

CONCOURS CENTRALE SUPELEC 2023
MATHÉMATIQUES 1 - MP

Pierre-Paul TACHER

This document is published under the [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International license](#). 

1.

Il est clair que E_a est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$, donc c'est un endomorphisme. De plus $E_a \circ E_{-a} = E_{-a} \circ E_a = I$ montre que E_a est bijectif et $(E_a)^{-1} = E_{-a}$.

2.

J est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$. On peut expliciter J . Soit $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, $a_n \neq 0$.

$$\begin{aligned} Jp &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} [(X+1)^{i+1} - X^{i+1}] \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} \left[(X+1-X) \left(\sum_{j=0}^i (X+1)^j X^{i-j} \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} \left(\sum_{j=0}^i (X+1)^j X^{i-j} \right) \end{aligned}$$

On a $\deg(X+1)^j X^{i-j} = i$, de coefficient dominant 1, donc Jp est de degré n , de coefficient dominant $a_n \frac{n+1}{n+1} = a_n$

3.

Puisque J conserve le degré, $(JX^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc une base de $\mathbb{K}[X]$. Ce la montre que J est bijectif.

4.

Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto e^{-t} t^k \end{aligned}$$

est C^0 par morceaux et $e^{-t} t^k \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ montre que la fonction est intégrable en $+\infty$.

Soit $X > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-t} t^k dt &= \left[e^{-t} \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^X + \int_0^X e^{-t} \frac{t^{k+1}}{k+1} dt \\ &= \underbrace{e^{-X} \frac{X^{k+1}}{k+1}}_{\xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0} + \int_0^X e^{-t} \frac{t^{k+1}}{k+1} dt \end{aligned}$$

En faisant tendre $X \rightarrow +\infty$, on a

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt = \frac{1}{k+1} I_{k+1}$$

montre par une récurrence immédiate que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt = k!$$

5.

On peut expliciter l'action de L sur la base canonique

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{K}, \quad LX^n(x) &= -n \int_0^{+\infty} e^{-t} (x+t)^{n-1} dt \\ &= -n \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i x^{n-1-i} \right) dt \\ &= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^i dt \\ &= -n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n-1-i} i! \\ &= -n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!} x^{n-1-i} \\ &= -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} \end{aligned} \tag{1}$$

montre que $LX^n = -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} X^{i1}$ puis par linéarité

$$Lp = \sum_{i=0}^n a_i LX^i \in \mathbb{K}[X]$$

est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. L n'est pas inversible puisque $\mathbb{K} \subset \ker L$ (\mathbb{K} désignant l'espace vectoriel des polynômes constants).

6.

$$\begin{aligned} (I \circ E_a)(P) &= I(P(X+a)) \\ &= P(X+a) \\ &= E_a(P) \\ &= E_a(I(P)) \\ &= (E_a \circ I)(P) \end{aligned}$$

¹L'expression a bien un sens pour $n = 0$ en prenant la convention qu'une somme sans termes vaut 0.

$$\begin{aligned}
(D \circ E_a)(P) &= D(P(X + a)) \\
&= 1 \times P'(X + a) \\
&= P'(X + a) \\
&= E_a(P') \\
&= E_a(D(P)) \\
&= (E_a \circ D)(P)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_b \circ E_a)(P) &= E_b(P(X + a)) \\
&= P((X + b) + a) \\
&= P(X + a + b) \\
&= P((X + a) + b) \\
&= E_a(P(X + b)) \\
&= E_a(E_b(P)) \\
&= (E_a \circ E_b)(P)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_b \circ E_a)(P) &= E_b(P(X + a)) \\
&= P((X + b) + a) \\
&= P(X + a + b) \\
&= P((X + a) + b) \\
&= E_a(P(X + b)) \\
&= E_a(E_b(P)) \\
&= (E_a \circ E_b)(P)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad (E_a \circ J)P(x) &= E_a(JP)(x) \\
&= \int_{x+a}^{x+a+1} p(t) \, dt \\
&= \int_x^{x+1} p(u+a) \, du \quad (\text{changement de variable } u = t - a) \\
&= J(P(X + a))(x) \\
&= (J \circ E_a)P(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_a \circ L)X^n &= E_a\left(-n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!}\right) \\
&= -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(X + a)^i}{i!} \\
&= -n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{(n-j)!} a^{n-j} \\
&= -n! \sum_{j=0}^n \frac{1}{(n-j)!} a^{n-j} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X^i}{i!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} (-j!) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X^i}{i!} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (LX^j) a^{n-j} \\
&= L \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j a^{n-j} \right) \\
&= L(X + a)^n \\
&= L(E_a X^n)
\end{aligned}$$

I, J, E_a conserve le degré donc ne sont pas delta. Par contre L et D le sont puisque $LX = -1$ et $DX = 1$.

7.

