CONCOURS MINES-PONTS 2023
MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER
This document is published under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license.

1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$[1].

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow AU = U
\end{aligned}$$

Soit A, B deux noyaux de Markov. Alors,

$$\begin{aligned}
(AB)U &= A(BU) \\
&= AU \\
&= U
\end{aligned}$$

ce qui montre que AB est un noyau de Markov.

2.

Immédiat d'après la question précédente.

3.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j \in [\![1,n]\!]^2)$. Comme K^n est un noyau de Markov, $K_{ij}^n \in [0,1]$ donc

$$\left| \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} \right| \leqslant \frac{t^n}{n!}$$

cette expression étant le terme général de la série convergente e^t, on en déduis que la série proposée converge absolument, donc converge.

[1]Dans tout ce qui suit, on utilisera, quand c'est lisible, pour les matrices des notations plus couramment utilisées que celles suggérées par l'énoncé, par example:

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La ligne i du produit matriciel HU vaut:

$$\sum_{j=1}^{n} H_t[i,j]u_j = \sum_{j=1}^{n}(e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p K_{ij}^p}{p!}) \times 1$$

Bien sur la série $\sum_{p\geqslant 0}(e^{-t}\sum_{j=1}^{n}\frac{t^p K_{ij}^p}{p!})$ converge car c'est une somme (finie) de n séries convergentes, et la limite de la série vaut

$$\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t}\sum_{j=1}^{n}\frac{t^p K_{ij}^p}{p!} = \sum_{j=1}^{n}(e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p K_{ij}^p}{p!})$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} H_t[i,j]u_j &= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t}\sum_{j=1}^{n}\frac{t^p K_{ij}^p}{p!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^p}{p!}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^p}_{=1} \\
&= e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p}{p!} \\
&= e^{-t}e^{t} \\
&= 1 \\
&= u_i
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la matrice K^p est un noyau de Markov.

On a montré que $H_t U = U$. On conclut que H_t est un noyau de Markov.

5.

Soit $(t,s) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient (i,j) du produit matriciel $H_t H_s$ vaut

$$\begin{aligned}
(H_t H_s)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} H_t[i,k]H_s[k,j] \\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{-t}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p K_{ik}^p}{p!}e^{-s}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{s^l K_{kj}^l}{l!}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(e^{-(s+t)}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{s^l K_{kj}^l}{l!}) \qquad ①
\end{aligned}$$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a vu dans la question 3 que les séries $\sum_{p\geqslant 0}\frac{t^p K_{ik}^p}{p!}$ et $\sum_{l\geqslant 0}\frac{t^l K_{kj}^l}{l!}$ sont absolument convergentes. On sait que leur produit de Cauchy $\sum_{m\geqslant 0}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^p K_{ik}^p}{p!}\frac{s^{m-p}K_{kj}^{m-p}}{(m-p)!}) = \sum_{m\geqslant 0}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^p s^{m-p}K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})$ converge absolument et

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p K_{ik}^p}{p!} \times \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^l K_{kj}^l}{l!} = \sum_{m=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^p s^{m-p}K_{ik}^p K_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})$$

On reprend en ①:

$$\begin{aligned}
(H_tH_s)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n}(e^{-(s+t)}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^pK_{ik}^p}{p!}\times\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{s^lK_{kj}^l}{l!}) \\
&= e^{-(s+t)}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})
\end{aligned}$$

En ayant conscience qu'ici n est un entier fixé, il n'y a pas de difficultés à intervertir les deux premiers symboles Σ: on ne fait qu'utiliser les théorèmes généraux sur la limite d'une somme (finie) de n séries convergentes:

$$(H_tH_s)_{ij} = e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!})$$

L'addition étant commutative,

$$\begin{aligned}
(H_tH_s)_{ij} &= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{m}(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^ps^{m-p}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p}}{p!(m-p)!}) \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}}{p!(m-p)!}\underbrace{(\sum_{k=0}^{n}K_{ik}^pK_{kj}^{m-p})}_{K_{ij}^m}
\end{aligned}$$

