CONCOURS MINES-PONTS 2023
MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$[1].

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow AU = U
\end{aligned}$$

Soit A, B deux noyaux de Markov. Alors,

$$\begin{aligned}
(AB)U &= A(BU) \\
&= AU \\
&= U
\end{aligned}$$

ce qui montre que AB est un noyau de Markov.

2.

Immédiat d'après la question précédente.

3.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j \in [\![1,n]\!]^2)$. Comme K^n est un noyau de Markov, $K^n_{ij} \in [0,1]$ donc

$$\left| \frac{t^n K^n_{ij}}{n!} \right| \leqslant \frac{t^n}{n!}$$

cette expression étant le terme général de la série convergente e^t, on en déduis que la série proposée converge absolument, donc converge.

[1]Dans tout ce qui suit, on utilisera, quand c'est lisible, pour les matrices des notations plus couramment utilisées que celles suggérées par l'énoncé, par example:

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La ligne i du produit matriciel HU vaut:

$$\sum_{j=1}^{n} H_t[i,j]u_j = \sum_{j=1}^{n}(e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^pK_{ij}^p}{p!}) \times 1$$

Bien sur la série $\sum_{p\geqslant 0}(e^{-t}\sum_{j=1}^{n}\frac{t^pK_{ij}^p}{p!})$ converge car c'est une somme (finie) de n séries convergentes, et la limite de la série vaut

$$\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t}\sum_{j=1}^{n}\frac{t^pK_{ij}^p}{p!} = \sum_{j=1}^{n}(e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^pK_{ij}^p}{p!})$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} H_t[i,j]u_j &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t}\sum_{j=1}^{n}\frac{t^pK_{ij}^p}{p!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^p}{p!}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^p}_{=1} \\
&= e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p}{p!} \\
&= e^{-t}e^{t} \\
&= 1 \\
&= u_i
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la matrice K^p est un noyau de Markov.

On a montré que $H_tU = U$. On conclut que H_t est un noyau de Markov.

5.

Soit $(t,s) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient (i,j) du produit matriciel H_tH_s vaut

$$\begin{aligned}
(H_tH_s)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} H_t[i,k]H_s[k,j] \\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^pK_{ik}^p}{p!}e^{-s}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{s^lK_{kj}^l}{l!}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{-(s+t)}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^pK_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{s^lK_{kj}^l}{l!}) \qquad ①
\end{aligned}$$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, on a vu dans la question 3 que les séries $\sum_{p\geqslant 0}\frac{t^pK_{ik}^p}{p!}$ et $\sum_{l\geqslant 0}\frac{t^lK_{kj}^l}{l!}$ sont absolument convergentes. On sait que leur produit de Cauchy $\sum_{m\geqslant 0}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^pK_{ik}^p}{p!}\frac{s^{m-p}K_{kj}^{m-p}}{(m-p)!}) = \sum_{m\geqslant 0}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})$ converge absolument et

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^pK_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^lK_{kj}^l}{l!} = \sum_{m=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})$$

On reprend en ①:

$$
\begin{aligned}
(H_tH_s)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n}(e^{-(s+t)}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^pK_{ik}^p}{p!}\times\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{s^lK_{kj}^l}{l!}) \\
&= e^{-(s+t)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})
\end{aligned}
$$

En ayant conscience qu'ici n est un entier fixé, il n'y a pas de difficultés à intervertir les deux premiers symboles Σ: on ne fait qu'utiliser les théorèmes généraux sur la limite d'une somme (finie) de n séries convergentes:

$$
(H_tH_s)_{ij} = e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})
$$

L'addition étant commutative,

$$
\begin{aligned}
(H_tH_s)_{ij} &= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{m}(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!}) \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}}{p!(m-p)!}\underbrace{(\sum_{k=0}^{n}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p})}_{K_{ij}^m}
\end{aligned}
$$

On reconnait le coefficient (i,j) du produit matriciel $K^pK^{m-p} = K^m$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}}{p!(m-p)!} \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}t^ps^{m-p}\frac{m!}{p!(m-p)!} \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}t^ps^{m-p}\binom{m}{p} \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\frac{1}{m!}(s+t)^m \\
&= e^{-(s+t)}e^{s+t}H_{s+t}[i,j] \\
(H_tH_s)_{ij} &= H_{s+t}[i,j]
\end{aligned}
$$

On peut conclure

$$
\forall (s,t)\in(\mathbb{R}^+)^2,\quad H_tH_s = H_{t+s}
$$

6.

soit $i \in [\![1, N]\!]$. soit $k \in \mathbb{N}^{*(?)}$[2].

