

CONCOURS MINES-PONTS 2023  
MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ <sup>1</sup>.

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow AU = U \end{aligned}$$

Soit  $A, B$  deux noyaux de Markov. Alors,

$$\begin{aligned} (AB)U &= A(BU) \\ &= AU \\ &= U \end{aligned}$$

ce qui montre que  $AB$  est un noyau de Markov.

2.

Immédiat d'après la question précédente.

3.

Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $(i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)$ . Comme  $K^n$  est un noyau de Markov,  $K_{ij}^n \in [0, 1]$  donc

$$\left| \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} \right| \leq \frac{t^n}{n!}$$

cette expression étant le terme général de la série convergente  $e^t$ , on en déduit que la série proposée converge absolument, donc converge.

---

<sup>1</sup>Dans tout ce qui suit, on utilisera, quand c'est lisible, pour les matrices des notations plus couramment utilisées que celles suggérées par l'énoncé, par exemple:

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La ligne  $i$  du produit matriciel  $HU$  vaut:

$$\sum_{j=1}^n H_t[i, j] u_j = \sum_{j=1}^n \left( e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \right) \times 1$$

Bien sur la série  $\sum_{p \geq 0} (e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!})$  converge car c'est une somme (finie) de  $n$  séries convergentes, et la limite de la série vaut

$$\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} = \sum_{j=1}^n \left( e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n H_t[i, j] u_j &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \frac{t^p}{p!} \underbrace{\sum_{j=1}^n K_{ij}^p}_{=1} \\ &= e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \\ &= e^{-t} e^t \\ &= 1 \\ &= u_i \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la matrice  $K^p$  est un noyau de Markov.

On a montré que  $H_t U = U$ . On conclut que  $H_t$  est un noyau de Markov.

5.

Soit  $(t, s) \in (\mathbb{R}^+)^2$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Le coefficient  $(i, j)$  du produit matriciel  $H_t H_s$  vaut

$$\begin{aligned} (H_t H_s)_{ij} &= \sum_{k=1}^n H_t[i, k] H_s[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^n \left( e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} e^{-s} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( e^{-(s+t)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} \right) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a vu dans la question 3 que les séries  $\sum_{p \geq 0} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!}$  et  $\sum_{l \geq 0} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!}$  sont absolument convergentes. On sait que leur produit de Cauchy  $\sum_{m \geq 0} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \frac{s^{m-p} K_{kj}^{m-p}}{(m-p)!} \right) = \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$  converge absolument et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$$

On reprend en ①:

$$\begin{aligned}(H_t H_s)_{ij} &= \sum_{k=0}^n (e^{-(s+t)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!}) \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)\end{aligned}$$

En ayant conscience qu'ici  $n$  est un entier fixé, il n'y a pas de difficultés à intervertir les deux premiers symboles  $\Sigma$ : on ne fait qu'utiliser les théorèmes généraux sur la limite d'une somme (finie) de  $n$  séries convergentes:

$$(H_t H_s)_{ij} = e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \left( \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$$

L'addition étant commutative,

$$\begin{aligned}(H_t H_s)_{ij} &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^m \left( \sum_{k=0}^n \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right) \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p}}{p!(m-p)!} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n K_{ik}^p K_{kj}^{m-p} \right)}_{K_{ij}^m}\end{aligned}$$

On reconnait le coefficient  $(i, j)$  du produit matriciel  $K^p K^{m-p} = K^m$

$$\begin{aligned}&= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p}}{p!(m-p)!} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m t^p s^{m-p} \frac{m!}{p!(m-p)!} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m t^p s^{m-p} \binom{m}{p} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} (s+t)^m \\ &= e^{-(s+t)} e^{s+t} H_{s+t}[i, j] \\ (H_t H_s)_{ij} &= H_{s+t}[i, j]\end{aligned}$$

On peut conclure

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad H_t H_s = H_{t+s}$$

6.

soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . soit  $k \in \mathbb{N}^{*(?)2}$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N K_{ij} &= \sum_{j=1}^N p_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^n P(Z_{k+1} = j \mid Z_k = i) \\
 &= P(Z_{k+1} \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid Z_k = i) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

7.

