CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 2 - PC

Pierre-Paul TACHER

1.

Le rayon de convergence est $R = 1$ et

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-x}$$

2.

On sait que la somme précédente est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[, \quad f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\end{aligned}$$

Donc le rayon de $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ vérifie $R \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n &= x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= xf'(x) \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\,|x|^n \geqslant |x|^n \geqslant 0 \Rightarrow R \leqslant 1$$

Donc $R = 1$.

3.

On réitère; on sait que la f est de classe C^k sur $]-1,1[$, et

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-1,1[, \quad f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)^{(k)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\
&= k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \\
&= k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \qquad \left(n<k \Rightarrow \binom{n}{k}=0\right)
\end{aligned}$$

Par le même raisonnement que la question précédente, on déduit que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{k} x^n$ est 1 et

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n &= \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) \\
&= \frac{x^k}{k!} \frac{(k!)}{(1-x)^{k+1}} \\
&= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}
\end{aligned}$$

4.

On a

$$0 \leqslant \frac{(n+1)^k}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

ce qui montre que le rayon de convergence est $R = 1$.

5.

On voit que $\deg(H_j) = j$. $(H_0, H_1, \dots, H_k)$ est une famille de $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$ polynômes de degrés échelonnés, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Par définition d'une base,

$$\exists!(\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad X^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j \qquad ①$$

6.

On remarque que

$$\forall j \in [\![1,k]\!], \quad H_j(0) = 0$$

donc

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X^k)(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si k=0} \\ 0 & \text{si k>0} \end{cases} \\ &= \delta_{k,0} \\ &= \alpha_{k,0} H_0(0) \\ &= \alpha_{k,0}\end{aligned}$$

D'autre part, le coefficient de X^k dans H_k est $\frac{1}{k!}$, par identification on a donc:

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{k,k}\frac{1}{k!} &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad\qquad \alpha_{k,k} &= k!\end{aligned}$$

7.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé. On remarque que:

$$\forall i \geqslant j+1, \quad H_i(j) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![0, j]\!], \quad H_i(j) &= \frac{1}{i!} j(j-1)\dots(j-i+1) \\ &= \frac{1}{i!}\frac{j!}{(j-i)!} \\ &= \binom{j}{i}\end{aligned}$$

On peut unifier les deux cas:

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad H_i(j) = \binom{j}{i}$$

On évalue l'égalité ① en $j \in [\![1, k]\!]$:

$$\begin{aligned}j^k &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i} H_i(j) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i} \binom{j}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{k,i} \binom{j}{i} + \alpha_{k,j}\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

8.

```
import numpy as np
from math import factorial

def binom(n,k):
        if k>n:
                return 0
        else:
                return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))

def alpha(k,j):
        res = np.zeros(j+1, dtype=int)
        if k == 0:
                res[0] = 1
        for i in range(1,j+1):
                sum = 0;
                for l in range(i):
                        sum += binom(i,l)*res[l]
                res[i] = i**k-sum
        return res[j]
```

9.

On évalue la relation ① en $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n^k &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \binom{n}{j} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \quad f_k(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \binom{n}{j}) x^n \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} (\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \frac{x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}} \\ f_k(x) &= \frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

$$f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \qquad ②$$

ce qui montre l'existence du polynôme P_k.

Soit maintenant Q_k un polynôme tel que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_k(x) = \frac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

alors:

$$\begin{aligned} & \forall x \in]-1,1[, \quad Q_k(x) = f_k(x)(1-x)^{k+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad Q_k(x) = P_k(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1,1[, \quad Q_k(x) - P_k(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que le polynôme $Q_k - P_k$ a une infinité de racines, donc $Q_k = P_k$ et l'unicité est prouvée.

10.