On a I est shift invariant. Soit T_1, T_2 shift invariants, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
E_a \circ (\lambda T_1 + T_2) &= \lambda E_a \circ T_1 + E_a \circ T_2 \\
&= \lambda T_1 \circ E_a + T_2 \circ E_a \\
&= (\lambda T_1 + T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

donc $\lambda T_1 + T_2$ est shift invariant. Puis:

$$\begin{aligned}
E_a \circ (T_1 \circ T_2) &= (E_a \circ T_1) \circ T_2 \\
&= (T_1 \circ E_a) \circ T_2 \\
&= T_1 \circ (E_a \circ T_2) \\
&= T_1 \circ (T_2 \circ E_a) \\
&= (T_1 \circ T_2) \circ E_a
\end{aligned}$$

et $T_1 \circ T_2$ est shift invariant. Les endomorphismes shift invariants constituent bien une sous algèbre.

Par contre les endomorphismes delta ne sont stables ni par addition, ni par composition comme le montre

$$LDX = L1 = 0$$

et

$$(L + D)X = 0$$

8.

Soit $\deg p = d \in \llbracket -1, +\infty \rrbracket$. On a $\forall k \geq d + 1, D^k p = 0$, de sorte que la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p = \sum_{k=0}^d a_k D^k p$$

a bien un sens et définit bien un polynôme en tant que somme (finie) de polynômes.

9.

Les endomorphismes shift invariants formant une algèbre, et D étant shift invariant, il est direct que

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{K}[X], \quad (E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k) p &= (E_a \circ \sum_{k=0}^d a_k D^k) p \\ &= (\sum_{k=0}^d a_k D^k \circ E_a) p \end{aligned}$$

Donc $E_a \circ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k \circ E_a$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$ est shift invariant.

10.

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} k!a_k &= (\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k) X^k(0) \\ &= (\sum_{k=0}^{+\infty} b_k D^k) X^k(0) \\ &= k!b_k \end{aligned}$$

11.

On remarque que

$$\begin{aligned} D^k q_j(0) &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \\ &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

Posons $\tilde{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0) D^k$. On voit déjà que

$$\begin{aligned} \tilde{T}q_k(0) &= (\sum_{j=0}^k Tq_j(0) D^j q_k)(0) \\ &= Tq_k(0) D^k q_k(0) \\ &= Tq_k(0) \end{aligned}$$

Les polynômes Tq_k et $\tilde{T}q_k$ coïncident en 0.

De plus les q_k forment une base de $\mathbb{K}[X]$; tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit

$$p = \sum_{k=0}^d p^{(k)}(0) q_k$$

Cela montre que Tp et $\tilde{T}p$ coïncident en 0.

Supposons T shift invariant. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
 Tq_k(x) &= E_x(Tq_k)(0) \\
 &= ((E_x \circ T)q_k)(0) \\
 &= ((T \circ E_x)q_k)(0) \\
 &= T(E_xq_k)(0) \\
 &= \tilde{T}(E_xq_k)(0) \\
 &= ((\tilde{T} \circ E_x)q_k)(0) \\
 &= ((E_x \circ \tilde{T})q_k)(0) \quad (\tilde{T} \text{ est shift invariant}) \\
 &= E_x(\tilde{T}q_k)(0) \\
 &= \tilde{T}q_k(x)
 \end{aligned}$$

Cela montre que Tq_k et $\tilde{T}q_k$ coïncident, puis par linéarité, $Tp = \tilde{T}p$, $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, i.e. $T = \tilde{T}$.

Réciproquement, si $T = \sum_{k=0}^{+\infty} Tq_k(0)D^k$, T est shift invariant d'après la question 9.

12.

soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré d . soit T_1, T_2 deux endomorphismes shift invariants.

$$\begin{aligned}
 (T_1 \circ T_2)p &= \left(\sum_{i=0}^d T_1q_i(0)D^i \circ \sum_{j=0}^d T_2q_j(0)D^j \right)p \\
 &= \left(\sum_{j=0}^d T_2q_j(0)D^j \circ \sum_{i=0}^d T_1q_i(0)D^i \right)p \\
 &= (T_2 \circ T_1)p
 \end{aligned}$$

car deux polynômes de l'endomorphisme D commutent.

13.

E_a est shift invariant, on peut écrire d'après 11:

$$\begin{aligned}
 E_a &= \sum_{k=0}^{+\infty} E_aq_k(0)D^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (X+a)^k(0)D^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k
 \end{aligned}$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned}
 \forall p \in \mathbb{K}[X], \quad p(X+a) &= E_ap \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} D^k p \\
 &= \sum_{k=0}^d \frac{a^k}{k!} D^k p \\
 &= \sum_{k=0}^d \frac{a^k}{k!} p^{(k)}
 \end{aligned}$$

On retrouve la formule de Taylor.

14.

soit q un polynôme obtenu par intégration à partir de p :

$$q = \sum_{i=0}^d \frac{a_i}{i+1} X^{i+1}$$

On a

$$\begin{aligned} Jp &= E_1 q - q \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k q \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^{k-1} Dq \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^{k-1} p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} D^k p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} p^{(k)} \end{aligned}$$

15.

