbb{H})$, donc $\exists u \in S$, $\alpha(f(E)^{-1}, E)f = \alpha(u, u)$. Au final

$$\begin{aligned} f &= \alpha(f(E)^{-1}, E)\alpha(u, u) \\ &= \alpha(f(E)^{-1}u, u) \in \alpha(S \times S) \end{aligned}$$

On a montré $SO(\mathbb{H}) \subset \alpha(S \times S)$ et donc $\alpha(S \times S) = SO(\mathbb{H})$.

b. $S \times \{1\}$ est un sous groupe de $S \times S$ donc son image par le morphisme de groupes α est un sous groupe de $\alpha(S \times S) = SO(\mathbb{H})$.

Posons

$$\begin{aligned} g : Z &\mapsto uZv^{-1} \\ n : Z &\mapsto aZ \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} gng^{-1}(Z) &= u(a(u^{-1}Zv))v^{-1} \\ &= uau^{-1}Z \end{aligned}$$

montre que $gng^{-1} = \alpha(uau^{-1}, E) \in N$.

D'autre part on a:

$$\pm \text{id} = \alpha(\pm E, E)$$

et on a donc déjà:

$$\{\pm \text{id}\} \subset N \subset SO(\mathbb{H})$$

$$\begin{aligned}
\alpha(a, E) = \alpha(u, v) &\Leftrightarrow (ua^{-1}, v) \in \ker \alpha \\
&\Leftrightarrow (ua^{-1}, v) = \pm(E, E) \\
&\Leftrightarrow (u, v) = (a, E) \vee (u, v) = -(a, E)
\end{aligned}$$

montre que $\alpha(u, v) \in SO(\mathbb{H}) \setminus N$ quand $v \notin \{\pm E\}$. Enfin on a par exemple $\alpha(I, E) \in N \setminus \{\pm \text{id}\}$ ce qui permet de conclure.

11.

On a $\text{Auth}(\mathbb{H}) \subset GL(\mathbb{H})$, $\text{id} \in \text{Auth}(\mathbb{H})$, puis si $(f, g) \in \text{Auth}(\mathbb{H})$,

$$\begin{aligned}
fg(uv) &= f(g(uv)) \\
&= f(g(u)g(v)) \\
&= f(g(u))f(g(v))
\end{aligned}$$

En posant $u = f(u')$, $v = f(v')$,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(uv) &= f^{-1}(f(u')f(v')) \\
&= f^{-1}(f(u'v')) \\
&= u'v' \\
&= f^{-1}(u)f^{-1}(v)
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
\alpha(u, u)(zz') &= uz z' u^{-1} \\
&= uz u^{-1} u z' u^{-1} \\
&= \alpha(u, u)(z) \alpha(u, u)(z')
\end{aligned}$$

montre bien que $\alpha(u, u) \in \text{Auth}(\mathbb{H})$ pour $u \in S$.

12.

On a

$$f(I^2) = f(I)^2$$

d'une part,

$$\begin{aligned}
f(I^2) &= f(-E) \\
&= -E
\end{aligned}$$

d'autre part, ainsi

$$f(I)^2 = -E$$

ce qui montre d'après 3.b que $f(I) \in \mathbb{H}^{\text{im}}$, et que $N(f(I)) = 1$. De même pour J , et aussi $I + J$. \mathbb{H}^{im} est stable par f , et f y conserve la norme. De plus,

$$\begin{aligned} 2\langle f(I), f(J) \rangle &= N(f(I + J)) - N(f(I)) - N(f(J)) \\ &= 2 - 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a montré que $(f(I), f(J))$ est orthonormale. La question 5.b permet de conclure

$$(f(I), f(J), f(K)) = (f(I), f(J), f(I)f(J))$$

est une base orthonormale de \mathbb{H}^{im} .

13.

a. Dans la question précédente on a montré que la restriction d'un automorphisme de H à \mathbb{H}^{im} est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{H}^{im} car il conserve la norme. De plus il transforme la bon directe (I, J, K) en la bon directe $(f(I), f(J), f(K))$, donc il est direct. Il y donc un sens à définir l'application:

$$\begin{aligned} \text{Auth}(\mathbb{H}) &\rightarrow \text{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}}) \\ f &\mapsto f|_{\mathbb{H}^{\text{im}}} \end{aligned}$$

Cette application est un morphisme de groupes. Il est surjectif car $\forall u \in S, \alpha(u, u) \in \text{Auth}(\mathbb{H})$ et d'après la question 9.

