CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $X \neq 0$, soit $k \in [\![1, n]\!], \quad x_k > 0$.

$$\begin{aligned}(AX)_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ &\geqslant a_{ik} x_k > 0\end{aligned}$$

On a montré $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (AX)_i > 0$, c'est à dire $AX > 0$.
Ensuite,

$$\begin{aligned}(|AB|)_{ij} &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \\ &= (|A|\,|B|)_{ij}\end{aligned}$$

ainsi $|AB| \leqslant |A|\,|B|$.

2.

Soit $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. L'inégalité de Cauchy-Schartz est:

$$\begin{aligned}&|\langle X \mid Y\rangle| \leqslant \|X\|\|Y\| \\ \Leftrightarrow &\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On peut l'appliquer directement à $(Z, W) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, définis par:

$$Z = \begin{bmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_k| \\ \vdots \\ |z_n| \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} |w_1| \\ \vdots \\ |w_k| \\ \vdots \\ |w_n| \end{bmatrix} \geqslant 0$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} |z_i|\,|w_i|\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|\,|w_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3.

En posant $z = a + ib, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
& |1+z|^2 = (1+|z|)^2 \\
\Leftrightarrow & 1 + a^2 + 2a + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} \\
\Leftrightarrow & \quad a = \sqrt{a^2+b^2} \\
\Leftrightarrow & \quad a \geqslant 0 \wedge a^2 = a^2 + b^2 \\
\Leftrightarrow & \quad a \geqslant 0 \wedge b = 0 \\
\Leftrightarrow & \quad z \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Soit maintenant $(z,z') \in \mathbb{C}^2, \quad z \neq 0$.

$$\begin{aligned}
& |z+z'| = |z| + |z'| \\
\Leftrightarrow & \quad |z| \left|1 + \frac{z'}{z}\right| = |z| \left(1 + \left|\frac{z'}{z}\right|\right) \\
\Leftrightarrow & \quad \left|1 + \frac{z'}{z}\right| = 1 + \left|\frac{z'}{z}\right| \\
\Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{z'}{z} = \alpha
\end{aligned}$$

4.

Comme les z_i sont non tous nuls, quitte à renuméroter on peut supposer $z_1 \neq 0$. On a:

$$\begin{aligned}
& |z_n| + \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \\
\Leftrightarrow & \quad \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| \left(\geqslant \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| \right)
\end{aligned}$$

Cela montre que l'égalité est réalisée dans la dernière inégalité. En réitérant, on a:

$$\forall m \in [\![1,n]\!], \quad \left|\sum_{k=1}^{m} z_k\right| = \sum_{k=1}^{m} |z_k|$$

Posons, pour $k \in [\![1,n]\!], \quad z_k = e^{i\theta_k} |z_k|$ avec $\theta_k \in \mathbb{R}$. L'égalité précédente pour $m = 2$ donne

$$\begin{aligned}
& \frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \in \mathbb{R}^+ \\
\Leftrightarrow & z_2 = 0 \vee \theta_2 = \theta_1 \mod 2\pi \\
\Leftrightarrow & \quad z_2 = e^{i\theta_1} |z_2|
\end{aligned}$$

Mais en renumérotant les $z_i, \quad i \geqslant 2$, on remarque que le raisonnement précédent donne aussi

$$\begin{aligned}
& \forall k \in [\![2,n]\!], \quad |z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k| \\
\Leftrightarrow & \quad \forall k \in [\![2,n]\!], \quad z_k = e^{i\theta_1} |z_k|
\end{aligned}$$

5.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr} AX + \det A$$

d'oû

$$\begin{aligned}\Delta &= \operatorname{Tr}^2 A - 4 \det A \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad-bc) \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad-bc) \\ &= (a-d)^2 + 4bc > 0\end{aligned}$$

6.

Comme $\Delta > 0$, χ_A a deux racines réelles distinctes que l'on note $\lambda < \mu$. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples donc A est diagonalisable et, quitte à permuter les colonnes de P,

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = P \underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{D} P^{-1}$$

7.

On a

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= \operatorname{Tr} A \\ &= a + d\end{aligned}$$

Si $\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| = \lambda < \mu$. Sinon,

$$\begin{aligned}& -|\lambda| + \mu = a + d > 0 \\ \Rightarrow \quad & \qquad |\lambda| < \mu\end{aligned}$$

8.