On a déjà

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Z_0 = j) &= \delta_{1j} \\
 &= I_{1j} \\
 &= K_{1j}^0
 \end{aligned}$$

Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$ . Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 P(Z_{n+1} = i) &= \sum_{j=1}^N P(Z_{n+1} = i \cap Z_n = j) \\
 &= \sum_{j=1}^N P(Z_{n+1} = i \mid Z_n = j) P(Z_n = j) \\
 &= \sum_{j=1}^N p_{ji} K_{1j}^n \\
 &= \sum_{j=1}^N K_{ji} K_{1j}^n \\
 &= \sum_{j=1}^n K_{1j}^n K_{ji} \\
 &= (K^n K)_{1i} \\
 &= K_{1i}^{n+1}
 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$$

---

<sup>2</sup>Il y a une ambiguïté dans la définition des nombres  $p_{ij}$ : que se passe-t-il si pour un certain  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_k = i) = 0$ ?

8.

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ , Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 P(A_{t,j}) &= P(A_{t,j} \cap \Omega) \\
 &= P(A_{t,j} \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} Y_t = n) \\
 &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_{t,j} \cap Y_t = n)\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \cap Y_t = n) \quad (\text{les évènements } Y_t = n \text{ sont deux à deux incompatibles.}) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \mid Y_t = n) P(Y_t = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z_n = j) e^{-t} \frac{t^n}{n!} \\
 &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} K_{1j}^n \frac{t^n}{n!} \\
 &= H_t[1, j]
 \end{aligned}$$

9.

un endomorphisme autoadjoint d'un espace Euclidien est diagonalisable en base orthonormale; soit  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base orthonormale constituée de vecteurs propres de  $u$ , et  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  la valeur propre associée au vecteur  $e_i$ .

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle u(e_i) \mid e_i \rangle &= \langle \lambda_i e_i \mid e_i \rangle \\
 &= \lambda_i \underbrace{\langle e_i \mid e_i \rangle}_{=1} \\
 &= \lambda_i
 \end{aligned}$$

montre que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \geq 0$ .

10.

Quitte à renuméroter, on peut supposer  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ . On a :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x_1 e_1 \\
 x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
 u(x - p(x)) &= u\left(\sum_{i=2}^n x_i e_i\right) \\
 &= \sum_{i=2}^n u(x_i e_i) \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i u(e_i) \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i
 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x_1 e_1 \\
 x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
 \langle u(x - p(x)) \mid x \rangle &= \left\langle \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{\langle e_i \mid e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
 &= \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_i \\
 &\geq \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_2 \\
 &= \lambda_2 \sum_{i=2}^n x_i^2 \\
 &= \lambda_2 \|x - p(x)\|^2
 \end{aligned}$$

**11.**

Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . La colonne  $i$  du produit  $\pi K$  vaut:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \pi(j) K_{ji} &= \sum_{j=1}^N \pi(i) K_{ij} \\ &= \pi(i) \underbrace{\sum_{j=1}^N K_{ij}}_{=1} \\ &= \pi(i) \end{aligned}$$

car  $K$  est un noyau de Markov. On a donc bien:

$$\pi K = \pi$$

**12.**

Il est clair que

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$$

et

$$\langle \mu X + Z, Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle + \langle Z, Y \rangle$$

i.e.  $\langle, \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique. Ensuite,

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^N x_i^2 \underbrace{\pi(i)}_{\geq 0} \geq 0$$

et en plus

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N x_i^2 \pi(i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad x_i^2 \pi(i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad x_i = 0 \\ &\Leftrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

car  $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \pi(i) \neq 0$ .

$\langle, \rangle$  est bien un produit scalaire.

**13.**

d'après l'énoncé, 1 est une valeur propre de  $K$  d'ordre 1, autrement dit  $\dim(K - I_N) = 1$ . Or  $K$  est un noyau de Markov, ce qui implique  $KU = U$  d'après 1. On en déduit que  $\ker u = \ker(K - I_N) = \text{vect}(U)$ .

