CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 1 - MP

Pierre-Paul TACHER

1.

Il est clair que E_a est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$, donc c'est un endomorphisme. De plus $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ montre que E_a es bijectif et $(E_a)^{-1} = E_{-a}$.

2.

J est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$. On peut expliciter J. Soit $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, $a_n \neq 0$.

$$\begin{aligned} Jp &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} \left[(X+1)^{i+1} - X^{i+1}\right] \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} \left[(X+1-X)(\sum_{j=0}^i (X+1)^j X^{i-j})\right] \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} (\sum_{j=0}^i (X+1)^j X^{i-j}) \end{aligned}$$

On a $\deg (X+1)^j X^{i-j} = i$, de coefficient dominant 1, donc Jp est de degré n, de coefficient dominant $a_n \frac{n+1}{n+1} = a_n$

3.

Puisque J conserve le degré, $(JX^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de degrés echelonnés, donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Ce la montre que J est bijectif.

4.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto e^{-t} t^k \end{aligned}$$

est C^0 par morceaux et $e^{-t} t^k \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ montre que la fonction est intégrable en $+\infty$.

Soit $X > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-t} t^k \,\mathrm{d}t &= \left[e^{-t} \frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^X + \int_0^X e^{-t} \frac{t^{k+1}}{k+1} \,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{e^{-X} \frac{X^{k+1}}{k+1}}_{\underset{X\to+\infty}{\to} 0} + \int_0^X e^{-t} \frac{t^{k+1}}{k+1} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En faisant tendre $X \to +\infty$, on a

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} I_{k+1}$$

montre par une récurrence immédiate que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k \,\mathrm{d}t = k!$$

5.

On peut expliciter l'action de L sur la base cannonique

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{K}, \quad LX^n(x) &= -n \int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^{n-1} \,\mathrm{d}t \\ &= -n \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i x^{n-1-i}) \,\mathrm{d}t \\ &= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^i \,\mathrm{d}t \\ &= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} i! \\ &= -n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!} x^{n-1-i} \\ &= -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!}\end{aligned}$$

montre que $LX^n = -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} X^i$[1] puis par linéarité

$$Lp = \sum_{i=0}^{n} a_i LX^i \in \mathbb{K}[X]$$

est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. L n'est pas inversible puisque $\mathbb{K} \subset \ker L$ ($\mathbb{K}$ désignant l'espace vectoriel des polynômes constants).

6.

$$\begin{aligned}(I \circ E_a)(P) &= I(P(X+a)) \\ &= P(X+a) \\ &= E_a(P) \\ &= E_a(I(P)) \\ &= (E_a \circ I)(P)\end{aligned}$$

[1] L'expression a bien un sens pour $n = 0$ en prenant la convention qu'une somme sans termes vaut 0.

$$\begin{aligned}(D\circ E_a)(P) &= D(P(X+a))\\ &= 1\times P'(X+a)\\ &= P'(X+a)\\ &= E_a(P')\\ &= E_a(D(P))\\ &= (E_a\circ D)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_b\circ E_a)(P) &= E_b(P(X+a))\\ &= P((X+b)+a)\\ &= P(X+a+b)\\ &= P((X+a)+b)\\ &= E_a(P(X+b))\\ &= E_a(E_b(P))\\ &= (E_a\circ E_b)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_b\circ E_a)(P) &= E_b(P(X+a))\\ &= P((X+b)+a)\\ &= P(X+a+b)\\ &= P((X+a)+b)\\ &= E_a(P(X+b))\\ &= E_a(E_b(P))\\ &= (E_a\circ E_b)(P)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad (E_a\circ J)P(x) &= E_a(JP)(x)\\ &= \int_{x+a}^{x+a+1} p(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{x}^{x+1} p(u+a)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } u=t-a\text{)}\\ &= J(P(X+a))(x)\\ &= (J\circ E_a)P(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_a\circ L)X^n &= E_a(-n!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X^i}{i!})\\ &= -n!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(X+a)^i}{i!}\\ &= -n!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X^i}{i!}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{(n-j)!}a^{n-j}\\ &= -n!\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(n-j)!}a^{n-j}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{X^i}{i!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}(-j!) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X^i}{i!} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (LX^j) a^{n-j} \\
&= L(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j a^{n-j}) \\
&= L(X+a)^n \\
&= L(E_a X^n)
\end{aligned}$$

I, J, E_a conserve le degré donc ne sont pas delta. Par contre L et D öe sont puisque $LX = -1$ et $DX = 1$.

7.

