ÁLGEBRA LINEAR

1. Matrizes

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2022/2023

Referências:

Viamonte, A. J., *Sebenta de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Departamento de Matemática, ISEP, 2011.

Matos, J., *Sebenta de ALGAN, Publicação de apoio à unidade curricular*, Departamento de Matemática, ISEP, 2017.

Definição e representação

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Designa-se por matriz do tipo $m \times n$ (e lê-se *m por n*) sobre o corpo $\mathbb{K}$, a um quadro em que mn elementos de $\mathbb{K}$ se dispõem em m filas horizontais, chamadas linhas, e n filas verticais, chamadas colunas.

Representa-se por $A = [a_{ij}]$, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Representa-se o elemento da linha i e da coluna j de A por a_{ij}.
Neste curso iremos trabalhar sobre o corpo dos números reais, $\mathbb{R}$.
Denota-se por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

Algumas matrizes particulares

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- Se $m \neq n$ diz-se que A é uma matriz retangular do tipo $m \times n$.
- Se $m = n$ diz-se que A é uma matriz quadrada de ordem n.
- Diz-se que A é uma matriz coluna se só tem uma coluna, isto é, se $n = 1$.
- Diz-se que A é uma matriz linha se só tem uma linha, isto é, se $m = 1$.

Exemplos

- A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & \sqrt{5} \\ 0 & -1 & \pi & 2/3 \\ \sqrt{2} & e & 0 & -2/5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

- A é uma matriz retangular de tipo 3×4.

- $a_{23} = \pi$; $a_{14} = \sqrt{5}$; $a_{33} = 0$.

- $l_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \pi & 2/3 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha.

- $c_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

- Designam-se por elementos principais da matriz A os elementos a_{ii}, com $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Chama-se diagonal principal (ou diagonal) de A a $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
- Chama-se diagonal secundária a $(a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1})$.
- Diz-se que A é uma matriz diagonal se $a_{ij} = 0$, para todo o $i \neq j$.
- Diz-se que A é uma matriz triangular superior se os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos.
- Diz-se que A é uma matriz triangular inferior se os elementos acima da diagonal principal são todos nulos.

Exemplos

- Na matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$,

  a diagonal principal é $(1, 1, 1, 1)$

  e a diagonal secundária é $(0, 0, 0, 0)$.

- A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal.

- A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular inferior de ordem 3.

- Diz-se que A é uma matriz nula se todos os elementos da matriz são nulos, isto é, se $a_{ij} = 0$, para todos os i, j. Representa-se esta matriz por $0_{m\times n}$ ou, se não houver ambiguidade relativamente ao tipo da matriz, apenas por 0.

- Diz-se que A é a matriz identidade de ordem n se é uma matriz diagonal de ordem n em que $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$. Representa-se esta matriz por I_n ou, se não houver ambiguidade relativamente à ordem da matriz, apenas por I.

- A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×3, $0_{2\times 3}$.

- A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3, I_3.

Igualdade de matrizes

Um elemento de uma matriz A é homólogo de um elemento de uma matriz B se ele pertence à linha da mesma ordem e à coluna da mesma ordem do elemento da outra matriz.

Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são iguais se e só se os elementos homólogos são iguais, isto é, se $a_{ij} = b_{ij}$, para todos os i, j.

Exemplo

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$ são iguais se e só se $a = 2$ e $a^2 = 4$, isto é, $a = 2$ e $a = \pm 2$, ou seja, $a = 2$.

Matriz transposta e matriz simétrica

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A matriz $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ que se obtém da matriz A trocando ordenadamente as suas linhas pelas suas colunas designa-se matriz transposta da matriz A.

Usualmente, $A \neq A^T$. Uma matriz quadrada A que verifica a condição $A = A^T$ designa-se por matriz simétrica.

Exemplos

- A matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ é a transposta da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica.

Operações com matrizes

Adição de matrizes

Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se soma das matrizes A e B, e representa-se por $A + B$, à matriz $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ onde

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto da matriz A pelo escalar α, e representa-se por αA, à matriz de tipo $m \times n$ tal que

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij}.$$

Observações:

1. A adição de matrizes só está definida se as matrizes forem do mesmo tipo.
2. É sempre possível multiplicar uma matriz por um escalar.

Exemplo

Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

tem-se

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 0 + 2 \\ 2 + 3 & 4 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = B + A$$

e

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 0 \\ 3 \times 2 & 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Propriedades das operações com matrizes

Teorema

A adição de matrizes goza das seguintes propriedades:

1. *Propriedade associativa da adição de matrizes:*

$$\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), A + (B + C) = (A + B) + C.$$

2. *Propriedade comutativa da adição de matrizes:*

$$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), A + B = B + A.$$

3. *Existência de elemento neutro na adição de matrizes:*

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) : A + 0_{m\times n} = A.$$

4. *Existência de elemento oposto na adição de matrizes:*

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) : A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}.$$

Teorema

As operações com matrizes gozam das seguintes propriedades:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$
4. $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), 1A = A.$

Multiplicação de matrizes

Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Chama-se produto da matriz A pela matriz B, e representa-se por AB, à matriz $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ onde

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj},$$

ou seja, a entrada c_{ij} da matriz AB resulta da multiplicação da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B.