On reconnait le coefficient (i,j) du produit matriciel $K^pK^{m-p} = K^m$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\sum_{p=0}^{m}\frac{t^ps^{m-p}}{p!(m-p)!} \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}t^ps^{m-p}\frac{m!}{p!(m-p)!} \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}t^ps^{m-p}\binom{m}{p} \\
&= e^{-(s+t)}\ \sum_{m=0}^{+\infty}K_{ij}^m\frac{1}{m!}(s+t)^m \\
&= e^{-(s+t)}e^{s+t}H_{s+t}[i,j] \\
(H_tH_s)_{ij} &= H_{s+t}[i,j]
\end{aligned}$$

On peut conclure

$$\forall (s,t)\in(\mathbb{R}^+)^2,\quad H_tH_s = H_{t+s}$$

6.

soit $i \in [\![1, N]\!]$. soit $k \in \mathbb{N}^{*(?)}$[2].

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} K_{ij} &= \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(Z_{k+1} = j \mid Z_k = i) \\ &= P(Z_{k+1} \in [\![1, N]\!] \mid Z_k = i) \\ &= 1\end{aligned}$$

7.

On a déjà

$$\forall j \in [\![1, N]\!], \quad P(Z_0 = j) = \delta_{1j} \\ = I_{1j} \\ = K_{1j}^0$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \in [\![1, N]\!], \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1} = i) &= \sum_{j=1}^{N} P(Z_{n+1} = i \cap Z_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} P(Z_{n+1} = i \mid Z_n = j) P(Z_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} p_{ji} K_{1j}^n \\ &= \sum_{j=1}^{N} K_{ji} K_{1j}^n \\ &= \sum_{j=1}^{n} K_{1j}^n K_{ji} \\ &= (K^n K)_{1i} \\ &= K_{1i}^{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in [\![1, N]\!], \quad P(Z_n = j) = K_{1j}^n$$

[2]Il y a une ambiguité dans la définition des nombres p_{ij}: que se passe t-il si pour un certain $i \in [\![1, N]\!]$, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z_k = i) = 0$?

8.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, Soit $j \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(A_{t,j}) &= P(A_{t,j} \cap \Omega) \\
&= P(A_{t,j} \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} Y_t = n) \\
&= P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_{t,j} \cap Y_t = n)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \cap Y_t = n) \qquad \text{(les évènements } Y_t = n \text{ sont deux à deux incompatibles.)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{t,j} \mid Y_t = n) P(Y_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z_n = j) e^{-t} \frac{t^n}{n!} \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} K_{1j}^n \frac{t^n}{n!} \\
&= H_t[1, j]
\end{aligned}$$

9.

un endomorphisme autoadjoint d'un espace Euclidien est diagonalisable en base orthonormale; soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthonormale consitutée de vecteurs propres de u, et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ la valeur propre associée au vecteur e_i.

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \langle u(e_i) \mid e_i \rangle &= \langle \lambda_i e_i \mid e_i \rangle \\
&= \lambda_i \underbrace{\langle e_i \mid e_i \rangle}_{=1} \\
&= \lambda_i
\end{aligned}$$

montre que $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \geqslant 0$.

10.

Quitte à renuméroter, on peut supposer $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$.On a:

$$\begin{aligned}
p(x) &= x_1 e_1 \\
x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
u(x - p(x)) &= u(\sum_{i=2}^n x_i e_i) \\
&= \sum_{i=2}^n u(x_i e_i) \\
&= \sum_{i=2}^n x_i u(e_i) \\
&= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
p(x) &= x_1 e_1 \\
x - p(x) &= \sum_{i=2}^n x_i e_i \\
\langle u(x - p(x)) \mid x \rangle &= \langle \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i e_i \mid \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle \\
&= \sum_{i=2}^n x_i \lambda_i \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{\langle e_i \mid e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_i \\
&\geqslant \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_2 \\
&= \lambda_2 \sum_{i=2}^n x_i^2 \\
&= \lambda_2 \big\| x - p(x) \big\|^2
\end{aligned}$$

11.