D'autre part, deux automorphismes qui s'accordent sur \mathbb{H}^{im} s'accordent aussi sur $\mathbb{H} = \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \oplus \mathbb{H}^{\text{im}}$ entier car leur restriction à $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ est l'identité. Donc on a bien un isomorphisme de groupes.

b. Si on note

$$\begin{aligned} g : S &\rightarrow \text{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}}) \\ u &\mapsto C_u \end{aligned}$$

le morphisme surjectif de la question 9, on a

$$\text{Auth}(\mathbb{H}) \simeq \text{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}}) \simeq S / \ker g \simeq (S / \ker g \times S / \ker g) \simeq \alpha(S / \ker g \times S / \ker g) = \{\alpha(u, u), u \in S\}$$

Comme $\{\alpha(u, u), u \in S\}$ est un sous groupe de $\text{Auth}(\mathbb{H})$, on a finalement

$$\text{Auth}(\mathbb{H}) = \{\alpha(u, u), u \in S\}$$

14.

a. Comme \mathcal{K} est une partie de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension finie, on peut montrer que c'est une partie fermée et bornée.

soit (A_n) une suite d'éléments de \mathcal{K} , qui converge vers $A \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|A_n x\| \leq \|x\|_2$$

Par continuité de $M \mapsto \|Mx\|$, on obtient en passant à la limite

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|Ax\| \leq \|x\|_2$$

i.e. $A \in \mathcal{K}$.

Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut trouver $a, b > 0$ tels que

$$a\|\cdot\|_{\infty} \leq \|\cdot\| \leq b\|\cdot\|_{\infty}$$

Soit $|a_{kl}| = \max_{i,j} \{|a_{ij}|\} = \|A\|_\infty$, et

$$E_l = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } l$$

Alors:

$$a\|A\|_\infty = a\|AE_l\|_\infty \leq \|AE_l\| \leq \|E_l\|_2 = 1$$

montre que $\forall A \in \mathcal{K}, \quad \|A\|_\infty \leq \frac{1}{a}$

On a montré que \mathcal{K} est une partie fermée bornée, donc un compact de $M_2(\mathbb{R})$.

Soit $t \in [0, 1]$, $A, B \in \mathcal{K}^2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|(tA + (1-t)B)x\| &\leq \|tAx\| + \|(1-t)Bx\| \\ &= t\|Ax\| + (1-t)\|Bx\| \\ &\leq t\|x\|_2 + (1-t)\|x\|_2 \\ &= \|x\|_2 \end{aligned}$$

et on a $tA + (1-t)B \in \mathcal{K}$. \mathcal{K} est convexe.

b. L'application $\det(\cdot)$ est continue sur $M_2(\mathbb{R})$, elle est bornée sur le compact \mathcal{K} et atteint ses bornes, donc

$$\exists A \in \mathcal{K}, \quad \det A = \sup_{B \in \mathcal{K}} \det B$$

15.

Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut trouver $c, d > 0$ tels que

$$c\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\| \leq d\|\cdot\|_2$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\|_2 &= \|Ex\|_2 \\ &\geq \frac{1}{d}\|Ex\| \\ &= \left\|\frac{1}{d}Ex\right\| \end{aligned}$$

Cela montre que $\frac{1}{d}E \in \mathcal{K}$ et donc $\det A \geq \det \frac{1}{d}E = \frac{1}{d^2} > 0$.

La fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|Ax\| \end{aligned}$$

est continue, donc bornée et atteint ses bornes puisque \mathcal{C} compact. Soit $x(\neq 0)$ tel que

$$\|Ax\| = \sup_{y \in \mathcal{C}} \|Ay\| (> 0)$$

On a

$$\forall y \in \mathcal{C}, \quad \left\| \frac{1}{\|Ax\|} Ay \right\| = \frac{1}{\|Ax\|} \|Ay\| \leq 1$$

i.e. $\frac{1}{\|Ax\|} A \in \mathcal{K}$. donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|Ax\|^2} \det A &= \det \frac{1}{\|Ax\|} A \leq \det A \\ \Rightarrow \quad \|Ax\| &\geq 1 \end{aligned}$$

Comme on sait d'autre part que $\|Ax\| \leq 1$, on a $\|Ax\| = 1$.