On peut s'inspirer de $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$, pour $x \in \mathbb{C}$. soit $p \in \mathbb{K}[X]$, de degré d .

$$\begin{aligned} (D-I) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} D^k \right) p &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} D^k \right) \circ (D-I) p \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} D^k \right) (p' - p) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{d-1} D^k \right) p' - \left(\sum_{k=0}^d D^k \right) p \\ &= -p \end{aligned}$$

ce qui montre que $D-I$ est inversible et

$$(D-I)^{-1} = - \sum_{k=0}^{+\infty} D^k$$

L'égalité 1 s'écrit

$$\begin{aligned} Lq_n &= - \sum_{i=0}^{n-1} q_i \\ \Rightarrow Lq_n(0) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$L = - \sum_{k=1}^{+\infty} D^k$$

Et on a

$$(D - I)^{-1} = -D + L$$

16.

D'après 11, posons $T = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k$

$$\begin{aligned} Tp &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k p^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^d a_k p^{(k)} \end{aligned}$$

Comme $T \neq 0$, posons $n(T) = \min\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$. On a alors:

$$Tp = \sum_{k=n(T)}^d a_k p^{(k)}$$

Cela montre que le degré de Tp est celui de $p^{(n(T))}$, i.e.:

$$\deg Tp = \begin{cases} -1 & \text{si } p^{(n(T))} = 0 \\ d - n(T) & \text{si } p^{(n(T))} \neq 0 \Leftrightarrow d \geq n(T) \end{cases}$$

Autrement dit

$$\deg Tp = \max\{-1, \deg p - n(T)\}$$

17.

On a donc:

$$\begin{aligned} Tp = 0 &\Leftrightarrow \deg Tp = -1 \\ &\Leftrightarrow \deg p < n(T) \\ &\Leftrightarrow p \in \mathbb{K}_{\max\{n(T)-1, 0\}}[X] \end{aligned}$$

18.

(1) \Rightarrow (2) est immédiat.

Supposons $T1 \neq 0$. $T1 = Tq_0$, ce qui montre que $n(T) = \min\{k \in \mathbb{N}, Tq_k(0) \neq 0\} = 0$. Ainsi $\det Tp = \max\{-1, \deg p\} = \deg p$ et on a (2) \Rightarrow (3).

Si $\forall p \in \mathbb{K}[X]$, $\deg Tp = \deg p$, alors $(T(q_i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{K}[X]$, donc une base et T inversible. (3) \Rightarrow (1).

19.

$$\begin{aligned}
E_a \circ T = T \circ E_a &\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T = T^{-1} \circ T \circ E_a \\
&\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T = E_a \\
&\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a \circ T \circ T^{-1} = E_a \circ T^{-1} \\
&\Leftrightarrow T^{-1} \circ E_a = E_a \circ T^{-1}
\end{aligned}$$

20.

T est shift invariant donc $\exists(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $T = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k D^k$. Ainsi $TX = \alpha_0 X + \alpha_1$ et comme c'est une constante non nulle, on a bien $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

21.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^k = D \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D^{k-1} \\
&= D \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+1} D^k}_{=U}
\end{aligned}$$

or U est shift invariant d'après 11, et inversible d'après 18 car $T1 = \alpha_1 \neq 0$. Ce qui démontre l'existence.

Si $\tilde{U} = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{\alpha}_k D^k$ vérifie $T = D \circ \tilde{U}$, alors nécessairement $\tilde{\alpha}_k = \alpha_{k+1}$ vu l'unicité de l'écriture de la question 11. L'unicité est prouvée.

Dans le cas $T = D$, $U = I$ et dans le cas $T = L$, $U = (D - I)^{-1}$.

22.

d'après 16 et 20, $n(T) = 1$ et $\deg Tp = \deg p - 1$ si $p \neq 0$.

$$\begin{aligned}
p \in \ker T &\Leftrightarrow \deg Tp = -1 \\
&\Leftrightarrow p \in \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}
\end{aligned}$$

Si $p \neq 0$, l'égalité $Tp = \lambda p$ n'est possible pour des raisons de degré que si $\lambda = 0$. donc $\text{sp}(T) = \{0\}$.

23.

T_n est une application linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X]$, donc il s'agit bien d'un endomorphisme.

T n'est pas nul si $n \geq 1$ car $TX \neq 0$, donc n'est pas diagonalisable car le seul endomorphisme diagonalisable dont la seule valeur propre est 0 est l'endomorphisme nul.

Par ailleurs la restriction de T à $\mathbb{K}_0[X]$ est nulle, donc diagonalisable.

24.

Si $n \geq 1$, on sait déjà que $\text{Im}(T_n) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Puis comme $\dim(\ker T_n) = \dim \mathbb{K}_0[X] = 1$, le théorème du rang nous dit que $\dim(\text{Im}(T_n)) = \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(\ker T_n) = n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$ et donc on a l'égalité $\text{Im}(T_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \text{Im}(T_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ &= \mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

et T est surjective.