

CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad 1 + t^2 &\leq 2 \\ \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad (1 + t^2)^n &\leq 2^n \\ \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1 + t^2)^n} &\geq \frac{1}{2^n} \\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt &\geq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

2.

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ t &\mapsto \frac{1}{(1 + t^2)^n} \end{aligned}$$

est continue par morceaux, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 0 \leq \frac{1}{(1 + t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$$

$t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$ étant intégrable en $+\infty$ car $2n > 1$, f est intégrable et K_n est bien définie.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt &= [\arctan t]_0^x \\ &= \arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{2}$$

3.

On utilise l'inégalité de convexité:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 + t^2 \geq 2t$$

Soit $x \geq 1$, $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &\leq \int_1^x \frac{1}{2^n t^n} dt \\ &= \frac{1}{2^n} \left[-\frac{1}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{2^n} \left(-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \right) \\ &\leq \frac{1}{(n-1)2^n} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\ &\leq \frac{1}{(n-1)2^n} \end{aligned}$$

montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

4.

On a:

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\ &= I_n + O\left(\frac{1}{n2^n}\right) \end{aligned}$$

puis d'après 1,

$$K_n = I_n + \underbrace{O\left(\frac{I_n}{n}\right)}_{o(I_n)}$$

i.e.

$$K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$$

5.

Soit $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int_0^x \frac{(1+t^2) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right) \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$K_n = 2n(K_n - K_{n+1})$$

6.

On réécrit la récurrence précédente

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$$

D'où il vient facilement que

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \times 2} K_1 \\ &= \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On applique la formule de Stirling

$$(2n-2)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2(n-1)}{e}\right)^{2(n-1)} \sqrt{4\pi(n-1)}$$

et

$$(n-1)!^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{2(n-1)} 2\pi(n-1)$$

Après simplification on obtient

$$K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

7.

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}t = \phi(t)$. On a $\phi'(t) = \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} \frac{1}{\sqrt{n}} du \\ \Rightarrow \sqrt{n}I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} du \end{aligned}$$

8.

On pose:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ u &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n} & \text{si } u \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } u \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

Les f_n sont continues par morceaux. La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ étant convexe sur \mathbb{R}^+ , on a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{u^2}{n} = 1 + u^2$$

donc en posant $\phi(u) = \frac{1}{1+u^2}$,

i $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(u)| \leq \phi(u)$, intégrable en $+\infty$.

ii la suite de fonction (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$.

Le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\sqrt{n}I_n$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

9.

D'après la question 6,

$$\sqrt{n}I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Le changement de variable $\phi(u) = \sqrt{2}u$ nous donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

puis par parité,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

10.

On voit que $t \mapsto t\varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$ est sommable en $+\infty$, donc pour $X > x$,

$$\begin{aligned} \forall t \geq x, \quad \varphi(t) &\leq \frac{t}{x} \varphi(t) \\ \Rightarrow \int_x^X \varphi(t) dt &\leq \frac{1}{x} \int_x^X t\varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_x^X \\ &= \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] \end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$ donne:

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt &\leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{\varphi(x)}{x} \end{aligned}$$

11.

En suivant le fil de la question précédente, l'idée est de trouver une fonction qui minore $t \mapsto \varphi(t)$ et dont une primitive est $-\frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$. Le calcul montre que, en utilisant le fait que $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$,

$$\begin{aligned} \forall t \in [x, +\infty[, \quad \left(-\frac{t}{t^2+1}\varphi(t)\right)' &= \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t) \\ &= \frac{t^4+2t^2-1}{t^4+2t^2+1}\varphi(t) \\ &\leq \varphi(t) \end{aligned}$$

Soit alors $X > x$.

$$\begin{aligned} \int_x^X \frac{t^4+2t^2-1}{(t^2+1)^2}\varphi(t) dt &\leq \int_x^X \varphi(t) dt \\ \Leftrightarrow -\frac{X}{X^2+1}\varphi(X) + \frac{x}{x^2+1}\varphi(x) &\leq \int_x^X \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $X \rightarrow +\infty$ donne:

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

12.

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$$

on a:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &= \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x} \end{aligned}$$

d'après les deux questions précédentes.

13.

$$A = \bigcup_{p=1}^n A_p$$

De plus, les évènements A_p sont clairement incompatibles deux à deux.

14.

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap (\{R_n \geq x\} \cup \{R_n < x\})) \\
&= P((A \cap \{R_n \geq x\}) \cup (A \cap \{R_n < x\})) \\
&= P(A \cap \{R_n \geq x\}) + P(A \cap \{R_n < x\}) \quad (\text{les événements } \{R_n \geq x\} \text{ et } \{R_n < x\} \text{ sont incompatibles}) \\
&= P(A \cap \{R_n \geq x\}) + P\left(\bigcup_{p=1}^n A_p \cap \{R_n < x\}\right) \\
&= P(A \cap \{R_n \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p \cap \{R_n < x\}) \quad (\text{les événements } A_p \text{ sont incompatibles}) \\
&\leq P(\{R_n \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p \cap \{R_n < x\}) \quad (A \cap \{R_n \geq x\} \subset \{R_n \geq x\})
\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}
A_p \cap \{|R_n| < x\} &= A_p \cap \{|R_n| < x\} \cap \{|R_p| \geq 3x\} \\
&\subset A_p \cap \{|R_p - R_n| \geq 2x\}
\end{aligned}$$

puisque $|R_n - R_p| \geq |R_p| - |R_n|$.

16.

On a

$$R_n - R_p = Z_{p+1} + \dots + Z_n$$

Comme A_p est décrit en termes des VA Z_1, \dots, Z_p , les événements A_p et $\{|R_p - R_n| \geq 2x\}$ sont indépendants puisque les Z_i le sont.

On en déduit:

$$\begin{aligned}
P(A) &\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p \cap \{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \\
&= P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p) P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \\
&\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n P(A_p) \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \\
&= P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \sum_{p=1}^n P(A_p) \\
&= P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) P(A) \\
&\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_p - R_n| \geq 2x\}) \quad (1)
\end{aligned}$$

17.

L'idée est la suivante: si $|R_p - R_n| \geq 2x$, alors $|R_n| \geq x$ ou $|R_p| \geq x$. Autrement dit,

$$|R_p - R_n| \geq 2x \subset \{|R_p| \geq x\} \cup \{|R_n| \geq x\}$$

On passe aux probabilités:

$$\begin{aligned} P(|R_p - R_n| \geq 2x) &\leq P(\{|R_p| \geq x\} \cup \{|R_n| \geq x\}) \\ &\leq P(\{|R_p| \geq x\}) + P(\{|R_n| \geq x\}) \\ &\leq 2 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_i| \geq x\}) \end{aligned}$$

Cela étant valable pour tout p .

$$\max_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(|R_p - R_n| \geq 2x) \leq 2 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_i| \geq x\})$$

L'inégalité 1 donne alors bien ce qu'on voulait démontrer, à savoir:

$$P(A) \leq 3 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} P(\{|R_i| \geq x\})$$