16.

a. On commence par remarquer que $AB \in \mathcal{K}$. en effet, pour $y \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \|AB y\| &\leq \|B y\|_2 \\ &= \|y\|_2 \end{aligned}$$

car $B \in SO(\mathbb{R}^2)$. Supposons que

$$AB \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \in \mathcal{K}$$

Alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad tAB + (1-t)AB \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r} \end{bmatrix} \in \mathcal{K}$$

Or

$$\det \begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r} \end{bmatrix} = t^2 \underbrace{(-r+1)(-\frac{1}{r}+1)}_{<0} + t(r + \frac{1}{r} - 2) + 1$$

est un polynôme de degré 2 dont le coeff de t^2 est négatif, qui vérifie $P(0) = P(1) = 1$; donc

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, 1[, \quad \det \begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r} \end{bmatrix} &> 1 \\ \Rightarrow \quad \det AB \det \begin{bmatrix} t(-r+1)+r & 0 \\ 0 & t(-\frac{1}{r}+1)+\frac{1}{r} \end{bmatrix} &> \det A \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Donc

$$AB \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \notin \mathcal{K}$$

ou encore $\exists x_r \in \mathcal{C}$,

$$\|AB \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} x_r\| > 1$$

b. On pose:

$$B = \begin{bmatrix} x & x_{\perp} \end{bmatrix} \in SO(\mathbb{R})$$

de sorte que

$$B \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix} = ry_rx + \frac{1}{r}z_rx_{\perp}$$

et puis

$$\begin{aligned} \|B \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix}\|_2^2 &= r^2 y_r^2 + \frac{1}{r^2} z_r^2 \\ &= r^2 + \left(\frac{1}{r^2} - r^2\right) z_r^2 \\ &= r^2 + \frac{1 - r^4}{r^2} z_r^2 \end{aligned}$$

Comme

$$\|B \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix}\|_2^2 \geq \|AB \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r \\ z_r \end{bmatrix}\|^2 > 1$$

On a

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{1 - r^4}{r^2} z_r^2 &> 1 \\ \Leftrightarrow z_r^2 &> \frac{r^2}{1 + r^2} \end{aligned}$$

17.

On applique ce qui précède à $r = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$. On obtient une suite (x_n) d'éléments de \mathcal{C} qui vérifie:

$$\forall n \geq 2, \quad \|AB \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} x_n\| > 1 \quad (1)$$

$$B \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} y_n x + n z_n x_{\perp}$$

Cette suite converge car

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad n z_n &> n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

montre que $x_n = (y_n, z_n)$ converge vers $(0, 1)$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix} = x_{\perp}$$

Par continuité de $x \mapsto \|Ax\|$, le passage à la limite dans 1 donne:

$$\|Ax_\perp\| \geq 1$$

Comme par ailleurs $\|Ax_\perp\| \leq 1$, finalement $\|Ax_\perp\| = 1$ et (x, x_\perp) est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 telle que $\|Ae_i\| = 1$.

18.

Quitte à faire une rotation de la base de \mathbb{R}^2 , on peut supposer

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$y = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

avec $\theta \in]0, \pi[$ (ce qui assure que $\cos \frac{\theta}{2} > 0$). Sans calcul il est direct que:

$$\frac{1}{\|b+a\|}(b+a) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{1}{\|b-a\|}(b-a) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

En effet on prend la bissectrice intérieure puis on fait une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

On définit une suite d'angles par:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ b_0 &= \theta \end{aligned}$$

puis la récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On prouve facilement par récurrence que:

$$\begin{aligned} 0 &< b_n - a_n < \pi \\ b_{n+1} &\geq b_{n-1} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

autrement dit, au bout de 8 itérations au plus, on a fait un tour complet et donc un n'importe quel élément du cercle unité se retrouve encadré par deux éléments de T , dont l'angle est inférieur à π : On se ramène donc à la situation suivante. On se donne z quelconque dans \mathcal{C} , tel que

$$z = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in]0, \theta[$, avec toujours:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in T$$

et

$$y = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \in T$$

On peut maintenant faire une recherche dichotomique classique en construisant une suite d'éléments de T convergeant vers z ; on en conclura que $z \in T$ puisque T est fermée. On construit la suite suivante:

$$a_0 = 0$$

$$b_0 = \theta$$

puis la récurrence Si $\alpha = \frac{a_n + b_n}{2}$ on s'arrête puisque on a prouvé que $z \in T$. Si $\alpha \in]a_n, \frac{a_n + b_n}{2}[$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \end{aligned}$$