Soit $l \in [\![0,k]\!]$. Le coefficient de X^l dans le polynôme $X^j(1-X)^{k-j}$ est:

$$\begin{aligned} a_{l,j,k} &= \begin{cases} 0 & \text{si l<j} \\ (-1)^{l-j}\binom{k-j}{l-j} & \text{si } \ l \geqslant j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si l<j} \\ (-1)^{l-j}\binom{k-j}{k-l} & \text{si } \ l \geqslant j \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduis que le coefficient de X^l dans $P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} X^j (1-X)^{k-j}$ est

$$\begin{aligned} \beta_{l,k} &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} a_{l,j,k} \\ &= \sum_{j=0}^{l} \alpha_{kj} a_{l,j,k} \\ &= \sum_{j=0}^{l} \alpha_{kj} (-1)^{l-j} \binom{k-j}{k-l} \end{aligned}$$

Il n'est vraiment pas adéquat de réutiliser la fonction `alpha` telle quelle, puisque celle ci calcule tous les $\alpha_{ki}. \quad i \leqslant j$ pour calculer le coefficient α_{kj}. Il est préferable de la modifier pour qu'elle renvoie la liste de tout les $\alpha_{ki}. \quad i \leqslant j$. La fonction `beta` renvoie la liste des coefficients de P_k dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$:

```
import numpy as np
from math import factorial

def binom(n,k):
        if k>n:
                return 0
        else:
                return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))
```

```
def alpha(k,j):
        res = np.zeros(j+1, dtype=int)
        if k == 0:
                res[0] = 1
        for i in range(1,j+1):
                sum = 0;
                for l in range(i):
                        sum += binom(i,l)*res[l]
                res[i] = i**k-sum
        return res

def beta(k):
        res = np.zeros(k+1, dtype=int)
        a = alpha(k,k)
        for i in range(k+1):
                sum = 0
                eps = (-1)**i
                for j in range(i+1):
                        sum += eps*a[j]*binom(k-j,k-i)
                        eps *= -1
                res[i] = sum
        return res
```

11.

On remarque d'abord que $xf_k` = f_{k+1}$, puis on dérive la relation ②:

$$\begin{aligned}
& \forall x \in]-1,1[, \quad f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x)^{k+1} + (k+1)P_k(x)(1-x)^k}{((1-x)^{k+1})^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x) + (k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Rightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad xf_k'(x) = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad f_{k+1}(x) = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad \frac{P_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1,1[, \quad P_{k+1}(x) = xP_k'(x)(1-x) + (k+1)xP_k(x) \\
\Leftrightarrow \quad & P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k
\end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant encore du fait que deux polynômes coincidant sur un ensemble infini sont égaux.

12.

Comme $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$, on a $P_0 = 1$. Puis,

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 + XP_0 \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= X(1-X) + 2X^2 \\ &= X^2 + X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X) \\ &= X^3 + 4X^2 + X \end{aligned}$$

On peut vérifier avec le programme python:

```
>>> beta(2)
array([0, 1, 1])
>>> beta(3)
array([0, 1, 4, 1])
```

13.

On montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \deg(P_k) = k$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{dom}(P_k) = 1$$

Vrai pour $P_0 = 1$. Supposons la propriété vérifiée pour $k \in \mathbb{N}$.

$$P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$$

montre que $\deg(P_{k+1}) \leqslant k+1$, et le coefficient de X^{k+1} vaut $-k\mathrm{dom}(P_k) + (k+1)\mathrm{dom}(P_k) = 1$.

14.

On pose $\forall x \in]0,1[, \quad Q_k(x) = x^{k+1}P_k(\frac{1}{x})$. On a:

$$\forall x \in]0,1[, \quad Q_k'(x) = (k+1)x^k P_k(\frac{1}{x}) - x^{k-1}P_k'(\frac{1}{x})$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,1[, \quad x(1-x)Q_k'(x) &= (k+1)x^{k+1}(1-x)P_k(\frac{1}{x}) - x^k(1-x)P_k'(\frac{1}{x}) \\ &= x^{k+2}\left[(k+1)(\frac{1}{x}-1)P_k(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}(\frac{1}{x}-1)P_k'(\frac{1}{x})\right] \end{aligned}$$