Soit  $(X, Y) \in M_{n1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}
\langle X, u(Y) \rangle &= \sum_{i=1}^N x_i \left( - \sum_{j=1}^N K_{ij} y_j + y_i \right) \pi(i) \\
&= - \sum_{i=1}^N x_i \left( \sum_{j=1}^N K_{ij} y_j \pi(i) \right) + \sum_{i=1}^N x_i y_i \pi(i) \\
&= - \sum_{i=1}^N x_i \left( \sum_{j=1}^N y_j K_{ij} \pi(i) \right) + \sum_{i=1}^N x_i y_i \pi(i) \\
&= - \sum_{i=1}^N x_i \left( \sum_{j=1}^N y_j K_{ji} \pi(j) \right) + \sum_{j=1}^N x_j y_j \pi(j) \\
&= - \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N x_i y_j K_{ji} \pi(j) \right) + \sum_{j=1}^N x_j y_j \pi(j) \\
&= - \sum_{j=1}^N y_j \pi(j) \left( \sum_{i=1}^N x_i K_{ji} \right) + \sum_{j=1}^N x_j y_j \pi(j) \\
&= \sum_{j=1}^N y_j \pi(j) \left( - \sum_{i=1}^N x_i K_{ji} + x_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^N y_j \pi(j) \left( (-K + I_N) X \right)_j \\
&= \langle u(X), Y \rangle
\end{aligned}$$

On a montré que  $u$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

14.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_i - x_j)^2 K_{ij} \pi(i) &= \sum_{i=1}^N \pi(i) \sum_{j=1}^N (x_i - x_j)^2 K_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^N \pi(i) \sum_{j=1}^N (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) K_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^N \pi(i) \left( \sum_{j=1}^N x_i^2 K_{ij} + \sum_{j=1}^N x_j^2 K_{ij} - 2 \sum_{j=1}^N x_i x_j K_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \pi(i) \left( x_i^2 \underbrace{\sum_{j=1}^N K_{ij}}_{=1} + \sum_{j=1}^N x_j^2 K_{ij} - 2x_i \sum_{j=1}^N x_j K_{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left( \pi(i) x_i^2 + \sum_{j=1}^N x_j^2 K_{ij} \pi(i) - 2x_i \sum_{j=1}^N x_j \underbrace{K_{ij} \pi(i)}_{K_{ji} \pi(j)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left( \pi(i) x_i^2 + \sum_{j=1}^N x_j^2 K_{ij} \pi(i) - 2x_i \sum_{j=1}^N x_j K_{ji} \pi(j) \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \pi(i) x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j^2 \underbrace{K_{ij} \pi(i)}_{K_{ji} \pi(j)} - 2 \sum_{i=1}^N x_i \sum_{j=1}^N x_j K_{ji} \pi(j) \\
&= \sum_{i=1}^N \pi(i) x_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j^2 K_{ji} \pi(j) - 2 \sum_{j=1}^N x_j \pi(j) \sum_{i=1}^N K_{ji} x_i \\
&= \sum_{i=1}^N \pi(i) x_i^2 + \sum_{j=1}^N x_j^2 \pi(j) \underbrace{\sum_{i=1}^N K_{ji}}_{=1} - 2 \sum_{j=1}^N x_j \pi(j) (KX)_j \\
&= 2 \sum_{i=1}^N \pi(i) x_i^2 - 2 \sum_{j=1}^N x_j \pi(j) (KX)_j \\
&= 2 \sum_{i=1}^N \pi(i) x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N x_i \pi(i) (KX)_i \\
&= 2 \sum_{i=1}^N \pi(i) x_i (x_i - (KX)_i) \\
&= 2 \sum_{i=1}^N \pi(i) x_i u(X)_i \\
&= 2 \langle X, u(X) \rangle \\
&= 2q_u(X)
\end{aligned}$$

Cela montre en particulier que  $\forall X \in M_{n1}(\mathbb{R}), \quad q_u(X) \geq 0$ .

D'après la question 9, les valeurs propres de l'endomorphisme autoadjoint positif  $u$  sont positives.

15.

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , fixé. la somme de la série entière de rayon  $R = +\infty : \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!}$  est dérivable sur  $] -\infty, +\infty[$  et de même  $H_t[i, j]$ :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad H'_t[i, j] &= e^{-t} \left( - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1} K_{ij}^n}{n!} \right) \\
&= e^{-t} \left( - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} K_{ij}^n}{(n-1)!} \right) \\
&= e^{-t} \left( - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + K_{ij} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} K_{ij}^{n-1}}{(n-1)!} \right) \\
&= e^{-t} \left( - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + K_{ij} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{(n)!} \right) \\
&= e^{-t} (-1 + K_{ij}) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} \\
&= (-1 + K_{ij}) H_t[i, j] \quad \textcircled{2}
\end{aligned}$$

