

CONCOURS MINES-PONTS 2023
MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license. 

1.

Supposons $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. On rappelle que les valeurs propres d'une matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ sont réelles; soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S , et $X (\neq 0)$ un vecteur propre associé

$$\begin{aligned}\langle SX, X \rangle &= (SX)^T X \\ &= \lambda X^T X \\ &= \lambda \|X\|^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda = \frac{\langle SX, X \rangle}{\|X\|^2} \geq 0$$

Cela montre que $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, supposons $Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$. On peut diagonaliser en base orthonormale

$$\begin{aligned}S &= Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} Q^T \\ &= Q D Q^T\end{aligned}$$

avec Q orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle SX, X \rangle &= X^T S X \\ &= X^T Q D Q^T X \\ &= (Q^T X)^T D Q^T X \\ &= Q^T X^T D Q^T X \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \geq 0\end{aligned}$$

où

$$Q^T X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

On a bien $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

2.

Soit $(S_1, S_2) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle ((1-t)S_1 + tS_2)X, X \rangle &= X^T S X \\ &= (1-t) \underbrace{\langle S_1 X, X \rangle}_{\geq 0} + t \underbrace{\langle S_2 X, X \rangle}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est positive par convexité de l'ensemble \mathbb{R}^+ . Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.

Similairement, soit $(S_1, S_2) \in S_n^{++}(\mathbb{R})^2$. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle ((1-t)S_1 + tS_2)X, X \rangle &= X^T S X \\ &= (1-t) \underbrace{\langle S_1 X, X \rangle}_{> 0} + t \underbrace{\langle S_2 X, X \rangle}_{> 0} \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement positive par convexité de l'ensemble \mathbb{R}^{+*} . Donc $(1-t)S_1 + tS_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

Ces ensembles ne sont pas des espaces vectoriels puisqu'ils contiennent I_n mais pas $-I_n$.

3.

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned} A &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= S^2 \end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. La matrice

$$\begin{aligned} S &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^{-1} \end{aligned}$$

est une matrice symétrique réelle vérifiant $Sp(S) = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}^{+*}$ et donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4.

La propriété est triviale pour $p = 1$ et correspond à la définition de la convexité d'une fonction pour $p = 2$. Soit maintenant $p > 2$. si $\lambda_p = 1$ on est ramené au cas trivial $p = 1$ donc on peut

supposer $\lambda_p < 1$. On peut ainsi écrire:

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j = (1 - \lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \underbrace{\frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p}}_{\lambda'_j} x_j + \lambda_p x_p$$

En appliquant une première fois la propriété avec $p = 2$ on obtient:

$$f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\right) \leq (1 - \lambda_p) f\left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p} x_j\right) + \lambda_p f(x_p)$$

En appliquant une deuxième fois la propriété (hypothèse de récurrence) puisqu'on remarque que $\sum_{j=1}^{p-1} \lambda'_j = 1$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\right) &\leq (1 - \lambda_p) \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_p} f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j f(x_j) + \lambda_p f(x_p) \\ &= \sum_{j=1}^p \lambda_j f(x_j) \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang p et on peut conclure.

5.

La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^{+*} et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$$

ce qui montre que la fonction est convexe sur \mathbb{R}^{+*} . Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ les valeurs propres de M répétées avec leur ordre de multiplicité. On a

$$\begin{aligned} \text{Tr } M &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \det M &= \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

Si $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$, la propriété est triviale. On peut maintenant supposer que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. On applique alors le résultat de la question précédente à la fonction f

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} f(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow -\ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq -\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow -\ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\leq -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(\lambda_j) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right) \\
 \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \lambda_j\right) &\geq \ln\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j^{\frac{1}{n}}\right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j &\geq \left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right)^{\frac{1}{n}} \\
 \Leftrightarrow \frac{\text{Tr } M}{n} &\geq (\det M)^{\frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

6.

Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. La diagonalisation en base orthonormale peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 M &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\
 &= U D U^T
 \end{aligned}$$

avec U orthogonale et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } M^T M &= \text{Tr } U D \underbrace{U^T U}_{=I_n} D U^T \\
 &= \text{Tr } U D^2 U^T \\
 &= \text{Tr } D^2 U^T U \\
 &= \text{Tr } D^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

7.

On peut noter que le résultat précédent est valable pour les matrices de $S_n(\mathbb{R})$. Ensuite, en notant $\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$, on a

$$\begin{aligned}\|M\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \\ &\geq \sqrt{\rho(M)^2} \\ &= \rho(M)\end{aligned}$$

De plus, la diagonalisation de la matrice $M - \det^{\frac{1}{n}}(M)I_n$ s'obtient facilement à l'aide de celle de M :

$$\begin{aligned}M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \det^{\frac{1}{n}}(M) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \det^{\frac{1}{n}}(M) \end{bmatrix} U^T \\ &= U(D - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n)U^T\end{aligned}$$

ce qui permet en particulier de déterminer son spectre. On peut maintenant appliquer directement la formule de l'énoncé aux valeurs propres de $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$:

$$2\rho(M)\left(\frac{\text{Tr } M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}}\right) \geq \frac{1}{n} \|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\|^2$$

Comme $\rho(M) > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\text{Tr } M}{n} - (\det M)^{\frac{1}{n}} &\geq \frac{\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\|^2}{2n\rho(M)} \\ &\geq \frac{\|M - (\det M)^{\frac{1}{n}}I_n\|^2}{2n\|M\|}\end{aligned}$$

8.

On commence par suivre l'indication de l'énoncé en utilisant le résultat de la question ??:

$$\begin{aligned}A &= S^2 \\ &= U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \underbrace{U^T U}_{=I_n} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} U^T \\ &= UD_1 D_1 U^T \\ &= (UD_1)(UD_1)^T\end{aligned}$$

On est alors tenté de choisir $Q' = UD_1$ pour répondre à la question posée; toutefois il n'y a peu de chance que ce choix fournisse la forme souhaitée pour la matrice B car on ne l'a pas fait encore

intervenir dans le raisonnement. Essayons:

$$\begin{aligned}
 Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1} &= (UD_1)^{-1}B((UD_1)^T)^{-1} \\
 &= D_1^{-1}U^{-1}B((U^T)^{-1}((D_1^T)^{-1}) \\
 &= D_1^{-1}U^T B U D_1^{-1} \\
 &= B'
 \end{aligned}$$

Cette matrice B' n'est a priori pas diagonale, par contre elle est symétrique et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale D :

$$\exists V \in O_n(\mathbb{R}), \quad B' = V D V^T$$

On peut alors voir que

$$\begin{aligned}
 \forall W \in O_n(\mathbb{R}), \quad A &= U D_1 \underbrace{W W^T}_{=I_n} D_1 U^T \\
 &= (U D_1 W)(U D_1 W)^T
 \end{aligned}$$

Le choix qui s'impose est donc $W = V$, soit $Q = Q'V = U D_1 V$:

$$\begin{aligned}
 Q^{-1}B(Q^T)^{-1} &= V^T Q'^{-1}B(Q'^T)^{-1}V \\
 &= V^T B' V \\
 &= D
 \end{aligned}$$