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} K_{ij} &= \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(Z_{k+1} = j \mid Z_k = i) \\ &= P(Z_{k+1} \in [\![1, N]\!] \mid Z_k = i) \\ &= 1\end{aligned}$$

7.

On a déjà

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1, N]\!], \quad P(Z_0 = j) &= \delta_{1j} \\ &= I_{1j} \\ &= K^0_{1j}\end{aligned}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \in [\![1, N]\!], \quad P(Z_n = j) = K^n_{1j}$. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1} = i) &= \sum_{j=1}^{N} P(Z_{n+1} = i \cap Z_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} P(Z_{n+1} = i \mid Z_n = j) P(Z_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} p_{ji} K^n_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{N} K_{ji} K^n_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} K^n_{1j} K_{ji} \\ &= (K^n K)_{1i} \\ &= K^{n+1}_{1i}\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in [\![1, N]\!], \quad P(Z_n = j) = K^n_{1j}$$

[2]Il y a une ambiguité dans la définition des nombres p_{ij}: que se passe t-il si pour un certain $i \in [\![1, N]\!]$, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_k = i) = 0$?

8.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, Soit $j \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(A_{t,j}) &= P(A_{t,j} \cap \Omega) \\
&= P(A_{t,j} \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} Y_t = n) \\
&= P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_{t,j} \cap Y_t = n)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \cap Y_t = n) \qquad \text{(les évènements } Y_t = n \text{ sont deux à deux incompatibles.)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \mid Y_t = n) P(Y_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z_n = j) e^{-t} \frac{t^n}{n!} \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} K_{1j}^n \frac{t^n}{n!} \\
&= H_t[1, j]
\end{aligned}$$

9.

un endomorphisme autoadjoint d'un espace Euclidien est diagonalisable en base orthonormale; soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthonormale consitutée de vecteurs propres de u, et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ la valeur propre associée au vecteur e_i.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \begin{aligned}[t] \langle u(e_i) \mid e_i \rangle &= \langle \lambda_i e_i \mid e_i \rangle \\ &= \lambda_i \underbrace{\langle e_i \mid e_i \rangle}_{=1} \\ &= \lambda_i \end{aligned}$$

montre que $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \geqslant 0$.

10.

Quitte à renuméroter, on peut supposer $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$.On a:

$$\begin{aligned}
p(x) &= x_1 e_1 \\
x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
u(x - p(x)) &= u(\sum_{i=2}^n x_i e_i) \\
&= \sum_{i=2}^n u(x_i e_i) \\
&= \sum_{i=2}^n x_i u(e_i) \\
&= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
p(x) &= x_1 e_1 \\
x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
\langle u(x - p(x)) \mid x \rangle &= \langle \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle \\
&= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{\langle e_i \mid e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_i \\
&\geqslant \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_2 \\
&= \lambda_2 \sum_{i=2}^n x_i^2 \\
&= \lambda_2 \|x - p(x)\|^2
\end{aligned}$$

11.

Soit $i \in [\![1, N]\!]$. La colonne i du produit πK vaut:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \pi(j) K_{ji} &= \sum_{j=1}^{N} \pi(i) K_{ij} \\ &= \pi(i) \underbrace{\sum_{j=1}^{N} K_{ij}}_{=1} \\ &= \pi(i)\end{aligned}$$

car K est un noyau de Markov. On a donc bien:

$$\pi K = \pi$$

12.

Il est clair que

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$$

et

$$\langle \mu X + Z, Y \rangle = \mu \langle X, Y \rangle + \langle Z, Y \rangle$$

i.e. $\langle , \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. Ensuite,

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \underbrace{\pi(i)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

et en plus

$$\begin{aligned}\langle X, X \rangle = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \pi(i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!], \quad x_i^2 \pi(i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!], \quad x_i = 0 \\ &\Leftrightarrow X = 0\end{aligned}$$

car $\forall i \in [\![1, N]\!], \quad \pi(i) \neq 0$.

$\langle , \rangle$ est bien un produit scalaire.