Si $\alpha \in]\frac{a_n + b_n}{2}, b_n[$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= b_n \end{aligned}$$

On vérifie que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes qui tendent vers α , ou encore $\begin{bmatrix} \cos a_n \\ \sin a_n \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \cos b_n \\ \sin b_n \end{bmatrix}$ sont deux suites d'éléments de T convergeant vers z , ce qu'on voulait démontrer.
Pour conclure $\mathcal{C} \subset T$ et finalement on a bien

$$\mathcal{C} = T$$

19.

On la partie de \mathcal{C} suivante:

$$T = \{x \in \mathcal{C}, \quad \|Ax\| = 1\}$$

On a déjà $x, x_\perp \in T$, avec $x_\perp \notin \{x, -x\}$. Mais si $y, z \in T$ avec $z \notin \{y, -y\}$, alors:

$$\|A(y - z)\|^2 + \|A(y + z)\|^2 \geq 4$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|A(y - z)\|^2 + \|A(y + z)\|^2 &\leq \|y - z\|_2^2 + \|y + z\|_2^2 \\ &= 2(\|y\|_2^2 + \|z\|_2^2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

On a donc l'égalité dans chaque inégalité utilisée, i.e.:

$$\begin{aligned}\|A(y - z)\| &= \|y - z\|_2 \\ \|A(y + z)\| &= \|y + z\|_2\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\|A \frac{1}{\|y - z\|_2} (y - z)\| &= 1 \\ \|A \frac{1}{\|y + z\|_2} (y + z)\| &= 1\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\|y + z\|_2} (y + z), \frac{1}{\|y - z\|_2} (y - z) \in T$$

T est fermée puis que l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par la fonction continue $x \mapsto \|Ax\|$, et donc vérifie toutes les hypothèses de la question précédente. On en conclut que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{C}, \quad \|Ax\| &= 1 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|Ax\| &= \|x\|_2\end{aligned}$$

Mais alors la norme $\|\cdot\|$ provient bien d'un produit scalaire car:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= \|AA^{-1}(x + y)\|^2 - \|AA^{-1}(x - y)\|^2 \\ &= \|A^{-1}(x + y)\|_2^2 - \|A^{-1}(x - y)\|_2^2 \\ &= 4\langle A^{-1}x, A^{-1}y \rangle\end{aligned}$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 .

On a montré le théorème:

Théorème A. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur le \mathbb{R} espace vectoriel \mathbb{R}^2 . Si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq 4$$

alors $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

20.

a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, tel que $P(x) = 0$. On décompose P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^\alpha \prod_{j=1}^l (X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}$$

où $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$. Comme il n'existe pas de diviseur de 0, on peut conclure

$$\exists i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad x - \lambda_i = 0 \cup \exists j \in \llbracket 1, l \rrbracket, \quad x^2 - b_j x + c_j = 0$$

Dans les deux cas, $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$.

b. On suppose donc $x^2 + b_j x + c_j = 0$, avec $\Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$. Il n'a pas de difficultés à montrer que $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$ est une sous algèbre de A . Il faut trouver qui joue le rôle de i dans cette algèbre. On écrit la forme canonique:

$$\begin{aligned} x^2 + b_j x + c_j = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b_j}{2}\right)^2 + \overbrace{\frac{4c_j - b_j^2}{4}}^{>0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2(x + \frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}}\right)^2 = -1 \end{aligned}$$

De la même manière que $(1, \frac{2(x + \frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}})$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, $(1, \frac{2(x + \frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}})$ est une base de $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$ et on vérifie aisément que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} + \mathbb{R}x &\rightarrow \mathbb{C} \\ a_0 + a_1 \frac{2(x + \frac{b_j}{2})}{\sqrt{-\Delta_j}} &\mapsto a_0 + i a_1 \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbb{R} algèbres.