Comme on a

$$\begin{aligned}A^k &= P \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^k P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \mu^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} P^{-1}\end{aligned}$$

il est clair que

$$\begin{aligned}(A^k) \text{ CV } &\Leftrightarrow (D^k) \text{ CV} \\ &\Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in]-1, 1]^2\end{aligned}$$

Comme $|\lambda| < \mu \leqslant 1$, si de plus $(-1 <)\mu < 1$, alors (A^k) converge vers la matrice nulle. Si $\mu = 1$,

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

qui est un projecteur de rang 1.

9.

On remarque que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de B, associé à la valeur propre $1-\alpha-\beta$.

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de B, associé à la valeur propre $1 \neq 1-\alpha-\beta$. On a donc automatiquement $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_{1-\alpha-\beta}$ et B diagonalisable:

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

10.

On a $1-\alpha-\beta \in]-1,1[$, ainsi (D^k) converge, puis (B^k) converge et

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} B^k &= \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \Lambda \end{aligned}$$

11.

N est une application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$. Il n'y pas de difficulté à montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \left\|\lambda A\right\|_\infty = |\lambda| \left\|A\right\|_\infty$$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \left\|A\right\|_\infty \geqslant 0$$

avec

$$\begin{aligned} & \left\|A\right\|_\infty = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \quad A = 0 \end{aligned}$$

soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |(A+B)_{ij}| &= \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \\ &= \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \\ &\leqslant \left\|A\right\|_\infty + \left\|B\right\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui montre l'inégalité triangulaire $\left\|A+B\right\|_\infty \leqslant \left\|A\right\|_\infty + \left\|B\right\|_\infty$.

Soit $C = AB$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, |b_{kj}| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, (\sum_{j=1}^{n} |b_{kj}|) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, \|B\|_\infty \\
&= \|B\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \\
&\leqslant \|B\|_\infty \|A\|_\infty
\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit en prenant le max sur i.

12.

Soit $C = AB$.

$$\begin{aligned}
\|C\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, |b_{kj}| \right)^2 \qquad \text{(Inégalité triangulaire pour le module complexe)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right) \qquad \text{(Cauchy-Schwartz)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right) \\
&= \|A\|_2^2 \|B\|_2^2
\end{aligned}$$

13.

Il n'y a pas de difficultés à montrer que ν est une norme en utilisant les propriétés de N. Puis,

$$\begin{aligned}
\nu(AB) &= N(S^{-1}ABS) \\
&= N(S^{-1}A\underbrace{SS^{-1}}_{=I_n}BS) \\
&\leqslant N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) \\
&= \nu(A)\nu(B)
\end{aligned}$$

14.

Deux matrices semblables ont les mêmes polynômes caractéristiques, donc le même spectre et le même rayon spectral:

$$\begin{aligned}
\chi_{S^{-1}AS}(X) &= \det(S^{-1}AS - XI_n) \\
&= \det(S^{-1}AS - XS^{-1}S) \\
&= \det(S^{-1}(A - XI_n)S) \\
&= \det(S^{-1})\det(A - XI_n)\det(S) \\
&= \frac{1}{\det(S)}\det(A - XI_n)\det(S) \\
&= \det(A - XI_n) \\
&= \chi_A(X)
\end{aligned}$$

$\rho(S^{-1}AS) = \rho(A)$

15.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable car tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

$$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}), \quad A = Q \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det \begin{bmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-X & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}-X \end{bmatrix} Q \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - X)
\end{aligned}$$

montre que $\mathrm{sp}(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ puis $\mathrm{sp}(A^k) = \{a_{11}^k, \dots, a_{nn}^k\}$. On en déduis que

$$\rho(A^k) = \rho(A)^k$$

et $\mathrm{sp}(\alpha A) = \{\alpha a_{11}, \dots, \alpha a_{nn}\}$

$$\rho(\alpha A) = |\alpha|\,\rho(A)$$

16.

Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ tel que $\rho(A) = |\lambda|$. Soit U un vecteur propre de A associé à λ. Soit $H \in GL_n(\mathbb{C})$ définie par:

$$H = \left[\begin{array}{c|c|c|c} U & U & \dots & U \end{array}\right]$$

la matrice dont les colonnes sont toutes identiques, égales à U. On a $AH = \lambda H$ donc

$$\begin{aligned} \rho(A)N(H) &= N(\lambda H) \\ &= N(AH) \\ &\leqslant N(A)N(H) \end{aligned}$$

et on peut conclure $\rho(A) \leqslant N(A)$ car $N(H) > 0$