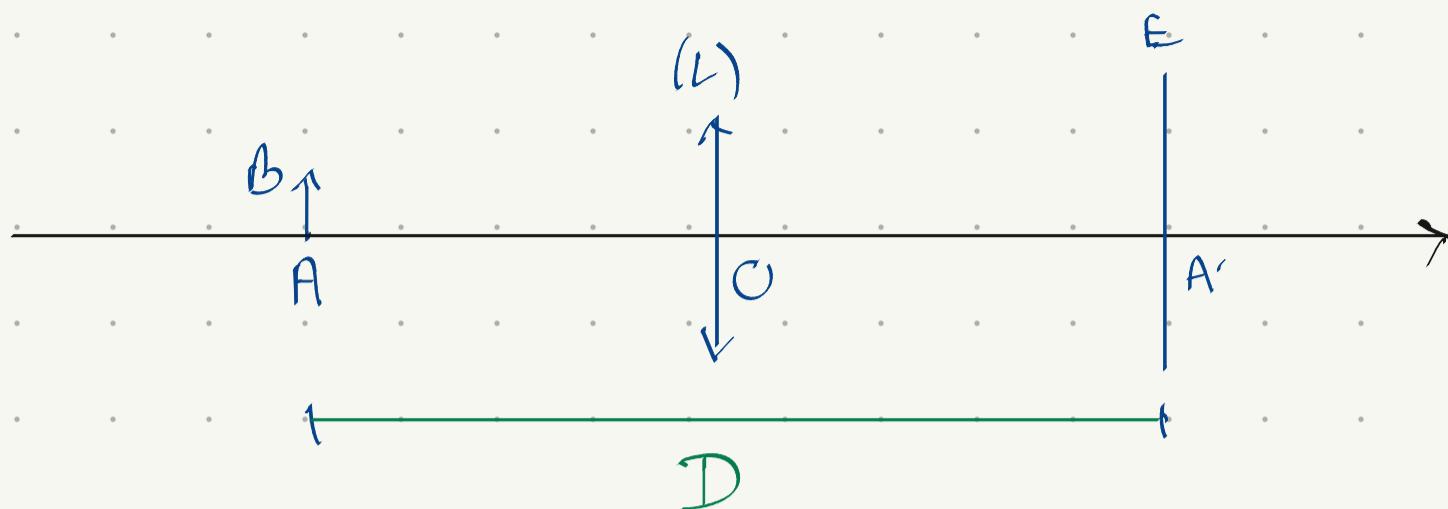


Méthode de Bessel : démonstration de la formule



La distance D entre l'objet et l'écran est fixée et on cherche dans un premier temps les positions possibles de la lentille permettant d'avoir une image sur l'écran.

$$\text{Donc } D = \overline{AA'} \quad (\text{l'image } A' \text{ est sur l'écran})$$

D'après la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f}$$

On peut utiliser D pour exprimer \overline{OA} en fonction de $\overline{OA'}$:

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OA'} + \overline{A'A} \quad (\text{comme du Chasles avec des vecteurs}) \\ &= \overline{OA'} - D \end{aligned}$$

On remplace dans la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA'} - D} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow \frac{\overline{OA'} - D - \overline{OA'}}{\overline{OA'} \times (\overline{OA'} - D)} = \frac{1}{f}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{OA'}^2 - \overline{OA'} \times D}{-D} = f \Leftrightarrow \overline{OA'}^2 - \overline{OA'} \times D + f \times D = 0$$

On obtient donc une équation du second degré en $\overline{OA'}$. Si le discriminant Δ est > 0 , il y aura bien 2 solutions comme attendu.

$$\Delta = D^2 - 4 \times f' \times D$$

Pour que $\Delta > 0$, il faut $D^2 > 4f'D$, soit $D > 4f'$, ce qui était bien la condition expérimentale pour pouvoir appliquer la méthode.

Les solutions sont alors $\overline{O_1 A'} = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\overline{O_2 A'} = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{2}$

Exprimons maintenant la distance d entre les 2 positions correspondantes de la feuille: $d = \overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 A'} + \overline{A' O_2} = \overline{O_1 A'} - \overline{O_2 A'}$

$$d = \sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4f'D}$$

$$\Rightarrow d^2 = D^2 - 4f'D$$

Isolons f' : $-4f'D = d^2 - D^2$

$$\Leftrightarrow f' = \frac{d^2 - D^2}{-4D}$$

$$\Leftrightarrow f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

cqd