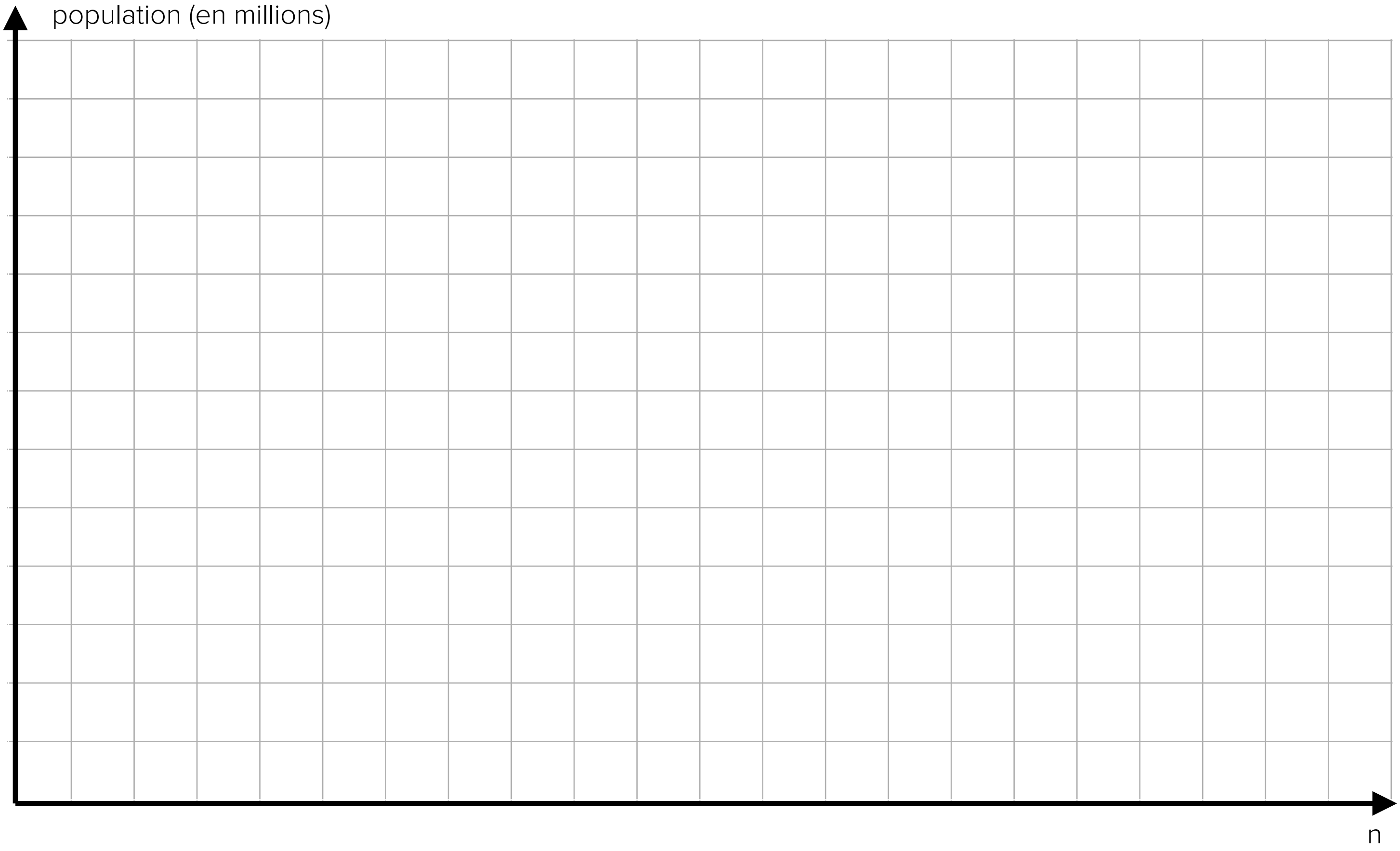
TES	AU-DELÀ DU MODÈLE DE MALTHUS	Activité