On a déjà $Q_1 = X^2 P_1(\frac{1}{X}) = X = P_1$. supposons que pour un certain $k \geqslant 1$, $Q_k = P_k$. Alors,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \,]0,1[, \quad Q_{k+1}(x) &= x^{k+2} P_{k+1}(\frac{1}{x}) \\
&= x^{k+2}\left[\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)\frac{1}{x}P_k(\frac{1}{x})\right] \\
&= x^{k+2}\left[\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)(\frac{1}{x}-1)P_k(\frac{1}{x}) + (k+1)P_k(\frac{1}{x})\right] \\
&= x^{k+2}\left[\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)(\frac{1}{x}-1)P_k(\frac{1}{x})\right] + (k+1)x^{k+2}P_k(\frac{1}{x}) \\
&= x(1-x)Q_k'(x) + (k+1)xQ_k(x) \\
&= x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x) \\
&= P_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

On a montré:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \,]0,1[, \quad x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$$

15.

On identifie le coefficient de X^j dans l'égalité polynomiale qui précède:

$$\beta_{j,k} = \beta_{k+1-j,k}$$

valable $\forall j \in [\![0,k]\!]$ si on prend naturellement $\beta_{k+1,k} = 0$.

16.

On a

$$0 \leqslant \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4$$

ce qui montre que $R = \frac{1}{4}$.

On sait que la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est développable en série entière sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ et que le coefficient de x^n est:

$$\begin{aligned}
a_n &= 4^n(-1)^n\frac{1}{n!}\underbrace{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}_{n\text{ facteurs}}\\
&= 4^n(-1)^n\frac{1}{n!}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})\\
&= 4^n(-1)^n\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\dots2\times1}{2^n}\\
&= 4^n\frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{\underbrace{2n(2n-2)\dots4\times2}_{n\text{ facteurs}}\times2^n}\\
&= 4^n\frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{2^nn!\times2^n}\\
&= \frac{(2n)!}{n!^2}\\
&= \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall x\in\,]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

17.

$$0\leqslant\frac{\frac{1}{n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}}{\frac{1}{n}\binom{2n}{n}}=\frac{(2n+2)(2n+1)n}{(n+1)^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}4$$

montre que la série entière $\sum_{n\geqslant0}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence $R=\frac{1}{4}$. La somme f est de classe C^1 sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ et

$$\begin{aligned}
\forall x\in\,]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[,\quad f'(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}
\end{aligned}$$

La fonction

$$\begin{aligned}
g:\,]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[&\to\mathbb{R}\\
x&\mapsto\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}$$

est de classe C^1 et

$$\begin{aligned}
\forall x\in\,]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[,\quad g'(x)&=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\\
&=f'(x)
\end{aligned}$$

En intégrant et puisque $f(0) = g(0) = 0$,

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\setminus \{0\}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

18.

Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\setminus\{0\}$, fixé. Les séries numériques $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ sont absolument convergentes. Leur produit de Cauchy a pour terme général

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} x^k \binom{2(n-k)}{n-k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} x^n$$

Le produit de Cauchy converge absolument et la somme vaut:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} x^n &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \\ &= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) \end{aligned}$$

19.

Comme le DSE de $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ a pour terme constant 1, $\frac{1}{2x}(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1)$ est DSE sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. Le coefficient de x^n dans ce DSE est:

$$\frac{1}{2} \times \text{coeff. de } x^{n+1} \text{ dans le DSE de } \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2} \binom{2(n+1)}{n+1}$$

L'unicité du développement en série entière donne:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2(n+1)}{n+1}$$

20.

Soit $x \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{k\geqslant 0} (x^n)^k$ converge et

$$\sum_{k\geqslant 0}^{+\infty} (x^n)^k = \frac{1}{1-x^n}$$

on a donc:

$$\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$$

De plus,

$$0 \leqslant \frac{nx^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} nx^n$$

montre que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge.

