CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Le rayon de convergence est $R = 1$ et

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-x}$$

2.

On sait que la somme précédente est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[, \quad f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}\end{aligned}$$

Donc le rayon de $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ vérifie $R \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= x f'(x) \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\,|x|^n \geqslant |x|^n \geqslant 0 \Rightarrow R \leqslant 1$$

Donc $R = 1$.

3.

On réitère; on sait que la f est de classe C^k sur $]-1,1[$, et

$$\begin{aligned}\forall x \in\,]-1,1[,\quad f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(x^n)^{(k)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \\ &= k!\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} \\ &= k!\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k} \qquad \left(n<k \Rightarrow \binom{n}{k}=0\right)\end{aligned}$$

Par le même raisonnement que la question précédente, on déduit que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ est 1 et

$$\begin{aligned}\forall x \in\,]-1,1[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n &= \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(x) \\ &= \frac{x^k}{k!}\frac{(k!)}{(1-x)^{k+1}} \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\end{aligned}$$

4.

Soit $k \in \mathbb{N}$, fixé. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $0 \leqslant n^k|x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{n(n-1)\dots(n-(k-1))}_{k \text{ factors}}|x|^n = \frac{n!}{k!}|x|^n$, ce qui montre que le rayon de convergence de la série qui définit f_k est le même que celui de la série $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$, soit $R=1$; la fonction f_k est bien définie sur $]-1,1[$.

5.

On voit que $\deg(H_j) = j$. $(H_0, H_1, \dots, H_k)$ est une famille de $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$ polynômes de degrés échelonnés, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Par définition d'une base,

$$\exists!(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1},\quad X^k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j \qquad ①$$

6.

On remarque que

$$\forall j \in [\![1,k]\!],\quad H_j(0) = 0$$

donc

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X^k)(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si k=0} \\ 0 & \text{si k>0} \end{cases} \\ &= \delta_{k,0} \\ &= \alpha_{k,0} H_0(0) \\ &= \alpha_{k,0}\end{aligned}$$

D'autre part, le coefficient de X^k dans H_k est $\frac{1}{k!}$, par identification on a donc:

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{k,k}\frac{1}{k!} &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \alpha_{k,k} &= k!\end{aligned}$$

7.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé. On remarque que:

$$\forall i \geqslant j+1, \quad H_i(j) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![0, j]\!], \quad H_i(j) &= \frac{1}{i!} j(j-1)\dots(j-i+1) \\ &= \frac{1}{i!}\frac{j!}{(j-i)!} \\ &= \binom{j}{i}\end{aligned}$$

On peut unifier les deux cas:

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad H_i(j) = \binom{j}{i}$$

On évalue l'égalité ① en $j \in [\![1, k]\!]$:

$$\begin{aligned}j^k &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i}\binom{j}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i}\binom{j}{i} + \alpha_{k,j}\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

8.

```
import numpy as np
from math import factorial

def binom(n,k):
        if k>n:
                return 0
        else:
                return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))

def alpha(k,j):
        res = np.zeros(j+1, dtype=int)
        if k == 0:
                res[0] = 1
        for i in range(1,j+1):
                sum = 0;
                for l in range(i):
                        sum += binom(i,l)*res[l]
                res[i] = i**k-sum
        return res[j]
```

9.

On évalue la relation ① en $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n^k &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \binom{n}{j} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall x \in \,]-1,1[, \quad f_k(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \binom{n}{j}) x^n \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} (\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \frac{x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}} \\ f_k(x) &= \frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

$$f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \qquad ②$$

ce qui montre l'existence du polynôme P_k.

Soit maintenant Q_k un polynôme tel que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_k(x) = \frac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

alors:

$$\begin{aligned} & \forall x \in]-1,1[, \quad Q_k(x) = f_k(x)(1-x)^{k+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad Q_k(x) = P_k(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1,1[, \quad Q_k(x) - P_k(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que le polynôme $Q_k - P_k$ a une infinité de racines, donc $Q_k = P_k$ et l'unicité est prouvée.

10.