Les tableaux ci-dessous donnent l'effectif de la population du Japon (exprimée en million), par paliers de 5 ans, de 1900 à 2010 :

n (nombre d'années écoulées depuis 1900)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
effectif de la population à l'année 1900+n	44,8	47	50,7	53,4	55,9	59,7	64,5	69,3	73,1	72,4	83,6	87,9	92,5	98,8	104,7	111,9	116,8	120,8	123,5	125,6	126,9	127,4	128,6

1. Représenter le nuage de points associé à ce tableau.



2. Comment peut-on expliquer la baisse de la population de 1940 à 1945.
3. On décide de modéliser la population entre 1950 et 1980 par les 31 premiers termes d'une suite géométrique (v_n) vérifiant $v_0 = 83{,}6$ et $v_{30} = 116{,}8$.
   3.a. Calculer la raison de cette suite.
   3.b. Utiliser ce modèle pour estimer la population du Japon en 1973.
4. Ce modèle semble-t-il pertinent pour estimer la population du Japon entre 1980 et 2010 ?

Deux mathématiciens belges du XIXe siècle, Adolphe Quételet et Pierre-François Verhulst, ont interrogé le modèle de Malthus.
Le texte ci-dessous est dû à Adolphe Quételet :

> « Il paraît incontestable que la population croîtrait selon une progression géométrique, s'il ne se présentait aucun obstacle à son développement. Les moyens de subsistance ne se développent point aussi rapidement, et, selon Malthus, dans les circonstances les plus favorables à l'industrie, ils ne peuvent jamais augmenter plus vite que selon une progression arithmétique. Le grand obstacle à la population est donc le manque de nourriture, provenant de la différence des rapports que suivent ces deux quantités dans leurs accroissements respectifs. Quand une population, dans son développement, est parvenue au niveau de ses moyens de subsistance, elle doit s'arrêter à cette limite par la prévoyance des hommes ; ou si elle a le malheur de la franchir, elle s'y trouve forcément ramenée par un excès de mortalité.
>
> Les obstacles à la population peuvent donc être rangés sous deux chefs. Les uns agissent en prévenant l'accroissement de la population, et les autres en la détruisant à mesure qu'elle se forme. La somme des premiers compose ce que l'on peut appeler l'obstacle privatif ; celle des seconds l'obstacle destructif… »

Suite logistique :

Pierre François Verhulst, mathématicien belge, considère que la population peut se développer sans contrainte conformément au modèle de Malthus pendant une courte période d'explosion démographique et suivre ainsi une croissance géométrique.

Mais les ressources n'étant pas inépuisables, la croissance de la population sera ensuite freinée et limitée. Verhulst teste plusieurs modèles dont le plus simple consiste à rajouter un facteur retardateur du type $a \times (u(n) - b)$ au modèle de Malthus, ce qui donne :
$\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)} = r - a \times (u(n) - b)$ une telle suite s'appelle **suite logistique**.
r est le taux de croissance, b est l'effectif de la population (dite normale) au moment du « décrochage » de l'hypothèse de Malthus, a est un réel positif appelé coefficient retardateur.

5. D'après Quételet, comment finit par évoluer une population ? Par quels mécanismes ? L'évolution actuelle de la population de Japon lui donne-t-il raison ?
6. Vers quel effectif évolue une population initiale de 100 personnes modélisée par une suite logistique avec un taux de croissance de $r = 2\,\%$, $a = 0.0001$ et $b = 300$.

Remarque : on peut réécrire la définition de la suite logistique comme $\dfrac{u(n+1) - u(n)}{u(n)} = r' \left(\dfrac{K - u(n)}{K} \right)$
où K est appelée capacité porteuse (ou capacité d'accueil) correspondant à la taille maximale de la population qu'un milieu donné peut supporté.