21.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} n(x^{(1+k)})^n$ converge d'après 2, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n = \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}$$

d'après la question précédente et le théorème sur les familles de réels positifs sommables,

$$\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{1+k}}{(1-x^{1+k})^2}$$
$$= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n$$

est une série convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} n(x^{(1+k)})^n$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$$

22.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{1}{k^3(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^4}$$

qui est le terme d'une série convergente, donc $\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k^3(k+1)}$ est convergente.
soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

Montre que la série:

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3(k+1)} \sum_{n=1}^{k} n = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2k^2}$$

est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)} \sum_{n=1}^{k} n = \frac{\pi^2}{12}$$

En appliquant le théorème sur les fammilles doubles de réels positifs sommables à la famille:

$$a_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{si n>k} \\ \dfrac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } \ n \leqslant k \end{cases}$$

on obtient que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ CV, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{12}$$

23.

Soit $i \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} &= -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} b_{ij} \\ &= -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} \\ &= -1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} = 0$$

24.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij} &= -1 + \sum_{i=0}^{j-1} b_{ij} \\ &= -1 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} \\ &= -1 + \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^j}{1-\frac{1}{2}} \\ &= -1 + 1 - (\frac{1}{2})^j \\ &= -\frac{1}{2^j}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij} &= -\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= -2\end{aligned}$$

25.

On a

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} \neq \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{ij}$$

ce qui montre bien que l'hypothèse que les termes doivent être positifs est essentielle dans le théorème sur la sommation d'une famille double.

26.

Soit $i \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{ij} &= i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{3^{j-i}} \\ &= i - 2i\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= i - 2i\frac{1}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{ij} = 0$$

27.

Soit $j \in \mathbb{N}$, fixé.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{ij} &= j - 2\sum_{i=0}^{j-1} i\frac{1}{3^{j-i}} \\ &= j - 2\sum_{i=1}^{j-1} i\frac{1}{3^{j-i}} \\ &= j - 2\left[(\frac{1}{3^{j-1}} + \frac{1}{3^{j-2}} + \cdots + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3^{j-2}} + \cdots + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3^{j-3}} + \frac{1}{3^{j-4}} + \cdots + \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}\right] \\ &= j - 2\frac{1}{3}\frac{3}{2}\left[(1 - \frac{1}{3^{j-1}}) + (1 - \frac{1}{3^{j-2}}) + (1 - \frac{1}{3^{j-3}}) + \cdots + (1 - \frac{1}{3^2}) + (1 - \frac{1}{3})\right] \\ &= j - \left[j - 1 - \frac{1}{3}\frac{1 - \frac{1}{3^{j-1}}}{1 - \frac{1}{3}}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^{j-1}}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{3^j - 1}{3^{j-1}}\end{aligned}$$

28.

$$\frac{1}{2}\frac{3^j - 1}{3^{j-1}} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}$$

donc la série $\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{ij}$ est divergente.

29.

$$\begin{aligned}\forall (n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N},\quad \mathrm{P}((X,Y)=(n,k)) &= \mathrm{P}(X=n\cap Y=k)\\ &= \mathrm{P}(X=n)\,\mathrm{P}(Y=k\mid X=n)\\ &= p(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!}\end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=0) &= \mathrm{P}(Y=0\cap\Omega)\\ &= \mathrm{P}(Y=0\cap\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}X=n)\\ &= \mathrm{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}Y=0\cap X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Y=0\cap X=n) \qquad \text{(Les évènements } X=n \text{ sont deux à deux incompatibles)}\\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}e^{-n}\\ &= \frac{p}{1-p}\frac{1}{1-\frac{1-p}{e}}\\ &= \frac{p}{1-p}f_0(\frac{1-p}{e})\end{aligned}$$

Plus généralement,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=k) &= \mathrm{P}(Y=k\cap\Omega)\\ &= \mathrm{P}(Y=k\cap\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}X=n)\\ &= \mathrm{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}Y=k\cap X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(Y=k\cap X=n) \qquad \text{(Les évènements } X=n \text{ sont deux à deux incompatibles)}\\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!}\\ &= \frac{p}{(1-p)k!}\sum_{n=1}^{+\infty}n^k(\frac{1-p}{e})^n\\ &= \frac{p}{(1-p)k!}f_k(\frac{1-p}{e})\end{aligned}$$

31.

soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. La série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{n^k}{k!}$ converge et:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}(\frac{1-p}{e})^n e^n = \sum_{n\geqslant 1}(1-p)^n$ converge, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n = \frac{1-p}{p}$$

Le théorème sur la sommabilité d'une famille double de réels positifs nous peremt d'affirmer que

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{P}(Y=k) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (\frac{1-p}{e})^n$$

est convergente et la somme est donnée par:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (\frac{1-p}{e})^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{1-p} (\frac{1-p}{e})^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)} (1-p)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

32.

soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{n^{k-1}}{(k-1!}$ converge et:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} = e^n$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}(\frac{1-p}{e})^n n e^n = \sum_{n\geqslant 1} n(1-p)^n$ converge, et:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n &= f_1(1-p) \\ &= \frac{1-p}{p^2} \qquad \text{(cf. 2)}\end{aligned}$$

Le théorème sur la sommabilité d'une famille double de réels positifs nous peremt d'affirmer que

$$\sum_{k\geqslant 1} k\,\mathrm{P}(Y=k) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{p}{(1-p)(k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (\frac{1-p}{e})^n$$

est convergente et la somme est donnée par:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)(k-1)!}\sum_{n=1}^{+\infty}n^k(\frac{1-p}{e})^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p}{1-p}(\frac{1-p}{e})^n n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \frac{p}{(1-p)}\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-p)^n\\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

On a donc montré que Y admet une espérance et

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{p}$$

33.

On remarque d'abord que

$$k^2\,\mathrm{P}(Y=k) = k(k-1)\,\mathrm{P}(Y=k) + k\,\mathrm{P}(Y=k)$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. La série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{n^{k-2}}{(k-2!}$ converge et:

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{n^{k-2}}{(k-2)!} = e^n$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}(\frac{1-p}{e})^n n^2 e^n = \sum_{n\geqslant 1} n^2(1-p)^n$ converge, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-p)^n = f_2(1-p)$$

D'après la question 9,

$$\begin{aligned}f_2(x) &= \frac{P_2(x)}{(1-x)^3}\\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

donc:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n(1-p)^n = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}$$

Le théorème sur la sommabilité d'une famille double de réels positifs nous peremt d'affirmer que

$$\sum_{k\geqslant 2}k(k-1)\,\mathrm{P}(Y=k) = \sum_{k\geqslant 2}\frac{p}{(1-p)(k-2)!}\sum_{n=1}^{+\infty}n^k(\frac{1-p}{e})^n$$

est convergente et la somme est donnée par:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)(k-2)!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k (\frac{1-p}{e})^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{1-p} (\frac{1-p}{e})^n n^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \frac{p}{(1-p)} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1-p)^n \\ &= \frac{2-p}{p^2}\end{aligned}$$

On a donc montré que Y^2 admet une espérance et

$$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{2-p}{p^2} + \frac{1}{p}$$

On peut conclure que Y admet une variance et

$$\begin{aligned}\sigma^2(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 \\ &= \frac{2-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned}A_n &= (X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} + \cdots + X_{2n} = n) \\ A_n &= (X_1 + \cdots + X_n = n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})) \\ &= \bigcup_{k \in [\![0,n]\!]} (X_1 + \cdots + X_n = k) \cap (X_{n+1} + \cdots + X_{2n} = n-k)\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_n) &= \mathrm{P}(\bigcup_{k \in [\![0,n]\!]} (X_1 + \cdots + X_n = k) \cap (X_{n+1} + \cdots + X_{2n} = n-k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}((X_1 + \cdots + X_n = k) \cap (X_{n+1} + \cdots + X_{2n} = n-k)) \\ &\qquad \text{(les évènements sont deux à deux incompatibles)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_n = k)\, \mathrm{P}(X_{n+1} + \cdots + X_{2n} = n-k) \\ &\qquad \text{(les VA } X_1 + \cdots + X_n \text{ et } X_{n+1} + \cdots + X_{2n} \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_n = k)\, \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_n = n-k) \\ &\qquad \text{(les VA } X_1 + \cdots + X_n \text{ et } X_{n+1} + \cdots + X_{2n} \text{ ont même loi)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k \\ &= p^n (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\end{aligned}$$

J'ai essayé ici de suivre l'indication de l'énoncé: "Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$"; en fait je pense qu'il faut lire : "Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_{2n}$". Dans ce cas la réponse est directe puisque cette VA suit une loi binomiale:

$$A_n = (X_1 + \cdots + X_{2n} = n)$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_n) &= \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{2n} = n)\\ &= p^n(1-p)^n\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

Au passage on a démontré en comparant les deux résultats l'égalité:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

35.