Calculons le coefficient  $(i, j)$  du produit matriciel  $KH_t$ :

$$\begin{aligned}
 (KH_t)_{ij} &= \sum_{k=0}^N K_{ik} H_t[k, j] \\
 &= e^{-t} \sum_{k=0}^N K_{ik} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{kj}^n}{n!} \\
 &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^N K_{ik} \frac{t^n K_{kj}^n}{n!} \\
 &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^N K_{ik} K_{kj}^n \\
 &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} K_{ij}^{n+1} \\
 &= K_{ij} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} K_{ij}^n \\
 (KH_t)_{ij} &= K_{ij} H_t[i, j]
 \end{aligned}$$

Autrement dit, les deux matrices  $K$  et  $H$  ont la relativement troublante propriété que leur produit matriciel revient à multiplier les éléments correspondants deux à deux. En particulier on remarque qu'elles commutent. On peut reformuler ② :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H'_t[i, j] = -H_t[i, j] + (KH_t)_{ij}$$

ce qui montre que  $H'(t) = -H + KH = (-I_N + K)H$ .

Soit  $X \in E$  fixé, indépendamment de  $t$ . La fonction

$$\begin{aligned}
 \psi_X : \mathbb{R} &\rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) \\
 t &\mapsto H_t X
 \end{aligned}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (et même de classe  $C^\infty$ ), et

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'_X(t) &= H'_t(t)X \\
 &= (-I_N + K)H_t X
 \end{aligned}$$

**16.**

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) &= \|H_t X\|^2 \\
 &= \langle H_t X, H_t X \rangle \\
 &= \langle \psi_X(t), \psi_X(t) \rangle
 \end{aligned}$$

Le produit scalaire étant bilinéaire, on en déduit que  $\varphi_X$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'_X(t) &= \langle \psi'_x(t), \psi_x(t) \rangle + \langle \psi_x(t), \psi'_x(t) \rangle \\ &= \langle (-I_N + K)H_t X, H_t X \rangle + \langle H_t X, (-I_N + K)H_t X \rangle \\ &= 2\langle (-I_N + K)H_t X, H_t X \rangle \\ &= -2\langle u(H_t X), H_t X \rangle \\ &= -2q_U(H_t X)\end{aligned}$$

17.

On rappelle que  $\ker u = \text{vect}(U)$ , avec

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a:

$$\begin{aligned}\langle H_t X, U \rangle &= \sum_{i=1}^N (H_t X)_i u_i \pi(i) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N H_t[i, j] x_j \right) \pi(i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j \underbrace{H_t[i, j] \pi(i)}_{=H_t[j, i] \pi(j)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j H_t[j, i] \pi(j) \\ &= \sum_{j=1}^N x_j \pi(j) \underbrace{\sum_{i=1}^N H_t[j, i]}_{=1} \\ &= \sum_{j=1}^N x_j \times 1 \times \pi(j) \\ &= \sum_{j=1}^N x_j u(j) \pi(j) \\ &= \langle X, U \rangle\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore:

$$\langle H_t X - X, U \rangle = 0$$

cela montre que  $H_t X - X \in (\ker u)^\perp = \ker p$ , i.e.

$$p(H_t X) = p(X)$$

18.

Soit  $Y = X - p(X)$ . D'après la question 16,

$$\begin{aligned}\varphi'_Y(t) &= -2q_U(H_t Y) \\ &= -2q_U(H_t X - H_t p(X))\end{aligned}$$

On voudrait utiliser le résultat de 10, donc il faut mettre le paramètre de  $q_U$  sous la bonne forme. On remarque pour cela que

$$\begin{aligned}p(H_t p(X)) &= p(p(X)) \\ &= p(X) \\ &= p(H_t X)\end{aligned}$$

c'est à dire:

$$p(H_t p(X) - H_t X) = 0$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi'_Y(t) &= -2q_U(H_t X - H_t p(X) - 0) \\ &\leq -2\lambda \|H_t X - H_t p(X) - 0\|^2 \\ &= -2\lambda \|H_t(X - p(X))\|^2 \\ &= -2\lambda \varphi_Y(t)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi'_Y(t) + 2\lambda \varphi_Y(t) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e^{-2\lambda t} (e^{2\lambda t} \varphi_Y(t))' &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (e^{2\lambda t} \varphi_Y(t))' &\leq 0\end{aligned}$$