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $p \in \mathbb{N}$. Designa-se por p-ésima potência da matriz A, e representa-se por A^p, o produto de A por si própria p vezes, isto é,

$$A^p = \prod_{k=1}^{p} A.$$

Por exemplo, $A^2 = AA$ e $A^3 = AAA = A^2A = AA^2$.

Exemplo

Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, temos

$$AB = \begin{pmatrix} -1 \times 1 + 2 \times (-3) & -1 \times 3 + 2 \times 1 \\ 1 \times 1 - 2 \times (-3) & 1 \times 3 - 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + 4 \times (-3) & 3 \times 3 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 7 & 1 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} B^2 = BB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 3 \times (-3) & 1 \times 3 + 3 \times 1 \\ -3 \times 1 + 1 \times (-3) & -3 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observações:

- Se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, então $(AB)_{ij} = l_{i,A} \times c_{j,B}$.

- Só é possível efetuar o produto de duas matrizes quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

- O produto de matrizes não é comutativo, isto é, de uma forma geral $AB \neq BA$.

Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Em geral, $AB \neq BA$. Nos casos particulares em que $AB = BA$, as matrizes A e B dizem-se permutáveis ou comutáveis.

Exercício

Verifique que $AB \neq BA$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Observações:

- A Lei do Anulamento do Produto não é válida para a multiplicação de matrizes.

Exemplo

A equação matricial $AB = 0_{2\times 2}$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, mostra que é possível que o produto de duas matrizes não nulas seja a matriz nula.

- Em geral, a igualdade $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ não é verificada.

Exercício

Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Verifique que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Propriedades das operações com matrizes

Teorema

A multiplicação de matrizes goza das seguintes propriedades:

- *Propriedade associativa:*

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}), \forall C \in M_{p\times q}(\mathbb{R}), (AB)C = A(BC).$$

- *Distributividade à direita em relação à adição:*

$$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})), (A+B)C = AC + BC.$$

- *Distributividade à esquerda em relação à adição:*

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})), A(B+C) = AB + AC.$$

- *Existência de elemento neutro à direita e existência de elemento neutro à esquerda:*

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), AI_n = I_m A = A.$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}), \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$

Lema

Se A e B são matrizes comutáveis, então verifica-se a igualdade $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Demonstração: Se A e B são matrizes comutáveis, então, por definição, tem-se que $AB = BA$. Assim, tem-se

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Teorema

1. $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), (A^T)^T = A.$
2. $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), (A+B)^T = A^T + B^T.$
3. $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}, (kA)^T = kA^T.$
4. $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}), (AB)^T = B^T A^T.$

Corolário

Resulta de (4) do teorema anterior que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T,$$

isto é, a transposta do produto de um número finito de matrizes é o produto por ordem inversa das transpostas dessas matrizes.

Operações elementares sobre as filas de uma matriz

Designam-se por operações elementares sobre as linhas de uma matriz as seguintes operações:

- A troca de duas linhas da matriz. A troca das linhas l_i e l_j representa-se por $l_i \leftrightarrow l_j$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A substituição de uma linha por um seu múltiplo não nulo, isto é, a multiplicação dos elementos de uma linha por uma constante não nula. A substituição de l_i pela linha que se obtém multiplicando todos os elementos de l_i por um escalar α não nulo representa-se por $l_i \leftarrow \alpha l_i$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overleftrightarrow{l_1 \leftarrow 2l_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha, isto é, a adição, aos elementos de uma linha, dos elementos homólogos de outra linha multiplicada por um escalar qualquer. A substituição de l_i pela linha que se obtém somando os elementos de l_i aos elementos que se obtêm multiplicando por um escalar β os elementos de l_j representa-se por $l_i \leftarrow l_i + \beta l_j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_1 \leftarrow l_1 + 2l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De uma forma análoga definimos as operações elementares sobre as colunas de uma matriz.

Matrizes equivalentes

Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A e B são matrizes equivalentes, e denota-se por $A \sim B$, se se puder obter uma a partir da outra realizando um número finito de operações elementares.

Uma matriz A diz-se em escada (de linhas) se:

- As linhas nulas aparecem abaixo das linhas não nulas;
- A primeira entrada não nula de cada linha (*pivot*), se existir, está numa coluna à direita do *pivot* da linha anterior.

Uma matriz A diz-se em escada reduzida se A for uma matriz em escada em que:

- Os *pivots* são iguais a 1;
- As colunas com *pivot* têm as restantes entradas iguais a 0.