Soit $1 \leqslant n < m$. Si l'évènement B_m est réalisé, « à l'issue des $2m$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces », alors à l'issue des $2n$ premiers lancers, il ne peut y avoir autant de piles que de faces et B_n n'est pas réalisé. $B_n \cap B_m = \varnothing$.

36.

$$C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

est un évènement en tant que réunion dénombrable d'évènements, et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(B_n) \qquad \text{(les évènements } B_n \text{ sont deux à deux incompatibles)}\end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_n) &= \mathrm{P}\Big(A_n \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) \qquad \Big(A_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big)\\ &= \mathrm{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_n \cap B_k\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_n \cap B_k) \qquad \text{(les } B_k \text{ sont deux à deux incompatibles)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_n \mid B_k)\,\mathrm{P}(B_k)\end{aligned}$$

Soit $k < n$. Sachant l'évènement B_k réalisé, « à l'issue des $2k$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces », dire que A_n est réalisé revient à dire qu'il y a autant de piles que de faces au cours des $2(n-k)$ lancers $2k+1, 2k+2, \dots, 2n$; or les VA $X_{2k+1}, \dots, X_{2n}$ ayant même lois que $X_1, \dots, X_{2(n-k)}$, la probabilité est $\mathrm{P}(A_n \mid B_k) = \mathrm{P}(A_{n-k})$. Cela reste vrai pour $k = n$.

$$\mathrm{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_{n-k})\,\mathrm{P}(B_k)$$

38.

La formule est vraie pour $n = 1$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}(B_k) = \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} p^k (1-p)^k$$

On a:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}(B_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k)\,\mathrm{P}(A_{n+1-k}) \\
\Leftrightarrow\; & p^{n+1}(1-p)^{n+1}\binom{2n+2}{n+1} = \mathrm{P}(B_{n+1}) + p^{n+1}(1-p)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}\binom{2n-2(k-1)}{n-(k-1)} \\
\Leftrightarrow\; & p^{n+1}(1-p)^{n+1}\binom{2n+2}{n+1} = \mathrm{P}(B_{n+1}) + p^{n+1}(1-p)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} \\
\Leftrightarrow\; & p^{n+1}(1-p)^{n+1}\binom{2n+2}{n+1} = \mathrm{P}(B_{n+1}) + 2p^{n+1}(1-p)^{n+1}\left[\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right] \\
\Leftrightarrow\; & \mathrm{P}(B_{n+1}) = p^{n+1}(1-p)^{n+1}\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$ (on a utilisé la question 19 pour la troisième étape).

39.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(C) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(B_n) \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2(n-1)}{n-1}\frac{(p(1-p))^n}{n} \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{(p(1-p))^{n+1}}{n+1} \\
&= 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}
\end{aligned}$$

On peut en effet utiliser la question 17 car $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

40.

On sait déjà que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$ converge (vers $\frac{\mathrm{P}(C)}{2}$). Cela montre que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ converge normalement sur le segment $[0, \frac{1}{4}]$; en effet:

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{4}]}\left|\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\right| = \binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$$

La série de fonctions converge donc ausi uniformément sur $[0, \frac{1}{4}]$, et la somme est continue sur ce segment, i.e. on peut intervertir les symboles lim et Σ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(C) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{(n+1)4^{n+1}} \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \\
&= 2\lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \\
&= \lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}} 1-\sqrt{1-4x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Il est donc certain qu'à un moment ou à un autre, on aura obtenu autant de piles que de faces.