Soit $i \in [\![1, N]\!]$. La colonne i du produit πK vaut:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \pi(j) K_{ji} &= \sum_{j=1}^{N} \pi(i) K_{ij} \\ &= \pi(i) \underbrace{\sum_{j=1}^{N} K_{ij}}_{=1} \\ &= \pi(i)\end{aligned}$$

car K est un noyau de Markov. On a donc bien:

$$\pi K = \pi$$

12.

Il est clair que

$$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$$

et

$$\langle \mu X + Z, Y\rangle = \mu\langle X, Y\rangle + \langle Z, Y\rangle$$

i.e. $\langle , \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. Ensuite,

$$\langle X, X\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \underbrace{\pi(i)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

et en plus

$$\begin{aligned}\langle X, X\rangle = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \pi(i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!], \quad x_i^2 \pi(i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, N]\!], \quad x_i = 0 \\ &\Leftrightarrow X = 0\end{aligned}$$

car $\forall i \in [\![1, N]\!], \quad \pi(i) \neq 0$.

$\langle , \rangle$ est bien un produit scalaire.

13.

d'après l'énoncé, 1 est une valeur propre de K d'ordre 1, autrement dit $\dim(K - I_N) = 1$. Or K est un noyau de Markov, ce qui implique $KU = U$ d'après 1. On en déduis que $\ker u = \ker(K - I_N) = \mathrm{vect}(U)$.

Soit $(X, Y) \in M_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle X, u(Y)\rangle &= \sum_{i=1}^{N} x_i\Big(-\sum_{j=1}^{N} K_{ij}y_j + y_i\Big)\pi(i) \\
&= -\sum_{i=1}^{N} x_i\Big(\sum_{j=1}^{N} K_{ij}y_j\pi(i)\Big) + \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \pi(i) \\
&= -\sum_{i=1}^{N} x_i\Big(\sum_{j=1}^{N} y_j K_{ij}\pi(i)\Big) + \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \pi(i) \\
&= -\sum_{i=1}^{N} x_i\Big(\sum_{j=1}^{N} y_j K_{ji}\pi(j)\Big) + \sum_{j=1}^{N} x_j y_j \pi(j) \\
&= -\sum_{j=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i y_j K_{ji}\pi(j)\Big) + \sum_{j=1}^{N} x_j y_j \pi(j) \\
&= -\sum_{j=1}^{N} y_j\pi(j)\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i K_{ji}\Big) + \sum_{j=1}^{N} x_j y_j \pi(j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} y_j\pi(j)\Big(-\sum_{i=1}^{N} x_i K_{ji} + x_j\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{N} y_j\pi(j)((-K + I_N)X)_j \\
&= \langle u(X), Y\rangle
\end{aligned}$$

On a montré que u est un endomorphisme autoadjoint de E.