On peut intégrer cette relation ( $\varphi_Y$  est de classe  $C^1$ ):

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e^{2\lambda t} \varphi_Y(t) - e^{2\lambda \times 0} \varphi_Y(0) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \varphi_Y(t) &\leq e^{-2\lambda t} \varphi_Y(0) \\ \Leftrightarrow \|H_t X - H_t p(X)\|^2 &\leq e^{-2\lambda t} \underbrace{\|H_0 X - H_0 p(X)\|^2}_{=I_N}\end{aligned}$$

Il ne manque plus qu'à remplacer  $H_t p(X)$  par  $p(X)$  pour arriver au résultat attendu; or comme  $H_t$  est un noyau de Markov, et  $p(X) \in \ker u = \text{vect}(U)$ , on a d'après la question 1:

$$\begin{aligned}H_t p(X) &= H_t(\mu U) \\ &= \mu H_t U \\ &= \mu U \\ &= p(X)\end{aligned}$$

On peut donc conclure:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2$$

19.

Soit  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Il faut appliquer la relation précédente à  $X = E_i$ . Il semblerait que  $p(E_i) = \pi(i)U \in \text{vect}(U)$ . Il faut s'intéresser à:

$$\begin{aligned}
 E_i - \pi(i)U &= \begin{bmatrix} -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \\ 1 - \pi(i) \\ -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne } i \\
 &= \begin{bmatrix} -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \pi(j) \\ -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On calcule le produit scalaire avec le vecteur  $U$ :

$$\begin{aligned}
 \langle E_i - \pi(i)U, U \rangle &= - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \pi(i)\pi(k) + (1 - \pi(i))\pi(i) \\
 &= - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \pi(i)\pi(k) + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \pi(j) \right) \pi(i) \\
 &= - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \pi(i)\pi(k) + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \pi(j) \right) \pi(i) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On a donc:

$$E_i = \underbrace{\pi(i)U}_{\in \ker u} + \underbrace{E_i - \pi(i)U}_{\in (\ker u)^\perp}$$

Cela montre que  $p(E_i) = \pi(i)U$ .

Le théorème de Pythagore donne:

$$\begin{aligned}
 \|E_i\|^2 &= \|\pi(i)U\|^2 + \|E_i - \pi(i)U\|^2 \\
 \Leftrightarrow \pi(i) &= \pi(i)^2 + \|E_i - \pi(i)U\|^2 \\
 \Leftrightarrow \|E_i - \pi(i)U\|^2 &= \pi(i)(1 - \pi(i)) \leq \pi(i)
 \end{aligned}$$

Puis la question précédente appliquée à  $X = E_i$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|H_t E_i - \pi(i)U\| \leq e^{-\lambda t} \|E_i - \pi(i)U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi(i)}$$

**20.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N (H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \pi(k))(H_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi(j)) &= \sum_{k=1}^N H_{\frac{t}{2}}[i, k]H_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi(j) \sum_{k=1}^N H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \sum_{k=1}^N \pi(k)H_{\frac{t}{2}}[k, j] + \pi(j) \sum_{k=1}^N \pi(k) \\
&= \underbrace{(H_{\frac{t}{2}}H_{\frac{t}{2}})_{ij}}_{H_t} - \pi(j) - \pi(j) \sum_{k=1}^N H_{\frac{t}{2}}[j, k] + \pi(j) \\
&= H_t[i, j] - \pi(j)
\end{aligned}$$

**21.**

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ , fixé. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H_t E_j - \pi(j)U = \begin{bmatrix} H_t[1, j] - \pi(j) \\ \vdots \\ H_t[k, j] - \pi(j) \\ \vdots \\ H_t[N, j] - \pi(j) \end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|H_t E_j - \pi(j)U\|^2 &= \sum_{k=1}^N (H_t[k, j] - \pi(j))^2 \pi(k) \\
&\geq (H_t[i, j] - \pi(j))^2 \pi(i)
\end{aligned}$$

On peut conclure avec la question 19:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |H_t[i, j] - \pi(j)| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi(j)}{\pi(i)}}$$

ce qui montre que la fonction  $H_t[i, j]$  a une limite quand  $t \rightarrow +\infty$  (car  $\lambda > 0$ ), et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t[i, j] = \pi(j)$$