

CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023

MATHÉMATIQUES 1 - PC

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $X \neq 0$, soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k > 0$.

$$\begin{aligned}(AX)_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ &\geq a_{ik}x_k > 0\end{aligned}$$

On a montré $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(AX)_i > 0$, c'est à dire $AX > 0$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}(|AB|)_{ij} &= \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &= (|A| |B|)_{ij}\end{aligned}$$

ainsi $|AB| \leq |A| |B|$.

2.

Soit $(X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est:

$$\begin{aligned}|\langle X | Y \rangle| &\leq \|X\| \|Y\| \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On peut l'appliquer directement à $(Z, W) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, définis par:

$$Z = \begin{bmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_k| \\ \vdots \\ |z_n| \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} |w_1| \\ \vdots \\ |w_k| \\ \vdots \\ |w_n| \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left| \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| \right| = \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.

En posant $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 & |1 + z|^2 = (1 + |z|)^2 \\
 \Leftrightarrow & 1 + a^2 + 2a + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \\
 \Leftrightarrow & a = \sqrt{a^2 + b^2} \\
 \Leftrightarrow & a \geq 0 \wedge a^2 = a^2 + b^2 \\
 \Leftrightarrow & a \geq 0 \wedge b = 0 \\
 \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

Soit maintenant $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $z \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 & |z + z'| = |z| + |z'| \\
 \Leftrightarrow & |z| \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = |z| \left(1 + \left| \frac{z'}{z} \right| \right) \\
 \Leftrightarrow & \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = 1 + \left| \frac{z'}{z} \right| \\
 \Leftrightarrow & \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{z'}{z} = \alpha
 \end{aligned}$$

4.

Comme les z_i sont non tous nuls, quitte à renuméroter on peut supposer $z_1 \neq 0$. On a:

$$\begin{aligned}
 & |z_n| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \\
 \Leftrightarrow & \left| \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| \left(\geq \left| \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right| \right)
 \end{aligned}$$

Cela montre que l'égalité est réalisée dans la dernière inégalité. En réitérant, on a:

$$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \sum_{k=1}^m z_k \right| = \sum_{k=1}^m |z_k|$$

Posons, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k = e^{i\theta_k} |z_k|$ avec $\theta_k \in \mathbb{R}$. L'égalité précédente pour $m = 2$ donne

$$\begin{aligned}
 & \frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \in \mathbb{R}^+ \\
 \Leftrightarrow & z_2 = 0 \vee \theta_2 = \theta_1 \pmod{2\pi} \\
 \Leftrightarrow & z_2 = e^{i\theta_1} |z_2|
 \end{aligned}$$

Mais en renumérotant les z_i , $i \geq 2$, on remarque que le raisonnement précédent donne aussi

$$\begin{aligned}
 & \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad |z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k| \\
 \Leftrightarrow & \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad z_k = e^{i\theta_1} |z_k|
 \end{aligned}$$

5.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr } AX + \det A$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta &= \text{Tr}^2 A - 4 \det A \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad-bc) \\ &= (a+d)^2 A - 4(ad-bc) \\ &= (a-d)^2 + 4bc > 0\end{aligned}$$

6.

Comme $\Delta > 0$, χ_A a deux racines réelles distinctes que l'on note $\lambda < \mu$. χ_A est scindé sur \mathbb{R} à racines simples donc A est diagonalisable et, quitte à permuter les colonnes de P ,

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad A = P \underbrace{\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_D P^{-1}$$

7.

On a

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= \text{Tr } A \\ &= a + d\end{aligned}$$

Si $\lambda \geq 0$, $|\lambda| = \lambda < \mu$. Sinon,

$$\begin{aligned}-|\lambda| + \mu &= a + d > 0 \\ \Rightarrow |\lambda| &< \mu\end{aligned}$$

8.

Comme on a

$$\begin{aligned}A^k &= P \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^k P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \mu^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix} P^{-1}\end{aligned}$$

il est clair que

$$\begin{aligned}(A^k) \text{ CV} &\Leftrightarrow (D^k) \text{ CV} \\ &\Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in]-1, 1]^2\end{aligned}$$

Comme $|\lambda| < \mu \leq 1$, si de plus $(-1 <) \mu < 1$, alors (A^k) converge vers la matrice nulle. Si $\mu = 1$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

qui est un projecteur de rang 1.

9.

On remarque que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de B , associé à la valeur propre $1 - \alpha - \beta$.

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de B , associé à la valeur propre $1 \neq 1 - \alpha - \beta$. On a donc automatiquement $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_{1-\alpha-\beta}$ et B diagonalisable:

$$B = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

10.

On a $1 - \alpha - \beta \in]-1, 1[$, ainsi (D^k) converge, puis (B^k) converge et

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} B^k &= \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \Lambda \end{aligned}$$

11.

N est une application de $M_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{R}^+ . Il n'y pas de difficulté à montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda A\|_\infty = |\lambda| \|A\|_\infty$$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \|A\|_\infty \geq 0$$

avec

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= 0 \end{aligned}$$

soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |(A+B)_{ij}| &= \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \\ &= \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \\ &\leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui montre l'inégalité triangulaire $\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.