14.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i - x_j)^2 K_{ij}\pi(i) &= \sum_{i=1}^{N}\pi(i)\sum_{j=1}^{N}(x_i - x_j)^2 K_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\pi(i)\sum_{j=1}^{N}(x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j)K_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\pi(i)\Big(\sum_{j=1}^{N} x_i^2 K_{ij} + \sum_{j=1}^{N} x_j^2 K_{ij} - 2\sum_{j=1}^{N} x_i x_j K_{ij}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\pi(i)\Big(x_i^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{N} K_{ij}}_{=1} + \sum_{j=1}^{N} x_j^2 K_{ij} - 2x_i\sum_{j=1}^{N} x_j K_{ij}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\Big(\pi(i)x_i^2 + \sum_{j=1}^{N} x_j^2 K_{ij}\pi(i) - 2x_i\sum_{j=1}^{N} x_j \underbrace{K_{ij}\pi(i)}_{K_{ji}\pi(j)}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\Big(\pi(i)x_i^2 + \sum_{j=1}^{N} x_j^2 K_{ij}\pi(i) - 2x_i\sum_{j=1}^{N} x_j K_{ji}\pi(j)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} \pi(i)x_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \underbrace{K_{ij}\pi(i)}_{K_{ji}\pi(j)} -2\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} x_j K_{ji}\pi(j)\\
&= \sum_{i=1}^{N} \pi(i)x_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^2 K_{ji}\pi(j) - 2\sum_{j=1}^{N} x_j\pi(j)\sum_{i=1}^{N} K_{ji}x_i\\
&= \sum_{i=1}^{N} \pi(i)x_i^2 + \sum_{j=1}^{N} x_j^2\pi(j)\underbrace{\sum_{i=1}^{N} K_{ji}}_{=1} -2\sum_{j=1}^{N} x_j\pi(j)(KX)_j\\
&= 2\sum_{i=1}^{N} \pi(i)x_i^2 - 2\sum_{j=1}^{N} x_j\pi(j)(KX)_j\\
&= 2\sum_{i=1}^{N} \pi(i)x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i\pi(i)(KX)_i\\
&= 2\sum_{i=1}^{N} \pi(i)x_i(x_i - (KX)_i)\\
&= 2\sum_{i=1}^{N} \pi(i)x_i u(X)_i\\
&= 2\langle X, u(X)\rangle\\
&= 2q_u(X)
\end{aligned}
$$

Cela montre en particulier que $\forall X \in M_{n1}(\mathbb{R}), \quad q_u(X) \geqslant 0$.

D'après la question 9, les valeurs propres de l'endomorphisme autoadjoint positif u sont positives.

15.

Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]$, fixé. la sommme de la série entière de rayon $R = +\infty$:$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!}$ est dérivable sur $]-\infty,+\infty[$ et de même $H_t[i,j]$:

$$
\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad H_t'[i,j] &= e^{-t}\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n t^{n-1} K_{ij}^n}{n!}\Big)\\
&= e^{-t}\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} K_{ij}^n}{(n-1)!}\Big)\\
&= e^{-t}\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + K_{ij}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} K_{ij}^{n-1}}{(n-1)!}\Big)\\
&= e^{-t}\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!} + K_{ij}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{(n)!}\Big)\\
&= e^{-t}(-1 + K_{ij})\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{ij}^n}{n!}\\
&= (-1 + K_{ij})H_t[i,j] \qquad ②
\end{aligned}
$$

Calculons le coefficient (i,j) du produit matriciel KH_t:

$$\begin{aligned}
(KH_t)_{ij} &= \sum_{k=0}^{N} K_{ik} H_t[k,j] \\
&= e^{-t} \sum_{k=0}^{N} K_{ik} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K_{kj}^n}{n!} \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N} K_{ik} \frac{t^n K_{kj}^n}{n!} \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{N} K_{ik} K_{kj}^n \\
&= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} K_{ij}^{n+1} \\
&= K_{ij} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} K_{ij}^n \\
(KH_t)_{ij} &= K_{ij} H_t[i,j]
\end{aligned}$$

Autrement dit, les deux matrices K et H ont la relativement troublante propriété que leur produit matriciel revient à multiplier les éléments correspondants deux à deux. En particulier on remqarque qu'elles commutent. On peut reformuler ② :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H_t'[i,j] = -H_t[i,j] + (KH_t)_{ij}$$

ce qui montre que $H'(t) = -H + KH = (-I_N + K)H$.

