

CONCOURS MINES-PONTS 2023

MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ ¹.

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow AU = U \end{aligned}$$

Soit A, B deux noyaux de Markov. Alors,

$$\begin{aligned} (AB)U &= A(BU) \\ &= AU \\ &= U \end{aligned}$$

ce qui montre que AB est un noyau de Markov.

2.

Immédiat d'après la question précédente.

3.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)$. Comme K^n est un noyau de Markov, $K_{ij}^n \in [0, 1]$ donc

$$\left| \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} \right| \leq \frac{t^n}{n!}$$

cette expression étant le terme général de la série convergente e^t , on en déduit que la série proposée converge absolument, donc converge.

¹Dans tout ce qui suit, on utilisera, quand c'est lisible, pour les matrices des notations plus couramment utilisées que celles suggérées par l'énoncé, par exemple:

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La ligne i du produit matriciel HU vaut:

$$\sum_{j=1}^n H_t[i, j] u_j = \sum_{j=1}^n \left(e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \right) \times 1$$

Bien sur la série $\sum_{p \geq 0} (e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!})$ converge car c'est une somme (finie) de n séries convergentes, et la limite de la série vaut

$$\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} = \sum_{j=1}^n \left(e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n H_t[i, j] u_j &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \sum_{j=1}^n \frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t} \frac{t^p}{p!} \underbrace{\sum_{j=1}^n K_{ij}^p}_{=1} \\ &= e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \\ &= e^{-t} e^t \\ &= 1 \\ &= u_i \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la matrice K^p est un noyau de Markov.

On a montré que $H_t U = U$. On conclut que H_t est un noyau de Markov.

5.

Soit $(t, s) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient (i, j) du produit matriciel $H_t H_s$ vaut

$$\begin{aligned} (H_t H_s)_{ij} &= \sum_{k=1}^n H_t[i, k] H_s[k, j] \\ &= \sum_{k=1}^n \left(e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} e^{-s} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(e^{-(s+t)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} \right) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a vu dans la question 3 que les séries $\sum_{p \geq 0} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!}$ et $\sum_{l \geq 0} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!}$ sont absolument convergentes. On sait que leur produit de Cauchy $\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{p=0}^m \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \frac{s^{m-p} K_{kj}^{m-p}}{(m-p)!} \right) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$ converge absolument et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$$

On reprend en ①:

$$\begin{aligned} (H_t H_s)_{ij} &= \sum_{k=0}^n (e^{-(s+t)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{s^l K_{kj}^l}{l!}) \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right) \end{aligned}$$

En ayant conscience qu'ici n est un entier fixé, il n'y a pas de difficultés à intervertir les deux premiers symboles Σ : on ne fait qu'utiliser les théorèmes généraux sur la limite d'une somme (finie) de n séries convergentes:

$$(H_t H_s)_{ij} = e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right)$$

L'addition étant commutative,

$$\begin{aligned} (H_t H_s)_{ij} &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^m \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^p s^{m-p} K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!} \right) \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p}}{p!(m-p)!} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n K_{ik}^p K_{kj}^{m-p} \right)}_{K_{ij}^m} \end{aligned}$$

On reconnait le coefficient (i, j) du produit matriciel $K^p K^{m-p} = K^m$

$$\begin{aligned} &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \sum_{p=0}^m \frac{t^p s^{m-p}}{p!(m-p)!} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m t^p s^{m-p} \frac{m!}{p!(m-p)!} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m t^p s^{m-p} \binom{m}{p} \\ &= e^{-(s+t)} \sum_{m=0}^{+\infty} K_{ij}^m \frac{1}{m!} (s+t)^m \\ &= e^{-(s+t)} e^{s+t} H_{s+t}[i, j] \\ (H_t H_s)_{ij} &= H_{s+t}[i, j] \end{aligned}$$

On peut conclure

$$\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad H_t H_s = H_{t+s}$$

6.

soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. soit $k \in \mathbb{N}^{*(?)2}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n K_{ij} &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \\
 &= \sum_{j=1}^n P(Z_{k+1} = j \mid Z_k = i) \\
 &= P(Z_{k+1} \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid Z_k = i) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

7.

On a déjà

$$\begin{aligned}
 \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Z_0 = j) &= \delta_{1j} \\
 &= I_{1j} \\
 &= K_{1j}^0
 \end{aligned}$$

Soit maintenant $n \geq 1$ tel que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 P(Z_{n+1} = i) &= \sum_{j=1}^n P(Z_{n+1} = i \cap Z_n = j) \\
 &= \sum_{j=1}^n P(Z_{n+1} = i \mid Z_n = j) P(Z_n = j) \\
 &= \sum_{j=1}^n p_{ji} K_{1j}^n \\
 &= \sum_{j=1}^n K_{ji} K_{1j}^n \\
 &= \sum_{j=1}^n K_{1j}^n K_{ji} \\
 &= (K^n K)_{1i} \\
 &= K_{1i}^{n+1}
 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$$

²Il y a une ambiguïté dans la définition des nombres p_{ij} : que se passe-t-il si pour un certain $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_k = i) = 0$?

8.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 P(A_{t,j}) &= P(A_{t,j} \cap \Omega) \\
 &= P(A_{t,j} \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} Y_t = n) \\
 &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_{t,j} \cap Y_t = n)\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \cap Y_t = n) \quad (\text{les évènements } Y_t = n \text{ sont deux à deux incompatibles.}) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \mid Y_t = n) P(Y_t = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z_n = j) e^{-t} \frac{t^n}{n!} \\
 &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} K_{1j}^n \frac{t^n}{n!} \\
 &= H_t[1, j]
 \end{aligned}$$