On a I est shift invariant. Soit T_1, T_2 shift invariants, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
E_a \circ (\lambda T_1 + T_2) &= \lambda E_a \circ T_1 + E_a \circ T_2) \\
&= \lambda T_1 \circ E_a + T_2 \circ E_a) \\
&= (\lambda T_1 + T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

donc $\lambda T_1 + T_2$ est shift invariant.Puis:

$$\begin{aligned}
E_a \circ (T_1 \circ T_2) &= (E_a \circ T_1) \circ T_2 \\
&= (T_1 \circ E_a) \circ T_2 \\
&= T_1 \circ (E_a \circ T_2) \\
&= T_1 \circ (T_2 \circ E_a) \\
&= (T_1 \circ T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

et $T_1 \circ T_2$ est shift invariant. Les endomorphismes shift invariants constituent bien une sous algèbre.

Par contre les endomorphismes delta ne sont stables ni par addition, ni par composition comme le montre

$$LDX = L1 = 0$$

et

$$(L+D)X = 0$$

8.

Soit $\deg p = d \in [\![-1, +\infty[\![$. On a $\forall k \geqslant d+1, \quad D^k p = 0$, de sorte que la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^{d} a_k D^k p$$

a bien un sens et définit bien un polynôme en tant que somme (finie) de polynômes.

9.

Les endomorphismes shift invariants formant une algèbre, et D étant shift invariant, il est direct que

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad (E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k)p &= (E_a \circ \sum_{k=0}^{d} a_k D^k)p \\ &= (\sum_{k=0}^{d} a_k D^k \circ E_a)p\end{aligned}$$

Donc $E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \circ E_a$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est shift invariant.

10.

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}k!a_k &= (\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k)X^k(0) \\ &= (\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k)X^k(0) \\ &= k!b_k\end{aligned}$$

11.

On remarque que

$$\begin{aligned}D^k q_j(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{jk}\end{aligned}$$

Posons $\tilde{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0) D^k$. On voit déjà que

$$\begin{aligned}\tilde{T}q_k(0) &= (\sum_{j=0}^{k} Tq_j(0) D^j q_k)(0) \\ &= Tq_k(0) D^k q_k(0) \\ &= Tq_k(0)\end{aligned}$$

Les polynômes Tq_k et $\tilde{T}q_k$ coincident en 0.

De plus les q_k forment une base de $\mathbb{K}[X]$; tout polynômes $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit

$$p = \sum_{k=0}^{d} p^{(k)}(0) q_k$$

Cela montre que Tp et $\tilde{T}p$ coincident en 0.

Supposons T shift invariant. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
Tq_k(x) &= E_x(Tq_k)(0) \\
&= ((E_x \circ T)q_k)(0) \\
&= ((T \circ E_x)q_k)(0) \\
&= T(E_x q_k)(0) \\
&= \tilde{T}(E_x q_k)(0) \\
&= ((\tilde{T} \circ E_x)q_k)(0) \\
&= ((E_x \circ \tilde{T})q_k)(0) \qquad (\tilde{T} \text{ est shift invariant}) \\
&= E_x(\tilde{T}q_k)(0) \\
&= \tilde{T}q_k(x)
\end{aligned}$$

Cela montre que Tq_k et $\tilde{T}q_k$ coincident, puis par linéarité, $Tp = \tilde{T}p, \quad \forall p \in \mathbb{K}[X]$, i.e. $T = \tilde{T}$.

Réciproquement, si $T = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0)D^k$, T est shift invariant d'après la question 9.

12.

soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré d. soit T_1, T_2 deux endomorphismes shift invariants.

$$\begin{aligned}
(T_1 \circ T_2)p &= (\sum_{i=0}^{d} T_1 q_i(0)D^i \circ \sum_{j=0}^{d} T_2 q_j(0)D^j)p \\
&= (\sum_{j=0}^{d} T_2 q_j(0)D^j \circ \sum_{i=0}^{d} T_1 q_i(0)D^i)p \\
(T_2 \circ T_1)p &
\end{aligned}$$

car deux polynômes de l'endomorphisme D commutent.

13.

E_a est shift invariant, on peut écrire d'après 11:

$$\begin{aligned}
E_a &= \sum_{k=0}^{+\infty} E_a q_k(0) D^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(X+a)^k(0)D^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k
\end{aligned}$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{K}[X], \quad p(X+a) &= E_a p \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k p \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{a^k}{k!} D^k p \\
&= \sum_{k=0}^{d} \frac{a^k}{k!} p^{(k)}
\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Taylor.

14.