Soit $l \in [\![0,k]\!]$. Le coefficient de X^l dans le polynôme $X^j(1-X)^{k-j}$ est:

$$\begin{aligned} a_{l,j,k} &= \begin{cases} 0 & \text{si l<j} \\ (-1)^{l-j}\dbinom{k-j}{l-j} & \text{si } \ l \geqslant j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si l<j} \\ (-1)^{l-j}\dbinom{k-j}{k-l} & \text{si } \ l \geqslant j \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduis que le coefficient de X^l dans $P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} X^j (1-X)^{k-j}$ est

$$\begin{aligned} \beta_{l,k} &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} a_{l,j,k} \\ &= \sum_{j=0}^{l} \alpha_{kj} a_{l,j,k} \\ &= \sum_{j=0}^{l} \alpha_{kj} (-1)^{l-j} \binom{k-j}{k-l} \end{aligned}$$

Il n'est pas adéquat de réutiliser la fonction `alpha` telle quelle, puisque celle ci calcule tous les $\alpha_{ki}.\ \ i \leqslant j$ pour calculer le coefficient α_{kj}. Il est préferable de la modifier pour qu'elle renvoie la liste de tout les $\alpha_{ki}.\ \ i \leqslant j$. La fonction `beta` renvoie la liste des coefficients de P_k dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$:

```
import numpy as np
from math import factorial

def binom(n,k):
        if k>n:
                return 0
        else:
                return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))
```

```
def alpha(k,j):
        res = np.zeros(j+1, dtype=int)
        if k == 0:
                res[0] = 1
        for i in range(1,j+1):
                sum = 0;
                for l in range(i):
                        sum += binom(i,l)*res[l]
                res[i] = i**k-sum
        return res

def beta(k):
        res = np.zeros(k+1, dtype=int)
        a = alpha(k,k)
        for i in range(k+1):
                sum = 0
                eps = (-1)**i
                for j in range(i+1):
                        sum += eps*a[j]*binom(k-j,k-i)
                        eps *= -1
                res[i] = sum
        return res
```

11.

On remarque d'abord que $xf_k{}' = f_{k+1}$, puis on dérive la relation ②:

$$\begin{aligned}
& \forall x \in]-1,1[, \quad f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x)^{k+1} + (k+1)P_k(x)(1-x)^k}{((1-x)^{k+1})^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x) + (k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad xf_k'(x) = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad f_{k+1}(x) = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad P_{k+1}(x) = xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x) \\
\Leftrightarrow \quad & P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k
\end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant encore du fait que deux polynômes coincidant sur un ensemble infini sont égaux.

12.

Comme $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$, on a $P_0 = 1$. Puis,

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 + XP_0 \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= X(1-X) + 2X^2 \\ &= X^2 + X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X) \\ &= X^3 + 4X^2 + X \end{aligned}$$

On peut vérifier avec le programme python:

```
>>> beta(2)
array([0, 1, 1])
>>> beta(3)
array([0, 1, 4, 1])
```

13.

On montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \deg(P_k) = k$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{dom}(P_k) = 1$$

Vrai pour $P_0 = 1$. Supposons la propriété vérifiée pour $k \in \mathbb{N}$.

$$P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$$

montre que $\deg(P_{k+1}) \leqslant k+1$, et le coefficient de X^{k+1} vaut $-k\mathrm{dom}(P_k) + (k+1)\mathrm{dom}(P_k) = 1$.

14.

Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} P_k(\frac{1}{x}) &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} \frac{1}{x^j}(1-\frac{1}{x})^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} \frac{1}{x^j}(\frac{x-1}{x})^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} \frac{1}{x^j}\frac{(x-1)^{k-j}}{x^{k-j}} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} \frac{(x-1)^{k-j}}{x^k} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj}x(x-1)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj}(\sum_{l=0}^{k-j} \binom{k-j}{l}(-1)x^{l+1}) \end{aligned}$$

15.

On identifie le coefficient de X^j dnas l'égalité polynomiale qui précède:

$$\beta_{j,k} = \beta k + 1 - j, k$$

valable $\forall j \in [\![0, k]\!]$ si on prend naturellement $\beta_{k+1,k} = 0$.

16.

On a

$$0 \leqslant \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4$$

ce qui montre que $R = \frac{1}{4}$.

On sait que la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est développable en série entière sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et que le coefficient de x^n est:

$$\begin{aligned} a_n &= 4^n(-1)^n\frac{1}{n!}\underbrace{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}_{n \text{ facteurs}} \\ &= 4^n(-1)^n\frac{1}{n!}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2}) \\ &= 4^n(-1)^n\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 2\times 1}{2^n} \\ &= 4^n\frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{\underbrace{2n(2n-2)\dots 4\times 2}_{n \text{ facteurs}}\times 2^n} \\ &= 4^n\frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{2^n n!\times 2^n} \\ &= \frac{(2n)!}{n!^2} \\ &= \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

References

[1] Gourdon, Xavier: *Algèbre, 2è édition*, Ellipses (2009)