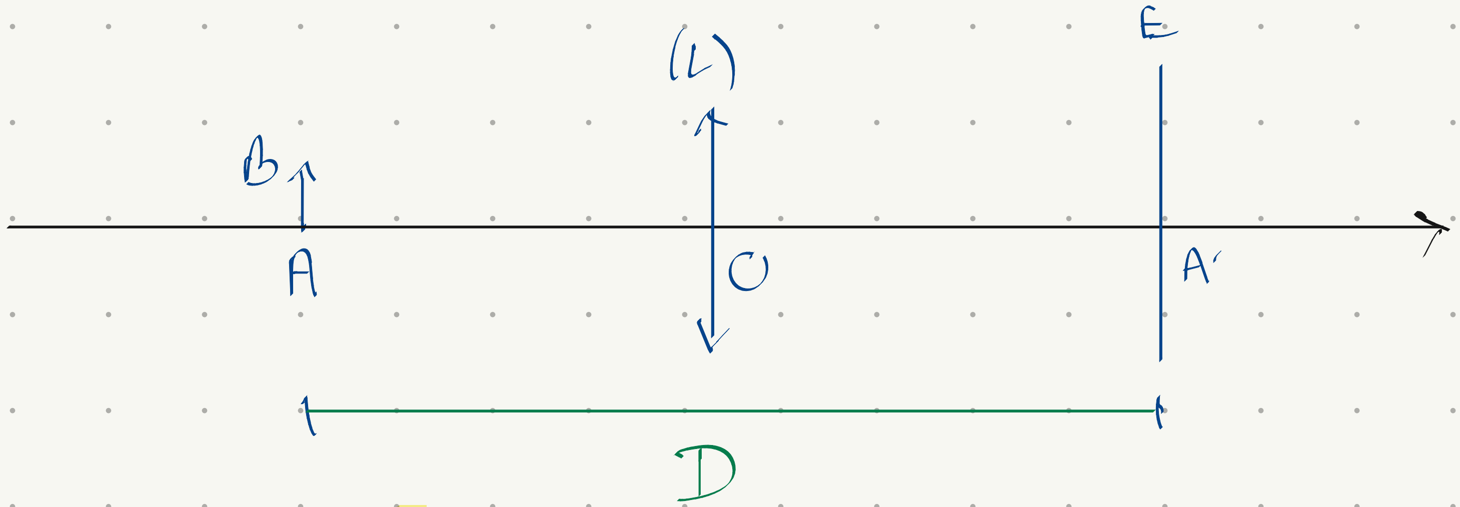
Méthode de Bessel : démonstration de la formule



La distance D entre l'objet et l'écran est fixée et on cherche dans un premier temps les positions possibles de la lentille permettant d'avoir une image sur l'écran.

Donc $D = \overline{AA'}$ (l'image A' est sur l'écran)

D'après la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On peut utiliser D pour exprimer $\overline{OA}$ en fonction de $\overline{OA'}$:

$$\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{A'A} \quad \text{(comme du Chasles avec des vecteurs)}$$
$$= \overline{OA'} - D$$

On remplace dans la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA'} - D} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA'} - D - \overline{OA'}}{\overline{OA'} \times (\overline{OA'} - D)} = \frac{1}{f'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{OA'}^2 - \overline{OA'} \times D}{-D} = f' \Leftrightarrow \overline{OA'}^2 - \overline{OA'} \times D + f' \times D = 0$$

On obtient donc une équation du second degré en $\overline{OA'}$. Si le discriminant Δ est > 0, il y aura bien 2 solutions comme attendu.

$$\Delta = D^2 - 4 \times f' \times D$$

Pour que $\Delta > 0$, il faut $D^2 > 4f'D$, soit $D > 4f'$, ce qui était bien la condition expérimentale pour pouvoir appliquer la méthode.

Les solutions sont alors $\overline{OA'_1} = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\overline{OA'_2} = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{2}$

Exprimons maintenant la distance d entre les deux solutions de l'équation : $d = \overline{OA'_1} - \overline{OA'_2}$

$$d = \sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4f'D}$$

$$\Rightarrow d^2 = D^2 - 4f'D$$

Isolons f' : $-4f'D = d^2 - D^2$

$$\Leftrightarrow f' = \frac{d^2 - D^2}{-4D}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$$

cqfd