21.

d'après ce qui précède, il existe $i_A \in A$ tel que $i_A^2 = -1$, à moins que $A \setminus \mathbb{R} = \emptyset$, ce qui n'est pas.

22.

a.

$$\begin{aligned} T(xy) &= i_A x y i_A \\ &= -i_A x i_A i_A y i_A \\ &= -T(x)T(y) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} T^2(x) &= i_A(i_A x i_A)i_A \\ &= x \end{aligned}$$

Donc $T^2 = \text{id}$. Autrement dit $\ker T^2 - \text{id} = A$. Or comme $X - 1 \wedge X + 1 = 1$, le théorème de décomposition des noyaux nous dit que $\ker T^2 - \text{id} = \ker(T - \text{id}) \oplus \ker(T + \text{id})$. On a donc bien

$$A = \ker(T - \text{id}) \oplus \ker(T + \text{id})$$

23.

Supposons $x \in \ker(T + \text{id})$.

$$\begin{aligned} T(x) &= -x \Leftrightarrow i_A x i_A = -x \\ &\Leftrightarrow x i_A = i_A x \end{aligned}$$

Posons $P(x) = x^2 + bx + c = 0$, avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. P est scindé sur \mathbb{C} , notons une de ses racines $z = u + iv$. Comme x et i_A commutent,

$$\begin{aligned} (x - (u + i_A v))(x - (u - i_A v)) &= x^2 - 2ux + (u^2 + v^2) \\ &= x^2 + bx + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme il n'existe pas de diviseur de 0 dans A , on a

$$x - (u + i_A v) = 0 \vee x - (u - i_A v)$$

i.e. $x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}i_A$.

Réciproquement, il est clair que $\mathbb{R} + \mathbb{R}i_A \subset \ker(T + \text{id})$. On a finalement

$$\mathbb{R} + \mathbb{R}i_A = \ker(T + \text{id})$$

Or $U \subsetneq A$ car A n'est pas isomorphe à \mathbb{C} , donc nécessairement $\ker(T - \text{id}) \neq \{0\}$.

24.

a. Soit $x \in \ker(T - \text{id})$.

$$\begin{aligned} T(\beta x) &= -T(\beta)T(x) \\ &= -T(\beta)T(x) \\ &= -\beta x \end{aligned}$$

montre que $\beta x \in \ker(T + \text{id})$. En particulier pour $x = \beta$, $\beta^2 \in \ker(T + \text{id}) = U$.

De même, on voit que $\beta \ker(T + \text{id}) \subset \ker(T - \text{id})$. notons

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto \beta x \end{aligned}$$

Cette application linéaire est injective donc $\dim(\ker(T - \text{id})) = \dim f(\ker(T - \text{id})) \leq \dim U$ et

$$\dim(U) = \dim f \ker(T + \text{id}) = \dim f(U) \leq \dim \ker(T - \text{id})$$

Donc $\dim \beta U = \dim U = \dim \ker(T - \text{id})$ et

$$\beta \ker(T + \text{id}) = \ker(T - \text{id})$$

b. Posons $\beta^2 + b\beta + c = 0$, et $\beta^2 = u + vi_A \in U$. Nécessairement $b = 0$ car sinon on aurait $\beta \in U$, ce qui n'est pas. De plus, comme A n'admet pas de diviseur de 0, on ne peut pas avoir $c \leq 0$ car sinon on aurait $\beta = \pm\sqrt{-c} \in \mathbb{R} \subset U$. Donc $\beta^2 \in \mathbb{R}^{+*}$.

c. On a montré que tout élément de A s'écrit de manière unique

$$x = a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A)$$

Quitte à remplacer β par $\frac{1}{\sqrt{-\beta^2}}\beta$ on peut maintenant supposer que $\beta^2 = -1$. On remarque alors que la multiplication de deux éléments de A donne:

$$\begin{aligned} xx' &= (a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A))(a'_1 + b'_1 i_A + \beta(a'_2 + b'_2 i_A)) \\ &= (a_1 + b_1 i_A)(a'_1 + b'_1 i_A) + \beta(a_2 + b_2 i_A)\beta(a'_2 + b'_2 i_A) + \beta(a_2 + b_2 i_A)(a'_1 + b'_1 i_A) + (a_1 + b_1 i_A)\beta(a'_2 + b'_2 i_A) \end{aligned}$$