Soit $X \in E$ fixé, indépendamment de t. La fonction

$$\begin{aligned}
\psi_X : \mathbb{R} &\to M_{n,1}(\mathbb{R}) \\
t &\mapsto H_t X
\end{aligned}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^∞), et

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_X'(t) &= H_t'(t)X \\
&= (-I_N + K)H_t X
\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) &= \left\|H_t X\right\|^2 \\
&= \langle H_t X, H_t X\rangle \\
&= \langle \psi_x(t), \psi_x(t)\rangle
\end{aligned}$$

Le produit scalaire étant bilinéaire, on en déduit que φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X'(t) &= \langle \psi_x'(t), \psi_x(t)\rangle + \langle \psi_x(t), \psi_x'(t)\rangle \\ &= \langle (-I_N + K)H_tX, H_tX\rangle + \langle H_tX, (-I_N+K)H_tX\rangle \\ &= 2\langle (-I_N+K)H_tX, H_tX\rangle \\ &= -2\langle u(H_tX), H_tX\rangle \\ &= -2q_U(H_tX)\end{aligned}$$

17.

On rappelle que $\ker u = \mathrm{vect}(U)$, avec

$$U = \begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}$$

On a:

$$\begin{aligned}\langle H_tX, U\rangle &= \sum_{i=1}^N (H_tX)_i u_i \pi(i) \\ &= \sum_{i=1}^N (\sum_{j=1}^N H_t[i,j]x_j)\pi(i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j \underbrace{H_t[i,j]\pi(i)}_{=H_t[j,i]\pi(j)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j H_t[j,i]\pi(j) \\ &= \sum_{j=1}^N x_j\pi(j) \underbrace{\sum_{i=1}^N H_t[j,i]}_{=1} \\ &= \sum_{j=1}^N x_j \times 1 \times \pi(j) \\ &= \sum_{j=1}^N x_j u(j)\pi(j) \\ &= \langle X, U\rangle\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore:

$$\langle H_tX - X, U\rangle = 0$$

cela montre que $H_tX - X \in (\ker u)^{\perp} = \ker p$, i.e.

$$p(H_tX) = p(X)$$

18.

Soit $Y = X - p(X)$. D'après la question 16,

$$\begin{aligned}\varphi_Y'(t) &= -2q_U(H_tY)\\ &= -2q_U(H_tX - H_tp(X))\end{aligned}$$

On voudrait utiliser le résultat de 10, donc il faut mettre le paramètre de q_U sous la bonne forme. On remarque pour cela que

$$\begin{aligned}p(H_tp(X)) &= p(p(X))\\ &= p(X)\\ &= p(H_tX)\end{aligned}$$

c'est à dire:

$$p(H_tp(X) - H_tX) = 0$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_Y'(t) &= -2q_U(H_tX - H_tp(X) - 0)\\ &\leqslant -2\lambda\left\|H_tX - H_tp(X) - 0\right\|^2\\ &= -2\lambda\left\|H_t(X - p(X))\right\|^2\\ &= -2\lambda\varphi_Y(t)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}&\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_Y'(t) + 2\lambda\varphi_Y(t) \leqslant 0\\ \Leftrightarrow &\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e^{-2\lambda t}(e^{2\lambda t}\varphi_Y(t))' \leqslant 0\\ \Leftrightarrow &\qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (e^{2\lambda t}\varphi_Y(t))' \leqslant 0\end{aligned}$$

On peut intégrer cette relation (φ_Y est de classe C^1):

$$\begin{aligned}&\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e^{2\lambda t}\varphi_Y(t) - e^{2\lambda\times 0}\varphi_Y(0) \leqslant 0\\ \Leftrightarrow &\qquad \varphi_Y(t) \leqslant e^{-2\lambda t}\varphi_Y(0)\\ \Leftrightarrow &\qquad \left\|H_tX - H_tp(X)\right\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\left\|\underbrace{H_0}_{=I_N}X - H_0p(X)\right\|^2\end{aligned}$$