Soit $C = AB$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n |c_{ij}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\
 &= \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \left(\sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\|_{\infty} \\
 &= \|B\|_{\infty} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \\
 &\leq \|B\|_{\infty} \|A\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit en prenant le max sur i .

12.

Soit $C = AB$.

$$\begin{aligned}
 \|C\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \right)^2 \quad (\text{Inégalité triangulaire pour le module complexe}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \quad (\text{Cauchy-Schwartz}) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\
 &= \|A\|_2^2 \|B\|_2^2
 \end{aligned}$$

13.

Il n'y a pas de difficultés à montrer que ν est une norme en utilisant les propriétés de N . Puis,

$$\begin{aligned}
 \nu(AB) &= N(S^{-1}ABS) \\
 &= N(S^{-1}A \underbrace{SS^{-1}}_{=I_n} BS) \\
 &\leq N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) \\
 &= \nu(A)\nu(B)
 \end{aligned}$$

14.

Deux matrices semblables ont les mêmes polynômes caractéristiques, donc le même spectre et le même rayon spectral:

$$\begin{aligned}
 \chi_{S^{-1}AS}(X) &= \det(S^{-1}AS - XI_n) \\
 &= \det(S^{-1}AS - XS^{-1}S) \\
 &= \det(S^{-1}(A - XI_n)S) \\
 &= \det(S^{-1}) \det(A - XI_n) \det(S) \\
 &= \frac{1}{\det(S)} \det(A - XI_n) \det(S) \\
 &= \det(A - XI_n) \\
 &= \chi_A(X)
 \end{aligned}$$

$$\rho(S^{-1}AS) = \rho(A)$$

15.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable car tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

$$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C}), \quad A = Q \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) &= \det \begin{bmatrix} a_{11}-x & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-x & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}-x \end{bmatrix} Q \\
 &= \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)
 \end{aligned}$$

montre que $\text{sp}(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ puis $\text{sp}(A^k) = \{a_{11}^k, \dots, a_{nn}^k\}$. On en déduit que

$$\rho(A^k) = \rho(A)^k$$

$$\text{et } \text{sp}(\alpha A) = \{\alpha a_{11}, \dots, \alpha a_{nn}\}$$

$$\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$$

16.

Soit $\lambda \in \text{sp}(A)$ tel que $\rho(A) = |\lambda|$. Soit U un vecteur propre de A associé à λ . Soit $H \in GL_n(\mathbb{C})$ définie par:

$$H = \begin{bmatrix} | & U & | & & | \\ U & & & \dots & \\ | & & & & | \end{bmatrix}$$

la matrice dont les colonnes sont toutes identiques, égales à U . On a $AH = \lambda H$ donc

$$\begin{aligned}\rho(A)N(H) &= N(\lambda H) \\ &= N(AH) \\ &\leq N(A)N(H)\end{aligned}$$

et on peut conclure $\rho(A) \leq N(A)$ car $N(H) > 0$

17.

Il ne faut surtout pas ici revenir à la formule du produit mais plutôt manipuler les opérations élémentaires sur une matrice: soit

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{ligne } i$$

(i) Multiplier à droite par E_i sélectionne la colonne i : $AE_i = C_i$.

(ii) Multiplier à gauche par E_i^T sélectionne la ligne i : $E_i^T A = L_i$.

Multiplier la matrice T par la matrice diagonale D à droite revient ainsi à multiplier la colonne C_j par τ^{j-1} . Ensuite multiplier le résultat par D^{-1} à gauche revient à multiplier la ligne i par τ^{1-i} . on en déduit le résultat:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (D_\tau^{-1} T D_\tau)_{ij} = \tau^{j-i} t_{ij}$$

18.

soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. soit $\tau \in]0, 1[$. Soit $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1} T D_\tau)_{ij}| &= \sum_{j=1}^n \tau^{j-i} |t_{ij}| \\ &= \sum_{j=i}^n \tau^{j-i} |t_{ij}| \\ &= |t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i} |t_{ij}| \\ &= |t_{ii}| + \sum_{j=1}^{n-i} \tau^j |t_{i,i+j}|\end{aligned}$$

soit $M = \max_{k>l} \{|t_{kl}|\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{ij}| &\leq |t_{ii}| + M \sum_{j=1}^{n-i} \tau^j \\
&\leq |t_{ii}| + M \sum_{j=1}^{n-1} \tau^j \\
&\leq |t_{ii}| + M \underbrace{\frac{\tau}{1-\tau}}_{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0}
\end{aligned}$$

Si $M = 0$, la matrice T est diagonale et

$$\forall \tau \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty = \rho(T)$$

Sinon, soit $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M} > 0$.

$$\exists \eta > 0, \quad \forall \tau \in]0, 1[, \quad |\tau| < \eta \Rightarrow \frac{\tau}{1-\tau} < \epsilon'$$

Mais alors:

$$\begin{aligned}
\forall \tau \in]0, \eta[, \quad \sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{ij}| &\leq |t_{ii}| + M \frac{\epsilon}{M} \\
&\leq \rho(T) + \epsilon
\end{aligned}$$

L'inégalité précédente étant valable pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient le résultat en prenant le max:

$$\forall \tau \in]0, \eta[, \quad \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \epsilon$$