Condensação de matrizes

O método que consiste em realizar um número finito de operações elementares sobre uma matriz A até se obter uma matriz em escada designa-se por condensação da matriz.

Método da condensação de matrizes

1. Procurar a coluna não nula mais à esquerda.
2. Selecionar o *pivot* (primeira entrada não nula) na primeira linha. Se necessário, trocar linhas.
3. Usa-se o pivot para anular todas as entradas abaixo dele, efetuando uma operação tipo 3. Por exemplo, se $a_{ij} = 1$ e $a_{i+1,j} = 2$, efetua-se a operação $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - 2L_i$.
4. Ignorar a linha do *pivot* e todas as linhas acima desta. Aplicar os passos 1-3 à submatriz resultante. Repetir o processo até se obter uma matriz em escada de linhas.

Exemplo

Usando o Método de Condensação de Matrizes, determinamos uma matriz em escada equivalente à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Seja $a_{11} = 1$ o pivot. Usamos operações tipo 3 para anular os elementos da primeira coluna abaixo do pivot:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & -10 & 10 & -20 & -24 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

Todas as entradas abaixo do pivot, nessa coluna, são nulas. Procedemos da mesma forma com o novo pivot $a_{22} = -5$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-5} & 5 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & -10 & 10 & -20 & -24 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz resultante está em escada: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Para determinarmos a matriz em escada reduzida equivalente a esta matriz, multiplica-se cada linha não nula pelo inverso do seu pivot e, em seguida, aplica-se a condensação para cima, da direita para a esquerda, usando os pivots da matriz e anulando somente as entradas das colunas com os pivots.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow \frac{-1}{5} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{14}{5} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Característica de uma matriz

A característica de uma matriz A é igual ao número de linhas não nulas de uma matriz em escada equivalente a A. Denota-se a característica de A por $car(A)$.

Exemplo

A característica da matriz do exercício anterior é 3.

Matriz inversa

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A é uma matriz invertível ou matriz regular se existir uma matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$. Caso contrário, diz-se que A é uma matriz não-invertível ou matriz singular.

Teorema

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Então existe uma e uma só matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$.

Demonstração: Sejam $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$. Vejamos que se tem $X = Y$:

$$
\begin{aligned}
X &= XI_n && \text{elemento neutro da multiplicação de matrizes}\\
&= X(AY) && \text{por hipótese}\\
&= (XA)Y && \text{propriedade associativa do produto de matrizes}\\
&= I_nY && \text{por hipótese}\\
&= Y && \text{elemento neutro da multiplicação de matrizes}
\end{aligned}
$$

Seja A uma matriz invertível de ordem n. Chama-se matriz inversa da matriz A, e representa-se por A^{-1}, à única matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$.

Mais geralmente, seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ é a inversa à esquerda de A se $BA = I_n$. Diz-se que $C \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ é a inversa à direita de A se $AC = I_m$.

Note-se que, se B é a matriz inversa da matriz A, então A é a matriz inversa da matriz B.

Propriedades

Seja A uma matriz de ordem n, invertível. Tem-se:

1. A^{-1} também é uma matriz invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Seja B uma matriz da mesma ordem de A e invertível. Então a matriz AB ainda é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $I_n^{-1} = I_n$.
4. Para todo o $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
5. Para todo o $m \in \mathbb{N}$, A^m é também invertível e tem-se $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.
6. A matriz A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Corolário

Podemos generalizar a Propriedade 2, isto é, a inversa do produto de um número finito de matrizes é o produto das inversas dessas matrizes por ordem inversa:

$$(A_1A_2\ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Como calcular a matriz inversa?

Pela Definição

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Supondo que A é invertível, a sua inversa será a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Com efeito,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a - c & = 1 \\ b - d & = 0 \\ 2a - c & = 0 \\ 2b - d & = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a & = -1 \\ b & = 1 \\ c & = -2 \\ d & = 1 \end{array} \right.$$

Logo a inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Cálculo da matriz inversa pelo Método de Eliminação de Gauss

A inversa de uma matriz A pode ser calculada efetuando operações elementares (sobre as linhas) na matriz $[\ A \vdots I\ ]$ até se obter uma matriz na forma $[\ I \vdots B\ ]$. A matriz B obtida é a inversa da matriz A, isto é, $B = A^{-1}$.

Nota:

Pode ainda optar-se por fazer $[\ I \vdots A\ ] \sim [\ B \vdots I\ ]$ ou, ainda, $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ I \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ A \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B \\ \cdots \\ I \end{bmatrix}$ efetuando, nas últimas duas, operações elementares sobre as colunas.

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xleftrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + 2l_2]{l_1 \leftarrow l_1 - l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[l_3 \leftarrow (-1)l_3]{l_1 \leftarrow l_1 + l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Logo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Teorema

Uma matriz quadrada de ordem n é invertível se e só se a sua característica é n.