Licenciatura em Engenharia Informática
ÁLGEBRA LINEAR 2022/2023
Teórico-Prática 1. Matrizes

1. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, calcule:

   a) $A + B$;

   b) $A \times B$;

   c) $A^2 + 2A\frac{1}{2}B$;

   d) $A - B$;

   e) $B \times B^T + A + 3I_3$;

   f) $(A + B)^2$;

   g) $A(B + B^T)$;

   h) $(A - I)^2$.

2. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, mostre que:

   a) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

   b) $(AB)^T = B^T A^T$.

3. Considere as matrizes A, B e C dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Calcule, quando possível, AC, BC^T e $C^T B$.

4. Mostre que a expressão $Y = X^2 + 5X + 2I$ se anula para $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ -2 & b & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Sendo $C = AA^T$, determine os valores de a e b para que se obtenha $c_{13} = 2$ e $c_{32} = 0$.

6. Deduza A^n , sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações:

   a) $(-A)^T = -(A^T)$;

   b) $(AB)^2 = A^2 B^2$.

8. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determine, caso exista, uma matriz X que verifique a equação $XA = B$.

9. Sejam $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Quais das seguintes operações são possíveis?
$$A + B, \quad A \times B, \quad B \times C, \quad 2A, \quad B - 5A^T.$$

10. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \\ y & -1 \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$:
    a) Determine para que valores de $x, y \in \mathbb{R}$ a matriz $A \times B$ é simétrica;
    b) Mostre que quaisquer que sejam os valores de $x, y \in \mathbb{R}$, a matriz $B \times A$ não é simétrica.

11. Considere as matrizes A e B definidas por: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
    a) As matrizes A e B são permutáveis? Justifique.
    b) Calcule $A^2 + 2AB$ e $A^2 + 2BA$. Comente o resultado.

12. Considere as matrizes $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Caso existam, indique para que valores de a, b e c as matrizes M e X comutam.

13. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é **nilpotente** com **índice de nilpotência** k, com $k > 1$ um número inteiro, se se tem $A^{k-1} \neq 0_{n\times n}$ e $A^k = 0_{n\times n}$.
    a) Verifique se a matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é nilpotente e, no caso de o ser, indique o índice de nilpotência.
    b) Calcule $X\left(B^2 - \left(B^T\right)^2\right)X^T$, onde $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Diga, justificando, qual o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes:
    a) Sejam $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então existe a matriz $B^T D A^T + C$ e é uma matriz quadrada de ordem 2.
    b) Sejam $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então A e B são matrizes permutáveis se e só se A for da forma $\begin{bmatrix} x+y & 2x \\ x & y \end{bmatrix}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. a) $A+B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \\ -2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

   b) $A\times B=\begin{pmatrix} -3 & -6 & 4 \\ 3 & 14 & 8 \\ -2 & 6 & 20 \end{pmatrix}$

   c) $A^2+2A\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 2 & 18 & 13 \\ -6 & 7 & 29 \end{pmatrix}$

   d) $A-B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

   e) $B\times B^T+A+3I_3=\begin{pmatrix} 21 & -3 & 33 \\ -2 & 45 & 11 \\ 32 & 10 & 75 \end{pmatrix}$

   f) $(A+B)^2=\begin{pmatrix} -10 & 0 & 43 \\ 14 & 64 & 27 \\ -18 & 40 & 115 \end{pmatrix}$

   g) $A(B+B^T)=\begin{pmatrix} -4 & -10 & 1 \\ 7 & 26 & 20 \\ 11 & 4 & 45 \end{pmatrix}$

   h) $(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $AC=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; $BC^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; Não é possível calcular C^TB.

5. $a=-3$ e $b=\frac{-3}{2}$.

6. $A^n=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. V, F.

8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. AB, $2A$ e $B-5A^T$.

10. a) $x,y\in\mathbb{R}: x=y+1$.

11. a) Não, pois $AB\neq BA$: $AB=\begin{bmatrix} 13 & -7 & 14 \\ -3 & -5 & -5 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ e $BA=\begin{bmatrix} -2 & 5 & 14 \\ 3 & 3 & 2 \\ 7 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

    b) $A^2+2AB=\begin{bmatrix} 37 & 0 & 30 \\ -6 & -11 & -6 \\ 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $A^2+2BA=\begin{bmatrix} 7 & 24 & 30 \\ 6 & 5 & 8 \\ 18 & 27 & 16 \end{bmatrix}$

12. $a=c$

13. a) B é nilpotente de ordem 4.

    b) $[0]$.

14. a) Verdadeira. b) Verdadeira.

Referências

Viamonte, A. J., *Sebenta de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Publicação de apoio à unidade curricular, Departamento de Matemática, ISEP, 2011.

Matos, J., *Sebenta de ALGAN*, Publicação de apoio à unidade curricular, Departamento de Matemática, ISEP, 2017.