Il ne manque plus qu'à remplacer $H_tp(X)$ par $p(X)$ pour arriver au résultat attendu; or comme H_t est un noyau de Markov, et $p(X) \in \ker u = \mathrm{vect}(U)$, on a d'après la question 1:

$$\begin{aligned}H_tp(X) &= H_t(\mu U)\\ &= \mu H_tU\\ &= \mu U\\ &= p(X)\end{aligned}$$

On peut donc conclure:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \left\|H_tX - p(X)\right\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\left\|X - p(X)\right\|^2$$

19.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $i \in [\![1, N]\!]$. Il faut appliquer la relation précédente à $X = E_i$. Il semblerait que $p(E_i) = \pi(i)U \in \text{vect}(U)$. Il faut s'interrésser à:

$$E_i - \pi(i)U = \begin{bmatrix} -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \\ 1 - \pi(i) \\ -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{ligne } i$$

$$= \begin{bmatrix} -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \pi(j) \\ -\pi(i) \\ \vdots \\ -\pi(i) \end{bmatrix}$$

On calcule le produit scalaire avec le vecteur U:

$$\begin{aligned} \langle E_i - \pi(i)U, U \rangle &= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \pi(i)\pi(k) + (1 - \pi(i))\pi(i) \\ &= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \pi(i)\pi(k) + (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \pi(j))\pi(i) \\ &= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \pi(i)\pi(k) + (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \pi(j))\pi(i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc:

$$E_i = \underbrace{\pi(i)U}_{\in \ker u} + \underbrace{E_i - \pi(i)U}_{\in (\ker u)^\perp}$$

Cela montre que $p(E_i) = \pi(i)U$.

Le théorème de Pythagore donne:

$$\begin{aligned} & \|E_i\|^2 = \|\pi(i)U\|^2 + \|E_i - \pi(i)U\|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \pi(i) = \pi(i)^2 + \|E_i - \pi(i)U\|^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \|E_i - \pi(i)U\|^2 = \pi(i)(1 - \pi(i)) \leqslant \pi(i) \end{aligned}$$

Puis la question précédente appliquée à $X = E_i$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|H_t E_i - \pi(i)U\| \leqslant e^{-\lambda t} \|E_i - \pi(i)U\| \leqslant e^{-\lambda t} \sqrt{\pi(i)}$$

20.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(H_{\frac{t}{2}}[i,k]-\pi(k))(H_{\frac{t}{2}}[k,j]-\pi(j)) &= \sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k]H_{\frac{t}{2}}[k,j]-\pi(j)\sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[i,k]-\sum_{k=1}^{N}\pi(k)H_{\frac{t}{2}}[k,j]+\pi(j)\sum_{k=1}^{N}\pi(k)\\ &= (\underbrace{H_{\frac{t}{2}}H_{\frac{t}{2}}}_{H_t})_{ij}-\pi(j)-\pi(j)\sum_{k=1}^{N} H_{\frac{t}{2}}[j,k]+\pi(j)\\ &= H_t[i,j]-\pi(j)\end{aligned}$$

21.

Soit $(i,j)\in[\![1,N]\!]^2$, fixé.On a:

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad H_tE_j-\pi(j)U=\begin{bmatrix}H_t[1,j]-\pi(j)\\ \vdots\\ H_t[k,j]-\pi(j)\\ \vdots\\ H_t[N,j]-\pi(j)\end{bmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\quad \left\|H_tE_j-\pi(j)U\right\|^2 &= \sum_{k=1}^{N}(H_t[k,j]-\pi(j))^2\pi(k)\\ &\geqslant (H_t[i,j]-\pi(j))^2\pi(i)\end{aligned}$$

On peut conclure avec la question 18:

$$\forall (i,j)\in[\![1,N]\!]^2\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad |H_t[i,j]-\pi(j)|\leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi(j)}{\pi(i)}}$$

ce qui montre que la fonction $H_t[i,j]$ a une limite quand $t\to+\infty$ (car $\lambda>0$), et

$$\lim_{t\to+\infty} H_t[i,j]=\pi(j)$$