On poursuit en se souvenant que β anti-commute avec i_A :

$$\begin{aligned} xx' &= (a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A))(a'_1 + b'_1 i_A + \beta(a'_2 + b'_2 i_A)) \\ &= (a_1 + b_1 i_A)(a'_1 + b'_1 i_A) + (a_2 - b_2 i_A)\beta^2(a'_2 + b'_2 i_A) + \beta(a_2 + b_2 i_A)(a'_1 + b'_1 i_A) + \beta(a_1 - b_1 i_A)(a'_2 + b'_2 i_A) \\ &= (a_1 + b_1 i_A)(a'_1 + b'_1 i_A) - (a_2 - b_2 i_A)(a'_2 + b'_2 i_A) + \beta[(a_2 + b_2 i_A)(a'_1 + b'_1 i_A) + (a_1 - b_1 i_A)(a'_2 + b'_2 i_A)] \end{aligned}$$

On reconnaît la multiplication dans \mathbb{H} du début du problème, et on peut montrer maintenant sans difficultés que l'application:

$$\begin{aligned}\varphi : A &\rightarrow \mathbb{H} \\ a_1 + b_1 i_A + \beta(a_2 + b_2 i_A) &\mapsto Z(a_1 + i b_1, a_2 + i b_2)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbb{R} algèbre.

On a bien montré le théorème:

Théorème B. Une \mathbb{R} algèbre algébrique et sans diviseur de 0 est isomorphe à \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} .

25.

On utilise l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned}\|(u+v)^2 - (u-v)^2\| &= \|4uv\| \\ &= 4\|u\|\|v\|\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\|(u+v)^2 - (u-v)^2\| &\leq \|(u+v)^2\| + \|(u-v)^2\| \\ &= \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\end{aligned}$$

Comme V est isomorphe à \mathbb{R}^2 , le théorème A nous dit que $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire.

26.

Le résultat est immédiat si $x \in \mathbb{R}$. Supposons maintenant $x \in A \setminus \mathbb{R}$. Appliquons le résultat de la question précédente à x et $y = 1$ de sorte que $V = \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ soit de dimension 2. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dont dérive la norme $\|\cdot\|$ sur V . On prend 1 que l'on complète en une base orthonormale pour ce produit scalaire de V , $(1, e_1)$. Posons $x = x_0 + x_1 e_1$. On a

$$\begin{aligned}x^2 &= (x_0 + x_1 e_1)(x_0 + x_1 e_1) \\ &= x_0^2 + x_1^2 e_1^2 + 2x_0 x_1 e_1\end{aligned}\tag{2}$$

On est guidé par le fait que l'on doit avoir $\|x^2\| = \|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2$, ce qui est obtenu si $e_1^2 = -1$.

Le théorème de Pythagore dans l'espace euclidien $\mathbb{R} + \mathbb{R}e_1$ donne

$$\begin{aligned}\|e_1 - 1\|^2 &= \|e_1\|^2 + \|1\|^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

et

$$\|e_1 + 1\|^2 = 2$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\|e_1^2 - 1\|^2 &= \|(e_1 - 1)(e_1 + 1)\|^2 \\ &= \|e_1 - 1\|^2 \|e_1 + 1\|^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

ou encore $\|e_1^2 + (-1)\| = 2 = \|e_1^2\| + \|-1\|$. On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire, ce qui montre que e_1^2 et -1 sont colinéaires et de même sens, et même égaux car unitaires. Ainsi, l'égalité 2 donne:

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 + 2x_0x_1e_1 \in \text{vect}(1, e_1) = \text{vect}(1, x)$$

27.

On a montré que A est algébrique. De plus A n'admet pas de diviseur de 0 car

$$\begin{aligned} xy = 0 &\Leftrightarrow \|xy\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\|\|y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\| = 0 \vee \|y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème B de la partie précédente, ce qui démontre le théorème:

Théorème C. Une \mathbb{R} algèbre A munie d'une norme telle que

$$\forall x, y \in A, \quad \|xy\| = \|x\|\|y\|$$

est isomorphe à \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} .