CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $X \neq 0$, soit $k \in [\![1,n]\!], \quad x_k > 0$.

$$\begin{aligned}(AX)_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \\ &\geqslant a_{ik}x_k > 0\end{aligned}$$

On a montré $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (AX)_i > 0$, c'est à dire $AX > 0$.
Ensuite,

$$\begin{aligned}(|AB|)_{ij} &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \\ &= (|A|\,|B|)_{ij}\end{aligned}$$

ainsi $|AB| \leqslant |A|\,|B|$.

2.

Soit $(X,Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. L'inégalité de Cauchy-Schartz est:

$$\begin{aligned}&|\langle X \mid Y\rangle| \leqslant \|X\|\|Y\| \\ \Leftrightarrow &\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On peut l'appliquer directement à $(Z,W) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, définis par:

$$Z = \begin{bmatrix}|z_1| \\ \vdots \\ |z_k| \\ \vdots \\ |z_n|\end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix}|w_1| \\ \vdots \\ |w_k| \\ \vdots \\ |w_n|\end{bmatrix} \geqslant 0$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} |z_i|\,|w_i|\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|\,|w_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3.

En posant $z = a + ib, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} & |1+z|^2 = (1+|z|)^2 \\ \Leftrightarrow & 1 + a^2 + 2a + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} \\ \Leftrightarrow & \quad a = \sqrt{a^2+b^2} \\ \Leftrightarrow & \quad a \geqslant 0 \wedge a^2 = a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow & \quad a \geqslant 0 \wedge b = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad z \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Soit maintenant $(z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z \neq 0$.

$$\begin{aligned} & \left|z + z'\right| = |z| + \left|z'\right| \\ \Leftrightarrow & \quad |z| \left|1 + \frac{z'}{z}\right| = |z| \left(1 + \left|\frac{z'}{z}\right|\right) \\ \Leftrightarrow & \quad \left|1 + \frac{z'}{z}\right| = 1 + \left|\frac{z'}{z}\right| \\ \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{z'}{z} = \alpha \end{aligned}$$

4.

Comme les z_i sont non tous nuls, quitte à renuméroter on peut supposer $z_1 \neq 0$. On a:

$$\begin{aligned} & |z_n| + \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \\ \Leftrightarrow & \quad \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| \left(\geqslant \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right|\right) \end{aligned}$$

Cela montre que l'égalité est réalisée dans la dernière inégalité. En réitérant, on a:

$$\forall m \in [\![1, n]\!], \quad \left|\sum_{k=1}^{m} z_k\right| = \sum_{k=1}^{m} |z_k|$$

Posons, pour $k \in [\![1, n]\!], \quad z_k = e^{i\theta_k} |z_k|$ avec $\theta_k \in \mathbb{R}$. L'égalité précédente pour $m = 2$ donne

$$\begin{aligned} & \frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & z_2 = 0 \vee \theta_2 = \theta_1 \mod 2\pi \\ \Leftrightarrow & \quad z_2 = e^{i\theta_1} |z_2| \end{aligned}$$

Mais en renumérotant les $z_i, \quad i \geqslant 2$, on remarque que le raisonnement précédent donne aussi

$$\begin{aligned} & \forall k \in [\![2, n]\!], \quad |z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k| \\ \Leftrightarrow & \quad \forall k \in [\![2, n]\!], \quad z_k = e^{i\theta_1} |z_k| \end{aligned}$$

5.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr} AX + \det A$$

d'oû

$$\begin{aligned}\Delta &= \operatorname{Tr}^2 A - 4 \det A \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad - bc) \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad - bc) \\ &= (a-d)^2 + 4bc > 0\end{aligned}$$

6.

Comme $\Delta > 0$, χ_A a deux racines réelles distinctes que l'on note $\lambda < \mu$. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples donc A est diagonalisable et, quitte à permuter les colonnes de P,

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = P \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-1}$$

7.

On a

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= \operatorname{Tr} A \\ &= a + d\end{aligned}$$

Si $\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| = \lambda < \mu$. Sinon,

$$\begin{aligned} & -|\lambda| + \mu = a + d > 0 \\ \Rightarrow \quad & |\lambda| < \mu\end{aligned}$$